



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

**POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

**Análisis de Confiabilidad de Sistemas  
Reparables**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:**

**MAESTRA EN CIENCIAS  
MATEMÁTICAS**

**PRESENTA:**

**MARÍA CRISTINA MEDEL LÓPEZ**

**ASESORADA POR:**

**DR. FRANCISCO SOLANO TAJONAR  
SANABRIA**

**FCFM**

**PUEBLA OCTUBRE 2025**



**BUAP**

**DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE**  
**SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y**  
**ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP**  
**P R E S E N T E:**

Por este medio le informo que la C:

**MARÍA CRISTINA MEDEL LÓPEZ**

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 3 de octubre de 2025, con la tesis titulada:

*Análisis de Confiabilidad de Sistemas Reparables*

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

**A T E N T A M E N T E.**  
H. Puebla de Z. a 7 de octubre de 2025

  
**DR. RAÚL ESCOBEDO CONDE**  
**COORDINADOR DEL POSGRADO**  
**EN MATEMÁTICAS.**



D\*REC/mrv





*A mi familia, mi hogar.*

ESTO TAMBIÉN PASARÁ.



---

# AGRADECIMIENTOS

La realización de este trabajo no habría sido posible sin el apoyo de personas cuya amistad, cariño y consejo me brindaron calma y motivación en los momentos en que más lo necesité. Asimismo, agradezco a las instituciones que me ofrecieron el espacio y el respaldo necesarios durante todo el proceso de esta investigación.

A mis padres, Israel y Livia, quienes con su ejemplo de amor y perseverancia son los pilares de mi vida. Han creído en mí y siempre he podido contar con su apoyo en todos los aspectos posibles, encontrado en ustedes el impulso para seguir adelante.

A mis hermanas, Sandi y Susi, que con su paciencia, amor y entrega hacia sus seres queridos me inspiran profundamente. Su cariño y la admiración que siento por ustedes fueron un refugio invaluable en todo momento.

A Mavie, porque ya no recuerdo cómo era el mundo antes de ti.

La amistad es un regalo invaluable. En estas líneas quiero expresar mi gratitud por las conversaciones, la curiosidad compartida, el humor y el cariño de quienes han caminado conmigo desde hace ya gran parte de este recorrido: Jess, mi persona; Diego, Hazel, Gabi, Sofi e Itzel.

Natalia, con mucha alegría te agradezco en estas líneas. En distintos momentos me encontré con numerosas dudas sobre la dirección del presente trabajo, fueron tus consejos, compañía y amistad, conformados no solo por tu experiencia sino también por tu cariño, los que me brindaron el espacio y herramientas para retomar el rumbo.

Agradezco a Vivi, por los esporádicos pero muy valiosos encuentros que tuvimos en la facultad, la inspiración que me generas y el apoyo que me has brindado sin duda alguna me impulsaron a lo largo de esta etapa, así como a Ingrid por la compañía y ánimo en la cotidianidad de los desayunos y las prisas matutinas, los mejores deseos para ambas en todos sus proyectos.

A Luis y Daniela, compañeros de generación y maravillosas personas, tuve la

oportunidad de ser testigo de su crecimiento en lo profesional y lo personal, así como en el desarrollo que han tenido en sus metas y nuevas etapas de vida, les agradezco por mostrarme mundos nuevos tanto en lo académico como fuera de la facultad. Es un honor ser colegas, pero sobre todo ser amigos.

Eduardo, no hay un solo momento de esta etapa —feliz o adverso— en el que no haya contado con tu compañía, consejo y confianza. Gracias a ti renové mi visión sobre mi trabajo y sobre tantas otras cosas. Compartir contigo hace a los buenos momentos aún mejores y los desafíos más llevaderos. Gracias por cuidar mi corazón y por reafirmar la promesa de acompañarnos en esta vida, en lo feliz y lo adverso.

A Lalito y Sofita, quienes me animaron a terminar el 3 % restante más largo de la tesis, son una motivación y una inspiración constante.

Mi sincero agradecimiento al Dr. Francisco Tajonar por su apoyo y orientación a lo largo de todo este trabajo. Gracias a usted redescubrí principios y nociones que sin duda me acompañarán en mi trayectoria profesional y personal. Le expreso mi admiración, respeto y gratitud por su confianza y su perenne paciencia.

Gracias también al Dr. Hugo Cruz, Dr. Fernando Velasco, Dr. Víctor Vázquez y M. C. Sergio Adán, por su acompañamiento y valiosas observaciones, las cuales enriquecieron el desarrollo de este trabajo.

Finalmente, agradezco al Programa Nacional de Becas del CONAHCYT, hoy Secihti, por el generoso apoyo recibido, gracias al cual he podido continuar mi formación académica y profesional. Reconozco con claridad la importancia de este tipo de programas, indispensables para que más jóvenes puedan desarrollarse en la ciencia y la investigación, pilares fundamentales del progreso social y humano.

---

# INTRODUCCIÓN

La teoría de confiabilidad se desarrolla en los campos de la ingeniería y la estadística. En ambos casos, el objetivo es determinar la probabilidad de que una componente o sistema funcione adecuadamente bajo condiciones operativas establecidas y en un periodo de tiempo determinado [4].

En la década de los 50's el estudio de la confiabilidad adquirió mayor importancia dentro de las distintas industrias tecnológicas que surgieron en la Segunda Guerra Mundial, tales como la aeroespacial, aeronáutica, de energía y de equipo militar, las exigencias de calidad y aprovechamiento de recursos para la producción en serie y de instrumentos más sofisticados requería una mejor gestión de las fallas y la probabilidad de fallas. Sin embargo, los antecedentes históricos de la teoría de confiabilidad corresponden a trabajos en el control de pandemias y en el estudio de riesgos de seguros de vida [10].

Un estudio de confiabilidad implica determinar la probabilidad de que ocurra una falla, un evento que interrumpe el correcto funcionamiento del sistema. El análisis de las fallas puede llevarse a cabo con dos enfoques distintos: uno implica recopilar información sobre los tiempos de operación del sistema hasta que se produce la falla, conocido como enfoque estadístico; el segundo enfoque consiste en examinar las causas físicas que llevan a la ocurrencia de una falla, denominado estudio del proceso de deterioro. Aunque en un análisis se pueden combinar elementos de ambos enfoques de manera híbrida [22].

Cuando se presenta una falla, existen dos opciones, repararla o dar por terminado el tiempo de vida del sistema, esto da como resultado una clasificación de los sistemas en reparables o no reparables. Si el sistema no es reparable el análisis de confiabilidad atiende a preguntas tales como: ¿cuál es la probabilidad de que ocurra una falla antes de un tiempo determinado?, ¿cuál es la vida útil esperada del sistema? ¿qué porcentaje de artículos durará más allá de cierto tiempo? Cuando el sistema es reparable el análisis debe contemplar además la "disponibilidad" del sistema, es decir, que este se encuentre o no en reparación a un determinado tiempo  $t$ , el número  $n$  de fallas que puede ocurrir antes de cierto tiempo, así como la relación de dependencia entre

los tiempos de falla, la cual se relaciona con el nivel de reparación del sistema, dicho nivel varía desde que el sistema quede tan bien como nuevo, o tan mal como antes de haber ocurrido una falla [21].

Los análisis de confiabilidad son útiles en el sector productivo para proveedores y consumidores, ya que permiten valorar la calidad y por lo tanto, la competitividad de los sistemas en el mercado. Hacen posible la mejora de las políticas de reparación o planes de mantenimiento así como la consideración de acuerdos de garantía, entre otros [4].

El presente trabajo de tesis se orienta al estudio de confiabilidad bajo el enfoque estadístico y se encuentra dividido en tres capítulos, los cuales se describen a continuación.

En el Capítulo 1 se reúnen los elementos teóricos necesarios para llevar a cabo un análisis de confiabilidad, tales como sus funciones básicas, las leyes de falla cuyo uso es recurrente dentro de la teoría por sus propiedades para modelar el comportamiento de los sistemas, así como la función de estructura y el concepto de sistema coherente, que consiste en caracterizar la forma en que sus componentes se conectan, para lo cual se emplean recursos visuales como los diagramas de bloques.

En el Capítulo 2 se presentan las técnicas para cuantificar la confiabilidad de un sistema con base en su estructura, también se abordan los conceptos de censura de muestras conformadas por tiempos de falla y se presenta un ejemplo que reúne estos elementos en el análisis de los tiempos de falla de una muestra de bombas electrosumergibles.

En el Capítulo 3 se describen los modelos para estudiar sistemas reparables bajo la suposición de distintos niveles de reparación (perfecta, mínima y general). En este trabajo se retoman los resultados publicados por [21] en el que se presenta un modelo para sistemas reparables bajo supuestos de nivel de reparación general y cuando la muestra de tiempos de falla es incompleta. Se desarrolla un estudio de simulación para el cual se describe la construcción del algoritmo realizado en Python así como los resultados obtenidos.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>1 Elementos de teoría de Confiabilidad</b>	<b>5</b>
1.1 Conceptos básicos	5
1.2 Leyes de Falla	12
1.2.1 Exponencial	12
1.2.2 Weibull	13
1.2.3 Gamma	14
1.2.4 Modelo Weibull Modificado	16
1.2.5 Gaussiana Inversa	17
1.3 Estructura de Sistemas	18
1.3.1 Sistema en serie	22
1.3.2 Sistema en paralelo	22
1.3.3 Sistema con estructura mixta	23
1.3.4 Sistema <i>k – out – of – n</i>	24
<b>2 Cálculo de la confiabilidad</b>	<b>29</b>
2.1 Técnicas para calcular la confiabilidad de un sistema	29
2.1.1 Valor esperado de $\psi(\mathbf{X})$	30
2.1.2 Técnica del vector de trayectoria	30
2.1.3 Técnica del vector de corte	31
2.1.4 Técnica de descomposición	32
2.2 Trayectoria mínima y conjuntos de corte mínimos	35
2.3 Cotas para la función de confiabilidad	40
2.3.1 Método de inclusión y exclusión	40
2.3.2 Segundo método para obtener las cotas de $r(\mathbf{p})$	44
2.4 Enfoque estadístico	47
2.4.1 Datos	48
2.4.2 Estimación	50
<b>3 Confiabilidad de Sistemas Reparables</b>	<b>59</b>
3.1 Procesos contadores	59
3.2 Procesos de renovación	61

3.3	Análisis de Confiabilidad . . . . .	64
3.3.1	Supuestos del modelo . . . . .	64
3.3.2	Datos . . . . .	64
3.3.3	Modelar TRP . . . . .	65
3.3.4	Estimación de los parámetros . . . . .	68
3.3.5	Simulación . . . . .	72
	<b>Conclusión</b>	<b>79</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>83</b>
	<b>Índice alfabético</b>	<b>85</b>
A	<b>Probabilidad y Estadística</b>	<b>87</b>
A.1	Probabilidad . . . . .	87
A.2	Estadística . . . . .	93
B	<b>Pruebas</b>	<b>95</b>
C	<b>Código</b>	<b>101</b>

# Índice de figuras

1.1	Función de confiabilidad. . . . .	6
1.2	Función de confiabilidad $R(t)$ y confiabilidad condicional $R_{T T \geq 6}(t)$ .	7
1.3	Curva de bañera. . . . .	9
1.4	Estructuras elementales. . . . .	20
1.5	Sistema con estructura mixta . . . . .	21
1.6	Estructura mixta 2. . . . .	24
1.7	Sistema $k - out - of - 6$ . . . . .	25
2.1	Estructura mixta 3. . . . .	30
2.2	Estructura mixta 4. . . . .	32
2.3	Estructura mixta 5 . . . . .	33
2.4	Descomposición de la confiabilidad de un sistema. . . . .	34
2.5	Estructura mixta 6 . . . . .	36
2.6	Descomposición en paralelo de la estructura de un sistema. . . . .	37
2.7	Un sistema arbitrario visto como arreglo en serie de estructuras en paralelo. . . . .	38
2.8	Árbol de falla. . . . .	39
2.9	Sistema $3 - out - of - 4$ . . . . .	46
2.10	Censura Tipo I y Tipo II. . . . .	49
2.11	Ajuste de datos a diferentes distribuciones. . . . .	56
2.12	Comparación entre el ajuste de una distribución con o sin datos censurados. . . . .	57
2.13	Comparación entre el ajuste de una distribución a los datos censurados de una muestra. . . . .	58
2.14	Confiabilidad de un sistema con o sin datos censurados. . . . .	58
3.1	Transformación del dominio de tiempo en un TRP a un RP. . . . .	66
3.2	Interpretación gráfica de la región correspondiente a la función de confiabilidad. . . . .	69
3.3	Diferencia entre casos para la función de confiabilidad . . . . .	70
3.4	Del dominio de tiempo transformado al dominio de tiempo original . . . . .	74
A.1	Función de densidad de probabilidad Exponencial. . . . .	90
A.2	Función de densidad de probabilidad Weibull. . . . .	91
A.3	Función de densidad de probabilidad Gamma . . . . .	92

# Índice de tablas

1.1	Datos de tasas de falla de tres tarjetas gráficas, Datos de Hard Zone, 2 de enero 2025. . . . .	26
1.2	Estados de un sistema $2 - out - of - 3$ . . . . .	26
1.3	Confiabilidad del sistema $2 - out - of - 3$ del Ejemplo 2.3.11 . . . . .	26
2.1	Clasificación de sistemas. . . . .	47
2.2	Datos de tiempos de falla de una muestra de bombas electrosumergibles. . . . .	50
2.3	Estimadores puntuales de diferentes distribuciones, para casos sin y con censura. . . . .	54
2.4	Resultados del test de Kolmogorov para diferentes distribuciones. . . . .	54
2.5	Valores críticos del estadístico de Kolmogorov–Smirnov para distintos niveles de significancia. . . . .	55
2.6	Resultados del AIC para las distribuciones consideradas. . . . .	55
3.1	Niveles de reparación . . . . .	63
3.2	Comparación de métodos de estimación <i>Minimize</i> en Python. . . . .	78
3.3	Resultados de estimación para diferentes porcentajes de pérdida . . . . .	78
3.4	Resultados de estimación para diferentes porcentajes de pérdida [21] . . . . .	78
3.5	Desempeño de la estimación para un IFCP cuando se tienen diferentes niveles de reparación. . . . .	79

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## ELEMENTOS DE TEORÍA DE CONFIABILIDAD

### 1.1. Conceptos básicos

La teoría de confiabilidad tiene una fuerte relación con el análisis de supervivencia, ya que ambas áreas estudian la ocurrencia aleatoria de un evento de interés en el tiempo, un cambio en el estado de un individuo u objeto, de manera general a dicho cambio se le puede denominar falla. En lo que sigue se presentan definiciones y conceptos básicos dentro de esta teoría.

**Definición 1.1.1.** *La confiabilidad de un artículo es la probabilidad de que cumpla adecuadamente su propósito específico durante un periodo determinado en condiciones ambientales u operativas específicas [12].*

Un artículo puede ser un componente, sistema o subsistema. Para llevar a cabo el estudio de confiabilidad de un artículo bajo el enfoque estadístico, se requieren datos del tiempo de funcionamiento observado en una muestra representativa del artículo de interés, por lo que es necesario determinar de manera específica tres elementos: origen o inicio del tiempo de observación, escala de tiempo para registrar el periodo de funcionamiento y la definición del evento falla.

**Definición 1.1.2.** *Una **falla**, se entiende como la terminación de la capacidad de un elemento para realizar una función requerida en las condiciones operativas específicas para las que fue diseñado.*

**Observación.** El desempeño adecuado de un artículo así como la falla son términos que dependen de las políticas o condiciones del lugar en el que se pongan en funcionamiento.

**Definición 1.1.3.** Sea  $T$  una variable aleatoria no negativa que representa el tiempo para la falla o tiempo de vida de un artículo,  $f(t)$  su fdp y  $F(t)$  su Fda, se define;

$$R(t) = P(T \geq t) = \int_t^{\infty} f(x)dx, \quad (1.1)$$

a la función  $R(t)$  se le llama **función de confiabilidad** al tiempo  $t$ .

Una forma de interpretar la definición anterior es que la función de confiabilidad corresponde a la probabilidad de que un componente funcione, o *sobreviva*, al menos hasta un tiempo  $t$  [4].

**Observación.** La función de confiabilidad y la Fda de la variable aleatoria  $T$  se relacionan de manera complementaria, es decir,

$$R(t) = 1 - F(t).$$

Lo anterior se representa en la Figura 1.1.

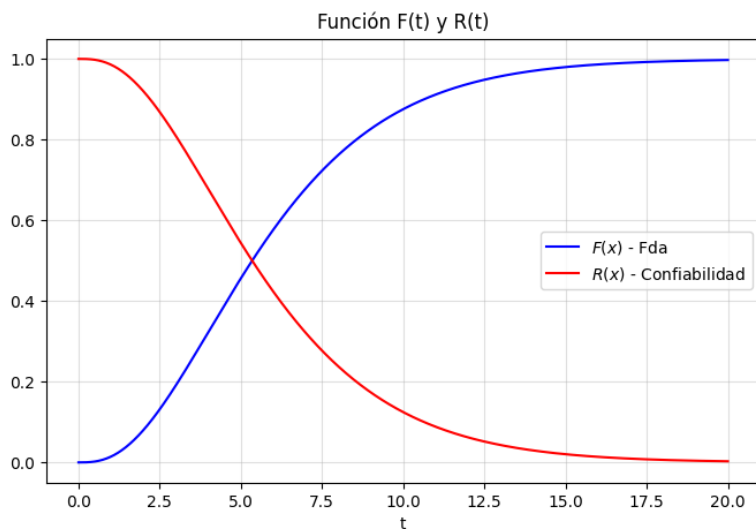


Figura 1.1: Relación complementaria entre la función de confiabilidad y la Fda de una variable aleatoria con distribución Gamma(3, 2).

### Propiedades de la función de confiabilidad $R(t)$

- $R(0) = 1$ .
- $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0$ .
- $R(t)$  es no creciente y continua por la derecha.

Ver [10].

Una función que nos permite estudiar el número de fallas por unidad de tiempo, también llamada tasa de falla de un artículo, es la función de confiabilidad condicional  $R_{T|T \geq a}(t)$ , la cual determina la confiabilidad de un artículo que ha funcionado al menos hasta el tiempo  $a$ , se expresa como sigue [12],

$$R_{T|T \geq a}(t) = \frac{P(T \geq t, T \geq a)}{P(T \geq a)} = \frac{P(T \geq t)}{P(T \geq a)} = \frac{R(t)}{R(a)}, \quad (1.2)$$

para  $t \geq a$  y 1 cuando  $t \in [0, a)$ .

Dado que  $R_{T|T \geq a}(t)$  es un reescalamiento de  $R(t)$ , tiene la misma forma que la porción restante de la función original, como se observa en la Figura 1.2.

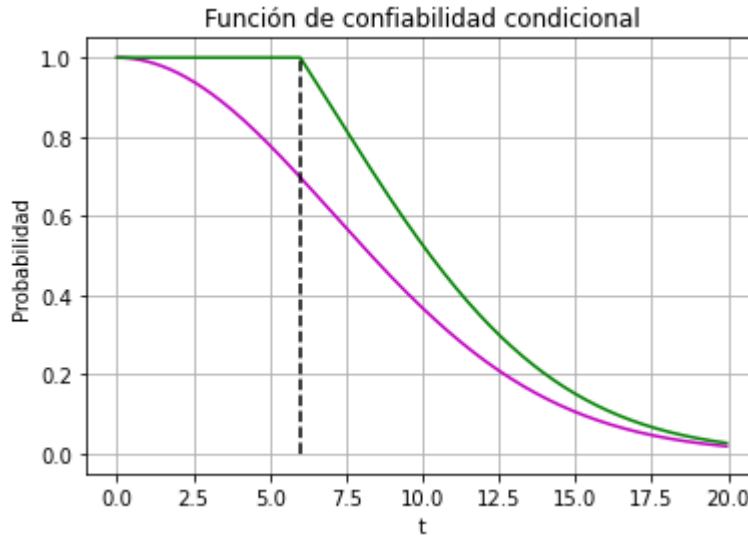


Figura 1.2: Función de confiabilidad  $R(t)$  y confiabilidad condicional  $R_{T|T \geq 6}(t)$  para una distribución  $T \sim Weibull(0.1, 2)$ .

Otro elemento importante en la teoría de confiabilidad es la función de riesgo, que expresa la variación en el tiempo de la probabilidad de que un componente que ha funcionado hasta un tiempo  $t$  falle en el instante siguiente  $t + \Delta t$ , su definición es como sigue.

**Definición 1.1.4.** La **función de riesgo** o **tasa de falla** denotada como  $h(t)$ , determina la tasa de fallo de un artículo en un intervalo  $(t, t + \Delta t]$ , para valores pequeños de  $\Delta t \geq 0$ ,

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t}. \quad (1.3)$$

Al desarrollar la ecuación (1.3), se sigue

$$P(t \leq T \leq t + \Delta t | T \geq t) = \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t)}{P(T \geq t)} = \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)}.$$

Conforme  $\Delta t \rightarrow 0$  se tiene

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)\Delta t} \\ &= \frac{-R'(t)}{R(t)}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Por otro lado, se tiene que  $F'(t) = f(t)$ , donde  $F(t)$  y  $f(t)$  son las Fda y fdp de  $T$ , respectivamente, luego  $R(t) = 1 - F(t)$ , por lo tanto,  $R'(t) = -f(t)$ , finalmente

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}, \quad (1.5)$$

para  $t \geq 0$ .

Esta función permite analizar el comportamiento de la tasa de falla de un artículo o sistema a lo largo del tiempo, por ejemplo, este puede ser creciente, decreciente o constante en las diferentes etapas de la vida útil del artículo.

**Observación.** La tasa de falla satisface las siguientes condiciones [12]:

- $\int_0^{+\infty} h(t)dt = \infty$ .
- $h(t) \geq 0, \forall t \geq 0$ .

Existen diferentes distribuciones que se utilizan para estudiar el tiempo de falla de un artículo, estas presentan diferentes tipos de tasas de falla, las cuales se presentan a continuación.

**Definición 1.1.5.** Algunos tipos de tasa de falla para un artículo son [10]:

- *IFR (Increasing Failure Rate)*, tasa de falla creciente si  $h(t)$  es no decreciente en  $t$ .
- *DFR (Decreasing Failure Rate)*, tasa de falla decreciente si  $h(t)$  es no creciente en  $t$ .
- *BT (Bathtub-shaped failure rate)*, tasa de falla con forma curva de bañera, si  $h(t)$  es no creciente hasta un punto  $t$  y a partir de ese punto es no decreciente.

Los artículos que tienen una distribución del tipo IFR son aquellos cuyas fallas se explican principalmente como resultado de un proceso de deterioro o desgaste como lo son los sistemas o subsistemas del tipo mecánico. Ejemplos de componentes con una distribución del tipo DFR pueden ser aquellas componentes cuyo riesgo de falla es

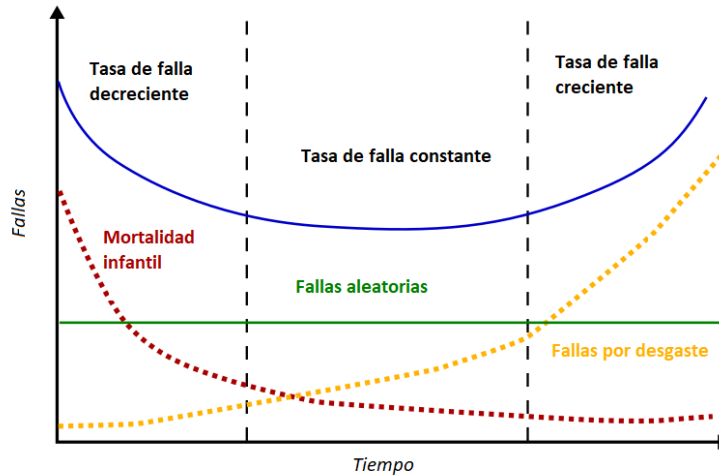


Figura 1.3: Distribución del tiempo de vida del tipo BT o curva de bañera, se observa que el comportamiento de la tasa de falla pasa de ser DFR a IFR a lo largo del tiempo.

muy grande en el momento de arranque como es el caso de programas informáticos, o dispositivos programados. La distribución del tipo BT o curva de bañera se conforma de tres etapas, una tasa de falla inicial decreciente, posteriormente adquiere un comportamiento constante y finalmente crece conforme ocurre un proceso de desgaste o deterioro en el artículo, esta clase es más general, que corresponde a diversos tipos de artículos, tal como se ilustra en la Figura 1.3.

El siguiente resultado presenta la relación entre la tasa de fallas y la fdp de  $T$  así como con la función de confiabilidad  $R(t)$  [13].

**Teorema 1.1.6.** Sea  $T$ , la v.a. que representa el tiempo de falla,  $f$  su fdp, y  $F(0) = 0$ , con  $F$  su Fda y  $R$  su función de confiabilidad, entonces:

- a.  $R(t) = e^{-\int_0^t h(s)ds}$ .
- b.  $f(t) = h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}$ .

**Demostración.** Para demostrar (a) se retoma la ecuación (1.5) de la definición de tasa de falla, al integrar ambos miembros de 0 a  $t$ , se obtiene lo siguiente,

$$\int_0^t h(s)ds = \int_0^t \frac{-R'(s)}{R(s)} ds \tag{1.6}$$

$$= -\ln R(t) \Big|_0^t \tag{1.7}$$

$$= -\ln R(t) + \ln R(0) = -\ln R(t). \tag{1.8}$$

La ecuación (1.8) se cumple ya que  $\ln R(0)$  es cero si y solo si  $R(0) = 1$  y esto se cumple ya que  $F(0) = 0$ , por lo que se concluye (a).

En el caso de (b) se obtiene el resultado al derivar ambos miembros de (a)  $\square$ .

De modo que la tasa de fallas determina a la fdp de  $T$  y viceversa. En el área de confiabilidad es importante el tiempo promedio para la falla (TPPF)  $E[T]$ , este se emplea en la selección de equipos y diseño de sistemas [22], el tppf se relaciona con la función de confiabilidad, para demostrarlo es necesario ver el siguiente lema.

**Lema 1.1.7.** *Supóngase que el tiempo promedio de falla  $E[T]$  es finito, entonces*

$$\lim_{b \rightarrow \infty} b(1 - F(b)) = 0. \quad (1.9)$$

**Demostración.** Dado que  $E[T]$  es finita, entonces las “colas” de la distribución tienden a cero, lo cual implica que se satisfacen (1.10) y (1.11)

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_b^{\infty} tf(t)dt = 0, \quad (1.10)$$

$$\lim_{b \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^b tf(t)dt = 0. \quad (1.11)$$

Por otro lado, de la desigualdad de Markov, con  $b > 0$  se sigue,

$$bP[T \geq b] \leq E[T]. \quad (1.12)$$

También se tiene que por la definición de  $E[T]$  es cierto que,

$$\int_b^{\infty} tf(t)dt \leq E[T]. \quad (1.13)$$

Al realizar la resta de (1.12) con (1.13) se obtiene,

$$bP[T \geq b] - \int_b^{\infty} tf(t)dt \leq 0, \quad (1.14)$$

$$\Rightarrow bP[T \geq b] \leq \int_b^{\infty} tf(t)dt. \quad (1.15)$$

Tomando el límite de (1.15) cuando  $b \rightarrow \infty$ , se obtiene,

$$0 \leq \lim_{b \rightarrow \infty} bP[T \geq b] \leq \lim_{b \rightarrow \infty} \int_b^{\infty} tf(t)dt = 0. \quad (1.16)$$

Por lo tanto,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} bP[T \geq b] = 0. \quad \square$$

El Lema 1.1.7 se utiliza para la prueba del siguiente teorema.

**Teorema 1.1.8.** *Si  $E[T]$  es finita, entonces*

$$E[T] = \int_0^{\infty} R(t)dt. \quad (1.17)$$

**Demostración.** De acuerdo con la definición de la función de confiabilidad  $R(t)$  se sigue,

$$\int_0^{\infty} R(t) = \int_0^{\infty} \left[ \int_t^{\infty} f(s) ds \right] dt. \quad (1.18)$$

Se realiza una integración por partes con las siguientes variables,

$$u = \int_t^{\infty} f(s) ds; du = -f(t); dv = dt; v = t.$$

Luego, se sigue,

$$\int_0^{\infty} \left[ \int_t^{\infty} f(s) ds \right] dt = \left[ \int_t^{\infty} f(s) ds \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} t f(t) dt \quad (1.19)$$

$$= \left[ \int_t^{\infty} f(s) ds \right]_0^{\infty} + E[T] \quad (1.20)$$

$$\left( \lim_{t \rightarrow \infty} t(1 - F(t)) - 0 \cdot \int_0^{\infty} f(s) ds \right) \quad (1.21)$$

$$= \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} tF(t) \right] + E[T]. \quad (1.22)$$

Al aplicar el Lema 1.1.7 a la ecuación (1.22) se concluye la prueba del resultado.  $\square$

La función de confiabilidad, la tasa de falla y el tiempo promedio para la falla permiten el estudio del comportamiento de la ocurrencia de falla, todas se relacionan con la fdp y Fda de la v. a.  $T$ , la cuál representa la distribución del tiempo para la falla. En el presente trabajo se aborda el caso en el que  $T$  es una v. a. continua, sin embargo, también existen estudios para el caso discreto [10]. Otras funciones de interés son la función de riesgo acumulativa, y la función media de vida residual [11][12].

**Definición 1.1.9.** Sea  $T$  la v.a. que representa el tiempo de vida de una componente o sistema, con  $f$  su fdp y  $h$  su tasa de falla, se definen las siguientes funciones:

- **Función de riesgo acumulada** al tiempo  $t$ , denotada por  $H(t)$ ,

$$H(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau.$$

- **Función media de vida residual** al tiempo  $t$ , denotada por  $L(t)$ ,

$$L(t) = \frac{1}{R(t)} \int_t^{\infty} \tau f(\tau) d\tau - t.$$

## 1.2. Leyes de Falla

Existen distribuciones de probabilidad que se utilizan en el estudio del tiempo de vida o tiempo para la falla de diversos artículos, dichas distribuciones se denominan leyes de falla [22]. En lo que sigue se presentan algunas de las propiedades y características de estas distribuciones.

### 1.2.1. Exponencial

Esta es una ley de fallas ampliamente utilizada en la teoría de confiabilidad, corresponde al caso en el que el tiempo para fallar de un artículo se distribuye de manera exponencial. Sea  $T$  la v. a. que representa el tiempo para fallar de un artículo, tal que,  $T \sim \text{exp}(\lambda)$ , de acuerdo con la Definición A.1.7, para  $t > 0$ , se obtiene lo siguiente:

- Su función de confiabilidad es,

$$R(t) = e^{-\lambda t}. \quad (1.23)$$

- Su tasa de fallas es,

$$h(t) = \lambda. \quad (1.24)$$

- Su tiempo promedio de falla es,

$$E[T] = \frac{1}{\lambda}. \quad (1.25)$$

Una propiedad importante de esta distribución es que su tasa de fallas es constante, es decir, que el riesgo de que ocurra una falla en el artículo es la misma en cada momento de su periodo de vida útil.

**Teorema 1.2.1.** *Sea  $T$ , la v. a. continua no negativa que modela el tiempo para fallar de un artículo,  $T$  tiene una distribución exponencial si y solo si tiene una tasa de fallas constante.*

**Demostración:** Ver [13].

De acuerdo con [11], históricamente, el modelo exponencial fue el primer modelo de distribución de la vida útil ampliamente discutido, debido en parte a la disponibilidad de métodos estadísticos simples para este, sin embargo, el supuesto de una función de riesgo o tasa de falla constante es muy restrictivo, observado principalmente en artículos o componentes del tipo eléctrico, por lo que la aplicabilidad del modelo es limitada.

Epstein y Sobel [10] trabajaron con la distribución exponencial como modelo probabilístico para estimar el tiempo de vida de dispositivos electrónicos en 1951 y

desde entonces se ha convertido en una ley tradicional de fallas. Además de la tasa de falla constante, esta distribución es interesante porque corresponde a la del tiempo entre ocurrencias de fenómenos que se modelan como un proceso de Poisson [10].

**Observación.** La distribución exponencial corresponde al modelo de tiempo para la falla de artículos en los que no hay un efecto de uso. Considere  $T \sim exp(\lambda)$ , la tasa de fallas,

$$P(t \leq T \leq t + \Delta t | T > t) = \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda \Delta t}. \quad (1.26)$$

Por lo tanto, esta probabilidad condicional es independiente de  $t$  y solo depende de  $\Delta t$ , es decir, de la longitud del intervalo de observación. Se concluye que una ley de fallas exponencial implica que la probabilidad de fallar es independiente del pasado, de ahí que se considere como una distribución con la propiedad de pérdida de memoria [13].

Así, el modelo exponencial se puede emplear en componentes que nunca se fatigan, es decir, que si un componente no ha fallado en su operación normal es igual de bueno que un componente nuevo, como podría ser el caso de fusibles, cojinetes de rubíes, por ejemplo. La característica de pérdida de memoria, propia de esta distribución, no es aplicable a diversos sistemas, como aquellos que fallan por algún proceso de fatiga o desgaste, como corrosión, sin embargo, se suele utilizar como una primera aproximación en el modelado de datos de tiempo de falla [2].

### 1.2.2. Weibull

En 1939, Waloddi Weibull propuso una distribución para describir la resistencia a la rotura de materiales, la cual más tarde llevaría su nombre [10]. Es utilizada principalmente en el estudio del tiempo de vida y/o tiempo para la falla de componentes mecánicas.

La distribución de Weibull se considera como una ley de fallas tradicional y es una de las más utilizadas en confiabilidad. Esta distribución es adecuada para modelar datos de tiempos de falla, además es muy versátil, debido a que su función de riesgo  $h(t)$  puede ser creciente, constante o decreciente.

En particular, esta distribución permite modelar el tiempo de vida de un sistema o bien, su duración hasta antes de la falla, especialmente si el sistema consta de muchas componentes, y experimenta la falla cuando alguna de las componentes falla. Esta distribución se utiliza en diversos campos como el que dio lugar a su origen, es decir, en la evaluación de resistencia de materiales o en el estudio de artículos cuyo funcionamiento es del tipo mecánico. Sin embargo, tiene limitaciones, entre las cuales se puede destacar que no es adecuada para modelar fallas causadas por reacciones

químicas o dentro de un proceso de degradación como corrosión [4] [11].

Sea  $T$  la v. a. que representa el tiempo para fallar de un artículo, tal que,  $T \sim Weibull(\alpha, \beta)$ , de acuerdo con la Definición A.1.8, para  $t > 0$ , se obtiene lo siguiente:

- Su función de confiabilidad es,

$$R(t) = e^{-(\alpha t)^\beta}. \quad (1.27)$$

- Su tasa de fallas es,

$$h(t) = \beta \alpha^\beta t^{\beta-1}. \quad (1.28)$$

- Su tiempo promedio de falla es,

$$E[T] = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right). \quad (1.29)$$

**Observación.** Cuando se considera a  $\beta = 2$  se obtiene una distribución Rayleigh [12] la cual es interesante porque su tasa de fallas puede ser creciente o decreciente.

### 1.2.3. Gamma

La ley de falla Gamma es importante por su buen desempeño al modelar datos de tiempos de falla, en [21] se investigó su uso en el estudio de confiabilidad de sistemas reparables con datos de falla faltantes. En lo que sigue se presenta su definición y características.

La función de confiabilidad y la tasa de falla para esta distribución requieren de la función gamma incompleta.

**Definición 1.2.2.** Sean  $x, k > 0$ , la **función gamma incompleta**  $I$ , está definida por la siguiente regla de correspondencia,

$$I(k, x) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^x u^{k-1} e^{-u} du. \quad (1.30)$$

A partir de la Definición 1.2.2, para  $t > 0$ , se determina lo siguiente:

- Su función de confiabilidad es,

$$R(t) = 1 - I(k, \lambda t). \quad (1.31)$$

- Su tasa de fallas es,

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}. \quad (1.32)$$

**Observación.** De acuerdo con [6], cuando el parámetro de forma  $k$  es un entero positivo, la nueva variable aleatoria tiene una distribución de Erlang, cuya fdp para  $t > 0$  es,

$$f(t) = \frac{\lambda}{(n-1)!} (\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t}. \quad (1.33)$$

Su función de confiabilidad es,

$$R(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad (1.34)$$

para  $t \geq 0$  y  $n$  un entero positivo. El origen de la distribución de Erlang es la convolución de v.a.'s con distribución exponencial, es decir, si  $T_1, T_2, \dots, T_n$  son v.a.i.i.d. con distribución  $exp(\lambda)$ , entonces  $T_1 + T_2 + \dots + T_n \sim Erlang(\lambda, n)$ . Se ve así que la distribución exponencial es un caso particular de la distribución Gamma.

**Observación.** Aún cuando el parámetro de forma no sea un entero positivo, se cumple que la suma de v.a.i.i.d. gamma con el mismo parámetro de forma, siguen una distribución gamma.

El parámetro de forma debe ser un número positivo, en los casos en los que además es entero, es decir,  $k = 1, 2, \dots$ , se tiene que,

$$h(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)! \sum_{i=0}^{k-1} (\lambda t)^i / i!},$$

por lo que la tasa de falla es constante cuando  $k = 1$ , cuando  $k > 1$ ,  $T$  tiene una tasa de falla de tipo IFR, por otro lado, cuando  $k < 1$  se tiene una tasa de falla de tipo DFR. En cualquier caso la tasa de falla converge a  $\lambda$  cuando el valor de  $t$  tiende a infinito [2].

En la literatura es posible encontrar dos formas de escribir la función de densidad de una variable aleatoria Gamma, con  $t > 0$ ,

- $f(t) = \frac{\lambda^\beta t^{\beta-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\beta)}$ .
- $f(t) = \frac{t^{\beta-1} e^{-\frac{t}{\theta}}}{\Gamma(\beta) \theta^\beta}$ .

La escritura difiere por la interpretación que se le asocia a los parámetros. En ambos casos  $\beta$  es el parámetro de forma, por otro lado,  $\lambda$  representa la tasa de ocurrencia, es decir, ocurrencias por unidad de tiempo, mientras que  $\theta$  corresponde a una escala de dispersión.

Para explicar mejor esta parte, considérese el caso en el que  $\beta = 1$ , la distribución en ambas versiones es una exponencial, que se utiliza generalmente para modelar el tiempo de espera necesario hasta que ocurre un evento,  $\lambda$  es la tasa de ocurrencia por unidad de tiempo, y  $\theta$  es el tiempo promedio que tarda en ocurrir el evento.

La relación entre  $\lambda$  y  $\theta$  es

$$\lambda = \frac{1}{\theta}.$$

Por lo que, si la tasa de ocurrencia es muy grande, la escala o dispersión de ocurrencias es pequeña y viceversa. Comprender la diferencia entre ambas versiones de la distribución es útil cuando se trabaja con la distribución desde una biblioteca en algún lenguaje de programación, ya que los lenguajes utilizan una versión u otra, y la interpretación que le damos a los resultados depende de dicha comprensión.

### 1.2.4. Modelo Weibull Modificado

Existen otras leyes de fallas como la normal, la Pareto, la de Wald o gaussiana inversa, la log normal, etc. También hay distribuciones importantes para el estudio del caso discreto como la geométrica, todas ellas se pueden considerar leyes de falla tradicionales. Las leyes de falla no tradicionales corresponden por ejemplo a las transformaciones o modificaciones de las antes mencionadas, un ejemplo es el modelo Weibull Modificado.

En el estudio del comportamiento de las tasas de falla, se mencionó a la clase BT, la cual se conforma por una tasa de falla decreciente en la etapa inicial, conocida también como “etapa de mortalidad infantil”, posteriormente la tasa de falla del sistema adquiere un comportamiento constante y finalmente acontece una tendencia creciente, asociada a un proceso de deterioro o desgaste en el sistema [16].

El Modelo Weibull Modificado (MWM) permite estudiar simultáneamente las distintas etapas de la curva de bañera a diferencia de la ley tradicional Weibull. A continuación, se presenta la definición de la distribución MWM [4].

**Definición 1.2.3.** Sea  $T$  una variable aleatoria continua, se dice que  $T$  tiene una distribución MWM con parámetros  $a, c \geq 0, b > 1$  y  $d < 1$  o bien,  $T \sim MWM(a, b, c, d)$ , si su fdp es de la forma,

$$f(t) = at^b + ct^d, \quad \text{para } t \geq 0. \quad (1.35)$$

Luego, su Fda es como sigue,

$$F(t) = 1 - e^{-at^b - ct^d}. \quad (1.36)$$

A partir de la Definición 1.2.3 se determina lo siguiente:

- Su función de confiabilidad es,

$$R(t) = e^{-at^b - ct^d}. \quad (1.37)$$

- Su tasa de falla es,

$$h(t) = ab(at)^{b-1} + cd(ct)^{d-1}. \quad (1.38)$$

- El tiempo promedio para la falla es,

$$E[T] = \int_0^{\infty} e^{-at^b - ct^d} dt.$$

Existen otras modificaciones como el Modelo Weibull Transmutado [4], así como nuevas leyes de falla como la de Pham [16], que buscan ajustar de mejor forma distintos comportamientos en las tasas de falla. Sin embargo, como alternativa a los modelos paramétricos (tradicionales o modificados) se han desarrollado estimadores de funciones de supervivencia (que es análogo a la función de confiabilidad), uno de los trabajos referentes es el de Edward L. Kaplan y Paul Meier, con el estimador que lleva su nombre [2].

### 1.2.5. Gaussiana Inversa

La distribución Gaussiana Inversa (GI) también se conoce como distribución de Wald, debido a que fue introducida por el estadístico Abraham Wald en la década de 1940 [7] en el ámbito del análisis secuencial. Esta distribución tiene aplicación en áreas como las finanzas, la ecología y la confiabilidad.

La distribución GI surge como el tiempo hasta que un proceso de Wiener, de tiempo continuo con parámetro de deriva  $\gamma > 0$ , y parámetro de dispersión  $\sigma^2$ , cruza por primera vez un umbral dado  $d > 0$ .

El parámetro de deriva  $\gamma$ , se interpreta como una tasa media de cambio por unidad de tiempo, y en el contexto de confiabilidad modela la tendencia de degradación de un sistema.

El proceso de Wiener con deriva positiva es un proceso estocástico Gaussiano  $\{X(t), t \geq 0\}$ , que satisface  $X(0) = 0$  y una de sus propiedades es que  $X(t) \sim N(\gamma t, \sigma^2 t)$ , para cualquier  $t > 0$  [11].

Se puede mostrar que la variable aleatoria  $T = \inf\{t | X(t) = d\}$  tiene la siguiente función de densidad,

$$f(t) = \frac{d}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{(d - \gamma t)^2}{2\sigma^2 t}\right\},$$

para  $t > 0$ .

Esta función de densidad depende solo de  $\frac{d}{\gamma}$  y  $\frac{d}{\sigma}$ , por lo que es común reparametrizarla al definir  $\mu = \frac{d}{\gamma}$  y  $\lambda = \frac{d^2}{\sigma^2}$ , de donde se obtiene la siguiente expresión.

$$f(t) = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{(2\pi t^3)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{\lambda(t - \mu)^2}{2t\mu^2}\right\},$$

para  $t > 0$ .

Sea  $X$  una v. a. con dicha fdp, se dice que  $X \sim GI(\mu, \lambda)$ , y tiene las siguientes propiedades,

- Valor esperado,  $E[X] = \mu$ .
- Varianza,  $Var[X] = \frac{\mu^3}{\lambda}$ .
- Función de distribución acumulativa,

$$F(t) = \Phi \left[ \left( \frac{t}{\mu} - 1 \right) \left( \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{t} \right) \right] + e^{\frac{2\lambda}{\mu}} \Phi \left[ - \left( \frac{t}{\mu} + 1 \right) \left( \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{t} \right) \right],$$

con  $\Phi(z)$  la Fda de una normal estándar.

Este es un modelo plausible en el estudio de confiabilidad de un sistema, en los casos en los que la falla ocurre cuando un proceso de deterioro alcanza cierto nivel identificado.

### 1.3. Estructura de Sistemas

Se inicia esta sección considerando un sistema formado por  $n$  componentes, para posteriormente realizar un estudio estructural del sistema, que consiste en caracterizar la forma en que dichas componentes se relacionan para garantizar el funcionamiento del sistema.

Cada una de las componentes puede encontrarse de forma simple en uno solo de dos posibles estados: en funcionamiento o falla. Para indicar si el  $i$ -ésimo componente está funcionando o no, se define la variable indicadora  $X_i$  como se muestra a continuación,

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si la } i\text{-ésima componente funciona,} \\ 0, & \text{si la } i\text{-ésima componente no funciona.} \end{cases} \quad (1.39)$$

Al vector  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  se le denomina vector de estado. De manera similar se tiene una función indicadora del estado del sistema, esta es una función  $\psi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , con regla de correspondencia como sigue,

$$\psi(X) = \begin{cases} 1, & \text{si el sistema funciona,} \\ 0, & \text{si el sistema no funciona.} \end{cases} \quad (1.40)$$

Aunque  $\psi$  se presenta como una función indicadora, en realidad se trata de una función de estructura, esta es importante para estudiar el sistema y la interacción entre sus componentes, ya que no todas tienen la misma relevancia en el funcionamiento del sistema, es posible que algunas de sus componentes no afecten de forma significativa el funcionamiento general, como el caso de la campana en una bicicleta, para ello se define el término de componente irrelevante.

**Definición 1.3.1.** Dado un sistema con  $n$  componentes y función de estructura  $\psi$ , la componente  $i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , se dice **irrelevante** si  $\psi(1_i, \mathbf{X}) = \psi(0_i, \mathbf{X})$ , para cualquier  $\mathbf{X} \in \{0, 1\}^n$ , la notación  $(1_i, \mathbf{X})$  y  $(0_i, \mathbf{X})$ , son vectores donde la  $i$ -ésima componente es 1 y 0, respectivamente.

Por lo tanto, la función estructura de un sistema no debería considerar componentes irrelevantes. Otra propiedad deseable es el ser no decreciente, esto quiere decir que  $\psi(\mathbf{X}) \leq \psi(\mathbf{Y})$  si se cumple que  $X_i \leq Y_i$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Con estos elementos se define el término de sistema coherente [18].

**Definición 1.3.2.** Un sistema con función de estructura  $\psi$  se dice **sistema coherente** si no tiene componentes irrelevantes y  $\psi$  es no decreciente.

De la Definición 1.3.2 es posible establecer algunas propiedades, para más detalles ver [14]. Los sistemas en serie, en paralelo y  $k - out - of - n$ , son ejemplos de sistemas coherentes y se definen a continuación.

**Definición 1.3.3.** Dado un sistema formado por  $n$  componentes, se dice que es un **sistema en serie** si este funciona solo cuando todas sus componentes funcionan, es decir,

$$\psi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \text{si } X_i = 1, \forall i = 1, \dots, n, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.41)$$

De manera equivalente,  $\psi(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^n X_i$ , o bien,  $\psi(\mathbf{X}) = \min\{X_i\}$ .

**Definición 1.3.4.** Dado un sistema formado por  $n$  componentes, se dice que es un **sistema en paralelo** si este funciona siempre que al menos una de sus componentes funcione, esto es

$$\psi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \text{si } X_i = 1, \text{ para algún } i = 1, \dots, n, \\ 0, & \text{si } X_i = 0, \forall i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (1.42)$$

Lo cual también corresponde a decir que  $\psi(\mathbf{X}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i)$  o bien,  $\psi(\mathbf{X}) = \max\{X_i\}$ .

**Definición 1.3.5.** Dado un sistema formado por  $n$  componentes, se dice que un **Sistema**  $k - out - of - n$  funciona si y solo si al menos  $k$  de  $n$  componentes están funcionando. Como  $\sum_{i=1}^n X_i$  es igual al número de componentes que no se encuentran en estado de falla, la función estructura está dada por,

$$\psi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sum_{i=1}^n X_i \geq k, \\ 0, & \text{si } \sum_{i=1}^n X_i < k. \end{cases} \quad (1.43)$$

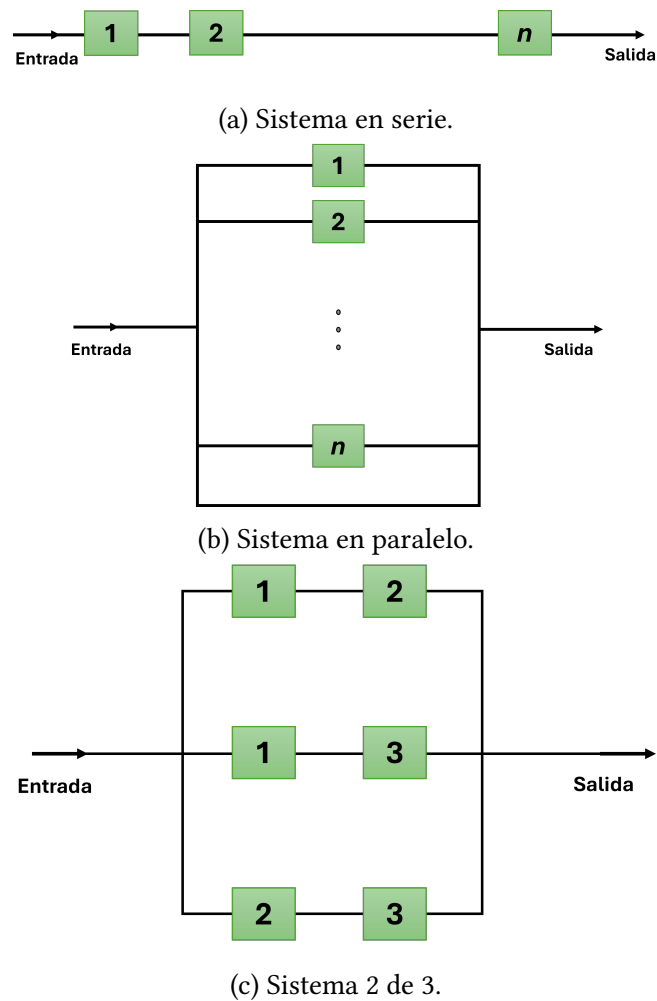


Figura 1.4: Esquemas de los diferentes tipos de estructuras elementales, para el caso  $k - out - of - n$  se utiliza el ejemplo 2 de 3.

**Observación.** Los sistemas en serie y en paralelo son ambos casos especiales de un sistema  $k - out - of - n$  ya que estos son sistemas  $n - out - of - n$  y  $1 - out - of - n$ , respectivamente.

Las estructuras en serie, en paralelo y  $k - out - of - n$  son llamadas estructuras elementales, en la Figura 1.4 se presenta un esquema de la disposición de sus componentes. Un sistema puede tener una estructura de tipo elemental o una combinación de ellas, en cuyo caso se denomina de estructura mixta, en el Ejemplo 1.3.6 se muestra un caso de este tipo de sistemas.

**Ejemplo 1.3.6.** Considere un sistema formado por 4 componentes cuya estructura es como se ilustra en la Figura 1.5, en el que se observa que el sistema funciona si y solo si las componentes 1 y 2 funcionan y al menos una de las componentes 3 o 4 funcionan, determinar su función de estructura.

**Solución.** Su función estructura está dada por (1.44),

$$\psi(\mathbf{X}) = X_1 X_2 \max(X_3, X_4). \quad (1.44)$$

Se hace uso de la identidad  $\max\{X_1, \dots, X_n\} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i)$ , por lo tanto, se obtiene

$$\max(X_1, X_2) = 1 - (1 - X_1)(1 - X_2) = X_1 + X_2 - X_1 X_2. \quad (1.45)$$

Al sustituir (1.45) en (1.44) con las variables correspondientes, la función estructura se expresa como,

$$\psi(\mathbf{X}) = X_1 X_2 (X_3 + X_4 - X_3 X_4). \quad (1.46)$$

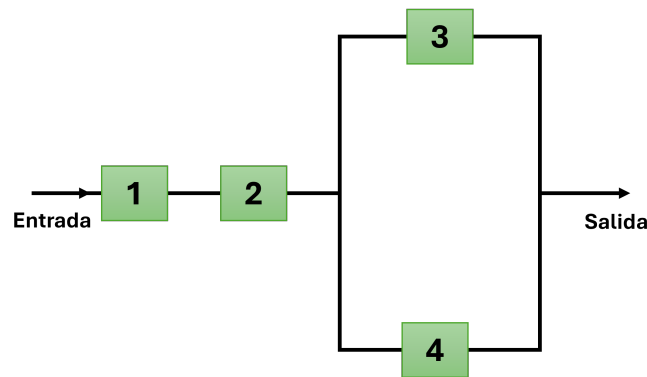


Figura 1.5: Ejemplo de un sistema con estructura mixta.

Así como es comprensible que el funcionamiento del sistema depende exclusivamente de qué componentes estén funcionando, es adecuado suponer que la confiabilidad de los sistemas dependerá de la confiabilidad de cada una de sus componentes.

La función de confiabilidad de un sistema al tiempo  $t$ , se denota como  $R(t)$ , el estado de un sistema al tiempo  $t$  también puede expresarse a través de la función de estructura al incorporar al tiempo como un argumento, es decir,

$$\psi(\mathbf{X}(t)) = \begin{cases} 1, & \text{si el sistema funciona al tiempo } t. \\ 0, & \text{si el sistema no funciona al tiempo } t. \end{cases}$$

Donde  $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$  es el vector de estado del sistema al tiempo  $t$ , y  $X_i(t)$  el estado de la componente  $i$ -ésima al tiempo  $t$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Las estructuras elementales y mixtas se reescriben de forma análoga, al incorporar el parámetro del tiempo en sus respectivas expresiones.

En lo que sigue se presenta el análisis de confiabilidad para las estructuras en serie, en paralelo y *k-out-of-n*.

### 1.3.1. Sistema en serie

De acuerdo con la Definición 1.3.3, un sistema conectado en serie funciona si y solo si todas sus componentes funcionan. Por ejemplo, una lámpara conectada a una pila, si la pila o la bombilla de la lámpara no funcionan, la lámpara en su conjunto tampoco funciona. Supóngase que las componentes de un sistema en serie funcionan de forma independiente y se quiere obtener la confiabilidad del sistema la cual se denotará por  $R(t)$ .

**Teorema 1.3.7.** *Sea  $T$  la variable aleatoria que representa el tiempo de vida o tiempo de falla del sistema en serie,  $T_i$  la variable aleatoria que corresponde al tiempo de vida del componente  $i$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$ ; y  $R(t)$ ,  $R_i(t)$  sus funciones de confiabilidad respectivas. Si  $T_i$  es independiente de  $T_j$ , con  $i \neq j$ , entonces,*

$$R(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t). \quad (1.47)$$

**Demostración.** Por definición de confiabilidad se cumple (1.48)

$$\begin{aligned} R(t) &= P(T > t) = P(T_1 > t, T_2 > t, \dots, T_n > t) \\ &= P(T_1 > t)P(T_2 > t) \cdots P(T_n > t) \\ &= \prod_{i=1}^n R_i(t). \end{aligned} \quad (1.48)$$

De donde se concluye el resultado.  $\square$

Del Teorema 1.3.7 se observa que  $R(t) \leq \min[R_1(t), R_2(t), \dots, R_n(t)]$ , es decir, para un sistema de  $n$  componentes con estructura en serie, la confiabilidad del sistema es menor o igual que la confiabilidad de cada una de sus componentes.

**Observación.** Note en particular que si las variables aleatorias independientes  $T_i$  se distribuyen exponencialmente con parámetros  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ . Se tiene que,

$$R(t) = e^{-\lambda_1} e^{-\lambda_2} \cdots e^{-\lambda_n} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)}. \quad (1.49)$$

Así, la confiabilidad del sistema corresponde a la de una variable aleatoria con distribución exponencial y parámetro  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ .

### 1.3.2. Sistema en paralelo

Las fallas de una o más componentes que están conectados en paralelo generalmente no se detectan a menos que se realicen inspecciones periódicas. Para obtener la confiabilidad de un sistema armado en paralelo considerando que sus componentes funcionan independientemente una de otra, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 1.3.8.** Sea  $T$  la variable aleatoria que determina el tiempo de vida o tiempo para la falla del sistema en paralelo,  $T_i$  la variable aleatoria que determina el tiempo de vida de la componente  $i$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$ ; y  $R(t)$ ,  $R_i(t)$  sus funciones de confiabilidad respectivas. Si  $T_i$  es independiente de  $T_j$ , con  $i \neq j$ , entonces,

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n F_i(t). \quad (1.50)$$

Donde  $F_i(t) = 1 - R_i(t)$ .

**Demostración.** De la definición de confiabilidad se sigue que,

$$R(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t) = 1 - P(T_1 \leq t, T_2 \leq t, \dots, T_n \leq t).$$

Entonces,

$$R(t) = 1 - [P(T_1 \leq t)P(T_2 \leq t) \cdots P(T_n \leq t)] \quad (1.51)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^n F_i(t). \quad \square \quad (1.52)$$

Del teorema anterior se puede notar que  $R(t) \geq \max[R_1(t), R_2(t), \dots, R_n(t)]$ , esto significa que la confiabilidad del sistema en paralelo es mayor o igual que la confiabilidad de cualquiera de sus componentes.

**Observación.** En algunos casos, las componentes de un sistema además de ser independientes entre sí todas tienen la misma función de confiabilidad, esto es que,  $R_i(t) = r(t)$  para toda  $i = 1, \dots, n$ . Luego la función de confiabilidad del sistema en paralelo es  $R(t) = 1 - [1 - r(t)]^n$ .

### 1.3.3. Sistema con estructura mixta

Para determinar la confiabilidad de este tipo de sistemas, es necesario realizar el cálculo de la confiabilidad por partes, es decir, obtener primero la confiabilidad de las componentes acopladas en serie y la confiabilidad de componentes acopladas en paralelo, para que finalmente se determine la confiabilidad del sistema con estructura mixta. El siguiente ejemplo ilustra una situación del caso mixto.

**Ejemplo 1.3.9.** Considérese un sistema con un arreglo en serie y componentes en paralelo como lo ilustra la Figura 1.6. Suponga que se tiene información sobre la vida útil de cada componente para un tiempo específico, las componentes  $C_1$  y  $C_2$  se encuentran conectadas en paralelo con una confiabilidad de 0.85 y 0.74 respectivamente, en el tiempo  $t = 6$ ; y para las componentes  $C_3$  y  $C_4$  acopladas en paralelo, tienen confiabilidad de 0.80 y 0.56 respectivamente en  $t = 6$ . ¿Cuál es la confiabilidad de este sistema para  $t = 6$ ?

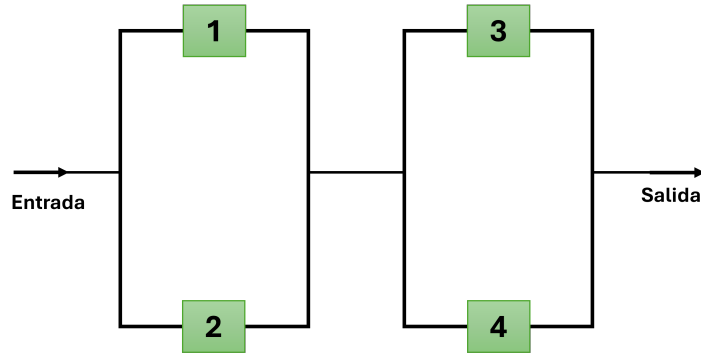


Figura 1.6: Diagrama de la estructura mixta del sistema del Ejemplo 2.3.9

*Solución.* Se obtiene primero la confiabilidad de las componentes  $C_1, C_2$  acopladas en paralelo, es decir,

$$R_{1,2} = 1 - [F_1(6)F_2(6)] = 1 - [(1 - 0.85)(1 - 0.74)] = 0.961. \quad (1.53)$$

Por otro lado, las componentes  $C_3, C_4$ , también están conectadas en paralelo, se sigue así que su confiabilidad en  $t = 6$ , es como sigue,

$$R_{3,4} = 1 - [F_3(6)F_4(6)] = 1 - [(1 - 0.80)(1 - 0.56)] = 0.9612. \quad (1.54)$$

Luego, la confiabilidad del sistema completo con arreglo en serie en  $t = 6$ , es

$$R(t = 6) = R_{1,2} \cdot R_{3,4} = (0.961)(0.9612) = 0.87643. \quad (1.55)$$

De manera general se puede decir que cualquier sistema se puede representar como un arreglo en serie de estructuras en paralelo o como un arreglo en paralelo de estructuras en serie [18].

Se presenta a continuación la función de confiabilidad para los sistemas con estructura más general.

#### 1.3.4. Sistema $k - out - of - n$

De acuerdo con la Definición 1.3.5 un ejemplo de este tipo de sistemas es un avión que funciona con 4 motores, pero si dos se descomponen y dos están en funcionamiento, eso es suficiente para que el avión pueda volar, este es un sistema  $2 - out - of - 4$ .

**Teorema 1.3.10.** Sea  $T$  la variable aleatoria que determina el tiempo de vida o tiempo para la falla del sistema  $k - out - of - n$ ,  $T_i$  la variable aleatoria que determina el tiempo de vida de la componente  $i$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$ ; y  $R(t)$  su función de confiabilidad. Si  $T_i$  es independiente de  $T_j$ , con  $i \neq j$  y además todas tienen la misma función de confiabilidad  $r(t)$ . Entonces,

$$R(t) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} (r(t))^i (1 - r(t))^{n-i}. \quad (1.56)$$

**Demostración:** Ver [18].

**Ejemplo 1.3.11.** Considere un sistema formado por 6 unidades de bombeo en el que es necesario que al menos 4 de ellas funcionen. Cada bomba tiene una fiabilidad del 88% para el tiempo  $t$ . ¿Cuál es la fiabilidad del sistema para el tiempo  $t$ ?

**Solución.** Se trata de un sistema 4 – out – of – 6, se tiene  $r(t) = 0.88$ , luego,

$$R(t) = \sum_{i=4}^6 \binom{6}{i} (0.88)^i (0.22)^{6-i} = 0.12953 + 0.37996 + 0.46440 = 0.97389. \quad (1.57)$$

El efecto de aumentar el número de unidades necesarias para el funcionamiento del sistema, por ejemplo, que ahora el sistema sea 5 – out – of – 6 es que la confiabilidad disminuiría, el caso de confiabilidad máxima se alcanza cuando se propone una estructura en paralelo, y el mínimo en la estructura en serie, tal como se ilustra en la Figura 1.7.

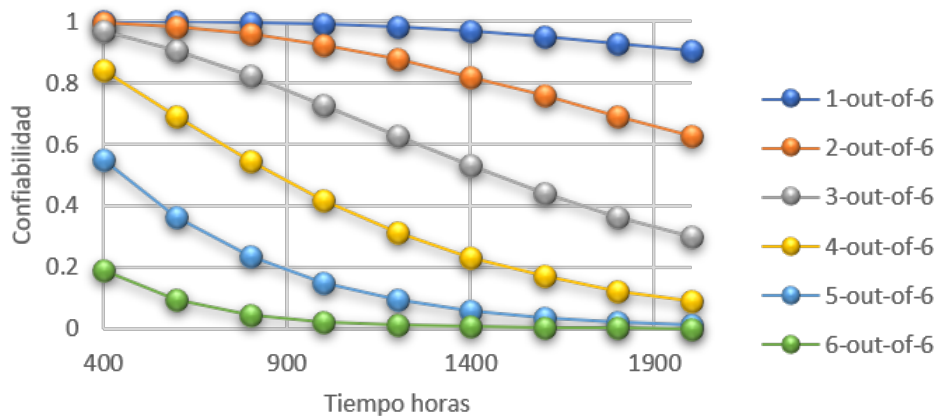


Figura 1.7: Gráfica de los diferentes niveles de confiabilidad, para sistemas  $k$  – out – of – 6, para distintos valores de  $k$ .

**Ejemplo 1.3.12.** Una PC es equipada con 3 tarjetas gráficas: AMD RX, NVIDIA RTX y NVIDIA GTX, las cuales se conectan de manera independiente, se asume que en el estudio donde será instalada habrá buenas condiciones de enfriamiento, limpieza, etcétera, por lo que la tasa de falla de las tarjetas se asumirá constante, la tasa de falla está basada en el porcentaje de clientes que han empleado la garantía de acuerdo a un conjunto de datos disponibles [1], estas tasas de falla se presentan en la Tabla 1.1.

Determinar la confiabilidad del sistema de imagen al tiempo  $t$ , si de acuerdo a los estándares del usuario se considera que el sistema funciona exitosamente cuando al

Tabla 1.1: Datos de tasas de falla de tres tarjetas gráficas, Datos de Hard Zone, 2 de enero 2025.

no.	Nombre de la tarjeta	Tasa de falla
1	AMD RX 5700 XT	0.0351
2	NVIDIA RTX 21700	0.046
3	NVIDIA GTX 1660 Ti	0.0121

menos 2 de las 3 tarjetas gráficas funcionan.

**Solución.** Bajo las condiciones mencionadas, la estructura del sistema es  $2-out-of-3$ , al considerar que funcionan de manera independiente y que cada tarjeta gráfica tendrá una tasa de falla constante, es adecuado decir que sus funciones de confiabilidad serán del tipo exponencial, estas son:  $R_1(t) = e^{(-0.0351t)}$ ,  $R_2 = e^{(-0.046t)}$  y  $R_3(t) = e^{(-0.0121t)}$ . La confiabilidad del sistema, la cual se denota por  $R(t)$ , se obtiene de la suma de la confiabilidad de todos aquellos casos en los que el sistema funciona exitosamente los cuales se muestran en la Tabla 1.2.

Tabla 1.2: Estados de un sistema  $2-out-of-3$ .

Tarjeta 1	Tarjeta 2	Tarjeta 3	Estado del sistema
Funciona	Funciona	Funciona	Funciona
Falla	Funciona	Funciona	Funciona
Funciona	Falla	Funciona	Funciona
Funciona	Funciona	Falla	Funciona
Falla	Falla	Funciona	Falla
Falla	Funciona	Falla	Falla
Funciona	Falla	Falla	Falla
Falla	Falla	Falla	Falla

La confiabilidad del sistema se obtiene de los estados de las tarjetas, tal como se ve en la Tabla 1.3.

Tabla 1.3: Confiabilidad del sistema  $2-out-of-3$  del Ejemplo 2.3.11

Tarjeta 1	Tarjeta 2	Tarjeta 3	Estado del sistema
$e^{-0.0351t}$	$e^{-0.046t}$	$e^{-0.0121t}$	$e^{-0.0351t} \cdot e^{-0.046t} \cdot e^{-0.0121t}$
$1 - e^{-0.0351t}$	$e^{-0.046t}$	$e^{-0.0121t}$	$(1 - e^{-0.0351t}) \cdot e^{-0.046t} \cdot e^{-0.0121t}$
$e^{-0.0351t}$	$1 - e^{-0.046t}$	$e^{-0.0121t}$	$e^{-0.0351t} \cdot (1 - e^{-0.046t}) \cdot e^{-0.0121t}$
$e^{-0.0351t}$	$e^{-0.046t}$	$1 - e^{-0.0121t}$	$e^{-0.0351t} \cdot e^{-0.046t} \cdot (1 - e^{-0.0121t})$

Por lo tanto, la confiabilidad del sistema al tiempo  $t$  es,

$$R(t) = e^{-(0.0351+0.046)t} + e^{-(0.046+0.0121)t} + e^{-(0.0351+0.0121)t} - 2e^{-(0.0351+0.046+0.0121)t}$$

$$R(t) = e^{-0.0811t} + e^{-0.0581t} + e^{-0.0472t} + e^{-0.0932t}. \quad (1.58)$$

Si las tres tarjetas tuviesen la misma función de confiabilidad  $r(t)$ , entonces  $R(t) = 3r(t)^2 - 2r(t)^3$ .



---

---

## CAPÍTULO 2

---

# CÁLCULO DE LA CONFIABILIDAD

Tal como se ha mencionado, la función de confiabilidad permite estudiar las características de un sistema como su tasa de falla, TPPF, entre otras, también hace posible abordar preguntas de interés como la probabilidad de que una falla ocurra en determinado tiempo. Para calcular dicha función se utiliza la información sobre sus componentes, como la función de confiabilidad de cada una y de manera general cómo se encuentran conectadas a través de la función de estructura, en lo que sigue se abordan técnicas y principios para determinar o calcular la confiabilidad de un sistema en un tiempo determinado.

### 2.1. Técnicas para calcular la confiabilidad de un sistema

A continuación se presentan técnicas para el cálculo de la confiabilidad de un sistema, aplicables a estructuras elementales y mixtas.

La información disponible sobre la estructura del sistema y la confiabilidad de sus componentes es de utilidad en el estudio de la confiabilidad del sistema en conjunto, en la siguiente definición se presenta una forma de reunir dicha información.

**Definición 2.1.1.** *El vector de confiabilidad de un sistema de  $n$  componentes, viene dado por  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ , con  $p_i = P(X_i = 1)$ , para  $i = 1, \dots, n$ . La función de confiabilidad del sistema se denota por  $r$ , con  $r : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ , tal que  $r(\mathbf{p}) = P(\psi(\mathbf{X}) = 1)$ , donde  $\psi$  es la función de estructura del sistema.*

La Definición 2.1.1 expresa que,  $p_i$  es la probabilidad de que la componente  $i$  funcione (con  $i = 1, \dots, n$ ), mientras que  $r(\mathbf{p})$  es la confiabilidad del sistema.

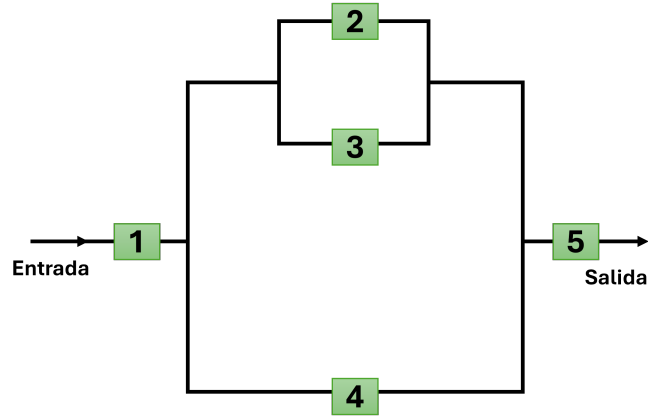


Figura 2.1: Sistema mixto de 5 componentes.

### 2.1.1. Valor esperado de $\psi(\mathbf{X})$

Esta técnica parte del hecho de que la función  $\psi(\mathbf{X})$  es una función que toma únicamente dos valores posibles 1 o 0. De acuerdo con la ecuación (2.1), se cumple que  $E[\psi(\mathbf{X})] = P(\psi(\mathbf{X}) = 1)$ , se deduce así,

$$r(\mathbf{p}) = P(\psi(\mathbf{X}) = 1) = E[\psi(\mathbf{X})]. \quad (2.1)$$

**Ejemplo 2.1.2.** Calcular la confiabilidad de un sistema de estructura mixta conformada por 5 componentes, conectado como se muestra en el diagrama de bloques en la Figura 2.1, con la suposición de independencia entre componentes.

**Solución.** La función de estructura del sistema es,

$$\psi(X) = X_1[1 - (1 - (1 - (1 - X_2)(1 - X_3)))(1 - X_4)]X_5, \quad (2.2)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} r(\mathbf{p}) &= E[\psi(\mathbf{X})] = E[X_1] + (E[X_4] + E[X_3] - E[X_3]E[X_4] + E[X_2] - E[X_2]E[X_4] \\ &\quad - E[X_2]E[X_3] + E[X_2]E[X_3]E[X_4])E[X_5] \\ &= p_1p_2p_5 + p_1p_3p_5 + p_1p_4p_5 - p_1p_2p_3p_5 - p_1p_3p_4p_5 \\ &\quad - p_1p_2p_4p_5 + p_1p_2p_3p_4p_5. \end{aligned} \quad (2.3)$$

### 2.1.2. Técnica del vector de trayectoria

Para emplear esta técnica es necesario definir lo que se denomina vector de trayectoria.

**Definición 2.1.3.** Sea  $\psi$  la función estructura de un sistema coherente de  $n$  componentes, un vector de estado  $\mathbf{X}$  se dice **vector de trayectoria**, si  $\psi(\mathbf{X}) = 1$ .

De modo que, un vector de trayectoria es cualquier vector de estado que implica el funcionamiento del sistema, en consecuencia, la confiabilidad del sistema es igual a la probabilidad de que el sistema se encuentre en un vector de trayectoria, es decir ,

$$r(\mathbf{p}) = P(\mathbf{X} \text{ es un vector de trayectoria}). \quad (2.4)$$

**Ejemplo 2.1.4.** Considerar nuevamente el sistema mixto de 5 componentes de la Figura 2.1, calcular la confiabilidad del sistema con la técnica del vector trayectoria.

**Solución.** De la Figura 2.1 se observa que existen 7 vectores trayectoria:

$$(1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1, 1) \text{ y} \\ (1, 0, 0, 1, 1).$$

Por lo tanto, de acuerdo con la suposición de independencia entre las componentes, la confiabilidad del sistema es la suma de las probabilidades de cada vector, tal como sigue

$$r(\mathbf{p}) = p_1 p_2 (1 - p_3) (1 - p_4) p_5 + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 + p_1 p_2 p_3 (1 - p_4) p_5 + p_1 p_2 (1 - p_3) p_4 p_5 \\ + p_1 (1 - p_2) p_3 (1 - p_4) p_5 + p_1 (1 - p_2) p_3 p_4 p_5 + p_1 (1 - p_2) (1 - p_3) p_4 p_5. \quad (2.5)$$

$$= p_1 p_2 p_5 + p_1 p_3 p_5 + p_1 p_4 p_5 - p_1 p_2 p_3 p_5 - p_1 p_3 p_4 p_5 \\ - p_1 p_2 p_4 p_5 + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5. \quad (2.6)$$

El Ejemplo 1.3.12 es también un ejemplo del uso de la técnica del vector trayectoria.

### 2.1.3. Técnica del vector de corte

El concepto opuesto al vector de trayectoria es el que se denomina como vector de corte, cuya definición es la siguiente.

**Definición 2.1.5.** Sea  $\psi$  la función estructura de un sistema coherente de  $n$  componentes, un vector de estado  $\mathbf{X}$  se dice **vector de corte** si  $\psi(\mathbf{X}) = 0$ .

Se tiene así que cualquier vector de estado  $\mathbf{X}$ , es de trayectoria o de corte, por lo tanto, la técnica del vector de corte para calcular la confiabilidad de un sistema es de forma análoga a la del vector trayectoria, esto es

$$r(\mathbf{p}) = 1 - P(\mathbf{X} \text{ es un vector de corte}). \quad (2.7)$$

**Ejemplo 2.1.6.** Calcular la confiabilidad de un sistema mixto y coherente conformado por 4 componentes, las cuales se conectan como se que se presenta en el diagrama de bloques de la Figura 2.2, con la suposición de independencia entre sus componentes y utilizando la técnica del vector de corte.

**Solución.** El sistema posee tres vectores de corte, los cuales son:  $(0, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 0)$  y  $(1, 0, 0, 0)$ , por lo tanto, la confiabilidad del sistema es,

$$\begin{aligned} r(\mathbf{p}) &= 1 - [(1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)(1 - p_4) + \\ & p_1(1 - p_2)(1 - p_3)(1 - p_4) + (1 - p_1)p_2(1 - p_3)(1 - p_4)] \\ &= p_4 + p_3 - p_3p_4 + p_1p_2 - p_1p_2p_4 - p_1p_2p_3 + p_1p_2p_3p_4. \end{aligned} \quad (2.8)$$

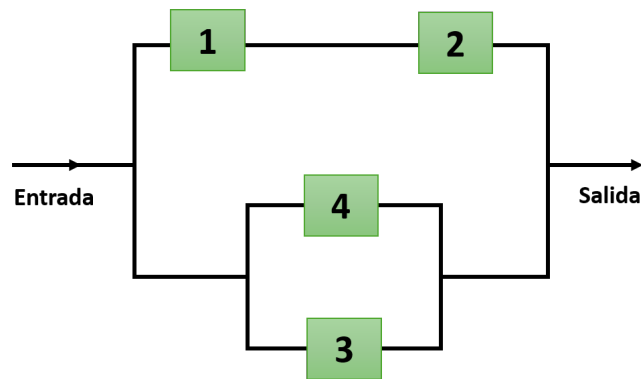


Figura 2.2: Sistema mixto de 4 componentes.

### 2.1.4. Técnica de descomposición

Esta técnica se basa en identificar o seleccionar una componente clave  $X_k$ , y descomponer la probabilidad de que el sistema funcione dependiendo de si dicha componente funciona o no, por lo tanto, si  $C = \{\text{la componente } X_k \text{ funciona}\}$ , entonces, la función de confiabilidad se puede escribir como sigue,

$$r(\mathbf{p}) = P(\text{El sistema funciona} | C)P(C) + P(\text{El sistema funciona} | C^c)P(C^c).$$

También se puede ver como

$$\begin{aligned} r(\mathbf{p}) &= P(\text{Sistema } A \text{ funciona})P(\text{la componente clave funciona}) \\ &+ P(\text{Sistema } B \text{ funciona})P(\text{la componente clave no funciona}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Donde el Sistema  $A$  es una versión del sistema en que la componente  $k$  siempre funciona, mientras que el sistema  $B$  es una versión que considera que la componente  $k$  siempre en falla, por lo tanto, es posible reescribir (2.9) como

$$r(\mathbf{p}) = r(1_k, \mathbf{p})p_k + r(0_k, \mathbf{p})(1 - p_k). \quad (2.10)$$

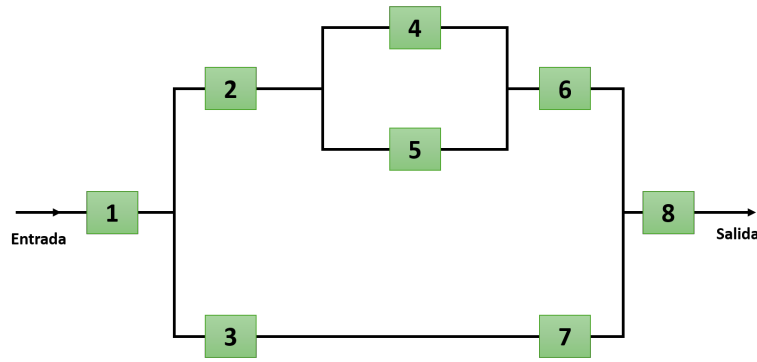


Figura 2.3: Sistema mixto de 8 componentes.

**Ejemplo 2.1.7.** Calcular la confiabilidad de un sistema conformado por 8 componentes, las cuales se conectan de acuerdo con el diagrama de bloques que se presenta en la Figura 2.3, con la suposición de independencia entre sus componentes utilizando la técnica del vector de descomposición.

**Solución.** El sistema se conforma de 8 componentes, algunas de las cuales son más relevantes que otras, por lo que se selecciona a la componente 2 como componente clave, se obtiene así,

$$r(\mathbf{p}) = P(\text{Sistema A funciona})P(X_2 = 1) + P(\text{Sistema B funciona})P(X_2 = 0)$$

El sistema A y el sistema B son como se ilustra en la Figura 2.4. El desarrollo del cálculo de la confiabilidad es

$$\begin{aligned} r(\mathbf{p}) &= [p_1(1 - (1 - (1 - (1 - p_4)(1 - p_5)))p_6(1 - p_3p_7))p_8]p_2 + (p_1p_3p_7p_8)(1 - p_2) \\ &= p_1p_3p_7p_8 + p_1p_2p_4p_6p_8 + p_1p_2p_5p_6p_8 - p_1p_2p_4p_5p_6p_8 \\ &\quad - p_1p_2p_3p_4p_6p_7p_8 - p_1p_2p_3p_5p_6p_7p_8 + p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_7p_8. \end{aligned} \quad (2.11)$$

La componente clave puede ser cualquiera del sistema, sin embargo, es preferible que sea una con un lugar destacado dentro del sistema, para ello se pueden emplear las siguientes definiciones de importancia de una componente.

**Definición 2.1.8.** La **importancia estructural** de una componente  $i$  en un sistema coherente de  $n$  componentes es,

$$I_\psi(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\{\mathbf{x}|X_i=1\}} [\psi(1_i, \mathbf{X}) - \psi(0_i, \mathbf{X})], \quad (2.12)$$

para  $i = 1, \dots, n$ .

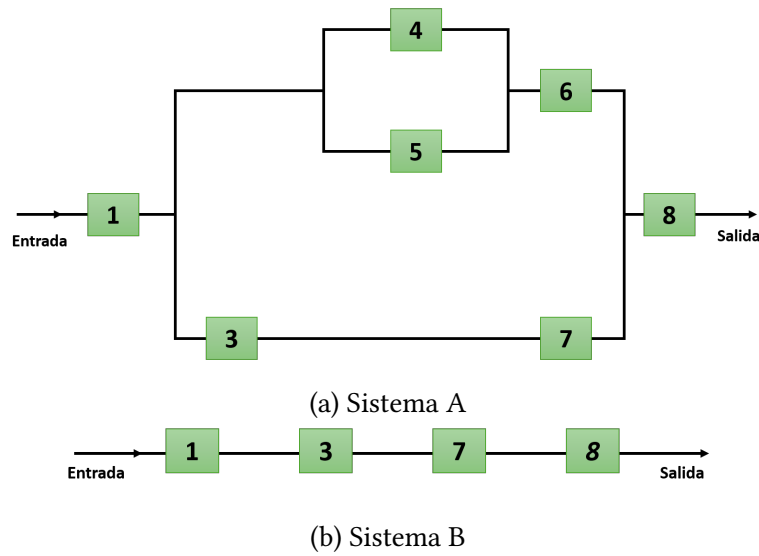


Figura 2.4: Descomposición de la confiabilidad del sistema.

Esta función contabiliza la cantidad de vectores de estado  $X$ , en las que el funcionamiento de la componente  $i$  determina que el sistema funcione y lo divide entre el número total de vectores estado posibles en los que la componente  $i$  funciona.

La Definición 2.1.8 se basa en el papel que cada componente tiene dentro de la estructura, sin embargo, es importante valorar también la confiabilidad de cada componente, para ello se tiene la siguiente definición.

**Definición 2.1.9.** La *importancia de la confiabilidad* de la componente  $i$  en un sistema coherente de  $n$  componentes es

$$I_r(i) = \frac{\partial r(\mathbf{p})}{\partial p_i}, \quad (2.13)$$

para  $i = 1, \dots, n$ .

**Observación.** La importancia estructural, también denominada de Birnbaum [12], se define a partir de las derivadas parciales de la función de confiabilidad, esta siempre existe debido a que la función de confiabilidad es del tipo polinomial definida para valores de  $p_i \in [0, 1]$ .

**Ejemplo 2.1.10.** Calcular la importancia estructural y de confiabilidad de cada componente para el sistema de la Figura 2.2.

**Solución.** La importancia estructural considera los  $2^3$  vectores estado posibles en los que una componente  $i$  funciona, con  $i = 1, 2, 3, 4$ , para obtener  $I_\psi(1)$ , se considera a los vectores estado en los que la componente 1 funciona, es decir,

$$(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0) \text{ y } (1, 0, 0, 0),$$

luego se contabiliza en cuantos de ellos la falla de la componente 1 implica la falla del sistema, es decir,

$$I_{\psi}(1) = \frac{1}{8}[(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 0) + (1 - 1) + (1 - 1)] = \frac{1}{8}.$$

De manera similar con el resto de componentes, de donde se obtiene que  $I_{\psi}(2) = \frac{1}{8}$ ,  $I_{\psi}(3) = \frac{3}{8}$  y  $I_{\psi}(4) = \frac{3}{4}$ .

Para calcular la importancia de la confiabilidad de cada componente se considera que  $\mathbf{p} = (0.5, 0.2, 0.7, 0.2)$ . Para obtener  $I_r(1)$  se calcula la derivada parcial de (2.68) con respecto a  $p_1$ , de donde se sigue,

$$I_r(1) = \frac{\partial r(\mathbf{p})}{\partial p_1} = p_2 - p_2p_4 - p_2p_3 + p_2p_3p_4 = 0.048, \quad (2.14)$$

de manera similar se obtiene,  $I_r(2) = 0.12$ ,  $I_r(3) = 0.72$  y  $I_r(4) = 0.27$ .

En el Ejemplo 2.1.10 puede verse que aunque las componentes 2 y 4 tienen el mismo valor de confiabilidad, no tienen la misma importancia en el sistema, también se observa que al sumar el valor de la importancia de confiabilidad de todas las componentes a diferencia de la importancia estructural no necesariamente suma 1.

## 2.2. Trayectoria mínima y conjuntos de corte mínimos

En secciones anteriores se mencionó que cualquier función de estructura puede representarse como un arreglo en serie de estructuras en paralelo o como un arreglo en paralelo de estructuras en serie, en lo que sigue se abordará esta propiedad de los sistemas, para ello es necesario presentar algunas definiciones.

**Definición 2.2.1.** Si  $\mathbf{X}$  es un vector de trayectoria para un sistema con función de estructura  $\psi$ , y  $\psi(\mathbf{Y}) = 0$ , para cualquier  $\mathbf{Y} < \mathbf{X}$ , se dice que  $\mathbf{X}$  es un **vector de trayectoria mínima**. Si  $\mathbf{X}$  es un vector de trayectoria mínima, entonces, el conjunto conformado por los índices de las componentes que funcionan,  $A = \{i | X_i = 1\}$  es llamado **conjunto de trayectoria mínima**.

Se dice así que un conjunto de trayectoria mínima es un conjunto mínimo de componentes cuyo funcionamiento asegura el funcionamiento del sistema.

**Ejemplo 2.2.2.** Considerar un sistema con estructura mixta conformado por 5 componentes, las cuales se conectan como se muestra en el diagrama de bloques de la Figura 2.5, determinar sus conjuntos de trayectoria mínima.

**Solución.** La función de estructura de dicho sistema es,

$$\psi(\mathbf{X}) = \max\{X_1, X_2\} \max\{X_3X_4, X_5\} \quad (2.15)$$

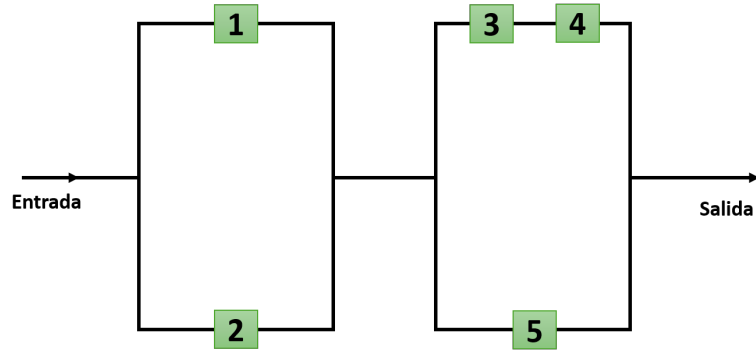


Figura 2.5: Segundo ejemplo de sistema mixto con 5 componentes.

$$= (X_1 + X_2 - X_1X_2)(X_3X_4 + X_5 - X_3X_4X_5), \quad (2.16)$$

se identifican 4 vectores de trayectoria mínima  $(1, 0, 1, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1, 1, 0)$  y  $(0, 1, 0, 0, 1)$ , por lo tanto, los conjuntos de trayectoria mínima son  $\{1, 3, 4\}$ ,  $\{1, 5\}$ ,  $\{2, 3, 4\}$  y  $\{2, 5\}$ .

Se puede notar que, el vector  $\mathbf{X} = (1, 1, 1, 1, 0)$  es de trayectoria, pero no es un vector de trayectoria mínima ya que, si  $\mathbf{Y} = (1, 0, 1, 1, 0)$ , ocurre que  $\mathbf{Y} < \mathbf{X}$  y  $\psi(\mathbf{Y}) = 1$ . Si un sistema tiene  $s$  vectores de trayectoria mínima, los conjuntos de trayectoria mínima se denotan como  $A_1, A_2, \dots, A_s$  y se define la siguiente función indicadora.

$$\alpha_j(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \text{si todas las componentes de } A_j \text{ funcionan,} \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (2.17)$$

Se tiene así que, un sistema va a funcionar si y solo si las componentes de al menos un conjunto de trayectoria mínima están funcionando, esto es, si  $\alpha_j(\mathbf{X}) = 1$  para algún  $j = 1, \dots, s$ , esto se expresa como sigue,

$$\psi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha_j(\mathbf{X}) = 1 \text{ para algún } j, \\ 0, & \text{si } \alpha_j = 0 \forall j = 1, \dots, s. \end{cases} \quad (2.18)$$

o bien, de forma equivalente,

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{X}) &= \max_j \alpha_j(\mathbf{X}) \\ &= \prod_{i \in A_j} X_i. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Se observa que  $\alpha_j(\mathbf{X})$  es una función de estructura en serie, por lo que la ecuación (2.19), describe un sistema arbitrario como un arreglo en paralelo de estructuras en serie.

En la Figura 2.6 se presenta un tipo de estructura denominada como sistema puente, para cuatro componentes y cómo cambia el esquema al considerar a los conjuntos de trayectoria mínima.

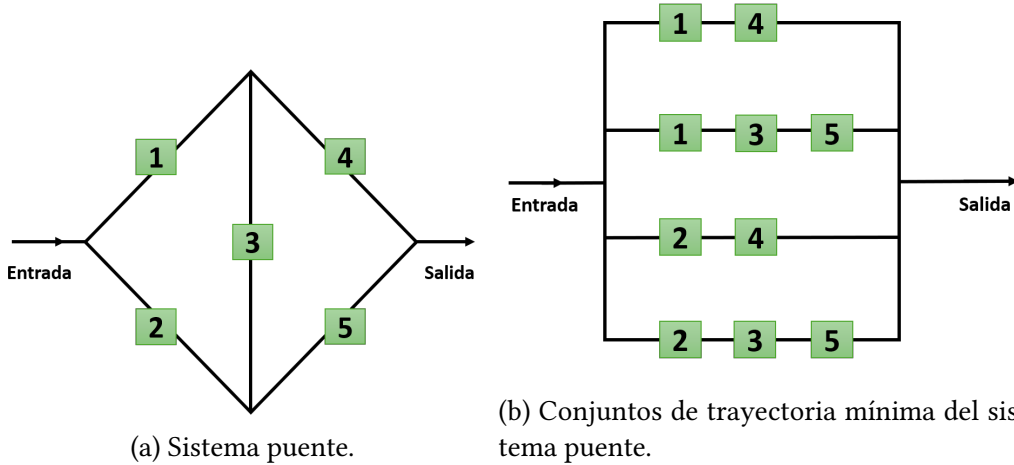


Figura 2.6: Un sistema arbitrario visto como arreglo en paralelo de estructuras en serie.

De forma análoga al vector de trayectoria mínima, se encuentra el vector de corte mínimo, el cual se define enseguida.

**Definición 2.2.3.** Si  $\mathbf{X}$  es un vector de corte para un sistema con función de estructura  $\psi$ , y  $\psi(\mathbf{Y}) = 1$ , para cualquier  $\mathbf{Y} > \mathbf{X}$ , se dice que  $\mathbf{X}$  es un **vector de corte mínimo**. Si  $\mathbf{X}$  es un vector de corte mínimo, entonces, el conjunto de índices de las componentes que no funcionan,  $C = \{i | X_i = 0\}$  es llamado **conjunto de corte mínimo**.

En otras palabras, un conjunto de corte mínimo es el conjunto mínimo de componentes cuya falla asegura la falla del sistema.

Si un sistema tiene  $k$  vectores de corte mínimo, los conjuntos de corte mínimo se denotan como  $C_1, C_2, \dots, C_k$  y se define la siguiente función indicadora.

$$\beta_j(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \text{si al menos una componente de } C_j \text{ funciona,} \\ 0, & \text{si todas las componentes de } C_j \text{ fallan.} \end{cases} \quad (2.20)$$

O de manera equivalente,

$$\beta_j(\mathbf{X}) = \max_{i \in C_j} X_i. \quad (2.21)$$

Se dice así que un sistema falla si todas las componentes de un conjunto de corte mínimo fallan, por lo tanto, se sigue que,

$$\psi(\mathbf{X}) = \prod_{j=1}^k \max_{i \in C_j} X_i. \quad (2.22)$$

La ecuación (2.22) corresponde a una estructura en paralelo de las componentes de  $C_j$ , por lo tanto, se puede decir que, por medio de los conjuntos de corte mínimo, la función de estructura de un sistema arbitrario se puede estudiar como un arreglo en serie de estructuras en paralelo.

**Ejemplo 2.2.4.** Determinar la función de estructura con base en los conjuntos de corte mínimo para el sistema puente con diagrama de bloques como en la Figura 2.6a.

**Solución.** Primero se identifican a los vectores de corte mínimo asociados al sistema, estos son:  $(0, 0, 1, 1, 1)$ ,  $(0, 1, 0, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 0, 0, 1)$  y  $(1, 1, 1, 0, 0)$ , luego, los conjuntos de corte mínimo asociados a cada uno de los vectores anteriores son:  $C_1 = \{1, 2\}$ ,  $C_2 = \{1, 3, 5\}$ ,  $C_3 = \{2, 3, 4\}$  y  $C_4 = \{4, 5\}$ , de la ecuación (2.22), se desarrolla la función de estructura como sigue

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{X}) &= \prod_{j=1}^4 \max_{i \in C_j} X_i \\ &= \max\{X_1, X_2\} \max\{X_1, X_3, X_5\} \max\{X_2, X_3, X_4\} \max\{X_4, X_5\} \\ &= [1 - (1 - X_1)(1 - X_2)][1 - (1 - X_1)(1 - X_3)(1 - X_5)] \\ &\quad [1 - (1 - X_2)(1 - X_3)(1 - X_4)][1 - (1 - X_4)(1 - X_5)]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

En la Figura 2.7 se ilustra la representación de la función estructural con base en los conjuntos de corte mínimos.

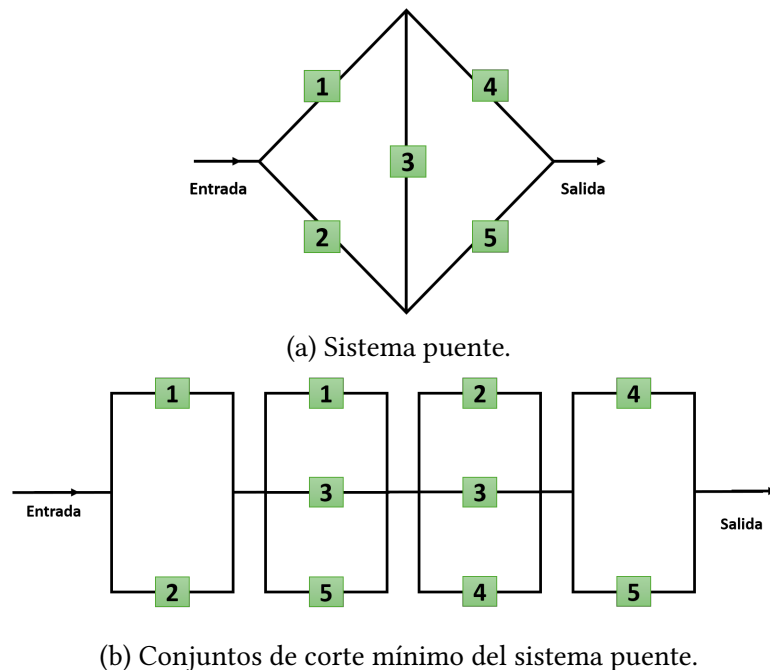


Figura 2.7: Un sistema arbitrario visto como arreglo en serie de estructuras en paralelo.

**Observación.** En secciones previas se presentaron las definiciones de vector de trayectoria y vector de corte, es posible verificar que cualquier vector de estado se clasifica en alguno de los dos tipos, por otro lado, los vectores de trayectoria mínima y de corte mínimo, no son complementarios, existen vectores de estado que no satisfacen ninguna de las dos definiciones correspondientes.

Las figuras presentadas para esquematizar la estructura de un sistema son denominadas diagramas de bloques, y son una herramienta muy útil en la comprensión de la confiabilidad de un sistema, el cual, a su vez puede representarse con diferentes diagramas de bloques como aquellos que se basan en conjuntos de corte mínimo o trayectoria mínima.

Otra herramienta visual recurrente en el estudio de la confiabilidad de un sistema son los árboles de falla, los cuales presentan a la falla u otro evento de interés denominado "evento tope", como una contingencia de eventos o fallas previos.

En los diagramas de bloques la falla se genera cuando algunas o todas las componentes fallan, en un árbol de fallas las causas del evento tope pueden ser fallas en subsistemas o también situaciones externas, como una mala ejecución de los operadores o defectos en algún sistema complementario como de ventilación o abastecimiento. Su construcción requiere el uso de una simbología estandarizada, tal como se muestra en la Figura 2.8.

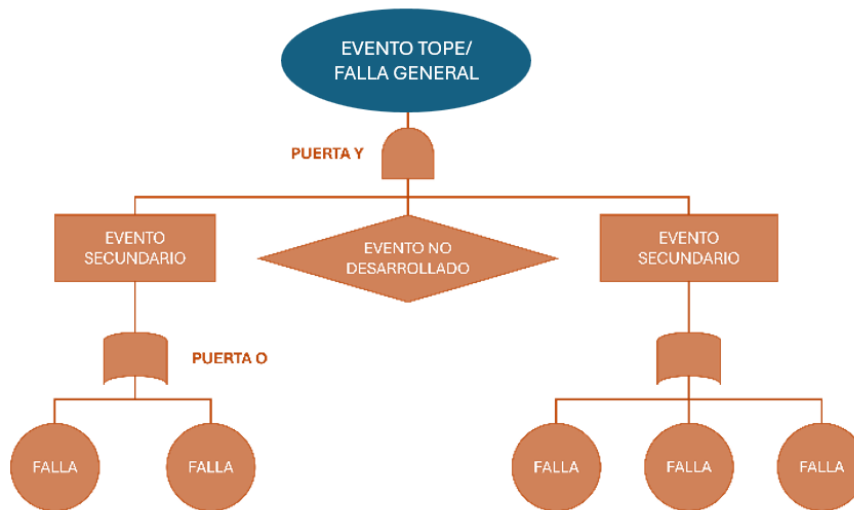


Figura 2.8: Ejemplo de un árbol de falla.

Los árboles de falla permiten cuantificar la probabilidad de falla o la confiabilidad del sistema, al interpretar la unión y disyunción de los eventos básicos considerados, bajo reglas de operación booleana, para ahondar en el tema se sugiere revisar [22].

## 2.3. Cotas para la función de confiabilidad

Al tener información sobre la estructura de un sistema y la confiabilidad de sus componentes, bajo suposición de independencia, las técnicas vistas anteriormente permiten determinar la función de confiabilidad del sistema en general, sin embargo, aplicar dichas técnicas se convierte en una tarea más complicada conforme el número de componentes aumenta, es por ello por lo que en lugar de describir explícitamente a la función de confiabilidad, se desarrollan métodos que la acotan. En lo que sigue se presentan dos métodos para acotar a la función de confiabilidad  $r(\mathbf{p})$  de un sistema.

### 2.3.1. Método de inclusión y exclusión

Para iniciar esta sección se retoman algunos resultados relacionados con la probabilidad de la unión de eventos, tal como el siguiente.

**Teorema 2.3.1.** *Si  $E_1, E_2, \dots, E_n$  son eventos definidos en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , entonces se cumple,*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_i E_j) + \sum_{i<j<k} P(E_i E_j E_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(E_1 E_2 \dots E_n). \quad (2.24)$$

**Demostración.** Ver en Apéndice B.

Para probar uno de los resultados de interés en el método de inclusión y exclusión es necesario ver primero el siguiente teorema.

**Teorema 2.3.2.** *Del cálculo combinatorio se tiene que para  $n > 0$  se satisface lo siguiente,*

$$\binom{n}{i} - \binom{n}{i+1} + \binom{n}{i+2} - \dots \pm \binom{n}{n} = \binom{n-1}{i-1} \geq 0, \quad (2.25)$$

para  $1 \leq i \leq n$ .

**Demostración.** Ver en Apéndice B.

A continuación se presenta el resultado sobre el que se basa el método de inclusión y exclusión.

**Teorema 2.3.3.** *Si  $E_1, E_2, \dots, E_n$  son eventos definidos en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , entonces se cumplen las siguientes desigualdades.*

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) &\leq \sum_{i=1}^n P(E_i) \\
 P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) &\geq \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_i E_j) \\
 P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) &\leq \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_i E_j) + \sum_{i<j<k} P(E_i E_j E_k) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

El sentido de la desigualdad se va alternando conforme se agrega un nuevo término de la expansión de  $P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right)$ .

**Demostración.** Ver en Apéndice B.

Acotar la probabilidad de una unión por medio de las desigualdades del Teorema 2.3.3 es un método llamado de inclusión y exclusión. Para aplicar dicho método a la función de confiabilidad se pueden considerar a los conjuntos de trayectoria mínima  $A_1, A_2, \dots, A_s$ , de una estructura dada  $\psi$ , a partir de ellos se definen eventos  $E_1, E_2, \dots, E_s$ , de la siguiente manera,

$$E_i = \{\text{todas las componentes de } A_i \text{ funcionan}\}. \quad (2.26)$$

Dado que el sistema funciona si y solo si al menos uno de los eventos  $E_i$  ocurre, entonces,

$$r(\mathbf{p}) = P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right). \quad (2.27)$$

Al tomar la función de confiabilidad  $r(\mathbf{p})$  como en (2.27) se puede aplicar el método de inclusión y exclusión, se observa que las probabilidades de los sumandos en las cotas son como sigue

$$\begin{aligned}
 P(E_i) &= \prod_{l \in A_i} p_l \\
 P(E_i E_j) &= \prod_{l \in A_i \cup A_j} p_l \\
 P(E_i E_j E_k) &= \prod_{l \in A_i \cup A_j \cup A_k} p_l,
 \end{aligned} \quad (2.28)$$

y así sucesivamente. Para entender la forma en que se describen a los índices de cada producto considere el caso  $E_i E_j$ , para que dicho evento ocurra deben funcionar todas

las componentes de  $A_i$  y  $A_j$ , es decir, todas las componentes del conjunto  $A_i \cup A_j$ , de manera similar ocurre con el resto de eventos.

**Observación.** Cuando las  $p_i$ 's son pequeñas, las probabilidades de intersección de eventos  $E_i$  toman valores más pequeños conforme aumenta el número de intersec-tandos, por lo que las cotas convergen más rápidamente.

**Ejemplo 2.3.4.** Considere la estructura o sistema puente (Fig. 2.6a), en el que todas las componentes tengan la misma probabilidad de funcionar, es decir,  $p_i = p$  para  $i = 1, 2, \dots, 5$ . Acotar su función de confiabilidad.

**Solución.** Del Ejemplo 2.3.10 se tiene que los conjuntos de trayectoria mínima son:  $A_1 = \{1, 4\}$ ,  $A_2 = \{1, 3, 5\}$ ,  $A_3 = \{2, 5\}$  y  $A_4 = \{2, 3, 4\}$ , se sigue así,

$$\begin{aligned} P(E_1) &= P(E_3) = p^2, \\ P(E_2) &= P(E_4) = p^3. \end{aligned} \quad (2.29)$$

El número de eventos de la forma  $E_j E_i$  es  $\binom{4}{2} = 6$ , en 5 de ellos  $A_i \cup A_j$  se conforma de 4 elementos, y solo en uno la unión contiene a las 5 componentes, por lo que,

$$\begin{aligned} P(E_1 E_2) &= P(E_1 E_3) = P(E_1 E_4) = P(E_2 E_3) = P(E_3 E_4) = p^4, \\ P(E_2 E_4) &= p^5. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Por medio del método de inclusión y exclusión a través de los conjuntos de trayec-toria mínima se obtiene,

$$\sum_{i=1}^4 P(E_i) - \sum_{i < j} P(E_i E_j) \leq r(\mathbf{p}) \leq \sum_{i=1}^4 P(E_i), \quad (2.31)$$

al sustituir los valores obtenidos en (2.30) y (2.31) se tiene que

$$2(p^2 + p^3) - 5p^4 - p^5 \leq r(\mathbf{p}) \leq 2(p^2 + p^3). \quad (2.32)$$

Para este ejemplo  $r(\mathbf{p}) = (p, p, p, p, p)$ , si  $p = 0.2$  entonces las cotas para la función de confiabilidad son,

$$0.08768 \leq r(\mathbf{0.2}) \leq 0.096. \quad (2.33)$$

Por otro lado, si  $p = 0.1$  se tiene

$$0.02199 \leq r(\mathbf{0.1}) \leq 0.022. \quad (2.34)$$

Al utilizar la técnica del valor esperado sobre la función de estructura del sistema puente se obtiene  $r(\mathbf{0.2}) = 0.08864$  y  $r(\mathbf{0.1}) = 0.02152$ , de donde se verifica la observa-ción de que las cotas en este caso, convergen más rápido para valores de  $p$  pequeños.

Así como es posible definir eventos con base en los conjuntos de trayectoria mínima cuya unión es el evento en el que el sistema funciona, también es posible definir eventos con base en los conjuntos de corte mínimo cuya unión es el evento en el que el sistema falla.

Sean  $C_1, C_2, \dots, C_r$  los conj. de corte mínimo, se definen los eventos  $F_1, F_2, \dots, F_r$  como sigue,

$$F_i = \{\text{todas las componentes en } C_i \text{ han fallado}\}. \quad (2.35)$$

Debido a que el sistema falla si y solo si todas las componentes de al menos un conjunto de corte mínimo fallan, se tiene que,

$$1 - r(\mathbf{p}) = P\left(\bigcup_{i=1}^r F_i\right). \quad (2.36)$$

Por el método de inclusión-exclusión se sigue,

$$\begin{aligned} 1 - r(\mathbf{p}) &\leq \sum_{i=1}^r P(F_i), \\ 1 - r(\mathbf{p}) &\geq \sum_{i=1}^r P(F_i) - \sum_{i<j} P(F_i F_j), \\ 1 - r(\mathbf{p}) &\leq \sum_{i=1}^r P(F_i) - \sum_{i<j} P(F_i F_j) + \sum_{i<j<k} P(F_i F_j F_k), \end{aligned} \quad (2.37)$$

y así sucesivamente.

La probabilidad de los eventos  $F_i$  y de sus intersecciones es como sigue,

$$\begin{aligned} P(F_i) &= \prod_{l \in C_i} (1 - p_l), \\ P(F_i F_j) &= \prod_{l \in C_i \cup C_j} (1 - p_l), \\ P(F_i F_j F_k) &= \prod_{l \in C_i \cup C_j \cup C_k} (1 - p_l). \end{aligned} \quad (2.38)$$

**Observación.** A diferencia del caso en que se consideran a los conjuntos de trayectoria mínima, en el caso de los conjuntos de corte mínimo, la convergencia es más rápida cuando los valores  $p_i$ 's son más grandes.

### 2.3.2. Segundo método para obtener las cotas de $r(\mathbf{p})$

Otra forma de acotar la función de confiabilidad  $r(\mathbf{p})$  requiere expresar la probabilidad de que el sistema funcione como la intersección de eventos, los cuales, al igual que en el método de inclusión y exclusión, se basan en los conjuntos de trayectoria mínima y de corte mínimo.

Sean  $A_1, A_2, \dots, A_s$  que denotan a los conjuntos de trayectoria mínima de una estructura  $\psi$ , se definen los eventos  $D_1, D_2, \dots, D_s$  de la siguiente manera,

$$D_i = \{\text{al menos una componente en } A_i \text{ falla}\}. \quad (2.39)$$

Dado que el sistema falla si y solo si al menos una componente de cada conjunto de trayectoria mínima falla, entonces se cumple que,

$$\begin{aligned} 1 - r(\mathbf{p}) &= P(D_1 D_2 \cdots D_s), \\ &= P(D_1)P(D_2|D_1) \cdots P(D_s|D_1 D_2 \cdots D_{s-1}), \end{aligned} \quad (2.40)$$

lo cual se obtiene de aplicar la regla del producto.

Es adecuado pensar que la información de que al menos una componente de  $A_1$  ha fallado, solo puede incrementar la probabilidad de que al menos una componente de  $A_2$  falle, es decir,

$$P(D_2|D_1) \geq P(D_2). \quad (2.41)$$

Para probar la desigualdad (2.41) se descompone  $P(D_2)$  como sigue,

$$P(D_2) = P(D_2|D_1)P(D_1) + P(D_2|D_1^c)P(D_1^c). \quad (2.42)$$

Se observa que,

$$P(D_2|D_1^c) = P\{\text{al menos una comp. en } A_2 \text{ falla} \mid \text{todas las comp. de } A_1 \text{ funcionan}\} \quad (2.43)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(D_2|D_1^c) &= 1 - \prod_{j \in A_2 - A_1} p_j, \\ &\leq 1 - \prod_{j \in A_2} p_j, \\ &= P(D_2). \end{aligned} \quad (2.44)$$

De las ecuaciones (2.42) y (2.43) se tiene que,

$$P(D_2) \leq P(D_2|D_1)P(D_1) + P(D_2)P(D_1^c), \quad (2.45)$$

entonces,

$$\begin{aligned} P(D_2)(1 - P(D_1^c)) &\leq P(D_2|D_1)P(D_1), \\ P(D_2)(P(D_1)) &\leq P(D_2|D_1)P(D_1), \\ P(D_2) &\leq P(D_2|D_1). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Por medio de un razonamiento similar se verifica que,

$$P(D_i|D_1 \cdots D_{i-1}) \geq P(D_i). \quad (2.47)$$

De las ecuaciones (2.39) y (2.46) se sigue,

$$1 - r(\mathbf{p}) \geq \prod_{i=1}^s P(D_i), \quad (2.48)$$

o de manera equivalente,

$$r(\mathbf{p}) \leq 1 - \prod_{i=1}^r \left( 1 - \prod_{j \in A_i} p_j \right). \quad (2.49)$$

Para obtener la cota inferior se consideran a los conjuntos de corte mínimo correspondientes a la estructura  $\psi$ , los cuales se denotan como  $C_1, C_2, \dots, C_r$ , y se definen los eventos  $U_1, \dots, U_r$  como,

$$U_i = \{\text{al menos una componente en } C_i \text{ está funcionando}\}. \quad (2.50)$$

Se puede ver que,

$$P(U_i) = 1 - \prod_{j \in A_i} (1 - p_j). \quad (2.51)$$

Dado que el sistema funciona si y solo si todos los eventos  $U_i$  ocurren, se cumple que,

$$\begin{aligned} r(\mathbf{p}) &= P(U_1 U_2 \cdots U_r) \\ &= P(U_1)P(U_2|U_1) \cdots P(U_r|U_1 U_2 \cdots U_{r-1}). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Por medio de un procedimiento similar al de la cota superior, se obtiene que,

$$P(U_1) \leq P(U_1|U_2), \quad (2.53)$$

y de manera general

$$P(D_i|D_1 \cdots D_{i-1}) \geq P(D_i). \quad (2.54)$$

De (2.49) y (2.51) se obtiene que,

$$r(\mathbf{p}) \geq \prod_{i=1}^r P(U_i). \quad (2.55)$$

Al sustituir (2.55) se tiene que,

$$r(\mathbf{p}) \geq \prod_{i=1}^r \left( 1 - \prod_{j \in A_i} (1 - p_j) \right). \quad (2.56)$$

Por lo tanto, las cotas para la función de confiabilidad son,

$$\prod_{i=1}^r \left( 1 - \prod_{j \in A_i} (1 - p_j) \right) \leq r(\mathbf{p}) \leq 1 - \prod_{i=1}^r \left( 1 - \prod_{j \in A_i} p_j \right). \quad (2.57)$$

**Observación.** Las cotas superior e inferior de  $r(\mathbf{p})$  son más cercanas a la función de confiabilidad conforme menos elementos haya en la intersección entre los conjuntos de trayectoria mínima o de corte mínimo.

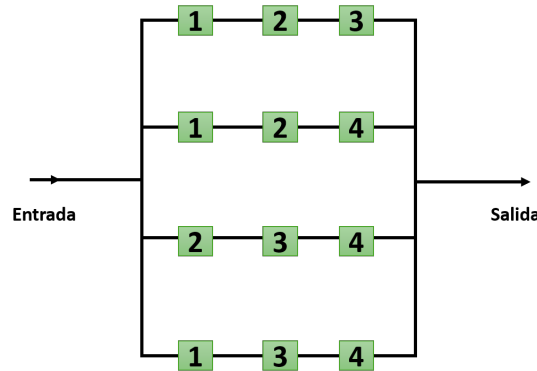


Figura 2.9: Sistema 3 – out – of – 4.

**Ejemplo 2.3.5.** Considere un sistema 3 – out – of – 4, tal como se presenta en la Figura 2.9, acotar la función de confiabilidad.

**Solución.** Se identifican los conjuntos de trayectoria mínima, los cuales son  $A_1 = \{1, 2, 5\}$ ,  $A_2 = \{1, 2, 4\}$ ,  $A_3 = \{1, 3, 4\}$  y  $A_4 = \{2, 3, 4\}$ , por otro lado, los conjuntos de corte mínimo son  $C_1 = \{1, 2\}$ ,  $C_2 = \{1, 3\}$ ,  $C_3 = \{1, 4\}$ ,  $C_4 = \{2, 3\}$ ,  $C_5 = \{2, 4\}$  y  $C_6 = \{3, 4\}$ .

Al aplicar el segundo método para las cotas se obtiene,

$$\begin{aligned} & (1 - q_1q_2)(1 - q_1q_3)(1 - q_1q_4)(1 - q_2q_3)(1 - q_2q_4)(1 - q_3q_4) \\ & \leq r(\mathbf{p}) \leq 1 - (1 - p_1p_2p_3)(1 - p_1p_2p_4)(1 - p_1p_3p_4)(1 - p_2p_3p_4), \end{aligned} \quad (2.58)$$

donde  $q_i = 1 - p_i$ .

En el caso  $p_i = 0.5$ , por ejemplo, al sustituir en (2.58) se obtienen los siguientes valores para las cotas,

$$0.18 \leq r(\mathbf{p}) \leq 0.59 \quad (2.59)$$

Para calcular de forma exacta la confiabilidad del sistema se sustituyen los valores correspondientes en el Teorema 2.3.3 y se obtiene que

$$\begin{aligned} r(\mathbf{p}) &= \binom{4}{3}(0.5)^4 + \binom{4}{4}(0.5)^4 \\ &= 5(0.5)^4 \\ &= 0.3125. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Para casos en los que los conjuntos de trayectoria mínima y de corte mínimo se traslapen menos, se espera un mejor desempeño de las cotas.

## 2.4. Enfoque estadístico

El recurso básico del enfoque estadístico son las bases de datos conformadas por tiempos de falla y en el caso de sistemas reparables también por los tiempos de reparación, por lo tanto, es importante comenzar con la clasificación de los sistemas en dos clases, no reparables o reparables, tal como se muestra en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1: Clasificación de sistemas [22].

Característica	Sistemas no reparables	Sistemas reparables
Condición operativa	No se puede restaurar luego de una falla.	Sí puede restaurarse luego de una falla por medio de una reparación distinta del reemplazo total.
Ciclo de vida útil	Termina cuando se presenta una falla y debe reemplazarse.	Puede ocurrir más de una falla a lo largo de su vida útil.
Variable aleatoria de interés	Tiempo para la falla.	Número de fallas en un periodo específico de tiempo.
Para caracterizar probabilísticamente se requiere	Tasa de fallas $h(t)$ .	Tasa de ocurrencia de fallas $\lambda(t)$ y tasa de reparación $\mu(t)$ .

Este enfoque tiene como objetivo obtener información sobre el tiempo de funcionamiento de la componente o sistema, hasta que ocurre una falla, por lo tanto, es necesario llevar a cabo un proceso inferencial sobre una muestra representativa de la

población que corresponde al tipo de sistema estudiado.

La muestra se puede conformar por datos de tiempo medidos en segundos, minutos, horas, etcétera, así como por datos de funcionamiento, como el número de ciclos concluidos (en el caso de máquinas que no operan de forma continua), cantidad de kilómetros recorridos, entre otros.

Es deseable caracterizar el tiempo para la falla de un sistema por medio de una ley de falla como las vistas anteriormente, si los datos son de tipo discreto se optaría por variables aleatorias de esta naturaleza como la distribución geométrica o la binomial negativa.

### 2.4.1. Datos

Un dato es un elemento de la muestra aleatoria, se puede obtener por medio de un método experimental o investigaciones de campo, así como a través de simulaciones. Las empresas pueden reunir dichos datos a través del monitoreo ordinario del sistema o sistemas de interés, o bien, mediante pruebas de vida acelerada, ambos son ejemplos de métodos experimentales, los cuales permiten obtener una muestra representativa de la población a partir de la cual es posible hacer inferencias sobre su distribución.

En el proceso de recolección de datos para obtener una muestra aleatoria, revisar Definición 1.2.1, existen inconvenientes que deben tomarse en cuenta para realizar una inferencia adecuada, estos suelen estar relacionados con el diseño del método de observación, así como con errores humanos, para aclarar estos puntos se presentan las siguientes definiciones.

El concepto de censura puede referir a distintos casos, a continuación se presentan dos de las clasificaciones de censura más utilizadas, las cuales se representan en la Figura 2.10.

**Definición 2.4.1.** *En términos de las condiciones de observación se definen los siguientes tipos de censura, para una muestra conformada por  $n$  elementos.*

- *Tipo I. Cada artículo es observado como máximo hasta un tiempo fijo. Sea  $c_i$  el tiempo máximo hasta el cual se puede observar el  $i$ -ésimo artículo, los datos obtenidos de la muestra son el conjunto  $DATA = \{\min(t_i, c_i) | i = 1, \dots, n\}$ .*
- *Tipo II. Todos los artículos de la muestra son observados a partir del mismo instante y se finaliza el registro después de que  $r$  fallas ocurren. Es decir, solo se observan los primeros  $r$  tiempos de falla de la muestra, o bien  $DATA = \{t_{(i)} | i = 1, \dots, r\}$  y los otros  $n - r$  tienen el mismo tiempo de censura en común.*

Otros términos asociados al concepto de censura corresponden a lo que se denomina censura por la derecha, que se refiere al caso en el que no se observó o se desconoce el tiempo de la ocurrencia de la falla y censura por la izquierda que se refiere al caso en el que no se observó o se desconoce el inicio del periodo de funcionamiento del sistema. En la teoría de confiabilidad es más común tener casos en los que el tipo de censura es por la derecha.

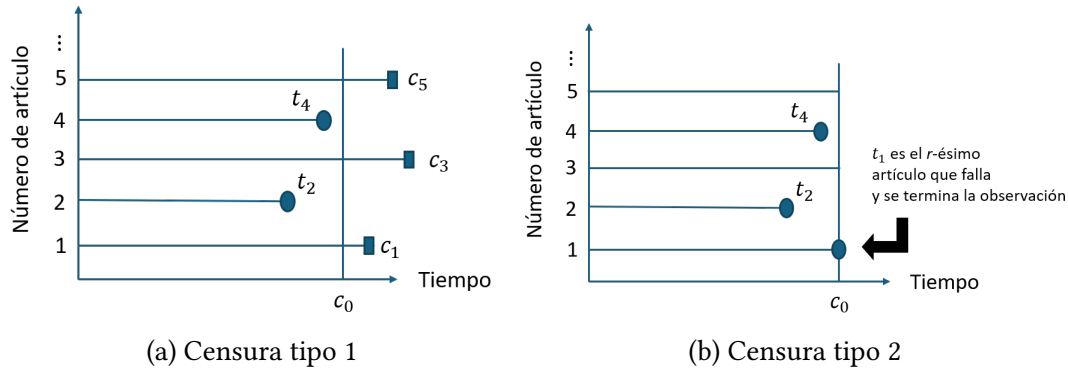


Figura 2.10: Los datos censurados ocurren cuando no es posible observar por completo todos los tiempos de falla de los sistemas que conforman una muestra.

**Observación** La definición de censura tipo I admite que para una muestra se registren distintos tiempos de censura, sin embargo, en la teoría de confiabilidad es común que el inicio y fin del tiempo de registro sea el mismo para todos los elementos de la muestra. Lo anterior depende principalmente del diseño de la actividad de monitoreo. La teoría de supervivencia está fuertemente relacionada con la teoría de confiabilidad, en ella es frecuente que las muestras con censura tipo I presenten datos de censura distintos, ya que registran el inicio de una condición clínica así como la ocurrencia de complicaciones, reincidencia, etcétera, lo cual es de una naturaleza menos susceptible de control.

Para comprender mejor estos conceptos se presenta el siguiente ejemplo [11].

**Ejemplo 2.4.2.** *En una planta de pozos de producción de petróleo se utiliza un modelo de bombas electro-sumergibles, se registran los tiempos de la primera falla para 53 de dichas bombas, sin embargo, solo se observaron 49 tiempos de falla y los otros 4 fueron censurados, en la Tabla 2.2 se presenta la información reunida.*

Los tipos de censura I y II son controlados por el investigador, sin embargo, en el desarrollo del experimento pueden perderse datos por una mala captura o registro, o bien, situaciones fuera del control del investigador, dichos tiempos de falla perdidos también representan censura en el estudio de confiabilidad, existen investi-

Tabla 2.2: Datos de tiempos de falla de bombas electro-sumergibles, en color azul los datos censurados.

21.6	298.5	719.7	1282	2072	3595
63	373.6	737.6	1373	2259	4083
65.1	430.6	746.6	1447	2290	5804
83.3	434	756.7	1519	2554	6415
120.5	446.8	758.8	1589	2773	6550
121	516.8	977.9	1676	2894	6870
135.1	597.9	1082	1769	2939	6900
184.2	629.7	1082	1789	2969	7000
246.4	647.6	1178	1832	3438	

gaciones que desarrollan modelos capaces de ajustar adecuadamente las propiedades de los datos aún con información perdida, ver [21].

### 2.4.2. Estimación

Un sistema o componente puede comportarse de acuerdo con alguna de las leyes de falla vistas en secciones anteriores, para argumentar si se cuenta con evidencia suficiente es necesario hacer uso de la inferencia estadística, lo cual es posible al realizar una estimación puntual o por intervalo de los parámetros de la ley considerada a representar mejor los datos.

Los parámetros de una distribución son importantes ya que ellos dan información sobre propiedades y características de la población que la distribución modela, como la forma y escala, en el caso de las distribuciones Weibull y Gamma, o sobre la media y la desviación estándar en el caso de la distribución Normal.

La estimación de un parámetro puede realizarse de forma puntual o por intervalo. El método de máxima verosimilitud para la estimación puntual es relevante debido a las propiedades que posee [3].

**Definición 2.4.3.** Si  $X_1, \dots, X_n$  son v. a. i. d. de una población con fdp  $f(x|\theta_1, \dots, \theta_k)$ , la función de verosimilitud está definida por,

$$L(\theta|x) = L(\theta_1, \dots, \theta_k|x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_1, \dots, \theta_k).$$

Para cada punto muestral  $x$ , sea  $\hat{\theta}(x)$  el valor del parámetro para el cual  $L(\theta|x)$  alcanza su máximo como una función de  $\theta$ , con un  $x$  fijo, entonces este es el **estimador de máxima verosimilitud** (MLE) del parámetro  $\theta$ , basado en la muestra  $X$ .

Los MLE tienen propiedades importantes como la invarianza que se expresa en el siguiente resultado.

**Teorema 2.4.4.** *Si  $\hat{\theta}$  es el MLE de  $\theta$ , entonces  $h(\hat{\theta})$  es el estimador de máxima verosimilitud de  $h(\theta)$ .*

**Demostración.** Ver en [3].

**Ejemplo 2.4.5.** *MLE para  $\mu$  y  $\lambda$  los parámetros de media y forma, respectivamente, de una población que se distribuye como una  $GI(\mu, \lambda)$ .*

*Se considera  $T_1, \dots, T_n$  v. a. i. d., tales que  $T_i \sim GI(\mu, \lambda)$ , y  $t_1, \dots, t_n$  observaciones o realizaciones de dichas v.a.'s, la función de verosimilitud es como sigue,*

$$\begin{aligned} L(\mu, \lambda|t) &= \prod_{i=1}^n f(t_i; \mu, \lambda) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{(2\pi t_i^3)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{\frac{-\lambda(t_i - \mu)^2}{2t_i\mu^2}\right\} \\ &= \frac{\lambda^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{\sum_{i=1}^n \left(\frac{-\lambda(t_i - \mu)^2}{2t_i\mu^2}\right)\right\}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

*Para un desarrollo más claro, se descompone la potencia del término exponencial de la siguiente forma,*

$$\begin{aligned} \frac{-\lambda(t - \mu)^2}{2t\mu^2} &= \frac{-\lambda t^2}{2t\mu^2} + \frac{2t\lambda\mu}{2t\mu^2} - \frac{\lambda\mu^2}{2t\mu^2} \\ &= \frac{-\lambda t}{2\mu^2} + \frac{\lambda}{\mu} - \frac{\lambda}{2t}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

*Por lo que, la suma de las potencias es,*

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{-\lambda(t_i - \mu)^2}{2t_i\mu^2}\right) = \frac{-\lambda}{2\mu^2} \sum_{i=1}^n t_i + \frac{n\lambda}{\mu} - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}. \quad (2.63)$$

*Para facilitar los cálculos se usa la función de logverosimilitud, por lo que al sustituir (2.63) en (2.62) y aplicar el logaritmo se obtiene,*

$$\log L(\mu, \lambda) = \frac{n}{2} \log(\lambda) - \frac{n}{2} \log(2\pi) + \sum_{i=1}^n \log\left(t_i^{-\frac{3}{2}}\right) - \frac{\lambda}{2\mu^2} \sum_{i=1}^n t_i + \frac{n\lambda}{\mu} - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}.$$

*Para maximizar esta función se obtiene la derivada parcial de  $\log L$  con respecto a cada parámetro, de donde se sigue,*

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = \frac{\lambda}{\mu^3} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{n\lambda}{\mu^2}. \quad (2.64)$$

Se deduce la ecuación score con base en (2.64) y se resuelve para  $\mu$ , de donde se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\mu^3} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{n\lambda}{\mu^2} &= 0, \\ \frac{\lambda}{\mu^2} \left( \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\mu} - n \right) &= 0, \\ \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\mu} &= n. \end{aligned} \quad (2.65)$$

De lo anterior se obtiene que  $\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} = \bar{t}$ .

Para el caso del parámetro de forma, primero se obtiene la derivada parcial con respecto a  $\lambda$ .

$$\frac{\partial \log L}{\partial \lambda} = \frac{n}{2\lambda} - \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{2\mu^2} + \frac{n}{\mu} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}. \quad (2.66)$$

La ecuación score es,

$$\frac{n}{2\lambda} - \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{2\mu^2} + \frac{n}{\mu} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} = 0. \quad (2.67)$$

Dado que aparece el parámetro  $\mu$ , se utiliza su estimador, se sigue que,

$$\begin{aligned} \frac{n}{2\lambda} &= \frac{1}{2\mu^2} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{n}{\mu} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} \\ &= \frac{n^2}{2(\sum_{i=1}^n t_i)^2} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n t_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} \\ &= \frac{n^2}{2 \sum_{i=1}^n t_i} - \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n t_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} - \frac{1}{2} \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n t_i}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

en consecuencia, se tiene que,

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} - \frac{1}{\bar{t}}, \quad (2.69)$$

por lo que, el estimador del parámetro de forma es,

$$\hat{\lambda} = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} - \frac{1}{\bar{t}} \right)^{-1}. \quad (2.70)$$

Es posible que al reunir datos sobre los tiempos de falla, algunos sean censurados, en cuyo caso es importante considerar esta información de forma adecuada para realizar la estimación de parámetros, ya que de lo contrario se podría subestimar la confiabilidad del sistema.

Para el caso de la censura tipo I, es posible realizar el cálculo de estimadores MLE, bajo las siguientes consideraciones.

La función de verosimilitud para una muestra con datos censurados requiere definir dos conjuntos  $U = \{i|t_i < c_i\}$  y  $C = \{i|t_i > c_i\}$ , estos corresponden a los elementos de la muestra cuyo tiempo de falla fue observado y los tiempos de falla que fueron censurados, respectivamente, luego la función es como sigue

$$L(\theta|t) = \prod_{i \in U} f(t_i; \theta) \prod_{j \in C} R(t_j; \theta). \quad (2.71)$$

En algunos casos, la función de verosimilitud o logverosimilitud asociada a un parámetro de alguna distribución, es complicada de derivar, por lo que se recurren a métodos numéricos como Newton-Raphson, Nelder-Mead, o algoritmos como la Estrategia de Evolución de Adaptación de Matriz de Covarianza (CMA-ES), etcétera.

Para ilustrar las diferencias entre la estimación de los parámetros de una distribución por MLE, excluyendo o incorporando a los datos de tiempo censurados, se presenta el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.4.6.** *Considere a los datos de tiempos para la falla de un modelo de bomba electrosumergible, que se presentan en la Tabla 2.2, determinar si existe alguna ley de falla que modele adecuadamente los datos, así como la estimación de sus respectivos parámetros.*

**Solución.** *Para realizar el ajuste se consideró como distribuciones candidatas a la exponencial, Weibull y Gamma, primero sin considerar los datos censurados, y se calcularon los MLE correspondientes, después se desarrolló el test de bondad de ajuste de Kolmogoróv-Smirnov, los resultados se presentan en la Tabla 2.4.*

*A partir del número de elementos de la muestra, se calculan los valores críticos para, rechazar o no, la hipótesis nula de que los elementos de la muestra provienen de una determinada distribución, para distintos niveles de significancia, dichos valores se reúnen en la Tabla 2.5.*

Tabla 2.3: Estimadores puntuales de diferentes distribuciones, para casos sin y con censura.

Distribución	Parámetros	Todos los equipos han fallado	Solo $m$ equipos fallaron y $w$ tienen tiempos de falla censurados
<b>Exponencial</b>	$\lambda$	$\lambda = \frac{n}{\sum t_i}$	$\lambda = \frac{m}{\sum_{i=1}^m t_i + \sum_{j=1}^w t_j}$
<b>Weibull</b>	$\alpha$	$\hat{\alpha} = \left( \frac{n}{\sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\beta}}} \right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}}$	$\hat{\alpha} = \left( \frac{\sum_{i=1}^m t_i^{\hat{\beta}} + \sum_{j=1}^w t_j^{\hat{\beta}}}{n} \right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}}$
	$\beta$	$\frac{\sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\beta}} \ln(t_i)}{\sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\beta}}} - \frac{1}{\hat{\beta}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(t_i)$	$\frac{\sum_{i=1}^m t_i^{\hat{\beta}} \ln(t_i) + \sum_{j=1}^w t_j^{\hat{\beta}} \ln(t_j)}{\sum_{i=1}^m t_i^{\hat{\beta}} + \sum_{j=1}^w t_j^{\hat{\beta}}}$ $\frac{1}{\hat{\beta}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln(t_i)$
<b>Gamma</b>	$\lambda$	$\hat{\lambda} = \frac{(n-1)(\sum_{i=1}^n t_i)^2}{n^2 \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}$	Solución numérica
	$\beta$	$\hat{\beta} = \frac{n \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}{(n-1) \sum_{i=1}^n (t_i)}$	Solución numérica
<b>Normal</b>	$\mu$	$\hat{\mu} = \bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n}$	Solución numérica
	$\sigma$	$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2$	Solución numérica

Tabla 2.4: Resultados del test de Kolmogorov para diferentes distribuciones.

Distribución	Exponencial	Weibull	Gamma
<b>Valor del estadístico de prueba</b>	0.06526041	0.06504096	0.06326846

En la Figura 2.11 se presenta la Fda de cada distribución así como las estimaciones obtenidas para los parámetros, puede verse que cualquiera de las tres distribuciones tiene un ajuste adecuado, además de que el valor correspondiente a cada una queda por debajo de los valores críticos para distintos niveles de significancia, sin embargo, con base en el test de bondad de ajuste de la Tabla 2.4, se considera que la mejor opción es la distribución Gamma con parámetros  $\lambda = 1465.628$  y  $\beta = 0.9959$ .

Para determinar el mejor modelo, es recomendable aplicar otros criterios, se realiza una comparación por medio del criterio Akaike [16], denotado como AIC, el cual consiste en realizar el siguiente cálculo para cada distribución:

$$AIC = -2l(\hat{\theta}) + 2K + \frac{2K(K+1)}{n-K-1},$$

Tabla 2.5: Valores críticos del estadístico de Kolmogorov–Smirnov para distintos niveles de significancia.

Tamaño de muestra “ $n$ ”	Significancia				
	20 %	15 %	10 %	5 %	1 %
$> 35$	$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.14}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$
$N = 49$	0.15286	0.16286	0.17429	0.19429	0.23286

donde,

- $l(\hat{\theta})$  es el logaritmo de la función de máxima verosimilitud evaluada en el vector de parámetros estimados.
- $K$  es el número de parámetros.
- $n$  es el número de observaciones.

Los valores obtenidos se reúnen en la Tabla 2.6.

Tabla 2.6: Resultados del AIC para las distribuciones consideradas.

Distribución	Exponencial	Weibull	Gamma
Valor del AIC	814.509312	816.684972	816.683746

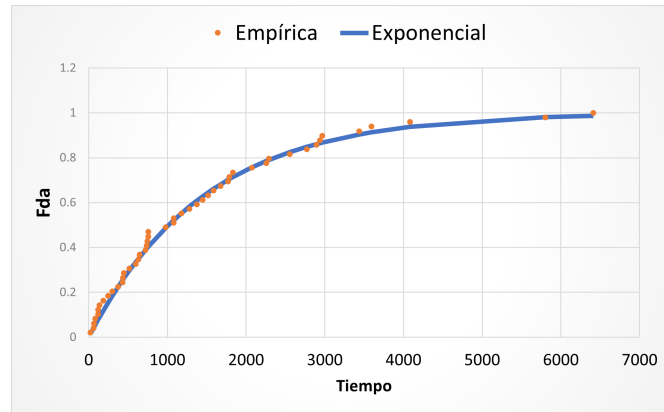
La distribución identificada como el mejor modelo de acuerdo con el criterio AIC es la exponencial, ya que es el menor valor de todos.

En este punto se propone incorporar los tiempos de falla censurados para tener un acercamiento más realista a la confiabilidad del sistema, y se realiza nuevamente la estimación puntual por MLE y se obtuvo que  $\lambda = 0.000494$  el cual es un valor menor al caso sin censura.

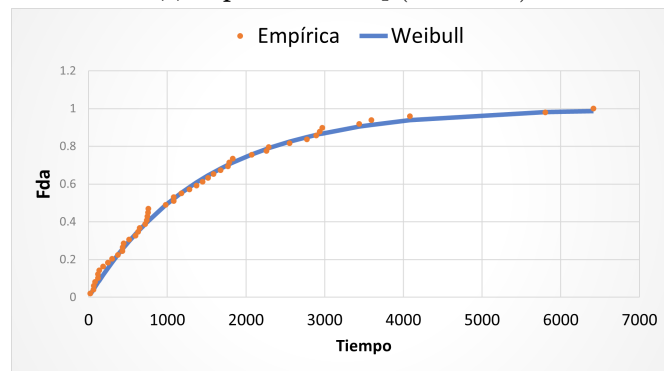
Una posible pregunta es, si alguna de las otras leyes de falla ofrecería un mejor ajuste al considerar a los datos censurados en comparación con la distribución Exponencial, debido a que el valor del estadístico de prueba K-S para la distribución Gamma, fue el menor, también se realiza su análisis para el caso en el que se incorporan datos censurados, y se estiman los parámetros de forma y escala con el MLE correspondiente, de acuerdo con 2.3, se requiere hacer un cálculo numérico, para lo cual se emplearon funciones disponibles en Python y se obtuvo:

$$\lambda = 2569.1527 \tag{2.72}$$

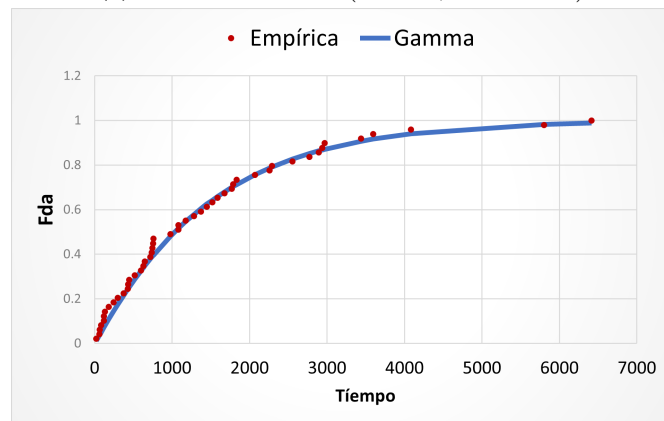
$$\beta = 0.8004 \tag{2.73}$$



(a) Exponencial,  $exp(0.000682)$



(b) Weibull,  $Weibull(0.9989, 1465.6389)$



(c) Gamma,  $Gamma(0.9959, 1465.6280)$

Figura 2.11: Ajuste de datos a diferentes distribuciones.

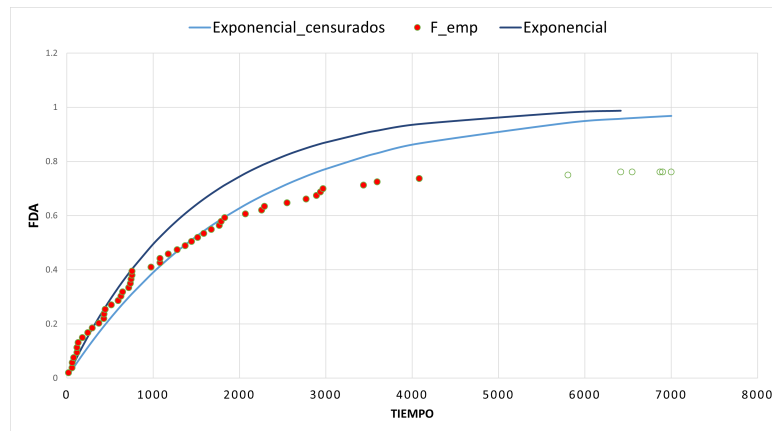


Figura 2.12: Comparación entre el ajuste a la función de distribución acumulativa empírica de los datos para el caso Exponencial cuando se consideran y cuando no se consideran datos censurados.

De lo anterior se observa que el parámetro de forma es menor. Se realiza la comparación de la Fda de la Exponencial y la Gamma considerando los nuevos parámetros con respecto a la función de distribución acumulada empírica, que también considera los datos censurados, y se calcula por medio de los estimadores de Kaplan-Meier [16], tal como se muestra en la Figura 2.13 y se aprecia que efectivamente tiene un mejor ajuste cuando los estimadores incluyen la información censurada.

Un mejor ajuste implica una estimación de la confiabilidad más realista, tal como se muestra en la Figura 2.14, cuando no se consideran los datos censurados se puede obtener una subestimación de la confiabilidad del sistema.

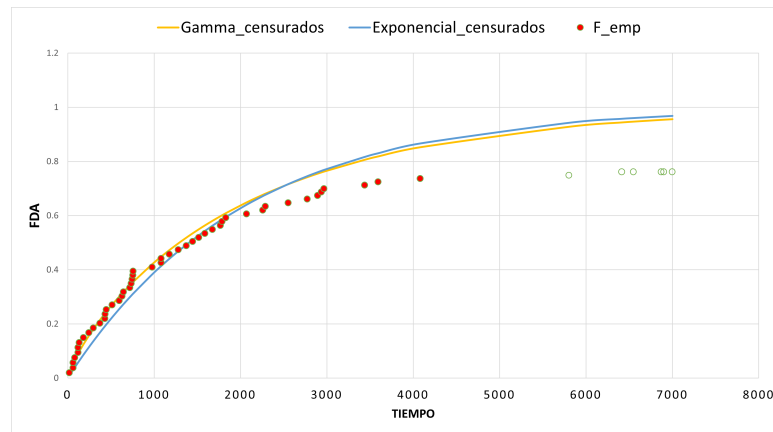


Figura 2.13: Comparación entre el ajuste a la función de distribución acumulativa empírica de los datos para el caso Exponencial y Gamma cuando se consideran datos censurados.

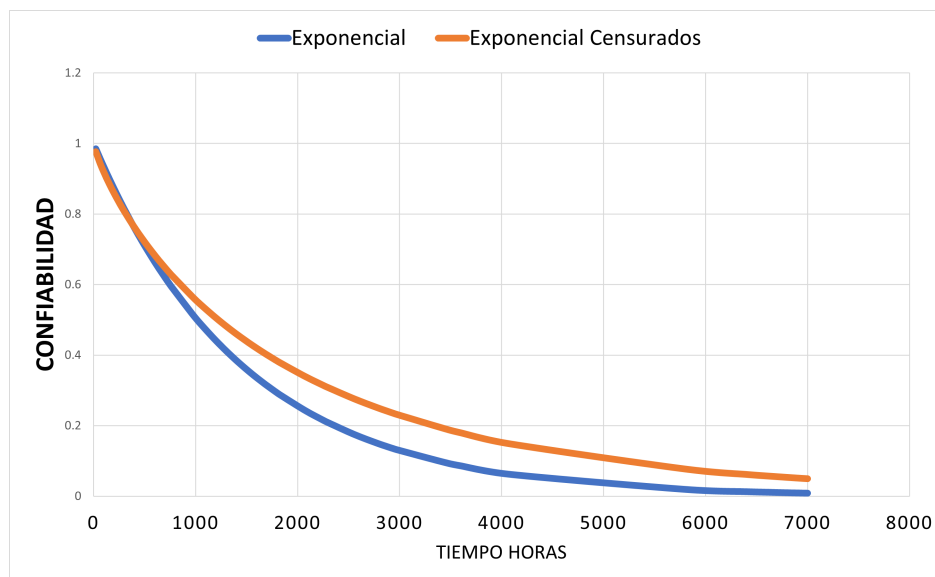


Figura 2.14: Comparación de la confiabilidad de un sistema para un ajuste de acuerdo con la ley de fallas Exponencial cuando se consideran y cuando no se consideran los datos censurados.

---

---

## CAPÍTULO 3

---

# CONFIABILIDAD DE SISTEMAS REPARABLES

En un sistema reparable los elementos de estudio son el número de fallas en un periodo de tiempo determinado, el tiempo esperado para la siguiente falla o número de fallas, es por ello por lo que es adecuado emplear los procesos de conteo, los cuales son un tipo de proceso estocástico que contabiliza la ocurrencia de eventos de interés, dentro del contexto de confiabilidad este evento es la falla, en la siguiente sección se presentan los tipos de procesos más empleados en el estudio de sistemas reparables.

### 3.1. Procesos contadores

Es importante definir un proceso de conteo como un proceso estocástico, se tiene así lo siguiente.

**Definición 3.1.1.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad y sea  $\{N(t), t \geq 0\}$  un proceso estocástico definido sobre él,  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ , se dice que es un **proceso de conteo** o proceso contador si  $N(t)$  representa el número total de “eventos” que han ocurrido al tiempo  $t$ , por lo que un proceso de conteo cumple.

1.  $N(t) \geq 0$ .
2.  $N(t)$  es de valor entero.
3. Si  $s < t$ , entonces  $N(s) \leq N(t)$ .
4. Para  $s < t$ ,  $N(t) - N(s)$  corresponde al número de eventos en el intervalo  $(s, t]$ .

Si el número de eventos que ocurren en intervalos de tiempo disjuntos son independientes, se dice que el proceso tiene incrementos independientes, esto es que  $N(t)$  y  $N(t + s) - N(t)$  son v. a. i. para  $s > 0$ .

Si el número de eventos que ocurren en un intervalo de tiempo depende solo de la longitud del intervalo, se dice que el proceso tiene incrementos estacionarios, es decir,  $N(t_2) - N(t_1)$  tiene la misma distribución que  $N(t_2 + s) - N(t_1 + s)$ , para  $t_1 < t_2$  y  $s > 0$ , [17].

Un tipo de proceso de conteo muy importante es el proceso de Poisson, cuya definición se presenta a continuación.

**Definición 3.1.2.** *El proceso de conteo  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  se dice que es un **proceso de Poisson** con tasa  $\lambda$ ,  $\lambda > 0$ , si*

1.  $N(0) = 0$ .
2. *El proceso tiene incrementos estacionarios e independientes.*
3.  $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$ .
4.  $P(N(h) \geq 2) = o(h)$ .

El término  $o(h)$  expresa a una función con la propiedad de que converge a 0, más rápido que  $h$  cuando  $h \rightarrow 0$  [7], de forma más precisa, una función  $f$ , se dice de orden  $o(h)$ , si satisface lo siguiente,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0. \quad (3.1)$$

Esta propiedad es importante y se interpreta como la imposibilidad de la ocurrencia de más de un evento en intervalos muy pequeños de tiempo, es decir, que el proceso no admite explosiones.

De manera equivalente se define un proceso de Poisson con tasa de ocurrencia  $\lambda$ , como aquel que satisface que  $N(0) = 0$ , tiene incrementos independientes y  $N(t + s) - N(s) \sim Po(\lambda t)$ , para cualquier  $s \geq 0$ .

Una propiedad importante de los procesos de Poisson es la siguiente.

**Teorema 3.1.3.** *Dado un proceso de Poisson con tasa de ocurrencia  $\lambda$ , sean  $X_1, X_2, \dots$  v. a., tales que,  $X_i$  es el tiempo entre la  $i$ -ésima y la  $(i - 1)$ -ésima ocurrencia del evento, el conjunto  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  es llamado el conjunto de tiempos de interarribo, y son v. a. i. d. con distribución  $exp(\lambda)$ .*

**Demostración.** Ver en [17].

Una versión de este proceso se obtiene al no considerar dentro de la definición que el proceso tenga incrementos estacionarios, se obtiene así lo que se denomina Proceso de Poisson No Homogeneo (NHPP), el cual se define a continuación.

**Definición 3.1.4.** *El proceso de conteo  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  se dice no estacionario o **Proceso de Poisson no Homogéneo** (NHPP), con función de intensidad  $\lambda(t)$ , para  $t \geq 0$ , si*

1.  $N(0) = 0$ .
2. *El proceso tiene incrementos independientes.*
3.  $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$ .
4.  $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$ .

Tal como puede observarse la tasa de ocurrencia no es constante si no que es una función del tiempo  $\lambda(t)$ , la cual se asume positiva y continua por la derecha, sea  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$ , se puede ver que,

$$P(N(t+s) - N(t) = n) = \frac{(\Lambda(t+s) - \Lambda(t))^n}{n!} \exp(-(\Lambda(t+s) - \Lambda(t))).$$

Lo anterior significa que la variable aleatoria  $N(t+s) - N(t)$  tiene una distribución Poisson con media  $\Lambda(t+s) - \Lambda(t)$  [17], por lo que a diferencia del proceso de Poisson ordinario u homogéneo (HPP), los tiempos de interarribo no podrían ser v. a. i. d.

Un HPP puede convertirse en un NHPP a través por ejemplo de realizar un muestreo sobre los eventos ocurridos.

**Ejemplo 3.1.5.** *Sea  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  un HPP con tasa de ocurrencia  $\lambda$ , que representa el tiempo para la falla de un dispositivo eléctrico en una línea de producción, suponer que al tiempo  $t$  ocurre un evento, pero este se registra con probabilidad  $p(t)$ , se define a  $N_c(t)$  como el número de fallas registradas al tiempo  $t$ , el proceso contador  $\{N_c(t)\}_{t \geq 0}$  es un NHPP.*

## 3.2. Procesos de renovación

Para el caso de un HPP con tasa  $\lambda$ , se observó que sus tiempos de interarribo tienen una distribución exponencial con media  $1/\lambda$ , esto se interpreta como un reinicio en la distribución del tiempo para la ocurrencia de un nuevo evento a partir de la ocurrencia previa.

La definición de proceso contador no involucra de alguna forma la caracterización de tiempos de interarribo, sin embargo, es posible construir un proceso contador a partir de la definición de los tiempos de interarribo, lo que da lugar a una herramienta importante llamada procesos de renovación, los cuales, como su nombre lo indica,

surgen a partir de la idea de que tras la ocurrencia de un evento se renueva la distribución del tiempo para la siguiente observación.

**Definición 3.2.1.** Sea  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , una sucesión de v. a. i. d. no negativas con Fda  $F$ , tal que  $F(0) < 1$ , las cuales representan los tiempos de interarribo entre eventos, sea  $S_0 = 0$  y

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad (3.2)$$

para  $n \geq 1$ , se sigue que  $S_n$  es el tiempo para la  $n$ -ésima ocurrencia del evento de interés, se define

$$N(t) = \text{máx}\{n | S_n \leq t\}. \quad (3.3)$$

A  $N(t)$  se le llama un **Proceso de Renovación** o  $RP(F)$  [17].

Un NHPP surge al considerar la tasa de ocurrencia como una función  $\lambda(t)$ , en lugar de una tasa constante como el caso de un HPP, esto se puede interpretar como una transformación temporal al HPP, esta idea se ilustra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.2.2.** Sea  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  un NHPP con  $\lambda(t) = 2t$ , se tiene entonces que,

$$\Lambda(t) = \int_0^t 2s ds = t^2.$$

La función  $\Lambda(\cdot)$  es continua y monótona, a partir de ella se realiza un cambio de variable, sea  $\tau = t^2$ , con  $t(\tau)$  que indica el  $t$  que satisface que  $\Lambda^{-1}(\tau) = t$  o bien  $t = \sqrt{\tau}$ , se define  $M(\tau) = N(t(\tau))$ , luego, para cualesquiera  $\tau_2 > \tau_1 \geq 0$ ,

$$P(M(\tau_2) - M(\tau_1) = n) = P(N(t(\tau_2)) - N(t(\tau_1)) = n).$$

Dado que  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  es un NHPP, se tiene que,

$$N(t(\tau_2)) - N(t(\tau_1)) \sim Po(\Lambda(t(\tau_2)) - \Lambda(t(\tau_1))).$$

Por otro lado,  $\Lambda(t(\tau)) = (t(\tau))^2 = (\sqrt{\tau})^2 = \tau$ , por lo que,

$$M(\tau_2) - M(\tau_1) \sim Po(\tau_2 - \tau_1). \quad (3.4)$$

Se tiene además que  $M(0) = N(t(0)) = N(0) = 0$ .

Sean  $(\tau_1, \tau_2)$  y  $(\tau_3, \tau_4)$  dos intervalos de tiempo disjuntos, se sigue que

$$M(\tau_2) - M(\tau_1) = N(t(\tau_2)) - N(t(\tau_1)),$$

y

$$M(\tau_4) - M(\tau_3) = N(t(\tau_4)) - N(t(\tau_3)),$$

Los intervalos  $(t(\tau_1), t(\tau_2))$  y  $(t(\tau_3), t(\tau_4))$ , o de forma equivalente para este ejemplo  $(\sqrt{\tau_1}, \sqrt{\tau_2})$  y  $(\sqrt{\tau_3}, \sqrt{\tau_4})$  son disjuntos, por lo que las variables aleatorias  $N(t(\tau_2)) - N(t(\tau_1))$  y  $N(t(\tau_4)) - N(t(\tau_3))$  son independientes y en consecuencia también  $M(\tau_2) - M(\tau_1)$  y  $M(\tau_4) - M(\tau_3)$ , de donde se concluye que el proceso contador  $\{M(\tau)\}_{\tau \geq 0}$  es de incrementos independientes.

Con el resultado de (3.4) se concluye que  $\{M(\tau)\}_{\tau \geq 0}$  es un HPP con tasa  $\lambda = 1$ . Con este ejemplo se presenta la interpretación de que un NHPP se puede ver como un HPP de tasa 1, si el tiempo se considera en el dominio  $\tau = \Lambda(t)$ .

La idea de transformación temporal también se aplica en los RP, dando lugar a un tipo de proceso denominado, Proceso de Renovación con Tendencia o TRP [5], el cual se define a continuación.

**Definición 3.2.3.** Sea  $\lambda(t)$  una función no negativa definida para  $t \geq 0$ , que satisface que  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du < \infty$  para cada  $t \geq 0$  y  $\Lambda(\infty) = \infty$ .

Además, sea  $F$  la Fda de una v. a. positiva con valor esperado 1. El proceso  $T_1, T_2, \dots$  es llamado un **Proceso de Renovación con Tendencia**, denotado como  $TRP(F, \lambda(\cdot))$ , si el proceso con tiempos transformados  $\Lambda(T_1), \Lambda(T_2), \dots$  es un Proceso de Renovación  $RP(F)$ , esto es, si  $\Lambda(T_i) - \Lambda(T_{i-1})$  para  $i = 1, 2, \dots$  son v.a.i.i.d. con función de distribución  $F$ , donde  $T_0 = 0$ .

**Observación.** Los TRP, contienen como casos particulares a los RP cuando  $\Lambda(\cdot)$  es la función identidad y a los NHPP, cuando la función  $\Lambda(\cdot)$  convierte a la sucesión de tiempos en un HPP, que es un caso particular de los RP cuando los tiempos de inter-arribo se distribuyen de forma exponencial.

El tipo de proceso utilizado para estudiar un sistema reparable depende del nivel de reparación que se considere, tal como se muestra en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1: Niveles de reparación

Nivel de reparación	Descripción	Modelo	Ejemplo
Mínima	El sistema queda tan mal como antes de fallar.	Proceso de Poisson No Homogéneo	Cambiar un foco en un sistema de alumbrado público.
Perfecta	El sistema queda tan bueno como nuevo.	Proceso de Renovación.	Reemplazar el motor en una bomba de agua.
General	Ni tan malo como antes de fallar ni tan bueno como nuevo.	Proceso de renovación con tendencia.	Reacondicionamiento de maquinaria textil.

### 3.3. Análisis de Confiabilidad

En lo que sigue se presentan los elementos para llevar a cabo un análisis de confiabilidad en sistemas reparables considerando una reparación de nivel general, y la posibilidad de que los datos de tiempos de falla no se observen en su totalidad, por lo que se estudia el sistema a través de un TRP, el cual se determina por medio de parámetros propios de la ley de transformación temporal y de la distribución de renovación.

#### 3.3.1. Supuestos del modelo

Para llevar a cabo este análisis se consideran los siguientes supuestos.

1. Cuando una falla ocurre, se lleva a cabo un proceso de reparación general para restaurar el sistema a su estado operacional.
2. El tiempo de reparación es despreciable.
3. La distribución de renovación para modelar el tiempo de vida del sistema en el dominio de tiempo transformado es Gamma.
4. El número total de fallas en un periodo determinado es conocido, aunque es posible que no todos los tiempos de falla hayan sido observados.

El tercer punto en la lista se refiere a que la distribución de renovación del RP obtenido después de una transformación temporal en un TRP, sea Gamma, esta suposición es adecuada al considerar la propiedad que tiene dicha distribución de modelar tasas de falla de tipo creciente, decreciente o constante, la distribución Weibull también tiene dicha propiedad, sin embargo, se considera a la distribución Gamma debido a otras características adicionales como la propiedad reproductiva.

El cuarto punto se puede presentar en diferentes situaciones prácticas, ya que es posible que las empresas omitan la observación de los tiempos de falla de forma completa (debido a ciertos factores humanos o de medición), sin embargo, en la mayoría de casos sí realizan un registro del número de fallas y sus respectivas reparaciones, ya que implican un gasto de mantenimiento o interrupciones de las líneas de producción.

#### 3.3.2. Datos

La información de los tiempos de falla y del tiempo de censura del periodo de observación, es importante para realizar el análisis, en lo que sigue se describe la notación empleada.

Se denota con  $T_0$  al tiempo de inicio de observación, y a  $T_c = \tau$ , al tiempo de censura. La sucesión completa de tiempos de falla del sistema se expresa como  $T_1^*, T_2^*, \dots, T_l^*$  donde  $l$  es el número total de fallas.

Cuando los tiempos de falla se observan de forma incompleta, los tiempos que sí han sido observados se denotan como  $T = \{(T_i, k_i) | i = 1, \dots, n\}$ , cada pareja  $(T_i, k_i)$ , corresponde al  $i$ -ésimo tiempo de falla observado donde  $k_i$  indica el lugar de dicha observación en la sucesión de fallas del sistema, y  $n$  es el número total de tiempos de falla observados, con  $n \leq l$ .

Es decir que,  $T$  es un subconjunto de  $T^* = \{T_1^*, T_2^*, \dots, T_l^*\}$ , es decir,  $T \subseteq T^*$  y solo cuando todos los tiempos de falla son observados  $T = T^*$ . A partir de estos conjuntos se definen los procesos de conteo de fallas completos e incompletos.

**Definición 3.3.1.** *Un **Proceso de Conteo de Fallas Incompleto** IFCP es aquel en el que se contabiliza el número de fallas ocurridas en un sistema reparable hasta un tiempo de censura  $\tau$ , así como los tiempos de falla, pero estos se observan de forma incompleta, la información de este proceso se reúne en el conjunto  $Data = \{(T_i, k_i), (\tau, k_\tau); i = 0, \dots, n\}$  donde  $k_\tau$  es el número total de fallas ocurridas y  $k_n$  es el índice del último tiempo de falla observado.*

*Un **Proceso de Conteo de Fallas Completo** CFCP es aquel en el que se observan todos los tiempos de falla en el periodo con tiempo de censura  $\tau$ .*

A continuación se presenta un ejemplo de un IFCP.

**Ejemplo 3.3.2.** *Suponga que un motor de tractor falló 5 veces dentro del periodo de observación y que se registraron los tiempos de falla en horas de la primera, tercera y quinta falla, sus tiempos fueron  $T_1 = 5161$ ,  $T_2 = 11288$  y  $T_3 = 18780$ , por lo que la información se registra como  $\{(5161, 1), (11288, 3), (18780, 5)\}$ , el tiempo de censura  $\tau = 20000$  y el número de fallas acumuladas hasta el tiempo de censura  $k_\tau$  también se registran, por lo que la información recolectada se agrupa como  $Data = \{(T_i, k_i), (20000, 5); i = 0, 1, 2, 3\}$  con  $T_0 = 0$  y  $k_0 = 0$ .*

### 3.3.3. Modelar TRP

De acuerdo con [21], modelar un IFCP presenta desafíos, como el hecho de que los tiempos de falla observados y no observados son estadísticamente dependientes o bien s-dependientes, otra posible situación es que los tiempos no observados previos al tiempo de censura podrían ser consecutivos y s-dependientes, en consecuencia se considera complicado modelar directamente el IFCP.

Como alternativa se propone modelar primero el CFCP subyacente usando un TRP, con lo cual, la sucesión de tiempos de falla después de una transformación del

dominio de tiempo sigue un RP.

De acuerdo con la Definición 3.2.3., el TRP se denota como  $TRP(F, \lambda(\cdot))$ , con  $F$  la distribución de los tiempos de interarribo entre eventos, sujetos a una transformación definida a partir de  $\lambda$ , la función de tendencia.

Con base en el modelo de CFCP subyacente, un punto  $(T_i, k_i)$  del IFCP en el dominio de tiempo original, es transformado a un punto  $(\Lambda(T_i), k_i)$  en el dominio de tiempo transformado, observar Figura 3.1.

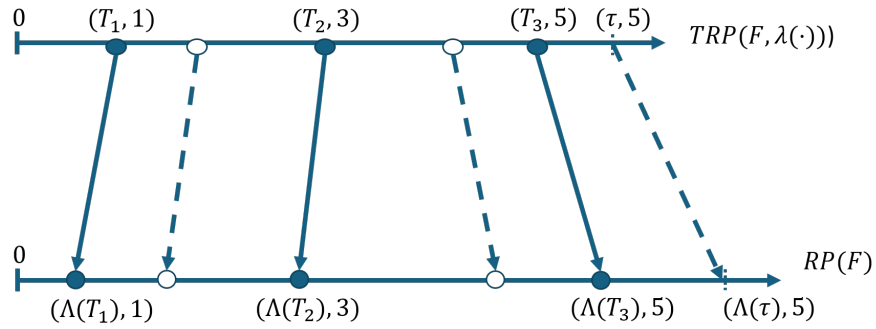


Figura 3.1: Esquema de la transformación del dominio de tiempo por medio de la función  $\Lambda(\cdot)$ , los círculos vacíos representan tiempos de falla perdidos o no observados, los círculos con relleno son aquellos tiempos de falla que sí fueron observados.

En la Figura 3.1 se observa que los tiempos de falla perdidos en el dominio original, también lo son en el dominio de tiempo transformado, en consecuencia, los tiempos de falla transformados e incompletos  $\Lambda(T_1), \Lambda(T_2), \dots, \Lambda(T_n)$  no siguen un RP. Sin embargo, los tiempos de interarribo  $\Delta T_i = \Lambda(T_i) - \Lambda(T_{i-1})$  para  $i = 1, \dots, n$  son estadísticamente independientes (s-independientes) en el dominio de tiempo transformado, esto facilita el estudio de la confiabilidad del sistema.

De manera específica,  $\Delta T_i$  es una suma de v. a. i. i. d. con distribución  $F$ , la cantidad de sumandos se determina por  $\Delta k_i$  con  $\Delta k_i = k_i - k_{i-1}$ .

En este análisis la distribución de renovación  $F$  corresponde a la de una v. a. Gamma, en un TRP, de acuerdo con la Definición 3.2.3, es necesario que la distribución de renovación tenga un valor esperado igual a 1, esto implica una restricción o condición sobre la función de densidad.

Sea  $T \sim Gamma(\alpha, \beta)$ , con fdp como en (3.5), entonces,  $E[T] = \alpha\beta$ , de acuerdo con la restricción, se debe cumplir que,  $\alpha\beta = 1$ , por lo tanto,

$$\alpha = \frac{1}{\beta}. \quad (3.5)$$

Se sustituye (3.6) en (3.5) y se obtiene así la expresión para la fdp en  $t$ , con un

único parámetro  $\beta$ .

$$f(t; \beta) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \beta^\beta t^{\beta-1} e^{-\beta t}, \quad (3.6)$$

para  $t > 0$ .

Esta restricción es importante para la identificación del modelo, ya que permite determinar de forma única a los parámetros de la distribución de renovación y de la función de tendencia [21].

Con base en (3.7) se deriva la distribución del tiempo transcurrido entre dos fallas observadas, denotado por  $\Delta T_i = \Lambda(T_i) - \Lambda(T_{i-1})$ . Se puede ver que  $\Delta T_i$  es la suma de  $\Delta k_i = k_i - k_{i-1}$  v. a. i. d.  $\text{Gamma}(1/\beta, \beta)$ .

Por la propiedad reproductiva de la distribución de renovación dentro de los supuestos del modelo,  $\Delta T_i$  es una v. a. con distribución Gamma con parámetro de escala igual a  $1/\beta$  y parámetro de forma  $\beta \Delta k_i$  o bien,  $\Delta T_i \sim \text{Gamma}(1/\beta, \beta \Delta k_i)$ .

Debido a que,  $\Delta T_i = \Lambda(T_i) - \Lambda(T_{i-1})$ , se requiere especificar a la función de transformación del tiempo  $\Lambda(\cdot)$ , la cual a su vez, depende de la función de tendencia  $\lambda(\cdot)$ .

La función de tendencia incorpora el efecto de deterioro del sistema a través del tiempo así como los efectos de las reparaciones. Para este modelo, la función de tendencia  $\lambda(\cdot)$ , es del tipo ley potencia, como en sigue,

$$\lambda(t) = abt^{b-1}, \quad (3.7)$$

dicho modelo de función es frecuentemente utilizada en la teoría de TRP.

Con base en la función de tendencia, la transformación del tiempo o temporal expresada por  $\Lambda(\cdot)$ , es como sigue,

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &= \int_0^t \lambda(u) du \\ &= \int_0^t abu^{b-1} du \\ &= at^b, \end{aligned} \quad (3.8)$$

con  $a$  y  $b$ , dos parámetros constantes positivos.

### 3.3.4. Estimación de los parámetros

Los parámetros del modelo son  $\theta = (a, b, \beta)$ , estos se pueden estimar por medio del Método de Máxima Verosimilitud, o MLE, dicho método requiere de la función de verosimilitud,  $L(\theta|Data)$ , donde  $Data = \{(T_i, k_i), (\tau, k_\tau), i = 1 \dots, n\}$ , la información de tiempos de falla observados, tiempo de censura y número de fallas antes del tiempo de censura.

Dado que los tiempos de interarribo  $\Delta T_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ , son  $s$ -independientes, la función  $L(\theta|Data)$ , se define como,

$$L(\theta|Data) = \prod_{i=1}^n \{f_{\Delta}(\Delta T_i; \beta) \lambda(T_i)\} \times R(\tau; T_n, k_\tau, k_n). \quad (3.9)$$

En la ecuación (3.11) se incorpora a la función de confiabilidad,  $R(\tau; T_n, k_\tau, k_n)$ , que se evalúa en el tiempo de censura  $\tau$  y depende del último tiempo de falla registrado  $T_n$ , el número total de fallas observadas hasta el tiempo de censura, denotado por  $k_\tau$ , y el índice de la última falla observada,  $k_n$ .

La función de confiabilidad explica el efecto de censura, la cual no es convencional ya que es posible que  $k_\tau - k_n$  fallas ocurran desde el último tiempo de falla observado hasta el tiempo de censura.

El primer tiempo de falla no observado después del tiempo de censura  $\tau$  corresponde a la  $r$ -ésima falla ocurrida después de la última falla observada, con  $r = k_\tau - k_n + 1$ .

Los tiempos de falla no observados desde el tiempo  $T_n$ , hasta el tiempo de la  $r$ -ésima falla, se denotan con  $X_1, X_2, \dots, X_r$ , se desarrolla así la función de confiabilidad de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} R(\tau; T_n, k_\tau, k_n) &= P(X_{r-1} \leq \tau, X_r > \tau) \\ &= P(\Lambda(X_{r-1}) \leq \Lambda(\tau), \Lambda(X_r) > \Lambda(\tau)) \\ &= P(\Lambda(X_{r-1}) - \Lambda(T_n) \leq \Lambda(\tau) - \Lambda(T_n) \\ &\quad, \Lambda(X_r) - \Lambda(T_n) > \Lambda(\tau) - \Lambda(T_n)). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Se define a  $U = \Lambda(X_{r-1}) - \Lambda(T_n)$  y a  $V = \Lambda(X_r) - \Lambda(T_n)$ , se sigue así que,

$$\begin{aligned} R(\tau; T_n, k_\tau, k_n) &= P(U \leq \Lambda(\tau) - \Lambda(T_n), V > \Lambda(\tau) - \Lambda(T_n)) \\ &= F_U(\Lambda(\tau) - \Lambda(T_n)) - F_{U,V}(\Lambda(\tau) - \Lambda(T_n), \Lambda(\tau) - \Lambda(T_n)). \end{aligned} \quad (3.11)$$

En la Figura 3.2 se muestra una representación gráfica de la región de interés para calcular la función de confiabilidad dada en (3.13).

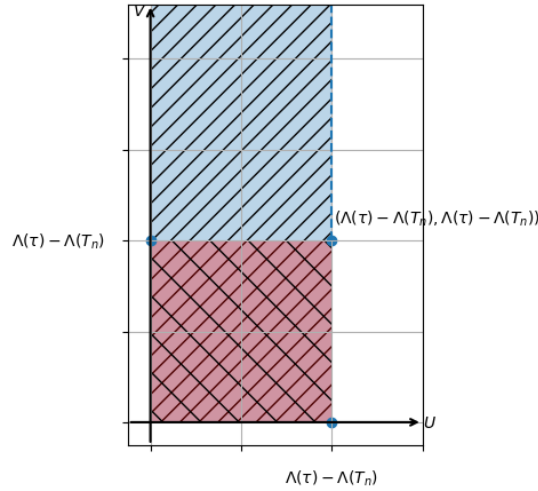


Figura 3.2: Interpretación gráfica de la región correspondiente a la función de confiabilidad.

En (3.13),  $F_{U,V}(u, v)$  es la función de distribución acumulada conjunta de  $(U, V)$ , la distribución de  $U$  y  $V$  se pueden obtener directamente de la suposición de que los tiempos de renovación se distribuyen como una Gamma.

Se observa que  $V = U + \Lambda(X_r) - \Lambda(X_{r-1})$ , por lo tanto,  $U$  y  $V$  son  $s$ -dependientes.

Se aborda el cálculo de  $R(\tau; T_n, k_\tau, k_n)$ , considerando dos casos, cuando hay o no tiempos de falla perdidos en el intervalo  $(T_n, \tau]$ , es decir, de si  $k_\tau - k_n = 0$  o  $k_\tau - k_n > 0$ , como se observa en la Figura 3.3, se tiene así el siguiente resultado.

**Teorema 3.3.3.** *La función de confiabilidad  $R(\tau : T_n, k_\tau, k_n)$ , se deduce para dos posibles casos:*

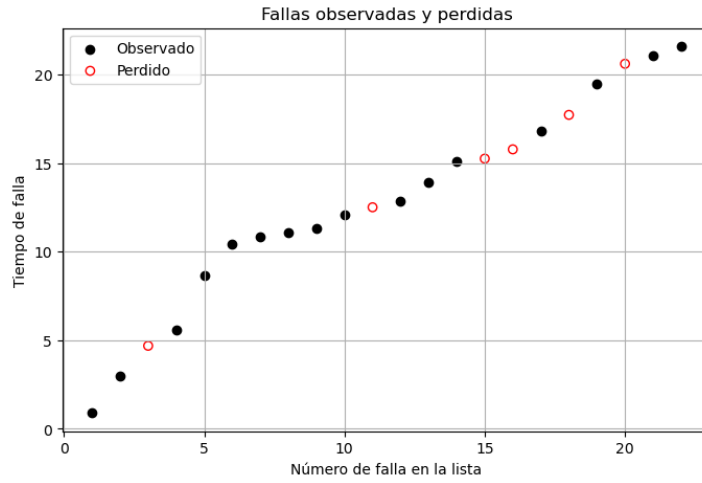
- Si  $k_\tau = k_n$ , entonces

$$R(\tau; T_n, k_\tau, k_n) = 1 - F(\Lambda(\tau) - \Lambda(T_n); 1/\beta, \beta) \quad (3.12)$$

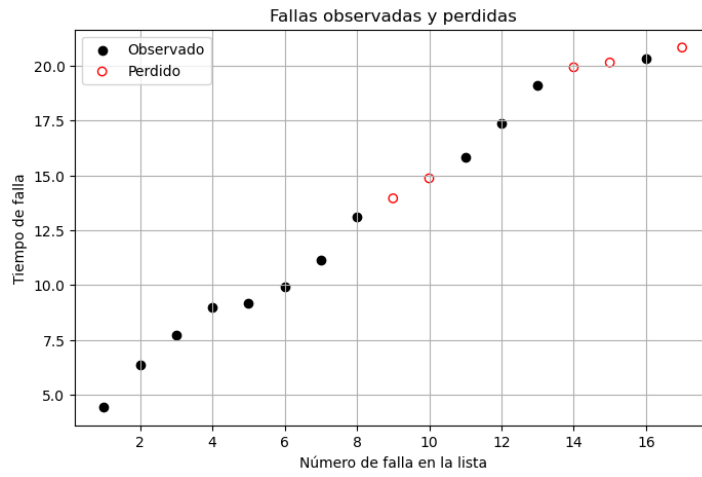
- Si  $k_\tau > k_n$ , entonces

$$\begin{aligned} R(\tau; T_n, k_\tau, k_n) &= F_U(\Lambda(\tau) - \Lambda(T_n)) \\ &\quad - \int_0^{\Lambda(\tau) - \Lambda(T_n)} \{f(x; 1/\beta, (k_\tau - k_n)\beta) \\ &\quad \times F(\Lambda(\tau) - \Lambda(T_n) - x; 1/\beta, \beta)\} dx. \end{aligned} \quad (3.13)$$

**Demostración.** La prueba se divide en dos casos.



(a)  $k_\tau - k_n = 0$



(b)  $k_\tau - k_n > 0$

Figura 3.3: Para calcular la función de confiabilidad es necesario identificar si hay o no tiempos de falla perdidos entre la última observación y el tiempo de censura.

Si  $k_\tau = k_n$ , no hay tiempos de falla perdidos entre la última observación y el tiempo de censura, por lo que solo existe  $X_1$ , esto implica que solo se realizan los cálculos con  $V$ , luego

$$R(\tau; T_n, k_\tau, k_n) = P(V > \Lambda(\tau) - \Lambda(T_n)), \quad (3.14)$$

en este caso  $V \sim \text{Gamma}(1/\beta, \beta)$ , por lo tanto,

$$R(\tau; T_n, k_\tau, k_n) = 1 - F(\Lambda(\tau) - \Lambda(T_n); 1/\beta, \beta). \quad (3.15)$$

Si  $k_\tau > k_n$ , es necesario obtener la Fda conjunta  $F_{U,V}(u, v)$ , para ello se define a  $W = \Lambda(X_r) - \Lambda(X_{r-1})$ , por lo que  $V = U + W$ , de acuerdo a su definición, se sigue así que,

$$\begin{aligned}
 F_{U,V}(u, v) &= P(U \leq u, V \leq v) \\
 &= P(U \leq u, U + W \leq v) \\
 &= P(U \leq u, W \leq v - U) \\
 &= \int_0^u \int_0^{v-x} f_{U,W}(x, y) dy dx.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

A diferencia de  $U$  y  $V$ , las variables  $U$  y  $W$  son independientes, por lo que,  $f_{U,W}(u, w) = f_U(u)f_W(w)$ , luego,

$$f_{U,W}(u, w) = f(u; 1/\beta, \beta(k_\tau - k_n)) \times f(w; 1/\beta, \beta). \tag{3.17}$$

Es decir,  $U \sim \text{Gamma}(1/\beta, \beta(k_\tau - k_n))$  y  $W \sim \text{Gamma}(1/\beta, \beta)$ , de esa forma (3.18) es como sigue,

$$\begin{aligned}
 F_{U,V}(u, v) &= \int_0^u \int_0^{v-x} f_U(x) \times f_W(y) dy dx \\
 &= \int_0^u f_U(x) \int_0^{v-x} f_W(y) dy dx \\
 &= \int_0^u f_U(x) F_W(v - x) dx \\
 &= \int_0^u f(u; 1/\beta, \beta(k_\tau - k_n)) \times F(w; 1/\beta, \beta) dx.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Al sustituir la Fda conjunta en (3.13) se concluye la prueba del resultado  $\square$ .

Se calcula ahora la función de logverosimilitud, denotada como  $l(\theta|Data)$ , cuya expresión es como sigue,

$$\begin{aligned}
 l(\theta|Data) &= \sum_{i=1}^n \{ \log f_\Delta(\Delta t_i = \Lambda(T_i) - \Lambda(T_{i-1}); \beta) + \log \lambda(T_i) \} \\
 &\quad + \log R(\tau; T_n, k_\tau, k_n),
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

la notación  $f_\Delta(\Delta t_i; \beta)$  corresponde a su respectiva  $f dp$ , por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 l(\theta|Data) &= \sum_{i=1}^n \{ -\log \Gamma(\beta \Delta k_i) + \beta \Delta k_i \log \beta + (\beta \Delta k_i - 1) \log [\Lambda(T_i) - \Lambda(T_{i-1})] \\
 &\quad - \beta [\Lambda(T_i) - \Lambda(T_{i-1})] + \log \lambda(T_i) \} + \log R(\tau; T_n, k_\tau, k_n).
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Al evaluar en la función de tendencia  $\lambda(t) = abt^{t-1}$  y la función de transformación temporal  $\Lambda(t) = at^b$ , se obtiene,

$$\begin{aligned}
 l(\theta|Data) = & \sum_{i=1}^n \{-\log \Gamma(\beta \Delta k_i) + \beta \Delta k_i (\log a + \log \beta) + \\
 & (\beta \Delta k_i - 1) [\log(T_i^b - T_{i-1}^b)] - \beta a (T_i^b - T_{i-1}^b) + (b - 1) \log T_i\} \\
 & + n \log b + \log R(\tau; T_n, k_\tau, k_n).
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

El último sumando depende de qué caso se tenga para la función de confiabilidad, si  $k_\tau = k_n$ ,

$$R(\tau; T_n) = 1 - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\beta(a\tau^b - aT_n^b)} u^{\beta-1} e^{-u} du. \tag{3.22}$$

Por otro lado, si  $k_\tau > k_n$ , se toma  $\Delta k = k_\tau - k_n$ , se tiene entonces que,

$$\begin{aligned}
 R(\tau; T_n, k_\tau, k_n) = & \frac{1}{\Gamma(\beta(\Delta k))} \int_0^{\beta(a\tau^b - aT_n^b)} u^{\beta(\Delta k)-1} e^{-u} du \\
 & - \int_0^{a\tau^b - aT_n^b} \left[ \frac{\beta^{\beta(\Delta k)}}{\Gamma(\beta(\Delta k))} x^{\beta(\Delta k)-1} e^{-\beta x} \right. \\
 & \left. \times \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\beta(a\tau^b - aT_n^b - x)} u^{\beta-1} e^{-u} du \right] dx.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Después de identificar el caso correspondiente se debe aplicar el logaritmo a la función  $R(\tau; T_n, k_\tau, k_n)$ , y de esa forma se completa la expresión de la función de logverosimilitud.

Los estimadores de los parámetros del modelo  $\hat{\theta} = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{\beta})$ , se obtienen como,

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \mathbb{R}^3} \{l(\theta|Data)\}. \tag{3.24}$$

En este caso maximizar la función de logverosimilitud de forma clásica por medio de la derivación es una tarea compleja, ya que se encuentra la función Gamma y cuando  $k_\tau > k_n$  la función de confiabilidad es aún más complicada.

### 3.3.5. Simulación

En este trabajo se desarrolló el proceso de estimación empleando herramientas de optimización en el lenguaje de programación Python, sobre un conjunto de datos simulados.

De manera general, la simulación de este modelo considera los siguientes pasos:

1. Simular un CFCP, a partir de valores  $a, b$  y  $\beta$  conocidos.
2. Definir un porcentaje  $p$  de pérdida, y eliminar de forma aleatoria la proporción de datos correspondiente a dicho porcentaje.
3. Guardar la información del IFCP.
4. Definir la función de logverosimilitud para los dos posibles casos de la función de confiabilidad.
5. Mandar a llamar a la función de logverosimilitud con el IFCP obtenido y aplicar un método de optimización en Python.
6. Comparar las estimaciones obtenidas con los valores reales de  $a, b$  y  $\beta$ .

En lo que sigue se describen los pasos realizados y se presentan los resultados obtenidos.

Primero se generan el CFCP y el tiempo de censura en el dominio de tiempo transformado y posteriormente se transforman al dominio original de tiempo.

El tiempo de censura  $\tau_{trans}$  se obtiene de una distribución uniforme,  $U(15, 20)$ , se sabe que los tiempos de falla en el dominio de tiempo transformado siguen un RP con función de distribución  $Gamma(1/\beta, \beta)$ , por lo que se obtienen estos datos para  $\beta = 2$  de una función generadora de números pseudoaleatorios.

Conforme son generados se conservan en una lista *Tiempos\_trans* hasta que se rebasa el tiempo de censura  $\tau_{trans}$ , y se conservan todos los tiempos de falla menores con lo que se tiene un CFCP en el dominio de tiempo transformado.

La función de transformación temporal es  $\Lambda(t) = at^b$ , por lo que los datos generados son tiempos  $\{\Lambda(t_1), \Lambda(t_2), \dots, \Lambda(t_n)\}$ , para regresar al dominio de tiempo original, es necesario aplicar la inversa de la función de transformación temporal, es decir,

$$\Lambda^{-1}(t) = \sqrt[b]{t/a}. \quad (3.25)$$

En la Figura 3.4, se representa cómo se llevan los tiempos de falla al dominio original por medio de la transformación inversa.

En Alg. 1, se presenta un esquema de la estructura para elaborar un CFCP en el dominio de tiempo transformado, después de este paso se obtienen el tiempo de censura y el CFCP en el dominio original de tiempo, tal como se muestra en Alg. 2.

A partir del CFCP y del tiempo de censura en el dominio de tiempo original, sigue simular el IFCP, para ello se requiere determinar un porcentaje de pérdida, y con

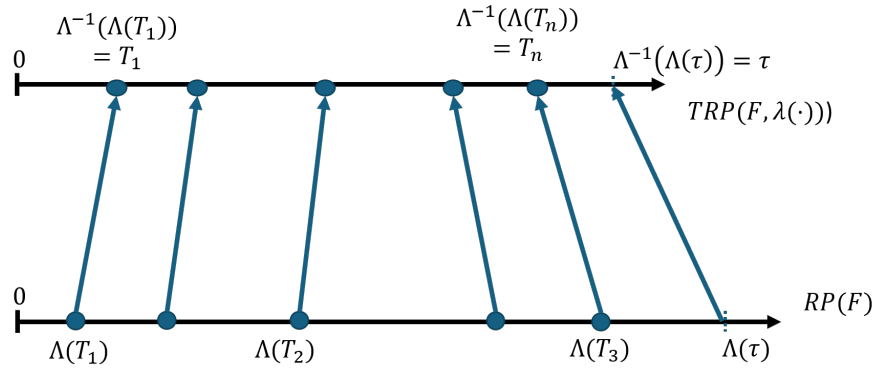


Figura 3.4: Para llevar los tiempos de falla  $\Lambda(t)$  al dominio original es necesario aplicar  $\Lambda^{-1}(t)$ , a los tiempos de falla y al tiempo de censura.

---

**Algoritmo 1** CFCP y tiempo de censura en el dominio de tiempo transformado.

---

```

function CFCP_TRANS( $\beta$ )
     $\tau_{trans} \leftarrow U(a, b)$     ▷ Asigna un num. pseudoaleatorio de una dist. uniforme
     $Tiempos\_trans \leftarrow [0]$     ▷ Se inicializa una lista
     $t \leftarrow 0$ 
    while  $t \leq \tau_{trans}$  do
         $t \leftarrow Gamma(1/\beta, \beta) + t$     ▷ Asigna un num. pseudoaleatorio de una dist.
        gamma
         $Tiempos\_trans \leftarrow t$     ▷ Agrega nuevos tiempos de falla a la lista
    end while
    return  $Tiempos\_trans, \tau_{trans}$ 
end function

```

---

base en él, seleccionar de forma aleatoria la proporción correspondiente de datos de tiempo de falla que se considerarán perdidos, en Alg. 3, se muestra el pseudocódigo correspondiente.

Es importante verificar que la información fue correctamente simulada y guardada en las variables correspondientes, para ello se puede imprimir el arreglo de tamaño  $2 \times n$  que contiene los tiempos de falla observados y sus respectivos índices, así como el tiempo de censura.

Para llevar a cabo la estimación se desarrolló el código para dos funciones, “Logverosimilitud-1” y “Logverosimilitud-2”, para el caso en el que  $k_\tau = k_n$  y  $k_\tau > k_n$ , respectivamente. Debido a que las funciones involucran el uso de la función gamma, la función gamma incompleta y en algunos casos se requiere el cálculo de integrales, es importante contar con funciones dentro del lenguaje de programación que faciliten la parte operativa, como las que se encuentran en scipy en Python.

En Alg. 4 y Alg. 5 se muestra el pseudocódigo correspondiente a dichas funciones, donde puede observarse que los únicos parámetros son  $a, b$  y  $\beta$ , esto es posible al

---

**Algoritmo 2** CFCP y tiempo de censura en el dominio original de tiempo.

---

```

function CFCP( $a, b, \tau\_trans, Tiempos\_trans$ )
Ensure:  $a, b > 0$ 
 $\tau \leftarrow \sqrt[b]{\tau\_trans/a}$ 
 $N \leftarrow$  Longitud de  $Tiempos\_trans$ 
for  $i = 1, \dots, N$  do
 $Tiempos[i] \leftarrow \sqrt[b]{Tiempos\_trans[i]/a}$ 
end for
return  $Tiempos, \tau$ 
end function

```

---



---

**Algoritmo 3** IFCP a partir del porcentaje de pérdida  $p$ .

---

```

function IFCP( $Tiempos, p$ )
 $k_\tau \leftarrow$  Longitud de  $Tiempos$   $\triangleright$  En esta variable se guarda el número total de
fallas registradas hasta el tiempo de censura  $\tau$ 
 $n \leftarrow \lfloor p * N/100 \rfloor$ 
 $\{k_1, \dots, k_n\} \leftarrow random\{1, \dots, N\}$   $\triangleright$  Se extraen de forma aleatoria  $n$ 
elementos en una lista ordenada
 $T \leftarrow [0][0] * n$   $\triangleright$  Se inicializa una lista de tuplas
for  $i = 1, \dots, N$  do
 $T[i][0] \leftarrow Tiempos[k_i]$ 
 $T[i][1] \leftarrow k_i$ 
end for
return  $T$   $\triangleright$  Este arreglo contiene  $\{(T_i, k_i), i = 1, \dots, n\}$ 
end function

```

---

definir al arreglo  $T$ , al tiempo de censura  $\tau$  y al número total de fallas, como variables globales.

A partir de los valores de  $Data = \{(T_i, k_i), \tau, k_\tau, i = 1, \dots, n\}$ , guardados en las variables  $T$ ,  $\tau$  y  $k_\tau$  y con base en el caso que se identifique para la función de confiabilidad, se realiza una maximización de las funciones de logverosimilitud, para lo cual se requiere ocupar funciones dentro de las librerías del lenguaje utilizado.

En Python existe una función dentro de la librería *scipy.optimize*, llamada, *minimize*, la cual permite identificar los argumentos que minimizan una función, en nuestro caso deseamos maximizar la función de logverosimilitud, por lo que se define la versión negativa de *Logverosimilitud\_1* y *Logverosimilitud\_2*, de esa forma minimizar su forma negativa es equivalente a identificar los valores que maximizan la versión original.

La sintaxis de la función *minimize*, es la siguiente,

---

**Algoritmo 4** Función de Logverosimilitud para el caso  $k_\tau = k_n$ .

---

```

function LOGVEROSIMILITUD_1( $a, b, \beta$ )
Ensure:  $a, b, \beta > 0$ 
     $n \leftarrow$  longitud  $T$ 
     $suma \leftarrow 0$ 
    for  $i = 1, \dots, n$  do
        if  $i = 1$  then
             $suma \leftarrow -\log \Gamma(\beta T[i][1]) + \beta * T[i][1] * (\log a + \log \beta) + (\beta * T[i][1] - 1) * \log(T[i][0]^b) - \beta * a * (T[i][0]^b) + (b - 1) * \log T[i][0] + suma$ 
        else
             $\Delta k_i \leftarrow T[i][1] - T[i - 1][1]$ 
             $suma \leftarrow -\log \Gamma(\beta * \Delta k_i) + \beta * \Delta k_i * (\log a + \log \beta) + (\beta * \Delta k_i - 1) [\log(T[1][0]^b - T[i - 1][0]^b)] - \beta * a * (T[i][0]^b - T[i - 1][0]^b) + (b - 1) * \log T[i][0] + suma$ 
        end if
    end for
     $integral \leftarrow \text{gammainc}(\beta, \beta * a * (\tau^b - (T[n][0])^b))$   $\triangleright$  Se emplea la función gamma incompleta definida en (2.30)
     $last\_term \leftarrow n * \log(b) + \log(1 - integral) + suma$ 
    return  $last\_term$ 
end function

```

---

```

minimize(fun, x0, args=(), method=None, jac=None, hess=None,
hessp=None, bounds=None, constraints=(), tol=None, callback=None,
options=None).

```

Para los valores iniciales, se consideró un vector  $x_0 = (a_0, b_0, \beta_0)$  donde cada valor se obtiene de forma aleatoria de una distribución uniforme con parámetros (1,2) para  $a_0$  y  $b_0$ , y con parámetros (0.5, 6), para  $\beta_0$ .

Determinar el método (dentro de la documentación de la función *minimize* corresponde al parámetro *Method*) a utilizar, requirió revisar y comparar el desempeño de distintas opciones. La función *minimize*, cuenta con los siguientes métodos: Nelder-Mead, Powell, CG, BFGS, Newton-CG, L-BFGS-B, TNC, COBYLA, COBYQA, SLSQP, trust-constr, dogleg, trust-ncg, trust-exact, trust-krylov y custom [20].

Algunos de los métodos mencionados anteriormente requieren de una estimación de gradientes o de la matriz hessiana y debido a la complejidad que presenta la función de logverosimilitud para ser derivada, se opta por aquellos que no requieran de estos elementos, los llamados métodos sin gradiente: Nelder-Mead, Powell, L-BFGS-B.

En la Tabla 3.2 se muestran el porcentaje de éxito de estimación en 100 simulaciones (ya que en algunas ejecuciones no es posible obtener un resultado numérico),

**Algoritmo 5** Función de Logverosimilitud para el caso  $k_\tau > k_n$ .

---

```

function LOGVEROSIMILITUD_2( $a, b, \beta$ )
Ensure:  $a, b, \beta > 0$ 
     $n \leftarrow$  longitud  $T$ 
     $suma \leftarrow 0$ 
    for  $i = 1, \dots, n$  do
        if  $i = 1$  then
             $suma \leftarrow -\log \Gamma(\beta * T[i][1]) + \beta * T[i][1] * (\log a + \log \beta) + (\beta * T[i][1] -$ 
             $1) * \log(T[i][0]^b) - \beta * a * (T[i][0]^b) + (b - 1) * \log T[i][0] + suma$ 
        else
             $\Delta k_i \leftarrow T[i][1] - T[i - 1][1]$ 
             $suma \leftarrow -\log \Gamma(\beta \Delta k_i) + \beta * \Delta k_i * (\log a + \log \beta) + (\beta * \Delta k_i - 1) *$ 
             $[\log(T[1][0]^b - T[i - 1][0]^b)] - \beta * a * (T[i][0]^b - T[i - 1][0]^b) + (b - 1) * \log T[i][0] + suma$ 
        end if
    end for
     $Delta \leftarrow k_\tau - k_n$ 
     $A \leftarrow a * (\tau^b - (T[n][0])^n)$ 
     $integral\_1 \leftarrow \text{gammainc}(\beta * Delta, \beta * a)$  ▷ Se emplea la función gamma
    incompleta definida en (2.30)
    function integral_externa( $x$ )
         $integral\_interna \leftarrow \text{gammainc}(\beta, \beta * (A - x))$ 
         $densidad \leftarrow \text{fdp\_Gamma}(x; 1/\beta, \beta * Delta)$ 
        return  $densidad * integral\_interna$ 
    end function
     $integral\_2 \leftarrow INTEGRAL(integral\_externa, 0, A)$  ▷ Se emplea una
    función de integración dentro del lenguaje.
     $Diferencia \leftarrow integral\_1 - integral\_2$ 
     $last\_term \leftarrow n * \log(b) + \log(Diferencia) + suma$ 
    return  $last\_term$ 
end function

```

---

tiempo promedio por ejecución y valor promedio obtenido para la estimación a través de los métodos Powell, Nelder-Mead y L-BFGS-B, para cada uno de los 3 parámetros del TRP.

Dichas simulaciones fueron realizadas a través de un código elaborado en Python, a partir de los algoritmos antes mencionados. Se generaron datos y un IFCP con un 20 % de pérdida, a partir de datos conocidos  $a = 0.2$ ,  $b = 1.5$  y  $\beta = 2$ .

De los resultados obtenidos se optó por continuar con el método L-BFGS-B, y explorar su desempeño para diferentes niveles de pérdida, obteniendo el resultado promedio para 1000 iteraciones así como su Error Cuadrático Medio o MSE, para los valores conocidos  $a = 0.2$ ,  $b = 1.5$  y  $\beta = 2$ .

Tabla 3.2: Resultados de 100 simulaciones en las que se realizó la estimación con los métodos: Powell, Nelder-Mead y L-BFGS-B, para datos generados a partir de  $a = 0.2$ ,  $b = 1.5$  y  $\beta = 2$  y con porcentaje de pérdida del 20 %.

Método	éxito	Tiempo promedio	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\beta}$
Powell	100 %	2.3144	25.6287	1.0249	1.9035
Nelder-Mead	99 %	1.1069	0.2443	1.5295	2.8191
L-BFGS-B	100 %	0.6431	0.2384	1.5013	1.9868

En la Tabla 3.4, se muestran los resultados para la estimación de los parámetros del TRP, obtenidos para un IFCP con porcentaje de pérdida del 0 % (CFCP), 20 % y 50 %.

Tabla 3.3: Resultados de estimación y MSE para los parámetros de un TRP, con diferentes niveles de pérdida en un IFCP simulado a partir de datos conocidos  $a = 0.2$ ,  $b = 1.5$  y  $\beta = 2$  después de 1000 simulaciones.

Porcentaje de pérdida	Éxito	$\hat{a}$	MSE( $\hat{a}$ )	$\hat{b}$	MSE( $\hat{b}$ )	$\hat{\beta}$	MSE( $\hat{\beta}$ )
0 %	100 %	0.2389	0.0324	1.5389	0.0805	2.5485	1.2235
10 %	100 %	0.2411	0.0381	1.5210	0.0817	2.6316	1.4231
20 %	95.5 %	0.2546	0.0839	1.	0.0828	2.71741	1.6318
50 %	99.0 %	0.3571	0.1817	1.5113	0.1075	3.4960	10.8699

Los resultados reportados en [21], son:

Tabla 3.4: Resultados de estimación y MSE para los parámetros de un TRP, con diferentes niveles de pérdida en un IFCP simulado a partir de datos conocidos  $a = 0.2$ ,  $b = 1.5$  y  $\beta = 2$  después de 1000 simulaciones [21].

Porcentaje de pérdida	MSE( $\hat{a}$ )	MSE( $\hat{b}$ )	MSE( $\hat{\beta}$ )
0 %	0.0028	0.0042	0.030
20 %	0.0031	0.0044	0.041
50 %	0.0033	0.0049	0.069

Con base en el algoritmo elaborado se obtienen los resultados de la estimación para distintos casos de acuerdo con el nivel de reparación.

Los parámetros  $a$  y  $b$ , correspondientes a la función de tendencia y por lo tanto, a la función de transformación temporal, representan un RP cuando su valor es igual a 1, y son adecuados para modelar sistemas en los que hay reparaciones perfectas como se presentó en la Tabla 3.1.

Por otro lado, cuando el IFCP es simulado considerando el parámetro  $\beta = 1$ , la distribución subyacente del RP en el dominio de tiempo transformado es una exponencial y se habla de un NHPP, adecuado para modelar sistemas con un nivel de reparación mínima.

Los resultados en el desempeño de la estimación para 1000 simulaciones en cada uno de estos casos para un IFCP con 20 % de pérdida se presenta en la Tabla 3.5.

Tabla 3.5: Desempeño de la estimación para un IFCP cuando se tienen diferentes niveles de reparación.

Nivel de reparación	Modelo	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\beta}$
Perfecta	$RP(F)$ , con $F$ la Fda de una dist. $Gamma(2, 2)$	1.0891	1.0311	2.8512
General	$TRP(F, \lambda(\cdot))$ con $a = 0.5, b = 1.5$ y $\beta = 2.5$	0.5718	1.5200	3.4474
Mínima	$NHPP(\lambda(\cdot))$ con $\lambda(t) = at^b$ y $a = 0.2$ y $b = 1.5$	0.3276	1.5660	1.4701



---

## CONCLUSIONES

Para este trabajo se realizó un análisis de sistemas reparables por medio de la Teoría de Confiabilidad, se hizo una revisión de sus conceptos básicos y se desarrolló el estudio para un sistema reparable en el caso de un nivel de reparación general sobre datos simulados. En la teoría de Confiabilidad se aplican de forma práctica la teoría de probabilidad y estadística para estudiar la probabilidad de que un sistema falle, permite caracterizar su comportamiento a través del estudio de su estructura y de las leyes de falla.

Entre los elementos más importantes figuran la función de tasa de falla, función de estructura, técnicas para calcular o en su caso acotar a la función de confiabilidad y los procesos de renovación con tendencia como una generalización de los procesos de renovación.

El tratamiento de los datos de tiempos de falla implica en muchos casos la presencia de datos censurados o perdidos, los cuales deben incluirse en los cálculos para tener estimaciones más realistas de la confiabilidad del sistema.

Los métodos numéricos son una herramienta útil ya que tal como se observó para la distribución Gaussiana Inversa y para un TRP, el cálculo de estimadores involucra funciones de verosimilitud o logverosimilitud complicadas.

El nivel de reparación es un factor importante para orientar el tipo de modelo adecuado para estudiar el sistema en cuestión. Los niveles de reparación e incluso la clasificación del sistema como reparable o no reparable depende de los análisis costo beneficio y de los análisis de riesgo que permiten determinar la clasificación o nivel de reparación más conveniente.

Los estimadores propuestos en [21], mostraron un buen comportamiento en la estimación de los parámetros de un TRP, considerando un IFCP con diferentes niveles

de pérdida y para los distintos niveles de reparación a partir de un código de simulación elaborado en Python.

El presente trabajo constituye un aporte metodológico y computacional al estudio de la confiabilidad de sistemas reparables, en este estudio se desarrolla un procedimiento reproducible en Python que permite replicar el comportamiento del modelo y verificar empíricamente la coherencia de los estimadores.

El trabajo aporta una herramienta útil tanto para la comprensión del Trend Renewal Process como para su aplicación en entornos computacionales abiertos, y puede servir de base para futuras investigaciones orientadas al análisis de confiabilidad de sistemas reparables, en particular en contextos con información parcial o tiempos de falla censurados.

### **Trabajo a futuro**

En el desarrollo del presente trabajo se formularon diferentes preguntas e hipótesis en las que se propone ahondar como parte de un trabajo a futuro.

- Probar si de manera general la distribución que mejor ajusta una muestra que ignora a los datos censurados es también la mejor cuando se agregan los tiempos de falla con censura.
- Estudiar las propiedades de los estimadores de máxima verosimilitud del TRP para el caso de la distribución de renovación Gamma.
- Explorar el caso de múltiples sistemas así como otra distribución para el RP en el dominio de tiempo transformado como la Gaussiana Inversa u otras distribuciones.
- Desarrollar en enlace de la teoría de confiabilidad con la teoría de mantenimiento en modelos RAM y RAMS.

---

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] ALONSO, R.. *¿Qué marca de tarjetas gráficas es mejor? Comparativa de fiabilidad. HardZone.* (<https://hardzone.es/reportajes/comparativas/marca-tarjetas-graficas-fiabilidad/>)
- [2] ALESSANDRO BIROLINI. *Reliability Engineering Theory and Practice*, Springer, 2017.
- [3] GEORGE CASELLA AND ROGER L. BERGER. *Statistical Inference*. Duxbury Press, 2001.
- [4] RENÉ S. CONTRERAS, *Confiabilidad en la industria*, Tesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2022.
- [5] GEORGE ELVEBAKK AND BO LINDQVIST. *The trend-renewal process for statistical analysis of repairable systems*. Taylor & Francis, Technometrics, Vol. 45, 1999.
- [6] WILLIAM FELLERY Eugene Higgins . *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. John Wiley and Sons, 1957.
- [7] ROBERT GALLAGER. *Discrete Stochastic Processes*, Springer, 1996.
- [8] MARCO P. GONZÁLEZ *Un espacio de Variables Aleatorias Normado: Bajo una Medida de Dispersión*. Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 2023
- [9] PAUL G. HOEL, SIDNEY C. PORT Y CHARLES J. STONE. *Introduction to Probability Theory*. Houghton Mifflin Company, 1971.
- [10] MIRIAM B. JARAUTA. *Modelos Probabilísticos y Estadísticos en Fiabilidad* Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias Universidad de Zaragoza, 2019.
- [11] JERALD F. LAWLESS. *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, John Wiley & Sons Inc, 2023
- [12] LAWRENCE M. LEEMIS. *Reliability: Probabilistic Models and Statistical Methods*, Prentice-Hall, 1995.

- [13] PAUL L. MEYER. *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*, Fondo Educativo Interamericano, 1992.
- [14] VÍCTOR HUGO S. MUÑIZ. *Optimización para el Mantenimiento de Sistemas Reparables*. Centro de Investigación en Matemáticas A.C., 2004.
- [15] PETER W. JONES, PETER SMITH. *Stochastic Processes An Introduction*, CRC Press, 1957.
- [16] HOANG PHAM. *Springer Handbook of Engineering Statistics*. Springer, 2023.
- [17] SHELDON M. ROSS. *A First Course in Probability*, Prentice Hall, 1997.
- [18] SHELDON M. ROSS. *Introduction to Probability Models*, Elsevier, 2019.
- [19] WALTER RUDIN. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Company, 1987.
- [20] SCI-PY COMMUNITY. *minimize — SciPy v1.16.1 Manual*. En *SciPy v1.16.1 Manual*. (s. f.). Recuperado el 9 de septiembre de 2025, de <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.minimize.html>
- [21] WUJUN SI AND QINGYU YANG AND LESLIE MONPLAISIR AND YONG CHEN. *Reliability Analysis of Repairable Systems With Incomplete Failure Time Data*. IEEE, Vol. 67, 2018. doi: 10.1109/TR.2018.2832022.
- [22] MEDARDO YAÑEZ AND HERNARDO GÓMEZ AND GENEHELÍN VALBUENA. *Ingeniería de Confiabilidad y Análisis Probabilístico del Riesgo*. Frangela Melo Troconis y Reliability and Risk Management, S. A., 2004.

---

# ÍNDICE ALFABÉTICO

<b>Otros simbolos</b>			
$o(h)$	60	Función de Riesgo Acumulada	11
		Función de verosimilitud con datos censurados	53
Diagramas de bloques	39	Función Gamma Incompleta	14
		Función Media de vida Residual	11
<b>C</b>		<b>I</b>	
Censura por la derecha	49	Importancia de la confiabilidad	34
Censura por la izquierda	49	Importancia estructural	33
Censura tipo I	48		
Censura tipo II	48	<b>L</b>	
Clasificación de sistemas	47	Ley de falla exponencial	12
Componente irrelevante	19	Ley de falla Gamma	14
Confiabilidad	5	Ley de falla Gaussiana Inversa	17
Confiabilidad sistema		Ley de falla Weibull	13
<i>k - out - of - n</i>	24		
confiabilidad sistema en paralelo	23	<b>M</b>	
confiabilidad sistema en serie	22	Modelo Weibull Modificado	16
		Método de inclusión exclusión	41
<b>E</b>		<b>N</b>	
Estimador de Máxima Verosimilitud	50	Niveles de reparación	63
Estructura <i>k - out - of - n</i>	19		
Estructura en paralelo	19	<b>P</b>	
Estructura en serie	19	Proceso contador	59
Estructura puente	37	Proceso de Conteo de Fallas Completo CFCP	65
<b>F</b>		Proceso de Conteo de Fallas Incompleto IFCP	65
Función de confiabilidad	6		
Función de estructura	18		



---

---

# APÉNDICE A

---

## PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

### A.1. Probabilidad

Un estudio de confiabilidad implica un análisis probabilístico, es por ello que se hacen uso de conceptos y elementos básicos de dicha teoría. Los experimentos o fenómenos aleatorios, son aquellos que pueden repetirse bajo las mismas condiciones, sin embargo, no es posible predecir su resultado con certeza, es decir, existe incertidumbre alrededor de este. Se inicia así con la definición de espacio de probabilidad [9].

**Definición A.1.1.** *Un espacio de probabilidad es una terna  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , en donde  $\Omega$  es el conjunto que contiene a todos los posibles resultados de un experimento aleatorio  $\varepsilon$ , denominado espacio muestral,  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$  y  $P$  es una medida de probabilidad sobre  $\mathcal{F}$ .*

Dado un experimento aleatorio  $\varepsilon$  cuyo espacio de probabilidad asociado es  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , los resultados de  $\varepsilon$  pueden ser no numéricos, por ejemplo, el color de una bola tomada al azar dentro de una urna, o el estado de operación de una máquina, es por ello por lo que surge la necesidad de una herramienta importante en la teoría de probabilidad y estadística, llamada variable aleatoria (v. a.), las variables aleatorias (v. a.'s) permiten realizar el estudio de los fenómenos aleatorios usando valores numéricos.

**Definición A.1.2.** *Una variable aleatoria es una función  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , definida en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , tal que a cada elemento del espacio muestral le asigna un número real y es  $\mathcal{F}$ -medible, es decir,  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ , con  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .*

**Observación.** En otras palabras la propiedad de que  $X$  sea  $\mathcal{F}$ -medible, significa que  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$  para  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , donde  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  es la  $\sigma$ -álgebra generada por los conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}$ , llamada  $\sigma$ -álgebra de Borel.

**Nota.** La  $\sigma$ -álgebra de Borel, se puede generar a partir de intervalos de la forma  $(a, \infty)$ ,  $(-\infty, a)$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b]$ ,  $(-\infty, a]$ ,  $[a, \infty)$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $a < b$ , a los elementos de  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  se les denomina conjuntos de Borel o borelianos, se sigue entonces que,  $X^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{F}$  es equivalente a,

$$\{\omega \in \Omega | X(\omega) > a\} \in \mathcal{F}. \quad (\text{A.1})$$

**Definición A.1.3.** Sea  $X$  una v. a. definida sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , y  $R_X$  su rango, si  $R_X$  es un subconjunto finito o infinito numerable de  $\mathbb{Z}$ , se dice que,  $X$  es una **variable aleatoria discreta**, esto es, que se pueden expresar a los posibles valores de  $X$  como  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ , en el caso finito la lista termina y en el caso infinito la lista continúa.

Además, para cualquier  $x_i \in R_X$  siempre es posible asignarle un número real  $p(x_i) = P(X = x_i)$ , el cual satisface,

- $p(x_i) \geq 0, x_i \in R_X$ .
- $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1, x_i \in R_X$ .

La función  $p(x_i)$  es llamada **función de probabilidad puntual (fdpp)** o función de masa de  $X$ .

**Definición A.1.4.** Sea  $X$  una v. a. definida sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , y  $R_X$  su rango, se dice que  $X$  es una **variable aleatoria continua** si  $R_X$  es de la forma  $(a, \infty)$ ,  $(-\infty, a)$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b]$ ,  $(-\infty, a]$ ,  $[a, \infty)$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $a < b$ , o  $R_X = \mathbb{R}$  y además existe una función  $f(\cdot)$  que satisface,

- $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ .
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $a < b$ .

A la función  $f$  se le denomina **función de densidad de probabilidad (fdp)** de  $X$ .

**Observación.** Existen variables aleatorias (v. a.'s) que no son discretas ni continuas, a las cuales se les llama variables aleatorias mixtas. Sin embargo, dentro de la teoría de confiabilidad, al igual que en otras áreas de aplicación matemática, se trabaja principalmente con variables aleatorias discretas o continuas.

Una función que determina de forma única a toda variable aleatoria  $X$  (discreta o continua), es la llamada función de distribución acumulativa, la cual se define enseguida.

**Definición A.1.5.** La **Función de Distribución Acumulativa (Fda)** denotada por  $F$ , de una variable aleatoria  $X$  está definida para todos los números reales  $b \in \mathbb{R}$ , como sigue,

$$F(b) = P\{X \leq b\}.$$

En el caso que  $X$  es una v. a. discreta,  $F$  tiene la siguiente expresión,

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i).$$

Análogamente, si  $X$  es una v. a. continua,  $F$  es de la siguiente forma,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds.$$

**Teorema A.1.6.** Sea  $F$  la Fda de una variable aleatoria  $X$ ,  $F$  cumple con las siguientes propiedades:

- $F$  es una función no decreciente, esto es, si  $a < b$  entonces  $F(a) \leq F(b)$ .
- $\lim_{b \rightarrow \infty} F(b) = 1$ .
- $\lim_{b \rightarrow -\infty} F(b) = 0$ .
- $F$  es una función continua por la derecha, esto es, para cualquier  $b$  y para cualquier sucesión decreciente  $\{b_n\}$ ,  $n \geq 1$ , que converge a  $b$ , se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} (F(b_n)) = F(b)$ .

**Demostración:** Ver [9].

En el estudio de confiabilidad existen distribuciones paramétricas que ajustan o modelan adecuadamente los tiempos de falla de equipos, componentes o sistemas con diferentes naturalezas o características, por ejemplo [16]:

- Exponencial. Para el estudio de componentes eléctricas y electrónicas de sistemas como fusibles o circuitos.
- Normal. Para estudiar componentes mecánicas como rodamientos, engranajes así como procesos de calibración.
- Weibull. Para mecanismos eléctricos como transformadores, mecánicos como resortes o estructurales como vigas.
- Gamma. Para sistemas que fallan por procesos de desgaste componentes hidráulicos.
- Wald. Para sistemas que fallan como efecto de un proceso de degradación acumulado o cuando se supera un umbral de márgenes de resistencia en los materiales que presen tan pequeñas fracturas que propician una fractura a mayor escala.

- Modelo de Weibull modificado. Permite estudiar a un sistema que cuya incidencia de fallas varía a lo largo de su vida mostrando tendencias decrecientes, estables y posteriormente crecientes como computadoras o automóviles.

**Definición A.1.7.** Sea  $X$  una variable aleatoria continua se dice que  $X$  tiene una **distribución exponencial** con parámetro  $\lambda > 0$ , o que  $X \sim \text{exp}(\lambda)$  si su fdp es de la forma,

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \text{ con } x > 0, \quad (\text{A.2})$$

y  $f(x) = 0$  si  $x \leq 0$ .

Su Fda para  $x > 0$  es,

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad (\text{A.3})$$

y  $F(x) = 0$  si  $x \leq 0$ .

En la Figura A.1 se presenta la gráfica de la fdp de  $X$  para el caso exponencial.

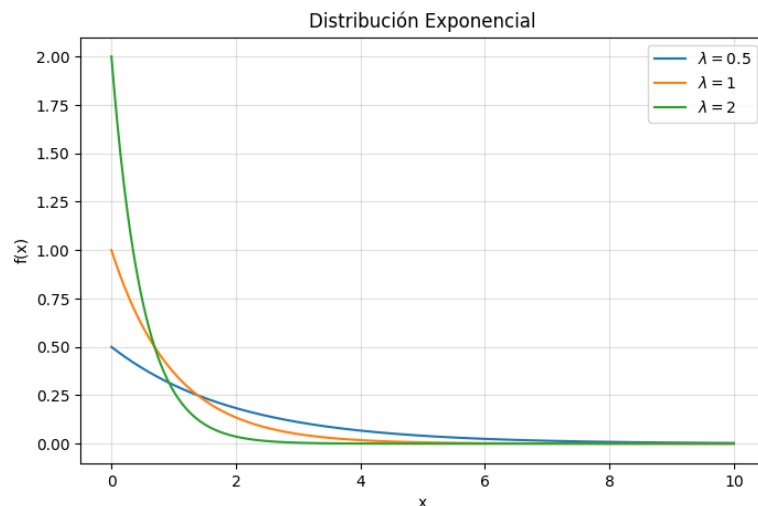


Figura A.1: Función de densidad de probabilidad Exponencial, para diferentes valores de  $\lambda$ , cuando  $\lambda = 1$  se denomina exponencial estándar.

**Definición A.1.8.** Sea  $X$  una variable aleatoria continua, se dice que  $X$  tiene una **distribución Weibull** con parámetros  $\alpha, \beta > 0$  o que  $X \sim \text{Weibull}(\alpha, \beta)$  si su fdp es de la siguiente forma,

$$f(x) = \beta \alpha^\beta x^{\beta-1} e^{-(\alpha x)^\beta}, \text{ con } x > 0, \quad (\text{A.4})$$

y  $f(x) = 0$  si  $x \leq 0$ .

Su Fda para  $x > 0$  es,

$$F(x) = 1 - e^{-(\alpha x)^\beta}. \quad (\text{A.5})$$

y  $F(x) = 0$  si  $x \leq 0$ .

Los parámetros  $\beta$  y  $\alpha$  corresponden a los parámetros de forma y escala, respectivamente. En la Figura A.2 se observa la gráfica de su fdp.

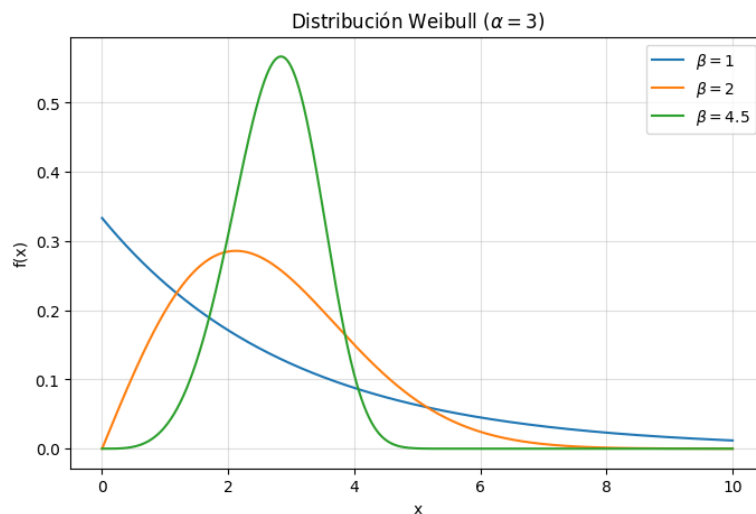


Figura A.2: Función de densidad de probabilidad Weibull con  $\alpha = 3$  y  $\beta = 1, 2, 4.5$ , respectivamente.

**Definición A.1.9.** Sea  $X$  una variable aleatoria continua, se dice que  $X$  tiene una **distribución Gamma** con parámetros  $\lambda, k > 0$  o que  $X \sim \text{Gamma}(\lambda, k)$  si su fdp es de la siguiente forma,

$$f(x) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\lambda x}, \text{ con } x > 0, \quad (\text{A.6})$$

y  $f(x) = 0$  si  $x \leq 0$ .

De la Definición 1.1.9 implica el uso de la función Gamma, que se define como:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx.$$

Los parámetros de la distribución Gamma,  $k$  y  $\lambda$  representan la forma y escala de la función, respectivamente. En este caso la Fda se obtiene en cada caso calculando la integral sobre la fdp, ya que no es posible determinarla de forma explícita de manera general.

Esta distribución es sesgada a la derecha, es decir, que al observar la función de densidad, la curva es más alta cerca del origen y decrece conforme los valores de  $x$

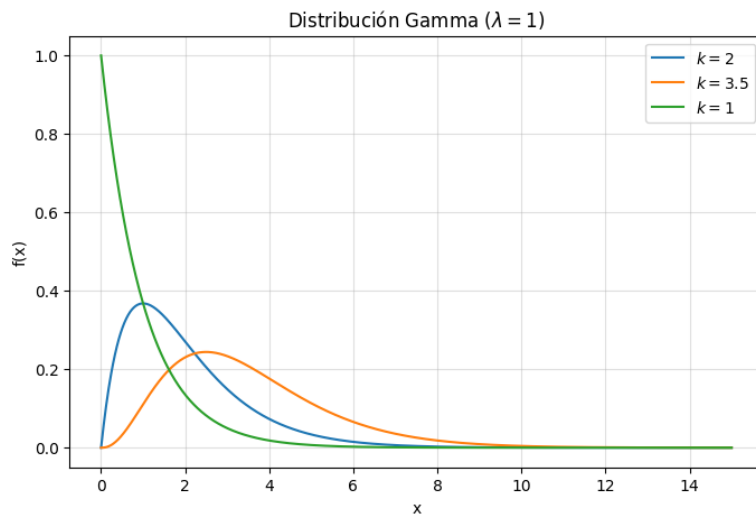


Figura A.3: Función de densidad de probabilidad Gamma con  $\lambda = 1$  y  $k = 2, 3.5, 1$ , respectivamente.

aumentan, tal como se muestra en la Figura A.3.

**Observación.** La distribución Weibull y Gamma tienen como caso particular a la distribución exponencial cuando sus parámetros de forma  $\beta$  y  $k$ , respectivamente, son iguales a 1.

Como se ha mencionado, las v. a.'s permiten estudiar fenómenos en los cuales interviene el azar. Dentro de diferentes áreas de interés existen situaciones en las que un sistema o fenómeno evoluciona con el tiempo de forma aleatoria, en la teoría de confiabilidad surge este escenario cuando se estudia la probabilidad de que un sistema o componente se encuentre en funcionamiento o falla a través del tiempo, para el estudio de este tipo de situaciones es necesaria una herramienta importante llamada procesos estocásticos.

**Definición A.1.10.** Un *proceso estocástico* es una colección de variables aleatorias  $\{X_t : t \in T\}$  definidas en un mismo espacio de probabilidad, parametrizada por un conjunto  $T$ , llamado espacio parametral, en donde las variables toman valores en un conjunto  $S$  llamado espacio de estados.

Hay dos aspectos importantes a considerar en los procesos estocásticos: el primero es el conjunto de parámetros  $T$  que representa el tiempo, un proceso estocástico es llamado continuo si el conjunto  $T$  es un intervalo, por otro lado, es llamado discreto si  $T$  es un subconjunto de los enteros, el segundo aspecto es el espacio de estados, que puede ser un conjunto finito, de dos elementos incluso, infinito numerable o infinito no numerable.

**Notación.** Si  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  es un proceso estocástico a tiempo discreto, se denota por  $X_n$  a la variable aleatoria que corresponde al estado del proceso al tiempo  $n$ . Si  $\{X_t\}$  es un proceso estocástico a tiempo continuo, se denota por  $X_t$  a la variable aleatoria que corresponde al estado del proceso al tiempo  $t$ .

**Observación.** Existen procesos estocásticos que son objeto de estudio por sus diferentes aplicaciones.

- *Cadena de Markov.* Es un proceso estocástico a tiempo discreto  $\{X_n\}$ , definido sobre un espacio de estados  $S$  discreto y satisface la propiedad de Markov, la cual es,

$$P(X_{n+1} = x | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x | X_n = x_n).$$

La interpretación de esta propiedad es que la probabilidad de que la cadena se encuentre en el estado  $x$  al tiempo  $n + 1$ , dado que se tiene información de todos los estados anteriores, es la misma que la probabilidad de que la cadena se encuentre en  $x$  dado que se conoce el estado del proceso al tiempo anterior,  $n$ .

- *Proceso de Poisson.* Es un proceso estocástico a tiempo continuo  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ , que cuenta el número de ocurrencias de un evento de interés hasta el tiempo  $t$ , se define con una tasa de ocurrencia constante  $\lambda$  y recibe su nombre debido a que  $N(s+t) - N(s) \sim Po(\lambda t)$ , donde  $N(s+t) - N(s)$  es el número de ocurrencias en el intervalo  $(s, s+t)$ .

## A.2. Estadística

Los estudios de confiabilidad con enfoque estadístico, se basan en el historial de tiempos de falla registrados u observados de un sistema. Estos datos permiten realizar inferencias sobre su distribución, la cual puede ser paramétrica o no paramétrica, es por ello que a continuación se presentan algunos resultados básicos sobre los que se desarrolla este enfoque.

**Definición A.2.1.** Las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$  forman una **muestra aleatoria** de tamaño  $n$  de la población  $f(x)$ , si  $X_1, \dots, X_n$  son variables aleatorias independientes con función de densidad  $f(x)$ , para cada  $X_i$  con  $i = 1, \dots, n$ . De manera alternativa,  $X_1, \dots, X_n$  son llamadas variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v. a. i. i. d.) con fdp  $f(x)$ .

A partir de la muestra es posible obtener información de interés como medidas de tendencia central o de dispersión, en el presente trabajo la muestra se emplea para obtener los estimadores de distribuciones candidatas para ajustar mejor los datos.



---

---

# APÉNDICE B

---

## PRUEBAS

### Demostración del Teorema 2.4.1.

La prueba se realiza por inducción.

El primer paso es para  $n = 2$ , sean  $E_1$  y  $E_2$ , dos eventos, se cumple que,

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2). \quad (\text{B.1})$$

Luego, suponer que la proposición se cumple para el caso  $n$ , ver que se cumple para el caso  $n + 1$ .

Por hipótesis de inducción, se tiene que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_i E_j) + \sum_{i<j<k} P(E_i E_j E_k) \quad (\text{B.2})$$
$$- \dots + (-1)^{n+1} P(E_1 E_2 \dots E_n).$$

Luego, sea  $E_{n+1}$  otro evento, entonces,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \cup E_{n+1}\right). \quad (\text{B.3})$$

$$= P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) + P(E_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \cap E_{n+1}\right). \quad (\text{B.4})$$

La ecuación (B.4) se obtiene de aplicar (B.1) a (B.3). Se distribuye la intersección del último término como sigue,

$$P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \cap E_{n+1}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n (E_i \cap E_{n+1})\right), \quad (\text{B.5})$$

de acuerdo con la hipótesis de inducción se tiene que,

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n P(E_i E_{n+1}) - \sum_{i<j} P(E_i E_j E_{n+1}) + \sum_{i<j<k} P(E_i E_j E_k E_{n+1}) \\
 &\quad - \dots + (-1)^{n+1} P(E_1 E_2 \dots E_n E_{n+1}). \tag{B.6}
 \end{aligned}$$

Se suman (B.6) y (B.2) y se obtiene,

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_i E_j) + \sum_{i<j<k} P(E_i E_j E_k) \\
 &- \dots + (-1)^{n+1} P(E_1 E_2 \dots E_n) + P(E_{n+1}) - \left[ \sum_{i=1}^n P(E_i E_{n+1}) - \sum_{i<j} P(E_i E_j E_{n+1}) \right. \\
 &\left. + \sum_{i<j<k} P(E_i E_j E_k E_{n+1}) - \dots + (-1)^{n+1} P(E_1 E_2 \dots E_n E_{n+1}) \right], \tag{B.7}
 \end{aligned}$$

se distribuye el  $-1$  en los términos agrupados entre corchetes y se concluye que

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) &= \sum_{i=1}^{n+1} P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_i E_j) + \sum_{i<j<k} P(E_i E_j E_k) \\
 &\quad - \dots + (-1)^{n+2} P(E_1 E_2 \dots E_n E_{n+1}), \tag{B.8}
 \end{aligned}$$

por lo tanto, queda probado el resultado.  $\square$

### Demostración del Teorema 2.4.2.

Esta prueba también se realiza por inducción sobre  $i$ .

Para  $i = 1$ , se recurre al siguiente resultado

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i = 0, \tag{B.9}$$

por lo tanto,

$$1 + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^i = 0. \tag{B.10}$$

De la ecuación (B.10) se sigue

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \cdots \pm \binom{n}{n} = 1. \quad (\text{B.11})$$

Por otro lado,

$$\binom{n-1}{0} = 1, \quad (\text{B.12})$$

por lo que (B.11) es igual a (B.12) y ambas son no negativas.

Luego, suponer que la proposición se cumple para el caso  $i$ , ver que se cumple para  $i+1$ , siempre que  $i+1 \leq n$ .

Se tiene así que se cumple,

$$\binom{n}{i} - \binom{n}{i+1} + \cdots \pm \binom{n}{n} = \binom{n-1}{i-1}, \quad (\text{B.13})$$

por lo tanto,

$$-\binom{n}{i+1} + \binom{n}{i+1} - \cdots \pm \binom{n}{n} = \binom{n-1}{i-1} - \binom{n}{i}, \quad (\text{B.14})$$

al multiplicar por  $-1$  ambos miembros de (B.14), se obtiene

$$\binom{n}{i+1} - \binom{n}{i+1} + \cdots \pm \binom{n}{n} = \binom{n}{i} - \binom{n-1}{i-1}. \quad (\text{B.15})$$

Por propiedad de los coeficientes binomiales se sigue que

$$\binom{n}{i} - \binom{n-1}{i-1} = \binom{n-1}{i}. \quad (\text{B.16})$$

De lo anterior se concluye el resultado.  $\square$

### **Demostración de Teorema 2.4.3.**

Para probar este resultado se definen las siguientes variables indicadoras,  $I_j$  con  $j = 1, \dots, n$ ,

$$I_j = \begin{cases} 1, & \text{si ocurre } E_j, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

A partir de las  $I_j$  se define la siguiente función,

$$N = \sum_{i=1}^n I_j. \quad (\text{B.18})$$

$N$  denota el número de eventos  $E_j$  que ocurren, con esto se define otra indicadora,

$$I = \begin{cases} 1, & \text{si } N > 0, \\ 0, & \text{si } N = 0. \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

Por la forma en que se define  $I$  se verifica que

$$1 - I = (1 - 1)^N, \quad (\text{B.20})$$

Para ello se revisan los siguientes casos,

- Si  $N = 0$  entonces  $I = 0$  y  $1 - I = 1$ , además cumple que,

$$(1 - 1)^0 = 0^0 = 1.$$

- Por otro lado, si  $N > 0$ , entonces  $I = 1$  y  $1 - I = 0$ , y se cumple que,

$$(1 - 1)^N = 0^N = 0. \quad (\text{B.21})$$

Al aplicar el teorema binomial a (B.21) se sigue,

$$\begin{aligned} 1 - I &= \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} (-1)^i (1)^{N-i} (1)^i \\ &= \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} (-1)^i \\ &= 1 - N + \binom{N}{2} - \binom{N}{3} + \dots \pm \binom{N}{N}. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

La ecuación (B.22) es equivalente a

$$I = N - \binom{N}{2} + \binom{N}{3} - \dots \pm \binom{N}{N}. \quad (\text{B.23})$$

Del Teorema 2.4.2 se tiene que

$$\binom{N}{i} - \binom{N}{i+1} + \dots \pm \binom{N}{N} \geq 0, \quad (\text{B.24})$$

por lo tanto, por ejemplo, para  $i = 2$

$$\binom{N}{2} - \binom{N}{3} + \dots \pm \binom{N}{N} \geq 0, \quad (\text{B.25})$$

por otro lado,

$$N - I = N - \left[ N - \binom{N}{2} + \binom{N}{3} - \dots \pm \binom{N}{N} \right]. \quad (\text{B.26})$$

El miembro izquierdo de la desigualdad (B.26) es igual a (B.25), por lo que

$$N - I \geq 0, \quad (\text{B.27})$$

entonces,

$$I \leq N. \quad (\text{B.28})$$

La ecuación (B.28) se puede deducir de la definición de  $I$  en (B.20), sin embargo, este procedimiento se aplica para cada una de las desigualdades siguientes.

Se considera el caso  $i = 3$ , de acuerdo con el teorema 2.3.2

$$\binom{N}{3} - \binom{N}{4} + \cdots \pm \binom{N}{N} \geq 0, \quad (\text{B.29})$$

se tiene que,

$$I - N + \binom{N}{2} = \binom{N}{3} - \binom{N}{4} + \cdots \pm \binom{N}{N}, \quad (\text{B.30})$$

luego se cumple que,

$$I - N + \binom{N}{2} \geq 0, \quad (\text{B.31})$$

entonces,

$$I \geq N - \binom{N}{2}. \quad (\text{B.32})$$

Conforme incrementa el valor de  $i$  se verifica cada desigualdad.

Dado que,  $N \leq n$  y  $\binom{m}{i} = 0$  para cualquier  $i > m$ , la ecuación (B.23) se puede reescribir como

$$I = \sum_{i=1}^n \binom{N}{i} (-1)^{i+1}. \quad (\text{B.33})$$

El resto de la prueba se verifica de obtener el valor esperado de cada miembro de las desigualdades, ya que

$$\begin{aligned} E[I] &= P(N > 0) \\ &= P(\text{al menos un evento } E_j \text{ ocurre}) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right). \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 E[N] &= E \left[ \sum_{i=1}^n I_j \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n E[I_j] \\
 &= \sum_{i=1}^n P(E_j).
 \end{aligned}
 \tag{B.35}$$

De manera similar se obtiene que

$$\begin{aligned}
 E \left[ \binom{N}{2} \right] &= E[\text{número de parejas } E_j \text{ que pueden ocurrir}] \\
 &= E \left[ \sum_{i < j} I_i I_j \right] \\
 &= \sum_{i < j} P(E_i E_j).
 \end{aligned}
 \tag{B.36}$$

De manera general,

$$\begin{aligned}
 E \left[ \binom{N}{i} \right] &= E[\text{número de agrupaciones de tamaño } i \text{ de eventos } E_j \text{ que pueden ocurrir}] \\
 &= E \left[ \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_i} I_{j_1} I_{j_2} \dots I_{j_i} \right] \\
 &= \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_i} P(E_{j_1} E_{j_2} \dots E_{j_i}).
 \end{aligned}
 \tag{B.37}$$

De los calculos anteriores se concluye la prueba.  $\square$

---

---

# APÉNDICE C

---

## CÓDIGO

El código fue diseñado e implementado en Python y se encuentra disponible de manera pública en: <https://github.com/CrisMedLop/TRP-Model>.

Descripción:

Trended Renewal Processes are a suitable model for studying the reliability of repairable systems under the assumption of a general repair level. If the renewal distribution in the transformed time domain corresponds to a Gamma distribution, the process is determined with three nonnegative parameters. In this code, failure times for a repairable system with a general repair level are simulated, and the corresponding parameters are estimated.

Failure times are generated from known values for the parameters  $a$ ,  $b$  and  $\beta$ , which are 0.1, 1.5 and 2, respectively.