# Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

# Facultad de Ciencias Físico Matemáticas


## Torsores y Espacios Homogéneos en Física

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Licenciado en Física**

por


Efraín Ruíz Alvarado


Asesorado por


Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada y Dr. José Eduardo Rosales Quintero



Puebla Pue.
Agosto 2020

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

# Torsores y Espacios Homogéneos en Física

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN FÍSICA**

por

Efraín Ruíz Alvarado

Asesorado por

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada y Dr. José Eduardo Rosales Quintero

Puebla Pue.
Agosto 2020

**Título:** Torsores y Espacios Homogéneos en Física
**Estudiante:** Efraín Ruíz Alvarado

COMITÉ

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo
Presidente

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla
Secretario

Dr. Jorge Velázquez Castro
Vocal

Dr. José Eduardo Rosales Quintero
Vocal

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada y Dr. José Eduardo Rosales Quintero
Asesor

# Índice general

# Agradecimientos

A mi mamá María Esther, a mi abuelo José Efraín Alvarado, a mi abuela María Lilia, a mi tía Socorro Cruz. Por mantener sus decisiones y amor hasta el final, siempre dándome todo.

A mi familia Alvarado, por apoyar cada decisión tomada y apoyarme en todo lo que hago.

A mi familia Ruíz Velázquez, por su amor y apoyo.

A mis amigos, Rebeca, Victor y Julio por siempre ayudarme a crecer y ser quien soy.

Al Dr. José Eduardo Rosales Quintero por instruirme en cada paso que daba desde que nos conocemos, tanto en el ámbito profesional como el humano.

A la Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada, por su paciencia y comprensión en el desarrollo de mi carrera.

# Capítulo 1

# Resumen

Usualmente en la física ocurren diversas situaciones en las que se presentan ambiguedades a la hora de definir cantidades, tal como es la energía potencial gravitacional de algún cuerpo desde algún sistema de referencia o la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos, incluso desde la época de Galileo se había puntualizado en que el movimiento es relativo . Esta arbitrariedad es aprovechada para definir la estructura de torsor en el segundo capítulo, esta estructura se verá auxiliada por un grupo, veremos entonces que esto es útil para entender un poco mejor las arbitrariedades, que como se verá, están presentes en la física y en otras áreas. Además en el tercer capítulo se les dará propiedades más complejas a los conjuntos estudiados de tal manera que podamos analizar con ellos algunos ejemplos que ocurren en relatividad general, más precisamente se analizará como obtener un espacio homogéneo (que sería el equivalente a un torsor) en cuyo caso tendrá que ser auxiliado de otra estructura más compleja.

**Palabras Clave** : torsor, grupo, espacio homogéneo.

# Capítulo 2

# Torsores

## 2.1. Introducción

Para comenzar introduciremos algunos conceptos matemáticos muy útiles.

**Definición** Sea $M$ un conjunto y $G$ un grupo, diremos que un mapeo $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ es una **acción** de grupo si cumple las siguientes propiedades [10]:

- Para $m \in M$ y $g_1, g_2 \in G$ se cumple

$$\Phi(g_1 \cdot g_2, m) = \Phi(g_1, \Phi(g_2, m)) \tag{2.1}$$

- Sea $e \in G$ el elemento neutro de G, entonces

$$\Phi(e, m) = m \tag{2.2}$$

Nos interesan cierto tipo de acciones particulares, aquellas denominadas **transitivas**, dicha propiedad se define de la siguiente manera:

**Definición**: Diremos que una acción de grupo $\Phi$ es **transitiva** si para cualesquiera dos elementos $m_1, m_2 \in M$ existe un elemento $g \in M$ tal que $\Phi(g, m_1) = m_2$ [16]

Sea $M$ un conjunto y $G$ un grupo, diremos que $M$ es un $\mathbf{G-Torsor}$ o $\mathbf{G-Espacio}$ si existe una acción de grupo $\Phi$ en $M$ que es transitiva. [16] [4]
Entre las propiedades que cumplen estos los Torsores se encuentra la siguiente:
Se define la relación $m_1 \sim m_2$ si y solo si $g \in G$ cumple $\Phi(g, m_1) = m_2$ . Probemos que esta relación es una relación de equivalencia:

- *Simetría:* Sean $m_1, m_2 \in M$ y $g \in G$ tal que $\Phi(g, m_1) = m_2$

$$\Phi(g^{-1} \cdot g, m_1) = \Phi(g \cdot g^{-1}, m_1) = \Phi(e, m_1) = m_1 \tag{2.3}$$

Por otro lado, desarrollando el miembro izquierdo:

$$\Phi(g^{-1} \cdot g, m_1) = \Phi(g^{-1}, \Phi(g, m_1)) = \Phi(g^{-1}, m_2) \tag{2.4}$$

Comparando (2.5) y (2.4) obtenemos

$$\Phi(g^{-1}, m_2) = m_1$$

Concluimos que si $m_1 \sim m_2$ entonces $m_2 \sim m_1$.

- *Reflexión:* Obsérvese que el elemento $e \in G$ cumple $\Phi(e, m_1) = m_1$ así $m_1 \sim m_1$
- *Transitividad:* Sean $m_1, m_2, m_3 \in M$ tal que $m_1 \sim m_2$ y $m_2 \sim m_3$, esto quiere decir que existen elementos $g_1, g_2 \in G$ tales que $\Phi(g_1, m_1) = m_2$ y $\Phi(g_2, m_2) = m_3$. Simplemente sustituimos $m_2$ en la segunda acción $\Phi(g_2, \Phi(g_1, m_1)) = m_3$ Utilizando las propiedades de la acción tenemos $\Phi(g_2, \Phi(g_1, m_1)) = \Phi(g_2 \cdot g_1, m_1) = m_3$ por tanto $m_1 \sim m_3$.

Entonces se puede hablar de las órbitas de cada elemento del conjunto $M$ como las clases de equivalencia generadas por la relación $\sim$ donde la órbita de un elemento $m \in M$ denotada por $G_m$, se define como:

$$G_m = \{\Phi(g, m) \mid g \in G\}$$

Por la propiedad de transitividad, si elegimos algún elemento de $M$ digamos $m_0$ podemos obtener todos los demás mediante la aplicación de todos los elementos del grupo $G$, por lo tanto para cada elemento de $M$ tenemos una sola órbita, que es el conjunto M. Se sigue que conociendo un solo elemento del conjunto y la forma de la acción del grupo se puede volver a construir todo el conjunto M.
En el caso en que $\mid G \mid$ y $\mid M \mid$ sean iguales, es decir, la cardinalidad de $G$ y $M$ sean iguales, la relación $m_1 \sim m_2$ anterior define un isomorfismo entre el grupo $G$ y el conjunto $M$ [4], por lo cual esto nos da información sobre cómo construir u obtener los torsores, pues cada vez que tengamos un grupo $G$, es posible encontrar un G-Torsor siempre que se cumplan los requerimientos de la acción $\Phi$ en el conjunto estudiado.

Físicamente uno puede preguntarse ¿Qué ventajas tiene este espacio? La respuesta está en la misma definición de lo que es tomar mediciones, pues la medición es una comparación, por lo tanto, solamente podemos comparar y esta comparación es entre dos elementos. Ahora la relación entre estos dos elementos es la que viene dada por los grupos. En el aspecto físico, teniendo, dos sucesos diferentes, podemos asignarles *coordenadas* (cuantos números sean suficientes para caracterizar el estado del sistema) que nos caracterizan el suceso. Una comparación natural entre estos eventos es pensar en qué podemos hacerle a un suceso para obtener el otro, pensando en que siempre podemos hacer dicho proceso.

**Teorema 1:** Sean $G, H$ dos grupos, y $M$ un G-Torsor. Si $G$ y $H$ son isomorfos entonces $M$ es un H-Torsor.

*Prueba*:
Dado que G y H son isomorfos, entonces existe un homomorfismo entre grupos biyectivo $\Lambda : H \longrightarrow G$ entre ellos. Por otro lado de la definición de Torsor, existe una acción transitiva $\Phi : G \times M \longrightarrow M$. Probaremos entonces que el mapeo definido por

$$\Psi : H \times M \longrightarrow M$$

$$\Psi(h,m) \longrightarrow \Phi(\Lambda(h),m)$$

donde $h \in H$, es una acción transitiva de $H$ en $M$. Hay que demostrar las propiedades (2.1) y (2.2).
Sean $h_1,h_2 \in H$ como el mapeo $\Lambda$ es biyectivo, existen $\Lambda(h_1),\Lambda(h_2) \in G$, entonces usando las propiedad de homomorfismo de grupo de $\Lambda$ tenemos:

$$\begin{aligned}\Psi(h_1 \cdot h_2,m) &= \Phi(\Lambda(h_1 \cdot h_2),m)\\ &= \Phi(\Lambda(h_1)\cdot\Lambda(h_2),m)\\ &= \Phi(\Lambda(h_1),\Phi(\Lambda(h_2),m))\end{aligned}$$

Como sabemos también cualquier homomorfismo de grupos lleva el elemento identidad de $H$ al elemento identidad de $G$, así:

$$\Psi(e_H,m) = \Phi(\Lambda(e_H),m) = \Phi(e_G,m) = m$$

Finalmente, dado que para cualesquiera $m_1,m_2 \in M$ existe $g \in G$ tal que $\Phi(g,m_1) = m_2$ y todo elemento de $g \in G$ puede ser obtenido mediante el isomorfismo $\Lambda(h) = g$ entonces se cumple que cualesquiera elementos $m_1,m_2 \in M$ están relacionados por algún elemento de $H$ mediante $\Psi(h,m_1) = m_2$ ■

## 2.2. Aplicaciones

En esta sección abordaremos algunos ejemplos muy simples que aparecen en física, la mayoría con grupos continuos y conjuntos infinitos, además de un ejemplo discreto que no es propiamente de la física sino de la música.

### 2.2.1. Música

Este es el ejemplo más fascinante que se encontró mientras se buscaba la estructura de Torsor, que no solo hace visible su generalidad sino el hecho de que tanto el grupo como el conjunto donde actúa, pueden ser discretos.
Se define el conjunto $\mathbb{Z}_{12}$ como el grupo cíclico de orden 12, es decir, $\mathbb{Z}_{12}$ tiene un generador que al elevarlo a la potencia 12 produce la identidad. Es conveniente identificar este

grupo como el cociente de grupos siguiente $\mathbb{Z}_{12} = \frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}$ los elementos de este grupo son las clases de equivalencia formadas por los residuos de las divisones de números enteros por 12.
**Escala cromática**. Cuando se construye la música, se define una escala cromática como aquella escala de 12 notas, cuya frecuencia de la nota final es el doble de la frecuencia de la nota inicial, usualmente en música a estas notas se les conoce como octavas. Se hace la asignación del número correspondiente de la siguiente forma [16]:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C$ | $Db$ | $D$ | $Eb$ | $E$ | $F$ | $Gb$ | $G$ | $Ab$ | $A$ | $Bb$ | $B$ |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |

*Acorde Mayor*. Es un elemento de $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}$ que cumple:

$$(a, a+4, a+7)$$

Este símbolo es la representación de tres notas que se tocan simultáneamente. Al conjunto de todos los acordes mayores lo denotaremos por $M_1$.
Similarmente para un *Acorde Menor* se debe cumplir:

$$(a, a+3, a+7)$$

Al conjunto de todos los acordes menores lo denotaremos por $M_2$
A la primera nota de cada acorde $(a, b, c)$ se le denominará *raíz*, a la segunda *media* y a la tercera *superior*. Denotaremos por $M$ al conjunto de todos los acordes mayores y menores, es decir, $M = M_1 \cup M_2$
Sea $A \in M$. Una **transposición**, es una transformación $T_n : M \to M$ dada por:

$$T_n(A) = (a+n, b+n, c+n)$$

Es evidente que si $B \in M_i$, se tiene que $T_n(B) \in M_i$ con i= 1, 2.
Por otro lado se define la **inversión** $I_n : M \to M$ como:

$$I_n(A) = (-a+n, -b+n, -c+n)$$

Observe que $I_n$ transforma elementos de $M_1$ en elementos de $M_2$ y viceversa. Estas dos transformaciones forman identidades bajo la operación composición. [16] [4]

$$\begin{aligned}
T_m \circ T_n &= T_{m+n \ mod 12} \\
T_m \circ I_n &= I_{m+n \ mod 12} \\
I_m \circ T_n &= I_{m-n \ mod 12} \\
I_m \circ I_n &= T_{m-n \ mod 12}
\end{aligned}$$

Se puede concluir entonces que el conjunto $TI = \{T_n, I_n \mid n \in \mathbb{Z}_{12}\}$ es un grupo bajo la operación composición.

Sean $A_1 \in M_1, A_2 \in M_2$ con $A_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $A_2 = (a_2, b_2, c_2)$. Se definen las transformaciones **paralelo**, **relativo** y **tono principal** $P, R, L : M \to M$ de la siguiente manera [16]:

$$\begin{aligned} P(A_1) &= (a_1, b_1 + 1, c_1) \\ P(A_2) &= (a_2, b_2 - 1, c_2) \\ R(A_1) &= (c_1 + 2, a_1, b_1) \\ R(A_2) &= (b_2, c_2, a_2 - 2) \\ L(A_1) &= (b_1, c_1, a_1 - 1) \\ L(A_2) &= (c_1 + 1, a_1, b_1) \end{aligned}$$

Es posible llegar después de algunos cálculos, a que las transformaciones son idempotentes y además tenemos que para $n, k \in \mathbf{Z}$ tales que $n \sim k$ mod 12 entonces se cumplen las siguientes propiedades [16]:

$$(L \circ R)^n = (L \circ R)^k$$
$$R \circ (L \circ R)^n = R \circ (L \circ R)^k$$

Se debe notar que se pueden obtener $L$ y $P$ apartir de las relaciones antes estudiadas, es decir; $P = R \circ (L \circ R)^3$ y $L = R \circ (L \circ R)^{11}$. Es de esta manera que el conjunto PRL definido como:

$$PRL = \{(L \circ R)^n, R \circ (L \circ R)^n \mid n \in \mathbf{Z}_{12}\}$$

forma un grupo bajo la operación composición $\circ$.
Ahora sea $A \in M, T_n, T_m \in TI$ definimos una función $\phi : TI \times M \longrightarrow M$ dada por:

$$\phi(T_n, A) = T_n(A)$$

De esta manera podemos ver que $\phi$ cumple:

$$\phi(T_0, A) = T_0(A) = A$$

$$\phi(T_n \circ T_m, A) = T_n \circ T_m(A) = T_n(T_m(A)) = T_n(\phi(T_m, A)) = \phi(T_n, \phi(T_m, A))$$

Por lo cual podemos concluir que $\phi$ es una acción. Además $\phi$ tiene las siguientes dos propiedades:
• El único elemento de $TI$ que cumple $\Phi(g, A) = A$ es el elemento neutro $T_0$ de TI.
• Existe un único elemento $h \in G$ tal que $\Phi(h, A) = B$ para $A, B \in M$.

De esta manera, como TI actúa de manera transitiva en $M$, $M$ recibe el nombre de TI - Torsor.
Dado que existe un homomorfismo biyectivo entre el grupo TI y PLR dado por

$$\omega : PLR \longrightarrow TI$$

$$\omega((L \circ R)^k) = T^k \qquad \omega(R \circ (L \circ R)^k) = I_n$$

donde $n \sim -x\ mod 12$
Además dado que el grupo TI y PRL tienen la misma cardinalidad, existe un isomorfismo de grupos $\psi : PRL \longrightarrow TI$ entre ellos. Por el Teorema 1, M es un $PRL$- Torsor.

### 2.2.2. Voltajes

Cuando se entra en el estudio de la electrostática, el campo eléctrico $\mathbf{E}$ cumple ciertas condiciones, una de las cuales es $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ esto da paso a que la integral de línea alrededor de cualquier trayectoria cerrada de este campo sea cero. $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$. Dado que esto implica que la integral de línea $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ es independiente de la trayectoria, podemos definir una función de la siguiente manera:

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{O}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}' \tag{2.5}$$

A esta función se le llama potencial eléctrico y se puede expresar físicamente como el trabajo requerido para mover una carga positiva de magnitud 1 del punto $O$ al punto $\mathbf{r}$ en presencia del campo eléctrico $\mathbf{E}$. Sin embargo, no existe un punto de referencia preferido para estos sistemas físicos (electrostáticos) sino que tenemos la libertad de elegir el punto inicial $O$. Por lo que es conveniente usar la diferencia de potencial entre dos puntos, dicha definición viene derivada del análisis de la energía electrostática entre dos puntos.

$$\begin{aligned} V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) &= -\int_{O}^{\mathbf{b}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}' + \int_{O}^{\mathbf{a}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}' \\ &= -\int_{O}^{\mathbf{b}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}' - \int_{\mathbf{a}}^{O} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}' \\ &= -\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}' \end{aligned}$$

Además note que la diferencia de un potencial medido desde cierto punto (Origen) y desde otro es una constante. Es decir, el valor de un potencial medido desde un punto o desde otro difiere solamente en una constante que para mediciones físicas o para uso de la Teoría Electromagnética no influye significativamente.

Denotemos por $\mathbb{V}$ al conjunto de todos los valores de potencial eléctrico que se pueden medir en algún experimento. Note entonces que podemos definir un mapeo de la siguiente manera:

$$\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$$

$$\phi(r, V(\mathbf{a})) = V(\mathbf{a}) + r$$

Primero demostraremos que $\phi$ es una acción.
Si $e \in \mathbb{R}$ es tal que $\phi(e, V(\mathbf{a})) = V_(\mathbf{a})$ entonces por la unicidad del elemento neutro en los números reales tenemos que $e = 0$.
Ahora, sean $r, s \in \mathbb{R}$ entonces :

$$\phi(r+s, V(\mathbf{a})) = V(\mathbf{a}) + s + r = \phi(s, V(\mathbf{a})) + r = \phi(r, \phi(s, V(\mathbf{a}))$$

Con lo cual concluimos que $\phi$ es transitiva. Finalmente $\phi$ es una acción de grupo.
Ahora veamos, qué obtenemos físicamente con esto, es decir, buscar el significado físico de la acción de grupo y qué es exactamente este número real. Supongamos que existen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\phi(r_1, V(\mathbf{a})) = V(\mathbf{b}) \quad \Longrightarrow \quad \phi(-r_1, V(\mathbf{b})) = V(\mathbf{a}) \quad \Longleftrightarrow \quad V(\mathbf{a}) = V(\mathbf{b}) - r_1 \tag{2.6}$$

$$\phi(r_2, V(\mathbf{b})) = V(\mathbf{a}) \tag{2.7}$$

En la ecuación (4) está expresada la propiedad del elemento inverso del grupo, es decir, si el elemento $r_1$ nos lleva de $V_1$ a $V(\mathbf{b})$ entonces $-r_1$ nos lleva de $V(\mathbf{b})$ a $V_1$. Por lo tanto, sumando (4) y (5):

$$V(\mathbf{a}) + V(\mathbf{b}) + r_2 - r_1 = V(\mathbf{a}) + V(\mathbf{b})$$

Se sigue que $r_2 = r_1$.
Debido a que esta acción me debe dar otro elemento $V(\mathbf{b})$ en $\mathbb{V}$ tenemos entonces

$$V(\mathbf{a}) + r = V(\mathbf{b})$$

Por otro lado, ya que tenemos una operación en el conjunto $\mathbb{V}$ que es la suma, podemos hablar solamente de diferencias entre los elementos de este conjunto, es decir:

$$V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = (V(\mathbf{a}) + r) - V(\mathbf{a}) = r$$

Este numerito $r$ es el que en física medimos y se conoce como diferencia de potencial.

### 2.2.3. Entropía

Supongamos que tenemos un sistema termodinámico en un cierto estado de equilibrio A y también tenemos otro estado de equilibrio que llamaremos B, estos estados son diferentes entre sí. Si este sistema es llevado mediante una trayectoria reversible $R_1$ del estado A al B y luego llevado de B a A mediante otra trayectoria reversible $R_2$, entonces por el **Teorema de Clausius**:

$$\oint_{R_1+R_2} \frac{đQ}{T} = 0$$

Esto lleva a la siguiente condición:

$$\int_{R_1} \frac{đQ}{T} = \int_{-R_2} \frac{đQ}{T}$$

Lo que quiere decir que existe una función (representada por una diferencial exacta) cuya diferencial corresponde al integrando

$$dS = \frac{đQ}{T}$$

Hay que hacer hincapié en que la diferencial del calor es no exacta, por otro lado dado que el calor es una propiedad extensiva y la temperatura intensiva entonces esto hace de la entropía una propiedad extensiva. Además, su diferencial es exacta, lo que implica que al integrar ambos lados de un estado A a un estado B la parte de la entropía solo dependerá de los puntos inicial y final, esto es:

$$S(B) - S(A) = \int_A^B \frac{đQ}{T}$$

Ahora este resultado nos dice que solo podemos medir variaciones de la entropía entre dos estados diferentes de un sistema termodinámico si conocemos las capacidades caloríficas a lo largo de la trayectoria reversible

$$\Delta S = S(B) - S(A)$$

Incluso si definimos un estado $O$ como referencia para una entropía de cierto estado A, tendríamos

$$S(A) = \int_O^A \frac{đQ}{T}$$

Sin embargo:

$$S(B) - S(A) = \int_O^B \frac{đQ}{T} - \int_O^A \frac{đQ}{T}$$

Dado que la entropía solo depende de los estados inicial y final, la integral del estado $O$ al estado $B$ la podemos dividir como una integral del estado $O$ al estado $A$ y luego del estado $A$ al estado $B$, por lo tanto.

$$S(B) - S(A) = \int_O^B \frac{đQ}{T} - \int_O^A \frac{đQ}{T} = \int_O^A \frac{đQ}{T} + \int_A^B \frac{đQ}{T} - \int_O^A \frac{đQ}{T} = \int_A^B \frac{đQ}{T}$$

Por lo tanto la diferencia de entropía entre dos estados es independiente del estado de referencia.
Ahora, si existiese un estado con entropía 0 podríamos establecer un elemento neutro en la entropía, sin embargo, la **Tercera Ley de la Termodinámica** evita esto, ya que dice [17]:

*En el límite del cero absoluto, cuyo valor nunca podremos alcanzar, la entropía de* *un sistema en equilibrio tenderá a una constante independiente de los demás parámetros intensivos, dicha constante debe ser tomada como cero*

Por estas razones podemos hacer de la entropía un torsor sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$ de la siguiente manera.
Sea $\Xi$ el conjunto de todas las entropías posibles para cierto sistema, es decir:

$$\Xi = \{S(A) \mid \text{A es un estado de equilibrio de cierto sistema}\}$$

Demostremos ahora matemáticamente que se tiene la estructura de torsor. Recordemos que por construcción $\mathbb{R}$ es un grupo bajo la operación suma.
Ahora, definiendo un mapeo de la siguiente manera:

$$\phi : \mathbb{R} \times \Xi \longrightarrow \Xi$$

$$\phi(r, S(A)) = S(A) + r$$

Primero demostraremos que $\phi$ es una acción.
Si $e \in \mathbb{R}$ es tal que $\phi(e, S(A)) = S(A)$ entonces por la unicidad del elemento neutro en los números reales tenemos que $e = 0$.
Ahora, sean $r, s \in \mathbb{R}$ entonces :

$$\phi(r+s, S(A)) = S(A) + s + r = \phi(s, S(A)) + r = \phi(r, \phi(s, S(A)))$$

Así $\phi$ es una acción de grupo.
Debido a que esta acción me debe dar otro elemento $S(B)$ en $\Xi$ tenemos entonces

$$S(A) + r = S(B)$$

Por otro lado, ya que tenemos una operación en el conjunto $\Xi$ que es la suma, podemos hablar solamente de diferencias entre los elementos de este conjunto, es decir:

$$S(B) - S(A) = (S(A) + r) - S(A) = r$$

$$r = \Delta S = S(B) - S(A)$$

Se concluye entonces que el conjunto $\Xi$ es un $\mathbb{R}$- Torsor.

Podemos apreciar de cierta manera que en estas estructuras, al conocer el grupo que actúa sobre el conjunto y un punto del mismo conjunto podemos reconstruir todo el conjunto.

# Capítulo 3

# Espacios Homogéneos.

## 3.1. Introducción

Se ha podido apreciar en los ejemplos físicos que algunas mediciones importantes en la física no dependen del punto inicial elegido. Sin embargo, las mediciones que se buscan en otras ramas de la física (usualmente son cantidades conservadas) no suelen tener estructuras tan sencillas, ya que, por ejemplo en el caso de la relatividad, tenemos que lidiar con un espacio de 4 dimensiones curvado, por otro lado en Mecánica Cuántica las observables se asocian a operadores, en dicho caso, lo que se mide son los eigenvalores del observador, en el caso de Teorías de Campo se buscan corrientes conservadas. El propósito del trabajo en la sección siguiente no será hablar específicamente sobre las simetrías o cantidades conservadas de un sistema físico, sino analizar de manera muy básica el espacio que subyace a la física del mismo, es decir, el escenario natural donde ocurririía la física y encontrar las transformaciones que no nos sacan del mismo, estas resultan tener un interés físico particular.
Hemos revisado ya que la libertad de escoger un punto de referencia, inicio o de partida da la posibilidad de que se construya una estructura de Torsor. Sin embargo, el concepto puede generalizarse , promoviendo el conjunto $M$ a una variedad diferenciable y el grupo $G$ a un grupo de Lie. Dicha estructura tendría un poco más de sutilezas, por lo cual pondremos las más útiles . Además ahora la estructura de estudio será lo que se conoce como espacio homogéneo.

**Definición** Sea $M$ una variedad diferenciable y $G$ un grupo de Lie, diremos que un mapeo $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ es una **acción** (a la izquierda) de grupo si cumple las siguientes propiedades [10] [12]:

- Para $m \in M$ y $g_1, g_2 \in G$ se cumple $\Phi(g_1 \cdot g_2, m) = \Phi(g_1, \Phi(g_2, m))$
- Sea $e \in G$ el elemento neutro de $G$, entonces $\Phi(e, m) = m$

Ya que estamos trabajando con variedades diferenciables, pediremos también que la acción sea suave, es decir, que el mapeo que define la acción sea suave. Por lo mismo, es necesario introducir nuevos conceptos y herramientas que nos ayudarán a construir la definición de espacio homogéneo.

**Definiciones**: Sean $M$ una variedad diferenciable, $G$ un grupo de Lie, diremos que una acción de grupo $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ es [10]:

- **Transitiva:** Si para cualesquiera dos elementos $m_1, m_2 \in M$ existe un único elemento $g \in G$ tal que $\Phi(g, m_1) = m_2$

- **Libre** si para algún elemento $m \in M$ se cumple $\Phi(g, m) = m$ esto implica que $g = e$

- **Adecuada** si el mapeo que define la acción es propio. Es decir, para cualquier subconjunto compacto $K \subset M$ su preimagen $\Phi^{-1}(K)$ es un conjunto compacto en $G \times K$

Es importante recordar la definición de órbita pues nos ayudará a llegar a los espacios cociente. Sea $p \in M$ se define la orbita $G \cdot p$ como $G \cdot p = \{\phi(g, p) | g \in G\}$. Apartir de esta definición podemos definir la relación siguiente diremos que $p \sim q$ si existe $g \in G$ tal que $\Phi(g, p) = q$. Esta es una relación de equivalencia, cuyas clases son las órbitas de $G$ en $M$. Se denota por $M/G$ al conjunto de las órbitas de G en M.

Un **G-espacio** o **espacio homogéneo** es una variedad suave dotada de una acción *transitiva* de un grupo de Lie $G$ [10]. Es importante mencionar que analizar un espacio de órbitas en el que en principio, no sabemos cúantas órbitas puede tener ni qué estructura adicional posee, es bastante díficil verlo a primera vista. Aún más, como la acción actúa de manera adecuada tenemos ciertas restricciones sobre la compacidad de los subconjuntos. Para esto nos ayuda el primer teorema que estableceremos aquí.

**Teorema 2.1 De la variedad cociente**
Suponga que $G$ es un grupo de Lie que actúa de manera libre, adecuada y suave en una variedad suave $M$. Entonces el espacio de órbitas $M/G$ es una variedad topológica de dimensión $dimM - dimG$ y tiene una única estructura diferenciable con la propiedad de que el mapeo cociente $\pi : M \longrightarrow M/G$ definido por:

$$\pi(p) = G \cdot p$$

es una inmersión *(*Apéndice) suave [10].

**Teorema 2.2 De la construcción de espacios homogéneos**

Sea $G$ un Grupo de Lie y $H$ un subgrupo cerrado de $G$ el espacio de cosets izquierdos $G/H$ es una variedad topológica de dimensión $dimG - dimH$ y tiene una única estructura suave de tal manera que el mapeo cociente $\pi : G \longrightarrow G/H$ $\phi(g) = gH$ es una submersión suave (*Apéndice*). La acción a izquierdas de $G$ en $G/H$ está dada por:

$$g_1 \cdot (g_2H) = (g_1g_2)H$$

y hace de $G/H$ un espacio homogéneo [10].

**Teorema 2.3 De la caracterización de espacios homogéneos**
Sea $G$ un grupo de Lie y $M$ un G-espacio y $p \in M$. El grupo de isotropía $G_p = \{g \in G|g(p) = p\}$ es un subgrupo cerrado de $G$, y el mapeo $F : G/G_p \longrightarrow M$ definido por $F(gG_p) = g \cdot p$ es un difeomorfismo equivariante. [10]

Estos Teoremas tienen resultados bastante fuertes, pues el primero nos dice cḿo construir un espacio homogéneo a partir de un grupo de Lie. Veremos más adelante que las acciones de grupo de Lie, no son por casualidad, sino que podemos encontrar ciertas estructuras que preserven alguna propiedad de la variedad, por ejemplo, la métrica. El segundo Teorema nos dice que podemos crear espacios homogéneos a partir del cociente de dos variedades, en especial grupos de Lie, uno contenido en el otro. Pero el tercero es el que nos importa más. Precisamente por lo siguiente:
Tenemos una variedad diferenciable en la cual actúa un grupo. Como la acción de grupo es transitiva, basta con conocer un solo punto de la variedad para poder reconstruirla; ya que cada elemento del grupo actuando en el punto elegido nos lleva a otro de la variedad. Por otro lado, la variedad que va a ser construida, es difeomorfa al cociente entre el grupo que actúa sobre ella, y el grupo de isotropía de cualquier punto.

Algo que se puede apreciar de las definiciones es que se pide que la acción sea diferenciable. Como en los siguiente a desarrollar se utilizarán acciones de los grupos $SO(n)$ y $SO(p,q)$ con $n, p, q$ números enteros positivos, mostraremos que la acción de estos grupos en una variedad es diferenciable.

**Teorema 2.4:** Existe una acción suave de los grupos de Lie $SO(n)$ y $SO(p,q)$ a una variedad diferenciable $\mathcal{M}$ de dimensión $n$ y $p+q$ respectivamente
*Prueba:*
Sea $\mathcal{M}$ una variedad diferenciable de dimensión $n$. Respecto de cierta carta $(V, \Psi)$, un punto $p \in V$ tiene n números que lo identifican con coordenadas $(x^1(p), x^2(p), ..., x^n(p))$ en $\mathbb{R}^n$. Haremos también una identificación de los puntos de $\mathbb{R}^n$ con los vectores de una columna

con $n$ filas de la siguiente manera:

$$(x^1(p), x^2(p), ..., x^n(p)) \longrightarrow \begin{pmatrix} x^1(p) \\ x^2(p)\cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^n(p) \end{pmatrix}$$

La identificación anterior es un isomorfismo diferenciable entre el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y el espacio vectorial de vectores columna de $n$ filas $C_n$, ya que tienen las mismas dimensiones y asociamos un punto de $\mathbb{R}^n$ a un solo punto $C_n$.
Note entonces que podemos definir una acción del grupo $SO(n)$ a la variedad $\mathcal{M}$ de la siguiente manera:

$$\Phi : SO(n) \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$$

$$\Phi(S, p) = \xi^{-1} \circ \tau(S) \circ \Psi(p)$$

donde $(W, \xi)$ es la carta a la que pertenece el punto con las coordenadas después de haber actuado con la representación $\tau(S)$ de un elemento $S \in SO(n)$, (estamos pensando en el elemento $\tau(S)$ como una matriz). Mostraremos que el mapeo $\Phi$ es una acción. Para esto, notemos que el elemento identidad $E$ pertenece a $SO(n)$. Queremos que se cumpla $\Phi(E, p) = p$. Si $y^i(p)$ son las coordenadas del punto una después de multiplicar la matriz $\tau(E)$ por las coordenadas $x^i(p)$ tenemos

$$y^i(p) = \sum_{j=1}^{n} \tau(S)^i_j x^j(p) = \sum_{j=1}^{n} \delta^i_j x^j(p) = x^i(p)$$

donde $\tau(S)^i_j$ son las componentes de la matriz $\tau(S)$. Por lo tanto el mapeo cumple $\Phi(E, p) = p$
Tomemos dos elementos $S, T \in SO(n)$, queremos probar $\Phi(TS, p) = \Phi(T, \Phi(S, p))$ Denotemos por $y^i(p)$ a los elementos ya transformados por la matriz $\tau(S)$, es decir, $y^i(p) = \sum_{j=1}^{n} \tau(S)^i_j x^j(p)$ y por otro lado, llamemos $z^k(p) = \sum_{i=1}^{n} \tau(T)^k_i y^i(p)$. Notemos entonces que $\Phi(TS, p)$ en coordenadas viene dada por $z^k(p) = \sum_{j=1}^{n} \tau(TS)^k_j x^j(p) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \tau(T)^k_i \tau(S)^i_j x^j(p)$ sin embargo si asociamos primero la multiplicación de la matriz S con las coordenadas $x^i$ obtenemos $z^k(p) = \sum_{i=1}^{n} \tau(T)^k_i y^i(p)$ que son las coodenadas del mapeo $\Phi(T, \Phi(S, p))$. Por lo tanto, se muestra que:

$$\Phi(TS, p) = \Phi(T, \Phi(S, p))$$

Notemos que $\Psi$ y $\xi$ son transformaciones diferenciables, sin embargo, falta verificar que la multiplicación de la matriz es diferenciable. Si llamamos a los puntos transformados como $y^i(p)$ con i = 1,2, ... n, sabemos por la definició de multiplicación de matrices que:

$$y^i(p) = \sum_{j=1}^{n} \tau(S)_{ij} x^j(p)$$

Donde $\tau(S)^i_j$ es el elemento de la *i*-ésima columna y *j*-ésima fila de la matriz $S$. Es evidente que entonces $y^i(p)$ son funciones polinomiales de los elementos $x^j(p)$ que como ya se sabe, son funciones diferenciables. Por lo tanto la composición $\xi^{-1} \circ \tau(S) \circ \psi$ es diferenciable. Lo que nos dice que el mapeo que define la acción es diferenciable.
Para una varidedad de $p+q$ dimensiones y un elemento de $SO(p,q)$ la demostración es completamente análoga.

## 3.2. Modelos geométricos del espacio-tiempo

La intención de la sección es presentar los diferentes modelos teóricos con los que se puede estudiar el espacio tiempo como una variedad diferenciable, algunos de ellos soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío, es decir [1][13]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \tag{3.1}$$

en los cuales se define cierta métrica y con ella un grupo de transformaciones que la mantienen invariante. Trataremos de extraer la física de estos espacios y explicar cómo es que surgen. Antes de avanzar, tenemos que dar dos definiciones que son parte de la geometría diferencial de variedades.

**Definición:** Sea $M$ una variedad diferenciable, $p \in M$ y sea $g$ un dos tensor covariante en $M$.Se dirá que $g$ es una **métrica** en $M$ cumple las siguientes tres propiedades:

- *Simetría*. Para cada punto $p \in M$ se cumple $g_p(v_p, w_p) = g_p(w_p, v_p)$ con $v_p, w_p \in T_pM$.
- *Definido positivo*. Para cada punto $p \in M$ se cumple $g_p(v_p, v_p) \geq 0$ y si $g_p(v_p, v_p) = 0$ entonces $v_p = 0$ con $v_p \in T_pM$
- *No-degenerado*. Si $g_p(v_p, w_p) = 0$ para todo $w_p \in T_pM$ entonces $v_p = 0$.

Otro nombre para $g$ es *tensor métrico*. En algunos casos, sobre todo en relatividad especial y general el tensor no es definido positivo, de esta manera se dice que el tensor $g$ es un tensor pseudométrico. [6]

**Definición:** Una variedad diferenciable $M$ que cuenta con un tensor (pseudo) métrico $g$ diferenciable es llamada **variedad (pseudo) riemaniana**.

Usualmente las métricas $g$ se caracterizan por su signatura $(p,q)$ es decir, para cada espacio tangente $T_pM$, es posible hallar una base $\beta$, de tal manera que la métrica sea diagonal y tenga $p$ números 1 y $q$ números -1. La signatura de Lorentz es aquella con signatura (3, 1). Además, en el contexto de la Relatividad General es importante señalar que necesitamos una métrica $g_{\mu\nu}$ que nos diga cómo mediremos en el espacio-tiempo. Cabe recordar que la idea de esto es ver al espacio-tiempo como una variedad. [9]

### 3.2.1. Métrica Lorentziana $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

Conviene introducir un espacio vectorial $M^n_m$ donde $n,m \in \mathbb{N}$ cuyo producto interno tiene signatura $(n,m)$ y $dim M^n_m = n+m$ (recordemos que la signatura de la métrica es independiente de la base). En el caso particular para el cual q = 1, tenemos lo que se conoce como un espacio vectorial generalizado de Minkowski $M^n_1$ Para este caso, se tienen las siguientes definiciones [3].

- Si $g_{M^n_1}(u,u) < 0$ entonces se dice que u es *temporaloide*
- Si $g_{M^n_1}(u,u) = 0$ entonces se dice que u es *luxoide*
- Si $g_{M^n_1}(u,u) > 0$ entonces se dice que u es *espacialoide*

De manera análoga a como se define un cono de luz en relatividad especial podemos dar una generalización del cono de luz, tomemos $u \in M^n_1$ entonces, al conjunto: $C(u) = \{v \in M^n_1 | \langle v,u\rangle < 0\}$ se le denomina cono de luz. Cuando $n = 3$ este cono tiene información física muy importante, pues los eventos que pertenecen al cono de luz de otro evento dado son bien o su futuro (es decir, ocurren después del evento seleccionado como punto de referencia) o parte de su pasado (ocurrieron antes del evento seleccionado). [7][3]

**Definición de espacio-tiempo**
La definición más apropiada es un espacio tiempo $\mathcal{M}$ es una variedad de 4 dimensiones, conexa, orientable en el tiempo, pseudo-riemaniana, cuya signatura de la métrica es tipo Lorentz. [3]

**Espacio-Tiempo de Minkowski $\Lambda = 0$**
Particularmente en este ejemplo, debemos imponer una condición más, y esa condición es que esta variedad sea isométrica a un espacio vectorial de Minkowski $M^3_1$
Para el espacio de Minkowski de dimensión 4, la métrica tiene la siguiente forma explícita:

$$g(u,u) = -(x^0(u))^2 + (x^1(u))^2 + (x^2(u))^2 + (x^3(u))^2$$

$x^i(u)$ son las coordenadas del punto $u \in M^3_1$ Aquellas transformaciones que dejan este elemento invariante son las llamadas transformaciones de Lorentz, que son las rotaciones en el espacio y los "boost", estosúltimos representan la transformación que sufren las coordenadas entre un sistema de referencia inercial y otro. Dichas transformaciones se denotan por $\Lambda$ y cumplen las siguientes propiedades.

$$\Lambda^T \Lambda = 1$$

$$\det\left(\Lambda^a_b\right) = 1$$

Al grupo formado por estas transformaciones se le conoce como grupo de Lorentz y se denota por $SO(3,1)$. Es importante hacer énfasis en que es un grupo de Lie, de dimensión 6. Sin embargo, nos falta considerar las traslaciones espaciales y temporales que podemos hacer en este espacio. Es decir, tenemos que considerar transformaciones de la forma:

$$P(x^a(u)) = \Lambda^a_b x^b(u) + d^a \tag{3.2}$$

donde $d^a$ son constantes arbitrarias. Esta transformación no es lineal, sin embargo, el grupo de Lorentz, más las traslaciones en los ejes forman un grupo de Lie que se le conoce como grupo de Poincaré y se denota por ISO(3, 1). Es decir, las transformaciones de la forma (3.2) son conocidas como transformaciones de Poincaré.
Necesitamos además de las transformaciones que se pueden hacer, una manera de movernos dentro del espacio-tiempo, sin embargo, aquí hay que aclarar algo, muy importante, nuestra variedad que funge como espacio-tiempo tiene en cada punto $p \in M$ un espacio tangente $T_pM$. Este espacio es difeomorfo a $M^3_1$ ya que es un espacio vectorial y la signatura de la métrica es de Lorentz por definición. Sin embargo, como bien se sabe, es más sencillo trabajar en un espacio vectorial que en una variedad, por lo cual podemos trasladar lo que ocurre en el espacio tangente a la variedad de manera suave. Para esto tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 2.5: [3]**
Dado un vector $v \in T_p\mathcal{M}$ existe una única geodésica (Apéndice) $\gamma_v$ tal que:
1) $\gamma'_v(0) = v$
2) El dominio $I_v$ es el más grande posible. Si $\alpha : J \longrightarrow M$ es una geodésica (Apéndice) tal que $\alpha'(0) = v$ entonces $\alpha = \gamma_v|J$
Nótese que la geodésica $\gamma_v$ se pueden entender como una trayectoria en la variedad $\mathcal{M}$ en la dirección de $v$. Es de aquí de donde podemos definir la función exponencial. Nos fijaremos en un conjunto de vectores, de cierto espacio tangente, es decir, para $p \in \mathcal{M}$ sea $D_p$ el conjunto de vectores en $T_p\mathcal{M}$ tales que su geodésica está definida en el intervalo [0, 1]. Se define el mapeo exponencial

$$exp : D_p \longrightarrow \mathcal{M}$$

$$exp(v) = \gamma_v(1)$$

Note que de la definición se tiene $exp(tv) = \gamma_v(t)$. Es decir, este mapeo toma vectores de $T_p\mathcal{M}$ y los lleva a geodésicas que pasan por p.

**Proposición 2.6: [3]**
Para cada punto $p \in \mathcal{M}$ existe una vecindad $U \subset T_p\mathcal{M}$ y una vecindad $V \subset \mathcal{M}$ alrededor de p, de tal manera que el mapeo exp: $U \longrightarrow V$ es un difeomorfismo.

Además la métrica de $M_1^3$ es la misma que la variedad $\mathcal{M}$, entonces dado que el espacio $T_p\mathcal{M}$ visto como variedad es isomorfo a $M_1^3$ y este espacio es isométrico a $\mathcal{M}$, así, el mapeo exp es también una isometría entre $\mathcal{M}$ y $M_1^3$. Se sigue que $\mathcal{M}$ vista desde $p$ es geométricamente equivalente a ver $T_p\mathcal{M}$ desde su origen [3].
Ahora veamos que tenemos una acción del grupo de Poincaré a esta variedad, definida de la siguiente manera

$$\Phi : ISO(3,1) \times M \longrightarrow M$$

$$\Phi(\mathcal{L}, p) = \mathcal{L}(p)$$

donde en coordenadas tendríamos $\mathcal{L}(p)^a = \Lambda^a_b x^b(p) + d^b$ . Es evidente desde una perspectiva física que siempre podemos elegir un sistema de coordenadas inercial de tal manera que el punto en cuestión sea el origen, puesto que todos los sistemas inerciales son equivalentes, esto es, $\chi(p) = (0,0,0,0)$. De esta manera la acción del grupo de Poincaré es transitiva, ya que podemos alcanzar todos los puntos de nuestra variedad, ya sea mediante una composición de transformaciones de Poincaré o por una sola, esta propiedad es debido a que las transformaciones forman un grupo.
Obsérvese que al escoger las coordenadas de dicho punto como 0. El grupo de isotropía es el grupo de Lorentz, pues al ser transformaciones lineales, el 0 lo lleva al 0. Por lo tanto, para los puntos en los que se puede elegir un sistema de referencia inercial en el que el origen sea dicho punto, el grupo de isotropía es el grupo de Lorentz. De esta manera , por el teorema de caracterización de espacios homogéneos, se concluye que el espacio-tiempo de Minkwoski es un espacio homogéneo difeomorfo a [1]:

$$\frac{ISO(3,1)}{SO(3,1)}$$

**Espacio-Tiempo de Sitter $\Lambda > 0$**
Este es un espacio ya con curvatura intrínseca, por lo que el trabajo consistirá en buscar las transformaciones más generales que podamos hacer sin salirnos del espacio en cuestión. En este caso, se puede pensar a este espacio como un encajamiento en un espacio más grande. Físicamente, habitar en un espacio tiempo de Sitter, no nos daría pista alguna de estar en un espacio más grande, sin embargo, pensar en el espacio-tiempo de Sitter como un encajamiento facilita mucho el entendimiento del mismo. Primero, se debe de tomar un

espacio de Minkowski de dimensión 5. Es decir, un espacio vectorial con una métrica de signatura (4,1). Dentro de este espacio, el espacio de Sitter se define como [15] [14]:

$$dS = \{u \in M_1^4 | g_{M_1^4}(u,u) = a^2 \text{ y } x^4(u) \geq 0\}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. El conjunto $dS$ puede ser obtenido directamente del espacio vectorial $M_1^4$. Definamos una función $f : M_1^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ como $f(u) = g_{M_1^4}(u,u) - a^2$. Se puede observar que los puntos que cumplen $f(u) = 0$ son precisamente aquellos que pertenecen al conjunto dS. Elijamos una carta para $M_1^4$, pues sabemos que este espacio es una variedad diferenciable, sea $(M_1^4, Id_5)$ tal carta. La matriz $D_i(f \circ id_{\mathbb{R}^5})$ es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} -2x^0(u) & 2x^1(u) & 2x^2(u) & 2x^3(u) & 2x^4(u) \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Tomemos el caso límite, en el que tenemos algún punto $u \in dS$ de tal manera que dicho punto cumple $x^1(u) = x^2(u) = x^3(u) = x^4(u) = 0$ y $x^5(u) = a$ entonces la matriz 3.3 tiene al menos rango 1 para cualquier punto en $dS$. Por el primer teorema del Apéndice tenemos que $dS$ es una subvariedad del espacio $M_1^4$ y su dimensión es la dimensión del espacio vectorial menos el número de funciones que la caracterizan, es decir, tiene 4 dimensiones. Debido a la forma de los elementos de $dS$. Se observa que si hacemos una transformación $S$ en el espacio físico, lo más simple es pensar que esta transformación matemáticamente será lineal, por lo cual tiene asociada una matriz $\tau(S)$ dado que tomará puntos de un espacio y los tiene que llevar al mismo espacio, esta matriz debe ser cuadrada.

$$\begin{pmatrix} y^0(u) \\ y^1(u) \\ y^2(u) \\ y^3(u) \\ y^4(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(S)^0{}_0 & \tau(S)^0{}_1 & \tau(S)^0{}_2 & \tau(S)^0{}_3 & \tau(S)^0{}_4 \\ \tau(S)^1{}_0 & \tau(S)^1{}_1 & \tau(S)^1{}_2 & \tau(S)^1{}_3 & \tau(S)^1{}_4 \\ \tau(S)^2{}_0 & \tau(S)^2{}_1 & \tau(S)^2{}_2 & \tau(S)^2{}_3 & \tau(S)^2{}_4 \\ \tau(S)^3{}_0 & \tau(S)^3{}_1 & \tau(S)^3{}_2 & \tau(S)^3{}_3 & \tau(S)^3{}_4 \\ \tau(S)^4{}_0 & \tau(S)^4{}_1 & \tau(S)^4{}_2 & \tau(S)^4{}_3 & \tau(S)^4{}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0(u) \\ x^1(u) \\ x^2(u) \\ x^3(u) \\ x^4(u) \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

esta matriz $\tau(S)$ va a estar restringida porque se busca que el elemento ya transformado siga dentro del conjunto, es decir, si $u \in dS$ entonces $\tau(S)[u] \in dS$. La representación matricial de la transformación $S$ debe satisfacer $\tau(S)\tau(S)^T = I$, lo que nos dice que la matriz debe ser ortogonal. Aún más, la forma de los elementos de $dS$ es preservada por las matrices ortogonales que pertenecen al grupo $SO(4,1)$, este es un hecho muy importante que se hará más evidente después. Es conveniente que al tener un espacio tiempo con métrica de Lorentz, podamos clasificar a los campos vectoriales en él y asignar una orientación temporal. Para poder estudiar mejor este espacio podemos proponer una parametrización de este espacio de la siguiente forma:

$$\mathbf{P}(t,\alpha,\beta,\gamma) = (asenh(t), acosh(t)cos(\alpha), acosh(t)sen(\alpha)cos(\beta), ...$$

$$...acosh(t)sen(\alpha)sen(\beta)cos(\gamma), acosh(t)sen(\alpha)sen(\beta)sen(\gamma))$$

De esta manera, se induce una métrica que tiene la siguiente forma:

$$\left(g_{\mu\nu}\right) = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2cosh^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2cosh^2(t)sen^2(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2cosh^2(t)sen^2(\beta)sen^2(\alpha) \end{pmatrix}$$

Respecto de esta métrica debemos encontrar un campo vectorial temporaloide. Para lo cual proponemos a dicho campo como $\Xi = asenh(t)\frac{\partial}{\partial t}$, es sencillo ver $g_(\Xi, \Xi) = -a^4 senh^2(t)$. Cantidad que es negativa para cualquier valor del parámetro $t$.
Finalmente, para la conexidad [9] [11][12], la topología de este espacio es $\mathbb{R} \times S^3$ debido a la forma de sus elementos encajados en el espacio vectorial de Minkowski, la parte temporal corresponde a $\mathbb{R}$ y la parte espacial a la esfera $S^3$. Recordemos, que estos dos espacios son conexos y por el Teorema en Apéndice, el producto es conexo. Por lo tanto el espacio dS es conexo. De esta manera, tomando en cuenta la definición, se tiene que el espacio de Sitter es un espacio tiempo.
Como ya se ha argumentado, las matrices que me llevan de un punto a otro en el espacio tiempo dS, son las matrices ortogonales que pertenecen al grupo $SO(4,1)$ este grupo es un grupo de Lie [8], la razón por la que se utiliza el grupo $SO(4,1)$ es fśicamente porque sus elementos son transformaciones continuas en un espacio vectorial con signatura $(4,1)$. Cabe mencionar que transformaciones como las reflexiones e inversiones se omiten de manera global puesto que tienen consecuencias físicas no tan triviales. Dicho esto, podemos definir una acción de este grupo a la variedad de la siguiente forma:

$$\Phi : SO(4,1) \times dS \longrightarrow dS$$

$$\Phi(S,u) = S(u)$$

donde $S(u)$ es la acción de la representación matricial de $S$ sobre las coordenadas del punto $u$. Aún más, el grupo de isotropía de un punto en esta variedad es el grupo de Lie $SO(3,1)$ ya que para cualquier punto $u \in dS$ el grupo $SO(3,1)$ mantiene invariante la 5ta coordenada, es decir:

$$\underbrace{-(x^0(u))^2 + (x^1(u))^2 + (x^2(u))^2 + (x^3(u))^2}_{SO(3,1)} + (x^4(u))^2 = a^2$$

Esto es debido a que siempre podemos encontrar una carta en la cual las coordenadas del punto en cuestión sean el origen en el sistema de coordenadas. Por lo tanto, el espacio de Sitter es difeomorfo al espacio:

$$\frac{SO(4,1)}{SO(3,1)}$$

Nótese que la dimensión coincide adecuadamente.

**Espacio-Tiempo Anti de Sitter $\Lambda < 0$**
Así como el espacio tiempo de Sitter se puede estudiar como una superficie en un espacio de 5 dimensiones, con el espacio Anti de Sitter sucede algo similar.
Tomemos un espacio de 5 dimensiones $M_2^3$ como espacio subyacente para el estudio de este espacio. El espacio Anti de Sitter se define como la siguiente superficie cuadrática [15] [9]:

$$AdS = \{u \in M_2^3 | g(u,u) = -a^2, \text{ y } x^0(u) \geq 0\}$$

El conjunto $AdS$ puede ser obtenido directamente del espacio vectorial $M_2^3$. Definamos una función $f : M_2^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ como $f(u) = g_{M_2^3}(u,u) - a^2$. Se puede observar que los puntos que cumplen $f(u) = 0$ son precisamente aquellos que pertenecen al conjunto AdS. Sea $(M_2^3, Id_5)$ una carta para $M_2^3$ . La matriz $D_i(f \circ id_{\mathbb{R}^5})$ es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} -2x^0(u) & -2x^1(u) & 2x^2(u) & 2x^3(u) & 2x^4(u) \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Tomemos el caso límite, en el que tenemos algún punto $u \in AdS$ de tal manera que dicho punto cumple $x^1(u) = x^2(u) = x^3(u) = x^4(u) = 0$ y $x^0(u) = a$ entonces la matriz (3.9) tiene al menos rango 1 para cualquier punto en $AdS$. Por el primer teorema del Apéndice tenemos que $AdS$ es una subvariedad del espacio $M_2^3$ es decir, AdS es una variedad por sí sola de 4 dimensiones nuevamente, por el mismo resultado. Este espacio tiene dos componentes conexas, la primera corresponde a los puntos $u \in M_2^3$ tales que $x^0(q) \geq 0$ y la segunda corresponde a todos aquellos cuya coordenada $x^0(0)$ es negativa. Es observable que la topología de este espacio es $S^1 \times \mathbb{R}^3$, ya que la signatura hace la división en un círculo y un espacio con la misma topología de $\mathbb{R}^3$ si se identifican los puntos $x^0(u)$ y $-x^0(u)$ [9] para todo punto $u$ en el espacio Anti de Sitter, esto es porque físicamente estamos buscando solo una coordenada temporal y 3 espaciales. Nuevamente, como este espacio es el producto de espacios conexos el espacio Anti de Sitter es conexo. Por otro lado parametrizando este espacio como sigue:

$$\mathbf{P}(t,\alpha,\beta,\gamma) = (cosh(t)sen(\alpha), cosh(t)cos(\alpha), senh(t)cos(\beta), ...$$
$$...cosh(t)sen(\beta)cos(\gamma), senh(t)sen(\beta)sen(\gamma))$$

Se induce la siguiente métrica:

$$\left(g_{\mu\nu}\right) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2cosh^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2senh^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2senh^2(t)sen^2(\beta) \end{pmatrix}$$

De la misma manera, podemos proponer un campo vectorial que es temporaloide respecto a esta métrica. Dicho campo es $\chi = \frac{\partial}{\partial\alpha}$, es sencillo notar que $g(\chi,\chi) = -a^2cosh^2(t)$, función negativa para cualquier valor del parámetro $t$, por lo cual el campo es temporaloide.

Es ahora visible que el espacio Anti de Sitter cumple todos los requerimientos para ser un espacio tiempo.
Debido a la forma de los elementos de $AdS$. Se observa, que si hacemos una transformación S sobre las coordenadas, cuya representación matricial es $\tau(S)$ entonces:

$$\begin{pmatrix} y^0(u) \\ y^1(u) \\ y^2(u) \\ y^3(u) \\ y^4(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(S)^0{}_0 & \tau(S)^0{}_1 & \tau(S)^0{}_2 & \tau(S)^0{}_3 & \tau(S)^0{}_4 \\ \tau(S)^1{}_0 & \tau(S)^1{}_1 & \tau(S)^1{}_2 & \tau(S)^1{}_3 & \tau(S)^1{}_4 \\ \tau(S)^2{}_0 & \tau(S)^2{}_1 & \tau(S)^2{}_2 & \tau(S)^2{}_3 & \tau(S)^2{}_4 \\ \tau(S)^3{}_0 & \tau(S)^3{}_1 & \tau(S)^3{}_2 & \tau(S)^3{}_3 & \tau(S)^3{}_4 \\ \tau(S)^4{}_0 & \tau(S)^4{}_1 & \tau(S)^4{}_2 & \tau(S)^4{}_3 & \tau(S)^4{}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0(u) \\ x^1(u) \\ x^2(u) \\ x^3(u) \\ x^4(u) \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

De manera análoga al espacio de Sitter buscamos transformaciones que no nos saquen de este espacio, es decir, los puntos transformados deben satisfacer $g(S(u), S(u)) = -a^2$ donde $S(u)$ es la acción de la representación matricial de S sobre las coordenadas del punto u respecto de cierta carta. La representación matricial de la transformación S debe satisfacer $\tau(S)\tau(S)^T = I$, lo que nos dice que la matriz debe ser ortogonal. Aún más, la forma de los elementos de $AdS$, es preservada por las matrices ortogonales que pertenecen al grupo $SO(3,2)$, este es un hecho muy importante físicamente, pues estamos buscando transformaciones continuas, que en este caso serían rotaciones en las coordenadas espaciales y algo similar a los boost, estas vienen siendo precisamente los elementos de $SO(3,2)$.
Podemos definir una acción de este grupo hacia la variedad mediante

$$\Phi : SO(3,2) \times AdS \longrightarrow Ads$$

$$\Phi(S,u) = S(u)$$

Donde $S(u)$ indica que la representación matricial de $S$ está actuando en el vector de las coordenadas del punto $u$. Como las matrices ya satisfacen que el punto $S(u) \in AdS$ tenemos que la acción es transitiva, pues todos los puntos de interés físico en $AdS$ pueden ser alcanzados mediante un solo punto y aplicándole todas las matrices del grupo $SO(3,2)$. Por otro lado, debido a la forma de los puntos en $AdS$ notemos que el grupo $SO(3,1)$ deja invariante la coordenada $x^0$, pues actuaría en la coordenada temporal $x^1$ y en las espaciales $x^2, x^3, x^4$:

$$-(x^0(u))^2 \underbrace{-(x^1(u))^2 + (x^2(q))^2 + (x^3(q))^2 + (x^4(q))^2}_{SO(3,1)} = -a^2$$

Por lo tanto el grupo de isotropía de un punto en el espacio tiempo Anti de Sitter, es el grupo $SO(3,1)$. Así, el espacio-tiempo Anti de Sitter es difeomorfo a [1]:

$$AdS \approx \frac{ISO(3,1)}{SO(3,1)}$$

Lo que hace de este espacio, un espacio homogéneo.

### 3.2.2. Métrica euclidiana $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$

[1] En esta sección ya se lidia con la Mecánica Clásica, en la cual se piensa que el tiempo es absoluto , es decir, estamos considerando el espacio-tiempo de Newton en el cual ya no tenemos eventos ni una clasificación de los mismos. El espacio de Newton es una variedad Riemaniana $E$ isométrica a $\mathbb{R}^4$ con el producto interior. El espacio de Newton se define como el producto de las variedades Riemanianas $\mathbb{R}\times E^3$ globalmente, dado que ambos espacios son conexos, el espacio de Newton es conexo. Pensar en un tiempo absoluto en este contexto, nos permite que el tiempo se contraiga o dilate para observadores diferentes, sin embargo, en la mecánica Newtoniana no hay ninguna ley que prohíba invertir la dirección del tiempo. Para evitar esta complicación, se supondrá simplemente que el tiempo tiene una dirección bien definidida. Note además que en este caso, la métrica es una diagonal de números uno, es decir $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$
En el espacio tiempo de Newton podemos hacer transformaciones que nos dejan invariante el origen del sistema de referencia, como, aquí estamos pensando en una métrica diagonal con números 1, tenemos que buscar transformaciones que nos dejen invariante lo siguiente:

$$(x^0(p))^2 + (x^1(p))^2 + (x^2(p))^2 + (x^3(p))^2$$

Evidentemente las transformaciones que buscamos son aquellos elementos del grupo $SO(4)$. Pero además al poseer sistemas de referencial inerciales, tenemos otras 4 transformaciones adicionales permitidas en nuestro espacio, que son las traslaciones espaciales y temporal. Al grupo que tiene a los desplazamientos y rotaciones en 4 dimensiones se le llama $ISO(4)$, es un grupo de Lie de 10 dimensiones (SO(4) tiene 6 dimensiones, mientras que existe otra dimensión extra por cada desplazamiento). Entonces, cualquier punto que pertenezca a nuestra variedad, puede ser alcanzado mediante estas transformaciones. Por lo tanto, podemos definir una acción de este grupo a la variedad $E$ mediante:

$$\Phi : ISO(4)\times E \longrightarrow E$$

$$\Phi(S, p) = S(p)$$

donde $S$ es una transformación de la siguiente manera, sea $(U, \Xi)$ una carta alrededor del punto $p$; la representación matricial de la transformación $S$ sería la siguiente:

$$\begin{pmatrix} y^0(p) \\ y^1(p) \\ y^2(p) \\ y^3(p) \\ y^4(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau(S)^0{}_0 & \tau(S)^0{}_1 & \tau(S)^0{}_2 & \tau(S)^0{}_3 \\ \tau(S)^1{}_0 & \tau(S)^1{}_1 & \tau(S)^1{}_2 & \tau(S)^1{}_3 \\ \tau(S)^2{}_0 & \tau(S)^2{}_1 & \tau(S)^2{}_2 & \tau(S)^2{}_3 \\ \tau(S)^3{}_0 & \tau(S)^3{}_1 & \tau(S)^3{}_2 & \tau(S)^3{}_3 \\ \tau(S)^4{}_0 & \tau(S)^4{}_1 & \tau(S)^4{}_2 & \tau(S)^4{}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d^0 \\ d^1 \\ d^2 \\ d^3 \\ d^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0(p) \\ x^1(p) \\ x^2(p) \\ x^3(p) \\ x^4(p) \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

donde la matriz que aparece en la transformación anterior es parte de $SO(4)$ y $d^i \in \mathbb{R}$. Debido a que podemos alcanzar todo punto con la acción de este grupo, entonces, la acción

es transitiva. Por otro lado, si en cada punto $p \in E$ encontramos una carta $(U, \Xi)$ tal que ese punto sea el origen del sistema de coordenadas, entonces, $SO(4)$ no transforma el punto en uno diferente, es decir, $SO(4)$ es el grupo de isotropía de cada punto. Es importante mencionar que el grupo de Lie $ISO(4)$ tiene 10 dimensiones y el grupo $SO(4)$ tiene 6.
Se concluye que el espacio tiempo de Newton es una variedad diferenciable de 4 dimensiones difeomorfa a [1].

$$E \approx \frac{ISO(4)}{SO(4)}$$

**Espacio-tiempo esférico $\Lambda > 0$**
Se puede entender a esta solución como una variedad encajada en un espacio de 5 dimensiones. Más especificamente la variedad a analizar es la siguiente: considere un espacio vectorial real de 5 dimensiones $E^5$ con una métrica euclidiana $\delta_{\mu\nu}$ y $p$ un punto en él. Como el punto $p$ es parte de un espacio vectorial, tiene ciertas coordenadas respecto de una base, sin embargo, dado que el espacio a estudiar tiene incluso nombre propio, se optará por no mostrar las coordenadas hasta que sea necesario. Ahora el espacio que vamos a estudiar es nuevamente un encajamiento, en un espacio vectorial de 5 dimensiones. El espacio en cuestión es:

$$F^4 = \{p \in E^5 | g(p, p) = a^2\}$$

Notemos que después de una normalización en realidad se está estudiando una esfera encajada en un espacio de 4 dimensiones. Es bien sabido que la esfera, en cualquier dimensión es una variedad por sí sola. Más aún tiene la propiedad de ser conexa, pues todas las esferas, como variedades lo son.
Las transformaciones más simples que se permiten en este espacio son las siguientes.

$$\begin{pmatrix} y^0(p) \\ y^1(p) \\ y^2(p) \\ y^3(p) \\ y^4(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(S)^0{}_0 & \tau(S)^0{}_1 & \tau(S)^0{}_2 & \tau(S)^0{}_3 & \tau(S)^0{}_4 \\ \tau(S)^1{}_0 & \tau(S)^1{}_1 & \tau(S)^1{}_2 & \tau(S)^1{}_3 & \tau(S)^1{}_4 \\ \tau(S)^2{}_0 & \tau(S)^2{}_1 & \tau(S)^2{}_2 & \tau(S)^2{}_3 & \tau(S)^2{}_4 \\ \tau(S)^3{}_0 & \tau(S)^3{}_1 & \tau(S)^3{}_2 & \tau(S)^3{}_3 & \tau(S)^3{}_4 \\ \tau(S)^4{}_0 & \tau(S)^4{}_1 & \tau(S)^4{}_2 & \tau(S)^4{}_3 & \tau(S)^4{}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0(p) \\ x^1(p) \\ x^2(p) \\ x^3(p) \\ x^4(p) \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Y para que las nuevas coordenadas $y^\mu$ sigan siendo parte de la esfera, la matriz $\tau(S)$ debe cumplir $\tau(S)^T \tau(S) = I$ pues al elevar las coordenadas nuevas al cuadrado se debe cumplir que su suma es igual a $a^2$. Entonces S en realidad es un elemento de $O(5)$. Sin embargo, este grupo de Lie tiene elementos cuyas representaciones son transformaciones discretas como reflexiones e inversiones, que como se ha mencionado tienen consecuencias físicas no triviales. Por esta razoón, solo tomaremos su parte conexa que es el grupo de Lie $SO(5)$ [8]. Este grupo de Lie tiene como elementos a las rotaciones en un espacio de 5 dimensiones, esto es de vital ayuda, ya que las rotaciones son transformaciones suaves. Este grupo conecta todos los puntos de mi variedad, por la acción natural que es precisamente la multiplicación de matrices por las coordenadas en columna de un punto. Entonces, podemos definir una acción de la siguiente manera:

$$\Phi : SO(5) \times F^4 \Longrightarrow F^4$$

$$\Phi(S, p) = S(p)$$

Donde $S(p)$ representa la multiplicación matricial antes descrita. Aún más, podemos mantener invariante la coordenada $x^5(p)$ para cualquier punto $p$ mediante transformaciones que logren mantener la estructura cuadrática tenemos que buscar un grupo de transformaciones que mantenga la forma $(x^0(p))^2 + (x^1(p))^2 + (x^2(1))^2 + (x^3(p))^2$. El grupo buscado, es el grupo de Lie $SO(4)$, note además que este grupo es un subgrupo cerrado (topológicamente) de $SO(5)$ además de que este grupo no mueve el origen y no actúa en la quinta coordenada. Por lo tanto, podemos encontrar una carta en la que el grupo $SO(4)$ sea el grupo de isotropía de los puntos. Es de notarse entonces que las cartas que hacen esto son aquellas que hacen $x^5(p) = a$. De esta manera, el espacio-tiempo $F^4$ es difeomorfo a [1]:

$$F^4 \approx \frac{SO(5)}{SO(4)}$$

**Espacio-tiempo hiperbólico $\Lambda < 0$**
Ahora consideraremos nuevamente un espacio de Minkowski $M_1^4$ en el cual, tomaremos ciertos puntos y estudiaremos la variedad resultante como un encajamiento. Así, se define el siguiente conjunto de puntos:

$$\mathbf{H} = \{r \in M_1^4 | g_{M_1^4}(r,r) = a^2,\ x^0(r) > 0\}$$

Si definimos el mapeo $f : M_1^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ como $f(r) = g_{M_1^4}(r,r) - a^2$ entonces los puntos que cumplen $f(r) = 0$ nos dan el espacio $\mathbf{H}$. Sea $(M_2^3, Id_5)$ una carta para este espacio vectorial. La matriz $D_i(f \circ id_{\mathbb{R}^5})$ es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} -2x^0(p) & 2x^1(p) & 2x^2(p) & 2x^3(p) & 2x^4(p) \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Tomemos el caso límite, en el que tenemos algún punto $r \in \mathbf{H}$ de tal manera que dicho punto cumple $x^0(r) = x^1(r) = x^2(r) = x^3(r) = 0$ y $x^4(r) = a$ entonces la matriz (3.9) tiene al menos rango 1 para cualquier punto en $\mathbf{H}$. Por el primer teorema del Apéndice tenemos que $\mathbb{H}$ es una subvariedad del espacio $M_1^4$ es decir, $\mathbb{H}$ es una variedad por sí sola de 4 dimensiones.
Notemos que esta variedad así como está definida es conexa, pues representa la mitad de un hiperboloide de dos hojas, además de que su topología es $S^4$. Además, en esta variedad también el tiempo es absoluto, por lo tanto se elige una dirección peferente de lo que en este caso sería la coordenada $x^1(r)$, se demanda entonces que sea positiva. Además, como en los casos anteriores, buscamos una transformación que me mantenga los puntos

de esta variedad dentro de esta variedad, es decir, buscamos transformaciones $S$ cuya representación matricial $\tau(S)$ transforme las coordenadas de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} y^0(r) \\ y^1(r) \\ y^2(r) \\ y^3(r) \\ y^4(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(S)^0{}_0 & \tau(S)^0{}_1 & \tau(S)^0{}_2 & \tau(S)^0{}_3 & \tau(S)^0{}_4 \\ \tau(S)^1{}_0 & \tau(S)^1{}_1 & \tau(S)^1{}_2 & \tau(S)^1{}_3 & \tau(S)^1{}_4 \\ \tau(S)^2{}_0 & \tau(S)^2{}_1 & \tau(S)^2{}_2 & \tau(S)^2{}_3 & \tau(S)^2{}_4 \\ \tau(S)^3{}_0 & \tau(S)^3{}_1 & \tau(S)^3{}_2 & \tau(S)^3{}_3 & \tau(S)^3{}_4 \\ \tau(S)^4{}_0 & \tau(S)^4{}_1 & \tau(S)^4{}_2 & \tau(S)^4{}_3 & \tau(S)^4{}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0(r) \\ x^1(r) \\ x^2(r) \\ x^3(r) \\ x^4(r) \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Nuevamente la matriz debe cumplir $SS^T = I$ para que el elemento transformado esté dentro del espacio, condición que restringe a S como elemento del grupo $O(1,4)$. Por razones físicas antes dichas, nos restringiremos aún más, al grupo $SO(4,1)$. por lo tanto, vemos podemos conectar dos puntos con los elementos de este grupo mientras se encuentren dentro de la misma hoja del hiperboloide. Nótese que $SO(4,1)$ es un grupo de Lie conexo de 10 dimensiones. Podemos apreciar que si mantenemos la coordenada $x^0(r)$ fija, tenemos la libertad de hacer transformaciones en las coordenadas restantes, con la restricción de que estás transformaciones tienen que mantener invariante la combinación $(x^1(r))^2 + (x^2(r))^2 + (x^3(q))^2 + (x^4(q))^2$. Precisamente esto es lo que hace el grupo $SO(4)$ que es un grupo de Lie de 6 dimensiones. Por lo tanto, para cualquier punto dentro de $\mathbf{H}$ las transformaciones de isotropía de un punto son los elementos que están en $SO(4)$.
Por lo tanto, definimos la acción $\Phi$ de la siguiente manera:

$$\Phi : SO(4,1) \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$$

$$\Phi(S,r) = S(r)$$

donde $S(r)$ denota la multiplicación matricial de la matriz $\tau(S) \in SO(4,1)$ por las coordenadas del punto $r$ respecto alguna carta $(V,\psi)$. De esta manera se observa que la accín es transitiva, pues todos los puntos de $\mathbf{H}$ pueden ser alcanzados con algún elemento de $SO(4,1)$ o con composiciones de estas transformaciones. Además de que como se ha dicho, el grupo de isotropía de un punto es $SO(4)$. Por lo tanto, este espacio-tiempo cumple [1]:

$$\mathbf{H} \approx \frac{SO(4,1)}{SO(4)}$$

Incluso las dimensiones coinciden.

# Capítulo 4

# Conclusiones

- El concepto de Torsor ayuda a obtener resultados sin preferencia alguna sobre algún punto de referencia.
- Necesitamos un grupo para poder darle una estructura libre de un punto de referencia al sistema que estamos estudiando.
- Para analizar de una manera más geométrica los espacios estudiados se requiere de una variedad diferenciable y dado que por inspiración física se buscan transformaciones continuas y diferenciables en las coordenadas, se debe recurrir al uso de los grupos de Lie que a su vez poseen todas estas propiedades ya mencionadas.
- Los grupos de Lie nos permiten hacer transformaciones suaves en el espacio con la restricción de quedarnos dentro del mismo espacio
- La presencia de los grupos de Lie como moderadores del estudio de espacios homogéneos pues en lugar de estudiar una variedad diferenciable, se pueden, estudiar los cocientes entre los grupos de Lie ya antes mencionados

## ¿Qué sigue?

- Buscar las isometrías de las métricas que tiene el espacio para analizar las propiedades que estas dan al espacio, como la curvatura, tosrión y demás e interpretar los resultados, así como extrapolarlos a otras ramas de la física.
- Trasladar los conceptos aprendidos de espacios homogéneos al estudio de Teorías de Norma.

# Apéndice

**Teorema 1.6 Differentiable Manifolds: A Theoretical Physics Approach [G. Torres del Castillo]**

Sean $f^1, f^2, ...f^m$ funciones diferenciables reales definidas en M. El conjunto $N = \{p \in M | f^1(p) = f^2(p) = ... = f^m(p) = 0\}$ es una subvariedad de dimensión $n - m$ de $M$ si para cualquier carta $(U, \phi)$ del atlas de M tal que U intersecta N la matriz de entradas $D_i(f^j \phi^1)|_\phi(p)$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$ es de rango m para $p \in N$ ($D_i$ quiere decir derivada parcial)

**Conexidad**

Sean X un espacio topológico, diremos que X es conexo, si para cualesquiera dos puntos $p, q \in X$ existe una función continua $\sigma : [0, 1] \longrightarrow X$ de tal manera que $\sigma(0) = p$, $\sigma(1) = q$ y $\sigma(t) \in X \forall t \in [0, 1]$

**Campos vectoriales**

Sea $\mathcal{M}$ una variedad diferenciable, y $T\mathcal{M}$ su correspondiente haz tangente. Un campo vectorial es un mapeo diferenciable $\kappa : \mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M}$ que cumple $\kappa\pi = id_{\mathcal{M}}$

**Geodésicas**

Una geodésica es una curva $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}$ que cumple $D_t\gamma'(t) = 0$, donde $D_t$ es la derivada covariante sobre $\gamma$.

**Geodésica inextendible**

Aquella geodésica cuyo dominio es el más grande para el cual está bien definida

**Teorema de la orientacion temporal**: Una variedad Lorentziana es orientable si y solo si, Posee un campo vectorial $X$ temporaloide. Es decir, que para cada punto p de la variedad $< X_p, X_p >< 0$.

**Teorema del producto de espacios conexos** El producto de espacios es conexo si y solo si los espacios son conexos.

**Teorema de subgrupos de Lie**: Sea S un subgrupo de un grupo de Lie G. Si S es subvariedad entonces es cerrado.

**Inmersión**: Un mapeo suave $\omega : M \longrightarrow N$ es una inmersión si su diferencial es inyectivo en cada punto ($rango\Psi = dimN$)

**Submersión**: Un mapeo suave $\omega : M \longrightarrow N$ es una submersión si su diferencial es sobreyectivo en cada punto ($rango\Psi = dimM$)

**Mapeo Equivariante**: Sea G un grupo de Lie, y M, N, variedades suaves aquipadas con una acción de grupo $\Psi_1, \Psi_2$ respectivamente. Un mapeo $\omega : M \longrightarrow N$ se dice equivariante a la izquierda si con respecto a las acciones del grupo $G$ se cumple

$$\omega : (\Psi_1(g, p)) = \Psi_2(g, \omega(p))$$

# Bibliografía

[1] Wise, D. K. (2006, noviembre 30). MacDowell-Mansouri gravity and Cartan geometry. Recuperado de https://arxiv.org/abs/gr-qc/0611154
[2] Hassani, S. (2012). Mathematical Physics (2.a ed.). Illinois, USA: Springer.
[3] O'Neill, B. (1983). Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity. Berkeley, United States: Elsevier Science.
[4] Baez, J. (s. f.-a). torsors. Recuperado 24 de febrero de 2020, de http://math.ucr.edu/home/baez/torsors.html
[5] Baez, J. (s. f.-b). week234. Recuperado 24 de febrero de 2020, de http://math.ucr.edu/home/baez/week234.html
[6] Torres del Castillo, G. F. (2011). Differentiable Manifolds. New York, USA: Birkhauser Boston.
[7] Arvanitogeorgos, A., (2003). An Introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces. Providence, USA: American Mathematical Society.
[8] Hall, B. C., (2003). Lie Groups, Lie Algebras, and Representations. New York, USA: Springer Publishing.
[9] Ivancevic, V. G. (2008). Quantum Leap. Danvers, USA: World Scientific.
[10]Lee, J. M. (2013). Introduction to Smooth Manifolds. New York, USA: Springer Publishing.
[11]Lee, J. M. (2019). Introduction to Riemannian Manifolds. New York, USA: Springer Publishing.
[12]Nakahara, M. (2003). Geometry, Topology and Physics (2.a ed.). Bristol, UK: IOP Publishing.
[13]Rindler, W. (2006). Relativity Special, General and Cosmological (2.a ed.). Oxford, Reino Unido: Oxford University Press.
[14]Schwichtenberg, J. (2017). Physics from Symmetry. New York, USA: Springer Publishing.
[15] Moschella, U. (2005, diciembre 1). The de Sitter and anti-de Sitter Sightseeing Tour. Recuperado de http://www.bourbaphy.fr/moschella.pdf
[16] Agustin-Aquino, O. A., du Plessis, J., Luis Puebla, E., Montiel, M. (2009). Una introducción a la Teoría de Grupos con aplicaciones en la Teoría Matemática

de la Música. CDMX: Sociedad Mexicana de Matemáticas.
[17] Ansermet, J. P., Brechet, S. D. (2019). Principles of Thermodynamics. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.