



Facultad de Ciencias
Físico Matemáticas

INDUCCIÓN DE FUERZAS ELECTROMAGNÉTICAS EN UN
CRISTAL FOTÓNICO UNIDIMENSIONAL QUE INCLUYE UN MEDIO
CON PÉRDIDAS.

TESIS

que para obtener el grado académico de:

MAESTRO EN FÍSICA

presenta al colegio de física el licenciado:

ELDON NIETO RUIZ

ASESORES:

Dr. Miller Toledo Solano

Dr. Jesús Eduardo Lugo Arce

Puebla, Pue., 05 de Enero del 2023.

Agradecimientos

La socialización del conocimiento es uno de los pilares del desarrollo de cualquier civilización que se precie de ser justa y empática. De entre todas las formas que existen para lograr tal cometido, la educación pública y de calidad a todos los niveles es la que, con el pasar de tiempo, ha probado ser la más eficiente. Por lo tanto, agradezco a las autoridades correspondientes por hacerla posible, así como exhorto a que se le dé continuidad, alcance y, por sobre todo, a que, sin importar el costo, se mantenga pública (en el sentido más amplio de la palabra) y con administración transparente.

Agradezco a los profesores del Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla por sus enseñanzas, tiempo y dedicación, así como su convicción de poner su trabajo por encima de las circunstancias y adversidades, tal como lo fue la pandemia global ocasionada por el Covid-19.

También, agradezco a mis asesores de tesis, el Dr. Miller Toledo Solano y el Dr. Jesús Eduardo Lugo Arce, por haberme proporcionado guía académica siempre que la necesité.

Por último, pero no menos importante, agradezco a mis papás, Juan Nieto Frausto y Honorina Ruiz Estrada, por su apoyo a raudales e incondicional, en temas que van mucho más allá de lo académico. Agradezco que siempre estén ahí para mí, no importando qué tan mal o bien pinten las cosas y no importando qué tanto me equivoque en mis acciones y decisiones.

Resumen

En este trabajo se analiza la presión de radiación que ejerce la radiación electromagnética (luz láser, en este caso) al incidir en cristales fotónicos unidimensionales (espejos de Bragg) con y sin una lámina de material capaz de absorber luz (oro, en este caso). Para estos dos casos se hará un desarrollo analítico y numérico, pero, en el segundo, se añadirá un reporte experimental.

El marco teórico usado como base para el desarrollo analítico en cuestión fue el proporcionado por la electrodinámica clásica, el software usado para el desarrollo numérico fue mathematica 12.0 y los equipos usados para trabajar experimentalmente fueron un espectrofotómetro modelo: “BLUE-Wave, BLACK-Comet, RED-Wave, DWARF-Star, GREEN-Wave, EPP2000 HR, EPP2000 UVN-SR, Dual DSR” y un vibrómetro modelo: “OMS Laser Point LP01”.

Publicaciones

Las publicaciones producidas durante este trabajo de tesis fueron:

- 1) *The influence of an extended optical mode on the performance of micro-cavity forced oscillator*, H. Avalos-Sanchez, E. Y. Hernandez-Méndez, E. Nieto-Ruiz, A. J. Carmona Carmona, M.A. Palomino-Ovando, M. Toledo-Solano, Khashayar Misaghian, Jocelyn Faubert, y J. Eduardo Lugo, *Aceptado en: Proceedings of Trends in Electronics and Health Informatics (TEHI 2022)*.

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	7
1.1. ANTECEDENTES	7
1.2. OBJETIVOS	11
1.3. ESTRUCTURA DEL TRABAJO	12
2. MARCO TEÓRICO	15
2.1. ECUACIONES DE MAXWELL	15
2.2. CONDICIONES DE FRONTERA	17
2.3. MATRIZ DE TRANSFERENCIA	19
2.4. MODO LOCALIZADO	28
2.5. METALES	31
2.6. EFECTOS DE TAMAÑO FINITO	34
3. INDUCCIÓN DE FUERZAS EN UN ESPEJO DE BRAGG SIN FUENTE DE PÉRDIDAS	41
3.1. CÁLCULO ANALÍTICO DE LA FUERZA SOBRE UN ESPEJO DE BRAGG	42
3.2. CÁLCULO NUMÉRICO DE LA FUERZA SOBRE UN ESPEJO DE BRAGG	44
3.3. CÁLCULO NUMÉRICO DE LA FUERZA SOBRE UN FOTODINO	48
4. INDUCCIÓN DE FUERRZAS EN UN ESPEJO DE BRAGG CON FUENTE DE PÉRDIDAS	55
4.1. CÁLCULO ANALÍTICO DE LA FUERZA SOBRE UN ESPEJO CON PÉRDIDAS	56
4.2. CÁLCULO NUMÉRICO DE LA FUERZA SOBRE UN ESPEJO CON PÉRDIDAS	58
4.3. RESULTADOS EXPERIMENTALES	64

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE GENERAL

4.3.1. ESPECTROFOTÓMETRO	68
4.3.2. VIBRÓMETRO	71
Conclusiones	75
APÉNDICE A	77
APÉNDICE B	99

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. ANTECEDENTES

Conviene dar inicio a este trabajo respondiendo a la siguiente pregunta: ¿Qué son los cristales fotónicos?

Los cristales fotónicos son un tipo de estructuras artificiales que, en las últimas dos décadas, han surgido como un medio prometedor para controlar la dinámica de la radiación de materiales activos y la propagación de la radiación electromagnética en formas no permitidas por los materiales convencionales. En esencia, un cristal fotónico es un material en el que el índice de refracción se modula periódicamente en una escala de longitud comparable a la longitud de onda de la luz o, dicho de otra manera, son estructuras, generalmente dieléctricas, hechas de capas alternantes, de tal manera que su índice de refracción posee un comportamiento espacialmente periódico [1].

La periodicidad referida anteriormente puede tomar lugar a lo largo de una, dos o tres dimensiones. Geométricamente, estas dimensiones pueden representarse por ejes cartesianos, de tal manera que la periodicidad tratada se resume en periodicidad a lo largo de uno, dos o tres ejes cartesianos.

El cristal fotónico más simple que se considera es uno unidimensional conocido como “reflector o espejo de Bragg”. En él, la periodicidad toma lugar a lo largo de una dimensión (véase la figura 1.1). El contraste (diferencia) entre los índices de refracción de sus capas consecutivas, así como el grosor de las

1.1. ANTECEDENTES

mismas y su número, hace que la forma de la relación de dispersión se desvíe de la que poseen los materiales constituyentes y aparezca como un conjunto de intervalos de frecuencias (o longitudes de onda) permitidas y prohibidas. Para aquellas frecuencias contenidas dentro de estas brechas (“Gaps”), el vector de onda asociado toma valores imaginarios y la luz que se propaga a lo largo del cristal con esas frecuencias se atenúa exponencialmente [1].

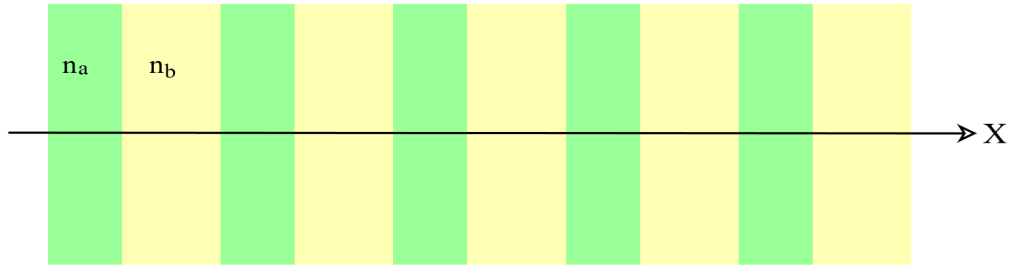


Figura 1.1: Vista transversal de un espejo de Bragg compuesto por capas alternantes de dos dieléctricos diferentes (con índices de refracción n_a y n_b respectivamente). La periodicidad del índice de refracción se da cada dos capas consecutivas (i.e. un periodo está conformado por dos capas consecutivas), a lo largo de la dirección perpendicular a las mismas y que, en este caso, fue asociada con el eje X .

En términos de la reflectancia, los Gaps mencionados anteriormente quedan representados por crestas en la reflectancia, pues, en tales intervalos, la luz incidente no se puede propagar por el espejo de Bragg (o le es muy difícil hacerlo). El punto máximo de la mayor de ellas (en términos de la longitud de onda) puede determinarse mediante la expresión:

$$n_i d_i \cos \theta_i = \frac{\lambda}{4},$$

en donde $n_i d_i$ son, respectivamente, el índice de refracción y el espesor del material i ($i=1,2$) de las capas del espejo de Bragg; mientras que $\cos \theta_i$ es el ángulo con el cual la luz incide en la capa i ; a la vez que λ es la longitud de

onda para la cual se tiene el máximo de reflectancia. A este tipo de condición se le llama "condición de un cuarto de longitud de onda".

Para incidencia normal ($\theta_i = 0$), la expresión anterior queda como:

$$n_i d_i = \frac{\lambda}{4}.$$

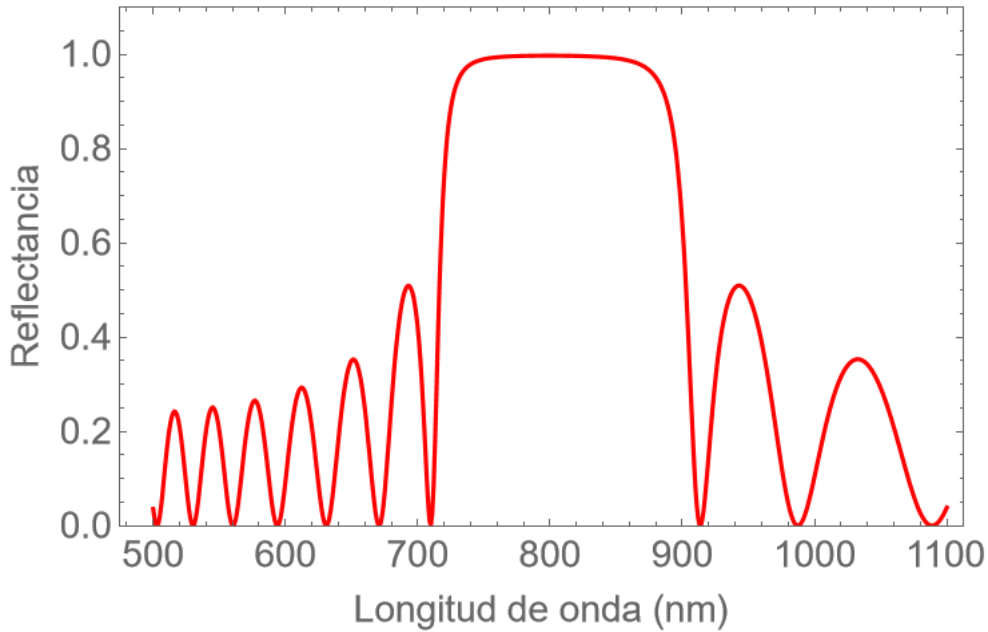


Figura 1.2: Gráfica, a incidencia normal, de la reflectancia teórica de un espejo de Bragg de veinticuatro capas y un cuarto de longitud de onda de $800nm$. EL centro de la cresta (i.e el punto de mayor valor) es encuentra, justamente, sobre los $800nm$

Es importante hacer notar que, entre mayor sea el número de capas del espejo de Bragg, más definido (cuadrado) se hace el gap fotónico (i.e. la cresta de reflectancia). Esto se debe a que, en la teoría, los cristales fotónicos poseen un número infinito de capas y, asimismo, un gap totalmente definido. Así pues, entre más capas tenga el cristal analizado, más se va a parecer a lo descrito por la teoría.

Sin embargo, las propiedades de los espejos de Bragg van más allá de la formación de intervalos de frecuencias (o longitudes de onda) permitidas y prohibidas. Por ejemplo, existen maneras tanto mecánicas como electromagnéticas para juntar dos de ellos de tal manera que, entre su unión, se forma una microcavidad de aire. Variables tales como el ancho de la microcavidad y la estructura de los espejos de Bragg hacen que sea capaz de alojar y amplificar ciertos campos electromagnéticos (o modos de luz). Para estos modos amplificados se han encontrado aplicaciones en el campo de la fotónica no lineal [2], la electrodinámica de cavidades cuánticas [3], la optomecánica [4] y los microláseres [5]. Además, las microcavidades se pueden configurar para diversas aplicaciones de detección química o biomolecular [6, 7]. También, la luz aumentada por la microcavidad puede ser usada en la absorción de celdas solares orgánicas y así mejorar su rendimiento [8]. Por otro lado, los efectos de resonancia de la luz confinada en las microcavidades se pueden usar para aumentar la fuerza de presión de radiación en micromotores impulsados por ondas electromagnéticas [11]. De manera remarcada, el concepto de presión de radiación se ha utilizado para manipular microobjetos y organismos biológicos. Finalmente, las trampas ópticas se basan en la fuerza de presión de radiación resultante de transferencia de momento fotónico; incluyen las primeras configuraciones de levitación óptica y las pinzas ópticas [9, 10].

En este trabajo se trata la presión de radiación que la luz ejerce sobre un espejo de Bragg. Esta última puede ser entendida como el promedio temporal de la fuerza electromagnética neta por unidad de área que se hace presente en todo el cristal. Este concepto no es para nada nuevo, pues ya se ha usado, teórica y experimentalmente, para impulsar veleros solares. Esto es, en pocas palabras, una forma de usar la misma radiación como medio de propulsión. Sin embargo, tal presión es, en términos macroscópicos, muy pequeña [12]. Esto implica que se necesita una gran superficie irradiada para producir una fuerza significativa. Así pues, esto invita al desarrollo de nuevos materiales, ultra-livianos y resistentes, así como al seguimiento del estudio de tal presión.

La idea de estudiar la presión de radiación sobre espejos de Bragg ya se ha tratado previamente. En particular, los efectos más estudiados hasta ahora son los modos de vibración que posee un sistema formado por dos espejos de Bragg puestos uno sobre otro, de tal manera que quede un espacio de aire

1.2. OBJETIVOS

entre ellos (esto es un espejo de Bragg con un defecto de aire y se discutirá a detalle en la sección [2.4]); y que es irradiado por un láser de $633nm$ [16, 17].

En la figura 1.3 [16] se muestra un esquema del espejo de Bragg con defecto de aire, así como sus modos de vibración. Estos últimos fueron medidos con el mismo vibrómetro que se usó para elaborar el reporte experimental de este trabajo de tesis.

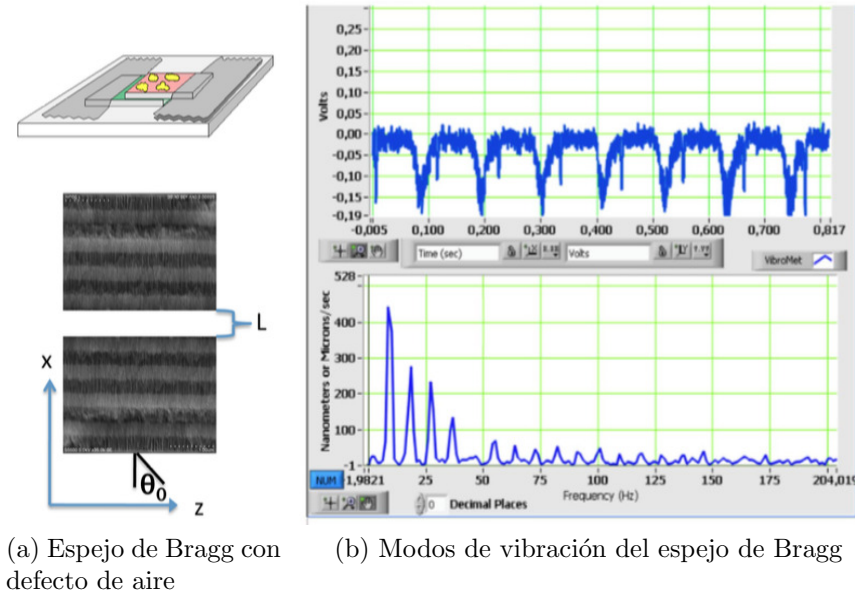


Figura 1.3

1.2. OBJETIVOS

Las principales metas de este trabajo de tesis se presentan a continuación:

1. Analizar la respuesta óptica de las multicapas usando el método de matriz de transferencia, el cual describe la respuesta óptica global en términos del comportamiento de la luz en capas continuas.

1.3. ESTRUCTURA DEL TRABAJO

2. Describir a la fuerza electromagnética a través de las densidades de fuerzas volumétricas, mediante la fuerza de Lorentz, y las densidades de fuerzas superficiales, mediante la carga de polarización, respectivamente.
3. Obtener expresiones analíticas de las fuerzas dentro, paralela y perpendicular a las multicapas con medio con pérdidas.
4. De ser posible, medir experimentalmente las fuerzas electromagnéticas sobre la estructura.

1.3. ESTRUCTURA DEL TRABAJO

El cuerpo de este trabajo de tesis se dividió en las siguientes partes:

En el capítulo 2 se encuentra el marco teórico, en el cual se exponen las ecuaciones de Maxwell y sus resultados más inmediatos, tales como las condiciones de frontera. Además, se expone el método de la matriz de transferencia, el modo localizado y el comportamiento electromagnético de los metales.

En el capítulo 3 se encuentra el desarrollo analítico para las densidades de fuerzas electromagnéticas que se hacen presentes en un espejo de Bragg sin fuente de pérdidas cuando se le hace incidir luz. El resultado se corrobora y complementa con un desarrollo numérico elaborado en el software mathematica 12.

En el capítulo 4 se encuentra el desarrollo analítico para las densidades de fuerzas electromagnéticas que se hacen presentes en un espejo de Bragg con fuente de pérdidas (oro, en este caso) cuando se le hace incidir luz. El resultado se corrobora y complementa con un desarrollo numérico elaborado en el software mathematica 12. Además, en este caso se añade un reporte experimental, en el cual se pone de manifiesto qué tanto se apegan o se alejan la teoría y el experimento, así como una explicación del porqué.

La última parte consta de las conclusiones, los apéndices en los cuales se

1.3. ESTRUCTURA DEL TRABAJO

demuestran varios de los resultados de los capítulos 3 y 4, la bibliografía y las referencias.

1.3. ESTRUCTURA DEL TRABAJO

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

En este capítulo se hace una recopilación y breve explicación de los principales postulados y resultados teóricos que poseen aplicación directa en los siguientes capítulos.

2.1. ECUACIONES DE MAXWELL

La base teórica de los desarrollos analíticos posteriormente presentados en este trabajo descansa en su totalidad sobre las ecuaciones de Maxwell, las cuales son un conjunto de cuatro ecuaciones que conforman el formalismo de la electrodinámica clásica y que, desde su perspectiva, describen por completo los fenómenos electromagnéticos. Tales ecuaciones poseen una representación diferencial y una integral, las cuales, respectivamente, analizan propiedades puntuales y globales de los campos electromagnéticos [13].

En el sistema internacional de unidades, la representación diferencial viene dada por:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} , \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 , \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} . \quad (2.4)$$

Siendo: $\vec{E}$ el campo eléctrico, $\vec{B}$ es el campo de inducción magnética, $\vec{J}$ es el campo de densidad de corriente volumétrica, ρ es la densidad de carga volumétrica, ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío y μ_0 es la permitividad magnética del vacío. En principio, los campos vectoriales involucrados, junto con ρ , pueden depender tanto del espacio como del tiempo. Las ecuaciones (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4) son conocidas, respectivamente, como las representaciones diferenciales de la ley de Gauss eléctrica, la ley de Gauss magnética, la ley de Faraday y la ley de Ampere generalizada.

Estas expresiones también poseen una representación integral. Es posible pasar de una representación a la otra haciendo uso de los teoremas integrales de Gauss y Stokes.

Las ecuaciones anteriores se aplican al pie de la letra siempre y cuando los campos en cuestión se encuentren en el vacío. Sin embargo, si se encuentran existiendo en algún medio material, es necesario agregar dos relaciones más para así tener una descripción completa de los fenómenos electromagnéticos. Estas son llamadas “ecuaciones constitutivas” y vienen dadas por:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} , \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{B} = \vec{H} + \vec{M} . \quad (2.6)$$

En lo anterior, $\vec{D}$ es el campo de desplazamiento eléctrico, $\vec{H}$ es el campo magnético, $\vec{P}$ es el campo de polarización del material y $\vec{M}$ es su campo de magnetización.

2.2. CONDICIONES DE FRONTERA

Es importante que se ponga de manifiesto que, en este caso, $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son los campos totales dentro y fuera del medio material (es decir, son los capaces de ejercer algún tipo de fuerza), mientras que $\vec{D}$ y $\vec{H}$ son una medida de su presencia dentro de él y $\vec{P}$ y $\vec{M}$ son una medida de qué tanto se ve afectado por esta. Por lo tanto, si no se ve significativamente afectado, entonces $\vec{P}$ y $\vec{M}$ pueden considerarse nulos en él. De esta manera, se obtiene:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} , \quad (2.7)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} . \quad (2.8)$$

Esto quiere decir que, en tal caso, $\vec{D}$ es proporcional a $\vec{E}$ y $\vec{B}$ es proporcional a $\vec{H}$.

Experimentalmente se demuestra que la inmensa mayoría de los materiales no poseen una gran respuesta a la inducción magnética, es decir, que el campo de magnetización producido en ellos es muy débil. En vista de esto, no se pierde generalidad al suponer que la ecuación (2.12) es válida para una gran gama de materiales, incluidos los analizados en este trabajo de tesis.

2.2. CONDICIONES DE FRONTERA

Uno de los resultados más inmediatos que se desprenden de las ecuaciones de Maxwell, son las condiciones que satisfacen los campos eléctrico y magnético en la interfaz que divide dos medios cargados; también llamadas “condiciones de frontera”. A continuación se brinda un ejemplo de su deducción [13]:

Supóngase que, en la interfaz que divide dos medios, se coloca un cilindro de Gauss tan pequeño que, localmente, la interfaz en cuestión se comporta como un plano. Supóngase además que el cilindro en cuestión posee sus tapas en una orientación paralela a la interfaz y que ésta lo atravieza por la mitad de su parte curva. Por último, supónase que las tapas del cilindro poseen área A y que el cuerpo curvo del cilindro es tan pequeño que puede ser ignorado para cualquier propósito (véase la figura 2.1).

2.2. CONDICIONES DE FRONTERA

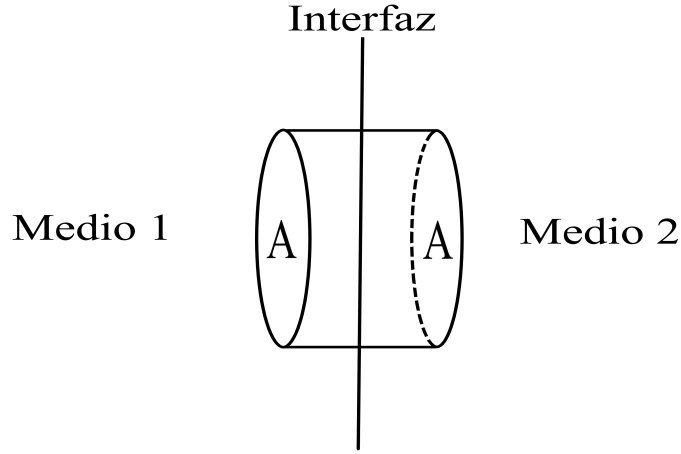


Figura 2.1: Cilindro de Gauss en la interfaz entre dos medios tratados

Si se considera que las tapas A del cilindro son tan pequeñas que sólo pueden contener a un vector de campo eléctrico y se le aplica la ley de Gauss en forma integral, es decir, la ecuación (2.5), se obtiene:

$$\vec{E}_1 \cdot A\vec{n}_1 + \vec{E}_2 \cdot A\vec{n}_2 = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} ,$$

siendo $\vec{E}_i$ el campo eléctrico que se encuentra en el medio i , $\vec{n}_i$ la normal exterior de la tapa del cilindro que se encuentra en el medio i y σ la densidad de carga superficial de la parte de la interfaz que es atrapada por el cilindro.

Nótese que no se considera ninguna contribución del cuerpo curvo del cilindro ya que este se supuso como despreciable en todo sentido.

Cancelando A de ambos lados de la igualdad, notando que por simetría $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$ y realizando los productos puntos indicados, se obtiene:

$$E_{n1} - E_{n2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} . \quad (2.9)$$

En lo anterior, E_{ni} es la componente del campo eléctrico que se encuentra en

el medio i y que es normal a la tapa del cilindro que también se encuentra en ese medio.

Ahora, recuérdese que el cuerpo curvo del cilindro se considero infinitamente pequeño. Esto permite asegurar que las componentes normales calculadas están evaluadas prácticamente en el mismo punto, que, por supuesto, resulta ser un punto de la interfaz divisora de los medios considerados. Así pues, la ecuación (2.13) puede mantenerse, siempre y cuando se recuerde que las componentes normales en cuestión están evaluadas en la interfaz tratada.

De manera análoga, haciendo uso de la ecuación (2.7) y suponiendo que en el sistema tratado no existe variación temporal de flujo magnético, se llega a que las componentes tangenciales del campo eléctrico evaluadas en cualquier punto de la interfaz satisfacen la siguiente igualdad:

$$E_{t1} = E_{t2} . \quad (2.10)$$

Y algo similar puede deducirse para las componentes de normales y tangenciales de $\vec{B}$ a la interfaz:

$$B_{n1} = B_{n2} , \quad (2.11)$$

$$B_{t1} - B_{t2} = K . \quad (2.12)$$

En lo anterior, K es la densidad de corriente superficial de la interfaz.

Al conjunto conformado por las ecuaciones (2.13), (2.14), (2.15) y (2.16) es a lo que comúnmente se le llama “condiciones de frontera”.

2.3. MATRIZ DE TRANSFERENCIA

Una consecuencia directa de las condiciones de frontera es el así llamado “método de la matriz de transferencia”. En él se analizan las condiciones de

2.3. MATRIZ DE TRANSFERENCIA

frontera que satisfacen los campos electromagnéticos en las interfaces divisoras que poseen dos o más medios. El resultado del tal análisis se ordena en una matriz llamada “matriz de transferencia”. A continuación se da un resumen del análisis mencionado [1] :

Los campos electromagnéticos de los rayos de luz que inciden en un medio se pueden descomponer en componentes paralelas y perpendiculares al plano de incidencia, de tal manera que cada uno de ellos puede verse como una combinación lineal de tales componentes. Esto, a fin de cuentas, da lugar a que tales campos se clasifiquen en dos grupos: transversoelectrónicos, en el caso de que el campo eléctrico sea perpendicular al plano de incidencia; y transversomagnéticos, en el caso de que ahora sea el campo magnético el perpendicular al plano de incidencia.

Ahora supóngase que en el plano $Z - Y$ se tiene una interfaz que divide a dos medios y que el campo eléctrico incidente está en la dirección de $\hat{y}$. Esto hace que el plano de incidencia sea el $Z - X$ y que el campo mencionado se encuentre paralelo a la interfaz o, en otras palabras, que los vectores de onda de la luz tratada se encuentren dentro del plano $Z - X$ (véase la figura 2.2).

Por convención, se llama “medio 1” al que se encuentra sobre las coordenadas x negativas y “medio 2” al que se encuentra sobre las positivas. Además, se denotan por $\vec{k}_1$ al vector de onda de la luz que incide del medio 1 al 2, por $\vec{k}'_1$ al que es reflejado por el medio 2 (de vuelta al medio 1), por $\vec{k}_2$ al que se transmite del medio 1 al 2 y por $\vec{k}'_2$ a cualquier luz que pueda provenir desde la dirección del medio 2 (véase la figura 2.2).

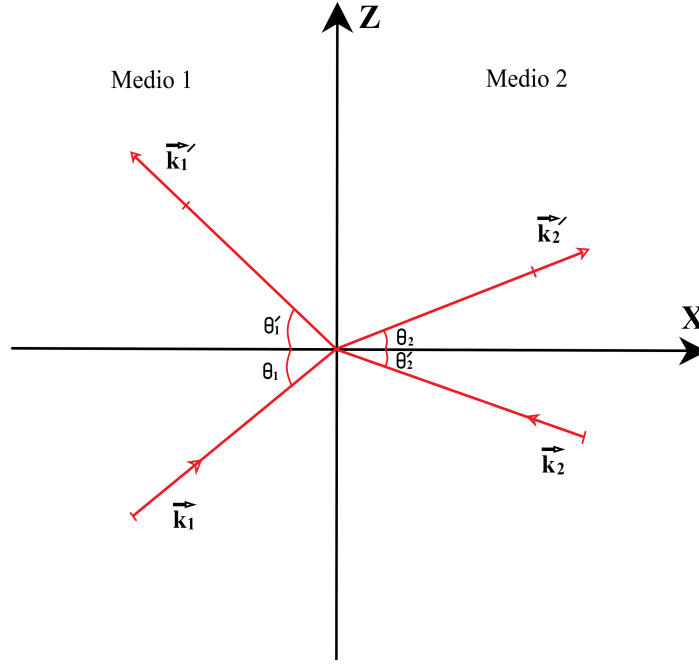


Figura 2.2: Dos medios en contacto

En vista de lo planteado, la condición de frontera (2.14) se traduce en que:

$$E_1 + E'_1 = E_2 + E'_2 ,$$

siendo E_1 el módulo del campo eléctrico indidente desde el medio 1, E'_1 su análogo reflejado y E_2, E'_2 sus análogos en el medio 2.

De la figura 2.2 se sigue que:

$$\hat{k}_1 = (\cos \theta_1, 0, \sin \theta_1) \quad , \quad \hat{k}'_1 = (-\cos \theta'_1, 0, \sin \theta'_1)$$

$$\hat{k}_2 = (\cos \theta_2, 0, \sin \theta_2) \quad , \quad \hat{k}'_2 = (-\cos \theta'_2, 0, \sin \theta'_2)$$

2.3. MATRIZ DE TRANSFERENCIA

Haciendo uso de las ecuaciones de Maxwell puede demostrarse que, para los medios considerados en este trabajo, se cumple la igualdad:

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{k} \times \vec{E} .$$

De esta manera, se pueden obtener el campo magnético que corresponde a cada campo eléctrico tratado. Las componentes en Z de los resultados son:

$$H_{1z} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_1 \cos \theta_1 \quad , \quad H'_{1z} = -\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E'_1 \cos \theta_1$$

$$H_{2z} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E_2 \cos \theta_2 \quad , \quad H'_{2z} = -\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E'_2 \cos \theta_2$$

Bajo el supuesto de que no existe ninguna corriente neta en el sistema tratado, la condición de frontera (2.16) y la igualdad (2.12) dan como resultado que la componente de $\vec{H}$ que es tangencial a la interfaz se mantiene igual al pasar de un medio a otro. Pero tal componente es justamente la componente Z calculada. De esta manera, se obtiene:

$$H_{1z} + H'_{1z} = H_{2z} + H'_{2z} .$$

Si en la igualdad anterior se sustituyen los valores obtenidos para las componentes consideradas y se supone $\theta_1 = \theta'_1$, $\theta_2 = \theta'_2$, se llega a:

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (E_1 - E'_1) \cos \theta_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} (E_2 - E'_2) \cos \theta_2 .$$

Ordenado de forma matricial, lo anterior se representa por:

$$D_1 \begin{pmatrix} E_1 \\ E'_1 \end{pmatrix} = D_2 \begin{pmatrix} E_2 \\ E'_2 \end{pmatrix} ,$$

en donde:

$$D_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\frac{\epsilon_i}{\mu_i}} \cos \theta_i & -\sqrt{\frac{\epsilon_i}{\mu_i}} \cos \theta_i \end{pmatrix} ; \quad i = 1, 2 .$$

Lo anterior también puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E'_1 \end{pmatrix} = D_1^{-1} D_2 \begin{pmatrix} E_2 \\ E'_2 \end{pmatrix} .$$

Es importante que se ponga de manifiesto que, en este caso, se analizó el caso transversoelectrico, pues tal campo se tomó como paralelo a la interfaz y, por lo tanto, transversal al plano de incidencia. El caso transversomagnético da un resultado similar.

Independientemente del caso analizado, lo importante es que se obtiene una relación matricial entre las amplitudes a cada lado de una interfaz. Las matrices que permiten tal relación son denotadas como D y son conocidas como “Matrices dinámicas”.

Supóngase ahora que se tiene una cierta estructura compuesta de un gran número de bloques dieléctricos de espesor d puestos en contacto uno detrás del otro (i.e. un cristal fotónico). Además, supóngase que las interfaces de contacto y los campos eléctricos existentes cumplen las mismas condiciones que en los dos medios anteriormente tratados. Es posible relacionar las amplitudes de los campos existentes en caras opuestas de un mismo bloque mediante el siguiente procedimiento:

Todo campo electromagnético existente dentro de uno de los bloques puede descomponerse en una onda viajando a la derecha y otra viajando a la izquierda. La expresión escalar para dichas ondas, está dada, respectivamente, por:

$$Re^{-ikx} \quad , \quad Le^{ikx} ,$$

2.3. MATRIZ DE TRANSFERENCIA

siendo R y L amplitudes constantes (ya sea reales o complejas) y siendo k la componente x del vector de onda existente en el bloque considerado.

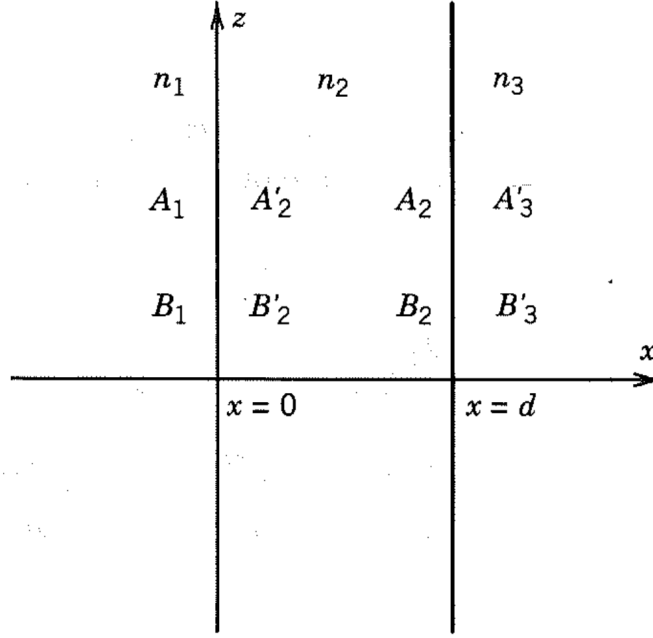


Figura 2.3: Estructura de bloques; para cada uno de ellos, las amplitudes en su pared izquierda son tildadas con primas y, las de su derecha, no.

Restrínjase el análisis al bloque central de la figura 2.3 y se considérese que se va a denotar por A' a evaluación en la interfaz izquierda (en $x = 0$) de las amplitudes de las ondas viajando a la derecha y por B' a su análogo perteneciente a las ondas viajando a la izquierda. De esta manera se obtiene que:

$$Re^{-ikx}\big|_{x=0} = A'_2 \quad , \quad Le^{ikx}\big|_{x=0} = B'_2$$

$$\Longleftrightarrow \quad R = A'_2 \quad , \quad L = B'_2$$

Realizando un tratamiento análogo para la interfaz derecha (en $x = d$) se llega a:

2.3. MATRIZ DE TRANSFERENCIA

$$Re^{-ikd} = A_2 \quad , \quad Le^{ikd} = B_2 .$$

Si el bloque de ecuaciones antepasado se sustituye en el pasado y el resultado se ordena en forma matricial, se llega a:

$$\begin{pmatrix} e^{-ikd} & 0 \\ 0 & e^{ikd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_2 \\ B'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} .$$

Multiplicando por la matriz inversa se llega a:

$$\begin{pmatrix} A'_2 \\ B'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ik_2d} & 0 \\ 0 & e^{-ik_2d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} ,$$

en donde se ha añadido el subíndice 2 en la componente x del vector de onda para así poner de manifiesto en número de bloque que se está tratando.

Acaba de obtenerse una relación matricial entre las amplitudes existentes en caras opuestas de un mismo bloque. Usualmente, se denota por P a las matrices que periten tal relación; y se nombran “Matrices de propagación”.

Los dos resultados anteriores (i.e. las matrices D y P) pueden juntarse y generalizarse, para así dar una relación matricial entre las amplitudes de los campos que inciden, existen y salen en y de un cierto cristal fotónico. Si se supone que el cristal fotónico está compuesto por N bloques de material, el resultado es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_s \\ B'_s \end{pmatrix} ,$$

siendo:

$$M := \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = D_0^{-1} [\prod_{l=1}^N D_l P_l D_l^{-1}] D_s ,$$

2.3. MATRIZ DE TRANSFERENCIA

en donde A_0, B_0 son las amplitudes de los campos incidentes desde el aire y hacia el cristal, D_0 es la matriz dinámica asociada a la pared de aire que está en contacto con la primera capa del cristal, D_l es la asociada a el extremo izquierdo de la capa l , P_l es la matriz de propagación asociada a esa misma capa y A'_s, B'_s son las amplitudes que salen del cristal y se transmiten hacia una cierta capa de sustrato con el que está en contacto la última capa del cristal en cuestión (en la práctica, los cristales fotónicos se hacen crecer sobre sustratos).

Usualmente, a la matriz M es a lo que se le conoce como “MATRIZ DE TRANSFERENCIA DEL CRISTAL”.

► Nota: En un cristal de N periodos con eje (dirección de cambio de su índice de refracción) paralelo a un cierto eje X , las amplitudes de la parte espacial (en ese eje) de los campos eléctricos y magnéticos existentes en su capa l suelen representarse mediante expresiones de la forma:

$$A_l e^{iK(x-x_l)} + B_l e^{-iK(x-x_l)} . \quad (2.13)$$

Esto se debe a que, en general, se busca que sus amplitudes sean máximas (iguales a $A_l + B_l$) evaluadas en la interfaz que define a la capa en cuestión, es decir, evaluadas en $x = x_l$

En general, la parte temporal de los campos trados se ignora siempre y cuando no se esté trabajando con parciales con respecto al tiempo, pues tal parte puede añadirse simplemente multiplicando por $e^{\pm i\omega t}$.

■

Puede demostrarse que, respectivamente, la transmitancia y la reflectancia del sistema están dadas por:

$$T = \frac{n_s \cos \theta_s}{n_0 \cos \theta_0} \frac{1}{|M_{11}|^2} , \quad R = \left| \frac{M_{21}}{M_{11}} \right|^2 ,$$

siendo n_s el índice de refracción del sustrato, θ_s el ángulo con el cual la luz

incide a este, n_0 el índice de refracción del aire y θ_0 el ángulo con el cual la luz incide, desde el aire, a la primera capa del cristal.

Todos los elementos de la matriz M están relacionados con la componente en X del vector de onda de la luz, pues las matrices P lo contienen en sus entradas. Tal componente, a su vez, puede escribirse como:

$$k_l = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta_l ,$$

siendo k_l la componente x del vector de onda que existe en la capa l del cristal, θ_l el ángulo con el que la luz incide en la capa y λ su longitud de onda. De esta manera, es posible poner a la transmitancia y a la reflectancia en función de la longitud de onda de la luz incidente. Esto es especialmente útil a la hora de usar software (Wolfram Mathematica, por ejemplo) para calcular tales cantidades, pues pueden hacerse rutinas en las cuales se tome como variable la longitud de onda y así graficar la transmitancia y la reflectancia para intervalos determinados de tal longitud.

En adición a lo anterior, también es posible deducir la expresión para la así llamada “Matriz de propagación de un periodo”, la cual relaciona las amplitudes incidentes y salientes de un periodo del cristal y está dada por:

$$D_1^{-1} D_2 P_2 D_2^{-1} D_1 P_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} ,$$

siendo:

$$A = e^{ik_1 a} \left[\cos k_2 b + \frac{1}{2} i \left(\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} \right) \sin k_2 b \right] ,$$

$$B = e^{-ik_1 a} \left[\frac{1}{2} i \left(\frac{k_2}{k_1} - \frac{k_1}{k_2} \right) \sin k_2 b \right] ,$$

$$C = e^{ik_1 a} \left[-\frac{1}{2} i \left(\frac{k_2}{k_1} - \frac{k_1}{k_2} \right) \sin k_2 b \right] ,$$

2.4. MODO LOCALIZADO

$$D = e^{-ik_1 a} \left[\cos k_2 b - \frac{1}{2} i \left(\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} \right) \sin k_2 b \right] ,$$

en donde se ha supuesto que el cristal fotónico está compuesto por un intercalamiento de capas con longitudes a y b .

El producto de matrices $D_1^{-1} D_2 P_2 D_2^{-1} D_1 P_1$ representa el paso de la primera capa del cristal a la tercera (véase la figura 1.1). Lo cual, evidentemente, representa el primer periodo del cristal. Por simetría, puede asegurarse que cualquier otro periodo posee las mismas propiedades que el primera y que, por lo tanto, puede representarse por el mismo producto de matrices. Esto mismo permite asegurar que todas las matrices D que corresponden a capas separadas por un periodo son iguales; y algo análogo sucede con las matrices P .

De esta manera, la matriz de transferencia del cristal puede reescribirse como:

$$M = D_0^{-1} D_1 P_1 \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^N P_1^{-1} D_1^{-1} D_s ,$$

siendo N el número total de periodos del cristal.

2.4. MODO LOCALIZADO

La aplicación del método de la matriz de transferencia a un espejo de Bragg que posea dos o más capas consecutivas de un mismo material (puede ser alguno de los materiales constituyentes de las capas del espejo o, inclusive, aire) da como resultado una brecha en al menos una de sus crestas de reflectancia, esto es, una pequeña banda de transmitancia máxima dentro de la cresta mencionada. Esto quiere decir que hay un pequeño intervalo de longitudes de onda dentro de las bandas prohibidas (intervalos de longitudes de onda que no se pueden propagar en el medio) que se sí pueden propagar por el espejo [1].

A la repetición consecutiva de capas se le llama “defecto del espejo de Bragg” y, a las longitudes de onda (o frecuencias) que conforman las brechas en la reflectancia, se les llama “modos localizados”.

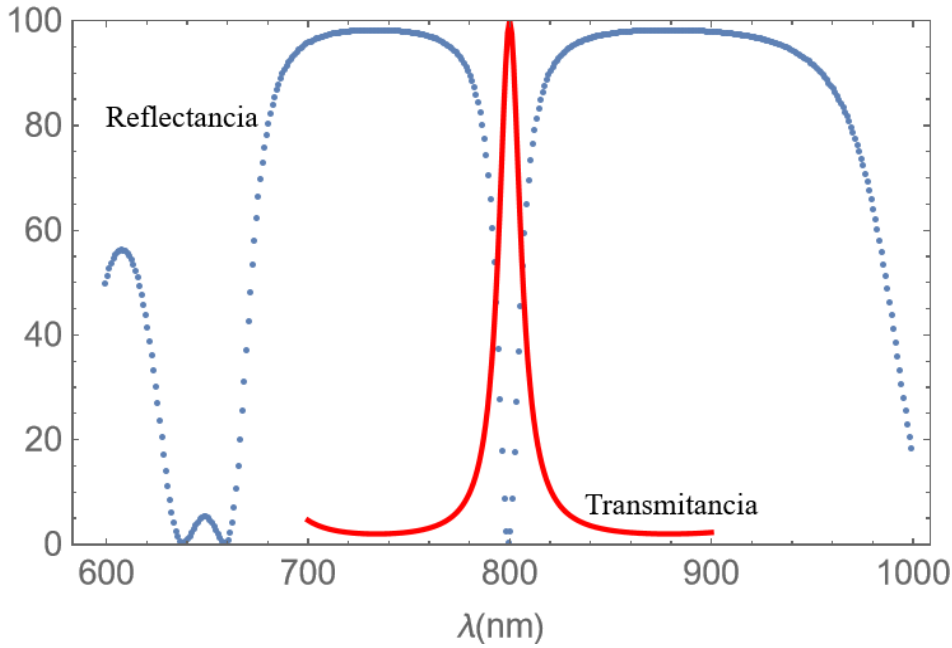


Figura 2.4: Modo localizando en un espejo de Bragg de un cuarto de longitud de onda de 800 nm, con intercalación de índices de refracción dada por: $n_1 = 1.4$, $n_2 = 2$. La reflectancia está representada por la gráfica punteada y, la transmitancia, por la continua.

Este comportamiento se debe a que un espejo de Bragg con un defecto se comporta de manera similar a un pozo cuadrado infinito cuántico. Las paredes del pozo están representadas por los pedazos de espejo a lado del defecto y, el pozo en sí, está representado por el defecto en cuestión. En el caso del pozo, las partes reales de los estados estacionarios de las partículas que pueden encontrarse en él son funciones periódicas con longitudes de onda cuyas mitades caben un múltiplo entero de veces en la anchura del pozo, es decir, que en dicha anchura caben $n/2$ longitudes de onda (n en los naturales). En el caso del espejo, lo que sucede es que los modos de luz que se pueden localizar en su defecto poseen una longitud de onda cuya mitad cabe un número entero de veces en la longitud del defecto (por “longitud del

2.4. MODO LOCALIZADO

defecto”, entiéndase “el largo de los lados más cortos del prisma rectangular que compone al defecto”).

Otro resultado relevante que se obtiene es que las amplitudes de los campos eléctricos (y, por supuesto, también magnéticos) de los modos localizados son máximas en el interior del defecto. Una vez que se alejan del él, decaen exponencialmente. Lo anterior quiere decir que la parte más relevante de la existencia del modo localizado se da dentro del defecto. Así pues, lo anterior se asemeja al efecto túnel de la mecánica cuántica, en el cual una partícula puede llegar a localizarse dentro de una cavidad que está rodeada por una barrera de potencial que excede la energía de la partícula y que, por lo tanto, debería impedirle el paso (desde el punto de vista de la mecánica clásica).

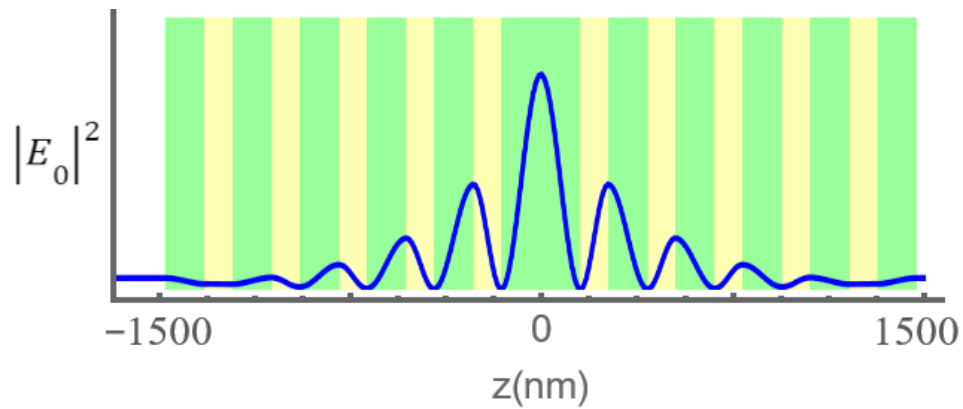


Figura 2.5: Amplitud representativa ($|E_0|^2$) de un modo localizando de luz de $800nm$ en un espejo de Bragg con un defecto central y con intercalación de índices de refracción dada por: $n_1 = 1.4$, $n_2 = 2$.

Es importante que se ponga de manifiesto que, el hecho de que las amplitudes sean máximas dentro del defecto, implica que la intensidad de los campos en cuestión también es máxima en él.

De esta manera, es evidente que los modos localizados se localizan, justamente, en el interior del defecto.

2.5. METALES

Conviene iniciar esta sección tratando el modelo de Drude, también conocido como “modelo de Drude los portadores libres”. Tal modelo es un análisis clásico que se enfoca comportamiento de los materiales conductores ante campos electromagnéticos. En particular, proporciona una base para analizar la conductividad de los metales (entendida como la capacidad de los mismos para dejar pasar corriente a través de ellos) [13].

Según este modelo, un material conductor está formado, microscópicamente, por una red cristalina en la que existen tanto electrones ligados como electrones libres de moverse por la red. Los electrones ligados están sometidos a una fuerza elástica que los hace oscilar alrededor de los iones de carga positiva, mientras que los electrones libres son los responsables de la conductividad.

► Nota: Los electrones libres también son llamados “portadores libres”, brindándole así se nombre a este modelo.

Lo anterior puede verse, a groso modo, como que el material contiene tanto iones positivos relativamente inmóviles como a un cierto “gas de electrones clásicos” que no interactúan entre sí, que posee densidad n y donde el movimiento de cada uno se encuentra amortiguado por una fuerza de fricción producto de las colisiones de los electrones con los iones y que es caracterizado por un tiempo de relajamiento τ .

Según la segunda ley de Newton, el movimiento de los portadores libres ante un cierto campo eléctrico está dado por:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m\vec{v}}{\tau} = e\vec{E}_0 e^{-i\omega t} ,$$

en donde m es la masa de los portadores, e es su carga, $\vec{v}$ es su velocidad (conocida como “velocidad de arrastre”), $\frac{m\vec{v}}{\tau}$ es un término de amortiguamiento y $\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ es la contribución del campo eléctrico en cuestión.

2.5. METALES

Como el campo eléctrico tratado posee una oscilación periódica en el tiempo ($e^{-i\omega t}$), entonces la velocidad de los portadores también debe poseer tal oscilación. Así, se obtiene que:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 e^{-i\omega t} .$$

Así, sustituyendo esta última expresión en la penúltima, realizando las derivadas indicadas y haciendo un poco de álgebra se llega a que:

$$\vec{v}_0 = \frac{e\vec{E}_0}{m(1 - i\omega\tau)} .$$

Por otro lado, el campo de densidad de corriente volumétrica ($\vec{J}$) del sistema tratado cumple las siguientes relaciones:

$$\vec{J} = ne\vec{v}_0 = \sigma\vec{E}_0 , \quad (2.14)$$

siendo σ la conductividad del sistema tratado.

Sustituyendo la penúltima igualdad en la última, se llega a que:

$$ne \frac{e\vec{E}_0}{m(1 - i\omega\tau)} = \sigma\vec{E}_0 .$$

Igualando los escalares que acompañan a $\vec{E}_0$ y realizando un poco de álgebra se obtiene que la conductividad proporcionada por el modelo de Drude es:

$$\sigma = \frac{ne^2}{m(1 - i\omega\tau)} . \quad (2.15)$$

Por otro lado, es importante poner de manifiesto que una combinación de las ecuaciones (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.7), (2.8) y (2.14) da lugar a las

ecuaciones de la luz en un medio metálico; y, de estas, se pueden deducir las expresiones para el módulo del vector de onda y el índice de refracción de los metales:

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r + i \frac{\sigma \mu_0}{\omega}}, \quad (2.16)$$

$$n = \frac{c}{\omega} k = \sqrt{\epsilon_r + i \frac{\sigma \mu_0}{\omega}} \quad (2.17)$$

En lo anterior, ω es la frecuencia de la luz incidente en el metal considerado, ϵ_r es su permitividad relativa y c es la rapidez de la luz en el vacío.

Nótese que (2.15) y (2.16) son cantidades complejas y, además, se reducen a las conocidas para los dieléctricos cuando σ se toma como nula. Esto último pone de manifiesto que la diferencia más sustancial entre los metales (conductores) y los dieléctricos (no conductores) es el valor de su conductividad.

En general, los valores de (2.15) y (2.16) están estrictamente relacionados con la longitud de onda que incide en el metal en cuestión. Esto quiere decir que, a fin de cuentas, la función dieléctrica de un metal queda en términos de la longitud de onda de la luz que incida en él.

Por todo lo anterior, una onda electromagnética propagándose en un metal posee campos eléctricos y magnéticos que se expresan espacialmente en formas semejantes a:

$$\vec{E}, \vec{H} = \hat{u} A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} = \hat{u} A e^{i((\vec{k}_r + i\vec{k}_c) \cdot \vec{r})},$$

en donde $\hat{u}$ es un vector unitario en la dirección de $\vec{E}, \vec{H}$, A está relacionada con las amplitudes complejas de los campos y $\vec{k}$ es su vector de onda complejo; con parte real $\vec{k}_r$ y parte imaginaria $\vec{k}_c$.

El módulo de la expresión anterior viene dado por:

2.6. EFECTOS DE TAMAÑO FINITO

$$|\vec{E}, \vec{H}| = |\hat{u} A e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r})} e^{-\vec{k}_c \cdot \vec{r}}| = |A| e^{-\vec{k}_c \cdot \vec{r}}. \quad (2.18)$$

Así pues, tal módulo es una exponencial decreciente, cuyo valor será cada vez más pequeño entre más grande se haga $\vec{r}$, es decir, entre más se adentre la onda en el metal. De esta manera, se concluye que las ondas electromagnéticas se van atenuando conforme penetran en un metal.

Puede demostrarse que, si un campo eléctrico incide en un metal, su intensidad (su módulo cuadrado) cae a $1/e$ de su valor en la superficie cuando penetra una cierta distancia característica dada por:

$$D = \frac{1}{2} \delta = \frac{1}{2} \frac{c}{\omega \operatorname{Im}(n)},$$

siendo δ la así llamada “profundidad de piel del metal”, c el módulo de la velocidad de la luz en el vacío, ω la frecuencia de la luz incidente y $\operatorname{Im}(n)$ la parte imaginaria del índice de refracción del metal.

A esta distancia puede considerarse que la atenuación de la luz ha sido considerable.

► Nota: Experimental, numérica y teóricamente se sabe que la profundidad de piel del oro es de aproximadamente $40nm$ (este dato se usará después) ■

2.6. EFECTOS DE TAMAÑO FINITO

El modelo de Drude descrito en la sección anterior funciona bien para algunos metales como el aluminio. Sin embargo, para metales como el oro y la plata, deja de ser útil en la mayoría de los casos. Aún así, dadas las consideraciones hechas en este trabajo de tesis, tal modelo puede servir como una aproximación decente para tratar el oro.

2.6. EFECTOS DE TAMAÑO FINITO

En pocas palabras, el modelo de Drude no es aplicable para un cierto metal a una cierta longitud de onda si es fácil que tal longitud pueda producir, mediante intercambio energético, que los electrones que se encuentran “atrapados” por los átomos del metal se liberen, alojándose en su capa más externa y convirtiéndose en los así llamados “electrones de conducción”. En otras palabras, lo anterior describe una transición de la banda de valencia a la banda de conducción, es decir, una transición interbanda. Por lo tanto, si estas transiciones fácilmente producidas, entonces el modelo de Drude no es aplicable [14].

Conviene recordar que las bandas de valencia de un metal están asociadas a las mayores energías que poseen los electrones que aún están “fuertemente atadas a sus átomos”. Por otro lado, las bandas de conducción están asociadas a las energías que poseen los electrones que se encuentran relativamente libres en la superficie del metal. Para que un electrón pueda pasar de la banda de valencia a la de conducción es necesario brindarle una cierta energía. El mínimo valor que puede poseer esta energía es denominado “gap energético del metal en cuestión”. Tal valor varía en función de muchos factores, tal como el tipo de metal o su temperatura.

2.6. EFECTOS DE TAMAÑO FINITO

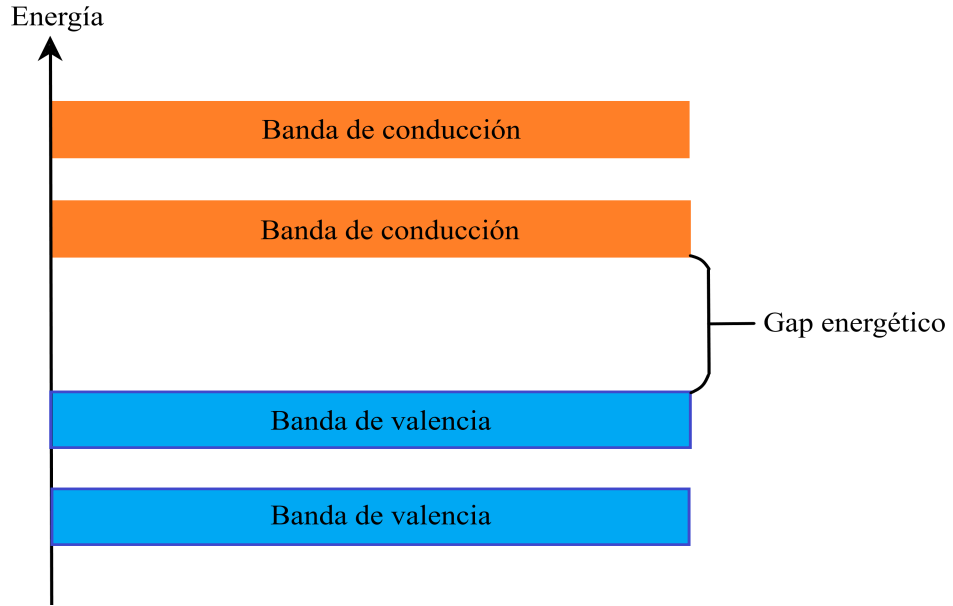


Figura 2.6: Representación esquemática de las bandas de conducción y de valencia. El gap energético está representado por la separación entre la última banda de valencia y la primera de conducción.

La facilidad para realizar transiciones intrabanda en un metal está relacionada, entre otras cosas, con el tamaño de la muestra que se esté analizando: si este tamaño corresponde o es menor al volumen de una esfera de aproximadamente $10nm$ de diámetro (llamado “volumen crítico”), entonces no es tan difícil realizar estas transiciones. En tal caso, la función dieléctrica del metal debe modificarse de la siguiente manera:

$$\epsilon_{tot}(\omega) = \epsilon_{inter}(\omega) + \epsilon_{intra}(\omega) , \quad (2.19)$$

en donde ω es la frecuencia de la luz incidente en la muestra, ϵ_{tot} corresponde a la constante dieléctrica en cuestión, ϵ_{inter} corresponde a la contribución debida a las transiciones interbanda (o al tamaño de la muestra) y ϵ_{intra} corresponde a la contribución debida a las transiciones intrabanda (las que se producen entre bandas del mismo tipo, es decir, las que no corresponden a saltos entre la banda de valencia y conducción). De esta manera, es evidente que, para este caso, es necesario considerar los efectos del tamaño de la

2.6. EFECTOS DE TAMAÑO FINITO

muestra vía la adicción de ϵ_{inter} . A este tipo de consideración se le denomina “efectos de tamaño finito”; brindándole así su nombre a esta sección del trabajo.

En términos generales, la función ϵ_{inter} posee una expresión explícita que viene dada por dos contribuciones: una debida a las mismas contribuciones interbanda y otra debida a los electrones libres del metal. Así pues, puede escribirse que tal función es igual a [14]:

$$\epsilon(\omega, a) = \epsilon_{inter}(\omega) + \epsilon_{e-libres}(\omega, a) , \quad (2.20)$$

en donde $\epsilon_{inter}(\omega)$ es la primera contribución mencionada, $\epsilon_{e-libres}(\omega, a)$ es la segunda y a es el camino libre medio de un electrón del metal tratado.

El término $\epsilon_{e-libres}(\omega, a)$ posee una expresión explícita dada por:

$$\epsilon_{e-libres}(\omega, a) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma_{bulto} + i\frac{v_f}{a})} , \quad (2.21)$$

en donde ω_p^2 es la frecuencia de plasma de los electrones libres (su frecuencia máxima de oscilación), v_f es su velocidad de fermi (la máxima velocidad que podrían tener si el metal se encontrara a cero grados Kelvin) y γ_{bulto} es la constante de amortiguamiento del material en bulto (de un pedazo grande del material).

En este trabajo de tesis, las películas de oro que se van a considerar más adelante poseen grosores de entre 5 y 20nm. Si se ve a tales películas como compuestas por cúmulos de oro con diámetros de entre 5 y 20nm, esto los pone cerca y sobre las medidas del volumen crítico.

Por otro lado, puede demostrarse que se cumple la siguiente igualdad [20]:

$$\epsilon_{exp} = \epsilon(\omega, a) + \epsilon_{drude} , \quad (2.22)$$

2.6. EFECTOS DE TAMAÑO FINITO

en donde ϵ_{exp} es la función dieléctrica del material medida experimentalmente y ϵ_{drude} es la función dieléctrica proporcionada por el modelo de Drude (i.e. la raíz cuadrada de la ecuación 2.17). Esto quiere decir, a grosso modo, que la discrepancia entre los resultados esperimentales y lo modelado por Drude viene dada por la contribución de las transiciones interbanda.

Para el oro, la parte real y la parte imaginaria del índice de refracción de (2.22) en función del diámetro de los cúmulos de los que este se suponga conformado vienen dadas por [20]:

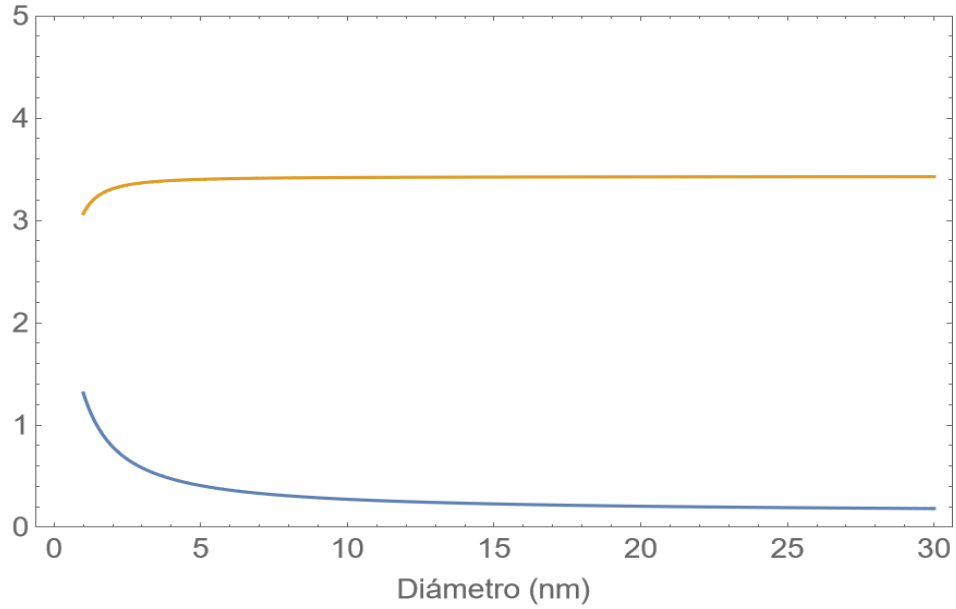


Figura 2.7: Parte real (abajo) e imaginaria (arriba) del índice de refacción del oro en función del diámetro de los cúmulos.

Nótese que, de 5 nm en adelante, los valores de $Re(n)$ e $Im(n)$ se comienzan a tener un cambio suave y casi lineal. Esto se asemeja a lo que Drude arroja para intervalos de longitudes de onda parecidos al espectro visible [20]:

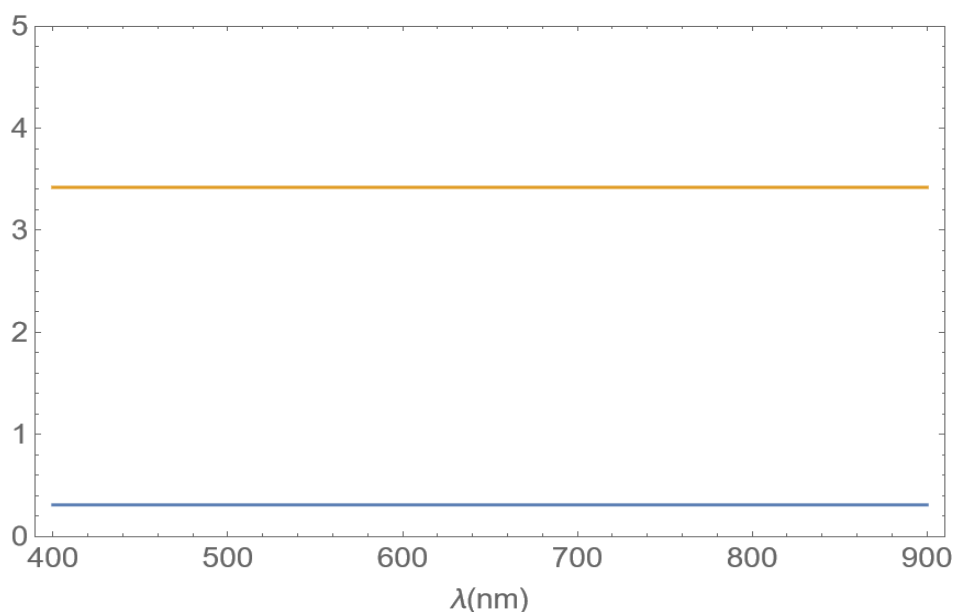


Figura 2.8: Parte real (abajo) e imaginaria (arriba) del índice de refracción del oro de Drude en función de la longitud de onda de la luz incidente.

Es importante que ahora se ponga de manifiesto que, al menos en lo que respecta al cálculo de fuerzas electromagnéticas que se va a realizar en los siguientes capítulos, es va a trabajar con una longitud de onda de 633nm , es decir, una longitud de onda que corresponde al amarillo rojizo (i.e. que se encuentra dentro del espectro visible).

Por lo tanto, se concluye que, al menos para los términos de este trabajo de tesis, las transiciones interbanda no son muy significativas. Esto, en otras palabras, quiere decir que el modelo de Drude se asemeja bastante a los resultados experimentales y, por lo tanto, proporciona una aproximación aceptable para analizar el oro.

Por último, es importante mencionar más acerca de la frecuencia de plasma. Esta frecuencia es una propiedad inherente de los conductores y semiconductores y varía según el material tratado. En pocas palabras y, desde el punto de vista clásico, esta se refiere a la frecuencia máxima de oscilación colectiva de los electrones de conducción (mínimamente parecida a una resonancia acústica). Estas frecuencias máximas están, evidentemente, asociadas

2.6. EFECTOS DE TAMAÑO FINITO

con oscilaciones máximas; y tales pueden ocurrir tanto en la superficie del material como en su volumen. En el primer caso, estas se denominan como “plasmones de superficie” y, en el segundo, como “plasmones de volumen”.

Al menos desde el punto de vista del modelo de Drude, para la mayoría de los metales sucede que la frecuencia de plasma se encuentra en el ultravioleta (aprox. $10^{16} Hz$). Esto pone un tope numérico a la frecuencia con la cual pueden oscilar los electrones de conducción a la hora de interactuar con la luz. De esta manera, si la luz incidente posee una frecuencia menor a la frecuencia de plasma, entonces la frecuencia de oscilación de los electrones, será, justamente, la de la luz. En pocas palabras, tal oscilación de cargas produce radiación electromagnética con un desfase tal que se anula con la luz que trata de ingresar al metal y se convierte en un haz reflejado por el mismo. Por otro lado, si la luz posee una frecuencia superior a la frecuencia de plasma, entonces los electrones no pueden oscilar a su misma frecuencia, provocando así que no se anule (al menos en su totalidad) el campo electromagnético de la luz y, por lo tanto, dejando que pase (al menos parcialmente) a través del metal.

Es importante recalcar que los plasmones no se forman si la luz incidente posee una frecuencia mayor a la de plasma, pues, en tal caso, los electrones son empujados de un lado a otro antes de que completen oscilaciones máximas, evitando así la formación del plasmón.

Por último, en principio, los plasmones de superficie o volumen pueden producir interferencias electromagnéticas apreciables en algunos aparatos de medición. Pero, al menos en lo que se refiere a este trabajo, se van a calcular fuerzas ejercidas por luz con una longitud de onda de $633nm$ (i.e. con una luz de frecuencia inferior a la frecuencia de plasma). Así pues, no hay necesidad de considerar efectos de plasmones de superficie o volumen.

Capítulo 3

INDUCCIÓN DE FUERZAS EN UN ESPEJO DE BRAGG SIN FUENTE DE PÉRDIDAS

La parte más importante de este capítulo es el cálculo analítico y numérico de las fuerzas electromagnéticas que se producen en un espejo de Bragg sin fuentes de pérdidas (que no absorbe luz en ninguna frecuencia) cuando se le hace incidir luz en polarización TM . La no absorción de luz es posible siempre y cuando las capas del espejo en su totalidad de materiales dieléctricos (véase la figura 3.1).

3.1. CÁLCULO ANALÍTICO DE LA FUERZA SOBRE UN ESPEJO DE BRAGG

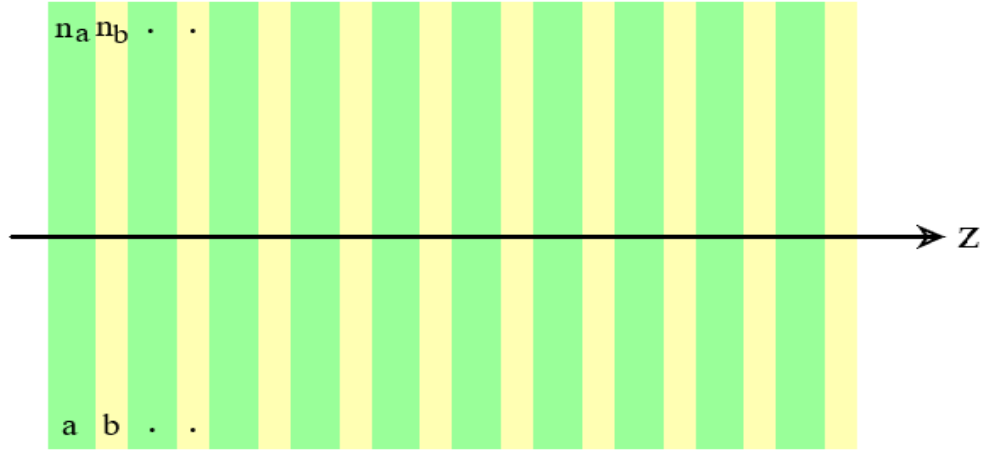


Figura 3.1: Espejo de Bragg hecho totalmente de dieléctricos, con espesores de capas dados por $a = 445nm$ y $b = 335nm$; y escalafón de índices de refracción dado por $n_a = 2$ y $n_b = 1.1$. El eje del cristal se alineó con el eje z .

3.1. CÁLCULO ANALÍTICO DE LA FUERZA SOBRE UN ESPEJO DE BRAGG

Haciendo uso de la ecuaciones de Maxwell expuestas en el marco teórico, es posible deducir que, para un espejo de Bragg sin medio de pérdidas, la expresión para la presión de radiación neta (i.e. el promedio temporal de la fuerza por unidad de área neta) que actúa lo largo de su dirección de crecimiento (elegida paralela al eje Z) viene dada de la siguiente manera [15]:

$$\begin{aligned} \langle F_{z,T} \rangle = & \sum_{l=0}^N \frac{\epsilon_0}{4} \sin^2 \theta_l \left[\left(\frac{\epsilon_l}{\epsilon_{l+1}} \right)^2 - 1 \right] [|A_l|^2 + |B_l|^2 - 2|A_l||B_l| \cos(\psi_{A_l} - \psi_{B_l})] \\ & + \sum_{l=1}^N \frac{\epsilon_0(\epsilon_l - 1)}{2} |A_l||B_l| [\cos(\psi_{A_l} - \psi_{B_l}) - \cos(\psi_{A_l} - \psi_{B_l} - 2k_{z_l}d_l)] , \end{aligned} \quad (3.1)$$

en donde ϵ_0 es la permitividad del vacío, ϵ_s es la constante dieléctrica del

3.1. CÁLCULO ANALÍTICO DE LA FUERZA SOBRE UN ESPEJO DE BRAGG

sustrato con el que está en contacto el espejo, N es el número total de capas del espejo, ϵ_l es la constante dieléctrica de su capa l , $\sin \theta_l$ es el ángulo con el que la luz incide en esa capa y k_{z_l} es la componente en esa capa de su vector de onda sobre la dirección de crecimiento del cristal. Las expresiones A_l y B_l son números complejos con fases ψ_{A_l} y ψ_{B_l} (respectivamente) y son las amplitudes de los campos eléctricos y magnéticos de la luz en la capa l , mientras que A_s , B_s , ψ_{A_s} y ψ_{B_s} son sus análogos en el sustrato.

Esta expresión toma en cuenta tanto las contribuciones de las densidades de fuerzas superficiales como volumétricas, Mizrahi et al. (2006). Las primeras están dadas por la primera sumatoria y las segundas por la última sumatoria.

Es importante que se ponga de manifiesto que la presión electromagnética en cuestión sólo actúa en la dirección de crecimiento del espejo de Bragg, es decir, en la dirección de cambio de su índice de refracción (i.e. el eje Z). Tal resultado se debe a la consideración de un medio sin pérdidas, pues, en tal caso, las componentes perpendiculares a la dirección de crecimiento del espejo de Bragg de la presión total son iguales entre sí e iguales a cero. Esto último vale independientemente del ángulo de incidencia de la luz. Sin embargo, cuando el medio puede absorber luz, las componentes mencionadas ya no son necesariamente nulas.

De la misma manera, nótese que las contribuciones superficiales dependen, a fin de cuentas, del ángulo con el cual incide la luz en el cristal (vía $\sin \theta$). Así pues, si se tiene incidencia normal, no existen contribuciones superficiales. Esto, a fin de cuentas, tiene que ver con que, para que exista carga de polarización superficial en las superficies de las capas del cristal (y, por lo tanto, una fuerza eléctrica superficial), se necesita que exista una componente del campo eléctrico de la luz que sea perpendicular a dichas capas. Pero, en la polarización TM , esto sólo ocurre si la luz incide de manera no normal al cristal.

► Nota: La demostración de la ecuación (3.1) viene desarrollada en el Apéndice A ■

3.2. CÁLCULO NUMÉRICO DE LA FUERZA SOBRE UN ESPEJO DE BRAGG

► Nota importante: En las gráficas que se verán en esta sección, junto con las de las secciones 3.3 y 4.2, aparecen tanto valores positivos como negativos para las contribuciones superficiales y volumétricas de la presión de radiación. En todos los casos, los valores graficados son los totales que percibe una cierta capa o volumen; a la vez que un valor positivo indica que la capa o volumen correspondiente se siente empujado hacia la dirección de crecimiento de las coordenadas del eje al que está asociado dicho valor, mientras que, uno negativo, quiere decir que se siente empujado hacia la dirección de disminución ■

Haciendo uso de un programa en Mathematica 12.0 fue posible trabajar numéricamente con el método de la matriz de transferencia expuesto en la sección (2.3) y así calcular la transmitancia, reflectancia y la amplitud del campo eléctrico dentro de las capas de un espejo de Bragg con veinte capas y, por lo tanto, diez periodos. El espesor de sus capas está dado por $a = 445nm$ y $b = 335nm$; mientras que sus índices de refracción están dados por $n_a = 2$ y $n_b = 1.1$. Esto se eligió así para trabajar con los valores usados en los experimentos reportados en [16], [17]. Por último, para tener coherencia con los desarrollos posteriores, se alineó al eje z con el eje del espejo (véase la figura 3.1).

Por último, y no menos importante, se usó este mismo programa para, en el espejo de Bragg considerado, calcular el resultado de la ecuación (3.1) y de cada uno de sus sumandos.

El ángulo de incidencia elegido para la luz fue de un grado. Esto se hizo así para tener una forma de corroborar la primera parte de la ecuación (3.1), es decir, la correspondiente a las contribuciones superficiales. Y es que, como tal expresión depende del ángulo de incidencia vía su seno cuadrado, entonces, valores pequeños de tal ángulo deberían dar lugar a contribuciones pequeñas (comparadas con las volumétricas, por ejemplo).

La transmitancia está dada de la siguiente manera:

3.2. CÁLCULO NUMÉRICO DE LA FUERZA SOBRE UN ESPEJO DE BRAGG

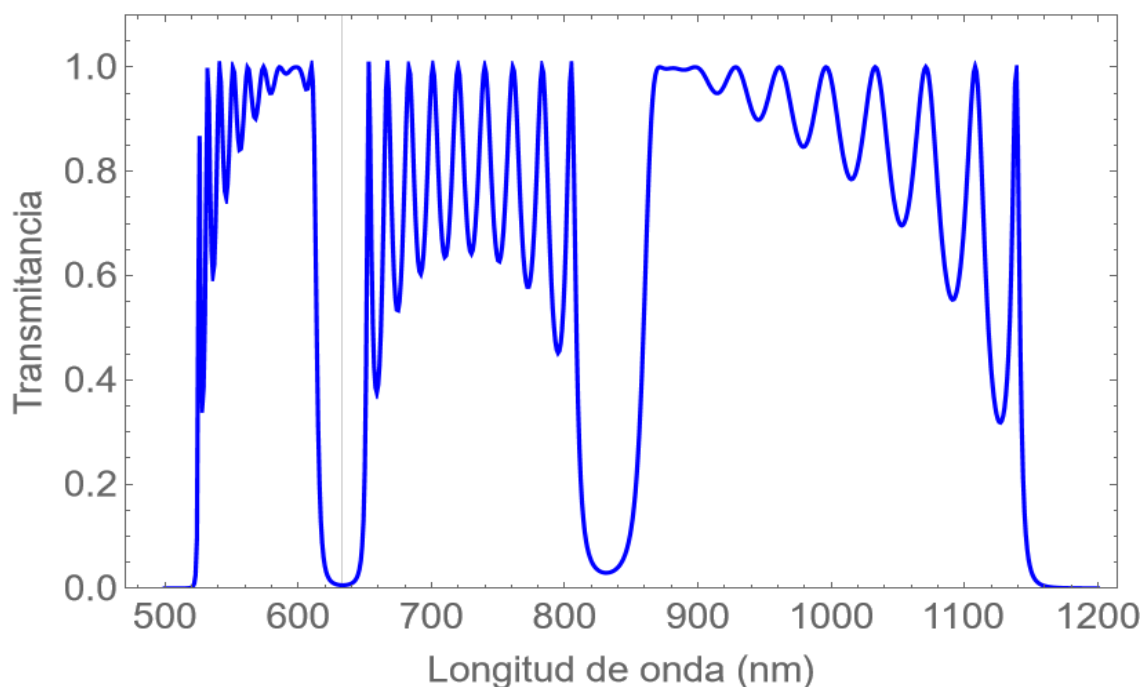


Figura 3.2: Transmitancia normalizada de la estructura considerada

Puede apreciarse que el espejo en cuestión posee al menos dos Gaps fotónicos bien definidos: uno centrado en una longitud de onda de aproximadamente 633 nm y otro en una de aproximadamente 835 nm. Según la teoría expuesta en [1], así como lo mencionado en la introducción de este trabajo de tesis, tal cosa quiere decir que un haz de luz que posea cualquiera de estas longitudes de onda no puede propagarse por el espejo de Bragg. Así pues, para tales longitudes de onda, toda interacción electromagnética dentro del espejo debe atenuarse exponencialmente.

► Nota: Los modos de luz que corresponden a los máximos de reflectancia dan lugar a una interacción electromagnética que se concentra en la superficie del cristal, pues tales modos se apagan en cuanto comienzan a avanzar por él. Por esto mismo, es usual llamarlos “modos de superficie” ■

En vista de lo anterior, conviene que el trabajo numérico posterior se centre en cualquiera de las longitudes de onda mencionadas, para así ver qué tan correspondientes son los resultados con lo predecido por la teoría. Por

3.2. CÁLCULO NUMÉRICO DE LA FUERZA SOBRE UN ESPEJO DE BRAGG

simplicidad, se va a elegir la longitud de onda de 633 nm:

Para una longitud de onda considerada se obtuvo que la amplitud del campo eléctrico dentro del espejo de Bragg puede visualizarse de la siguiente manera:

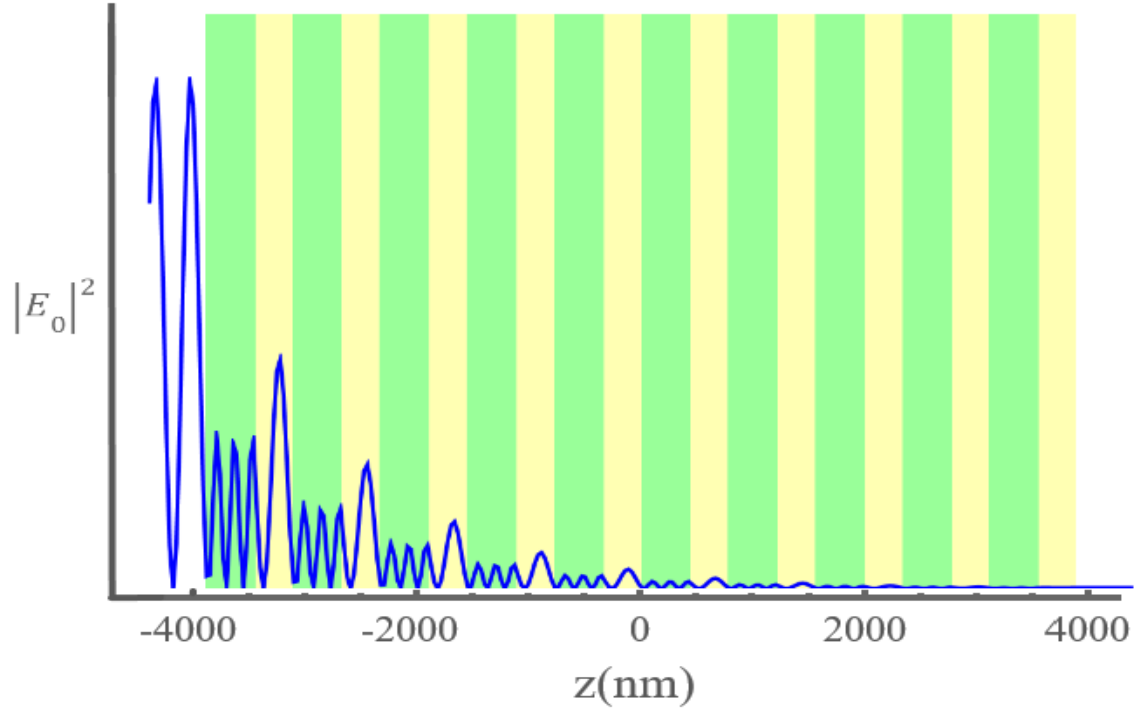


Figura 3.3: Amplitud representativa del campo eléctrico ($|E_0|^2$) de un haz de luz de 633 nm al atravesar el espejo.

En esta figura puede apreciarse como hay una correspondencia entre la teoría y los resultados numéricos, pues ambos ponen de manifiesto que, para la longitud de onda en cuestión, la interacción electromagnética dentro del cristal se atenúa exponencialmente.

Ahora, para la longitud de onda considerada, se obtuvo que la presión de radiación neta en cada una de las intersecciones de las capas del espejo (i.e. las contribuciones superficiales) puede visualizarse de la siguiente manera:

3.2. CÁLCULO NUMÉRICO DE LA FUERZA SOBRE UN ESPEJO DE BRAGG

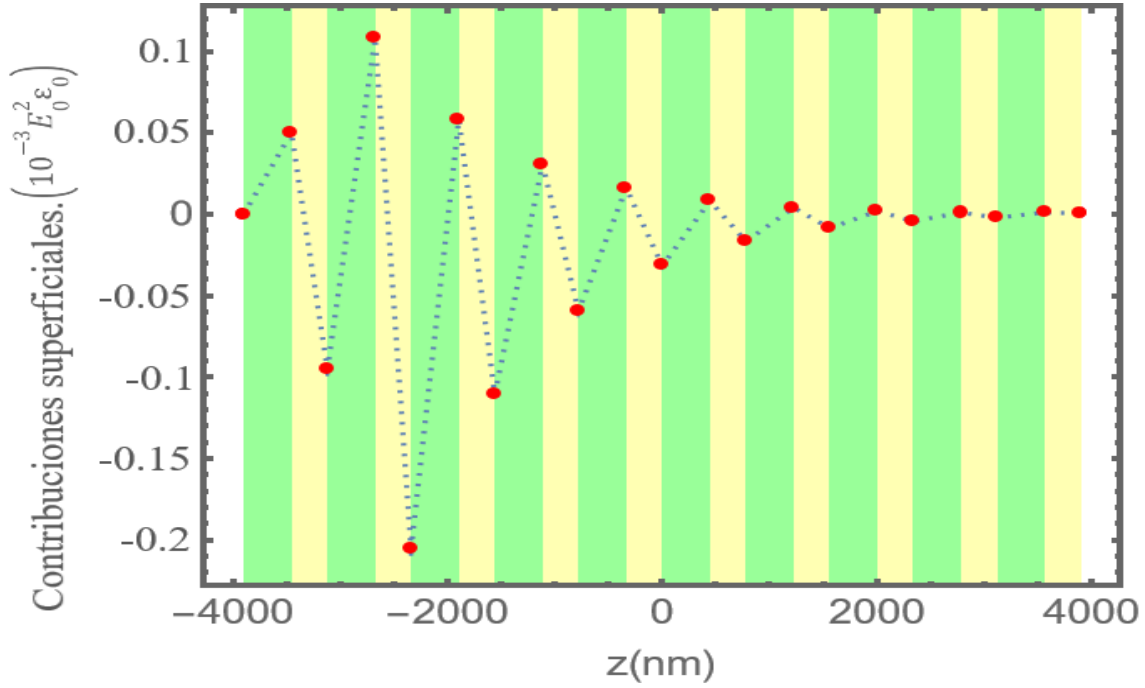


Figura 3.4: Presión de radiación neta en cada una de las interfaces de capas del espejo y representada por puntos rojos sobre las mismas, a una longitud de onda de 633 nm

Nótese que esta densidad posee un módulo muy pequeño (es, por ejemplo, menor al mínimo que pueden detectar los tímpanos humanos) y que, eventualmente, tiende a cero conforme se avanza en el cristal. Esto está acorde con el comportamiento de la amplitud del campo eléctrico dentro del espejo.

Por último, para la longitud de onda considerada se obtuvo que la presión de radiación neta en cada una de las capas del espejo (i.e. las contribuciones volumétricas) puede visualizarse de la siguiente manera:

3.3. CÁLCULO NUMÉRICO DE LA FUERZA SOBRE UN FOTODINO

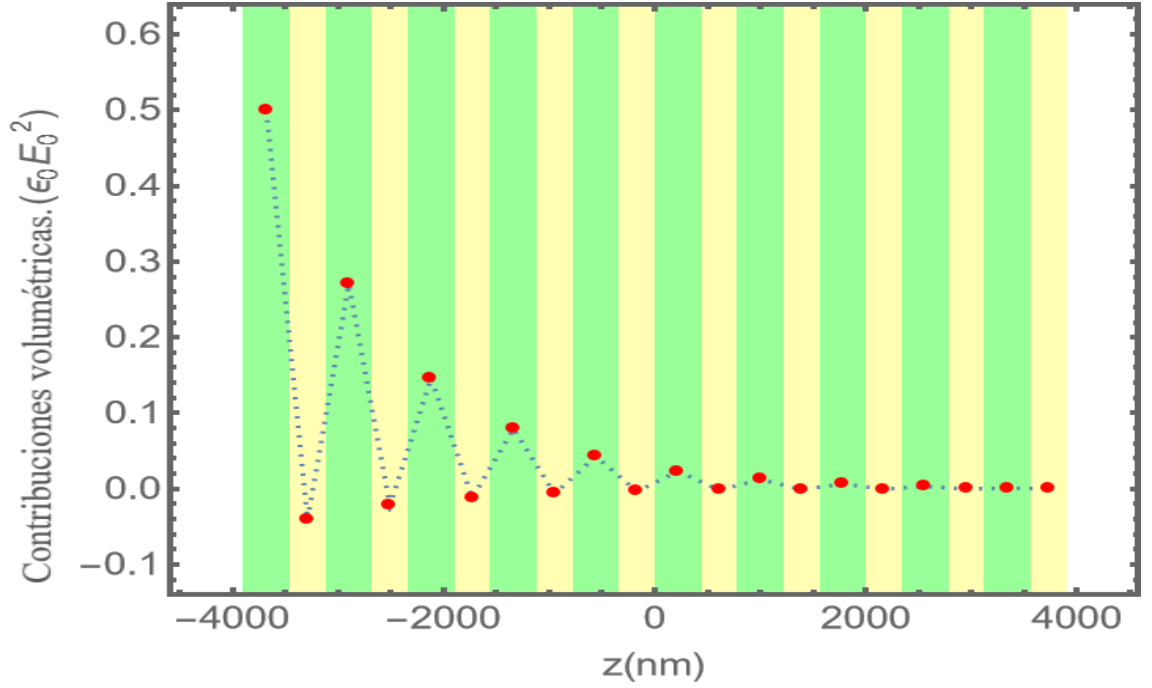


Figura 3.5: Presión de radiación neta en cada uno de los volúmenes de capas del espejo y representada por puntos rojos sobre las mismas, a una longitud de onda de 633 nm

Nótese como la contribución volumétrica de la presión de radiación es, en módulo, mucho mayor a la superficial (figura 3.3) y que, además, disminuye de manera proporcional a la atenuación del campo previamente mencionada.

Con todo esto, se puede concluir que, al menos para el espejo de Bragg considerado, la teoría y los resultados numéricos calzan completamente.

3.3. CÁLCULO NUMÉRICO DE LA FUERZA SOBRE UN FOTODINO

En esta sección se exponen los resultados obtenidos al adaptar el programa de la sección anterior para ahora calcular la reflectancia, la amplitud del campo eléctrico y cada uno de los sumandos de la ecuación (3.1) en dos espejos de Bragg unidos por una capa de aire, esto es, un cristal fotónico con un

3.3. CÁLCULO NUMÉRICO DE LA FUERZA SOBRE UN FOTODINO

defecto (o gap) de aire (también conocido como fotodino). En este caso, el espesor del defecto se tomó como $900nm$. A fin de cuentas, todo lo anterior fue posible considerando en la programación que ahora se tiene otro espejo de Bragg, unido al primero por una capa de aire. Se consideró que los espejos de Bragg tratados poseen los mismos índices de refracción que el de la sección anterior, pero, a diferencia de este, dieciséis periodos y, por lo tanto, treinta y dos capas (véase la figura 3.6). Esto se eligió así para trabajar con los valores usados en los experimentos reportados en [15].

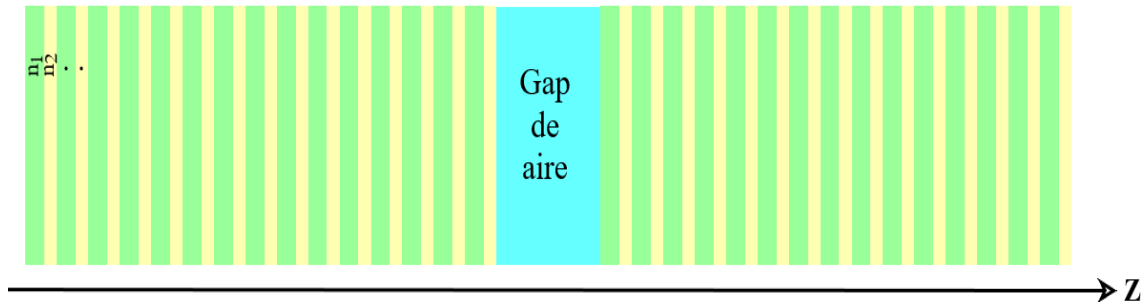


Figura 3.6: Fotodino compuesto por un gap de aire de $900nm$ de espesor (en azul) y espejos de Bragg de dieciséis periodos a cada lado. El espesor de sus capas viene dado por $a = 445nm$ y $b = 335nm$; mientras que su escalafón de índices de refracción está dado por $n_a = 2$ y $n_b = 1.1$. El eje del cristal se alineó con el eje z .

El ángulo de incidencia elegido para la luz fue de un grado. Esto se hizo así por razones análogas a las de la sección anterior.

3.3. CÁLCULO NUMÉRICO DE LA FUERZA SOBRE UN FOTODINO

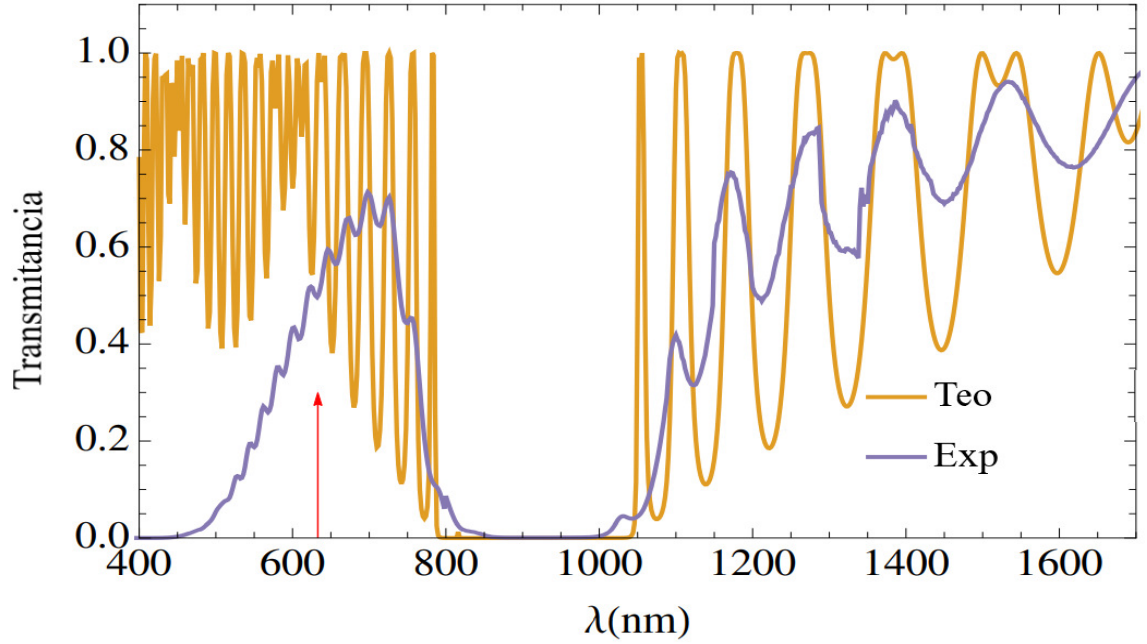


Figura 3.7: Transmitancia teórica y experimental de un fotodino hecho por espejos de Bragg de dieciséis periodos, con defecto de aire de $900nm$ de espesor. Esta posee un máximo en una longitud de onda de $633nm$. La transmitancia teórica fue calculada con el programa descrito en esta sección y, la experimental, fue tomada de [15].

Nótese que el cristal en cuestión posee un máximo de transmitancia, es decir, un mínimo de reflectancia, en una longitud de onda de $633nm$. Según la teoría expuesta en [1], así como lo mencionado en la sección (2.4) de este trabajo de tesis, tal cosa quiere decir un haz de luz que posea esa longitud de onda puede alojarse temporalmente dentro del defecto del cristal y, lo que es más, producir una interacción electromagnética intensa en él.

En vista de lo anterior, conviene que el trabajo numérico posterior se centre en la longitud de onda mencionada, para así ver que tan correspondientes son los resultados con lo arrojado por la teoría:

Para una longitud de onda considerada, se obtuvo que la amplitud del campo eléctrico dentro del cristal puede visualizarse de la siguiente manera:

Nótese que, pese a que la amplitud del campo no aumenta de manera expo-

3.3. CÁLCULO NUMÉRICO DE LA FUERZA SOBRE UN FOTODINO

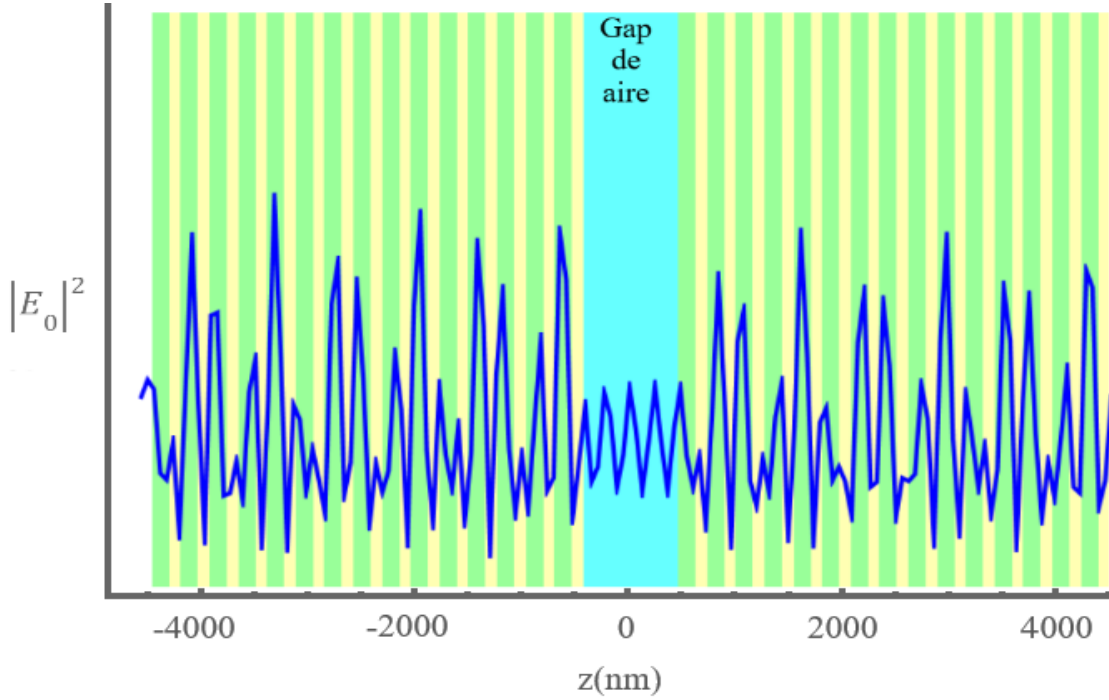


Figura 3.8: Amplitud representativa del campo eléctrico ($|E_0|^2$) de un haz de luz de $633nm$ al atravesar el fotodino. El gap de aire se representa con un color azul claro y posee un espesor de $900nm$.

nencial al acercarse al defecto, sí se mantiene relativamente constante mientras se aloja en él. Esto quiere decir que se tiene un modo de luz existiendo de manera estable. En principio, este comportamiento debería producir una interacción volumétrica considerable dentro del defecto.

Ahora, para la longitud de onda tratada, se obtuvo que la presión de radiación en las intersecciones de las capas del cristal se comporta de una manera similar a la amplitud del campo, exceptuando al defecto (véase la figura 3.8). Esto último se explica tomando en cuenta que el defecto no es sólido, es de aire y, por lo tanto, atenúa las interacciones superficiales en las caras de las capas que lo delimitan. Por lo tanto, la teoría y el trabajo numérico también son correspondientes en este caso.

3.3. CÁLCULO NUMÉRICO DE LA FUERZA SOBRE UN FOTODINO

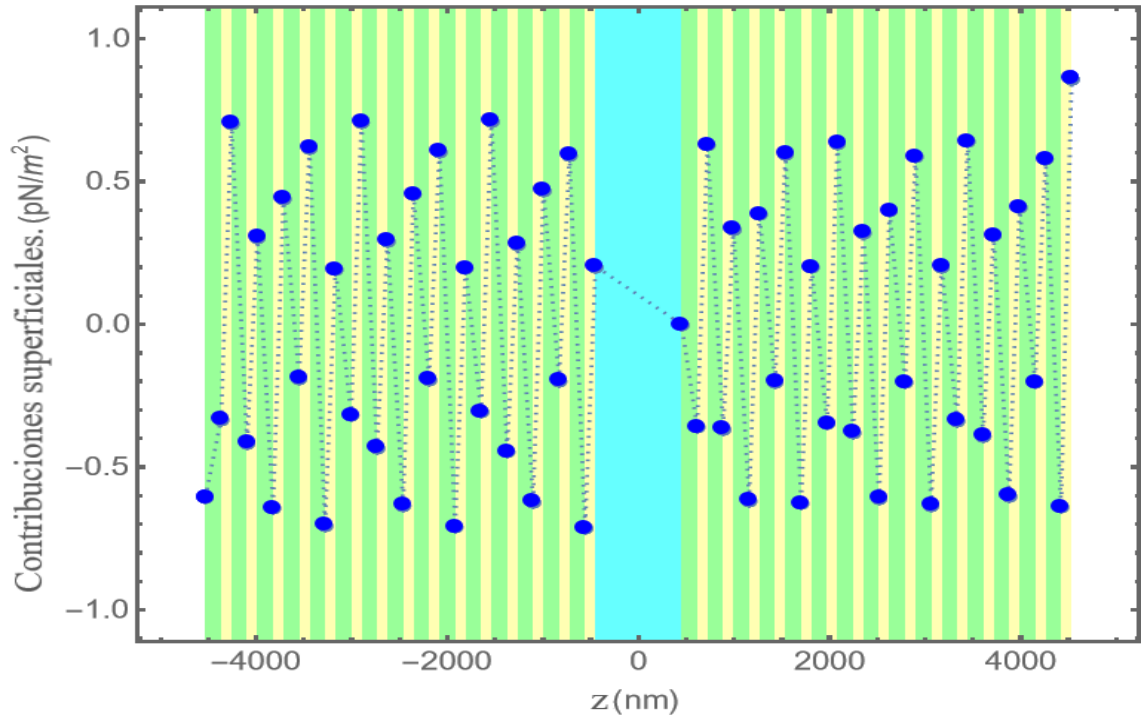


Figura 3.9: Presión de radiación neta en las intersecciones de las capas del fotodino y representada por puntos rojos sobre las mismas, a una longitud de onda de 633nm

Ahora, la presión de radiación que se hace presente en los volúmenes de cada una de las capas se graficó junto con la superficial (figura 3.9), para así poder hacer una mejor comparación entre sus valores:

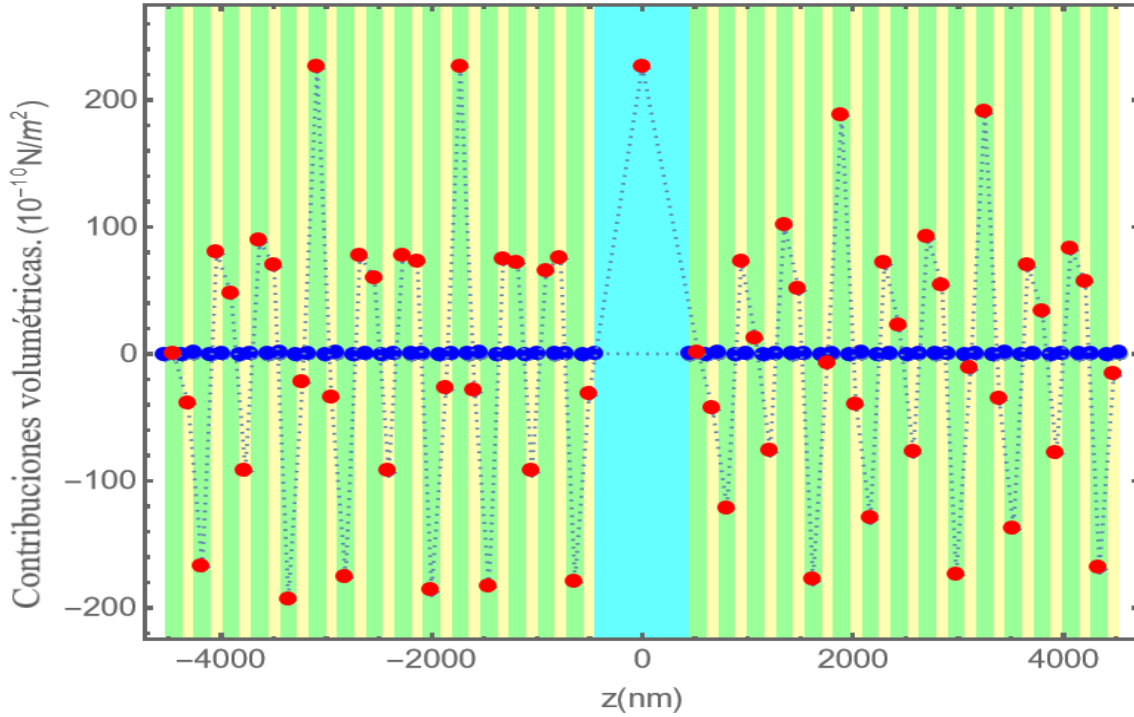


Figura 3.10: Contribución volumétrica (en rojo) comparada con la superficial (en azul), a una longitud de onda de $633nm$.

Aquí se observa que, tal y como se puso de manifiesto en la explicación de la figura (3.7), el modo localizado dentro del defecto genera una fuerte interacción electromagnética dentro de él. Además, nótese que, similarmente a como ocurre en la sección (3.2), aquí también sucede que la contribución volumétrica es, en módulo, mucho mayor a la superficial (es, de hecho, mayor por dos órdenes de magnitud).

Todos estos comportamientos, son, por supuesto, correspondientes con la teoría en cuestión. Así pues, se puede concluir que, para los sistemas considerados, la teoría y los resultados numéricos calzan completamente.

3.3. CÁLCULO NUMÉRICO DE LA FUERZA SOBRE UN FOTODINO

Capítulo 4

INDUCCIÓN DE FUERZAS EN UN ESPEJO DE BRAGG CON FUENTE DE PÉRDIDAS

La parte más importante de este capítulo es el cálculo analítico y numérico de las fuerzas electromagnéticas que se producen en un espejo de Bragg con fuente de pérdidas (que absorbe luz en varias frecuencias) cuando se le hace incidir luz en polarización TM . La absorción de luz se da siempre que se le añade algún tipo de metal a las capas del espejo. En este caso, el espejo considerado posee sus capas hechas enteramente de dieléctrico, pero, ahora, está dotado de una lámina de oro (material absorbente de luz) justo antes de su primera capa (véase la figura 4.1).

En adición a lo anterior, este capítulo también cuenta con un reporte experimental. En él se pone de manifiesto cómo se intentaron medir las fuerzas en el espejo considerado.

4.1. CÁLCULO ANALÍTICO DE LA FUERZA SOBRE UN ESPEJO CON PÉRDIDAS



Figura 4.1: Espejo de Bragg con una lámina de oro antes de su primera capa. Los índices de refracción del espejo están dados por n_a , n_b ; mientras que el del oro está dado por n_o . Se eligió al eje z como el eje del espejo.

4.1. CÁLCULO ANALÍTICO DE LA FUERZA SOBRE UN ESPEJO CON PÉRDIDAS

Este cálculo es hasta cierto punto análogo al narrado en la sección (3.1). Al igual que en ese caso, aquí se eligió al eje z como el eje del espejo. La diferencia radica en que, tal y como se pone de manifiesto en las secciones (2.5) y (2.6), en el oro (medio con pérdidas) sucede que el vector de onda, la función dieléctrica y el índice de refracción son números complejos. Tomando en cuenta lo anterior, se puede deducir que las contribuciones volumétricas y superficiales a la presión de radiación que se producen en la capa de oro del espejo están dadas por:

$$\begin{aligned} \langle \vec{f} \rangle_{x,O} = & \frac{1}{2} Re(I_1) \left[-\frac{|A_O|^2}{2Imk_{zO}} (1 - e^{2dO Imk_{zO}}) + \frac{|B_O|^2}{2Imk_{zO}} (1 - e^{-2dO Imk_{zO}}) \right. \\ & \left. - \frac{|A_O||B_O|}{Rek_{zO}} [\sin(\psi_{A_O} - \psi_{B_O}) - \sin((\psi_{A_O} - \psi_{B_O} - 2dO Re k_{zO}))] \right], \quad (4.1) \end{aligned}$$

$$\langle \vec{f} \rangle_{z,O} = \frac{1}{2} \left[-Re(I_2) \frac{|A_O|^2}{2Imk_{zO}} (1 - e^{2dO Imk_{zO}}) + Re(I_2) \frac{|B_O|^2}{2Imk_{zO}} (1 - e^{-2dO Imk_{zO}}) \right]$$

4.1 CÁLCULO ANALÍTICO DE LA FUERZA SOBRE UN ESPEJO CON PÉRDIDAS

$$-Re(iI_2) \frac{|A_O||B_O|}{Rek_{z_O}} [\cos(\psi_{A_O} - \psi_{B_O}) - \cos((\psi_{A_O} - \psi_{B_O} - 2d_O Re k_{z_O}))] , \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \langle F_{z,O} \rangle = & \frac{1}{4} \epsilon_0 Re \left[\left(\left(\frac{\epsilon_O}{\epsilon_{O+1}} \right)^2 - 1 \right) \sin^2 \theta_O \right] (|A_O|^2 + |B_O|^2 \\ & - 2 |A_O| |B_O| \cos(\psi_{A_O} - \psi_{B_O})) , \end{aligned} \quad (4.3)$$

en donde $\langle \vec{f} \rangle_{x,O}$ es la densidad de fuerza volumétrica sobre el eje x ; $\langle \vec{f} \rangle_{z,O}$ es la densidad de fuerza volumétrica sobre el eje z ; $\langle F_{z,O} \rangle$ es la densidad de fuerza superficial sobre el eje z ; $I_1 := i\epsilon_0(\epsilon_O - 1)k_O(\sin \theta_O)^*$, siendo ϵ_0 la permitividad eléctrica del vacío, ϵ_O la función dieléctrica del oro, k_O el módulo del vector de onda en el oro y θ_O es el ángulo de incidencia en el oro (que en este caso es complejo) ; A_O y B_O son números complejos relacionados con las amplitudes del campo eléctrico en el oro, mientras que ψ_{A_O} , ψ_{B_O} son sus fases ; $d_O := (z_O - z)$, con z_O siendo la posición sobre el eje z de la cara de la capa del oro que está en contacto en la primera capa del espejo y z una posición dentro de la capa de oro ; k_{z_O} la componente en el eje z del vector de onda ; $I_2 := -i\epsilon_0(\epsilon_l - 1)k_l(\cos \theta_l)^*$.

Nótese que ahora existe una contribución volumétrica sobre el eje x , es decir, en una dirección normal al eje del cristal (ecuación 4.1). Además, tal y como sucede en el caso del espejo de Bragg sin fuente de pérdidas (sección 3.1), la densidad de fuerza superficial sólo existe sobre el eje z y depende del ángulo de incidencia de la luz (ecuación 4.3).

Las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3) pueden reducirse a la expresión para el caso de un espejo de Bragg sin fuente de pérdidas (sección 3.1) si se considera que la parte imaginaria de la función dieléctrica, el ángulo de incidencia y el vector de onda es nula. Aunque en principio eso traería una indeterminación del tipo 0/0 para los términos del tipo $(1 - e^{2d_O Im k_{z_O}})/2Im k_{z_O}$, tal cosa se puede solucionar usando la regla de *l'Hôpital*.

► Nota: La demostración de las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3) viene desarrollada en el Apéndice B ■

4.2. CÁLCULO NUMÉRICO DE LA FUERZA SOBRE UN ESPEJO CON PÉRDIDAS

4.2. CÁLCULO NUMÉRICO DE LA FUERZA SOBRE UN ESPEJO CON PÉRDIDAS

En esta sección se usaron dos programas similares al descrito en la sección (3.2):

1. El primero se usó para calcular la reflectancia del espejo con pérdidas. La diferencia principal con el programa de la sección (3.2) radica en los valores del índice de refracción y la constante dieléctrica de la lámina de oro tratada. Tal y como se pone de manifiesto en la sección (2.6) del marco teórico, los valores mencionados son números complejos que están en función de la longitud de onda de la luz que incide en oro. Se usó el artículo (agregar referencia) para conocer dicho valor, pues en él se encuentran tabulados.

2. El segundo se usó para calcular las densidades de fuerza presentes en el espejo con pérdidas. La diferencia principal de este programa con el de la sección (3.2) radica en que, ahora, lo usado para calcular las densidades de fuerza en cada una de las capas del espejo (incluidas las capas de dieléctrico) fueron las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3); en esto, fue necesario cambiar el índice O por el índice l , para así indicar que ya no se está tratando solamente con la capa de oro. El paso de la capa de oro a las demás capas fue hecho manualmente, al asignar las entradas correctas a cada una de las matrices del método de la matriz de transferencia y al usar la ley de Snell; la cual afirma que la cantidad $n \sin \theta$ se conserva durante en paso de una interfaz a otra y, por lo tanto, permite relacionar los ángulos complejos con los reales.

Antes de continuar es importante recordar que en la figura (2.8) se pone de manifiesto que, para longitudes de onda en el rango visible (y aún en intervalos a los extremos), la parte compleja del índice de refracción del oro es de valor considerable. Este valor es el que está relacionado con la absorción de luz por el medio; mientras que, la parte real, está asociada con el comportamiento periódico de la luz en él.

De la misma manera, también es importante tener presente que el espejo de Bragg considerado posee una capa de oro al inicio y treintaidós capas (y por lo tanto, dieciséis periodos) hechas enteramente de dieléctrico. El espesor de

4.2. CÁLCULO NUMÉRICO DE LA FUERZA SOBRE UN ESPEJO CON PÉRDIDAS

estas últimas va a tomarse como $a = 105.76nm$ y $b = 90.40nm$; mientras que su escalafón de índices de refracción se elegirá como $n_a = 1.4939$ y $n_b = 1.7477$. La razón de esto es que las muestras trabajadas en el desarrollo experimental poseen esos mismos valores de grozor e índices de refracción.

El espesor de la lámina de oro que se encuentra justo antes de la primera capa del espejo se tomó como igual a $5nm$, $10nm$ y $20nm$. La elección de estos valores está relacionada con que, para espesores mayores de $20nm$, la onda electromagnética incidente comienza a apagarse antes de salir de la lámina en cuestión, lo cual produce una gran discrepancia entre los resultados teóricos y experimentales.

Los resultados obtenidos para la reflectancia se van a presentar junto con los resultados experimentales de la subsección 4.3.1.

Los resultados obtenidos para la presión de radiación (i.e. el promedio temporal de la fuerza por unidad de área) se van a presentar a continuación:

Tal y como se puso de manifiesto en la sección (2.6), se va a trabajar con una longitud de onda de $633nm$. Por lo mencionado en esta, de antemano puede suponerse que la capa de oro va a presentar una gran cantidad de reflectancia. Esta se identifica con modos de superficie, es decir, modos en los cuales se presenta una gran interacción electromagnética en la capa de oro. Como en este caso se desea, más que nada, analizar el efecto de la luz en la capa de oro, entonces es conveniente centrar los cálculos en alguno de estos modos.

En este caso, se va a analizar una capa de oro de $10nm$ de espesor. Pero, de igual manera, pudieron analizarse espesores de 5 o $20nm$, dando lugar así a resultados moderadamente parecidos.

El ángulo de incidencia elegido es, en este caso, de diez grados:

4.2. CÁLCULO NUMÉRICO DE LA FUERZA SOBRE UN ESPEJO CON PÉRDIDAS

La contribución superficial de la presión de radiación en cada una de las capas del cristal mencionado sólo está dada en su dirección normal (elegida como el eje z) y viene dada por:

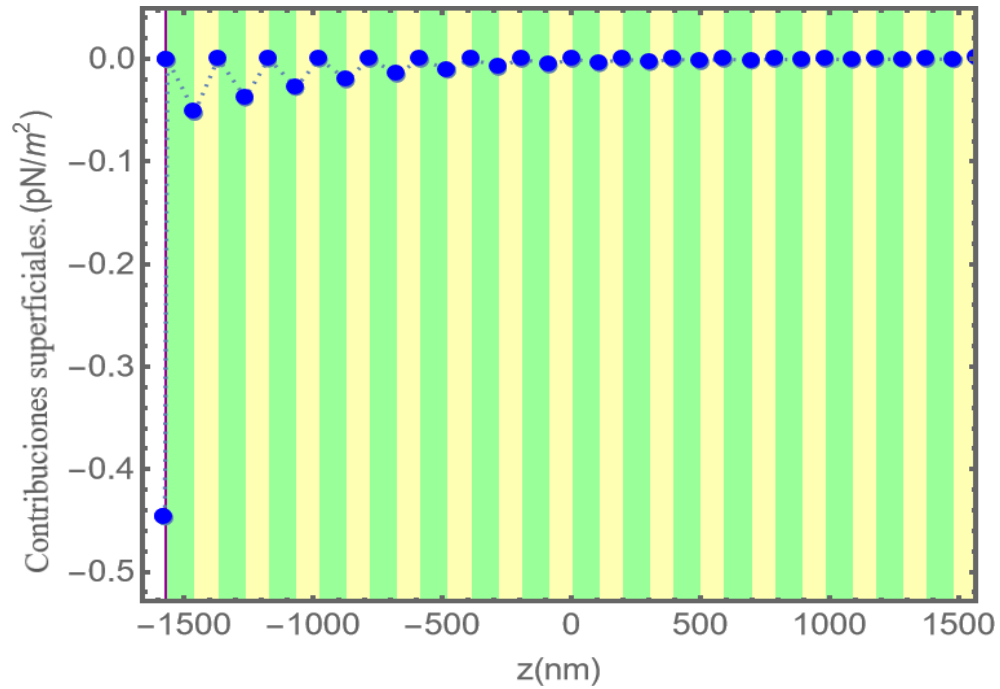


Figura 4.2: Contribución superficial de la presión de radiación en cada una de las capas de un espejo de Bragg que posee una película de oro (resaltada en negro) de 10nm de grosor. La luz incidente posee una longitud de onda de 633nm y se hizo incidir a diez grados.

La mayor interacción electromagnética se encuentra, justamente, en la superficie de la capa de oro. Después de esto, tal interacción se empieza a apagar, pues se está tratando con un modo de superficie. Sin embargo, nótese que el módulo de la densidad de fuerza resultante de tal interacción es menor a medio piconewton, lo cual, en términos macroscópicos, es imperceptible.

Ahora, en este caso sucede que la contribución volumétrica se da tanto sobre el eje del cristal como sobre una de sus direcciones perpendiculares (elegida como el eje x). Sin embargo, esta última posee un único término, correspondiente a la capa de oro. En el resto de las capas no existe ninguna contribución

4.2. CÁLCULO NUMÉRICO DE LA FUERZA SOBRE UN ESPEJO CON PÉRDIDAS

sobre tal dirección, pues están hechas de dieléctrico. El término en cuestión posee un módulo de:

$$0.05 \times 10^{-9} \frac{N}{m^2}$$

y apunta hacia el origen de coordenadas (dirección $-x$).

Ahora, al igual que en el caso del cristal sin fuente de pérdidas (sección 3.2), resulta que las contribuciones volumétricas presentes en la dirección z poseen un módulo varios órdenes de magnitud mayor al de las superficiales. Para una mejor comparación, esta vez se optó por graficarlas juntas:

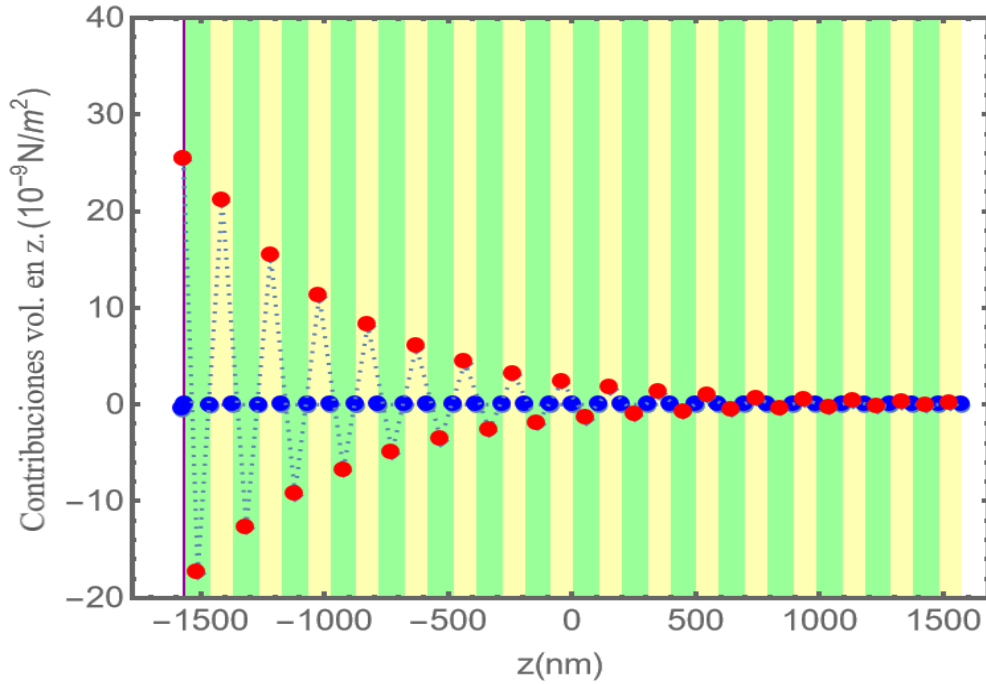


Figura 4.3: Comparación de las contribuciones volumétricas (en rojo) y superficiales (en azul) que se hacen presentes en el eje (elegido como el eje z) de un espejo de Bragg con una capa de oro de $10nm$ (resaltada en negro) cuando es irradiado con luz de $633nm$, a un ángulo de diez grados.

4.2. CÁLCULO NUMÉRICO DE LA FUERZA SOBRE UN ESPEJO CON PÉRDIDAS

Uno puede preguntarse qué tan grande es la única contribución volumétrica en x a comparación de la contribución total en z (la suma algebraica de las contribuciones superficiales y volumétricas en dicho eje), tanto para un ángulo de diez grados (el considerado para hacer las figuras 4.3 y 4.4) como para otros ángulos. Esto puede saberse simplemente variando el ángulo de incidencia en el programa tratado. Los resultados fueron los siguientes:

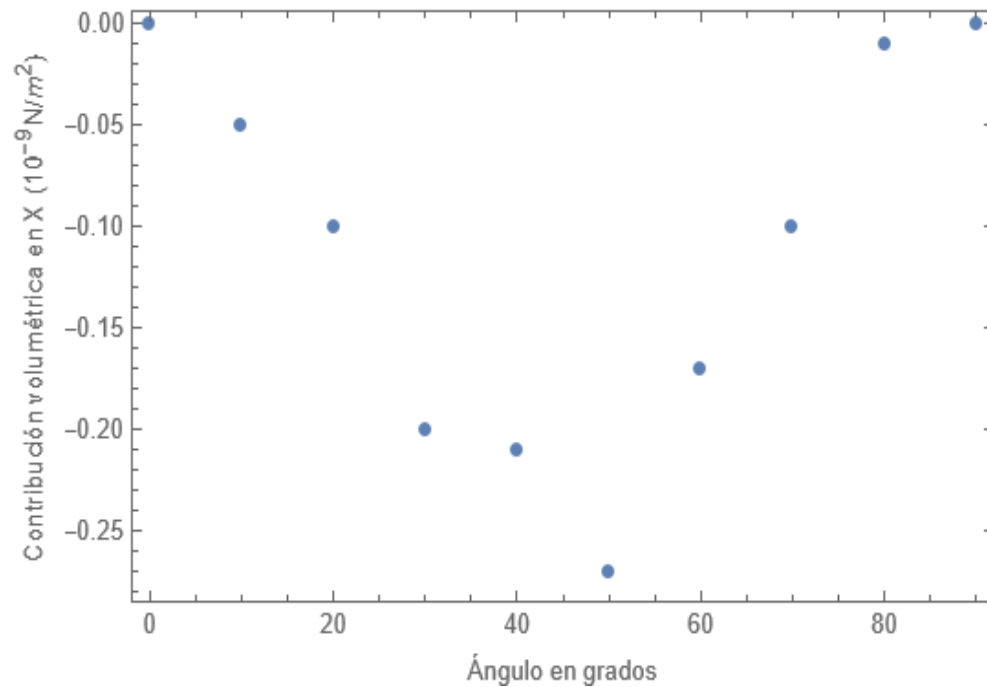


Figura 4.4: Contribución sobre el eje x como función del ángulo de incidencia (medido en grados).

4.2. CÁLCULO NUMÉRICO DE LA FUERZA SOBRE UN ESPEJO CON PÉRDIDAS

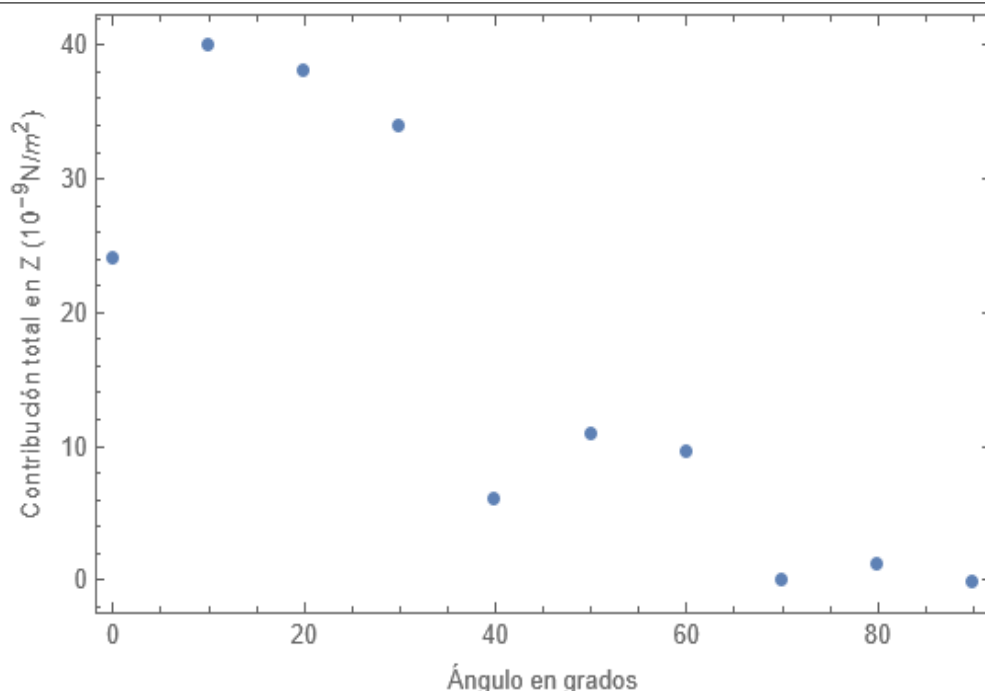


Figura 4.5: Contribución total sobre el eje z (la suma algebraica de las contribuciones superficiales y volumétricas en dicho eje) como función del ángulo de incidencia (medido en grados).

Nótese cómo, ángulo a ángulo, la contribución sobre el eje x es opacada por la contribución sobre el eje z . Esto pasa aún para el caso del máximo valor de la primera (-0.27×10^{-9} , a un ángulo de 50 grados), que, dicho sea de paso, ni siquiera corresponde con el caso del máximo valor de la segunda (40×10^{-9} , a un ángulo de 10 grados).

Por último, es necesario recordar que, tal y como se pone de manifiesto en la sección (2.5), la profundidad de piel del oro es de aproximadamente 40nm . Así pues, si el programa reproduce fielmente la realidad, entonces el ingresarle este dato debería dar como resultado unas contribuciones superficiales y volumétricas prácticamente nulas, sin importar el ángulo de incidencia de la luz. Y resulta que las da, con excepción de la contribución volumétrica en z correspondiente a la capa de oro (véase la figura 4.4).

4.3. RESULTADOS EXPERIMENTALES

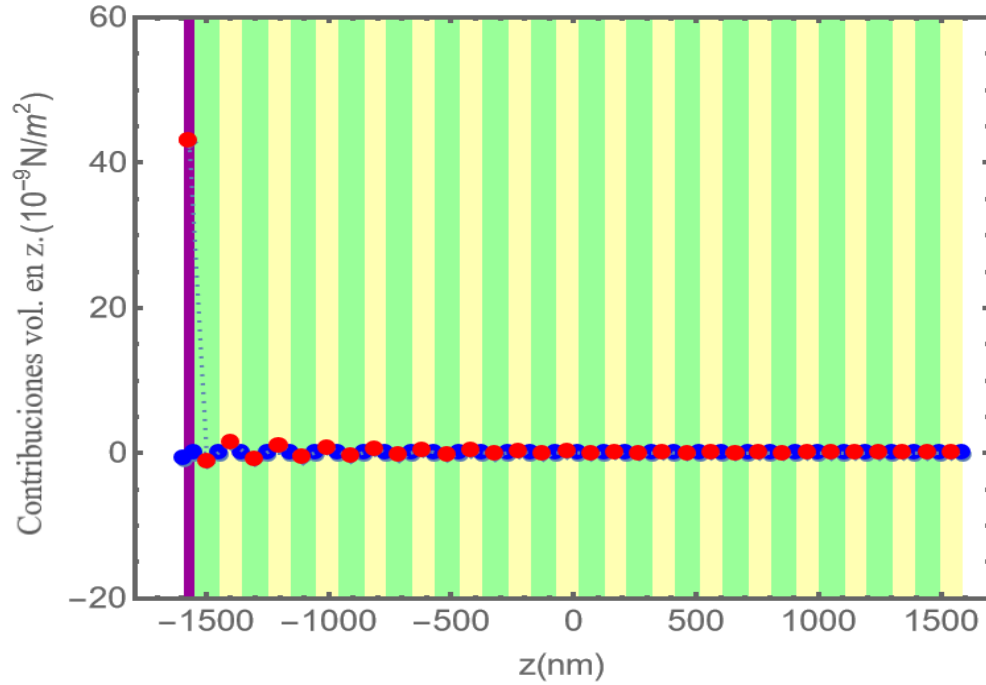


Figura 4.6: Espejo de Bragg con una capa de oro de 40nm al inicio. El haz de luz de 633nm se apaga al adentrarse en la capa de oro, sin importar el ángulo de incidencia.

► Nota: En los programas de esta sección también fue necesario darle un valor a la potencia del láser. La escogida fue 40mW , pues esta, aunque considerable, aún no es suficiente para fracturar un cristal físico. ■

► Nota: La razón del trabajo con una longitud de onda de 633nm fue influenciada por el hecho de que, en el trabajo experimental narrado en la siguiente sección, se usó un láser de esa longitud ■

4.3. RESULTADOS EXPERIMENTALES

► Nota importante: Antes de iniciar con esta sección, considero importante agradecer nuevamente a mi coasesor de tesis, el Dr. J. Eduardo Lugo, pues los espejos de Bragg analizados fueron proporcionados por él ■

4.3. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Para el desarrollo experimental se usaron dos equipos:

1. El primero, consiste en un espectrofotómetro modelo: "Miniature Fiber Optic Spectrometer; Modelo del producto: BLUE-Wave, BLACK-Comet, RED-Wave, DWARF-Star, GREEN-Wave, EPP2000 HR, EPP2000 UVN-SR, Dual DSR", junto con sus respectivos aditamentos. Este equipo se usó en su arreglo para medir la reflectancia. Las muestras usadas fueron de espejos de Bragg de dieciséis periodos y una lámina de oro justo antes de su primera capa. La composición de sus capas es silicio poroso; sus espesores están dados, aproximadamente, por $a = 105.76nm$ y $b = 90.40nm$; y sus índices de refracción están dados por $n_a = 1.4939$ y $n_b = 1.7477$. Los espejos el eligieron con estas características para así poder corroborar los resultados del análisis numérico de la sección (4.2).

4.3. RESULTADOS EXPERIMENTALES

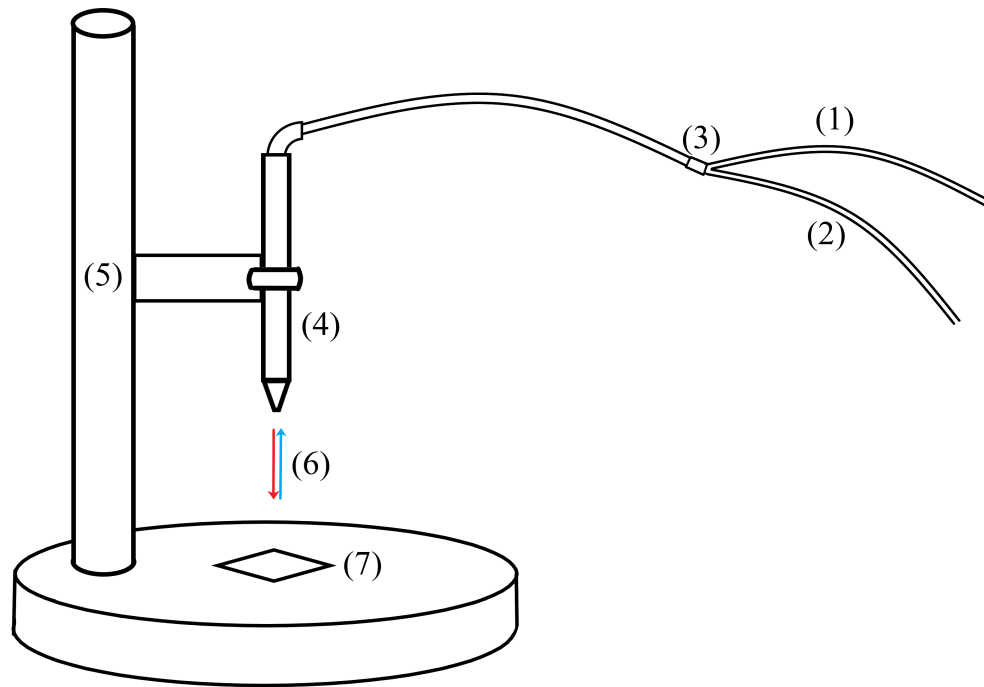


Figura 4.7: Esquema del arreglo para medir reflectancia: (1) fibra hacia la fuente, (2) fibra hacia el analizador, (3) cople, (4) cabezal, (5) soporte del cabezal, (6) incidencia y reflexión de luz, (7) muestra de espejo de Bragg.

En pocas palabras, dicho arreglo se logra conectando la fibra de la fuente de luz y la fibra del analizador de señales a un cople que junta ambas fibras en un solo cable que, posteriormente, se conecta al cabezal del aparato. Dada la configuración mencionada, el cabezal sirve tanto de emisor como de recolector de señales hacia y desde la muestra del espejo de Bragg. La señal recolectada viaja hacia y por el cable del el analizador, el cual la interpreta y la despliega como una gráfica en una computadora con el software (agregar nombre) instalado.

2. El segundo equipo, consiste en un vibrómetro láser modelo: "OMS Laser Point LP01", junto con sus respectivos aditamentos. Con él, se intentaron medir las vibraciones que produce la incidencia de radiación electromagnética en un espejo de Bragg idéntico al usado en el equipo anterior.

Este equipo no posee indicaciones para una armar una configuración presta-

4.3. RESULTADOS EXPERIMENTALES

blecida, ya que puede usarse para una amplia gama de trabajos y mediciones. En este caso, para medir las vibraciones inducidas en el espejo de Bragg, se optó por armar el siguiente arreglo base:

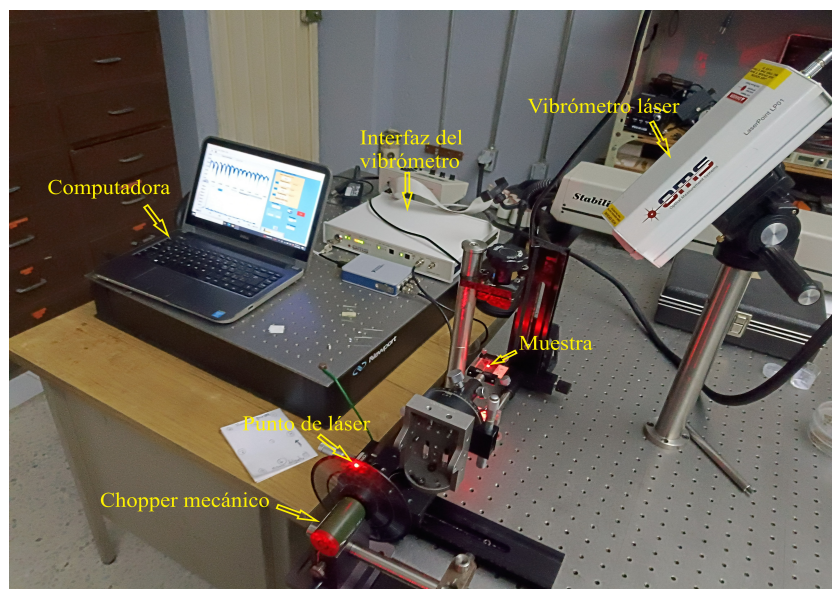


Figura 4.8: Arreglo base para el vibrómetro.

En este arreglo, el haz de luz emitido por el láser es modulado por un chopper mecánico, para luego ser reflejado hacia la muestra por un espejo. El vibrómetro láser es apuntado hacia la muestra, para así recabar información acerca de sus modos de vibración. En adición a esto, el vibrómetro está conectado a su interfaz, la cual puede limpiar el ruido electromagnético de las mediciones, así como también enviar la información obtenida hacia una computadora que, a su vez, la despliega en forma de gráficas.

Es importante que se ponga de manifiesto que la longitud de onda del láser fue de $633nm$. La razón de esta elección fue simplemente la disponibilidad de equipo.

4.3. RESULTADOS EXPERIMENTALES

4.3.1. ESPECTROFOTÓMETRO

En esta subsección se expondrán los resultados experimentales obtenidos mediante el trabajo con el espectrofotómetro previamente mencionado.

Una meta importante de este trabajo de tesis es, en la medida de lo posible, comparar la teoría con el experimento. Así pues, para hacer dicha comparación conviene mostrar los resultados obtenidos junto con los calculados para la reflectancia en la sección 4.2:

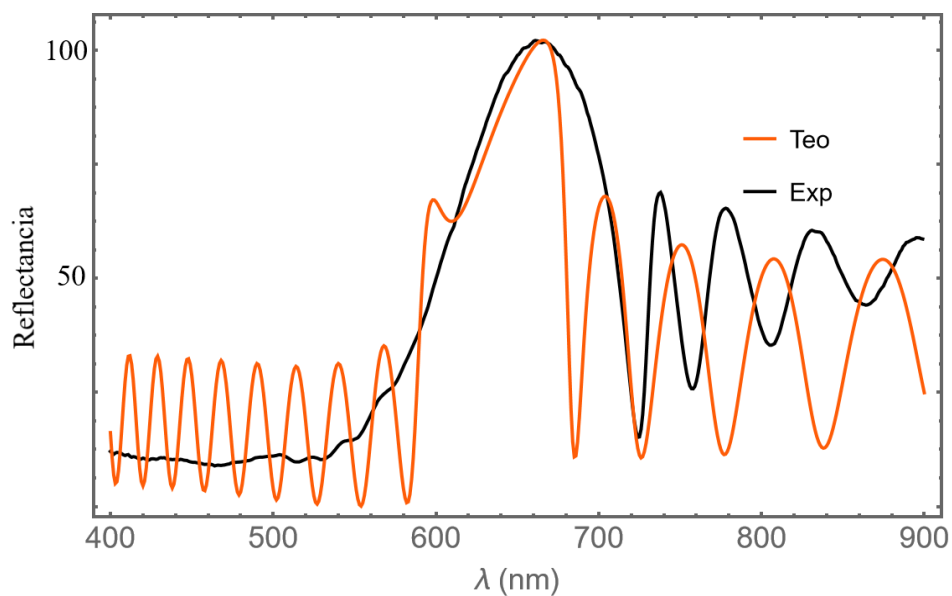


Figura 4.9: Reflectancia teórica y experimental para un espejo de Bragg de deisiseis periodos y una capa de 5nm de oro

4.3. RESULTADOS EXPERIMENTALES

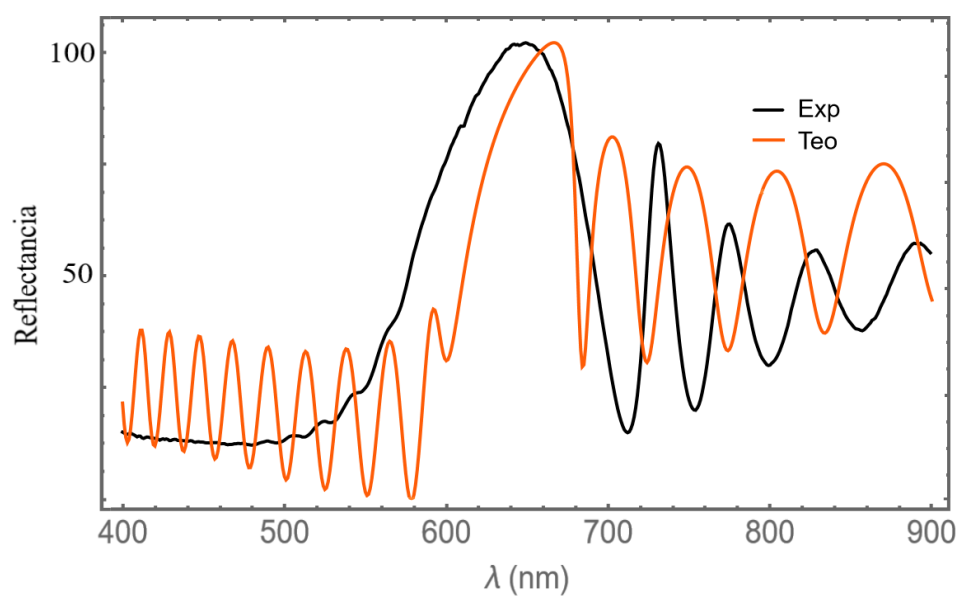


Figura 4.10: Reflectancia teórica y experimental para un espejo de Bragg de deisiseis periodos y una capa de 10nm de oro

4.3. RESULTADOS EXPERIMENTALES

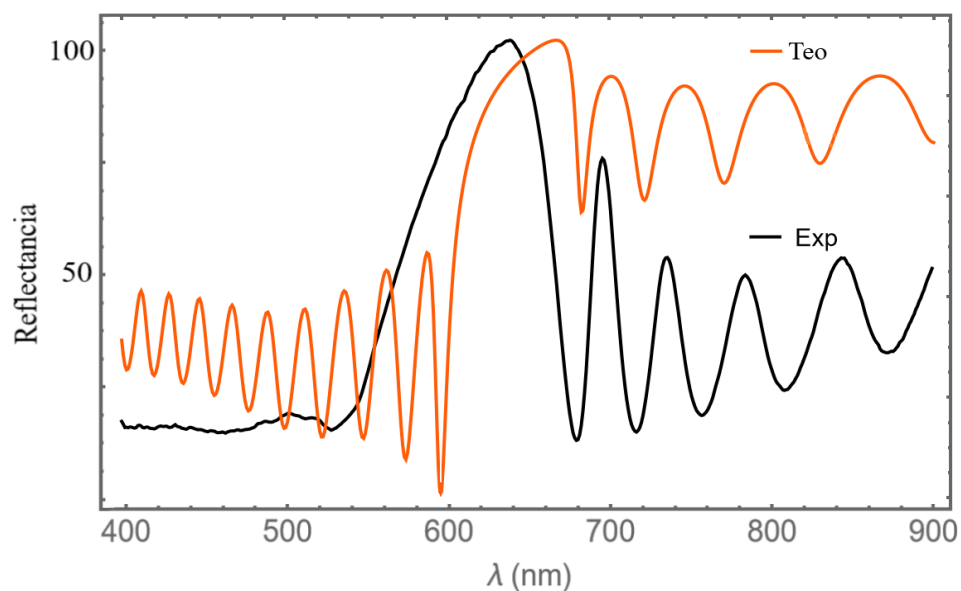


Figura 4.11: Reflectancia teórica y experimental para un espejo de Bragg de deisiseis periodos y una capa de 20nm de oro

Es notorio que las gráficas son similares para longitudes de onda mayores a los 550nm y menores a 650nm . La primera discrepancia se debe a que, para longitudes de onda menores a 550nm , las capas del espejo de Bragg utilizado en el experimento (hechas de silicio poroso) absorben luz; efecto que no se toma en cuenta en la teoría utilizada en este trabajo de tesis. La segunda discrepancia se debe a que, para longitudes de onda mayores a 650nm , las capas del espejo de Bragg dispersan luz; efecto que, de nuevo, no se toma en cuenta en la teoría utilizada en este trabajo de tesis.

Además, las gráficas de esta subsección (las experimentales) y las gráficas de la sección 4.2 (las numéricas) no estaban normalizadas de la misma manera. Así pues, tuvo que hacerse un cambio de escala para hacer que los máximos coincidieran y, de esta manera, poder hacer una mejor comparación.

Por último, sucede que, en la práctica, los espejos de Bragg son muy frágiles. Esto hace que se deterioren muy fácilmente; lo que se traduce, a fin de cuentas, en mayores discrepancias entre el experimento y la teoría.

4.3.2. VIBRÓMETRO

Antes de pasar la discusión de lo obtenido, es necesario exponer un poco de la teoría que está detrás del funcionamiento del vibrómetro [14]:

Una de las partes más importantes del arreglo descrito anteriormente es el chopper óptico. Con él, se corta el láser en pulsos de la misma longitud. Cuando estos pulsos inciden en la muestra de espejo de Bragg, le imprimen una fuerza que, en promedio, puede considerarse como constante en el tiempo. Bajo esta fuerza, el espejo se puede considerar un sistema oscilante sencillo, que puede verse sometido a oscilaciones tanto propias como forzadas, al igual que un péndulo en un medio de fricción viscoso sobre el que actúa una fuerza de magnitud constante [15]. La ecuación diferencial de este sistema dinámico viene dada por:

$$\ddot{z} + 2h\dot{z} + \omega_0^2 z = \langle a_z \rangle_T \quad ; \quad \text{para } jT < t < (n_{luz} + j)T, \quad (4.4)$$

$$\ddot{z} + 2h\dot{z} + \omega_0^2 z = 0 \quad ; \quad \text{para } (n_{luz} + j)T < t < (n_{luz} + j + 1)T, \quad (4.5)$$

en donde j es un número real que empieza en cero y aumenta de uno en uno, t es el tiempo, z es un desplazamiento del oscilador, ω_0 es su frecuencia natural de oscilación, T es su periodo (relacionado con la frecuencia ω con la que sea que esté oscilando el sistema media la fórmula usual: $2\pi/\omega$), h es un coeficiente de amortiguamiento, $\langle a_z \rangle_T$ es el promedio temporal de la aceleración en z del oscilador en un cierto periodo T (relacionada con el promedio temporal de la fuerza en z en ese mismo periodo mediante la fórmula: $\langle a_z \rangle_T = \langle F_z \rangle_T A/m$, con A siendo el área transversal efectiva del espejo que queda expuesta al pulso láser y m siendo su masa) y n_{luz} es la fracción de T en la cual el pulso láser incide sobre el espejo.

En pocas palabras, la ecuación (4.4) está dada para un tiempo en el cual el láser está incidiendo en el espejo (y por eso la aceleración no es nula), mientras que, la ecuación (4.5), está dada para un tiempo en el cual el láser no está incidiendo sobre el espejo (y por eso la aceleración es nula). El cambio

4.3. RESULTADOS EXPERIMENTALES

de una condición a la otra está dada por el aumento de t , pues este señala el paso de un periodo T al siguiente.

Ahora, el vibrómetro usado en este trabajo de tesis emite un haz de radiación infrarroja de $730nm$ (esto es necesario ya que longitudes de onda menores podrían, en principio, hacer vibrar por si solas la muestra y así interferir con las mediciones). Este haz se enfoca a la superficie oscilante de la cual se quiere obtener información (el espejo, en este caso). Debido al efecto Doppler, la frecuencia de la luz infrarroja que se refleja hacia el vibrómetro varía dependiendo de si la superficie en cuestión se desplaza hacia atrás o adelante. Esta variación de frecuencia o corrimiento Doppler se mide con un interferómetro interno, el cual hace una demodulación del corrimiento de frecuencia y transforma ese corrimiento a una señal de voltaje o en una corriente de datos digital. Con esto, el vibrómetro puede inferir las velocidades y desplazamientos realizados por la muestra.

En este trabajo de tesis no se va a ahondar en cómo calcular la fuerza ejercida en el espejo basándose en las mediciones del vibrómetro, simplemente se va a reportar qué se quiso medir y qué se obtuvo en tales mediciones:

Se intentaron medir tanto las fuerzas sobre el eje del cristal como en una dirección perpendicular a él. Para lo primero, simplemente se adoptó en arreglo descrito en la figura (4.6), con la muestra colocada de manera paralela al suelo. Para lo segundo, se adoptó el mismo arreglo previamente narrado, pero, ahora, se colocó sobre el cristal a una esfera de rubí con una densidad de $3.9gr/cm^3$ y un radio de $0.043cm$. Luego, tanto el láser como el vibrómetro se apuntaron sobre la muestra y muy cerca de la esfera, para así tratar de captar algún movimiento longitudinal transmitido del cristal hacia la esfera (véase la figura 4.10). La razón para elegir rubí sobre algún otro material es que este material no se polariza con facilidad y, por lo tanto, no es propenso a generar interferencia electromagnética.

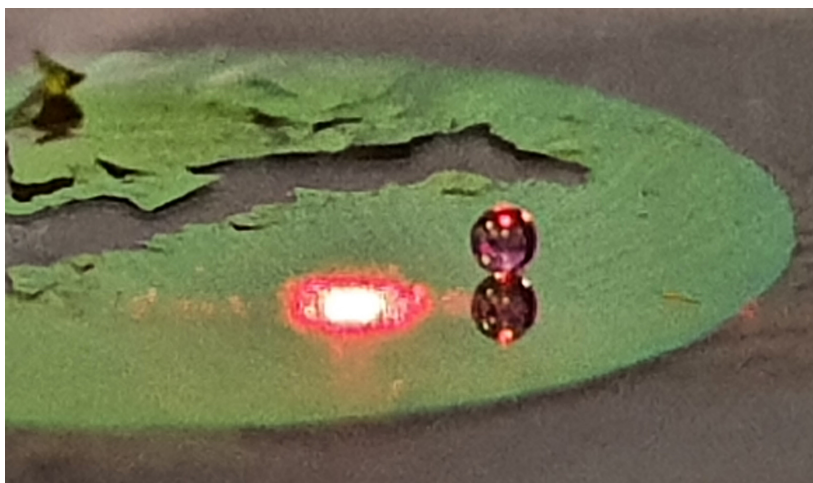


Figura 4.12: Esfera de rubí colocada sobre la muestra de espejo de Bragg. Puede apreciarse una notoria degradación de la misma, así como una coloración verdosa dada por la capa de oro que esta posee.

Sin embargo, en ninguno de los dos casos se logró medir alguna oscilación debida al láser, pues, aunque el filtro de señales logró captar algunos picos en la velocidad alrededor de una frecuencia de $20Hz$ en el chopper óptico (véase la figura 4.11), estos se seguían midiendo aunque se apagara el láser. Esto indica que tales picos se debían a ruido mecánico, acústico y/o electromagnético, mas no a modos de auto oscilación.

El fracaso en la detección de algún modo de oscilación, sobre todo en alguna dirección perpendicular al eje del cristal, se debió, principalmente, a dos factores:

1. El láser que se utilizó era de aproximadamente $40mW$ (tal y como se consideró en el programa de la sección 4.2). Sin embargo, después de un tiempo de trabajo, este comenzaba a disminuir gradualmente su potencia (posiblemente por algún fallo interno). Esto produjo que la potencia aplicada no fuera suficiente para excitar significativamente la muestra. Desafortunadamente, esto se detectó cuando ya se había pasado a un trabajo diferente con el vibrómetro.

4.3. RESULTADOS EXPERIMENTALES

2. Tal y como se pone de manifiesto en la sección (4.2), las fuerzas torcionales que genera una sola capa de oro de $10nm$ de espesor son muy pequeñas y, por lo tanto, muy difíciles de detectar (algo proporcional sucede con los demás espesores). Sin embargo, a la hora de hacer el experimento, aún no se conocía con tanta precisión este dato.

Esto, sumado al ruido electromagnético, acústico y mecánico, hizo casi imposible poder captar información acerca de las vibraciones, pues tal ruido es muy propenso a alterar el estado de vibración de la muestra.

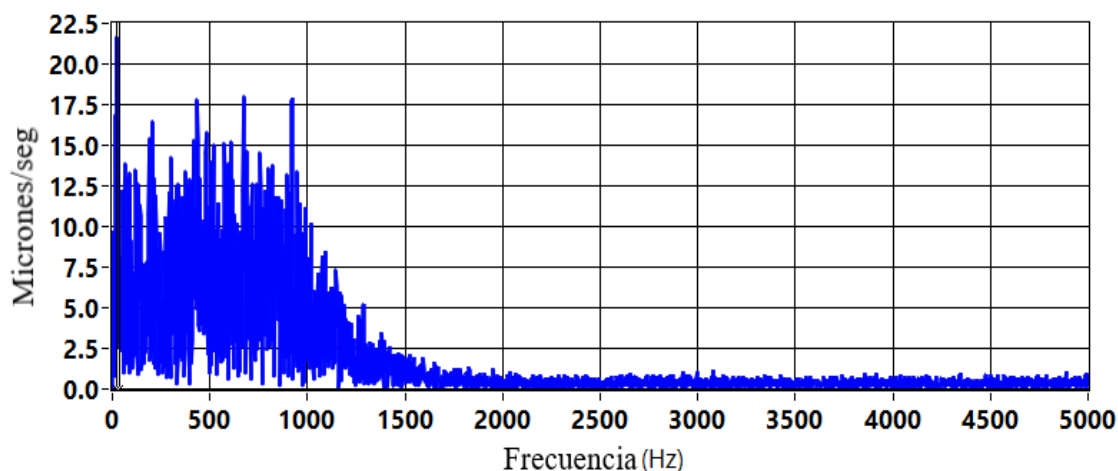


Figura 4.13: Velocidad del oscilador en función de la frecuencia. Posee un pico en aproximadamente $20Hz$. Sin embargo, este se identificó como independiente de la incidencia del láser, poniendo de manifiesto que se debía a ruido mecánico, acústico y/o electromagnético.

Nótese la diferencia entre esta medición y la ilustrada en la figura 1.3 (b).

Conclusiones

1) De las secciones (4.3.1), (4.2) y (3.3) se concluye que el método de la matriz de transferencia junto con el modelo de Drude pueden, dentro de ciertas limitantes (tales como el tamaño de la muestra de metal o la absorción y la dispersión de las capas de dieléctrico del cristal), recrear de manera apropiada los espectros de transmitancia, reflectancia y la presión de radiación (promedio temporal de la fuerza electromagnética) que experimenta un espejo de Bragg que es expuesto a radiación visible.

2) De la secciones (3.1) y (4.2) se concluye que un espejo de Bragg hecho en su totalidad de capas de dieléctrico sólo experimenta fuerza sobre su eje. Sin embargo, si el espejo en cuestión posee una capa de material absorbente, entonces también experimenta fuerzas torcionales.

3) De la sección (4.2) y (4.3.2) se concluye que, con una sola capa de oro, la fuerza electromagnética torcional que experimenta un espejo de Bragg es muy pequeña a comparación de la que experimenta sobre su eje, sin importar el ángulo de incidencia. Tanto es así, que las mediciones experimentales de la misma se vuelven muy complicadas de realizar y corroborar. Si en un futuro trabajo se quisiera aumentar tal fuerza, podría empezarse con incrementar el número de capas de oro.

4) De la sección (4.3.2) se concluye que, al menos en lo que respecta en el trabajo con el vibrómetro tratado, una fuente importante de interferencia a la hora de realizar las mediciones es el ruido electromagnético, acústico o mecánico, pues estos pueden fácilmente alterar el estado de vibración de un espejo de Bragg y así darle información corrupta (con ruido) al vibrómetro.

CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES

Además, también influye mucho el estado en el cual se encuentra el equipo usado, pues un malfuncionamiento de alguno de los aparatos es una fuente importante de pérdida o malinterpretación de los datos.

APÉNDICE A

DENSIDADES DE FUERZA DE LORENTZ

(caso sin pérdidas)

La fuerza electromagnética que experimenta una carga puntual q con velocidad $\vec{v}$ y sometida a un cierto campo eléctrico $\vec{E}$ y a un cierto campo de inducción magnética $\vec{B}$ está dada por:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Si ahora se considera un objeto cargado inmerso en los campos mencionados, entonces, una diferencial de carga dq de él experimentará una fuerza electromagnética dada por:

$$d\vec{F} = \vec{E}dq + \vec{v} \times \vec{B}dq.$$

Si el volumen de esta diferencial de carga es dV , entonces se tiene que la densidad volumétrica de fuerza electromagnética que experimenta el objeto está dada por:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} = \vec{E}\frac{dq}{dV} + \vec{v} \times \vec{B}\frac{dq}{dV} = \rho\vec{E} + \rho\vec{v} \times \vec{B},$$

siendo ρ la densidad volumétrica de carga neta del objeto. Así pues, se obtiene que:

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}, \quad (1)$$

siendo $\vec{J} = \rho \vec{v}$ el campo de densidad de corriente volumétrica del objeto.

A la expresión (1) es a lo que se le llama “densidad de fuerza de Lorentz”.

Por otro lado, en un material con campo de polarización $\vec{P}$, la densidad volumétrica de carga de polarización está dada por: $\rho = -\nabla \cdot \vec{P}$; mientras que, su parcial con respecto al tiempo, cumple lo siguiente: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J}$. Así pues, se obtiene que:

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{P}) = -\nabla \cdot \vec{J}.$$

Suponiendo que las parciales con respecto a la posición y al tiempo conmutan, se llega a:

$$-\nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) = -\nabla \cdot \vec{J}$$

Lo anterior implica que:

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \vec{J}. \quad (2)$$

Por otro lado, la ecuación (2.9) indica que, en el objeto tratado, el campo de desplazamiento eléctrico está dado por:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Si el medio es lineal y ϵ es su permitividad relativa, se tiene que:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}. \quad (3)$$

Bajo este supuesto, se llega a la igualdad:

$$\epsilon_0 \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

$$\Longleftrightarrow \vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \vec{E}. \quad (4)$$

Ahora, supóngase que el objeto tratado es un dieléctrico eléctricamente neutro. Así pues, punto a punto la densidad de carga volumétrica neta en él será nula; tanto la que se pueda inducir por polarización como la asociada a la carga libre (i.e. $\rho = 0$). De esta manera, (1) queda como:

$$\vec{f} = \vec{J} \times \vec{B}. \quad (5)$$

► Nota: (5) es una densidad de fuerza eléctrica por unidad de volumen. Pero, para llegar a esta expresión, se usó que la carga neta en el objeto en cuestión es nula (i.e. un objeto eléctricamente neutro). Esto, inicialmente, puede resultar contradictorio, ya que, a primera vista, si no existe carga volumétrica neta, entonces no puede haber fuerza volumétrica neta. Sin embargo, no existe tal contradicción, pues, pese a que no hay carga volumétrica neta, sí hay corrientes netas; sólo que no asociadas a un movimiento de carga neta, sino, más bien, a un cambio en el tiempo en la polarización neta del objeto (tal y como lo señala 2). Estas corrientes son conocidas como “corrientes de polarización”. Esto queda bien señalado en (5), pues se está poniendo de manifiesto que la fuerza en cuestión depende de las corrientes netas, no tanto de la carga. De esta manera, el campo que produce la fuerza es el campo de inducción magnética (que actúa sobre las corrientes) y no el campo eléctrico (que actúa sobre la carga neta)■

Ahora, sustituyendo (4) en (2) se obtiene que:

$$\vec{J} = \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0(\epsilon - 1)\vec{E}) = \epsilon_0(\epsilon - 1)\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} .$$

Así pues, la expresión (5) puede reescribirse como:

$$\vec{f} = \epsilon_0(\epsilon - 1)\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} = \epsilon_0(\epsilon - 1)\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \mu_0 \vec{H} ,$$

en donde se usó la ecuación (2.12).

Por lo tanto, se obtiene que:

$$\vec{f} = \epsilon_0(\epsilon - 1)\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \mu_0 \vec{H} .$$

Para fines prácticos, conviene trabajar con una densidad de fuerza promediada en el tiempo, es decir, con el promedio temporal de $\vec{f}$, es decir, con $\langle \vec{f} \rangle$.

La forma corta de obtener a $\langle \vec{f} \rangle$ es notado que $\vec{f}$ es igual al producto cruz de dos campos vectoriales y usando el siguiente resultado:

En general, el promedio temporal del producto cruz dos campos vectoriales es igual a un medio de la parte real del producto cruz del conjugado de la versión compleja de uno de los campos y la versión compleja del otro campo [18].

Específicamente, para $\langle \vec{f} \rangle$, el resultado anterior se ve así:

$$\langle \vec{f} \rangle = \frac{1}{2} Re \left(\epsilon_0(\epsilon - 1) \frac{\partial \vec{E}_c^*}{\partial t} \times \mu_0 \vec{H}_c \right) ,$$

en donde $\vec{E}_c$ y $\vec{H}_c$ son, respectivamente, las versiones complejas de $\vec{E}$ y $\vec{H}$.

Si se supone que $\vec{E}_c$ es al menos proporcional a $\hat{u}e^{i\omega t}$, en donde $\hat{u}$ es un vector unitario constante y ω es la frecuencia de $\vec{E}$, entonces $\vec{E}_c^*$ será al menos proporcional a $\hat{u}e^{-i\omega t}$ y, por último, $\frac{\partial \vec{E}_c^*}{\partial t}$ será al menos proporcional a $-i\omega\hat{u}e^{-i\omega t} = -i\omega\vec{E}_c^*$. Así pues, $\langle \vec{f} \rangle$ puede escribirse como:

$$\langle \vec{f} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(-i\omega\epsilon_0\mu_0(\epsilon - 1)\vec{E}_c^* \times \vec{H}_c). \quad (6)$$

Es importante que se recalque que (6) es el promedio temporal de la densidad volumétrica de fuerza electromagnética. Esto quiere decir que sus unidades son: N/m^3

Ahora, supóngase que se tiene un cristal fotónico de N capas con índices de refracción alternantes (ver la figura 2). Se puede demostrar que, cuando una onda EM incide en él, la carga superficial de polarización espontanea que se genera en la interfaz que une a su capa $l + 1$ y l está dada por [19]:

$$\rho_{s,l} = -\hat{n} \cdot (\vec{P}_{l+1} - \vec{P}_l),$$

en donde $\hat{n}$ es un vector unitario normal a las capas mencionadas y $\vec{P}_{l+1}$ y $\vec{P}_l$ son, respectivamente, los campos de polarización en la capas $l + 1$ y l (ver la figura 1).

► Nota: Aunque un material se considere eléctricamente neutro, este se dota de una carga de polarización superficial a la hora de ser expuesto a un campo electromagnético. Tal cosa sucede por qué los campos en cuestión producen acumulaciones de cargas en sus orillas (o superficies). En este caso, la mayor contribución a la fuerza que pueda darse en la superficie sí es debida al campo eléctrico ■

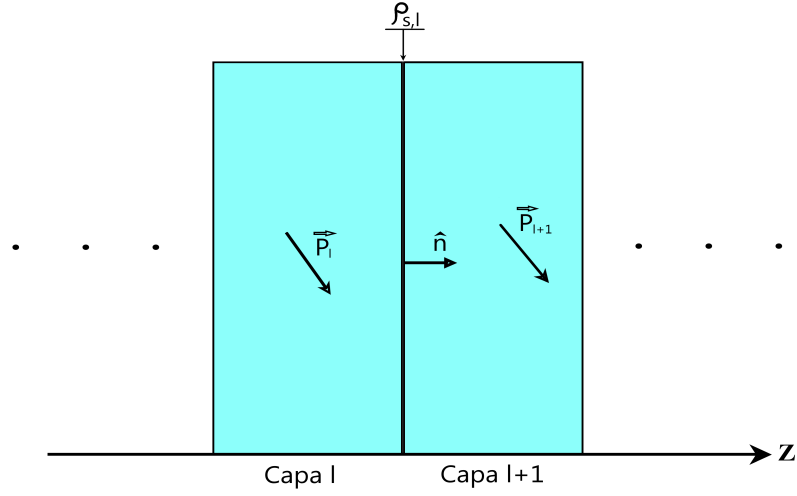


Figura 1: Representación de los campos de polarización en las capas l y $l+1$, así como de la densidad de carga ligada que genera en la interfaz que las une.

En el sistema tratado, el de la fuerza de Lorentz por unidad de área que existe entre las capas mencionadas se obtiene multiplicando $\rho_{s,l}$ por el promedio de las componentes del campo eléctrico que son perpendiculares a las capas y que existen entre dichas capas, es decir, se obtiene mediante la expresión [19]:

$$F_{z,l} = \rho_{s,l} \frac{1}{2} (E_{z,l} + E_{z,l+1}) , \quad (7)$$

en donde:

I) el cristal se encuentra acomodado de tal forma que el eje Z es paralelo a la dirección perpendicular a sus capas.

II) $E_{z,l+1}$ es la componente del campo eléctrico que es perpendicular a las capas, que existe entre dichas capas y que se encuentra del lado de la capa $l+1$.

III) $E_{z,l}$ es la componente del campo eléctrico que es perpendicular a las capas, que existe entre dichas capas y que se encuentra del lado de la capa l .

Es importante que se ponga de manifiesto que el subíndice z de $E_{z,l+1}$ y $E_{z,l}$ se debe a que, dado el supuesto (I), tales cantidades son las componentes z del campo eléctrico que existe entre las capas tratadas. Así mismo, el subíndice z de $F_{z,l}$ se debe a que, dado el supuesto (I), las coordenadas z son las que describen las posiciones de las intersecciones de las capas de cristal fotónico.

Una convención y razonamiento análogos puede extenderse para las demás cantidades tratadas en lo que sigue de este trabajo.

Ahora, usando las condiciones de continuidad del campo de desplazamiento eléctrico ($\vec{D}$) se obtiene que su componente perpendicular a las capas tratadas, evaluada en la superficie de contacto de dichas capas, cumple lo siguiente:

$$D_l^\perp = D_{l+1}^\perp , \quad (8)$$

en donde $D_m^\perp$ es la componente del campo $\vec{D}$ que es perpendicular a las capas, que existe entre dichas capas y que se encuentra del lado de la capa m ; $m = l, l + 1$.

Combinando la ecuación (3) y la ecuación (8) se puede obtener que:

$$\epsilon_l E_{z,l} = \epsilon_{l+1} E_{z,l+1} ,$$

en donde $E_{z,l+1}$ y $E_{z,l}$ son las cantidades anteriormente tratadas y ϵ_{l+1} y ϵ_l son cantidades referentes al producto $\epsilon_0 \epsilon$ en las capas $l + 1$ y l respectivamente. Lo anterior implica que:

$$E_{z,l+1} = \frac{\epsilon_l}{\epsilon_{l+1}} E_{z,l} . \quad (9)$$

Sustituyendo (9) en la expresión (7) se obtiene:

$$F_{z,l} = \frac{1}{2}\rho_{s,l}\left(E_{z,l} + \frac{\epsilon_l}{\epsilon_{l+1}}E_{z,l}\right) = \frac{1}{2}\rho_{s,l}\left(1 + \frac{\epsilon_l}{\epsilon_{l+1}}\right)E_{z,l} .$$

Por lo tanto, se llega a que:

$$F_{z,l} = \frac{1}{2}\rho_{s,l}\left(1 + \frac{\epsilon_l}{\epsilon_{l+1}}\right)E_{z,l} .$$

Ahora, la ecuación (4) puede reescribirse como:

$$\vec{P}_l = \epsilon_0(\epsilon_l - 1)\vec{E}_l , \quad (10)$$

en donde las cantidades escritas poseen significados análogos a los mencionados en los desarrollos anteriores.

Dadas las características supuestas para este problema, la expresión $\rho_{s,l} = -\hat{n} \cdot (\vec{P}_{l+1} - \vec{P}_l)$ puede ser reescrita como $\rho_{s,l} = -\hat{z} \cdot (\vec{P}_{l+1} - \vec{P}_l)$, pues el eje Z se supuso paralelo a la dirección perpendicular a sus capas. En esta última operación sólo van a sobrevivir las componentes z de $\vec{P}_{l+1}$ y $\vec{P}_l$. Así pues, la expresión original para $\rho_{s,l}$ puede reescribirse como:

$$\rho_{s,l} = -(P_{z,l+1} - P_{z,l}) ,$$

bajo el entendido de que $P_{z,l+1}$ y $P_{z,l}$ son, respectivamente, las componentes z de $\vec{P}_{l+1}$ y $\vec{P}_l$.

Con todo esto, la igualdad (10) conduce a:

$$P_{z,m} = \epsilon_0(\epsilon_m - 1)E_{z,m} ; \text{ para } m = l, l+1 .$$

Esto, a fin de cuentas, lleva a la doble igualdad:

$$\rho_{s,l} = -(P_{z,l+1} - P_{z,l}) = -(\epsilon_0(\epsilon_{l+1} - 1)E_{z,l+1} - \epsilon_0(\epsilon_l - 1)E_{z,l}) .$$

Luego, usando (9) se llega a:

$$\begin{aligned} \rho_{s,l} &= -\left(\epsilon_0(\epsilon_{l+1} - 1)\frac{\epsilon_l}{\epsilon_{l+1}}E_{z,l} - \epsilon_0(\epsilon_l - 1)E_{z,l}\right) . \\ &= -\epsilon_0\left((\epsilon_{l+1} - 1)\frac{\epsilon_l}{\epsilon_{l+1}} - (\epsilon_l - 1)\right)E_{z,l} \\ &= -\epsilon_0\left(\frac{(\epsilon_{l+1} - 1)\epsilon_l - (\epsilon_l - 1)\epsilon_{l+1}}{\epsilon_{l+1}}\right)E_{z,l} \\ &= -\epsilon_0\left(\frac{\epsilon_{l+1} - \epsilon_l}{\epsilon_{l+1}}\right)E_{z,l} \\ &= \epsilon_0\left(\frac{\epsilon_l}{\epsilon_{l+1}} - 1\right)E_{z,l} . \end{aligned}$$

De esta manera, se llegó a que:

$$\rho_{s,l} = \epsilon_0\left(\frac{\epsilon_l}{\epsilon_{l+1}} - 1\right)E_{z,l} .$$

Sustituyendo este resultado en la expresión (7) se llega a:

$$F_{z,l} = \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{\epsilon_l}{\epsilon_{l+1}} - 1\right)E_{z,l}(E_{z,l} + E_{z,l+1}) .$$

Usando la igualdad (9) se obtiene:

$$\begin{aligned} F_{z,l} &= \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{\epsilon_l}{\epsilon_{l+1}} - 1\right)E_{z,l}\left(E_{z,l} + \frac{\epsilon_l}{\epsilon_{l+1}}E_{z,l}\right) \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{\epsilon_l}{\epsilon_{l+1}} - 1\right)\left(\frac{\epsilon_l}{\epsilon_{l+1}} + 1\right)E_{z,l}^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\left(\frac{\epsilon_l}{\epsilon_{l+1}} \right)^2 - 1 \right) E_{z,l}^2 .$$

Así pues, se obtuvo que:

$$F_{z,l} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\left(\frac{\epsilon_l}{\epsilon_{l+1}} \right)^2 - 1 \right) (E_{z,l})^2 . \quad (11)$$

Es importante poner de manifiesto que (11) puede verse como la fuerza electromagnética por unidad de área que se hace presente en la interfaz que une a la capa l y $l + 1$ del cristal, es decir, tiene unidades de N/m^2

Ahora, si para el cristal tratado se trabaja con polarización transverso-eléctrica (TM) para la luz incidente, entonces la incidencia de luz de una capa a otra del cristal puede representarse de la siguiente manera:

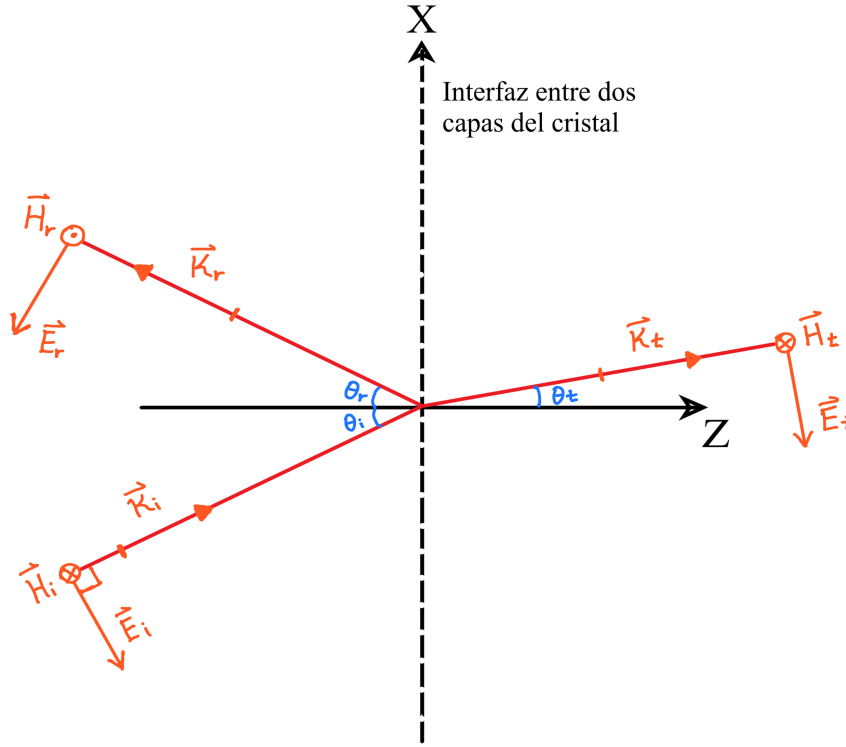


Figura 2: Incidencia de una onda *TM* de una capa a otra del cristal

Así, se tiene que:

$$\hat{k}_i = \hat{x} \sin \theta_i + \hat{z} \cos \theta_i \quad , \quad \hat{k}_r = \hat{x} \sin \theta_r - \hat{z} \cos \theta_r \quad , \quad \hat{k}_t = \hat{x} \sin \theta_t + \hat{z} \cos \theta_t$$

$$\hat{E}_i = -\hat{x} \cos \theta_i + \hat{z} \sin \theta_i \quad , \quad \hat{E}_r = -\hat{x} \cos \theta_r - \hat{z} \sin \theta_r \quad , \quad \hat{E}_t = -\hat{x} \cos \theta_t - \hat{z} \cos \theta_t.$$

En lo anterior, θ_i el ángulo de incidencia de la luz en la interfaz, θ_r su ángulo de reflexión, θ_t su ángulo de transmisión, $\hat{E}_i$ el campo eléctrico unitario que incide en la interfaz, $\hat{E}_r$ el que se refleja, $\hat{E}_t$ el que se transmite. Análogamente, las cantidades relacionadas con el campo magnético para el campo magnético $\vec{H}$ y el vector de onda de la luz $\vec{k}$.

Recuérdese que, dada la orientación elegida para el cristal y, puesto que se está trabajando con polarización transversa magnética, el campo magnético en cuestión queda en dirección $\pm \hat{y}$ (i.e. de manera transversal a la interfaz).

Con todo esto, el campo eléctrico incidente ($\vec{E}_i$) puede escribirse en términos de $\hat{E}_i$ y de las exponenciales complejas $e^{ik_x x}$, $e^{ik_z z}$:

$$\vec{E}_i = -A \cos \theta_i e^{ik_x x} e^{ik_z z} \hat{x} + B \sin \theta_i e^{ik_x x} e^{ik_z z} \hat{z}.$$

En lo anterior:

I) A, B son amplitudes complejas.

II) $e^{ik_x x} e^{ik_z z} = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$; con $\hat{k}_i := \vec{k} = (k_x, 0, k_z)$ y $\vec{r} = (x, y, z)$

III) Es necesario que se recuerde que: $|e^{ia}| = 1$ para toda a real.

Con interpretación análoga a la anterior, se tiene que el campo eléctrico reflejado está dado por:

$$\vec{E}_r = -A \cos \theta_r e^{ik_x x} e^{-ik_z z} \hat{x} - B \sin \theta_r e^{ik_x x} e^{-ik_z z} \hat{z}.$$

En lo anterior se escribió $-k_z$ en vez de k_z ya que $\hat{k}_r$ posee unas componentes z que son el negativo de las componentes z que posee $\hat{k}_i$.

Luego, usando que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, es decir, usando que $\theta_r = \theta_i$, se llega a que:

$$\vec{E}_r = -A \cos \theta_i e^{ik_x x} e^{-ik_z z} \hat{x} - B \sin \theta_i e^{ik_x x} e^{-ik_z z} \hat{z}.$$

Ahora, el campo eléctrico total dentro de cada una de las capas del cristal va a ser igual a la suma de $\vec{E}_i$ y $\vec{E}_r$, es decir, va a ser:

$$\begin{aligned}\vec{E}_T &= \vec{E}_i + \vec{E}_r \\ &= -\cos\theta_i(Ae^{ik_z z} + Be^{-ik_z z})e^{ik_x x}\hat{x} + \sin\theta_i(Ae^{ik_z z} - Be^{-ik_z z})e^{ik_x x}\hat{z}. \quad (12)\end{aligned}$$

Esto quiere decir que $\vec{E}_T$ puede verse como:

$$\vec{E}_T = (E_{T_x}, 0, E_{T_z}).$$

Ahora, combinando la ecuación (2.3) con (2.8) se obtiene: $\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$. Y, si $\vec{H}$ es al menos proporcional a $\hat{u}e^{i\omega t}$, en donde $\hat{u}$ es un vector unitario constante y ω es la frecuencia de $\vec{E}$ y $\vec{H}$, entonces se tiene que: $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = i\omega \hat{u}e^{i\omega t} = i\omega \vec{H}$. Así pues, queda que:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -i\omega\mu_0 \vec{H} \\ \iff \vec{H} &= -\frac{\nabla \times \vec{E}}{i\omega\mu_0}.\end{aligned}$$

Así pues, se tiene que:

$$\vec{H}_T = -\frac{\nabla \times \vec{E}_T}{i\omega\mu_0} = -\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_{T_x} & 0 & E_{T_z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{i\omega\mu_0}(\partial_z E_{T_x} - \partial_x E_{T_z})\hat{y}.$$

De esta manera, $\vec{H}_T$ sólo posee componente en $\hat{y}$, así que puede escribirse como:

$$\vec{H}_T = (0, H_{T_y}, 0).$$

Nótese que:

$$\begin{aligned}\partial_z E_{T_x} &= -ik_z \cos \theta_i (Ae^{ik_z z} - Be^{-ik_z z}) e^{ik_x x} \\ &= -ik \cos^2 \theta_i (Ae^{ik_z z} - Be^{-ik_z z}) e^{ik_x x}.\end{aligned}$$

$$\partial_x E_{T_z} = ik_x \sin \theta_i (Ae^{ik_z z} - Be^{-ik_z z}) e^{ik_x x} = ik \sin^2 \theta_i (Ae^{ik_z z} - Be^{-ik_z z}) e^{ik_x x}.$$

Para entender lo anterior es necesario recordar que $k_z = k \cos \theta_i$, $k_x = k \sin \theta_i$.

De esta manera, se obtiene que:

$$\begin{aligned}\partial_z E_{T_x} - \partial_x E_{T_z} &= -ik(\cos^2 \theta_i + \sin^2 \theta_i)(Ae^{ik_z z} - Be^{-ik_z z}) e^{ik_x x} \\ &= -ik(Ae^{ik_z z} - Be^{-ik_z z}) e^{ik_x x}.\end{aligned}$$

Así pues, se obtiene:

$$\vec{H}_T = \frac{k}{\omega \mu_0} (Ae^{ik_z z} - Be^{-ik_z z}) e^{ik_x x} \hat{y}.$$

Considerando todo lo anterior, es correcto afirmar que, para la capa l del cristal tratado, se tiene que (ver la figura 3):

$$\begin{aligned}\vec{E}_{T_l} = & -\cos \theta_l (A_l e^{ik_{z_l}(z-z_l)} + B_l e^{-ik_{z_l}(z-z_l)}) e^{ik_x x} \hat{x} \\ & + \sin \theta_l (A_l e^{ik_{z_l}(z-z_l)} - B_l e^{-ik_{z_l}(z-z_l)}) e^{ik_x x} \hat{z},\end{aligned}\quad (13)$$

$$\vec{H}_T = \frac{k_l}{\omega \mu_0} (A_l e^{ik_{z_l}(z-z_l)} - B_l e^{-ik_{z_l}(z-z_l)}) e^{ik_x x} \hat{y}, \quad (14)$$

siendo k_l el módulo de k en la capa l .

Nótese que estas expresiones son similares a la expresión (2.13).

Por otro lado, nótese que, dada la naturaleza de la incidencia tratada, la componente k_x queda paralela a las interfaces del cristal. Así pues, por las condiciones de frontera, tal componente se conserva (mantiene inalterada) en la propagación de la luz por todo el cristal. De esta manera, no es necesario agregarle algún subíndice.

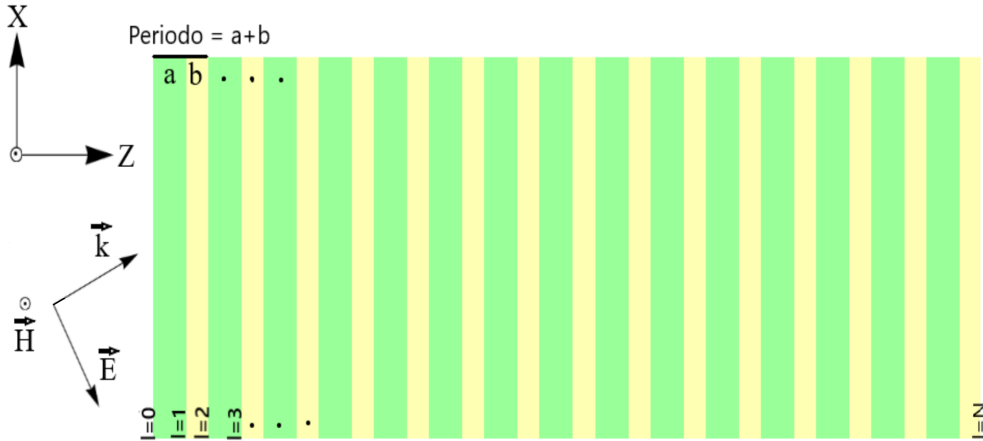


Figura 3: Luz en polarización TM incidiendo en un cristal fotónico de N capas ordenadas por el índice l

Ahora, en vista de que ya se está tratando con las versiones complejas de los campos eléctricos y magnéticos, la ecuación (6) puede reescribirse simplemente como:

$$\langle \vec{f} \rangle = \frac{1}{2} Re(-i\omega\epsilon_0\mu_0(\epsilon - 1)\vec{E}^* \times \vec{H})$$

Así pues, con miras a calcular $\langle \vec{f} \rangle$, primero se calculará $\vec{E}^* \times \vec{H}$:

$$\vec{E}^* \times \vec{H} = \vec{E}_T^* \times \vec{H}_T = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ E_{Tx}^* & 0 & E_{Tz}^* \\ 0 & H_{Ty} & 0 \end{vmatrix} = -H_{Ty}E_{Tz}^*\hat{x} + E_{Tx}^*H_{Ty}\hat{z}.$$

De esta manera:

$$\langle \vec{f} \rangle = \frac{1}{2} Re(-i\omega\epsilon_0\mu_0(\epsilon - 1)(-H_{Ty}E_{Tz}^*\hat{x} + E_{Tx}^*H_{Ty}\hat{z})).$$

Así:

$$\langle \vec{f} \rangle_x = \frac{1}{2} Re(i\omega\epsilon_0\mu_0(\epsilon - 1)H_{Ty}E_{Tz}^*),$$

$$\langle \vec{f} \rangle_y = 0,$$

$$\langle \vec{f} \rangle_z = \frac{1}{2} Re(-i\omega\epsilon_0\mu_0(\epsilon - 1)E_{Tx}^*H_{Ty}).$$

Para cualquier capa l del cristal, se pueden calcular sus correspondientes $\langle \vec{f} \rangle_x$ y $\langle \vec{f} \rangle_z$, es decir, se pueden calcular $\langle \vec{f} \rangle_{x,l}$ y $\langle \vec{f} \rangle_{z,l}$. Para esto, es necesario usar las ecuaciones (13) y (14) para sustituir sus componentes en las expresiones anteriores. Haciendo esto, se tiene:

$$\begin{aligned} \langle \vec{f} \rangle_{x,l} = \frac{1}{2} Re \Big(i\omega\epsilon_0\mu_l(\epsilon_l - 1) \frac{k_l}{\omega\mu_l} (A_l e^{ik_{z_l}(z-z_l)} - B_l e^{-ik_{z_l}(z-z_l)}) e^{ik_x x} \Big[\sin \theta_l \\ (A_l e^{ik_{z_l}(z-z_l)} - B_l e^{-ik_{z_l}(z-z_l)}) e^{ik_x x} \Big]^* \Big). \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} Re \left(i\epsilon_0(\epsilon_l - 1)k_l \sin \theta_l (A_l e^{ik_{z_l}(z-z_l)} - B_l e^{-ik_{z_l}(z-z_l)}) \right. \\
 &\quad \left. (A_l^* e^{-ik_{z_l}(z-z_l)} - B_l^* e^{ik_{z_l}(z-z_l)}) \right) \\
 &= \frac{1}{2} Re \left(i\epsilon_0(\epsilon_l - 1)k_l \sin \theta_l (|A_l|^2 + |B_l|^2 - A_l^* B_l e^{-2ik_{z_l}(z-z_l)} - A_l B_l^* e^{2ik_{z_l}(z-z_l)}) \right).
 \end{aligned}$$

Definiendo:

$$\psi_l := k_{z_l}(z - z_l)$$

Se obtiene:

$$\left\langle \vec{f} \right\rangle_{x,l} = \frac{1}{2} Re \left(i\epsilon_0(\epsilon_l - 1)k_l \sin \theta_l (|A_l|^2 + |B_l|^2 - A_l^* B_l e^{-2i\psi_l} - A_l B_l^* e^{2i\psi_l}) \right).$$

Las amplitudes complejas A_l y B_l pueden denotarse en forma polar como:

$$A_l = |A_l| e^{i\psi_{A_l}} \quad , \quad B_l = |B_l| e^{i\psi_{B_l}}.$$

Con esto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \left\langle \vec{f} \right\rangle_{x,l} &= \frac{1}{2} Re \left(i\epsilon_0(\epsilon_l - 1)k_l \sin \theta_l (|A_l|^2 + |B_l|^2 - |A_l||B_l| e^{-i\psi_{A_l}} e^{i\psi_{B_l}} e^{-2i\psi_l} - \right. \\
 &\quad \left. |A_l||B_l| e^{i\psi_{A_l}} e^{-i\psi_{B_l}} e^{2i\psi_l}) \right) \\
 &= \frac{1}{2} Re \left(i\epsilon_0(\epsilon_l - 1)k_l \sin \theta_l (|A_l|^2 + |B_l|^2 - |A_l||B_l| (e^{-i(\psi_{A_l} - \psi_{B_l} + 2\psi_l)} + \right. \\
 &\quad \left. e^{i(\psi_{A_l} - \psi_{B_l} + 2\psi_l)}) \right) \\
 &= \frac{1}{2} Re \left(i\epsilon_0(\epsilon_l - 1)k_l \sin \theta_l (|A_l|^2 + |B_l|^2 - 2|A_l||B_l| \cos(\psi_{A_l} - \psi_{B_l} + 2\psi_l)) \right).
 \end{aligned}$$

Nótese que $\epsilon_0(\epsilon_l - 1)k_l \sin \theta_l (|A_l|^2 + |B_l|^2 - |A_l||B_l|(e^{-i(\psi_{A_l} - \psi_{B_l} + 2\psi_l)} + e^{i(\psi_{A_l} - \psi_{B_l} + 2\psi_l)}))$ es un número real. De esta manera, se llegó a que $\langle \vec{f} \rangle_{x,l}$ es igual a la parte real de i un número real. Pero eso es nulo. Por lo tanto:

$$\langle \vec{f} \rangle_{x,l} = 0.$$

Haciendo un cálculo análogo para $\langle \vec{f} \rangle_{z,l}$ se llega a que:

$$\langle \vec{f} \rangle_{z,l} = -\epsilon_0(\epsilon_l - 1)k_{z_l}|A_l||B_l|\sin(\psi_{A_l} - \psi_{B_l} + 2\psi_l).$$

siendo:

$$k_{z_l} = k \cos \theta_l.$$

Por lo tanto, a fin de cuentas se llegó a que:

$$\langle \vec{f} \rangle_{x,l} = \langle \vec{f} \rangle_{y,l} = 0,$$

$$\langle \vec{f} \rangle_{z,l} = -\epsilon_0(\epsilon_l - 1)k_{z_l}|A_l||B_l|\sin(\psi_{A_l} - \psi_{B_l} + 2\psi_l). \quad (16)$$

Es importante que se note que la dirección z es la dirección en la que se da el cambio en el índice de refracción del cristal (al pasar de una de sus capas a otra) y las direcciones x, y son sus dos direcciones paralelas. Así pues, las ecuaciones que se acaban de deducir ponen de manifiesto que, en promedio, el cristal considerado sólo experimenta densidad volumétrica de fuerza electromagnética en la dirección en la que se da el cambio de su índice de refracción.

Ahora, es importante mencionar que, en la práctica, lo que interesa acerca de la fuerza electromagnética que se hace presente en un medio macroscópico

(tal como un cristal fotónico) es, más que nada, el promedio temporal de la presión (fuerza por unidad de área) que esta puede ejercer. Esta presión es conocida como “presión de radiación”. En un medio multicapa (tal como un espejo de Bragg), esta presión actúa en cada una de las interfaces y volúmenes de dichas capas; teniendo así un valor neto en cada una de ellas, así como un valor neto en todo el medio.

Recuérdese que (16) es la densidad de fuerza volumétrica a lo largo del eje Z , es decir, del eje del cristal tratado en este apéndice. Así pues, la presión de radiación que actúa en todo el volumen del cristal en cuestión será igual a la integral de (16) a lo largo del eje Z , de tal manera que sea abarcado en su totalidad. Lo anterior es intuitivamente claro si se recuerda que las unidades de (16) son N/m^3 y las unidades del eje Z son metros. Así, al integrar (16) sobre dicho eje, el resultado tendrá unidades de N/m^2 , es decir, de presión de radiación.

Ahora, como cada una de las capas del cristal es simétrica y la integral de la suma es la suma de las integrales, entonces basta con hacer una sola de ellas para así conocer la expresión general del resultado en cada una de las capas, es decir, la expresión que da la presión de radiación neta en el volumen de cada una de las capas. Si las posiciones en z de los bordes de una cierta capa se denotan por z_l, z_{l-1} ($z_l > z_{l-1}$), entonces la integral mencionada queda como:

$$\int_{z_{l-1}}^{z_l} \left\langle \vec{f} \right\rangle_z dz = -\epsilon_0(\epsilon_l - 1)k_{z_l} |A_l| |B_l| \int_{z_{l-1}}^{z_l} \sin(\psi_{A_l} - \psi_{B_l} + 2k_{z_l}(z - z_l)) dz.$$

Realizando el cambio de variable:

$$u(z) = \psi_{A_l} - \psi_{B_l} + 2k_{z_l}(z - z_l)$$

se obtiene que:

$$du = 2k_{z_l} dz.$$

Y los límites de integración quedan como:

$$\begin{aligned} u(z_l) &= \psi_{A_l} - \psi_{B_l} + 2k_{z_l}(z_l - z_l) = \psi_{A_l} - \psi_{B_l} , \\ u(z_{l-1}) &= \psi_{A_l} - \psi_{B_l} + 2k_{z_l}(z_{l-1} - z_l) = \psi_{A_l} - \psi_{B_l} - 2k_{z_l}d_l , \end{aligned}$$

en donde:

$$d_l := (z - z_{l-1}).$$

Así pues, la integral anterior queda como:

$$\begin{aligned} -\epsilon_0(\epsilon_l - 1)k_{z_l} |A_l| |B_l| \int_{\psi_{A_l} - \psi_{B_l} - 2k_{z_l}d_l}^{\psi_{A_l} - \psi_{B_l}} \sin(u) \frac{du}{2k_{z_l}} \\ = \frac{\epsilon_0}{2}(\epsilon_l - 1)|A_l||B_l| \cos(u) \Big|_{\psi_{A_l} - \psi_{B_l} - 2k_{z_l}d_l}^{\psi_{A_l} - \psi_{B_l}} . \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene que:

$$\int_{z_{l-1}}^{z_l} \left\langle \vec{f} \right\rangle_z dz = \frac{\epsilon_0}{2}(\epsilon_l - 1)|A_l||B_l|(\cos(\psi_{A_l} - \psi_{B_l}) - \cos(\psi_{A_l} - \psi_{B_l} - 2k_{z_l}d_l)). \quad (17)$$

Es importantente notar y recordar que (17) es la presión de radiación que actúa en el volumen de la capa l del cristal.

Ahora, recuérdese que la expresión (11) describe a la fuerza por unidad de área que actúa en la capa l del cristal. Así, para conocer la presión de radiación neta que actúa en dicha capa, no se necesita más que promedir temporalmente a (11). Así pues, tal promedio es:

$$\langle F_{z,l} \rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 \left(\left(\frac{\epsilon_l}{\epsilon_{l+1}} \right)^2 - 1 \right) \langle (E_{z,l})^2 \rangle . \quad (18)$$

La única componente del campo eléctrico que puede llegar a contribuir a la formación de carga de polarización en las interfaces de las capas del cristal es su componente perpendicular a ellas, es decir, su componente z . Así pues, en $\langle (E_{z,l})^2 \rangle$, lo único que cuenta es la componente z de tal campo, es decir, la componente z de $\vec{E}_T$, es decir, la componente z de (12).

Se puede demostrar que el promedio temporal de la expresión anterior es igual a un medio de su módulo cuadrado. Por lo tanto, para, por ejemplo, la interfaz definida por la posición z_l , se obtiene que:

$$\langle (E_{z,l})^2 \rangle = \frac{1}{2} |E_r(z_l)|^2.$$

Ahora, nótese que:

$$E_r(z_l) = \sin \theta_l \left(A_l e^{ik_{z_l}(z_l - z_l)} - B_l e^{-ik_{z_l}(z_l - z_l)} \right) e^{ik_x x} = \sin \theta_l (A_l - B_l) e^{ik_x x}.$$

De esta manera, se tiene que:

$$|E_r(z_l)|^2 = \sin^2 \theta_l (A_l - B_l) e^{ik_x x} \sin^2 \theta_l (A_l^* - B_l^*) e^{-ik_x x} = \sin^2 \theta_l (A_l - B_l) (A_l^* - B_l^*).$$

Así pues, mediante un procedimiento análogo al seguido cuando se calculó $\langle \vec{f} \rangle_{x,l}$ se llega que:

$$\frac{1}{2} |E_r(z_l)|^2 = \frac{1}{2} \sin^2 \theta_l (|A_l|^2 + |B_l|^2 - 2 |A_l| |B_l| \cos(\psi_{A_l} - \psi_{B_l})).$$

Sustituyendo esto en (18) se llega a:

$$\langle F_{z,l} \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 \left(\left(\frac{\epsilon_l}{\epsilon_{l+1}} \right)^2 - 1 \right) \sin^2 \theta_l (|A_l|^2 + |B_l|^2 - 2 |A_l| |B_l| \cos(\psi_{A_l} - \psi_{B_l})). \quad (19)$$

Así pues, la presión de radiación neta que actúa sobre el cristal se obtiene por la suma capa a capa de (17) y (19), es decir, viene dado por:

$$\begin{aligned} \langle F_{z,T} \rangle = & \sum_{l=0}^N \frac{\epsilon_0}{4} \sin^2 \theta_l \left[\left(\frac{\epsilon_l}{\epsilon_{l+1}} \right)^2 - 1 \right] [|A_l|^2 + |B_l|^2 - 2|A_l||B_l| \cos(\psi_{A_l} - \psi_{B_l})] \\ & + \sum_{l=1}^N \frac{\epsilon_0(\epsilon_l - 1)}{2} |A_l||B_l| [\cos(\psi_{A_l} - \psi_{B_l}) - \cos(\psi_{A_l} - \psi_{B_l} - 2k_{z_l}d_l)] , \end{aligned}$$

La primera sumatoria corresponde a las contribuciones superficiales y la última a las volumétricas.

Es importante que se recuerde que el cristal fotónico considerado posee N capas.

Nótese que, en efecto, (17) y (19) puede sumarse, pues poseen las mismas unidades (N/m^2).

Usualmente, las densidades de fuerza electromagnética obtenidas haciendo uso, a fin de cuentas, de la ley de Lorentz ((16) y (11)), es a lo que se le llama “densidades de fuerza de Lorentz”.

APÉNDICE B

DENSIDADES DE FUERZA DE LORENTZ

(caso con pérdidas)

Esta demostración es en bastantes maneras similar a la realizada en el Apéndice A. La diferencia radica en que, tal y como se pone de manifiesto en las secciones (2.5) y (2.6), en un medio con pérdidas (como el oro) sucede que el vector de onda, la función dieléctrica y el índice de refracción son números complejos. Aún así, la demostración puede transcurrir de manera idéntica hasta llegar a la ecuación (15):

$$\begin{aligned} \langle \vec{f} \rangle_{x,l} = \frac{1}{2} Re \left(i\omega\epsilon_0\mu_l(\epsilon_l - 1) \frac{k_l}{\omega\mu_l} (A_l e^{ik_{z_l}(z-z_l)} - B_l e^{-ik_{z_l}(z-z_l)}) e^{ik_x x} \left[\sin \theta_l \right. \right. \\ \left. \left. (A_l e^{ik_{z_l}(z-z_l)} - B_l e^{-ik_{z_l}(z-z_l)}) e^{ik_x x} \right]^* \right). \end{aligned}$$

A partir de aquí empiezan los cambios, pues, a diferencia de lo considerado en el Apéndice A, ahora se tiene que ϵ_l , k_l , k_{z_l} y k_x son complejos, tal y como se expuso anteriormente. Además, también se tiene que θ_l es un complejo. Al igual que con las otras cantidades, la parte real de θ_l está relacionada con la propagación de la luz en el medio y su parte imaginaria con su absorción.

Luego, los conjugados de $e^{ik_{z_l}(z-z_l)}$ y $e^{ik_x x}$ ya no serán simplemente $e^{-ik_{z_l}(z-z_l)}$ y $e^{-ik_x x}$. Así pues, es necesario usar identidades para desarrollar estas cantidades. Conviene usar, por ejemplo, las siguientes:

Para k en los complejos ($= a + ib$), se tiene que:

$$e^{ik} = e^{i(a+ib)} = e^{ia}e^{-b} = e^{iRe(k)}e^{-Im(k)}.$$

Análogamente, se tiene que:

$$e^{-ik} = e^{-iRe(k)}e^{Im(k)}.$$

Así pues, usando esto junto con la definición $\psi_l := k_{z_l}(z - z_l)$, la ecuación (15) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{f} \right\rangle_{x,l} &= \frac{1}{2} Re \left(i\epsilon_0(\epsilon_l - 1)k_l(A_l e^{i\psi_l} - B_l e^{-i\psi_l})e^{ik_x x}(\sin \theta_l)^* \right. \\ &\quad \left. (A_l^*(e^{i\psi_l})^* - B_l^*(e^{-i\psi_l})^*)(e^{ik_x x})^* \right) \\ &= \frac{1}{2} Re \left(i\epsilon_0(\epsilon_l - 1)k_l(\sin \theta_l)^*(A_l e^{iRe\psi_l} e^{-Im\psi_l} - B_l e^{-iRe\psi_l} e^{Im\psi_l}) \right. \\ &\quad \left. e^{iRek_x x} e^{-Imk_x x} (A_l^* e^{-iRe\psi_l} e^{-Im\psi_l} - B_l^* e^{iRe\psi_l} e^{Im\psi_l}) e^{-iRek_x x} e^{-Imk_x x} \right) \\ &= \frac{1}{2} Re \left(i\epsilon_0(\epsilon_l - 1)k_l(\sin \theta_l)^* [|A_l|^2 e^{-2Im\psi_l} + |B_l|^2 e^{2Im\psi_l} \right. \\ &\quad \left. - (A_l B_l^* e^{2iRe\psi_l} + A_l^* B_l e^{-2iRe\psi_l})] e^{-2Imk_x x} \right) \\ &= \frac{1}{2} Re \left(i\epsilon_0(\epsilon_l - 1)k_l(\sin \theta_l)^* [|A_l|^2 e^{-2Im\psi_l} + |B_l|^2 e^{2Im\psi_l} \right. \\ &\quad \left. - 2Re(A_l B_l^* e^{2iRe\psi_l})] e^{-2Imk_x x} \right). \end{aligned}$$

Las amplitudes complejas A_l y B_l pueden denotarse en forma polar como:

$$A_l = |A_l|e^{i\psi_{A_l}} \ , \ B_l = |B_l|e^{i\psi_{B_l}}.$$

Con esto, se tiene que:

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{f} \right\rangle_{x,l} = & \frac{1}{2} Re \left(i\epsilon_0(\epsilon_l - 1)k_l(\sin \theta_l)^* [|A_l|^2 e^{-2Im\psi_l} + |B_l|^2 e^{2Im\psi_l} \right. \\ & \left. - 2Re(|A_l||B_l|e^{i(2Re\psi_l + \psi_{A_l} - \psi_{B_l})})] e^{-2Imk_x x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{f} \right\rangle_{x,l} = & \frac{1}{2} Re \left(i\epsilon_0(\epsilon_l - 1)k_l(\sin \theta_l)^* [|A_l|^2 e^{-2Im\psi_l} + |B_l|^2 e^{2Im\psi_l} \right. \\ & \left. - 2|A_l||B_l| \cos(2Re\psi_l + \psi_{A_l} - \psi_{B_l})] e^{-2Imk_x x} \right). \end{aligned}$$

Nótese que, en esta última expresión, el número complejo es $i\epsilon_0(\epsilon_l - 1)k_l(\sin \theta_l)^*$, pues todo lo que está después de $(\sin \theta_l)^*$ es un número real. Así pues, se puede escribir:

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{f} \right\rangle_{x,l} = & \frac{1}{2} Re(I_1) [|A_l|^2 e^{-2Im\psi_l} + |B_l|^2 e^{2Im\psi_l} \\ & - 2|A_l||B_l| \cos(2Re\psi_l + \psi_{A_l} - \psi_{B_l})] e^{-2Imk_x x}, \end{aligned}$$

siendo $I_1 := i\epsilon_0(\epsilon_l - 1)k_l(\sin \theta_l)^*$.

Nótese que ahora se obtuvo que $\left\langle \vec{f} \right\rangle_{x,l}$ es no nula y, lo que es más, que depende de la altura en el eje x a la cual incide la luz en el espejo de Bragg (vía $e^{-2Imk_x x}$). Por simplicidad, se supondrá que el haz de luz incide en $x = 0$. De esta manera, se obtiene que:

$$\left\langle \vec{f} \right\rangle_{x,l} = \frac{1}{2} Re(I_1) [|A_l|^2 e^{-2Im\psi_l} + |B_l|^2 e^{2Im\psi_l} - 2|A_l||B_l| \cos(2Re\psi_l + \psi_{A_l} - \psi_{B_l})]. \quad (20)$$

Al igual que en el Apéndice A, la presión de radiación neta en el volumen de la capa l se obtendrá integrando a (20) desde z_{l-1} hasta z_l . De esta manera, las integrales que van a generarse, son:

$$\int_{z_{l-1}}^{z_l} e^{-2Im\psi_l} dz \quad , \quad \int_{z_{l-1}}^{z_l} e^{2Im\psi_l} dz \quad , \quad \int_{z_{l-1}}^{z_l} \cos(2Re\psi_l + \psi_{A_l} - \psi_{B_l}) dz.$$

La primera integral (de izquierda a derecha) tiene el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} \int_{z_{l-1}}^{z_l} e^{-2Im\psi_l} dz &= \int_{z_{l-1}}^{z_l} e^{-2(z-z_l)Imk_{z_l}} dz = \frac{-1}{2Imk_{z_l}} e^{-2(z-z_l)Imk_{z_l}} \Big|_{z_{l-1}}^{z_l} \\ &= \frac{-1}{2Imk_{z_l}} (1 - e^{-2(z_{l-1}-z_l)Imk_{z_l}}) = \frac{-1}{2Imk_{z_l}} (1 - e^{2dl Imk_{z_l}}), \end{aligned}$$

en donde: $dl := z_l - z_{l-1}$.

► Nota: Para la integral anterior es importante tener en cuenta que, para una capa l dada, k_{z_l} es una constante. Además, también se tiene que $Im\psi_l = Imk_{z_l}(z - z_l) = (z - z_l)Imk_{z_l}$. ■

Análogamente, se obtiene:

$$\int_{z_{l-1}}^{z_l} e^{2Im\psi_l} dz = \frac{1}{2Imk_{z_l}} (1 - e^{-2dl Imk_{z_l}}).$$

La última integral se resuelve de manera análoga a la resuelta en el Apéndice A cuando se calculó $\int_{z_{l-1}}^{z_l} \langle \vec{f} \rangle_{z,l} dz$. El resultado es:

$$\begin{aligned} &\int_{z_{l-1}}^{z_l} \cos(2Re\psi_l + \psi_{A_l} - \psi_{B_l}) dz \\ &= \frac{1}{2Rek_{z_l}} [\sin(\psi_{A_l} - \psi_{B_l}) - \sin((\psi_{A_l} - \psi_{B_l} - 2dl Re k_{z_l}))]. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (20) los resultados de estas tres integrales se llega a:

$$\begin{aligned} \langle \vec{f} \rangle_{x,l} = & \frac{1}{2} Re(I_1) \left[-\frac{|A_l|^2}{2Imk_{z_l}} (1 - e^{2dl Imk_{z_l}}) + \frac{|B_l|^2}{2Imk_{z_l}} (1 - e^{-2dl Imk_{z_l}}) \right. \\ & \left. - \frac{|A_l||B_l|}{Rek_{z_l}} [\sin(\psi_{A_l} - \psi_{B_l}) - \sin((\psi_{A_l} - \psi_{B_l} - 2dl Re k_{z_l}))] \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

En cuanto a la presión de radiación neta en la superficie, esta sólo existe en la dirección perpendicular a las caras del cristal (la dirección z), pues en ellas es en donde se produce la carga de polarización.

El proceso para llegar a la nueva expresión para la densidad de fuerza volumétrica sobre el eje z , es decir, a $\langle \vec{f} \rangle_{z,l}$, es análogo al seguido para llegar a la ecuación (21), es decir, a la presión de radiación sobre el eje x . Con esto, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \langle \vec{f} \rangle_{z,l} = & \frac{1}{2} \left[-Re(I_2) \frac{|A_l|^2}{2Imk_{z_l}} (1 - e^{2dl Imk_{z_l}}) + Re(I_2) \frac{|B_l|^2}{2Imk_{z_l}} (1 - e^{-2dl Imk_{z_l}}) \right. \\ & \left. - Re(iI_2) \frac{|A_l||B_l|}{Rek_{z_l}} [\cos(\psi_{A_l} - \psi_{B_l}) - \cos((\psi_{A_l} - \psi_{B_l} - 2dl Re k_{z_l}))] \right], \end{aligned} \quad (22)$$

siendo $I_2 := -i\epsilon_0(\epsilon_l - 1)k_l(\cos \theta_l)^*$.

Tal y como se puso de manifiesto anteriormente, para la dirección z sí existe contribución superficial a la presión de radiación. Sin embargo, esta es muy parecida a la deducida en la ecuación (19) del Apéndice A, ya que la evaluación de $E_r(z)$ en $z = z_l$ anula el argumento de sus exponenciales, quitando así cualquier número complejo que esté en ellos. Sin embargo, como ahora la función dieléctrica y el ángulo son complejos, es necesario tomar su parte real. De esta manera, se obtiene que la densidad de fuerza superficial sobre el eje z está dada por:

$$\langle F_{z,l} \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 Re \left[\left(\left(\frac{\epsilon_l}{\epsilon_{l+1}} \right)^2 - 1 \right) \sin^2 \theta_l \right] (|A_l|^2 + |B_l|^2 - 2|A_l||B_l| \cos(\psi_{A_l} - \psi_{B_l})). \quad (23)$$

► Nota: En la sección (4.1) se cambió el índice l por el índice O , para hacer referencia a que se está tratando con una única capa l y es la capa de oro. ■

APÉNDICE . APÉNDICE B

Bibliografía

- [1] POCHI YEH, *Optical Waves in Layered Media*, primera edición, John Wiley & Sons, EUA, California, 1994.
- [2] G. Lin, A. Coillet, & , Y. K. Chembo. Adv. Opt. Photon. 9, 828 (2017)
- [3] Y. K. Lu,. et al. Spontaneous T-symmetry breaking and exceptional points in cavity quantum electrodynamics systems. Sci. Bull. 63, 1096 (2018).
- [4] M. Aspelmeyer, T. J. Kippenberg, & F. Marquardt, Rev. Mod. Phys. 86, 1391 (2014).
- [5] L. He, S. K. Ozdemir, & L. Yang. Laser Photonics Rev. 7, 60 (2013).
- [6] J. Zhu, S. K. Ozdemir, Y. F. Xiao, L. Li, L. He, D.-R. Chen, L. Yang, Nat. Photonics, 4, 46 (2010).
- [7] J. Zhu, S. K. Ozdemir, L. He, D. R. Chen, L. Yang, Opt. Express, 19, 16195, (2011).
- [8] Y. Wang, P. Shen, J. Liu, Y. Xue, Y. Wang, M. Yao, & L. Shen, Solar RRL,3 (8), 1900181 (2019).
- [9] A. Ashkin, Phys. Rev. Lett., 24, 156 (1970).
- [10] A. Ashkin, and J. M. Dziedzic, Science, Vol. 235, 1517 (1987).
- [11] J. M. Li, T. L. Dong, and G. J. Shan, Prog. Electromagn. Res. 10, 59 (2009).
- [12] Luisa Santillán, M. (06-07-2022). Veleros solares, una opción para naves espaciales. *Ciencia UNAM*. <https://ciencia.unam.mx/leer/1283/veleros-solares-una-opcion-para-impulsar-naves-en-el-espacio>

- [13] DAVID J. GRIFFITHS, *Introduction to electrodynamics*, cuarta edición, PHI Learning, USA, New Jersey, 2013.
- [14] Lilia, Ana. (2007). Propiedades ópticas de Nanopartículas metálicas. Universidad Nacional Autónoma de México.
- [15] The influence of an extended optical mode on the performance of micro-cavity forced oscillator, H. Avalos-Sanchez, E. Y. Hernandez-Méndez, E. Nieto-Ruiz, et al., *Aceptado en: Proceedings of Trends in Electronics and Health Informatics (TEHI 2022)*.
- [16] J. Eduardo Lugo, Rafael Doti, Noemi Sanchez, & Jocelyn Faubert, *Journal of Nanophotonics*, Vol. 8, 2014.
- [17] J. E. Lugo, R. Doti, N. Sanchez, M. B. de la Mora, J. A. del Rio & J. Faubert¹, *SCIENTIFIC REPORTS*, DOI: 10.1038/srep03705.
- [18] JIN AU KONG, *Electromagnetic Wave Theory*, primera edición, John Wiley & Sons, USA, 1990.
- [19] Amit Mizrahi & Levi Schächter, *PHYSICAL REVIEW*, DOI: 10.1103/PhysRevE.74.036504.
- [20] P. B. Johnson & R. W. Christy, *PHYSICAL REVIEW B*, Optical Constants of the Noble Metals.