Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

# La Fórmula Integral de Frullani

Tesis presentada al

**Colegio de Matemáticas**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Licenciado en Matemáticas**

por

Jhonatan Saúl López Beltran

Asesorado por

Dr. Francisco Javier Mendoza Torres

Puebla Pue.
Junio de 2023

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

# La Fórmula Integral de Frullani

Tesis presentada al

**Colegio de Matemáticas**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Licenciado en Matemáticas**

por

Jhonatan Saúl López Beltran

Asesorado por

Dr. Francisco Javier Mendoza Torres

Puebla Pue.
Junio de 2023

**Título:** La Fórmula Integral de Frullani
**Estudiante:** JHONATAN SAÚL LÓPEZ BELTRAN

COMITÉ

Dr. Gabriel Kantún Montiel
Presidente

Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna
Secretario

Dr. Djordjević Slavisa
Vocal

Vocal

Dr. Francisco Javier Mendoza Torres
Asesor

# Agradecimientos

A mis padres, por su apoyo incondicional, por el cariño recibido, la dedicación y la paciencia con la que todos los días se preocupan por mí. Por inculcarme estos ideales de superación tanto personal como en un futuro profesional; esto será la mejor de las herencias; lo reconozco y lo agradeceré eternamente. Gracias por confiar y creer en mí, los amo.

Al Dr. Francisco Javier Mendoza Torres, por su apoyo, su confianza y por dar la oportunidad a jóvenes que como yo, que tenemos hambre de superación, por inculcar en la comunidad estudiantil la investigación como fuente de desarrollo y por llevar a su cargo tan importantes logros dentro de nuestra casa de estudios. Gracias por ser un ejemplo a seguir, por su gentileza y por confiar en mí.

A mi querida novia Argelia, ya que la bendición de tener una pareja implica que en el trascurso de tu vida no estarás solo, esto también implica que habrá una ayuda siempre a tu lado, alguien que se preocupará por ti y siempre querrá lo mejor para ti. Porque estuvo ahí para ayudarme a levantar y alentarme en los momentos que más lo necesitaba, sin su presencia el recorrido por este camino no hubiera sido igual, cada experiencia fue única y especial. Gracias por ser tú.

Por último pero no menos importante, a mis tres estimadas amigas Adriana, Karla y Andrea que me acompañaron a lo largo de este duro camino llamado carrera. Muchas gracias por estar a mi lado haciendo que mis problemas se vuelvan más pequeños y mis alegrías más grandes, no tengo la menor duda de que sin su amistad, nada de esto hubiera sido igual de extraordinario. Con todo mi cariño, les agradezco por ser las mejores.

# Índice general

**Introducción** ix

**1. Preliminares** 1
- 1.1. Integración impropia . . . . . 1
- 1.2. Integral de Lebesgue . . . . . 3

**2. La fórmula de Frullani para la integral impropia** 7
- 2.1. Fórmulas derivadas de la Integral de Frullani . . . . . 9

**3. La Forma Clásica** 15
- 3.1. Ejemplos . . . . . 18

**4. La fórmula de Frullani para la integral de Lebesgue** 21
- 4.1. Ejemplo . . . . . 24

**5. Una Aplicación** 25
- 5.1. Preliminares . . . . . 25
- 5.2. Aplicación . . . . . 27
- 5.3. Tablas y figuras . . . . . 29

**Conclusión** 31

**Bibliografía** 33

# Introducción

En 1821, el matemático italiano G. Frullani le comunicó a G. Plana , por medio de una carta [8], la siguiente fórmula

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)Ln\left(\frac{b}{a}\right), \tag{1}$$

donde $f(0)$ es el límite de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima al cero y $a, b$ son cualesquiera dos reales positivos.

Después, en 1823, en su obra “Oeuvres completes”, L. Cauchy también hace una prueba de la fórmula (1), pero suponiendo que, si el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $\infty$, es cero, entonces $\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx$ es convergente, lo cual no es cierto.

En el artículo “Exercises de Mathématiques” de 1827, L. Cauchy escribe la fórmula

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = [f(\infty)-f(0)]Ln\left(\frac{a}{b}\right) \qquad a, b > 0 \tag{2}$$

como la fórmula (66) de la página 122 de la sección “Sur la transformation des fonctions” en la cual señala que: “se deduce fácilmente de la ecuación

$$\int_0^\infty f'(ar)\,dr = \frac{f(\infty)-f(0)}{a}, \tag{3}$$

con $a > 0$. Se podría, además, establecer la ecuación mencionada con ayuda de la teoría de las integrales singulares” [15]. En la fórmula (3), $f(\infty)$ denota el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a infinito.

G. Frullani, en 1828, publica la fórmula (1) en su obra “Sopra Gli Integrali Definiti” en donde agrega la siguiente nota [15]:

> Este resultado lo comuniqué a Geovani Plana desde 1821. Posteriormente, y en el diario de la Escuela Politécnica del año 1823 ví una demostración debida a Cauchy, la cual se deduce de principios muy diferentes a los anteriores.

Cabe mencionar, que en 1922, J. Edwards atribuye (2) a E. Elliot, el cuál menciona: “la forma más general (2) se debe al profesor E. B. Elliot” [8, 9].

El resultado de L. Cauchy se ha generalizado reemplazando los límites $f(0)$ y $f(\infty)$ por valores medios adecuados. Fue K. Iyengar quien dió a conocer por primera vez una fórmula de este tipo en 1940 [12, 11]. De acuerdo a A. Ostrowski, la prueba de K. Iyengar no es correcta pero el resultado es verdadero [14]. En la misma referencia, se hace el comentario de que en 1949, A. Ostrowski mejoró el teorema, expresándolo de la siguiente forma, la cual se considera la versión clásica [2]:

*Si $f$ es localmente integrable en el sentido de Riemann en $(0,+\infty)$ y los siguientes límites existen*

$$m(f) = \lim_{x\to 0^+} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}\,dt, \qquad M(f) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt, \tag{4}$$

*entonces, para $a$ y $b$ positivos, se satisface la igualdad*

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = (M(f)-m(f))Ln\left(\frac{a}{b}\right). \tag{5}$$

A. Ostrowski comentó que la prueba de este resultado era difícil y que la daría a conocer en otro momento. El teorema fue demostrado por R. Agnew en 1951 y la demostración de A. Ostrowski apareció en 1976 [15]. Finalmente, F. Tricomi y A. Ostrowski generalizaron esta fórmula de varias formas [18, 15, 17].

Esta tesis estudia la integral del matemático italiano Giuliano Frullani y está organizada como sigue.

En el Capítulo Uno, se presentan algunos conceptos importantes que serán utilizados para la demostración de la Integral de Frullani, tales como el Teorema Fundamental del Cálculo (T.F.C.) y el criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de integrales infinitas.

Luego, en el Capítulo Dos, se exhibe una prueba de la Fórmula de Frullani para la integral impropia y se presentan algunos ejemplos donde se aplica la fórmula (2).

En el Capítulo Tres, se expone una prueba de la Fórma Clásica de la Integral de Frullani. Además, presentamos un ejemplo que parecieran cumplir los requisitos para la aplicación directa de (2), sin embargo, el límite cuando $x$ tiende al infinito no existe y por lo tanto se hace uso de la Forma Clásica.

En el Capítulo Cuatro, empleando la Transformada de Fourier, hacemos una prueba mediante el uso de la integral de Lebesgue. Se demuestra que para una función $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $(f(ax)-f(bx))/x$ es Lebesgue integrable en $[0,\infty)$, para cualesquiera reales positivos $a$ y $b$, existe una constante $A \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = ALn\left(\frac{a}{b}\right).$$

Para probar esta afirmación se necesita hacer un cambio de variable y expresar a la función resultante como una composición de funciones que será Lebesgue integrable para así, mediante una manipulación adecuada de la transformada de Fourier, verificar nuestro resultado.

Finalmente, en el Capítulo Cinco, se exhibe una aplicación de la fórmula de Frullani, mostrando que esta resulta de mezclar una distribución de vida al permitir que el Logaritmo del cociente de los factores de escala se distribuya uniformemente en un rango finito y así, usando este procedimiento sobre la función Log-Logística, obtener

$$g(x) = \frac{(1+x^\alpha)^{-1} - (1+(rx)^\alpha)^{-1}}{Ln(r)x} \qquad y \qquad \bar{G}(x) = \frac{Ln\{(1+x^{-\alpha})/(1+(xt)^{-\alpha})\}}{\alpha Ln(r)}$$

que se aplicarán a una serie de datos para poder analizar y comparar los resultados obtenidos respecto al uso de distribuciones clásicas.

# Capítulo 1

# Preliminares

## 1.1. Integración impropia

A continuación veremos una serie de conceptos y resultados que nos serán útiles más adelante.

**Definición 1.** *Sea $f$ una función Riemann integrable en $[a, c]$ para cada $c \geq a$. Si el límite*

$$I_1 = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\, dx$$

*existe, se dice que $f$ es Riemann integrable impropiamente en $[a, +\infty)$ y la integral impropia de Riemann de $f$, denotada por $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ o $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$, se define por*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\, dx. \tag{1.1}$$

De igual manera, si

$$I_2 = \lim_{b \to -\infty} \int_b^a f(x)\, dx$$

existe, se dice que $f$ es Riemann integrable impropiamente en $(-\infty, a]$ y la integral impropia de Riemann de $f$, denotada por $\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$ se define por

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx = \lim_{b \to -\infty} \int_b^a f(x)\, dx. \tag{1.2}$$

Equivalentemente tenemos que, si $f$ es Riemann integrable en $[a, c]$ con $a < c$ y $I = \int_a^c f(x)\, dx$. Se dice que el número real $I_1$ es la integral impropia de $f$ sobre $\{x | x \geq a\}$ si para toda $\epsilon > 0$ existe un número real $M(\epsilon) > 0$ tal que si $c > M(\epsilon)$ entonces $|I_1 - I| < \epsilon$. Analogamente para el caso de $I_2$.

Además, si los límites (1.1) y (1.2) existen para un valor de $a$, entonces ambos exiten para todos los valores de $a$. Así, decimos que $f$ es Riemann integrable impropiamente bajo $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ y se define como la suma de (1.1) y (1.2):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to -\infty} \int_b^a f(x)\, dx + \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\, dx.$$

**Definición 2.** *Sea $f$ una función real, definida para $(x, t)$ tal que $x \geq a$ y $\alpha \leq t \leq \beta$. Si para cada $t \in [\alpha, \beta]$ la integral impropia*

$$F(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t)\, dx$$

*existe. Decimos que esta converge uniformemente en* $[\alpha, \beta]$ *si para cada* $\epsilon > 0$ *existe un número* $M(\epsilon)$ *tal que si* $c \geq M(\epsilon)$*, entonces*

$$\left| F(t) - \int_a^c f(x,t)\,dx \right| < \epsilon.$$

**Definición 3.** *Si* $f$ *es una función Riemann integrable en el intervalo* $[c, b]$ *para* $a < x \leq b$*, cada* $a < c \leq b$*, y el límite*

$$I_c = \lim_{c \to a} \int_c^b f(x)\,dx$$

*existe, se dice que* $f$ *es Riemann integrable imporpiamente en* $[a, b]$ *y la integral impropia de Riemann de* $f$*, denotada por* $\int_{a^+}^b f(x)\,dx$*, se define por*

$$\int_{a^+}^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a} \int_c^b f(x)\,dx.$$

Existen distintos criterios para probar que una integral es convergente en el sentido impropio de Riemann como lo es el siguiente, su demostración puede verse con detalle en [5].

**Teorema 1** ([5], Criterio de Cauchy)**.** *Suponga que para cada* $t \in [\alpha, \beta]$ *la integral infinita* $F(t) = \int_a^\infty f(x,t)\,dx$ *existe. Entonces, la convergencia es uniforme en* $[\alpha, \beta]$ *si y solo si para cada* $\epsilon > 0$ *existe un número* $N(\epsilon)$ *tal que si* $b \geq c \geq N(\epsilon)$ *y* $t \in [\alpha, \beta]$*, entonces*

$$\left| \int_c^b f(x,t)\,dx \right| < \epsilon.$$

Recordaremos un teorema ampliamente conocido con la intención de facilitar la exposición.

**Teorema 2** (T.F.C.)**.** *Sea* $f$ *una función Riemann integrable en el intervalo* $[a, b]$*, definimos* $F$ *en [a,b] como*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

*Si* $f$ *es continua en* $c \in (a, b)$*, entonces* $F$ *es diferenciable en* $c$ *y*

$$F'(c) = f(c).$$

Se pueden encontrar distintos teoremas que nos dan condiciones para poder realizar el cambio en el orden de integración en integrales dobles, uno es el Teorema de Fubini, no siendo este el único. A continuación veremos un teorema que permite hacer dicho cambio. Se omite su demostración, pero puede ser consultada en [5].

**Teorema 3** ([5], Teoremas 33.6 y 33.7)**.** *Sea* $g$ *una función continua en* $(x, t)$ *para* $x \geq a$*,* $t \in [\alpha, \beta]$*. Supongamos que*

$$G(x) = \int_a^{+\infty} g(x,t)\,dx \tag{1.3}$$

*converge uniformemente con respecto a* $t \in [\alpha, \beta]$*. Entonces*

1. *G es continua en* $[\alpha, \beta]$*.*
2. *Se tiene que*

$$\int_\alpha^\beta G(t)\,dt = \int_a^\infty \int_\alpha^\beta g(x,t)\,dt\,dx,$$

*que se puede escribir de la forma*

$$\int_\alpha^\beta \int_a^\infty g(x,t)\,dx\,dt = \int_a^\infty \int_\alpha^\beta g(x,t)\,dt\,dx.$$

## 1.2. Integral de Lebesgue

Alguna vez Lebesgue escribió: “Es claro que se debe iniciar partiendo $[c, d]$ en lugar de $[a, b]$, . . . ”. En efecto, en contraposición con la integral de Riemann, en la cual se inicia partiendo el dominio de la función, Lebesgue propuso iniciar partiendo el rango de la función que se desea integrar. Así, Lebesgue reformuló el concepto de la integral de Riemann y la extendió a una clase más amplia de funciones reales llamadas funciones medibles. Ahora, veremos algunos conceptos básicos de la integral de Lebesgue.

**Definición 4.** *Una familia $\mathscr{M}$ de subconjuntos de un conjunto $X \neq \emptyset$ es una $\sigma$-álgebra si:*

1. *$\emptyset, X$ están en $\mathscr{M}$.*
2. *Si $A \subset \mathscr{M}$ entonces $A^c \subset \mathscr{M}$.*
3. *Si $(A_n) \subset \mathscr{M}$ entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}$.*

**Definición 5.** *Una función real-valuada extendida $f$ de $X$ es $\mathscr{M}$-medible (o solo medible si se sobreentiende la $\sigma$-álgebra) en caso de que el conjunto $\{x \in \mathscr{M} | f(x) > \alpha\}$ pertenezca a $\mathscr{M}$ para cada número real $\alpha$.*

**Definición 6.** *Una función $\varphi : (X, \mathscr{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es simple si su rango es un conjunto finito.*

Una función medible simple $\varphi$ puede ser expresada de la forma

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_{A_i} \tag{1.4}$$

donde cada $\alpha_i$ es un real tal que $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ es el rango de $\varphi$ y $X_{A_i}$ es la función característica de $A_i = \{x \in X | \varphi(x) = \alpha_i\}$.

**Definición 7.** *Decimos que $\mu : \mathscr{M} \longrightarrow [0, \infty]$ es una medida no negativa si*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$.*
2. *$\mu(E) \geq 0, \quad \forall E \in \mathscr{M}$.*
3. *Si $A = \bigcup_1^{\infty} E_m$, $E_j \cap E_k = \emptyset$ con $j \neq k$, entonces $\mu(A) = \sum_1^{\infty} \mu(E_m)$.*

**Definición 8.** *Si $\varphi : (X, \mathscr{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función simple y medible con representación estandar como en (1.4), definimos la integral de $\varphi$ con respecto a la medidad $\mu$ como*

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i).$$

**Definición 9.** *Si $f : (X, \mathscr{M}, \mu) \longrightarrow [0, \infty]$ es una función medible, definimos la integral de $f$ en $X$ con respecto a $\mu$ como*

$$\int_X f d\mu = sup \int_X \varphi d\mu,$$

*donde el supremo es extendido bajo todas la funciones simples $\varphi$ medibles que satisfacen $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ para toda $x \in X$.*

Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definifmos $f^+$ y $f^-$ como

$$f^+(x) = sup\{f(x), 0\}, \qquad f^-(x) = sup\{-f(x), 0\}.$$

Ambas funciones son positivas y a $f^+$ se le llama la parte positiva de $f$ y a $f^-$ la parte negativa de $f$.

**Definición 10.** *Sea $f : (X, \mathscr{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$, decimos que $f$ es integrable sobre $X$ respecto a $\mu$ si*

$$\int_X f^+(x)d\mu, \qquad\qquad \int_X f^-(x)d\mu$$

*son finitas.*

**Teorema 4.** *Sea $f$ una función medible. Si $f^+$ y $f^-$ estan en $L(X, \mathscr{M}, \mu)$ entonces $f$ también está en $L(X, \mathscr{M}, \mu)$.*

*Denotamos con $L(X, \mathscr{M}, \mu)$ al conjunto de funciones integrables. Este espacio tiene muchas propiedades importantes. En este apartado sólo señalaremos aquellas que nos ayuden en el desarrollo de la tesis.*

**Teorema 5.** *La suma $f + g$ de funciones en $L(X, \mathscr{M}, \mu)$ pertenecen a $L(X, \mathscr{M}, \mu)$ y*

$$\int (f + g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Las definiciones y las demostraciones de todos los resultados enunciados anteriormente pueden verse en [6].

Lo que se hará ahora, es construir una medida y a su vez, una serie de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue, es decir, construir una $\sigma$-álgebra que consiste de todos los conjuntos que son medibles bajo una medida específica (de Lebesgue).

**Definición 11.** *La medida exterior de un intervalo (abierto, cerrado o semi-abierto) en $[0, 1]$ con extremos $a < b$ será el número positivo $b - a$.*

Sabemos que todo conjunto abierto $G \subset \mathbb{R}$ puede ser expresado de forma única como una unión finita o infinita numerable de intervalos abiertos y disjuntos dos a dos. Tomando esto como base, tenemos la siguiente definición.

**Definición 12.** *La medida exterior $m^*(G)$ de un conjunto abierto $G \subset [0, 1]$ se define como el número real $\sum_i (b_i - a_i)$ donde $G = \cup_i (a_i, b_i)$ como se mencionó anteriormente.*

**Definición 13.** *La medida exterior $m^*(A)$ de un conjunto $A \subset [0, 1]$ se define como el número real*

$$inf\{m^*(G) | \quad A \subset G \text{ y G es abierto en } [0, 1]\}.$$

**Definición 14.** *La medida interior $m_*(A)$ de un conjunto $A \subset [0, 1]$ se define como el número $1 - m^*([0, 1]\backslash A)$.*

**Definición 15.** *Un conjunto $A \subset [0, 1]$ se dice Lebesgue medible si $m_*(A) = m^*(A)$. En este caso, la medida de $A$, denotada como $m(A)$, es el número $m_*(A) = m^*(A)$.*

En [20] se prueba que $\mathscr{M} = \{A \subset [0, 1] | \quad m_*(A) = m^*(A)\}$ es una $\sigma$-álgebra y que la $m$ definida es una medida de acuerdo a la Definición 3 y Definición 6 respectivamente. Además, que todo conjunto abierto en $[0, 1]$ es Lebesgue medible de acuerdo a la Definición 14, no solo eso, recordando que la $\sigma$-álgebra de Borel es la generada por la topología de los abiertos, la $\sigma$-álgebra de Lebesgue contiene a la $\sigma$-álgebra de los borelianos en $[0, 1]$.

Si $A$ es un conjunto no acotado, entonces no podemos aplicar una construcción directa para definir $m(A)$, ya que, hasta ahora, $m_*(A) = (1 - 0) - m^*([a, b]\backslash A)$ solo tiene sentido si $A \subset [0, 1]$. Por otro lado, muchos conjuntos no acotados, intuitivamente deberían ser medibles y tener una medida finita. Por ejemplo, sea $A = \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(1, 1 + \frac{1}{4}\right) \cup \left(2, 2 + \frac{1}{8}\right) \cup \left(3, 3 + \frac{1}{16}\right) \cup \cdots$.

Intuitivamente esperamos que $m(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1$. En el proceso que seguimos para construir la $\sigma$-álgebra y la medida de Lebesgue podemos cambiar el intervalo $[0,1]$ por cualquier otro que sea acotado, y llegar a construir la $\sigma$-álgebra y la medida de Lebesgue sobre ese intervalo. Por ejemplo, podemos considerar los intervalos $[-n,n]$, donde $n$ es un número natural. Esto nos permite extender la construcción de los conjuntos medibles Lebesgue y la medida correspondiente a todo $\mathbb{R}$. Así para el caso donde $X = \mathbb{R}$, se toma el conjunto $\mathscr{M}_{\mathbb{R}} = \{A \subset \mathbb{R} | \quad m(A) = \text{lím}_{n\to\infty} m(A \cap [-n,n])\}$ que es una $\sigma$-álgebra (la demostración se puede ver en [20]) y $m$ la medida de Lebesgue para así tener el espacio de medida $(X = \mathbb{R}, \mathscr{M}_{\mathbb{R}}, m)$.

Así, tomando tomando $X = \mathbb{R}$ y $\mu = m$, y de acuerdo a las Definiciones 7 y 8, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} f\, dm.$$

La expresión anterior denotará la integral de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ con respecto a la medida de Lebesgue. Para no ser redundantes nos referiremos a esta como la integral de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$.

Sobre intervalos acotados toda función Riemann integrable es Lebesgue integrable y sus valores coinciden. Sin embargo, no ocurre lo mismo con la integral impropia de Riemann y la de Lebesgue. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

es Lebesgue integrable pero no es Riemann integrable impropiamente. Por otro lado, la función

$$g(x) = \begin{cases} \frac{sen(x)}{x} & x \neq 0 \\ \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

es Riemann integrable impropiamente pero no es Lebesgue integrable.

Como se sabe, esta teoría está ampliamente desarrollada, más resultados y propiedades importantes de esta integral se pueden consultar en [20] y [16].

# Capítulo 2

# La fórmula de Frullani para la integral impropia

La prueba presentada en esta sección emplea el Teorema 3 y se realizó sin consultar pruebas publicadas. Esto, en cierto sentido, es original.

Recordando que $f(\infty) = lim_{x\to\infty}f(x)$ y $f(0) = lim_{x\to 0^+}f(x)$, procedamos con la demostración de la Fórmula de Frullani.

**Teorema 6** (Frullani)**.** *Sean $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'(x)$ es continua y $a, b > 0$. Si $f(0)$ y $f(\infty)$ existen, entonces*

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = [f(\infty) - f(0)]Ln\left(\frac{a}{b}\right). \tag{2.1}$$

*Demostración.* Primero veamos que la integral $\int_0^\infty f'(xt)\,dx$ es uniforme con respecto a $t \in [b,a] \subset (0,\infty)$.
Por el T.F.C., se tiene que

$$\int_0^\infty f'(xt)\,dx = \frac{f(\infty) - f(0)}{t}, \tag{2.2}$$

y si $a_2 > a_1 > 0$

$$\int_{a_1}^{a_2} f'(xt)dx = \frac{f(a_2t) - f(a_1t)}{t}.$$

Como $\lim_{x\to\infty} f(xt) = f(\infty)$, para $t \in [b,a]$ fijo, entonces dado $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon) > 0$ tal que si $xt \geq N(\epsilon)$,

$$|f(xt) - f(\infty)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.3}$$

Ahora, como $t \in [b,a]$ entonces $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{b}$.

Por otro lado, si $a_2 > a_1 > \frac{1}{b}N(\epsilon)$ entonces $ta_2 > ta_1 > \frac{t}{b}N(\epsilon) > N(\epsilon)$.

Luego, por (2.3) se tiene que

$$|f(a_2t) - f(\infty)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad y \qquad |f(a_1t) - f(\infty)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Así,

$$\frac{|f(a_2t)-f(a_1t)|}{t} \leq \frac{|f(a_2t)-f(\infty)|}{b} + \frac{|f(a_1t)-f(\infty)|}{b} < \frac{2\epsilon}{2b} = \frac{\epsilon}{b}.$$

Esto es, si $a_2 > a_1 > \frac{1}{b}N(\epsilon)$, entonces, para todo $t \in [b, a]$,

$$\left| \int_{a_1}^{a_2} f'(xt)\, dx \right| < \frac{\epsilon}{b}.$$

Por el criterio de Cauchy la convergencia de (2.2) es uniforme.
Por lo tanto, aplicando el Teorema 3 y el T.F.C., se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\, dx &= \int_0^\infty \left[\frac{f(xt)}{x}\right]\Big|_{t=b}^{a} dx \\
&= \int_0^\infty \int_b^a f'(xt)\, dt\, dx \\
&= \int_b^a \int_0^\infty f'(xt)\, dx\, dt \\
&= \int_b^a \left[\frac{f(xt)}{t}\right]\Big|_{x=0}^{\infty} dx \\
&= \int_b^a \frac{f(\infty)-f(0)}{t}\, dt \\
&= (f(\infty)-f(0)) \int_b^a \frac{dt}{t} \\
&= (f(\infty)-f(0))(Ln(a)-Ln(b)) \\
&= (f(\infty)-f(0))Ln\left(\frac{a}{b}\right).
\end{aligned}$$

■

## 2.1. Fórmulas derivadas de la Integral de Frullani

Los siguientes resultados son obtenidos mediante la aplicación directa del Teorema 6. Estos son ejercicios propuestos o resultados publicados en [10].

**1.** Siendo $f(x) = e^{-x}$, tenemos que $f(0) = 1$ y $f(\infty) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx &= [f(0) - f(\infty)]Ln\left(\frac{b}{a}\right) \\ &= [1-0]Ln\left(\frac{b}{a}\right) \\ &= Ln\left(\frac{b}{a}\right).\end{aligned} \tag{2.4}$$

**2.** Haciendo el cambio de variable $t = e^{-x}$ en el resultado anterior tenemos que $dt = -e^{-x}dx = -tdx$. Además, si $t = e^{-x}$ entonces $t^a = e^{-xa}$, $t^b = e^{-xb}$ y $Ln(t) = -x$.
Note que si $x \to 0$ entonces $t \to 1$ y que si $x \to \infty$ entonces $t \to 0$. Por lo que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx &= \int_1^0 \frac{t^a - t^b}{x(-t)}\,dt \\ &= \int_1^0 \frac{t^{a-1} - t^{b-1}}{Ln(t)}\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^{b-1} - t^{a-1}}{Ln(t)}\,dt.\end{aligned}$$

Así, obtenemos

$$\int_0^1 \frac{t^{b-1} - t^{a-1}}{Ln(t)}\,dt = Ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{2.5}$$

**3.** Hacemos una generalización del ejemplo anterior. Si $p > 0$, se tiene

$$f(0) = \lim_{x\to 0} e^{-x^p} = 1 \qquad y \qquad f(\infty) = \lim_{x\to\infty} e^{-x^p} = 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{-vx^p} - e^{-ux^p}}{x}\,dx &= \int_0^\infty \frac{e^{-(\sqrt[p]{v}x)^p} - e^{-(\sqrt[p]{u}x)^p}}{x}\,dx \\ &= [f(0) - f(\infty)]Ln\left(\frac{\sqrt[p]{u}}{\sqrt[p]{v}}\right) \\ &= [1-0]Ln\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\ &= \frac{1}{p}Ln\left(\frac{u}{v}\right).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Note que este proviene del resultado de Frullani con una simple condición adicional.

**4.** La elección de la función $f(x) = \frac{e^{-qx}-e^{-px}}{x}$ con $p, q > 0$ satisface que

$$f(\infty) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-qx} - e^{-px}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-qe^{-qx} + pe^{-px}}{1} = \lim_{x\to\infty} -qe^{-qx} + \lim_{x\to\infty} pe^{-px} =$$

$$= -q(0) + p(0) = 0$$

y que

$$f(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-qx} - e^{-px}}{x} = \lim_{x\to 0} -qe^{-qx} + \lim_{x\to 0} pe^{-px} = -q(1) + p(1) = p - q.$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(\frac{e^{-aqx} - e^{-apx}}{ax} - \frac{e^{-bqx} - e^{-bpx}}{bx}\right)\frac{dx}{x} &= [f(0) - f(\infty)]Ln\left(\frac{b}{a}\right)\\ &= [(p-q) - 0]Ln\left(\frac{b}{a}\right)\\ &= (p-q)Ln\left(\frac{b}{a}\right).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Note que también se puede escribir como

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-aqx} - e^{-apx}}{a} - \frac{e^{-bqx} - e^{-bpx}}{b}\right)\frac{dx}{x^2} = (p-q)Ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

**5.** Si $f(x) = \frac{x}{1-e^{-x}}exp(-ce^x)$, entonces

$$f(\infty) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-e^{-x}}exp(-ce^x) = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-e^{-x}}\right)\left(\lim_{x\to\infty} e^{-ce^x}\right) = (\infty)(0) = 0,$$

$$f(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-e^{-x}}exp(-ce^x) = \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-e^{-x}}\right)\left(\lim_{x\to 0} e^{-ce^x}\right) = \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{0+e^{-x}}\right)\left(e^{-ce^0}\right) =$$

$$= (1)(e^{-c}) = e^{-c}.$$

De aquí que

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \left(\frac{ax}{1-e^{-ax}}exp(-ce^{ax}) - \frac{bx}{1-e^{-bx}}exp(-ce^{bx})\right)\frac{dx}{x}\\ &= \int_0^\infty \frac{aexp(-ce^{ax})}{1-e^{-ax}} - \frac{bexp(-ce^{bx})}{1-e^{-bx}}\,dx\\ &= [f(0) - f(\infty)]Ln\left(\frac{b}{a}\right)\\ &= [e^{-c} - 0]Ln\left(\frac{b}{a}\right)\\ &= e^{-c}Ln\left(\frac{b}{a}\right).\end{aligned} \tag{2.8}$$

**6.** Tomando $f(x) = (x+c)^{-\mu}$ con $c, \mu > 0$ se satisface que

$$f(0) = \lim_{x\to 0}(x+c)^{-\mu} = c^{-\mu}, \qquad f(\infty) = \lim_{x\to\infty}(x+c)^{-\mu} = \infty^{-\mu} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{(ax+c)^{-\mu}-(bx+c)^{-\mu}}{x}\,dx &= [f(0)-f(\infty)]Ln\left(\frac{b}{a}\right)\\ &= [c^{-\mu}-0]Ln\left(\frac{b}{a}\right)\\ &= c^{-\mu}Ln\left(\frac{b}{a}\right).\end{aligned} \tag{2.9}$$

**7.** Sea $f(x)=tan^{-1}(x)$. Sabiendo que $f(0)=\lim_{x\to 0} tan^{-1}(x)=0$ y $f(\infty)=\lim_{x\to\infty} tan^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}$.

Se sigue que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{tan^{-1}(ax)-tan^{-1}(bx)}{x}\,dx &= [f(0)-f(\infty)]Ln\left(\frac{b}{a}\right)\\ &= [0-\frac{\pi}{2}]Ln\left(\frac{b}{a}\right)\\ &= \frac{\pi}{2}\left(-Ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)\\ &= \frac{\pi}{2}Ln\left(\frac{a}{b}\right).\end{aligned} \tag{2.10}$$

**8.** Con la elección de la función $f(x)=Ln(a+be^{-x})$ tenemos que

$$f(0)=\lim_{x\to 0} Ln(a+be^{-x}) = Ln(\lim_{x\to 0} a+be^{-x}) = Ln(a+b)$$

y

$$f(\infty)=\lim_{x\to \infty} Ln(a+be^{-x}) = Ln(\lim_{x\to \infty} a+be^{-x}) = Ln(a).$$

Así,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{Ln(a+be^{-px})-Ln(a+be^{-qx})}{x}\,dx &= [f(0)-f(\infty)]Ln\left(\frac{q}{p}\right)\\ &= [Ln(a+b)-Ln(a)]Ln\left(\frac{q}{p}\right)\\ &= Ln\left(\frac{a+b}{a}\right)Ln\left(\frac{q}{p}\right)\\ &= Ln\left(\frac{a}{a+b}\right)Ln\left(\frac{p}{q}\right).\end{aligned} \tag{2.11}$$

**9.** Si $f(x)=abLn(1+x)/x$, se cumple que

$$f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{abLn(1+x)}{x} = ab\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1} = ab$$

y que

$$f(\infty)=\lim_{x\to \infty}\frac{abLn(1+x)}{x} = ab\lim_{x\to \infty}\frac{1}{x+1} = ab(0)=0.$$

Así,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\left(\frac{abLn(1+ax)}{ax}-\frac{abLn(1+bx)}{bx}\right)\frac{dx}{x} &= \int_0^{\infty}\left(\frac{bLn(1+ax)}{x}-\frac{aLn(1+bx)}{x}\right)\frac{dx}{x}\\ &= \int_0^{\infty}\frac{bLn(1+ax)-aLn(1+bx)}{x^2}\,dx\\ &= [f(0)-f(\infty)]Ln\left(\frac{b}{a}\right)\\ &= [ab-0]Ln\left(\frac{b}{a}\right)\\ &= abLn\left(\frac{b}{a}\right).\end{aligned} \tag{2.12}$$

**10.** La función $f(x)=(1+a/x)^x$ satisface que

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\left(1+\frac{a}{qx}\right)^{qx}-\left(1+\frac{a}{px}\right)^{px}}{x}\,dx &= [f(0)-f(\infty)]Ln\left(\frac{p}{q}\right)\\ &= [1-e^a]\left[Ln\left(\frac{p}{q}\right)\right]\\ &= [e^a-1]\left[-Ln\left(\frac{p}{q}\right)\right]\\ &= [e^a-1]Ln\left(\frac{q}{p}\right).\end{aligned} \tag{2.13}$$

Esto ya que

$$f(\infty)=\lim_{x\to\infty}(1+a/x)^x=\lim_{x\to 0^+}(1+t)^{\frac{a}{t}}=\left[\lim_{x\to 0^+}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^a=e^a$$

y

$$
\begin{aligned}
f(0) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x+a}{x}\right)^x &= \lim_{x\to 0^+}\frac{(x+a)^x}{x^x} \\
&= \frac{\lim_{x\to 0^+}(x+a)^x}{\lim_{x\to 0^+} x^x} \\
&= \frac{1}{\lim_{x\to 0^+} e^{ln(x^x)}} \\
&= \frac{1}{e^{\lim_{x\to 0^+} xln(x)}} \\
&= \frac{1}{e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{ln(x)}{1/x}}} \\
&= \frac{1}{e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}}} \\
&= \frac{1}{e^{\lim_{x\to 0^+} -x}} \\
&= \frac{1}{1} = 1.
\end{aligned}
$$

**11.** Si $f(x) = \frac{a+be^{-x}}{ce^x+g+he^{-x}}$, se tiene que

$$f(0) = \lim_{x\to 0}\frac{a+be^{-x}}{ce^x+g+he^{-x}} = \frac{a+b}{c+g+h}$$

y que

$$f(\infty) = \lim_{x\to\infty}\frac{a+be^{-x}}{ce^x+g+he^{-x}} = \frac{a+0}{\infty+g+0} = \frac{a}{\infty} = 0.$$

Por lo que

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(\frac{a+be^{-qx}}{ce^{qx}+g+he^{-qx}} - \frac{a+be^{-px}}{ce^{px}+g+he^{-px}}\right)\frac{dx}{x} &= [f(0)-f(\infty)]Ln\left(\frac{p}{q}\right) \\
&= \left[\frac{a+b}{c+g+h} - 0\right]Ln\left(\frac{p}{q}\right) \qquad (2.14) \\
&= \frac{a+b}{c+g+h}Ln\left(\frac{p}{q}\right).
\end{aligned}
$$

Cabe mencionar que los siguientes resultados se pueden encontrar en el Volumen 1 de los Cuadernos de Ramanujan [7].

**12.** Sea $f(x) = \left(\frac{x+p}{x+q}\right)^n$. Debido a que

$$f(\infty) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+p}{x+q}\right)^n = \left(\lim_{x\to\infty}\frac{x+p}{x+q}\right)^n = 1^n = 1$$

y

$$f(0) = \lim_{x \to 0} \left( \frac{x+p}{x+q} \right)^n = \frac{p^n}{q^n} = \left( \frac{p}{q} \right)^n .$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{ax+p}{ax+q}\right)^n - \left(\frac{bx+p}{bx+q}\right)^n}{x} \, dx &= [f(0) - f(\infty)] Ln \left( \frac{b}{a} \right) \\ &= \left[ \left( \frac{p}{q} \right)^n - 1 \right] Ln \left( \frac{b}{a} \right) \\ &= \left[ 1 - \left( \frac{p}{q} \right)^n \right] Ln \left( \frac{a}{b} \right) . \end{aligned} \tag{2.15}$$

**13.** Sea $f(x) = e^{-x} cos(x)$. Note que $f(0) = \lim_{x \to 0} e^{-x} cos(x) = (1)(1) = 1$ y $f(\infty) = \lim_{x \to \infty} e^{-x} cos(x) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} cos(ax) - e^{-bx} cos(bx)}{x} \, dx &= [f(0) - f(\infty)] Ln \left( \frac{b}{a} \right) \\ &= [1 - 0] Ln \left( \frac{b}{a} \right) \\ &= Ln \left( \frac{b}{a} \right) . \end{aligned} \tag{2.16}$$

**14.** Tomando $f(x) = e^{-x} sen(x)$ tenemos que

$$f(0) = \lim_{x \to 0} e^{-x} sen(x) = (1)(0) = 0 \qquad y \qquad f(\infty) = \lim_{x \to \infty} e^{-x} sen(x) = 0.$$

De aquí que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} sen(ax) - e^{-bx} sen(bx)}{x} \, dx &= [f(0) - f(\infty)] Ln \left( \frac{b}{a} \right) \\ &= [0 - 0] Ln \left( \frac{b}{a} \right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

# Capítulo 3

# La Forma Clásica

Presentamos la demostración de la Forma Clásica de la Integral de Frullani. Este teorema se puede encontrar propuesto como ejercicio en [1].

**Teorema 7.** *Si $f(x)$ es Riemann integrable sobre $[a,b]$ y los siguientes límites existen*

$$A = \lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}\,dt, \qquad\qquad B = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt,$$

*entonces, para $b > a > 0$, se satisface la igualdad*

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = (B-A)Ln\left(\frac{a}{b}\right). \tag{3.1}$$

*Demostración.* Sea $g(x) = \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$ con $x > 0$. Primero veamos que

$$\int_1^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = BLn\left(\frac{a}{b}\right) + \int_a^b \frac{f(t)}{t}\,dt. \tag{3.2}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx &= \lim_{T\to\infty}\int_1^T \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx\\ &= \lim_{T\to\infty}\left[\int_1^T \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int_1^T \frac{f(bx)}{x}\,dx\right].\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $t = ax$ y $t = bx$ respectivamente, tenemos que

$$\int_1^T \frac{f(ax)}{x}\,dx = \int_a^{aT} \frac{f(t)}{t}\,dt \qquad y \qquad \int_1^T \frac{f(bx)}{x}\,dx = \int_b^{bT} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_1^T \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int_1^T \frac{f(bx)}{x}\,dx &= \int_a^{aT} \frac{f(t)}{t}\,dt - \int_b^{bT} \frac{f(t)}{t}\,dt\\ &= \int_a^b \frac{f(t)}{t}\,dt + \int_b^{aT} \frac{f(t)}{t}\,dt - \int_b^{bT} \frac{f(t)}{t}\,dt \qquad (3.3)\\ &= \int_a^b \frac{f(t)}{t}\,dt - \int_{aT}^{bT} \frac{f(t)}{t}\,dt.\end{aligned}$$

Integrando por partes tenemos

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x}\,dx = \left[\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt\right]\Big|_a^b + \int_a^b \frac{1}{x^2}\left(\int_1^x f(t)\,dt\right)dx$$

$$= g(x)\big|_a^b + \int_a^b \frac{g(x)}{x}\,dx$$

$$= g(b) - g(a) + \int_a^b \frac{g(x)}{x}\,dx.$$

Análogamente $\int_{aT}^{bT} \frac{f(x)}{x}\,dx = g(bT) - g(aT) + \int_{aT}^{bT} \frac{g(x)}{x}\,dx$. Como $\lim_{x\to\infty} g(x) = B$, entonces

$$\lim_{T\to\infty} g(bT) = B \qquad y \qquad \lim_{T\to\infty} g(aT) = B.$$

Ahora, sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que para cada $x > x_0$ tenemos que $|g(x) - B| < \epsilon$ equivalente a $B - \epsilon < g(x) < B + \epsilon$.

Así, para cada $T$ tal que $aT > x_0$, se tiene que

$$\int_{aT}^{bT} \frac{B-\epsilon}{x}\,dx < \int_{aT}^{bT} \frac{g(x)}{x}\,dx < \int_{aT}^{bT} \frac{B+\epsilon}{x}\,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (B-\epsilon)Ln(x)\big|_{aT}^{bT} < \int_{aT}^{bT} \frac{g(x)}{x}\,dx < (B+\epsilon)Ln(x)\big|_{aT}^{bT}$$

$$\Leftrightarrow (B-\epsilon)Ln\left(\frac{b}{a}\right) < \int_{aT}^{bT} \frac{g(x)}{x}\,dx < (B+\epsilon)Ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\epsilon Ln\left(\frac{b}{a}\right) < \int_{aT}^{bT} \frac{g(x)}{x}\,dx - BLn\left(\frac{b}{a}\right) < \epsilon Ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Como $\epsilon$ se tomó arbitrariamente, vemos que a $\int_{aT}^{bT} \frac{g(x)}{x}\,dx$ lo podemos aproximar a $BLn\left(\frac{b}{a}\right)$ tanto como queramos tomando un $T$ lo suficientemente grande. De aquí que

$$\lim_{T\to\infty} \int_{aT}^{bT} \frac{g(x)}{x}\,dx = BLn\left(\frac{b}{a}\right).$$

Por lo tanto

$$\lim_{T\to\infty} \int_{aT}^{bT} \frac{f(x)}{x}\,dx = B - B + BLn\left(\frac{b}{a}\right) = BLn\left(\frac{b}{a}\right).$$

Entonces, tomando el límite en (3.3) se tiene que

$$\lim_{T\to\infty}\left[\int_a^b \frac{f(t)}{t}\,dt - \int_{aT}^{bT}\frac{f(t)}{t}\,dt\right] = \int_a^b \frac{f(t)}{t}\,dt - \lim_{T\to\infty}\int_{aT}^{bT}\frac{f(t)}{t}\,dt$$

$$= \int_a^b \frac{f(t)}{t}\,dt + BLn\left(\frac{a}{b}\right).$$

Por lo tanto se cumple (3.2).

Sea $h(x) = x\int_x^1 f(t)t^{-2}\,dt$. Vamos a repetir el procedimiento anterior para probar que

$$\int_0^1 \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = ALn\left(\frac{b}{a}\right) - \int_a^b \frac{f(t)}{t}\,dt \tag{3.4}$$

por lo que se omitiran algunos detalles técnicos. Integrando por partes tenemos que

$$\int_{aT}^{bT}\frac{f(x)}{x}\,dx = \left[-x\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}\,dt\right]\Bigg|_{aT}^{bT} + \int_{aT}^{bT}\left(\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}\,dt\right)dx$$

$$= -h(x)\big|_{aT}^{bT} + \int_{aT}^{bT}\frac{1}{x}x\left(\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}\,dt\right)dx$$

$$= h(aT) - g(bT) + \int_{aT}^{bT}\frac{h(x)}{x}\,dx.$$

Sabemos que $\lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 f(t)t^{-2}\,dt = A$, entonces

$$\lim_{T\to 0^+} h(bT) = A \qquad y \qquad \lim_{T\to 0^+} h(aT) = A.$$

Ahora, sea $\epsilon > 0$. Entonces, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que para cada $x_0 > x > 0$ tenemos que $|h(x)-A| < \epsilon$ equivalente a $A-\epsilon < h(x) < A+\epsilon$.

Así, para cada $T > 0$ tal que $bT < x_0$, se tiene que

$$\int_{aT}^{bT}\frac{A-\epsilon}{x}\,dx < \int_{aT}^{bT}\frac{h(x)}{x}\,dx < \int_{aT}^{bT}\frac{A+\epsilon}{x}\,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\epsilon Ln\left(\frac{b}{a}\right) < \int_{aT}^{bT}\frac{h(x)}{x}\,dx - ALn\left(\frac{b}{a}\right) < \epsilon Ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Como $\epsilon$ se tomó arbitrariamente, vemos que a $\int_{aT}^{bT}\frac{h(x)}{x}\,dx$ lo podemos aproximar a $ALn\left(\frac{b}{a}\right)$ tanto como queramos tomando un $T > 0$ lo suficientemente pequeño. De aquí que

$$\lim_{T\to 0^+}\int_{aT}^{bT}\frac{h(x)}{x}\,dx = ALn\left(\frac{b}{a}\right).$$

Notemos que

$$\int_0^1 \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \lim_{T\to 0^+}\int_T^1 \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx$$
$$= \lim_{T\to 0^+}\left[\int_T^1 \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int_T^1 \frac{f(bx)}{x}\,dx\right].$$

Haciendo el cambio de variable $t = ax$ y $t = bx$ respectivamente, tenemos que

$$\int_T^1 \frac{f(ax)}{x}\,dx = \int_{aT}^a \frac{f(t)}{t}\,dt \qquad y \qquad \int_T^1 \frac{f(bx)}{x}\,dx = \int_{bT}^b \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

Por lo tanto

$$\int_T^1 \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int_T^1 \frac{f(bx)}{x}\,dx = \int_{aT}^a \frac{f(t)}{t}\,dt - \int_{bT}^b \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_{aT}^{bT} \frac{f(t)}{t}\,dt - \int_a^b \frac{f(t)}{t}\,dt. \tag{3.5}$$

Finalmente, tomando el límite tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{T\to 0^+}\left[\int_T^1 \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int_T^1 \frac{f(bx)}{x}\,dt\right] &= -\int_a^b \frac{f(t)}{t}\,dt + \lim_{T\to 0^+}\int_{aT}^{bT} \frac{f(t)}{t}\,dt \\ &= ALn\left(\frac{b}{a}\right) - \int_a^b \frac{f(t)}{t}\,dt.\end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple (3.4).

Sumando (3.2) y (3.4) tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int_1^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx + \int_0^1 \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx &= BLn\left(\frac{a}{b}\right) + ALn\left(\frac{b}{a}\right) \\ &= BLn\left(\frac{a}{b}\right) - ALn\left(\frac{a}{b}\right) \\ &= (B-A)Ln\left(\frac{a}{b}\right)\end{aligned} \tag{3.6}$$

donde

$$A = \lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}\,dt, \qquad B = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt.$$

■

## 3.1. Ejemplos

A contunuación presentamos algunos ejemplos mediante el uso de la llamada "forma clásica".

**15.** Si $f(x) = cos(x)$, note que $\lim_{x\to\infty} cos(x)$ no existe, lo que impide la aplicación directa de la fórmula de Frullani.

Usemos el Teorema 7 para $f(x) = cos(x)$. Integrando por partes, siendo $u = cos(t)$ tenemos

$$\begin{aligned}A = \lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{cos(t)}{t^2}\,dt &= \lim_{x\to 0^+} x\left(-\frac{cos(t)}{t}\Big|_x^1 - \int_x^1 \frac{sen(t)}{t}\,dt\right) \\ &= \lim_{x\to 0^+}\left[-x\left(cos(1) - \frac{cos(x)}{x}\right) - x\int_x^1 \frac{sen(t)}{t}\,dt\right] \\ &= \lim_{x\to 0^+}\left[-xcos(1) + cos(x) - x\int_x^1 \frac{sen(t)}{t}\,dt\right].\end{aligned}$$

Como $-1 \leq sen(t) \leq 1$, entonces

$$-x\int_x^1 \frac{dt}{t} \leq x\int_x^1 \frac{sen(t)}{t}\,dt \leq x\int_x^1 \frac{dt}{t} \Leftrightarrow -xLn(t)\Big|_x^1 \leq x\int_x^1 \frac{sen(t)}{t}\,dt \leq xLn(t)\Big|_x^1$$
$$\Leftrightarrow -x(Ln(1)-Ln(x)) \leq x\int_x^1 \frac{sen(t)}{t}\,dt \leq x(Ln(1)-Ln(x))$$
$$\Leftrightarrow xLn(x) \leq x\int_x^1 \frac{sen(t)}{t}\,dt \leq -xLn(x)$$

pero

$$\lim_{x\to 0^+} -xLn(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{Ln(x)}{\frac{1}{-x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

Analogamente, $\lim_{x\to 0^+} xLn(x) = 0$. Entonces

$$\lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{sen(t)}{t}\,dt = 0,$$

y por tanto

$$A = \lim_{x\to 0^+} -xcos(1) + cos(x) - x\int_x^1 \frac{sen(t)}{t}\,dt = -0(cos(1)) + 1 - 0 = 1.$$

Ahora

$$B = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_1^x cos(t)\,dt = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}[sen(t)]\Big|_1^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-sen(x)}{x} + \frac{sen(1)}{x}\right).$$

Como $-1 \leq sen(x) \leq 1$ si y solo si $\frac{-1}{x} \leq \frac{sen(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$, además $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Entonces

$$B = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-sen(x)}{x} + \frac{sen(1)}{x}\right) = 0.$$

Por tanto, de todo lo anterior, sustituyendo en (3.6) tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{cos(ax)-cos(bx)}{x}\,dx &= [B-A]Ln\left(\frac{a}{b}\right)\\ &= [0-1]Ln\left(\frac{a}{b}\right)\\ &= -Ln\left(\frac{a}{b}\right)\\ &= Ln\left(\frac{b}{a}\right).\end{aligned} \tag{3.7}$$

A (3.7) lo podemos encontrar en [10] como el 3.784.1.

Del resultado 15 se siguen los siguientes dos resultados.

**16.** Teniendo en cuenta que

$$sin\left(\frac{a+b}{2}\right) sin\left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{cos(b)-cos(a)}{2}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} sin\left(\frac{(b-a)x}{2}\right) sin\left(\frac{(b+a)x}{2}\right)\frac{dx}{x} &= \int_0^{\infty}\frac{cos(ax)-cos(bx)}{2}\frac{dx}{x}\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{cos(ax)-cos(bx)}{x}\,dx \qquad (3.8)\\
&= \frac{1}{2}Ln\left(\frac{b}{a}\right).
\end{aligned}$$

Note que en la última igualdad se aplica el resultado 15.

**17.** Teniendo en cuenta que

$$cos(px-qx) = cos(px)cos(qx) + sen(px)sen(qx) \qquad (3.9)$$

$$cos(px+qx) = cos(px)cos(qx) - sen(px)sen(qx), \qquad (3.10)$$

restamos (3.10) a (3.9) para obtener $2sen(px)sen(qx)$, de aquí que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} sen(px)sen(qx)\frac{dx}{x} &= \int_0^{\infty}\frac{cos((p-q)x)-cos((p+q)x)}{2x}\,dx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{cos((p-q)x)-cos((p+q)x)}{x}\,dx \qquad (3.11)\\
&= \frac{1}{2}Ln\left(\frac{p+q}{p-q}\right).
\end{aligned}$$

Note que en la última igualdad se aplica el resultado 15.

# Capítulo 4

# La fórmula de Frullani para la integral de Lebesgue

La Transformada de Fourier es un concepto matemático de gran valor para analizar las funciones no periódicas. Complementa de esta manera a las Series de Fourier, que permiten analizar sistemas donde están involucradas las funciones periódicas.

Mediante las Series de Fourier podemos representar una señal periódica en términos de sus componentes sinusoidales, cada componente con una frecuencia en particular. La Transformada de Fourier permite hacer esto mismo con señales no periódicas.

**Definición 16.** *Sea $f$ una función Lebesgue integrable. La Transformada de Fourier de $f$ se define como:*

$$\mathbb{F}(f(x)) = F(w) = \widehat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi iwx}dx.$$

**Proposición 1.** $\mathbb{F}[f(t+t_0)] = e^{2\pi iwt_0}F(w)$.

*Demostración.* Haciendo el cambio de variable $u = t + t_0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}[f(t+t_0)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+t_0)e^{-2\pi iwt}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2\pi iw(u-t_0)}\,du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2\pi iwu+2\pi iwt_0}\,du \\
&= e^{2\pi iwt_0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2\pi iwu}\,du \\
&= e^{2\pi iwt_0}F(w).
\end{aligned}$$

■

**Teorema 8.** *Sea $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $(f(ax) - f(bx))/x$ es Lebesgue-integrable en $[0, \infty)$ para los reales positivos $a$ y $b$. Entonces existe una constante $A \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = ALn\left(\frac{a}{b}\right). \tag{4.1}$$

**Demostración** Sean $x = e^t$, $\alpha = Ln(a)$ y $\beta = Ln(b)$. Entonces $Ln(x) = t$, $e^\alpha = a$ y $e^\beta = b$. Además si $x \to +\infty$, entonces $t \to +\infty$ y si $x \to 0$, entonces $t \to -\infty$.
Así,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^\alpha e^t) - f(e^\beta e^t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{\alpha+t}) - f(e^{\beta+t})\, dt.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Por lo que (4.1) es equivalente a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{\alpha+t}) - f(e^{\beta+t})\, dt = A(\alpha - \beta).$$

Como $(f(ax) - f(bx))/x$ es Lebesgue-integrable sobre $[0, \infty)$, entonces $f(e^{\alpha+t}) - f(e^{\beta+t})$ también lo es sobre $\mathbb{R}$. Note que

$$f(e^{\alpha+t}) - f(e^{\beta+t}) = (f \circ h)(x + \alpha) - (f \circ h)(x + \beta) = g(x + \alpha) - g(x + \beta)$$

donde $h : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ es tal que $h(x) = e^x$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que $g = f \circ h$. Entonces $g(x + \alpha) - g(x + \beta)$ es Lebesgue-integrable.

Así, es suficiente probar el siguiente teorema.

**Teorema 9.** *Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $g(x + \alpha) - g(x + \beta)$ es Lebesgue-integrable para los reales positvos $\alpha$ y $\beta$. Entonces existe una constante $A$ tal que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x + \alpha) - g(x + \beta)\, dx = A(\alpha - \beta). \tag{4.3}$$

*Demostración.* Sea $h_\alpha(x) := g(x + \alpha) - g(x)$. Sabemos que $h_\alpha \in L^1(\mathbb{R})$ para cada $\alpha$. Notemos que

$$\begin{aligned}h_\alpha(x) + h_\beta(x + \alpha) &= (g(x + \alpha) - g(x)) + (g(x + \alpha + \beta) - g(x + \alpha)) \\ &= g(x + \alpha + \beta) - g(x) \\ &= h_{\alpha+\beta}(x)\end{aligned} \tag{4.4}$$

y que

$$\begin{aligned}h_\alpha(x) + h_\beta(x + \alpha) &= (g(x + \alpha) - g(x)) + (g(x + \alpha + \beta) - g(x + \alpha)) \\ &= g(x + \alpha + \beta) - g(x) + g(x + \beta) - g(x + \beta) \\ &= g(x + \alpha + \beta) - g(x + \beta) + g(x + \beta) - g(x) \\ &= h_\beta(x) + h_\alpha(x + \beta).\end{aligned} \tag{4.5}$$

Es claro que todas estas funciones pertenecen a $L^1(\mathbb{R})$, así podemos aplicar la transformada de Fourier a (4.5) y teniendo en cuenta la Proposición 1 obtenemos

$$\widehat{h_\alpha}(x) + e^{2\pi i\alpha x}\widehat{h_\beta}(x) = \widehat{h_\beta}(x) + e^{2\pi i\beta x}\widehat{h_\alpha}(x).$$

Lo cual es equivalente a

$$\widehat{h_\beta}(x) = \frac{1 - e^{2\pi i\beta x}}{1 - e^{2\pi i\alpha x}} \widehat{h_\alpha}(x).$$

Sea $G(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x+\beta) - g(x)\, dx$. Notemos que

$$\widehat{h_\beta}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_\beta(x) e^{-2\pi i(0)x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h_\beta(x) e^{0}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x+\beta) - g(x)\, dx = G(\beta).$$

Entonces

$$G(\beta) = \lim_{x\to 0} \left( \frac{1 - e^{2\pi i\beta x}}{1 - e^{2\pi i\alpha x}} \widehat{h_\alpha}(x) \right)$$

$$= \left( \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{2\pi i\beta x}}{1 - e^{2\pi i\alpha x}} \right) \left( \lim_{x\to 0} \widehat{h_\alpha}(x) \right)$$

$$= \left( \lim_{x\to 0} \frac{0 - e^{2\pi i\beta x}(2\pi i\beta)}{0 - e^{2\pi i\alpha x}(2\pi i\alpha)} \right) \left( \widehat{h_\alpha}(0) \right)$$

$$= \frac{\beta}{\alpha} G(\alpha).$$

Tomemos $\alpha = 1$ y sea $A = G(1)$. Entonces

$$G(\beta) = A\beta.$$

Ahora, haciendo el cambio $x = u + \beta$ se tiene

$$(\alpha - \beta)A = G(\alpha - \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x + \alpha - \beta) - g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u+\alpha) - g(u+\beta)\, du.$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x+\alpha) - g(x+\beta)\, dx = A(\alpha - \beta).$$

■

Cabe mencionar que, a diferencia de la aplicación directa de la fórmula (2), en la que esta depende solamente de la continuidad de $f'(x)$ y la existencia de $lim_{x\to\infty} f(x)$, para "esta versión" de la Integral de Frullani que emplea la Integral de Lebesgue y la Transformada de Fourier, basta ver que $(f(ax) - f(bx))/x$ es Lebesgue-integrable en $[0, \infty)$. Entonces, para todos los resultados obtenidos en las secciones previas, bastará ver que la expresión $(f(ax) - f(bx))/x$ de la función $f(x)$ en cuestión, es Lebesgue-integrable en $[0, \infty)$ para los reales positivos $a$ y $b$. Resaltemos en esta prueba, el empleo de la Transformada de Fourier.

## 4.1. Ejemplo

A continuación se presenta un ejemplo obtenido mediante la aplicación del Teorema 8.

**18.** Sea $f(x) = \frac{sen^2(x)}{x}$. Entonces debemos probar que $F(x) = \frac{sen^2(ax)-sen^2(bx)}{x^2}$ con $a, b > 0$ es Lebesgue integrable en $[0, \infty)$. Primero veamos que $f_1(x) = \frac{sen^2(ax)}{x^2}$ es Lebesgue integrable en el intervalo $[0, \infty)$ con $a > 0$.

Siendo $u = \frac{sen(x)}{x}$ y $v = sen(x)$, integramos por partes

$$\int \frac{sen(x)cos(x)}{x}\, dx = \frac{sen^2(x)}{x} - \int \frac{cos(x)sen(x)}{x}\, dx + \int \frac{sen^2(x)}{x^2}\, dx$$

que es equivalente a

$$2\int \frac{sen(x)cos(x)}{x}\, dx = \frac{sen^2(x)}{x} + \int \frac{sen^2(x)}{x^2}\, dx.$$

Añadiendo los límites de integración tenemos

$$2\int_0^\infty \frac{sen(x)cos(x)}{x}\, dx = \frac{sen^2(x)}{x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{sen^2(x)}{x^2}\, dx.$$

Además, usando el hecho de que $\int_0^\infty \frac{sen(x)cos(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{4}$, obtenemos

$$\int_0^\infty \frac{sen^2(x)}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} - \frac{sen^2(x)}{x}\Big|_0^\infty.$$

Notemos que $0 \leq |\frac{sen^2(x)}{x}| \leq \frac{1}{x}$, que cuando $x$ se acerca a infinito, $\frac{1}{x}$ va a cero. Por lo tanto $\lim_{x\to\infty} \frac{sen^2(x)}{x} = 0$. Además $\lim_{x\to 0} \frac{sen^2(x)}{x} = 0$. De aquí que

$$\int_0^\infty \frac{sen^2(x)}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Como la integral definida de $f_1(x)$ sobre el intervalo $[0, \infty)$ es finita, concluimos que $f_1(x)$ es integrable en el sentido de Lebesgue en ese intervalo.

Haciendo un proceso análogo tenemos que $f_2(x) = \frac{sen^2(bx)}{x^2}$ es Lebesgue integrable en $[0, \infty)$ con $b > 0$, que por el Teorema 5, $f_1(x) - f_2(x) = \frac{sen^2(ax)-sen^2(bx)}{x^2}$ es Lebesgue integrable. Por lo tanto $F(x)$ es Lebesgue integrable en $[0, \infty)$.

De acuerdo al Teorema 8, se tiene que

$$\int_0^\infty \frac{sen^2(ax) - sen^2(bx)}{x^2}\, dx = ALn\left(\frac{a}{b}\right).$$

# Capítulo 5

# Una Aplicación

En esta sección veremos una aplicación de la fórmula de Frullani. Dado que el objetivo es mostrar la utilidad práctica de la Fórmula de Frullani, algunos de los siguientes teoremas son enunciados sin su respectiva demostración. Los conceptos y resultados siguientes se pueden encontrar en [19].

## 5.1. Preliminares

**Definición 17.** *El espacio muestral asociado a un experimento es el conjunto que consiste de todos los posibles puntos de muestra.*

**Definición 18.** *Una variable aleatoria es una función con valores reales y dominio un espacio muestral.*

**Definición 19.** *La distribución de probabilidad de una variable aleatoria es una función que asigna a cada suceso definido sobre la variable, la probabilidad de que dicho suceso ocurra.*

**Definición 20.** *Sea $Y$ una variable aleatoria. La función de distribución de $Y$, denotada por $F(y)$, es tal que $F(y) = P(Y \leq y)$ para $-\infty < y < +\infty$.*

**Teorema 10.** *Si $F(y)$ es una función de distribución, entonces*

1. $F(-\infty) \equiv \lim_{y \to -\infty} F(y) = 0$
2. $F(+\infty) \equiv \lim_{y \to +\infty} F(y) = 1$
3. *$F(y)$ es una función no decreciente de $y$.*

**Definición 21.** *Una variable aleatoria se dice discreta si su imagen consta de un número finito de valores o es un conjunto infinito numerable.*

**Definición 22.** *Una variable aleatoria $Y$ con función de distribución $F(y)$ se dice continua si $F(y)$ es continua para $-\infty < y < +\infty$.*

**Definición 23.** *Sea $F(y)$ la función de distribución de una variable aleatoria continua $Y$. Entonces $f(y)$, dada por*

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy} = F'(y)$$

*es llamada función de densidad de probabilidad de $Y$ (o simplemente función de densidad) donde*

$$P[a \leq Y \leq b] = \int_a^b f(y)\, dy \qquad y \qquad F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)\, dt.$$

**Proposición 2.** *Si $f(y)$ es una función de densidad para una variable aleatoria continua, entonces*

1. $f(y) \geq 0$ *para todo* $y$, $-\infty < y < +\infty$.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, dy = 1$.

**Definición 24.** *Una distribución mixta es una mezcla de dos o más distribuciones de probabilidad donde todas son distribuciones de probabilidad discretas o todas distribuciones de probabilidad continuas.*

**Definición 25** ([13])**.** *Sea el tiempo de vida $T$ una variable aleatoria continua con función de distribución $F(t)$ en el intervalo $[0, \infty)$. Su función de supervivencia es se define como*

$$S(t) = P(\{T > t\}) = \int_t^\infty f(u)\, du = 1 - F(t).$$

En otras palabras, la función de supervivencia es una función que da la probabilidad de que un paciente, dispositivo u otro objeto de interés sobreviva más allá de un tiempo determinado.

**Definición 26** ([3])**.** *La distribución log-logística (conocida como distribución de Fisk) es una distribución de probabilidad continua para una variable aleatoria no negativa. Su función de densidad de probabilidad es*

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{(\beta/\alpha)(x/\alpha)^{\beta-1}}{(1 + (x/\alpha)^\beta)^2}.$$

Para los fines prácticos de esta sección es importante mencionar su función de supervivencia que es

$$S(x) = 1 - F(t) = \frac{\beta^\alpha}{\beta^\alpha + x^\alpha}.$$

**Definición 27.** *Si una familia de distribuciones probabilísticas es tal que existe un parámetro $s$ para el que la función de distribución satisface*

$$F(a; s) = F(x/s; 1),$$

*entonces a $s$ se denomina parámetro de escala.*

Se denomina de esta manera ya que su valor determina la "escala" o dispersión estadística de la distribución de probabilidad. Si s es grande, entonces la distribución estará más dispersa; si s es pequeño entonces estará más concentrado. Una función con parámetro de escala se puede representar de la siguiente manera:

$$f(x|a)$$

donde $x$ es la variable independiente, $a$ es el parámetro de escala y "|" indica que $a$ es un parámetro de la función. Además, $f$ es una función de densidad.

**Definición 28.** *Las distribuciones que tienden a representar mejor los datos del tiempo de vida se denominan distribuciones de vida.*

Un ejemplo de distribución de vida es la distribución exponencial, esta tiene como función de densidad $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

**Definición 29.** *En estadística, la censura es el fenómeno que ocurre cuando el valor de una observación sólo se conoce parcialmente.*

Esta no debe confundirse con el truncamiento, pues con la censura se sabe que las observaciones censuradas superan cierto umbral y esa información parcial puede usarse a la hora de modelar estadísticamente un fenómeno, contrario al truncamiento que se descartan enteramente las observaciones.

**Definición 30.** *En estadística, la función de verosimilitud (o, simplemente, verosimilitud) es una función de los parámetros de un modelo estadístico que permite realizar inferencias acerca de su valor a partir de un conjunto de observaciones, es decir, se define como la densidad conjunta evaluada en las observaciones muestrales.*

En el cálculo de la función de verosimilitud interviene el producto de las probabilidades individuales, por lo que habitualmente se toman logaritmos, ya que estos transforman los productos en sumas y los cocientes en restas. Así, habitualmente veremos Log-verosimilitud, que no es más que el logaritmo de la verosimilitud. Al tratarse de productos de probabilidades la función de verosimilitud será siempre menor que 1 y por tanto su logaritmo será negativo. De aquí que la Log-verosimilitud negativa (-Log-verosimilitud) sea el logaritmo de la verosimilitud con un símbolo menos al frente.

## 5.2. Aplicación

Los resultados de esta sección fueron tomados de [4].
Supongamos que $F : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que

$$\lim_{x \to 0} F(x) = 0, \qquad\qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

De la expresión (2) se tiene

$$\int_0^\infty \frac{F(ax) - F(bx)}{x}\, dx = [F(\infty) - F(0)] Ln\left(\frac{a}{b}\right) \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{Ln\left(\frac{a}{b}\right)} \int_0^\infty \frac{F(ax) - F(bx)}{x}\, dx = 1.$$

Sin pérdida de generalidad, $a > b$, y sea $F$ la función de distribución de una distribución de supervivencia. Entonces

$$g(x) = \frac{F(ax) - F(bx)}{Ln(a/b)x} \tag{5.1}$$

es una función de densidad, donde la variable alaeatoria $X > 0$ si $F$ es una función monótonamente creciente en su argumento y es no negativa, $F$ debe obedecer estas condiciones para ser una función de distribución válida.
Note que (5.1) se puede escribir en términos de su función de supervivencia $\bar{F} = 1 - F$, donde

$$g(x) = \frac{\bar{F}(bx) - \bar{F}(ax)}{Ln(a/b)x}. \tag{5.2}$$

Observemos que

$$\frac{F(ax) - F(bx)}{Ln(a/b)x} = \frac{\int_b^a (\frac{dF(ux)}{du})\, du}{Ln(a/b)x},$$

y además

$$\frac{1}{x}\frac{\partial F(ux)}{\partial u} = \frac{1}{u}\frac{\partial F(ux)}{\partial x} \equiv \frac{f(x|u)}{u}.$$

Por tanto

$$g(x) = \frac{F(ax) - F(bx)}{Ln(a/b)x} = \frac{\int_b^a (\frac{f(x|u)}{u})\, du}{\int_b^a \frac{du}{u}}. \tag{5.3}$$

Note que (2) se sigue rápidamente de (5.3).

La ecuación (5.3) muestra que (5.1) es la función de densidad de una distribución mixta, al permitir que el Logaritmo del cociente de los factores de escala de una variable aleatoria de una distribución de supervivencia sea una variable aleatoria $U$ en el rango $(a, b)$, con pdf 1/u.

Respecto a la notación, es conveniente referirse a $f$ como la función de densidad "padre", y $g$ como la función de densidad "hija", y dar a las distribuciones hijas nombres como "distribución F1-gamma". Las funciones de densidad padre se escriben como $f(t|u)$, donde u es el factor de escala. Los parámetros de escala $(a, b)$ se omiten en las funciones de densidad hijas $g(t)$.

En resumen, se mostró que la fórmula de Frullani resulta de mezclar una distribución de vida al permitir que el Logaritmo del cociente de los factores de escala se distribuya uniformemente en un rango finito. Esto da una clase de distribuciones de cola larga relacionadas con las distribuciones de barra, donde la función de densidad se expresa simplemente en términos de la función de supervivencia de la distribución padre.

El uso de las distribuciones mixtas para la inferencia se ejemplifica ajustándolas a varios conjuntos de datos (como se hará a continuación) y se espera que haya muchas aplicaciones, en salud, confiabilidad, telecomunicaciones, finanzas, etc.

Para la distribución Log-Logística con función de supervivencia $S(t) = 1/(1 + x^\alpha)$ (tomando $\beta = 1$ con respescto a la definición), siendo $b = 1$ y $r = a/b$ sustituimos en (5.2) para así tener

$$g(x) = \frac{(1 + x^\alpha)^{-1} - (1 + (rx)^\alpha)^{-1}}{Ln(r)x},$$

y en la integración

$$\bar{G}(x) = \frac{Ln\{(1 + x^{-\alpha})/(1 + (xt)^{-\alpha})\}}{\alpha Ln(r)}.$$

Esta última expresión se debe a que, cuando ajustamos datos de supervivencia censurados, también necesitamos la función de distribución $G$ correspondiente a la función de densidad de probabilidad $g$, o la función de supervivencia, que como vimos es $\bar{G} = 1 - G$. Generalmente está disponible como una función especial, y si no, puede evaluarse como una integral.

Ahora, para ilustrar el uso de las distribuciones mixtas de Frullani en el análisis de supervivencia, se analizó un conjunto de datos de Klein y Moeschberger 2003, sección 1.14. A partir de entrevistas, se encontró el tiempo en semanas hasta el destete de los primogénitos de 927 madres jóvenes, junto con algunas covariables como la raza (blanca, negra u otra), si la madre fumaba al nacer el bebé, escolaridad de la madre, condición económica, entre otras. La censura es ligera; algunas madres dejaron de amamantar antes de destetar al bebé (cambiaron a la alimentación con biberón u otros métodos). El conjunto de datos está disponible en el sitio web de los autores. Existe evidencia de redondeo en el número de semanas , pero los datos son utilizables. La Tabla 5.1 muestra la Log-verosimilitud negativa para los ajustes de algunos modelos adecuados como anteriormente se hizo con el modelo Log-Logístico a los datos, sin covariables. Se puede observar que los modelos mixtos se ajustan considerablemente mejor que los modelos convencionales. La Figura 5.1 muestra la función de riesgo del modelo Log-Logístico mixto de Frullani, con intervalos de confianza del 95 %. La función de riesgo disminuye y luego aumenta nuevamente después de aproximadamente 50 semanas. Klein y Moeschberger también lograron percibir esto, y es la razón por la cual los modelos mixtos funcionan tan bien aquí. Después de una cola de destete lento, la mayoría de las madres que aún amamantan, destetan al bebé después de un año y solo algunas continúan por más tiempo. Este tipo de comportamiento, de una larga cola que, finalmente se desvanece, encaja bien en estos modelos mixtos. La Tabla 5.2 muestra las estimaciones obtenidas mediante el uso del modelo Log-Logístico mixto de los parámetros de las covariables, los errores estándar (o coeficiente de variación según el caso) y los intervalos de confianza del 95 %. La Log-Verosimilitud aumentó en 7,84 al sumar las covariables, siendo algunas estadísticamente significativas. Los resultados obtenidos son similares a los de Klein y Moeschberger.

## 5.3. Tablas y figuras

| Modelo | -Log-Verosimilitud | Parámetro de forma | a | b |
|---|---|---|---|---|
| Exponencial | 3409.29 | 1 | 0.0594826 | n/a |
| Exponencial mixta | 3406.36 | 1 | 0.108615 | 0.0359083 |
| Weibull | 3408.56 | 0.970074 | 0.0602816 | n/a |
| Weibull mixta | 3388.41 | 2.01358 | 0.482310 | 0.0152277 |
| Gamma | 3409.27 | 0.992376 | 0.0590219 | n/a |
| Gamma mixta | 3379.93 | 5.35736 | 3.90543 | 0.0865375 |
| Lognormal | 3402.77 | 1.17603 | 0.106397 | n/a |
| Lognormal mixta | 3374.38 | 0.403807 | 0.856643 | 0.0173032 |
| Log-Logística | 3429.32 | 1.43847 | 0.101974 | n/a |
| Log-Logística mixta | 3372.66 | 7.38682 | 1.06599 | 0.0159815 |

Tabla 5.1: Log-verosimilitudes y valores de parámetros, ajustados para modelos de supervivencia ajustados a los tiempos de destete de Klein y Moeschberger (sin incluir covariables).

| Parámetro | Estimación | Error estandar | 95 % IC |
|---|---|---|---|
| Forma $\alpha$ | 6.60933 | 0.2308 (CV) | (4.204491, 10.389665) |
| Escala a | 1.70841 | 0.2101 (CV) | (1.131659, 2.579107) |
| Escala b | 0.027619 | 0.2512 (CV) | (0.016881, 0.045187) |
| Raza: negra | -0.155922 | 0.07564 | (-0.304182, -0.007663) |
| Raza: otra | -0.0009 | 0.09047 | (-0.178226, 0.176426) |
| Fumar al nacer | -0.109407 | 0.06312 | (-0.233113, 0.014300) |
| Escolaridad | 0.0440546 | 0.01878 | (0.007238, 0.080871) |
| Pobreza | 0.196038 | 0.07658 | (0.045936, 0.346140) |

Tabla 5.2: Estimaciones de parámetros para el análisis de datos de destete de Klein y Moeschberger, con errores estándar (o coeficiente de variación donde esté marcado) e intervalo de confianza del 95 %.

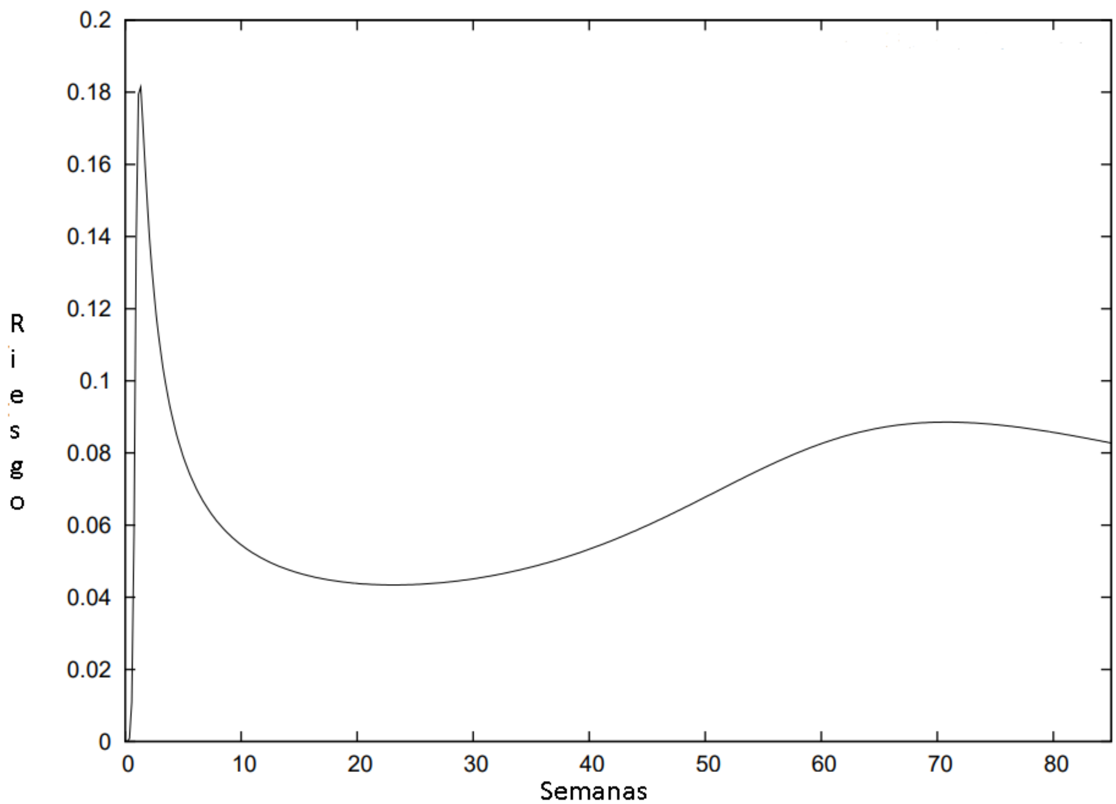


Figura 5.1: Función de riesgo de la distribución Log-Logística mixta de Frullani para el conjunto de datos de destete de Klein y Moeschberger.

# Conclusión

La integral es de gran importancia y desempeña un papel esencial e importante para la ciencia y la tecnología moderna, sencillamente serían imposibles sin ella. Las leyes de la naturaleza se expresan mediante ecuaciones que involucran funciones y sus derivadas e integrales, es por ello la importancia que tienen las integrales y el estudio de ellas.

La fórmula de Frullani ha sido ampliamente estudiada y al parecer tiene algunas aplicaciones en otras ciencias relacionadas con la matemática, por ejemplo en la estadística y la física. No solo son importantes expresiones como (2) o (4.1), sino las expresiones derivadas de ella, tales como la gran serie de ejemplos que podemos encontrar en esta tesis ya que, bajo diferentes condiciones que las funciones involucradas satisfacen, además de las integrales empleadas, estas podrían ser de ayuda en el desarrollo de otras áreas y aplicaciones, como se mencionó anteriormente. Un ejemplo de ello es la expresión (5.2), que resulta de mezclar una distribución de vida al permitir que el Logaritmo del cociente de los factores de escala se distribuya uniformemente en un rango finito. Esta es una distribución mixta de cola larga donde la función de densidad se expresa en términos de la función de supervivencia y se usan ajustandolas a varios conjuntos de datos y se espera tenga muchas aplicaciones.

Es importante enfatizar el uso de dos integrales (la de Riemann y la de Lebesgue) para la obtención de dos demostraciones distintas bajo distintas condiciones para la función $f(x)$, pues dependiendo el problema que tengamos, una puede ser más conveniente que la otra o incluso la única forma de proceder. Cabe mencionar que se conoce una demostración mediante el uso de la integral de Denjoy-Perron, pero su analisis y puesta en práctica se espera pueda ser posible para un trabajo futuro.

# Bibliografía


[1] T.M. Apostol. *Mathematical Analysis.* Pasadena: Adsison-Wesley, 1973.

[2] J. Arias de Reyna. On the theorem of frullani. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 109(1):165–175, 1990.

[3] G. R. Aryal. Transmuted log-logistic distribution. *Journal of Statistics Applications & Probability*, 1:11–20, 2013.

[4] R. Baker. Properties and applications of some distributions derived from frullani's integral. *arXiv preprint arXiv:1408.3490*, 2014.

[5] R. G. Bartle. *Introduccion al analisis matematico.* Limusa, 1982.

[6] R. G. Bartle. *The elements of integration and Lebesgue measure.* John Wiley & Sons, 2014.

[7] B. Berndt. *Ramanujan's Notebooks, Part I.* Springer-Verlag, New York, 1985.

[8] J. Edwards. *A treatise on the integral claculus.* New York: Chelsea, 1922.

[9] E. B. Elliot. *Educational times.* 1875.

[10] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products.* Academic press, 2014.

[11] K. S. K. Iyengar. *On Frullani integrals.* J. Indian Math Soc. (2), 1940.

[12] K. S. K. Iyengar. *On Frullani Integrals.* Cambridge Phill. Soc. 37, 1941.

[13] J. P. Klein and M. L. Moeschberger. *Survival Analysis Techniques for Censored and Truncated Data.* Springer, 2003.

[14] A. M. Ostrowski. On some generalizations of the cauchy-frullani integral. *Collected Mathematical Papers*, IV(1):612–616, 1949.

[15] A. M. Ostrowski. *On Cauchy-Frullani integrals.* Helvetici: Comment. Math, 1976.

[16] W. Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw -HiII Book Company, 1987.

[17] F. G. Tricomi. On the theorem of frullani. *The American Mathematical Monthly*, 58(3):158–164, 1951.

[18] F. G. Tricomi. *Esecizi e complementi di Analisi Matemática.* Padova: Parte Seconda, Terza Edizioni, C.E.D.A.M., 1960.

[19] D. Wackerly, W. Mendenhall, and R. L. Scheaffer. *Mathematical statistics with applications.* Cengage Learning, 2014.

[20] H. J. Wilcox and D. L. Myers. *An introduction to Lebesgue integration and Fourier series.* Courier Corporation, 2012.