



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**MODELACIÓN MATEMÁTICA: UN ESTUDIO A LOS LIBROS DE TEXTO
DE MATEMÁTICAS EMPLEADOS POR ESTUDIANTES DE LOS
CENTROS DE ESTUDIOS CIENTÍFICOS Y TECNOLÓGICOS**

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA

ING. GEOVANI DANIEL NOLASCO NEGRETE

DIRECTOR DE TESIS

DR. HONORINA RUIZ ESTRADA

CO-DIRECTOR DE TESIS

DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV

PUEBLA, PUE.

JUNIO, 2020



BUAP

**DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:**

Por este medio le informo que el C:

LIC. GEOVANI DANIEL NOLASCO NEGRETE

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 09 de diciembre de 2020, con la tesis titulada:

***"MODELACIÓN MATEMÁTICA: UN ESTUDIO A LOS LIBROS DE TEXTO DE
MATEMÁTICAS EMPLEADOS POR ESTUDIANTES DE LOS CENTROS DE
ESTUDIOS CIENTÍFICOS Y TECNOLÓGICOS"***

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 11 de junio de 2021

**DRA. LIDIA AURORA HERNANDEZ REBOLLAR
COORDINADORA DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.**



DR/LAH/Tagm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Esta Investigación se realizó gracias al financiamiento del
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT),
De Enero de 2018 a Diciembre 2020.
N.º de CVU 958213

AGRADECIMIENTOS

Agradezco, en primer lugar, a Dios quien es mi fortaleza y escudo. Me otorgó salud en estos tiempos de pandemia y me permitió cumplir con una meta más en mi formación.

A mis asesores:

Dra. Honorina Ruiz Estrada por su paciencia, empeño y dedicación. Por compartir sus conocimientos, experiencia y tiempo. Gracias por sus palabras de aliento y ánimos que permitieron que este trabajo fuera posible.

Dr. Josip Slisko Ignjatov y Dr. Juan Nieto Fausto por sus valiosas sugerencias, aportes y dedicación en la mejora de este trabajo.

A mis profesores, colegas y amigos Ing. Elizabeth Tapia y Lic. Juan Carlos Tapia por compartirme el amor hacia las matemáticas y la enseñanza. Gracias por el impulso para seguir preparándome profesionalmente, por ser una inspiración, por compartir sus experiencias docentes y la pasión por el ajedrez. Un agradecimiento muy especial por permitirme trabajar con sus grupos y poder realizar este trabajo.

Al Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Tlaxcala por permitirme realizar mi estudio en sus aulas.

Al cuerpo docente y administrativo de la Maestría en Educación Matemática de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla por compartir sus conocimientos. Especialmente a Abigail García Martínez por su compromiso y apoyo en la maestría. Al Dr. José Antonio Juárez López y al Dr. Eric Flores Medrano por mostrarme la pasión por la investigación.

A mis padres Luis Nolasco Hernández y Pilar Negrete Alvarado por sus oraciones, el apoyo incondicional, la paciencia y especialmente por su inmenso amor.

A mis hermanos Verónica Jannette y Bruno Ricardo por sus consejos, el apoyo y principalmente por ser un ejemplo a seguir.

Finalmente, a Marjorie Johana Juárez por el apoyo en la elaboración de este escrito y por hacer las noches de desvelo más amenas.

ÍNDICE

RESUMEN	12
ABSTRACT	12
INTRODUCCIÓN	13
Capítulo 1	
1 MARCO CONCEPTUAL	17
1. Planteamiento de problema	17
1.1 Objetivo General	18
1.1.1 Objetivos Específicos	18
1.1.2 Preguntas de investigación	18
Capítulo 2	
2. MARCO TEÓRICO	19
2.1 La modelación matemática educativa	19
2.2 Ciclo de modelación de Borromeo-Ferri	20
Capítulo 3	
3 METODOLOGÍA	23
3.1 Tipo de investigación	23
3.2 Estructura de la investigación	23
3.3 Población y Muestra	24
3.4 Descripción de la estructura didáctica y de las actividades matemáticas	24
3.5 Descripción de la población	27
Capítulo 4	
4 ANÁLISIS A LOS PROBLEMAS DE LOS LIBROS DE TEXTO	28
4.1 Libro de Álgebra	28

4.2	Libro de Geometría y Trigonometría.....	29
4.3	Libro de Geometría Analítica.....	31
4.4	Cálculo Diferencial.....	34
4.5	Cálculo Integral.....	35
4.6	Probabilidad y Estadística.....	36
Capítulo 5		
5	MODELACIÓN EN LOS PROBLEMAS DE LOS LIBROS.....	37
5.1	Fase 1 Resultados de la clasificación de los problemas de los libros de texto.....	37
Capítulo 6		
6	DESEMPEÑO DE ESTUDIANTES A TRAVÉS DEL CICLO DE MODELACIÓN.....	51
6.1	FASE 2 Tránsito de los Estudiantes por la actividad del libro de Texto.....	51
Capítulo 7		
7	DESEMPEÑO DE ESTUDIANTES EN UN PROBLEMA IDÓNEO.....	65
7.1	Fase 3 Tránsito de los estudiantes por el ciclo de modelación.....	65
7.2	Datos.....	69
7.3	Resultado del experimento.....	70
7.2.1	Actividad 1.....	71
7.2.2	Actividad 2.....	71
7.2.3	Actividad 3.....	72
7.2.4	Actividad 4.....	73
7.2.5	Actividad 5.....	73
7.2.6	Actividad 6.....	74
7.2.7	Actividad 7.....	75
7.3	Análisis bajo el ciclo de modelación.....	75
Capítulo 8		

8	CONCLUSIONES.....	78
	Referencias	80
	Apéndice A. Propósitos formativos de las asignaturas de matemáticas pertenecientes al acuerdo secretarial 253	81
	Apéndice B. Clasificación del libro de Álgebra (Trujillo,2018).	82
	Apéndice C. Clasificación del libro de Geometría y Trigonometría (Toalá,2018).	85
	Apéndice D. Clasificación del libro de Geometría Analítica (Pérez A. y Barrios, 2019). ...	90
	Apéndice E. Clasificación del libro de Cálculo Diferencial (Romano, 2018).	95
	Apéndice F. Clasificación del libro de Cálculo Integral (Romano, 2019).	98
	Apéndice G. Clasificación del libro de Probabilidad y Estadística.....	101
	Apéndice H. Instrumento utilizado en la Fase 2.....	104
	Apéndice I. Instrumento utilizado en la fase 3.	105

Índice de Figuras

<i>Figura 2.1 Esquema de modelación de Quiroz y Rodríguez (2015).</i>	20
<i>Figura 2.2 Ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincache, et al., 2018). Figura traducida del inglés al español.</i>	21
<i>Figura 4.1 Problema 2 perteneciente a la actividad 3.2. Tomado del libro de Álgebra (Trujillo,2019).</i>	29
<i>Figura 4.2 Problema 3 perteneciente a la actividad 3.3. Tomado del libro de Álgebra (Trujillo,2019).</i>	29
<i>Figura 4.3 Actividad 15 perteneciente al primer parcial. Tomado de Geometría y Trigonometría (Toalá, 2018).</i> ...	30
<i>Figura 4.4 Actividad del libro de Geometría y Trigonometría (Toalá, 2018) la cual se considera perteneciente a una situación real.</i>	31
<i>Figura 4.5 Actividad de aprendizaje 3 del segundo parcial del libro de Geometría Analítica (Pérez A. y Barrios, 2019)</i>	32
<i>Figura 4.6 Actividad 1 del tercer parcial tomado de Geometría Analítica (Pérez A. y Barrios, 2019).</i>	33
<i>Figura 4.7 Actividad 17 del primer parcial tomado de Geometría Analítica (Pérez A. y Barrios, 2019).</i>	34
<i>Figura 4.8 Actividad del libro de Cálculo Diferencial (Romano, 2018).</i>	35
<i>Figura 4.9 Actividad del libro de Cálculo Integral (Romano, 2019).</i>	36
<i>Figura 4.10 Actividad del libro de Probabilidad y Estadística (Cervantes, 2020).</i>	37
<i>Figura 6.1 Problema 4.4 analizado bajo la lupa del ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincache, et al., 2018).</i>	52
<i>Figura 6.2 Actividad resuelta por un estudiante clasificado en A-1 utilizando la ley de cosenos.</i>	53
<i>Figura 6.3 Actividad resuelta por un estudiante clasificado en A-1 utilizando una simplificación del teorema de Pitágoras.</i>	54
<i>Figura 6.4 Actividad resuelta por un estudiante clasificado en A-1 utilizando el método de medición.</i>	55
<i>Figura 6.5 Actividad resuelta por un estudiante clasificado en A-1 utilizando el teorema de Pitágoras.</i>	56
<i>Figura 6.6 Actividad resuelta por un estudiante clasificado en A-2 utilizando el teorema de Pitágoras.</i>	57
<i>Figura 6.7 Actividad resuelta por un estudiante clasificado en B-1 mencionando que la altura debe ser menor a la hipotenusa en 2 unidades.</i>	58
<i>Figura 6.8 Actividad resuelta por un estudiante clasificado en B-2 mencionando que la altura y los lados del triángulo miden lo mismo.</i>	59
<i>Figura 6.9 Actividad resuelta por un estudiante clasificado en B-2 mencionando que la altura y los lados del triángulo miden lo mismo.</i>	60
<i>Figura 6.10 Actividad resuelta por un estudiante clasificado en B-4 utilizando la fórmula de área.</i>	61
<i>Figura 6.11 Actividad resuelta por un estudiante clasificado en B-5 tratando de utilizar la ley de senos.</i>	62
<i>Figura 7.1 Actividad de aprendizaje 3 del segundo parcial del libro de Geometría Analítica (Pérez A. y Barrios, 2019)</i>	66
<i>Figura 7.2 Respuesta de la actividad 1 del equipo UCR.</i>	71

<i>Figura 7.3 Respuesta de la actividad 2 del equipo UCE.</i>	72
<i>Figura 7.4 Respuesta a la actividad 3 del equipo PCE.</i>	72
<i>Figura 7.5 Respuesta a la actividad 3 del equipo UCE.</i>	73
<i>Figura 7.6 Respuesta a la actividad 4 del equipo UCR.</i>	73
<i>Figura 7.7 Respuesta a la actividad 5 del equipo UCR.</i>	74
<i>Figura 7.8 Respuesta a la actividad 5 del equipo PCE.</i>	74
<i>Figura 7.9 Respuesta a la actividad 6 del equipo UCR.</i>	75
<i>Figura 7.10 Respuesta a la actividad 7 del equipo UCR.</i>	75
<i>Figura 7.11 Análisis comparativo entre los cochecitos de control remoto según el nivel educativo en el ciclo de Borrromeo-Ferri (2010, citado en Huincache, et al., 2018)</i>	76
<i>Figura 7.12 Análisis comparativo entre los cochecitos de empuje según el nivel educativo en el ciclo de Borrromeo-Ferri (2010, citado en Huincache, et al., 2018).</i>	77

Índice de Tablas

<i>Tabla 3.1</i> Diseño de la investigación.....	23
<i>Tabla 3.2</i> Lista de libros de la serie BookMart organizados por semestre.....	24
<i>Tabla 3.3</i> Aprendizajes matemáticos esperados, número de actividades y número de problemas de los libros de texto de la serie BookMart.....	25
<i>Tabla 5.1</i> Clasificación del primer parcial de libro de Álgebra (Trujillo,2019) de la serie BookMart.....	38
<i>Tabla 5.2</i> Número de problemas, Número de problemas que presentan modelación y Frecuencias relativas de cada lección del libro de Álgebra (Trujillo, 2019).....	39
<i>Tabla 5.3</i> Número de problemas, Número de problemas que presentan modelación y Frecuencias relativas de cada lección del libro de Geometría y Trigonometría (Toalá,2018).....	40
<i>Tabla 5.4</i> Número de problemas, Número de problemas que presentan modelación y Frecuencias relativas de cada lección del libro de Geometría Analítica (Pérez A. y Barrios, 2019).	41
<i>Tabla 5.5</i> Número de problemas, Número de problemas que presentan modelación y Frecuencias relativas de cada lección del libro de Cálculo Diferencial (Romano, 2018).	42
<i>Tabla 5.6</i> Número de problemas, Número de problemas que presentan modelación y Frecuencias relativas de cada lección del libro de Cálculo Integral (Romano, 2019).....	43
<i>Tabla 5.7</i> Número de problemas, Número de problemas que presentan modelación y Frecuencias relativas de cada lección del libro de Probabilidad y Estadística (Cervantes, 2020).	43
<i>Tabla 5.8</i> Frecuencias relativas por parcial del libro de Álgebra (Trujillo,2018).	44
<i>Tabla 5.9</i> Frecuencias relativas de la presencia de la modelación matemática en cada parcial del libro de Geometría y Trigonometría (Toalá,2018).....	45
<i>Tabla 5.10</i> Frecuencias relativas de la presencia de la modelación matemática en cada parcial del libro de Geometría Analítica (Pérez A. y Barrios, 2019).	45
<i>Tabla 5.11</i> Frecuencias relativas de la presencia de la modelación matemática en cada parcial del libro de Cálculo Diferencial (Romano, 2018).....	46
<i>Tabla 5.12</i> Frecuencias relativas de la presencia de la modelación matemática en cada parcial del libro de Cálculo Integral (Romano, 2019).....	46
<i>Tabla 5.13</i> Frecuencias relativas de la presencia de la modelación matemática en cada parcial del libro de Probabilidad y Estadística (Cervantes, 2020).	47
<i>Tabla 5.14</i> Frecuencias relativas de la presencia de la modelación matemática por libro de texto.	48
<i>Tabla 5.15</i> Categorías obtenidas del primer parcial del libro de Geometría y Trigonometría (Toalá,2018).	49
<i>Tabla 5.16</i> Número de problemas involucrados con la modelación matemática que emergen de un escenario real y/o presentan el modelo matemático.....	50
<i>Tabla 6.1</i> Métodos de solución pertenecientes a la categoría A-I.	56
<i>Tabla 6.2</i> Respuestas de estudiantes clasificadas por subcategorías.	63

Tabla 7.1 Estructura del experimento..... 68

Tabla 7.2 Clasificación del trabajo de equipos por tipos de carritos mostrando el alcance en el ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincache, et al., 2018)..... 70

RESUMEN

El objetivo de esta investigación es analizar la presencia de la modelación matemática en los problemas de los libros de texto de matemáticas de la serie BookMart, los cuales son empleados en los Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos a nivel nacional. El estudio se realizó basándose en el ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010) conformado por seis estadios y seis actividades mentales. Se observó que el libro de Probabilidad y Estadística contiene una mayor presencia de modelación matemática y que los problemas presentados en los libros restantes no le permiten transitar al estudiante por el ciclo completo de modelación. Ante esta dificultad se propuso una modificación de un problema de Geometría Analítica que permitiera observar el paso de los alumnos a través del ciclo de modelación. Encontramos que los estudiantes presentan dificultad al matematizar la situación extra-matemática, que es el “puente” que conecta el modelo real con el modelo matemático.

ABSTRACT

The objective of this research is to analyze the presence of mathematical modeling in the problems of the mathematics textbooks of the BookMart series, which are used in the “Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos” nationwide. The study was carried out in the Borromeo-Ferri (2010) modeling cycle, consisting of six stages and six mental activities. It is considered that the Probability and Statistics book contains a greater presence of mathematical modeling and that the problems presented in the remaining books do not allow the student to pass through the complete modeling cycle. Faced with this difficulty, a modification of an Analytical Geometry problem was proposed that allows observing the students' passage through the modeling cycle. We find that students have difficulty in mathematizing the extra-mathematical situation, which is the "bridge" that connects the real model with the mathematical model.

INTRODUCCIÓN

De acuerdo a Borromeo (2010, citado en Huincahe, Borromeo-Ferri & Mena-Lorca, 2018, p.103), la modelación matemática se entiende como el proceso de traducción del mundo extramatemático (real) al matemático en ambas direcciones, siendo Pollak (1969) el primero en destacar la presencia de estos dos mundos.

De acuerdo al informe Cockroft (1985, citado en Cobo-Merino y Carmen, 2016, p.6), los libros de texto constituyen una ayuda inestimable para el profesor en su trabajo diario en el aula. En el análisis de libros de texto de matemáticas del nivel primario, en busca de indicios de la presencia de la modelación matemática, Quiroz y Rodríguez (2015) reportan que estos libros contienen pocos problemas que la involucran y que, de éstos, sólo una fracción pequeña provienen de situaciones reales. Por su parte, Huincahe, Borromeo-Ferri y Mena-Lorca (2018) han enfatizado que la modelación matemática es una de las piedras angulares de la prueba PISA (OCDE, 2015), la cual mide el nivel de habilidades estudiantiles que les permitan participar plenamente en la sociedad, por lo que la modelación matemática es de gran importancia en la matemática preuniversitaria.

Dada la importancia de la modelación matemática y de los resultados obtenidos por México en la evaluación PISA (OCDE,2015), surgen las preguntas:

¿Cómo se presenta la modelación matemática en los seis libros de texto de la serie BookMart que se utilizan en los Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Tlaxcala?

¿Cómo resuelven estudiantes, de diferentes subsistemas educativos, problemas que involucran la modelación matemática?

Con el fin de contestar la primera pregunta de investigación, se parte de la definición de modelación de Borromeo-Ferri (2010) y se identifican los problemas que contienen modelación matemática en los libros de texto utilizados por los Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Tlaxcala.

En relación a la segunda pregunta, se utilizó el ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincahe, et al., 2018) para analizar soluciones estudiantiles de problemas que involucran a la modelación. Este ciclo se compone de seis estadios conectados entre sí, comenzando en la situación real y cerrando el ciclo mediante la validación de los resultados

matemáticos ya sea recurriendo al Modelo real o a la representación mental de la situación. En el capítulo 2 se describe detalladamente el ciclo de Borromeo-Ferri (2010).

Blum y Borromeo-Ferri (2009) observaron el tránsito de estudiantes alemanes de secundaria (16 años de edad) a través del ciclo de modelación de Blum y Leiß (2006), que es antecesor del ciclo de Borromeo-Ferri (2010). Ellos analizaron las soluciones estudiantiles de un problema matemático y encontraron que los alumnos avanzaban y retrocedían en el ciclo, pero sin pasar por todos los estadios que lo componen.

El presente trabajo de tesis está dispuesto como sigue. En el primer capítulo se plantea el problema de investigación, los objetivos y las preguntas de investigación. El estudio se divide en dos partes. En la primera se analiza la forma en que se presenta la modelación matemática en los libros de texto de la serie BookMart utilizados en los centros de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Tlaxcala. En la segunda parte nos preguntamos cómo se desempeñan tres grupos de estudiantes (dos de preparatoria y uno universitario) ante una situación real que involucra a la modelación matemática y requiere de conocimientos básicos del desplazamiento de móviles en superficies planas.

En el capítulo 2 se presenta la definición de modelación matemática y se dan algunos ciclos de modelación que surgieron a partir de la propuesta de Pollak (1969) hasta llegar al ciclo de Borromeo (2010, citado en Huincahe, et al., 2018), que se usa como marco teórico en el presente estudio. Este ciclo parte del propuesto por Blum y Borromeo-Ferri (2009), al que se ha agregado el término “Conocimiento extramatemático” como un requerimiento que debe ser considerado al pasar de un estadio a otro en el Resto del mundo. También propuso cerrar el ciclo mediante la Validación de los Resultados Matemáticos, ya sea recurriendo al Modelo real o a la Representación Mental de la Situación. El ciclo de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincahe, et al., 2018) se compone de seis estadios: Situación real, Representación Mental de la situación, Modelo Real, Modelo Matemático, Resultados Matemáticos y Resultados Reales. Estos estadios se conectan entre sí por medio de seis actividades mentales: Comprender, Simplificar/Estructurar, Matematizar, Realizar el trabajo Matemático, Interpretar y finalmente, Validar, así como del Conocimiento extramatemático.

En el capítulo 3 se discute la metodología de corte mixto que se usa en esta investigación. La investigación se compone de 3 fases. La fase 1 atiende la primera pregunta de investigación. Para

ello se identifica la presencia de la modelación matemática en los seis libros de la serie BookMart: Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y finalmente Probabilidad y Estadística.

La segunda pregunta de investigación se atiende en la Fase 2 y 3. Allí se analizan las soluciones (a dos problemas) elaboradas por estudiantes de los Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Tlaxcala (CECYTE), el Colegio de Bachilleres del Estado de Tlaxcala (COBAT) y la Universidad Politécnica de Tlaxcala (UPTlax). Uno de estos problemas es una modificación a un problema del libro de Geometría Analítica. Esta variación permite que los alumnos transiten completamente por el ciclo de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincahe, et al., 2018).

En el capítulo 4 se analizan ejemplos de problemas de los libros de texto de la serie BookMart. También se discute cuáles problemas presentan modelación matemática y la forma en que la modelación se expone. Se encontraron problemas que tienen su origen en escenarios reales y otros que fueron formulados para dar lugar al trabajo matemático.

En el capítulo 5 se presenta un estudio estadístico que muestra la presencia de la modelación matemática en cada libro de texto. Se discute cuál de ellos es el más favorecido y si tiene relación con el mapa curricular propuesto en el Acuerdo Secretarial 253 (2013), que constituye el punto de partida para la creación de los libros del Bachillerato Tecnológico.

En el capítulo 6 se analizan las respuestas estudiantiles a un problema del libro de Geometría y Trigonometría que tiene su origen en un contexto real y presenta modelación matemática. El problema involucra una escuela flotante en Nigeria. El autor del libro espera que sea resuelto por medio del teorema de Pitágoras. El texto del problema se acompaña con una imagen y un Modelo Real que insinúa el uso del teorema indicado arriba. De acuerdo al ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincahe, et al., 2018), esta actividad únicamente permite transitar al estudiante por el Modelo Matemático, Resultados Matemáticos y Resultados Reales sin posibilidad de Validar su resultado. Se observó que el modelo presentado por el libro de texto influye en gran manera en la respuesta de los estudiantes encuestados y que sólo el 55% logró completar la tarea de manera correcta.

En el capítulo 7 se analizan las producciones estudiantiles del problema idóneo diseñado para observar su tránsito en el proceso de modelación de acuerdo al ciclo de Borromeo-Ferri (2010,

citado en Huincahe, et al., 2018). Este problema se basa en un experimento relacionado con el desplazamiento de cochecitos de juguete en superficies planas. Los resultados muestran un punto de coincidencia en cuanto a la forma en que transitan los estudiantes alemanes encuestados por Blum y Borromeo (2009) y los preparatorianos mexicanos interrogados por nosotros.

En el Capítulo 8 se dan las conclusiones. Se discute la escasa presencia de la modelación matemática en los libros de texto de matemáticas de la serie BookMart. El libro de Probabilidad y Estadística es el que presenta mayor modelación matemática en comparación a los otros de la serie. Un resultado similar fue encontrado por Quiroz y Rodríguez (2015), pero en los libros de texto de matemáticas del nivel primaria de la CONALITEG. En cuanto a los seis libros de la serie BookMart analizados por nosotros, se identificó que los problemas allí propuestos impiden transitar completamente por el ciclo de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincahe, et al., 2018). Acerca del problema que diseñamos, se observó que los estudiantes preparatorianos presentan mayor dificultad para realizar la Matematización. Es decir, ellos encuentran obstáculos para articular sus Conocimientos extramatemáticos, competencias matemáticas y la abstracción requerida para lograr la traducción de la situación del Resto del mundo al de las Matemáticas.

Capítulo 1

1 MARCO CONCEPTUAL

En este capítulo se discute el planteamiento del problema y la importancia que tiene la modelación matemática. Consecuentemente, se presenta el objetivo general de la investigación acompañado de los objetivos específicos y preguntas de investigación.

1. Planteamiento de problema

De acuerdo al informe Cockroft (1985, citado en Cobo-Merino y Carmen. 2016, p. 6), los libros de texto constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario en el aula, por lo cual actualmente en México los libros de texto se ofrecen gratuitamente a los estudiantes hasta el nivel básico (primaria y secundaria). Para los libros de educación media superior, es necesario comprar el libro con la editorial que el subsistema permita.

Como lo menciona Ortiz de Haro (1999), los libros son considerados un segundo nivel de la transposición didáctica al ser constituidos por los currículos y programas oficiales. En el caso particular del Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Tlaxcala (CECyTE) y de otras preparatorias como el Colegio de Bachilleres del Estado de Tlaxcala (COBAT), los libros de texto de la editorial BookMart cumple con los requisitos planteados por los programas oficiales y son los autorizados para utilizar en el aula.

El programa actual manejado por CECyTE es el Acuerdo Secretarial 653 (2013) el cual está orientado a los Bachilleratos Tecnológicos e incluye los programas de las materias de Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y, finalmente, Probabilidad y Estadística.

En el Apéndice A, se muestran los propósitos formativos de las asignaturas que forman parte del mapa curricular del nivel medio superior, específicamente en los bachilleratos tecnológicos. Se puede observar que únicamente la materia de Cálculo Diferencial menciona de manera explícita la necesidad de crear modelos que den solución a problemas surgidos por la actividad humana. Algunas de las asignaturas restantes lo hablan de manera indirecta y superficial, es decir, no toman como importante la utilización de la modelación matemática.

A partir de la revisión del Acuerdo Secretarial 653 y de los desalentadores resultados obtenidos por los estudiantes mexicanos del nivel medio superior en pruebas internacionales como PISA en 2015 (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico [OCDE], 2016), donde se obtuvo un puntaje menor al promedio con un total de 408 puntos en matemáticas en comparación a Singapur quien alcanzó los 564 puntos, colocando a México en el lugar 57 de 72 países que participaron, surge la idea que los libros de texto de matemáticas de este nivel educativo no tratan adecuadamente la modelación matemática, porque esta actividad es una de las piedras angulares de tales pruebas (Huincache, et al., 2018).

Considerando la problemática mencionada, nos planteamos los objetivos y preguntas de investigación.

1.1 Objetivo General

Analizar los libros de texto de matemáticas empleados por estudiantes de los Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos, abordando la presencia de la modelación matemática, y diagnosticar cómo resuelven los estudiantes problemas que involucren la modelación matemática.

1.1.1 Objetivos Específicos

Categorizar los problemas en los libros de texto de matemáticas en el nivel medio superior que contienen modelación matemática por medio del ciclo y definición de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincache, et al., 2018)

Identificar el nivel en que el alumno es capaz de desarrollar la modelación matemática usando instrumentos idóneos.

1.1.2 Preguntas de investigación

¿Cómo se presenta la modelación matemática en los seis libros de texto de la serie BookMart que se utilizan en los Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos?

¿Cómo resuelven estudiantes de diferentes subsistemas educativos problemas que involucran la modelación matemática?

Capítulo 2

2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se muestra el marco teórico, se discute la definición de modelación matemática y se presentan algunos ciclos de modelación que surgieron a partir de la propuesta de Pollak (1969) hasta llegar al ciclo de Borromeo (2010, citado en Huincahe, et al., 2018), que se usa como marco teórico en el presente estudio.

2.1 La modelación matemática educativa

Pollak (1969) fue el primero en proponer un ciclo para la modelación matemática. Destacó la presencia de dos mundos: el extramatemático y el de las matemáticas escolares, y cómo se relacionan. Posteriormente, Sallet y Nelson (1999) consideraron a la modelación matemática como “un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen de alguna manera, un fenómeno o problema de una situación real”. Blomhoj y Jensen (2003) propusieron un modelo gráfico de la modelación matemática desde la perspectiva de la competencia matemática en el ámbito escolar. Se trata de un esquema conceptual del que hacen parte: Percepción de la realidad, Dominio de la indagación, Sistema, Sistema matemático, Resultados del modelo y Acción o Realización. Estos autores relacionaron estos términos para formar un proceso de modelación matemática, comenzando en la percepción de la realidad y concluyendo en la acción o realización.

Posteriormente, Blum y Borromeo-Ferri (2009) presentan a la modelación matemática como un ciclo de siete pasos acompañados de siete actividades mentales teniendo como punto de partida la interpretación de la situación y como final, una presentación de los resultados matemáticos en la situación real.

Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincahe, et al., 2018) modificó el ciclo de modelación propuesto por Blum y Borromeo-Ferri (2009) dando lugar a un ciclo de seis pasos acompañado de seis actividades que permiten completar el ciclo de modelación de dos maneras.

Quiroz y Rodríguez (2015) creó un esquema de modelación (Figura 2.1). Se identificaron las praxeologías asociadas a la modelación matemática en los libros de texto de matemáticas del nivel primario de la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (CONALITEG), basadas en la

Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD). Ellas clasifican los problemas matemáticos en dos dominios: el pseudoconcreto y el matemático, donde incluye la modelación matemática.

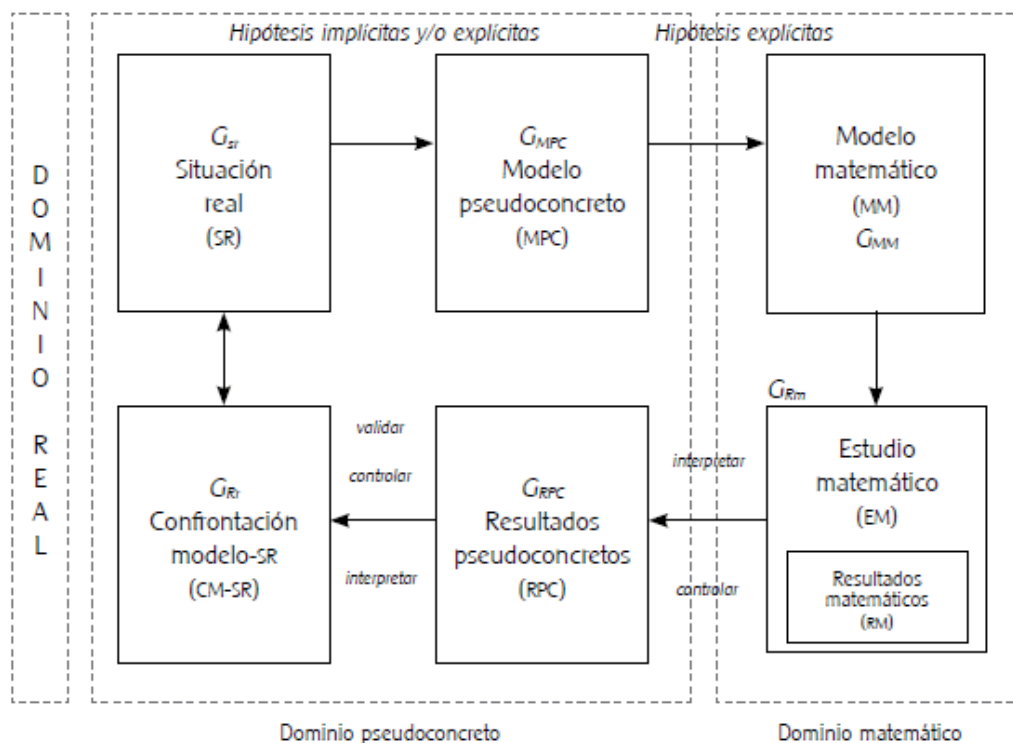


Figura 2.1 Esquema de modelación de Quiroz y Rodríguez (2015).

Recientemente Villareal y Mina (2020) consideraron los trabajos de autores inmersos en la modelación matemática como Quiroz y Rodríguez (2015), con el fin de analizar actividades experimentales bajo el marco de la modelación matemática utilizando tecnologías para la obtención de datos y el desarrollo del modelo.

2.2 Ciclo de modelación de Borromeo-Ferri

En la presente investigación se aborda la modelación matemática en los libros de texto del nivel medio superior, así como el desarrollo de estudiantes a través del ciclo modelación matemática. En este sentido, el ciclo de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincache, et al., 2018) facilita cumplir con las intenciones de esta investigación.

En la presente investigación se toma la definición y el ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincache, et al., 2018), quien entiende la modelación como el proceso de

traducción entre el mundo real y las matemáticas en ambas direcciones. Esta autora hace uso del ciclo presentado por Blum y Borromeo-Ferri (2009), agregando los términos del conocimiento extramatemático y cerrando el ciclo, ya sea en la Representación mental de la situación o en el Modelo real. El ciclo mencionado consta de seis estadios conectados entre sí por seis actividades mentales señaladas en la Figura 2.2 con los números del 1 al 6.

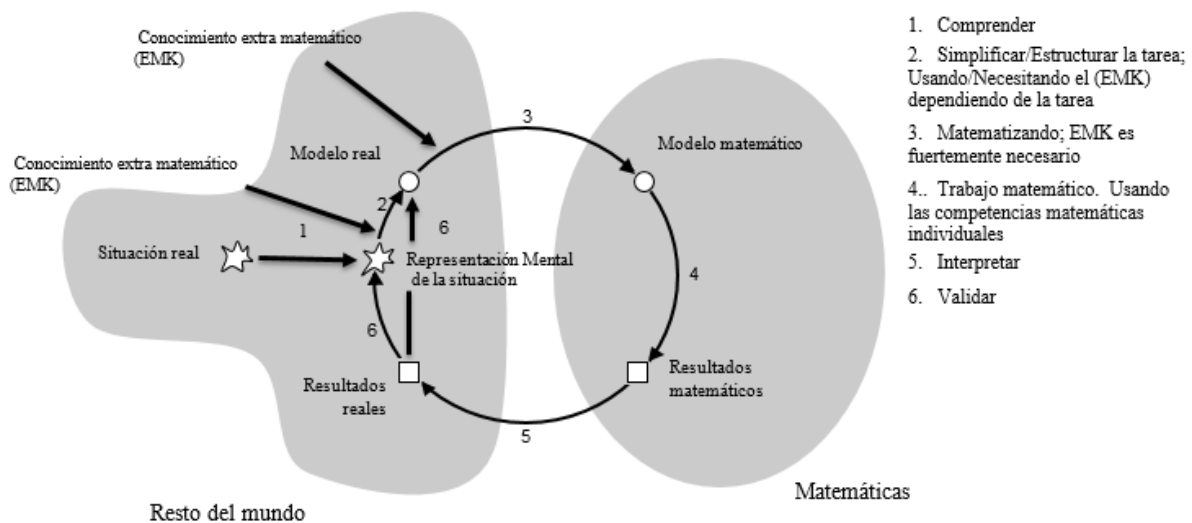


Figura 2.2 Ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincache, et al., 2018).
 Figura traducida del inglés al español.

En el ámbito, Resto del mundo, se considera la “Situación real”, la “Representación mental de la situación” (RM) y el “Modelo real” (MR). La primera puede constar de una imagen, un texto o ambos, que presentan la situación problemática a resolver. El tránsito hacia la “Representación mental de la situación” requiere del entendimiento del problema; el resolvente forma una imagen mental de la situación que debe resolver. Enseguida, la idealiza y simplifica, identificando los aspectos relevantes involucrados. Es un proceso consciente e interno que conduce al “Modelo real”. En este paso intervienen conocimientos extra-matemáticos (EMK) relacionados, incluso, con la experiencia cotidiana del estudiante que intenta resolver el problema de modelado.

La Matematización es el puente que relaciona al Resto del mundo con las Matemáticas. En este tramo, el “*Modelo real*” se traduce por medio de figuras geométricas, constructos matemáticos, expresiones matemáticas entre otras, en el “*Modelo matemático*” (**MM**). El Trabajo matemático subsecuente conduce al quinto estadio del ciclo denominado “*Resultados matemáticos*” (**RMAT**), con el que concluye la actividad correspondiente al ámbito matemático. El retorno al Resto del mundo se logra mediante la interpretación de los resultados matemáticos hacía los resultados reales (**RR**), que son aquellos que tienen sentido en el mundo real. La validación (**V**) de estos resultados considerando la “*Representación mental de la situación*” o el “*Modelo real*”, puede sugerir la conveniencia de dar otra vuelta al ciclo.

Capítulo 3

3 METODOLOGÍA

En este capítulo se discute la metodología. Se muestra el diseño de la investigación dividido en 3 fases. Se describe la población y la estructura didáctica de cada uno de los libros de texto que componen la serie de libros de texto de matemáticas de BookMart.

3.1 Tipo de investigación

Esta investigación será del tipo mixto dado que integra los métodos cuantitativos y cualitativos en un solo estudio con el fin de obtener una visión completa del fenómeno a estudiar (Santa, Federico y Vera-Quíñonez, 2017). Esta investigación se desarrollará en dos partes.

La primera parte reside en el análisis de libros que permite saber de qué manera está presente la modelación matemática en los libros de texto de matemáticas de la serie BookMart, utilizados en la educación media superior.

La segunda parte consiste en el estudio de las soluciones a problemas relacionados con modelación matemática resueltos por estudiantes de diferentes planteles. Todos los planteles pertenecen a localidades diferentes de Tlaxcala. Esta segunda parte se basa principalmente en reconocer si los problemas presentados en los libros de texto de la serie BookMart son idóneos para que los estudiantes transiten por el ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincache, et al., 2018). En caso contrario, se podría proponer la modificación de un problema del libro de texto al grado de ser idóneo para transitar por el ciclo de modelación.

3.2 Estructura de la investigación

El diseño de la investigación se muestra en la Tabla 3.1, donde se definirá las fases del estudio y se muestra en que consiste cada una.

Tabla 3.1
Diseño de la investigación

FASE 1	Clasificar las actividades de los libros de matemáticas de acuerdo a su contenido.
--------	--

Usar la definición de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincache, et al., 2018) para identificar y clasificar las actividades de aprendizaje de los libros seleccionados que involucran modelación matemática.

FASE 2 Presentar una actividad del libro de texto a estudiantes preparatorianos para observar el tránsito por el ciclo de modelación matemática de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincache, et al., 2018).

FASE 3 Observar el tránsito de los estudiantes por el ciclo de modelación matemática a partir de la modificación de un problema de los libros de texto seleccionados.

3.3 Población y Muestra

Para la primera parte de la investigación, se tomarán para su estudio la serie de libros de la editorial BookMart para la educación media superior con perfil tecnológico. En la Tabla 3.2, se presenta la lista de los seis libros que se utilizan para el nivel medio superior, acorde con el Acuerdo Secretarial 253 (2013).

Tabla 3.2

Lista de libros de la serie BookMart organizados por semestre.

Nombre del libro	Autor	Año de publicación
1. Álgebra	Trujillo	2019
2. Geometría y Trigonometría	Toalá	2018
3. Geometría Analítica	Pérez A. y Barrios	2019
4. Cálculo Diferencial	Romano	2018
5. Cálculo Integral	Romano	2019
6. Probabilidad y Estadística	Cervantes	2020

3.4 Descripción de la estructura didáctica y de las actividades matemáticas

Cada uno de los seis libros de matemáticas, con perfil tecnológico de la serie BookMart, inicia con un examen diagnóstico que involucra los conocimientos matemáticos necesarios para cursar la asignatura, seguido de tres parciales. Al comienzo de cada parcial, se anexa un apartado que presenta el eje del bloque, los contenidos centrales, aprendizajes y productos esperados, esto en la

relación con el Acuerdo Secretarial 253. Cada parcial presenta un tema matemático acompañado de un ejemplo, posteriormente se presenta una actividad de aprendizaje (conjunto de problemas matemáticos) donde se espera que el alumno fortalezca el conocimiento obtenido. Al inicio de cada uno de los parciales se presenta una actividad socioemocional para ayudarlo a controlar sus emociones en el aula y, al final, se contesta una lista de cotejo, para que el estudiante autoevalúe sus conocimientos obtenidos en el parcial en cuestión.

El libro de Álgebra (Trujillo, 2019) contiene 35 actividades matemáticas, el de Geometría y Trigonometría (Toalá, 2018) abarca 61, el de Geometría Analítica (Pérez A. y Barrios, 2019) se conforma por 48, el de Cálculo Diferencial (Romano, 2018) contiene 29, el de Cálculo Integral (Romano, 2019) tiene de 40 y el de Probabilidad y Estadística comprende un total de 28.

En la Tabla 3.3, se detallan los aprendizajes matemáticos que se desean alcanzar, el número de actividades propuestas para lograrlos y el número de problemas totales que conforman las actividades de cada uno de los libros que componen la editorial BookMart. Cada actividad de aprendizaje está compuesta por un número diferente de problemas, pero con el mismo contenido matemático.

Tabla 3.3
Aprendizajes matemáticos esperados, número de actividades y número de problemas de los libros de texto de la serie BookMart.

<i>Nombre del libro de texto</i>	<i>Parcial</i>	<i>Aprendizajes esperados</i>	<i>Número de actividades</i>	<i>Número de problemas</i>
Álgebra	1	Lenguaje Algebraico. Series y sucesiones.	15	102
	2	Operaciones algebraicas. Razones y proporciones.	9	69
	3	Funciones y ecuaciones cuadráticas.	11	66
Geometría y Trigonometría	1	Espacio, forma y medida.	26	86
	2	Congruencia y semejanza de triángulos.	23	80
	3	Razones Trigonométricas.	14	56

Geometría Analítica	1	Recta. Construcciones de cónicas.	28	179
	2	Formas canónicas de las rectas, circunferencia, elipse, hipérbola.	17	75
	3	Análisis contextual de las cónicas.	8	35
Cálculo Diferencial	1	Sistemas de coordenadas. Funciones.	8	23
	2	Límites. Derivada como razón de cambio.	9	35
	3	Máximos y mínimos.	12	93
Cálculo Integral	1	Aproximación de áreas bajo la curva.	15	72
	2	Técnicas de Integración.	14	191
	3	Calcular volúmenes de sólidos.	11	60
Probabilidad y Estadística	1	Conceptos básicos de Estadística y Probabilidad	13	68
	2	Medidas de tendencia central Análisis Gráficos	2 4	8 14
	3	Medidas de Dispersión	10	36

Como se observa en la Tabla 3.3, el libro de Cálculo Integral contiene una mayor cantidad de problemas con un total de 323, seguido de Geometría Analítica con 289. En tercer lugar, encontramos el libro de Algebra con 237 problemas, en cuarto se encuentra Geometría y Trigonometría con 222, en quinto se encuentra el libro de Cálculo Diferencial con 151 y, al final, el libro de Probabilidad y Estadística con 126 problemas.

Posteriormente se identificaron los problemas que contienen la modelación matemática en base del ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincahe, et al., 2018). De los resultados

obtenidos de la clasificación de cada uno de los libros se tomarán como muestra aquellos problemas que presenten la modelación matemática.

3.5 Descripción de la población

En la segunda parte de este estudio, se aplicó un problema del libro de texto de Geometría y Trigonometría a doscientos alumnos (con edades entre los 15 y 17 años), pertenecientes a dos subsistemas: el Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Tlaxcala (CECYTE) y el Colegio de Bachilleres del Estado de Tlaxcala (COBAT). En este último se utilizan otros libros de texto con perfil de bachillerato general. Del primer subsistema participó una muestra de 146 alumnos, unos cursaban la materia de Geometría y Trigonometría y otros la de Cálculo Diferencial. Del Colegio de Bachilleres del Estado de Tlaxcala (COBAT) participaron 64 estudiantes que estudiaban la materia de Precálculo.

La tercera parte del estudio consiste de la aplicación de un problema del libro de texto de Geometría Analítica, que fue modificado para que los alumnos tuvieran la oportunidad de transitar a través del ciclo de modelación. El problema original consiste en una tabla donde se proporcionan 5 pares de datos (la pendiente y un punto), con los cuales los alumnos debían formar las ecuaciones de las rectas involucradas, usando la fórmula punto pendiente de la recta. Nosotros propusimos un experimento relacionado con el deslizamiento de un cochecito de juguete en una superficie plana y los alumnos debían medir distancia y tiempo. En base a ello, debían obtener la ecuación para la distancia en función del tiempo.

En esta parte de la investigación participaron 27 alumnos preparatorianos de tercer semestre del plantel 08 perteneciente al COBAT. Una parte cursaba la especialidad de Administración de Empresas y otra la de Contabilidad. Se trata de 15 mujeres y 12 hombres, con edades promedio de 17 años y 2 meses cumplidos. La actividad se realizó en sus últimas sesiones del curso de Geometría Analítica.

También fueron encuestados 42 estudiantes universitarios de la Universidad Politécnica de Tlaxcala (UPTlax.), que cursaban el segundo cuatrimestre de la carrera de Mecatrónica. Esta muestra se conformó por 35 hombres y 7 mujeres con edad promedio de 18 años. La actividad se realizó en una sola sesión del curso de Cálculo Diferencial.

Capítulo 4

4 ANÁLISIS A LOS PROBLEMAS DE LOS LIBROS DE TEXTO

En este capítulo se analizaron las actividades de los libros de texto de las seis asignaturas de la editorial BookMart con el propósito de saber cuáles de ellas consideraban a la modelación matemática. Con este fin se consideró el ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincahe, et al., 2018). Se muestran algunos ejemplos de los problemas analizados de cada libro.

Para identificar si un problema matemático involucra a la modelación matemática, se recurre a su definición dada en Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincahe, et al., 2018). Es decir, es necesario que el problema surja de una situación real y permita la traducción del Resto del mundo al de las Matemáticas.

4.1 Libro de Álgebra

Este libro se ocupa del lenguaje algebraico, series, sucesiones, operaciones algebraicas, razones, proporciones, funciones y ecuaciones cuadráticas. En la Figura 4.1 se presenta un problema del tema de funciones que forma parte de la Actividad de aprendizaje número dos que pertenece al tercer parcial (Actividad 3.2). Este problema contiene seis incisos y trata de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Se observa que ninguno de los sistemas ahí propuestos tiene modelación matemática porque no provienen de una situación real. En esta actividad el estudiante solo debe resolver y hallar los valores de las variables que conforman el conjunto solución de los sistemas de ecuaciones dadas.

2. Analiza y resuelve los sistemas, si es posible.

$$\text{a. } \left. \begin{array}{l} 3y + 2x = 11 \\ y + \frac{2}{3}x = \frac{11}{3} \end{array} \right\}$$

$$\text{b. } \left. \begin{array}{l} -x + 2y = -3 \\ 2x - 3y = 3 \end{array} \right\}$$

$$\text{c. } \left. \begin{array}{l} x + y = -3 \\ 3x + 3y = 4 \end{array} \right\}$$

$$\text{d. } \left. \begin{array}{l} 5x - 2y = 10 \\ x + 3y = 2 \end{array} \right\}$$

$$\text{e. } \left. \begin{array}{l} x + 3y = 3 \\ 2x - y = 5 \end{array} \right\}$$

$$\text{f. } \left. \begin{array}{l} 6x - 2y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{array} \right\}$$

Figura 4.1 Problema 2 perteneciente a la actividad 3.2. Tomado del libro de Álgebra (Trujillo,2019).

En la Actividad de aprendizaje 3.3 se atiende este mismo contenido matemático, Pero se propone problemas que involucran a la modelación matemática. En la Figura 4.2 se presenta un ejemplo. Este problema presenta una situación en la que dos familias compran boletos para ir a nadar; los de adulto tiene un costo diferente al de niños. El objetivo del problema es conocer cuánto cuesta cada boleto. El problema parte de una situación real y necesita de una traducción al mundo de las Matemáticas para ser resuelto.

3. Dos familias compraron boletos para ir a nadar. La familia Hernández compró un boleto para adulto y cuatro para niño, y pagó \$190; la familia Suárez compró dos boletos para adulto y dos para niño, y pagó \$170. ¿Cuánto cuesta cada boleto?

Figura 4.2 Problema 3 perteneciente a la actividad 3.3. Tomado del libro de Álgebra (Trujillo,2019).

4.2 Libro de Geometría y Trigonometría

Este libro se centra en el espacio, forma y medida de figuras geométricas, congruencia y semejanza de triángulos y finalmente atiende las razones trigonométricas. En la Figura 4.3 se estudia la actividad quince del primer parcial (Actividad 1.15) en la que se atiende el teorema de Pitágoras. Se observa que la actividad está compuesta por 3 problemas, el problema uno pide al estudiante

medir los lados del triángulo para comprobar el teorema. El problema dos solicita identificar las figuras que se encuentran a la izquierda y calcular la medida del lado faltante usando el teorema de Pitágoras. De acuerdo a la definición de modelación estos problemas no involucran a la modelación matemática.

El problema tres plantea la siguiente situación: Juan tiene una escalera de 6.5 metros de altura y desea colocarla de tal forma que alcance a subir por la ventana que se encuentra a 6 metros de altura. Este problema parte de una situación real y requiere de una traducción del mundo real al de las matemáticas para ser resuelto, incluso como se puede observar en la figura 4.3 se le presenta al estudiante el modelo real y en el mismo se incluye la traducción al mundo de las matemáticas dada la insinuación de usar el teorema de Pitágoras. Este problema se considera como huésped de la modelación matemática a pesar de lo complejo de encontrar una ventana a 6.5 m. de altura en un segundo piso.

Actividad de aprendizaje 15

◀ Responde lo que se pide.


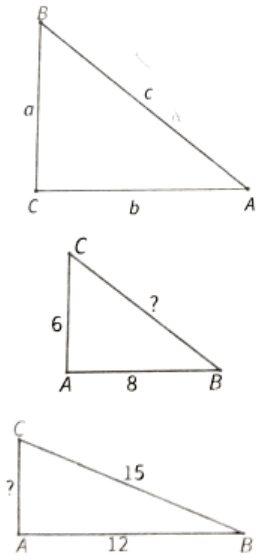


Figura 1.22



- En la figura identifica los catetos del triángulo rectángulo y la hipotenusa. Con ayuda de una regla calcula lo siguiente.
 - Indica cuánto vale $a^2 + b^2$: _____
 - Indica cuánto vale c^2 : _____
 - ¿Se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$?
 - ¿Puedes trazar un triángulo con las mismas medidas de lados que no sea rectángulo?
- En las figuras calcula la medida del lado que falta. En la figura mide los ángulos, ¿cuánto es la suma de los ángulos de cada triángulo?
- Juan tiene una escalera de 6.5 metros de alto y quiere subir a la ventana del segundo piso de su casa que se encuentra a 6 metros de altura (figura 1.22). ¿A qué distancia de la pared va a quedar la base de la escalera?

Figura 4.3 Actividad 15 perteneciente al primer parcial. Tomado de Geometría y Trigonometría (Toalá, 2018).

En los problemas que presentan modelación matemática se encontraron algunos peculiares que decidimos llamar “problemas que emergen de un escenario real”. Estos se presentan con situaciones específicas en la realidad o el estudiante las puede fabricar. Un ejemplo de estos problemas se observa en la Actividad de aprendizaje 1.16 (Figura 4.4) donde se aborda el Teorema de Pitágoras aplicado en una escuela flotante de Lagos, Nigeria.

Actividad de aprendizaje 16

◀ Lleva a cabo la siguiente actividad.

1. En la figura se muestra una escuela flotante de la región de Lagos, Nigeria. Si el frente es un triángulo equilátero de 14 m de lado, ¿cuál es su altura?

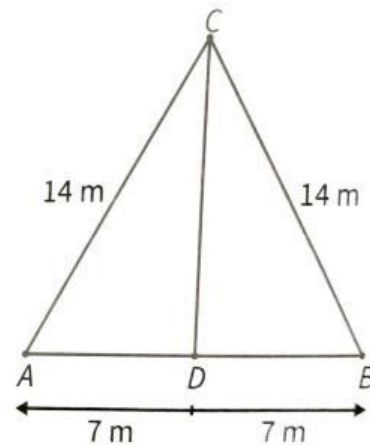


Figura 4.4 Actividad del libro de Geometría y Trigonometría (Toalá, 2018) la cual se considera perteneciente a una situación real.

De acuerdo al ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincache, et al., 2018), este problema no da la posibilidad al alumno de hacer la Validación de los Resultados Reales. Se le ofrece únicamente la posibilidad de completar el modelo matemático (agregando el teorema de Pitágoras), realizar el trabajo matemático y alcanzar los Resultados Reales.

4.3 Libro de Geometría Analítica

Este libro revisa los contenidos de la recta, así como la construcción, las formas y análisis de las cónicas. En la Figura 4.5 se puede observar el problema uno de la Actividad de aprendizaje 3 correspondiente al segundo parcial (actividad 2.3), se presenta inmediatamente después de

presentar el tema Punto-Pendiente y se le pide al estudiante completar la tabla con la fórmula anteriormente dada. La actividad consiste en el llenado de una tabla, a partir de datos aleatorios dados al estudiante, claramente se observa que no tiene relación alguna con la modelación matemática.

Actividad de aprendizaje 3

Responde lo que se pide.

1. Completa la tabla con la ecuación en su forma punto-punto.

m	$P_1(x_1, y_1)$	Forma punto-punto
-2	$(-1, 1)$	
9	$(4, 6)$	
$\frac{1}{3}$	$(-4, -3)$	
$-\frac{4}{3}$	$(-2, 1)$	
$\frac{5}{3}$	$(7, 1)$	

Figura 4.5 Actividad de aprendizaje 3 del segundo parcial del libro de Geometría Analítica (Pérez A. y Barrios, 2019)

En tercer parcial del libro de Geometría Analítica contiene una lección denominada “Aplicaciones de los lugares geométricos en situaciones contextualizadas” cuyo propósito de la lección es presentar situaciones que pertenezcan a alguna “Situación real”. Esta lección se conforma por una Actividad de aprendizaje (actividad 3.1) la cual está compuesta por 4 problemas que son similares entre sí. Los 4 problemas que conforman esta lección presentan modelación matemática. El problema 1 (Figura 10) menciona un telescopio reflector que tiene la forma de un paraboloides con un diámetro de 50 cm y 4 cm de profundidad, le solicitan al estudiante encontrar la distancia en la cual debe ir el espejo secundario y finalmente hallar la ecuación del paraboloides generada por el espejo.

Se pueden destacar tres peculiaridades importantes del problema 1 (Figura 4.6) la primera se encuentra en el contenido extramatemático, es decir, si el estudiante conoce lo que es un telescopio

reflector o no. La segunda refiere a la existencia del telescopio, por la falta de datos presentados y/o una imagen que acompañe la situación, es posible pensar que el problema fue creado para dar lugar al trabajo matemático. La tercera se basa en la pregunta ¿Cuál es la necesidad de obtener la ecuación del paraboloides que genera el espejo?, por la falta de respuesta a esta pregunta se puede observar que el problema no permite completar el ciclo de modelación matemática relacionando los datos matemáticos con los reales de acuerdo al ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincache, et al., 2018).

Actividad de aprendizaje 1

◀ Aplica lo aprendido de las secciones cónicas: sus definiciones, ecuaciones y parámetros, para resolver los siguientes ejercicios. Utiliza los planos cartesianos para trazar las gráficas y lo que necesites para poder responder.

1. El espejo para un telescopio reflector tiene la forma de un paraboloides de 40 cm de diámetro y 5 cm de profundidad.
 - a. ¿A qué distancia del centro del espejo se deberá poner el espejo secundario?
 - b. Halla la ecuación de la parábola que genera el paraboloides del espejo.

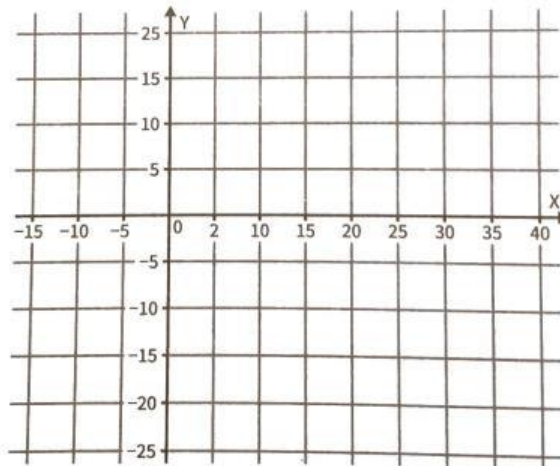


Figura 4.6 Actividad 1 del tercer parcial tomado de Geometría Analítica (Pérez A. y Barrios, 2019).

En la Figura 4.7 se puede observar la Actividad de aprendizaje 17 del primer parcial (actividad 1.17) la cual está compuesta por un único problema que además de presentar modelación matemática también lo llamamos un problema que emerge en un escenario real. La situación invita

al estudiante a lanzar una piedra dentro de un recipiente con agua con el propósito de identificar la familia de circunferencias y obtener sus ecuaciones. El problema permite al estudiante crear la situación. Solo se encontró un problema de este tipo en todo el libro de Geometría Analítica.

Actividad de aprendizaje 17 Productos esperados

◀ En una hoja (o más) de papel milimétrico registra todas tus respuestas a la actividad. Después guárdala en tu portafolio de evidencias.

1. En un estanque (cubeta, piscina, vaso, etcétera) lleno con agua, deja caer una piedrita (o una gota) verticalmente sobre la superficie. Observarás una familia de circunferencias concéntricas. Si identificamos la superficie del agua con el plano cartesiano y quisieras dibujar **dos** de estas circunferencias, ¿dónde colocarías el origen?

Ubícalo y traza los ejes coordenados X y Y . Luego ubica el punto que corresponde al centro de la familia de circunferencias y observa que en ningún caso el radio de la circunferencia puede rebasar el borde del estanque. ¿Puedes medir la separación entre una y otra o te resulta más fácil medir el radio de una circunferencia y la otra? ¿Qué ocurre cuando las circunferencias tocan el borde del estanque? Dibuja por lo menos dos de las circunferencias concéntricas observadas y escribe sus ecuaciones. ¿Qué ocurre si eliges otro centro $C(x_0, y_0)$ para la familia de circunferencias concéntricas?

Figura 4.7 Actividad 17 del primer parcial tomado de Geometría Analítica (Pérez A. y Barrios, 2019).

4.4 Cálculo Diferencial

Este libro atiende los temas del tratamiento intuitivo de los límites, del cambio y la variación. Contiene una introducción a las funciones continuas, gráfica de funciones y aborda hasta las nociones básicas de derivación. Los problemas presentados en este libro son similares a los presentados en los anteriores, sin embargo, es pertinente rescatar el último problema de la Actividad de aprendizaje siete correspondiente al segundo parcial (Figura 4.8). Este problema invita al estudiante a colocarse en la situación real pidiendo imaginar la situación y solicita las respuestas en función de sus predicciones con base al trabajo matemático que se debe realizar. El problema platica una situación en la que una empresa comienza muy mal su negocio, se

proporciona el modelo matemático que describe la situación y al final el estudiante debe responder cómo será el estado de ánimo de los trabajadores en un futuro.

Imagina que hay una empresa que empezó muy mal su negocio, la infelicidad de sus clientes está modelada por la función $f(t) = \frac{100000}{t}$, donde t es la cantidad de días que lleva el negocio funcionando. Mientras mayor sea el número, sus clientes son menos felices y si la función vale 0, sus clientes son neutrales respecto a la tienda.

1. ¿Qué crees que ocurra en el futuro? ¿Crees que alguna vez sus clientes sean neutrales o al menos estarán muy cerca de serlo?
2. Traza una gráfica de esta función y escribe tu análisis de la empresa. Al finalizar, anexa este trabajo a tu portafolio de evidencias.

Figura 4.8 Actividad del libro de Cálculo Diferencial (Romano, 2018).

4.5 Cálculo Integral

Este libro atiende los temas como aproximación de áreas bajo la curva por método de agotamiento, atiende diferentes métodos de solución de integrales definidas e indefinidas y el volumen de sólidos. Los problemas que contienen modelación matemática en este libro son similares en estructura al del libro de Cálculo Diferencial, debido a que el autor es el mismo. En la figura 4.9 se observa la Actividad de aprendizaje 14 correspondiente al primer parcial, se compone por 3 problemas que están bajo un contexto físico, claramente los 3 presentan modelación y parten de una Situación real.

Actividad de aprendizaje 14

◀ Responde los problemas en tu cuaderno, justifica todas tus respuestas y elabora un dibujo para cada uno.

1. La velocidad de una pelota que cae al vacío está dada por $v(t) = 100 + 1.03t$ en m/s. Determina cuál es la distancia recorrida al minuto, a la hora y después de un día.
2. Una partícula acelera siguiendo la función $a(t) = 0.14t$ en km/h^2 . Determina cuál es la velocidad de la partícula a los 0, 10 y 100 segundos.
3. Dejamos caer una pelota desde lo alto de un edificio de 800 metros, la velocidad de la pelota es de $v(t) = 30 + 9.8t$ en metros por segundo, imagina además que la pelota no rebota al tocar el suelo. Determina cuál es la distancia que recorre la pelota a los 1, 10, 100 y 1000 segundos.

Figura 4.9 Actividad del libro de Cálculo Integral (Romano, 2019).

El problema 1 proporciona el modelo matemático erróneo para la velocidad, $v(t)$, pues la fórmula para $v(t)$ en el tiro hacia abajo debería ser $v(t) = (100 \text{ m/s}) + (9.8 \text{ m/s}^2)t$. Además, la fórmula para la distancia recorrida (incluso, con el valor erróneo de la aceleración en la caída libre 1.03 m/s^2), $d(t) = (100 \text{ m/s})t + \frac{1}{2}(1.03 \text{ m/s}^2)t^2$, generaría valores enormes, tomado t igual a 60 s, 3,600 s y 86,400 s.

Un efecto similar de valores irreales muestra el problema 3. Para el tiempo de 10 s, la distancia recorrida en el tiro hacia abajo es igual a:

$$(30 \text{ m/s})(10 \text{ s}) + \frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2)(100\text{s}^2) = 300 \text{ m} + 490 \text{ m} = 790 \text{ m}$$

Esta distancia es 10 m menor que la altura del edificio (800 m). Eso implica que los tiempos de 100 s y 1,000 s generarían distancias mucho mayores que la supuesta altura del edificio.

4.6 Probabilidad y Estadística

Este libro atiende los conceptos básicos de Probabilidad y Estadística, Recolección de datos, Técnicas de conteos, y Significados de medida de Dispersión. La mayor parte de problemas de este libro parten de una situación real pero no en todos se requiera la modelación matemática. En el primer parcial se encuentra la mayor carga de modelación en este libro. La Figura 4.10 muestra un problema perteneciente a la actividad 7 del primer parcial, en la que es relevante mencionar la peculiaridad del problema uno, dado que parte de una situación que emerge de un escenario real.

Actividad de aprendizaje 7

◀ Resuelve las siguientes cuestiones.

1. Considera una baraja inglesa con 52 cartas y responde:
 - a. ¿De cuántas formas diferentes puedes ordenar en una fila las 52 cartas?
 - b. ¿Cuántas ordenaciones de seis cartas que empiecen y terminen con rey se pueden formar?
 - c. ¿Cuántas ordenaciones de siete cartas se pueden formar con los cuatro reyes alternándose con cualquier otra carta?
Ejemplo: K Q K 9 K 4 K.
 - d. ¿Cuántas combinaciones se pueden hacer de siete cartas?
 - e. ¿Cuántas combinaciones se pueden hacer de siete cartas con cuatro reyes y tres reinas?

Figura 4.10 Actividad del libro de Probabilidad y Estadística (Cervantes, 2020).

Capítulo 5

5 MODELACIÓN EN LOS PROBLEMAS DE LOS LIBROS

En este capítulo se analiza la forma en que la modelación matemática está presente en cada uno de los libros de texto de matemáticas, se discute cuál es el más favorecido y si tiene relación con el mapa curricular propuesto en el Acuerdo Secretarial 253 (2013) que ejerce como punto de partida para la creación de los libros en bachillerato tecnológico.

5.1 Fase 1 Resultados de la clasificación de los problemas de los libros de texto

Se clasificaron los libros de texto de Matemáticas de la serie BookMart por problemas de acuerdo a su estructura, diferenciando aquellos que involucran la modelación matemática. Es relevante mencionar que dentro de los contenidos que se presentan al inicio de cada parcial, ningún libro hace referencia a la modelación matemática específicamente.

En la Tabla 5.1 se muestra la clasificación propuesta para el primer parcial del libro de Álgebra que se aplicó para cada uno de los libros que componen la serie de BookMart. En primer lugar, se menciona el nombre propuesto por los autores para la lección, consecuentemente se identificó el

contenido matemático involucrado y la actividad a realizar por los estudiantes. Finalmente se categorizó los problemas en aquellos que involucran modelación matemática de acuerdo a la restricción propuesta en el capítulo 4 la cual plantea que los problemas mínimamente deben surgir en la situación real y deben requerir la traducción del mundo real a las matemáticas para ser resuelto.

Tabla 5.1
Clasificación del primer parcial de libro de Álgebra (Trujillo,2019) de la serie BookMart.

Lección	Contenido Matemático	Actividad	Número de Actividad	Número de Problemas	Número de problemas que presentan modelación
Uso de variables y expresiones algebraicas	Variable	Identificar tipo de variable	1	1	0
			2	2	0
Uso de los números y sus propiedades	Números reales	Crucigrama	3	1	0
	Ley de exponentes	Efectuar operaciones	4	12	0
	Lenguaje algebraico	Identificar expresiones algebraicas	5	20	0
	Evaluación numérica	Evaluar expresiones	6	7	0
		Efectuar operaciones Algebraicas	7	8	0
Conceptos Básicos del lenguaje algebraico	Operaciones Algebraicas	Inventar problemas y escribirlos en lenguaje algebraico	8	1	0
	Sucesiones Geométricas	Hallar sucesiones	9	9	0
Patrones números	Suma de Sucesiones	Sumar términos de sucesiones	10	11	0
	Sucesiones Geométricas	Completar una tabla	11	2	0

Sucesiones y series numéricas	Sucesión de Fibonacci	investigación	12	1	0
	Sucesiones cuadráticas	Encontrar forma general de sucesiones	13	5	0
	Máximos y mínimos	Determinar máximo y mínimos	14	12	0
	Sucesiones	Encontrar la razón de cambio	15	10	0

En el Apéndice B se presenta la clasificación de las 18 lecciones que componen el libro de Álgebra dividido en tres parciales, cada lección trata un contenido matemático diferente. En la Tabla 5.2 se puede ver el número total de problemas, los problemas que involucran modelación y la frecuencia relativa obtenida del número de problemas que presentan modelación en la lección y el total de problemas que presentan modelación en el libro. De acuerdo a las frecuencias relativas obtenidas se puede observar que en la lección “Representación y resolución de sistemas de ecuaciones” el estudiante está más propenso a resolver un problema que involucre modelación matemática, mientras que en siete lecciones del libro el estudiante no tendrá ningún acercamiento a la modelación.

Tabla 5.2
Número de problemas, Número de problemas que presentan modelación y Frecuencias relativas de cada lección del libro de Álgebra (Trujillo, 2019)

Lección	Número de problemas	Número de problemas que presentan modelación	Frecuencia relativa por lección
Uso de variables y expresiones algebraicas	3	0	0
Uso de números y propiedades	13	0	0
Conceptos Básicos del lenguaje algebraico	36	0	0
De los patrones números a la simbolización algebraica	22	0	0
Sucesiones y series numéricas	28	0	0
Variación lineal como introducción a la relación funcional	7	3	0.187
Variación proporcional	11	2	0.125
Tratamiento de lo lineal y lo no lineal	35	0	0

El trabajo simbólico	16	0	0
Representación y resolución de sistemas de ecuaciones	23	8	0.500
Funciones y ecuaciones cuadráticas	43	3	0.187
TOTAL	237	16	1

En el Apéndice C se muestra la clasificación del libro de Geometría y Trigonometría compuesto por 18 lecciones. En la Tabla 5.3 se puede observar el número total de problemas, los problemas que involucran modelación y la frecuencia relativa obtenida. Se ve por medio de las frecuencias relativas que la lección “Propiedades de los triángulos” que atiende los criterios de semejanza y congruencia de triángulos, el estudiante es más propenso a resolver una actividad que involucre modelación matemática mientras que en 8 lecciones el estudiante no tendrá ningún acercamiento a la modelación.

Tabla 5.3

Número de problemas, Número de problemas que presentan modelación y Frecuencias relativas de cada lección del libro de Geometría y Trigonometría (Toalá,2018)

Lección	Número de problemas	Número de problemas que presentan modelación	Frecuencia Relativa
Elementos, características y notación de ángulos	5	0	0
Sistemas angulares de medición	29	2	0.086
Propiedades de los triángulos	17	3	0.130
Suma de ángulos internos	24	1	0.043
Propiedades de los polígonos	3	0	0
Elementos y propiedades de los ángulos en la circunferencia	8	0	0
Patrones y Fórmulas de perímetros de figuras geométricas	3	2	0.086
Patrones y Fórmulas de áreas de figuras geométricas	8	2	0.086
Patrones y Fórmulas de volúmenes de figuras geométricas	12	0	0
Patrones y Fórmulas para la suma de ángulos internos en polígonos	6	0	0
Patrones y Fórmulas de algunos ángulos de la circunferencia	2	1	0.043
Criterio de congruencia de triángulos	20	0	0
Congruencia o Semejanza	25	0	0
Teorema de Tales y semejanza de triángulos	4	0	0

Medida de ángulos y razones trigonométricas	24	10	0.434
El círculo trigonométrico, relaciones e identidades trigonométricas	30	1	0.043
Las identidades trigonométricas y sus relaciones	2	1	0.043
TOTAL	222	23	1

En el apéndice D se encuentra la clasificación del libro de Geometría Analítica el cual contiene 12 lecciones. En la Tabla 5.4 se observa el número total de problemas, los problemas que involucran modelación y la frecuencia relativa. Se nota que en las lecciones “Elementos históricos sobre la elipse, la parábola y la hipérbola” y “Aplicaciones de los lugares geométricos en situaciones contextualizadas” el estudiante se enfrentará seguramente a un problema que presente modelación matemática. La Figura 4.6 muestra un ejemplo de los problemas que se presentan en la lección “Aplicaciones de los lugares geométricos en situaciones contextualizadas”. En este libro 8 lecciones no contienen ningún acercamiento a la modelación.

Tabla 5.4

Número de problemas, Número de problemas que presentan modelación y Frecuencias relativas de cada lección del libro de Geometría Analítica (Pérez A. y Barrios, 2019).

Lección	Número de problemas	Número de problemas que presentan modelación	Frecuencia Relativa
Sistemas de coordenadas cartesianas	33	0	0
Los lugares geométricos básicos, la recta y circunferencia	57	1	0.125
La elipse, la parábola y la hipérbola	12	0	0
La longitud de segmento, el punto medio la perpendicular entre otras.	49	0	0
Intersección de rectas y lugares geométricos	28	0	0
¿Qué tipos de lugares geométricos se precisan trazar con rectas y cónicas?	50	0	0
¿Cómo construir la ecuación de la circunferencia?	22	0	0
Elementos históricos sobre la elipse, la parábola y la hipérbola	3	3	0.375
Aplicaciones de los lugares geométricos en situaciones contextualizadas	4	4	0.500
El cono y sus cortes	2	0	0
Los elementos de la ecuación general de las cónicas	5	0	0

Los puntos en el plano de una parábola, una circunferencia, una elipse y una hipérbola	25	0	0
Total	289	8	1

En el apéndice E se encuentra la clasificación del libro de Cálculo Diferencial el cual contiene 9 lecciones. En la Tabla 5.5 se muestra el número total de problemas, los problemas que involucran modelación y la frecuencia relativa obtenida. Se observa que la lección “Elementos, características y notación de ángulos” contiene la mayor carga de problemas que presentan modelación matemática en libro. Dos lecciones de este libro no contienen modelación matemática.

Tabla 5.5

Número de problemas, Número de problemas que presentan modelación y Frecuencias relativas de cada lección del libro de Cálculo Diferencial (Romano, 2018).

Lección	Número de problemas	Número de problemas que presentan modelación	Frecuencia Relativa
Elementos, características y notación de ángulos	15	7	0.291
Conceptos básicos del sistema de coordenadas	8	2	0.083
Usos de la derivada en diversas situaciones	7	0	0
Tratamiento intuitivo de los límites	20	3	0.125
Tratamiento de cambio y variación	8	6	0.250
Introducción a las funciones continuas	19	1	0.041
Graficación de funciones	37	2	0.083
Nociones básicas de derivación	26	3	0.125
Optimización y Graficación de funciones elementales	11	0	0
Total	151	24	1

En el apéndice F se presenta la clasificación del libro de Cálculo Integral compuesto por 11 lecciones. En la Tabla 5.6 se muestra el número total de problemas, los problemas que involucran modelación y la frecuencia relativa. Se puede observar que la lección “Ejemplos de la cinemática y su interpretación contextual” contiene la mayor carga de problemas que presentan modelación matemática en libro. En este libro 8 lecciones no presentan modelación.

Tabla 5.6

Número de problemas, Número de problemas que presentan modelación y Frecuencias relativas de cada lección del libro de Cálculo Integral (Romano, 2019).

Lección	Número de problemas	Número de problemas que presentan modelación	Frecuencia Relativa
La gráfica como descripción del cambio	7	0	0
Aproximación de área bajo la curva	28	0	0
Comparación de aproximación	2	0	0
Conjeturar sobre expresión general del área bajo la curva	31	0	0
Interpretación de área según el fenómeno	4	4	0.334
Introducción a la antiderivada	30	0	0
Construcción de tablas de integración	61	0	0
Técnicas para obtener la antiderivada	100	0	0
Tratamiento analítico de las integrales definida e indefinida	17	0	0
¿Qué tipo de procesos se precisan para tratar la acumulación y su medida?	36	2	0.167
Ejemplos de la cinemática y su interpretación contextual	7	6	0.500
Total	323	12	1

En el apéndice G observa la clasificación del libro de Probabilidad y Estadística compuesto por 7 lecciones. En la Tabla 5.7 se muestra el número total de problemas, los problemas que involucran modelación y la frecuencia relativa. Se puede ver que la lección “Uso del conteo y probabilidad para eventos” contiene la mayor carga de problemas que presentan modelación matemática en libro. En este libro 3 lecciones no contienen ningún acercamiento a la modelación.

Tabla 5.7

Número de problemas, Número de problemas que presentan modelación y Frecuencias relativas de cada lección del libro de Probabilidad y Estadística (Cervantes, 2020).

Lección	Número de problemas	Número de problemas que presentan modelación	Frecuencia Relativa
Conceptos básicos de probabilidad y Estadística	16	0	0
Recolección de datos y su clasificación de clases	12	0	0

Uso del conteo y probabilidad para eventos	15	15	0.535
Conceptos de riesgo en situaciones conceptuales	16	11	0.392
Contextualización de los elementos de la probabilidad	9	1	0.035
Manejo de la información en situaciones de la vida cotidiana	22	0	0
Significado de las medidas de dispersión	36	1	0.035
Total	126	28	1

Se observó que la mejor distribución de modelación matemática por cada una de las lecciones se encuentra en el libro de Cálculo Diferencial (Tabla 5.5), mientras que el libro de Geometría Analítica cuenta con 9 lecciones que no presentan modelación (Tabla 5.4), además de contener una lección que contiene la mitad de problemas que presentan modelación en el libro de texto, caso similar al de Cálculo Integral (Tabla 5.6).

Posteriormente se obtuvieron las frecuencias relativas por parcial, éstas fueron obtenidas del cociente del número de problemas que presentan modelación en el parcial y el número total de problemas que presentan modelación en el libro. Las frecuencias nos muestran en que parcial de cada uno de los libros de texto se concentra la mayor presencia de modelación matemática.

En la Tabla 5.8 se muestra la presencia de la modelación matemática en cada uno de los parciales que componen el libro de Álgebra, también se anexa el número de problemas que contiene cada parcial y el número de problemas que contienen modelación. Se observa que en el tercer parcial donde se tratan los temas de “representaciones y resolución de sistemas de ecuaciones” y “funciones y ecuaciones cuadráticas” es donde se encuentra la mayor carga de modelación en el libro mientras que en el primer parcial donde se tratan temas importantes del pensamiento algebraico (APÉNDICE B) no se encuentra algún problema que tenga relación con la modelación matemática.

Tabla 5.8
Frecuencias relativas por parcial del libro de Álgebra (Trujillo,2018).

Parcial	Número de Problemas	Número de problemas que presentan modelación	Frecuencia Relativa
1	102	0	0
2	69	5	0.312
3	66	11	0.687

Total	237	16	1
-------	-----	----	---

De manera similar a lo realizado con el libro de Álgebra se presenta la Tabla 5.9 en el cual se muestra las frecuencias relativas por parcial del libro de Geometría y Trigonometría. Se observa una similitud al libro de Álgebra dado que la mayor carga la contiene el tercer parcial que trata en general las razones trigonométricas mientras que en el segundo y primer parcial se muestra una distribución de carga de modelación matemática equilibrada.

Tabla 5.9

Frecuencias relativas de la presencia de la modelación matemática en cada parcial del libro de Geometría y Trigonometría (Toalá, 2018).

Parcial	Número de Problemas	Número de problemas que presentan modelación	Frecuencia Relativa
1	86	6	0.260
2	80	5	0.217
3	56	12	0.521
Total	222	23	1

En la Tabla 5.10 se muestra las frecuencias del libro de Geometría Analítica. Se observa presencia en los tres parciales, el tercero al igual que los dos libros anteriores analizados presenta la mayor carga de modelación matemática, este parcial se centra en las aplicaciones y análisis de las cónicas.

Tabla 5.10

Frecuencias relativas de la presencia de la modelación matemática en cada parcial del libro de Geometría Analítica (Pérez A. y Barrios, 2019).

Parcial	Número de Problemas	Número de problemas que presentan modelación	Frecuencia Relativa
1	179	1	0.125
2	75	3	0.375
3	35	4	0.5
Total	289	8	1

En la Tabla 5.11 se muestra las frecuencias del libro de Cálculo Diferencial en la que se observa una diferencia de los libros anteriormente analizados, la mayor carga se encuentra en el segundo parcial en donde se analiza la derivada como razón de cambio, aunque la diferencia entre el primero y el segundo es mínima. El tercer parcial es el menos favorecido con una frecuencia de 0.208.

Tabla 5.11
Frecuencias relativas de la presencia de la modelación matemática en cada parcial del libro de Cálculo Diferencial (Romano, 2018).

Parcial	Número de Problemas	Número de problemas que presentan modelación	Frecuencia Relativa
1	30	9	0.375
2	47	10	0.416
3	74	5	0.208
Total	151	24	1

En la Tabla 5.12 se muestra las frecuencias del libro de Cálculo Integral el cual comparte autor con el libro de Cálculo Diferencial. Se notan grandes diferencias entre ambos libros, seguramente debido al requisito dado por el Acuerdo Secretarial 253 (2013) para la creación de libros en bachilleratos tecnológicos. Se observa una mayor carga en el tercer parcial en el que se pueden encontrar aplicaciones de la Integral mientras que en el segundo no existe modelación alguna.

Tabla 5.12
Frecuencias relativas de la presencia de la modelación matemática en cada parcial del libro de Cálculo Integral (Romano, 2019).

Parcial	Número de Problemas	Número de problemas que presentan modelación	Frecuencia Relativa
1	72	4	0.333
2	191	0	0
3	60	8	0.666
Total	323	12	1

En la Tabla 5.12 se muestra las frecuencias del libro de Probabilidad y Estadística por parcial en el cual se observa que el primer parcial contiene la mayor carga de modelación matemática incluso se puede decir que el 96% de los problemas que presentan modelación se encuentran en este parcial.

Tabla 5.13

Frecuencias relativas de la presencia de la modelación matemática en cada parcial del libro de Probabilidad y Estadística (Cervantes, 2020).

Parcial	Número de Problemas	Número de problemas que presentan modelación	Frecuencia Relativa
1	68	27	0.964
2	22	0	0
3	36	1	0.035
Total	126	28	1

En el libro de Álgebra (Trujillo,2019) se detectaron dieciséis problemas que presentan modelación matemática de un total de doscientos cincuenta y siete (Apéndice B). El libro de Geometría y Trigonometría presenta 23 problemas con modelación matemática de un total de 222, mientras que en el de Geometría Analítica (Pérez A. y Barrios, 2019) se observaron 8 de 289 posibles (Apéndice C). En el libro de Cálculo Diferencial (Romano, 2018) se detectaron veinticuatro problemas de 151 (Apéndice D), en el de Cálculo Integral (Romano, 2019) se detectaron sólo doce de 323 (apéndice E), en cambio en el de Probabilidad y Estadística (Cervantez,2020) se detectaron veintiocho de 126 candidatos.

En la Tabla 5.14 se observan las frecuencias relativas obtenidas del cociente del total de problemas que presentan modelación matemática y el número total de problemas que presenta cada libro de texto. Se puede observar que el libro de Probabilidad y Estadística tiene mayor frecuencia a comparación de los restantes y que el libro de Geometría Analítica ocupa la última posición. Es decir, entre mayor sea la frecuencia, mayor es el interés del libro por la modelación matemática de acuerdo a Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincahe, et al., 2018).

Tabla 5.14
Frecuencias relativas de la presencia de la modelación matemática por libro de texto.

Nombre del libro	Número de problemas	Número de problemas que presentan modelación	Frecuencia relativa
Álgebra	237	16	0.067
Geometría y Trigonometría	222	23	0.103
Geometría Analítica	289	8	0.027
Cálculo Diferencial	151	24	0.158
Cálculo Integral	323	12	0.037
Probabilidad y Estadística	126	28	0.222

Durante la revisión de los problemas de los libros de texto que incluyen modelación matemática, se observaron dos formas en que se presentan la situación real, aquellos emergen en un escenario real, es decir, se presentan con situaciones específicas en la realidad o el estudiante las puede fabricar y aquellos problemas que fueron formulados para dar lugar al trabajo matemático. Eso es similar a lo que ocurría en los problemas identificados por Quiroz y Rodríguez (2015) en su investigación de libros de texto de nivel básico específicamente los utilizados en primaria.

También se observó que algunos problemas que presentan modelación matemática incluyen el modelo matemático que de manera directa influye en el tránsito de los estudiantes por el ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincahe, et al., 2018), dado que el problema coloca al estudiante en el mundo de las matemáticas y no permiten que sea el estudiante quien realice la traducción del resto del mundo a las matemáticas.

Por lo tanto, consecuentemente identificadas aquellas actividades que contienen modelación, se identificaron las siguientes categorías: “El problema emerge en un escenario real” y “El problema presenta el modelo matemático”.

En la Tabla 5.15, se muestran las categorías propuestas correspondiente del primer parcial del libro de Geometría y Trigonometría (Toalá, 2018) en donde se puede observar que los seis problemas

que presentaban modelación matemática solo una emerge en un escenario real (Figura 3.18), las situaciones restantes fueron creadas para dar lugar al trabajo matemático. También se observa que 5 de los 6 problemas que presentan modelación están acompañados del modelo matemático. Por lo tanto, se observa que en este parcial el estudiante no podrá transitar completamente por el ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincahe, et al., 2018).

Tabla 5.15
Categorías obtenidas del primer parcial del libro de Geometría y Trigonometría (Toalá, 2018).

Número de Actividad	Número de problemas	Número de problemas que presentan modelación	Número de problemas que emergen en un contexto real	Número de problemas que proponen el modelo matemático
7	1	1	0	1
8	1	1	0	1
15	3	1	0	0
16	2	1	1	1
17	2	1	0	1
20	8	1	0	1

En la Tabla 5.16, se observa el número de problemas que emergen en un escenario real y el número de problemas que presentan el modelo matemático en cada uno de los libros que componen la editorial BookMart. Se nota que los problemas que emergen de un escenario real son difíciles de encontrar en los libros e, incluso, en el libro de Álgebra y Cálculo Diferencial no se encuentran. También se observa que la mayor parte de los problemas que presentan modelación matemática vienen acompañados del modelo matemático de la situación.

Tabla 5.16

Número de problemas involucrados con la modelación matemática que emergen de un escenario real y/o presentan el modelo matemático

Nombre del libro	Número de problemas que presentan modelación	Número de problemas que emergen de un escenario real	Número de problemas que presentan el modelo matemático
Álgebra	16	0	0
Geometría y Trigonometría	23	2	11
Geometría Analítica	8	3	2
Cálculo Diferencial	24	3	21
Cálculo Integral	12	0	10
Probabilidad y Estadística	28	4	0

Como se observó en este capítulo, el libro de Probabilidad y Estadística contiene una mayor presencia de modelación matemática y contiene cuatro problemas que parten de una situación real.

Capítulo 6

6 DESEMPEÑO DE ESTUDIANTES A TRAVÉS DEL CICLO DE MODELACIÓN

En este capítulo se observan las respuestas de estudiantes a un problema del libro de Geometría y Trigonometría que presenta modelación matemática y emerge de un escenario real. El problema trata sobre una escuela flotante en Nigeria, el autor del libro espera que sea resuelto por medio del teorema de Pitágoras, por lo cual acompaña al problema con una imagen y un Modelo real que insinúa el uso del teorema.

6.1 FASE 2 Tránsito de los Estudiantes por la actividad del libro de Texto.

Para esta fase se aplicó la prueba (Apéndice G), tomada de la actividad dieciséis perteneciente al primer parcial del libro de texto de Geometría y Trigonometría (Toalá 2018), a estudiantes de dos centros distintos de nivel medio superior: CECyTE y COBAT. En cuanto al problema seleccionado (Figura 4.4), se observa que para el estudiante no es posible transitar completamente por el ciclo de la modelación, debido a que se proporciona hasta el Modelo real y se insinúa el Modelo matemático, además que la pregunta que se debe responder permite validar los resultados. Es un problema peculiar, que proporciona datos que coinciden con la realidad, es decir, dicha escuela existe y es posible encontrar información de ésta en la web.

En la Figura 6.1 se observa este problema analizado bajo la lupa del ciclo de modelación. En color rojo se presentan los pasos por los cuales transitó el autor antes de colocar el problema en el libro. El autor partió de una situación real, creó un Modelo real y lo presentó de forma que insinuara el Modelo matemático a utilizar en el problema. En color azul se observan los estadios por los que podría transitar el estudiante, los cuales son únicamente: completar el modelo matemático y simplificar los resultados matemáticos y llegar a los resultados reales.

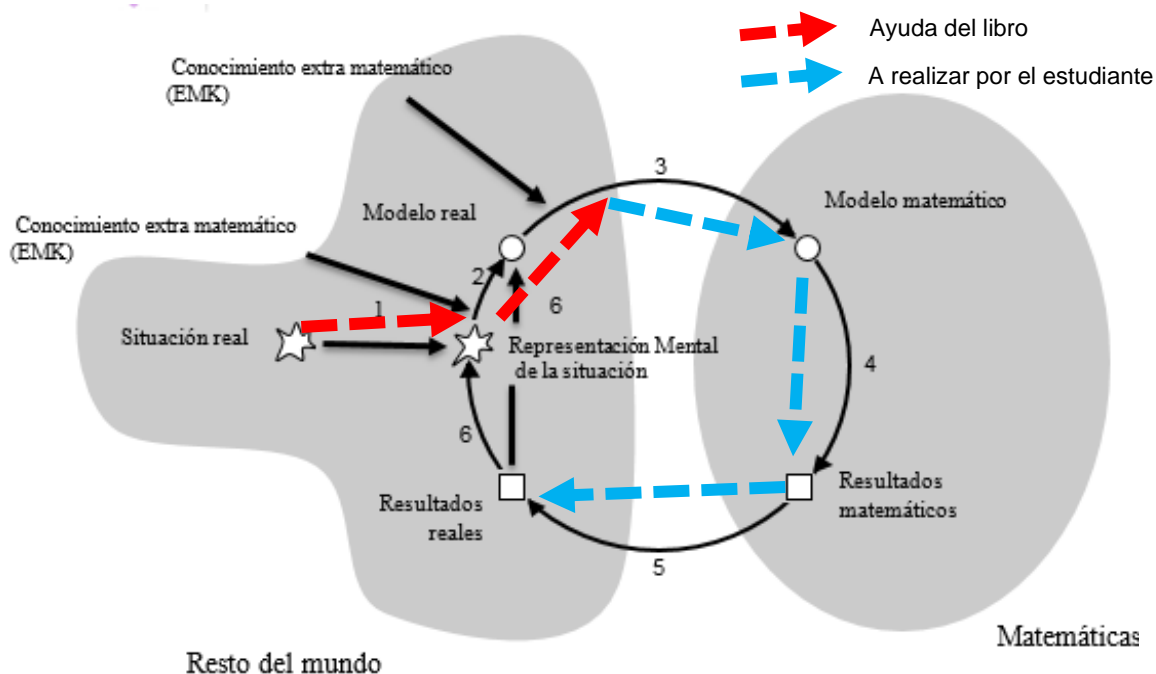


Figura 6.1 Problema 4.4 analizado bajo la lupa del ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincache, et al., 2018).

Las respuestas de los estudiantes se clasificaron en dos categorías principales: A y B. La primera categoría A engloba a los estudiantes que pasaron el nodo del modelo matemático utilizando el teorema de Pitágoras u otro método que podría llegar a la solución, mientras que la categoría B se centra en procedimientos erróneos. Dentro de A se encuentran dos casos, los que realizaron el trabajo matemático y a los resultados reales (A-1) y aquellos que realizaron erróneamente el trabajo matemático y/o presentan un resultado matemático incorrecto (A-2). En B se encontraron 5 casos, aquellos que sustentaron que la hipotenusa es menor en 2 a los catetos (B-1), los que aseguran que la altura debe ser 14 (B-2), los que intentaron hallar el valor por medio de una proporcionalidad (B-3), los que usaron la fórmula de área (B-4) y finalmente los que intentaron utilizar ley de senos. A continuación, se muestra un ejemplo de cada subcategoría.

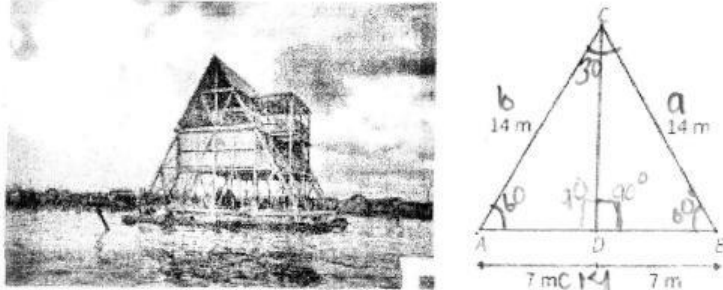
En la Figura 6.2, se observa la respuesta de un estudiante clasificado en A-1. Se muestra la identificación del estudiante para utilizar el teorema de Pitágoras e incluso presenta el resultado matemático correcto. Sin embargo, analizando el trabajo matemático, se puede notar que no utilizó

el teorema de Pitágoras, él recurre a la ley de coseno. Se clasifica en A-1 dado que el único error fue mencionar el teorema de Pitágoras.

Actividad de aprendizaje 16

Llévate a cabo la siguiente actividad.

1. En la figura se muestra una escuela flotante de la región de Lagos, Nigeria. Si el frente es un triángulo equilátero de 14 m de lado, ¿cuál es su altura?



Tenemos que aplicar el teorema de Pitágoras.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \text{ de } A \Rightarrow \text{ fórmula}$$

Sustitución: $a^2 = (14)^2 + (7)^2 - 2(14)(7)$

$$a^2 = 196 + 49 - 196 \cdot \cos \text{ de } A = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$a^2 = 245 - 98 = 147$$

$$a^2 = 147$$

$$a = 12.12$$

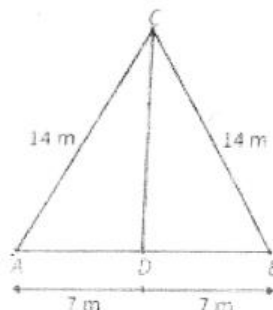
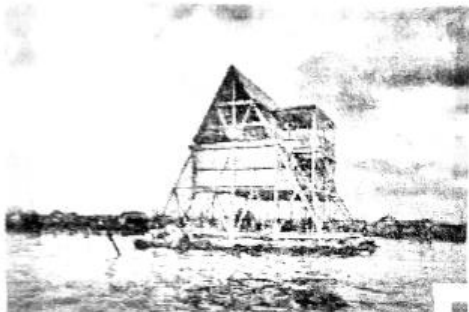
$$h = 12.12 \text{ m.}$$

Figura 6.2 Actividad resuelta por un estudiante clasificado en A-1 utilizando la ley de cosenos.

En la Figura 5.3 también se muestra un estudiante clasificado en A-1 pero, a diferencia del anterior, éste recurre a una simplificación generalizada del teorema de Pitágoras. El estudiante da por hecho que la altura debe ser la mitad de la raíz del triple de “a” donde “a” es 14. Es una respuesta interesante dado que, a pesar de tener clara la simplificación del teorema y el dominio del mismo, utiliza un signo matemático en lugar de una letra para expresar una variable.

◀ Lleva a cabo la siguiente actividad.

1. En la figura se muestra una escuela flotante de la región de Lagos, Nigeria. Si el frente es un triángulo equilátero de 14 m de lado, ¿cuál es su altura?



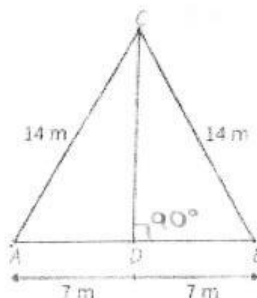
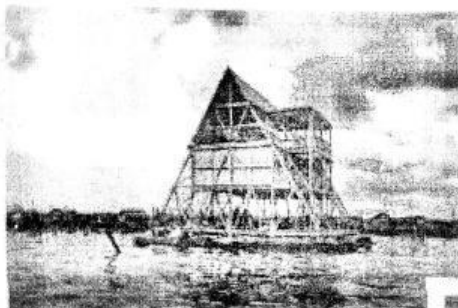
$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{3} * 1/2 \\
 h &= \sqrt{3} * 1/2 \\
 h &= \sqrt{3} * 14\text{cm}/2 \\
 h &= \sqrt{3} * 7\text{cm} \\
 h &= 1.73 * 7\text{cm} \\
 \boxed{h &= 12.11\text{cm}}
 \end{aligned}$$

Figura 6.3 Actividad resuelta por un estudiante clasificado en A-1 utilizando una simplificación del teorema de Pitágoras.

También se encontró otro método que fue clasificado en A-1 y que permitió llegar al resultado correcto. Se centra en medir la figura utilizando una regla para tratar de obtener el resultado por medio de una proporción. En la figura 5.4 se observa el procedimiento de un estudiante utilizando este método de solución justificando de la siguiente manera: “De lado mide 4 igual a 14, de altura mide 3.5 entonces la altura es $(14/4)(3.5)$ ”. Aunque no es la respuesta exacta es una aproximación aceptable.

Lleva a cabo la siguiente actividad.

- En la figura se muestra una escuela flotante de la región de Lagos, Nigeria. Si el frente es un triángulo equilátero de 14 m de lado, ¿cuál es su altura?



El triángulo equilátero puede dividirse en dos triángulos rectángulos con un ángulo de 90° y se calcula la medida de los catetos y la hipotenusa $c^2 = a^2 + b^2$ pero ya tenemos el lado más grande que es la hipotenusa así que calculamos solo un cateto "b"

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$\sqrt{b^2} = \sqrt{14^2 - 7^2}$$

$$\sqrt{b} = \sqrt{196 - 49}$$

$$b = 147$$

$$b = 12.12$$

hipotenusa así que calculamos solo un cateto "b"

Figura 6.5 Actividad resuelta por un estudiante clasificado en A-1 utilizando el teorema de Pitágoras.

En la Tabla 6.1 se observa la cantidad de estudiantes por subsistema que presentaron los diferentes métodos de solución y llegaron al resultado correcto y alcanzando el nodo de resultados matemáticos en el ciclo de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincahe, et al., 2018). El teorema de Pitágoras y la simplificación de éste fue utilizado en ambos bachilleratos, el método de medición fue único en CECYTE mientras que la utilización de la ley de cosenos fue particular en COBAT.

Tabla 6.1
Métodos de solución pertenecientes a la categoría A-I.

Método de solución	COBAT	CECYTE
--------------------	-------	--------

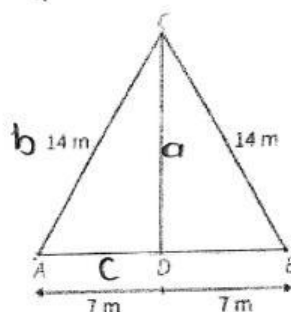
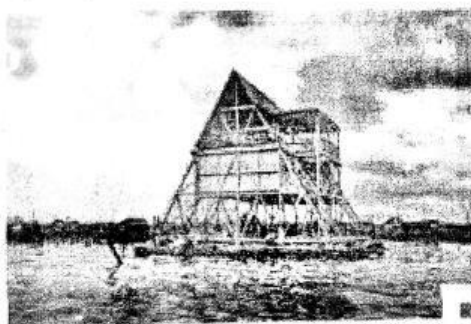
Teorema de Pitágoras	20	78
Simplificación del teorema de Pitágoras	2	3
Medición de los lados	0	3
Ley de cosenos	4	0

En la Figura 6.6 se muestra una respuesta clasificada en A-2. El estudiante menciona lo siguiente “Se usa el teorema de pitagoras ya que queremos sacar el valor de la altura y ya que tenemos 2 valores que es b y c es sencillo poder sacar el valor a (altura) y asi se sabría su resultado”. Consecuentemente el estudiante procedió a realizar el trabajo matemático con base en el teorema de Pitágoras, realizando erróneamente el despeje de “a” lo que llevó a presentar un resultado matemático erróneo.

Actividad de aprendizaje 16

Lleva a cabo la siguiente actividad.

- En la figura se muestra una escuela flotante de la región de Lagos, Nigeria. Si el frente es un triángulo equilátero de 14 m de lado, ¿cuál es su altura?



$$a = b^2 + c^2$$

$$a^2 = (14)^2 + (7)^2$$

$$a^2 = 196 + 49$$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{245}$$

$$a = 15.6$$

Se usa el teorema de Pitagoras ya que queremos sacar el valor de la altura y ya que tenemos 2 valores que es b y c es sencillo poder sacar el valor de a (altura) y asi se sabría su resultado

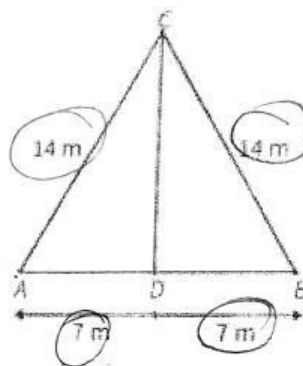
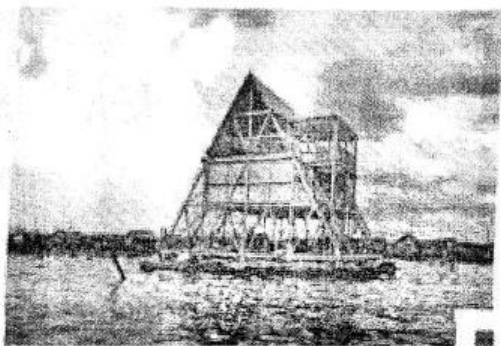
Figura 6.6 Actividad resuelta por un estudiante clasificado en A-2 utilizando el teorema de Pitágoras.

En la categoría B se observan otro tipo de procedimientos y respuestas que no llevan al resultado correcto. Sin embargo, es importante mencionar que se encontraron presentes en ambos planteles. En la Figura 6.7 se muestra la respuesta de un estudiante clasificado en B-1. El estudiante sustenta que la hipotenusa es menor en 2 a los catetos debido a la inclinación. Justifica este hecho de la siguiente manera: “La base mide 14 pero recordemos que por inclinación se le quita 2 en total el resultado es 12”. Esta justificación se acompaña de lo que parece ser una fórmula de altura, la cual el estudiante no utilizó y dio por regla que se debe quitar 2. Esta respuesta solo fue encontrada en CECYTE.

Actividad de aprendizaje 16

Lleva a cabo la siguiente actividad.

1. En la figura se muestra una escuela flotante de la región de Lagos, Nigeria. Si el frente es un triángulo equilátero de 14 m de lado, ¿cuál es su altura?



$R = 12.62$ $Altura = \frac{14 \sqrt{3}}{2} = ~~12.62~~$

La base mide 14 pero recordemos que por inclinación se le quita 2 en total el resultado es (12 m)

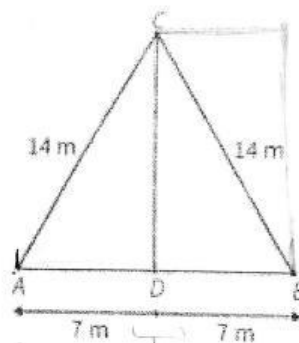
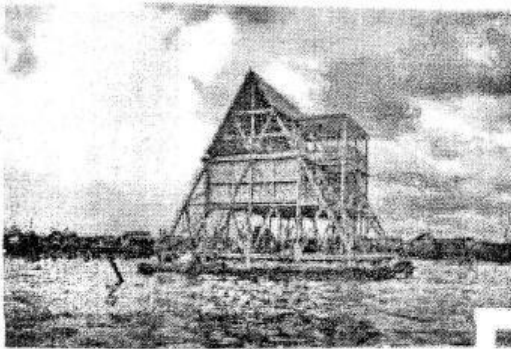
Figura 6.7 Actividad resuelta por un estudiante clasificado en B-1 mencionando que la altura debe ser menor a la hipotenusa en 2 unidades.

En la Figura 6.8 se observa la respuesta de un estudiante en B-2, el cual sustenta que la altura de la escuela debe ser la misma, dado que es un triángulo equilátero. El estudiante menciona lo siguiente: “su altura es de 14 m este triángulo tiene medidas iguales y su altura debe ser la misma $R=14m$ ”. En un principio parece ser que el estudiante recurre a la fórmula de área, pero cambia de opinión y decide que la altura debe ser la misma.

Actividad de aprendizaje 16

◀ Lleva a cabo la siguiente actividad.

1. En la figura se muestra una escuela flotante de la región de Lagos, Nigeria. Si el frente es un triángulo equilátero de 14 m de lado, ¿cuál es su altura?



$$\frac{b \times h}{2}$$

$$\frac{14 \times 14}{2}$$

$$= 7 \times 14$$

esto está mal

R/98

su altura es de 14 m
 • este triángulo tiene medidas iguales y su altura debe ser igual
 R/14 m

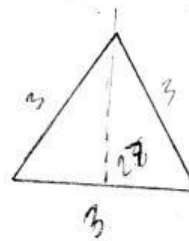
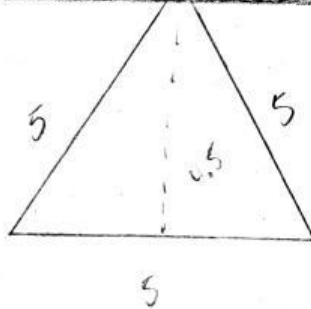
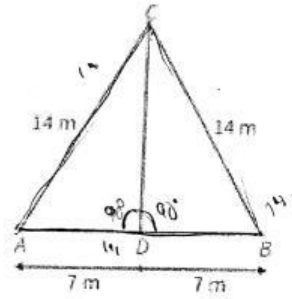
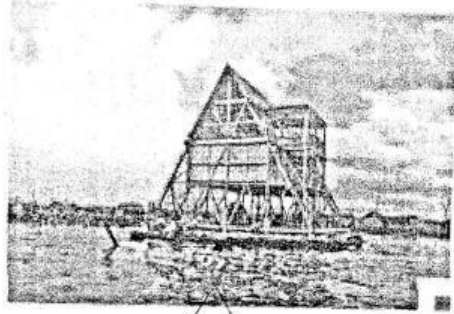
Figura 6.8 Actividad resuelta por un estudiante clasificado en B-2 mencionando que la altura y los lados del triángulo miden lo mismo.

En B-3 se encuentran las respuestas de estudiantes que recurrieron a la proporcionalidad y/o otorgaron un resultado basado en una suposición. En la Figura 6.9 se observa que el estudiante crea triángulos más pequeños con el propósito de encontrar una razón que les permitirá saber la altura del triángulo original. El estudiante justifica su respuesta de la siguiente manera: “Todo es referente a la proporcionalidad cuando son equiláteros para calcular la altura se le resta un 70% de cualquiera de sus lados”. Probablemente, el estudiante pretendió utilizar la hipótesis de que la altura de un triángulo es $\frac{2}{3}$ de la base, pero su aproximación tuvo algunos errores. En esta subcategoría, también, se pueden encontrar respuestas de estudiantes que propusieron como resultado una aproximación, que desde su perspectiva tuviera cierto grado de proporcionalidad.

Actividad de aprendizaje 16 13.86 m

Lleva a cabo la siguiente actividad.

- En la figura se muestra una escuela flotante de la región de Lagos, Nigeria. Si el frente es un triángulo equilátero de 14 m de lado, ¿cuál es su altura?



Todo es referente a la proporcionalidad. Cuando son equiláteros para calcular la altura se le resta un 10% de cualquiera de sus lados.

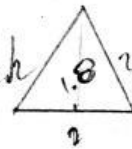


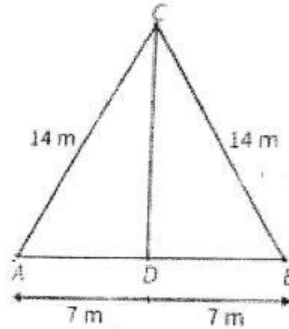
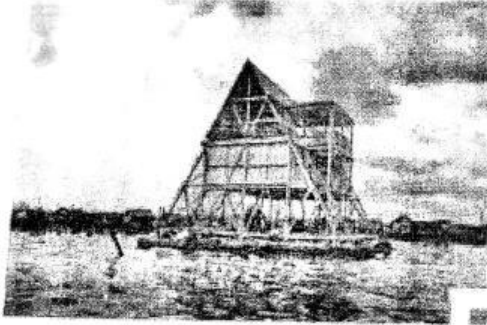
Figura 6.9 Actividad resuelta por un estudiante clasificado en B-2 mencionando que la altura y los lados del triángulo miden lo mismo.

En la subcategoría B-4 se observan estudiantes que utilizaron la fórmula de área de un triángulo. En la Figura 6.10 se observa un estudiante que utilizó esta fórmula y obtuvo el “área” del triángulo. El estudiante indica: “primero yo sume la base que corresponde a 14m, esa cantidad se multiplica por los 14 del lado del triángulo y la cantidad que sale se divide entre dos.” A partir de esta respuesta, se resalta la importancia de que sea el estudiante quien realice al menos la representación mental de la situación, dado que el estudiante en ningún momento entiende la actividad que está realizando. Incluso, se observa un ejemplo del “contrato didáctico” dado que el estudiante comienza a realizar operaciones arbitrarias con los números dados, otorgando un resultado.

Actividad de aprendizaje 1b

Lleva a cabo la siguiente actividad.

1. En la figura se muestra una escuela flotante de la región de Lagos, Nigeria. Si el frente es un triángulo equilátero de 14 m de lado, ¿cuál es su altura?



Primero yo sumo la base que corresponde a 14 m, esa cantidad se multiplica por los 14 m del lado del triángulo y la cantidad que sale se divide entre dos.

$$\text{Base} = 49 \text{ m} \quad 14 \times 14 = \frac{196}{2} \text{ m.}$$

$$\text{Altura} = \boxed{98 \text{ m}}$$

$$\frac{b \times h}{2}$$

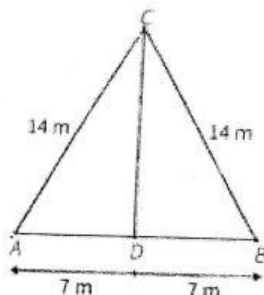
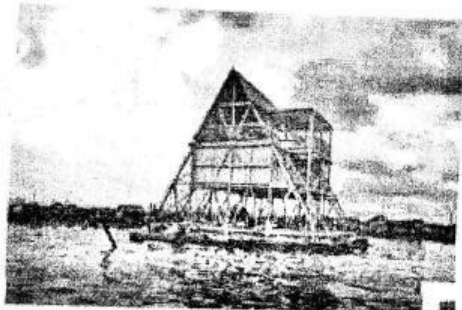
Figura 6.10 Actividad resuelta por un estudiante clasificado en B-4 utilizando la fórmula de área.

Algunos estudiantes en ambos bachilleratos intentaron utilizar la ley de senos para hallar el resultado. En la Figura 6.11 se observa la respuesta de un estudiante utilizando este método. Se nota insuficiencia de justificación del estudiante para utilizar este método y presenta un resultado que carece de sentido.

Actividad de aprendizaje 1.6

Lleva a cabo la siguiente actividad.

1. En la figura se muestra una escuela flotante de la región de Lagos, Nigeria. Si el frente es un triángulo equilátero de 14 m de lado, ¿cuál es su altura?



$$\begin{array}{r} 14 \\ 14 \\ \hline 28 \\ \frac{28}{56} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A = 14 \text{ m} \\ B = 14 \text{ m} \\ D = ? \end{array}$$

$$\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B}$$

$$\frac{a}{\text{Sen } 14} = \frac{b}{\text{Sen } 14}$$

$$a = \frac{(50) \text{ Sen } 28}{\text{Sen } 14}$$

$$= 261.026$$

$$\text{Sen } A = \frac{\text{cateto op}}{\text{hip}}$$

$$\frac{\text{Sen } 28}{1} = \frac{h}{56}$$

$$h = (\text{Sen } 28) (56)$$

$$h = 261.026$$

Figura 6.11 Actividad resuelta por un estudiante clasificado en B-5 tratando de utilizar la ley de senos.

De los documentos generados por los 200 preparatorianos encuestados, 154 se dieron cuenta que se requería el Teorema de Pitágoras y de éstos, 110 contestaron correctamente la pregunta formulada en el problema. Así que el 55% de los alumnos realizó el trabajo matemático que permitía pasar del modelo matemático a los resultados matemáticos. Los resultados de la prueba se muestran en la Tabla 5.16 clasificados por categorías.

Tabla 6.2
 Respuestas de estudiantes clasificadas por subcategorías.

Categorías	COBAT		CECYTE		
	Estudiantes	Frecuencia relativa	Estudiantes	Frecuencia relativa	
A. Completaron modelo matemático	A-1. Contestaron correctamente	26	0.40625	84	0.5753425
	A-2. Contestaron incorrectamente	9	0.140625	33	0.2260274
B. No completaron modelo matemático	B-1 La hipotenusa es menor en 2 a los catetos	3	0.046875	0	0
	B-2 Debe ser la misma altura	3	0.046875	6	0.0410959
	B-3 Aproximaron el valor - proporcionalidad	4	0.0625	11	0.0753425
	B-4 Usaron la fórmula de área	17	0.265625	10	0.0684932
	B.5 Razón Trigonometría	2	0.03125	2	0.0136986
TOTAL	64	1	146	1	

Basados en los resultados obtenidos en esta fase, se puede confirmar que la actividad induce al estudiante a utilizar el teorema de Pitágoras y lo que realmente le queda por realizar al estudiante es el trabajo matemático. A pesar de ser una situación basada en un contexto real y tener una mayor oportunidad de que el estudiante transitara por el ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincahe, et al., 2018), se sustenta que los libros de texto de la serie BookMart, en especial el de Geometría y trigonometría, no dan la oportunidad para que el estudiante transite por el ciclo completo de modelación.

Capítulo 7

7 DESEMPEÑO DE ESTUDIANTES EN UN PROBLEMA IDÓNEO

En este capítulo se analizan las producciones estudiantiles a partir de un instrumento idóneo donde se puede observar el desarrollo de cada uno bajo la lupa del ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincahe, et al., 2018). Dicho instrumento se basa en un experimento relacionado con el desplazamiento de cochecitos de juguete.

7.1. Fase 3 Tránsito de los estudiantes por el ciclo de modelación

De los resultados obtenidos en segunda fase de este estudio, se optó por la opción de modificar un problema del libro de texto de forma que permitiera al estudiante transitar completamente por el ciclo de modelación matemática de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincahe, et al., 2018). En la Figura 7.1 se observa la actividad del libro de texto de Geometría Analítica (Pérez A. y Barrios, 2019), se presenta inmediatamente después de presentar el tema Punto-pendiente y se le pide al estudiante completar la tabla con la formula anteriormente dada. La actividad consiste en el llenado de una tabla a partir de datos aleatorios dados al estudiante, claramente se observa que no tiene relación alguna con la modelación matemática.

Actividad de aprendizaje 3

Responde lo que se pide.

1. Completa la tabla con la ecuación en su forma punto-punto.

m	$P_1(x_1, y_1)$	Forma punto-punto
-2	(-1, 1)	
9	(4, 6)	
$\frac{1}{3}$	(-4, -3)	
$-\frac{4}{3}$	(-2, 1)	
$\frac{5}{3}$	(7, 1)	

2. De las formas punto-punto de la Actividad de aprendizaje 1 halla la forma general, la forma ordenada al origen y la forma sintética.

Figura 7.1 Actividad de aprendizaje 3 del segundo parcial del libro de Geometría Analítica (Pérez A. y Barrios, 2019)

Se propuso la modificación del problema anteriormente presentado bajo un escenario real de forma que permitiera al estudiante obtener los datos dados en la tabla y encontrar el modelo que describa la situación. La actividad se conformó de siete partes, y fue realizada en dos sesiones de una hora cada una. En la primera parte, cada equipo debía traer un cochecito de control remoto o de tracción, a elegir por ellos mismos. En las restantes, cada equipo hizo correr su carrito sobre la superficie elegida y registraron los datos de la posición y tiempo correspondientes. Se les pidió que graficaran sus datos y formulen una expresión matemática que describiera el movimiento de su carrito. Además, se les solicitó que verificaran sus resultados con los datos experimentales.

Se encuestó a 27 alumnos preparatorianos de tercer semestre del plantel 08 perteneciente al Colegio de Bachilleres del Estado de Tlaxcala (COBAT), que cursan la especialidad de Administración de Empresas y la Contabilidad. Participaron 15 mujeres y 12 hombres, con edades promedio de 17

años y 2 meses cumplidos. La actividad se realizó en sus últimas sesiones del curso de Geometría Analítica.

Con respecto a los universitarios, participaron 42 estudiantes de la Universidad Politécnica de Tlaxcala (UPTlax) del segundo cuatrimestre de la carrera de mecatrónica. Esta muestra estaba conformada por 35 hombres y 7 mujeres con edad promedio de 18 años. La actividad se realizó en una sesión del curso de Cálculo Diferencial.

En este experimento proponemos que la situación real comience desde el momento en que el estudiante se involucra con la situación y el Modelo Real, continua con la recopilación de datos que le ayudarán al alumno a resolver el problema planteado. Como condición inicial al experimento, los estudiantes recibieron la siguiente instrucción verbal:

“Vamos a predecir el comportamiento de un cochecito en movimiento a partir de la obtención de datos de distancia y tiempo. Para esto es necesario que, en equipos de 4 integrantes, adquieran un cochecito de control remoto o de empuje (sin dispositivo mecánico o eléctrico) para posteriormente correrlo y tomar datos que permitan predecir el movimiento del juguete”.

En el apéndice I se presenta el instrumento que se utilizó para acompañar a los estudiantes por el ciclo por modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huinache, et al., 2018). Se les solicitó a los estudiantes realizar lo que se mencionaba en cada actividad para poder lograr el propósito planteado emanado en la situación real.

El instrumento consta de 7 actividades como se observa en la Tabla 7.1.

En la primera actividad se da elegir al estudiante entre dos tipos de carritos (control remoto o empuje), para obtener distintos datos y al final poder compararlos con sus compañeros.

La actividad 2 solicita al estudiante narrar las características de la superficie con el propósito de ayudar al estudiante a pensar el lugar donde podrían realizar su experimento.

La Actividad 3 requiere una planeación para poder registrar los datos. Se espera que en esta actividad los estudiantes escriban el plan a realizar, por ejemplo, marcar el metro en el piso o colocar marcas en la superficie.

La actividad 4 es específica en solicitar una tabla dado el caso en que el estudiante no haya planeado realizar una tabla mientras que en la actividad 5 se pide graficar los datos registrados en la tabla. La actividad 6 pide al estudiante obtener una expresión matemática que tenga relación con la gráfica obtenida anteriormente. Finalmente, en la actividad 7 se espera que el estudiante valide su modelo matemático.

Tabla 7.1

Estructura del experimento.

ACTIVIDAD 1	Especifiquen que tipo de carrito (control remoto o empuje) usarán y describan sus características generales.
ACTIVIDAD 2	Elijan una superficie donde puedan correr el carrito. Narren las características de la superficie.
ACTIVIDAD 3	Planeen la forma en que pueden registrar los datos de posición y tiempo del carrito en movimiento. Escríbanlo antes de hacer las mediciones.
ACTIVIDAD 4	Realicen 10 mediciones de distancia y tiempo durante el movimiento del carrito y anótenlas en una tabla.
ACTIVIDAD 5	Grafiquen la tabla de datos generada en la Actividad 4.
ACTIVIDAD 6	Obtenga una expresión matemática que esté relacionada con la gráfica de la Actividad 5.

ACTIVIDAD 7

Usen su expresión matemática para calcular la distancia recorrida por el carrito en el octavo instante de tiempo. Compárenla con el dato correspondiente de la Actividad 4. Si hay diferencias entre los valores numéricos, den una explicación.

Los estudiantes se encuentran en la Situación real, y con apoyo de las actividades 1 y 2 se espera que lleguen a la Representación mental de la situación (RM), esto quiere decir que el estudiante ha comenzado a transitar por el ciclo de modelación.

Posteriormente con las actividades 3 y 4 ubicarse en el Modelo real (MR), lo que significa que el alumno tiene lo necesario para dejar el MR.

Enseguida con la actividad 5 es posible Matematizar el MR y alcanzar el Modelo matemático (MM), solicitado en la actividad 6. En este estadio el estudiante se encuentra en el Resto del mundo. Consecuentemente en la actividad 7 usarán su MM para conseguir sus Resultados matemáticos (RMAT), e interpretarlos para llegar a los Resultados reales (RR). Finalmente, con la explicación que otorgarán los estudiantes al final de la actividad 7 se espera que Validen sus Resultados reales y completen el ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huinache, et al., 2018).

7.2 Datos

En acuerdo a la actividad 3 cada equipo de estudiantes propuso la forma en que obtendría los datos. El procedimiento por el cual los estudiantes obtuvieron los datos del experimento se puede clasificar en dos casos:

Caso 1. Los estudiantes marcaron medidas en el piso y utilizaron su cámara para grabar el experimento, posteriormente reprodujeron el video en cámara lenta y obtuvieron los datos.

Caso 2. Los estudiantes se colocaron en diferentes alturas, cada uno con cronometro en mano y consecuentemente registraron el tiempo en que pasaba el cochecito por su posición.

7.3 Resultado del experimento

Entre ambos niveles educativos, diez equipos trajeron un carrito de control remoto, ellos eligieron superficies planas de losetas (piso de los salones) y concreto (patios, canchas, pasillo) mientras que nueve equipos mostraron carritos de empuje. Estos últimos usaron superficies planas (mesas, tablas, pizarrones) que inclinaron un ángulo dado. Sólo un equipo reportó el ángulo de inclinación, pero no lo usó en su modelo matemático.

En la Tabla 2 se muestra un análisis general de los 19 equipos clasificados por tipo de cochecito (Control remoto y empuje) y nivel educativo. En la parte derecha se menciona el alcance del ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincache, et al., 2018) transitó el equipo. Se puede observar que solo dos equipos de universidad (el 5 y 7) completaron el ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010).

Tabla 7.2

Clasificación del trabajo de equipos por tipos de carritos mostrando el alcance en el ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincache, et al., 2018).

NIVEL EDUCATIVO	EQUIPO	CONTROL REMOTO	EMPUJE	RM	MR	MM	RMAT	RR	V
Estudiantes universitarios	1		SI	SI	SI	NO	NO	NO	NO
	2		SI	SI	SI	NO	NO	NO	NO
	3	SI		SI	SI	SI	SI	SI	NO
	4	SI		SI	SI	SI	SI	SI	NO
	5	SI		SI	SI	SI	SI	SI	SI
	6	SI		SI	SI	SI	SI	SI	NO
	7		SI	SI	SI	SI	SI	SI	NO
	8		SI	SI	SI	SI	SI	SI	NO
	9		SI	SI	SI	SI	NO	NO	NO
	10	SI		SI	SI	NO	NO	NO	NO
	11	SI		SI	SI	SI	NO	NO	NO
	12	SI		SI	SI	SI	SI	SI	NO
Estudiantes de preparatoria	13	SI		SI	SI	NO	NO	NO	NO
	14	SI		SI	NO	NO	NO	NO	NO
	15		SI	NO	NO	NO	NO	NO	NO
	16		SI	SI	NO	NO	NO	NO	NO

17		SI	SI	SI	NO	NO	NO	NO
18		SI	SI	SI	SI	NO	NO	NO
19	SI		SI	SI	NO	NO	NO	NO

Como se observa en la Tabla 2, de un total de 19 equipos únicamente el equipo 15 no alcanzó a pasar de la situación real a la representación mental, provocando que este equipo no logrará transitar por ningún otro nodo del ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincahe, et al., 2018). Ningún equipo de preparatoria logró llegar a los resultados matemáticos, contrariamente a los estudiantes de universidad donde solo el 75% consiguió llegar a los resultados reales.

Se muestran algunos detalles relevantes de los resultados de cuatro equipos seleccionados dado su similitud en las respuestas y sus alcances en el ciclo; 2 de universidad que son los equipos número 5, que corresponde a control remoto (UCR) y número 7 correspondiente a un carrito de empuje (UCE). Los equipos 18 y 19 que pertenecen a preparatoria usaron carritos de empuje (PCE) y control remoto (PCR) respectivamente.

7.2.1 Actividad 1

En esta actividad los cuatro equipos especificaron su tipo de carrito, y describieron características físicas del carro, por ejemplo, tamaño, color, modelo del cochecito, número de llantas. En la Figura 7.2 se muestra la respuesta del equipo UCR quienes mostraron la mejor descripción de los 4. En esta actividad el estudiante comenzó a describir la situación real e incluso se puede ver como intenta relacionar el objeto con un automóvil.

Usaremos un carrito de control remoto (Hummer) de 10 raul es una 2x4 por lo tanto no es de mucha potencia, este carrito esta alimentado con 3 pilas 3H en 10 raul serian 4.5V

Figura 7.2 Respuesta de la actividad 1 del equipo UCR.

7.2.2 Actividad 2

En esta actividad los 4 equipos describieron de forma clara la superficie donde iban a realizar su desplazamiento del cochecito y de esta manera completar la representación mental. En esta

actividad se puede ver la implementación del EMK que es usado como referente para elegir la superficie. Por ejemplo, en la Figura 7.3 se puede leer que el equipo buscó una superficie libre de rugosidad dado que saben que podría afectar el desplazamiento del cochecito. Es importante mencionar que el equipo UCE resaltó la inclinación y longitud de su superficie. Solo un par de equipos realizaron esta observación.

La superficie es plana, con una inclinación aproximada de 35° y una longitud de 1.20 m. Es lisa, sin imperfecciones o irregularidades.

Figura 7.3 Respuesta de la actividad 2 del equipo UCE.

7.2.3 Actividad 3

En esta actividad hubo dificultades para todos los equipos. Sin embargo, la mayoría escribió mínimamente la planeación para su experimento. Los equipos PCE (Figura 7.4) y UCE (Figura 7.5) dieron las respuestas más claras a comparación de sus compañeros. Se puede observar que ambos equipos están pensando en realizar una tabla para la recopilación de los datos, pero, también, hubo equipos que no tuvieron esta idea. La dificultad a esta actividad puede ser basada en que los datos normalmente son dados a los estudiantes en tablas e incluso en algunos casos hasta se otorga modelo matemático.

Se registrarán los datos:
Para el tiempo. Cronómetro inteligente
Para distancia. Medidas a través de una cinta métrica
Toda la información se registrarán en una tabla.

Figura 7.4 Respuesta a la actividad 3 del equipo PCE.

Por medio de una tabla de tabulación, donde se comparan el tiempo que tarda en recorrer ciertas distancias, así poder tener una constante que poder graficar.

Figura 7.5 Respuesta a la actividad 3 del equipo UCE.

7.2.4 Actividad 4

En esta actividad se encontró que los 4 equipos seleccionados tabularon distancia-tiempo, aunque es relevante mencionar que dentro de los equipos no seleccionados algunos registraron sus datos de la forma tiempo-distancia. En esta actividad se observó un mejor desempeño de los estudiantes a comparación de las actividades restantes, seguramente dado el interés de los alumnos para tomar los datos. También, es importante mencionar que se observó que algunos estudiantes no toman sus datos de forma ascendente o viceversa como el caso de UCR (Figura 7.6) donde se observa que los datos se tomaron aleatoriamente.

	distancia	Tiempo
6	60 cm	0.72 s
4	40 cm	0.48 s
2	20 cm	0.20 s
7	80 cm	0.96 s
9	100 cm	1.10 s
10	120 cm	1.34 s
1	10 cm	0.12 s
3	30 cm	0.34 s
5	50 cm	0.60 s
8	90 cm	1.08 s

Figura 7.6 Respuesta a la actividad 4 del equipo UCR.

7.2.5 Actividad 5

En esta actividad se buscaba apoyar a los estudiantes a matematizar los datos que obtuvieron en el modelo real. Algunos equipos, como el caso de UCR, dieron valores de “x” (abscisa) al tiempo y de “y” (ordenada) a la distancia, contrariamente a lo escrito en su tabulación (Figura 6). Este equipo

trazó una recta en su gráfica que pasara por la mayoría de los puntos y que serviría para dar una idea de cómo podrían obtener el modelo matemático (Figura 7.7). El equipo de UCR no fue el único en trazar la recta, también el equipo PCE (Figura 7.8) marcó la recta despreciando un dato que estaba muy alejado.

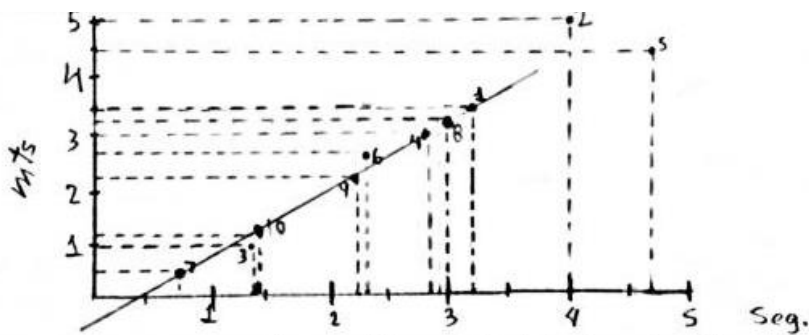


Figura 7.7 Respuesta a la actividad 5 del equipo UCR.

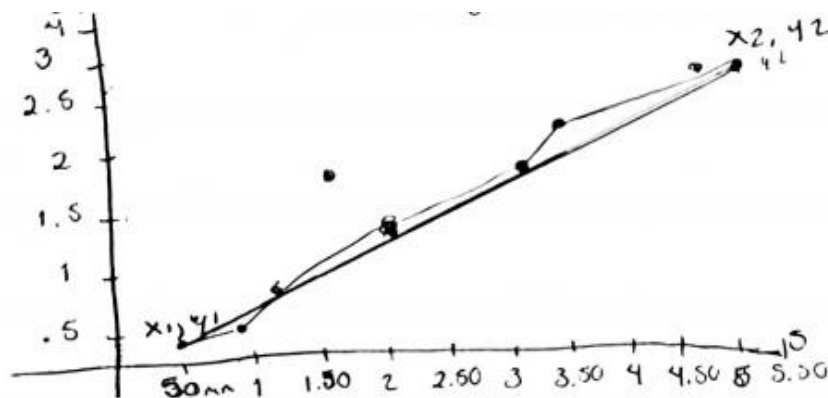


Figura 7.8 Respuesta a la actividad 5 del equipo PCE.

7.2.6 Actividad 6

El equipo PCE contestó una parte de esta actividad, calculando únicamente la pendiente, pero fueron los equipos de la universidad quienes alcanzaron a completar el modelo matemático. Como se observó en la Tabla 7.2, ningún equipo de preparatoria logró completar el modelo matemático. En la Figura 7.9, se observa la forma en que el equipo UCR obtuvo su modelo matemático.

$$\begin{array}{l}
 1 (0.7, 0.5) \\
 2 (3.2, 3.5)
 \end{array}
 \quad
 m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3.5 - 0.5}{3.2 - 0.7} = \frac{3}{2.5} = 1.2$$

$$\begin{array}{l}
 |y - y_1 = m(x - x_1)| \\
 y - 0.5 = 1.2(x - 0.7) \\
 y - 0.5 = 1.2x - 0.84 \\
 1.2x - 0.84 - y + 0.5 = 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Función} \\
 |1.2x - 0.34 = y| \\
 \uparrow \\
 |1.2x - y - 0.34 = 0| \\
 \text{Ecuación general}
 \end{array}$$

Figura 7.9 Respuesta a la actividad 6 del equipo UCR

7.2.7 Actividad 7

Solo el equipo UCR de los 19 totales consiguió terminar la actividad 7, mediante el trabajo Matemático, Validar e Interpretando sus resultados, completando así el ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincahe, et al., 2018). En la figura 7.10, se muestran los Resultados reales, Resultados matemáticos y la Validación de los mismos en el Modelo real de los estudiantes. En el momento, en que el estudiante interpreta su Modelo matemático y lo utiliza para obtener lo que se pide, llega a los resultados matemáticos. Posteriormente, en el momento en que compara los datos arrojados por el modelo matemático con los datos obtenidos de la situación real, el estudiante está validando y terminando el ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010).

En nuestro octavo dato tenemos una coordenada de (3, 3.26)
 comprobación con respecto a la función $1.2x - 0.34 = y$

$$\begin{array}{l}
 1.2x - 0.34 = y \\
 1.2(3) - 0.34 = y \\
 3.26 = y
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x \\
 y \\
 (3, 3.26)
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} x \\ y \\ (3, 3.26) \end{array}} \right\} \begin{array}{l}
 \text{Los demás puntos no logran} \\
 \text{coincidir con la recta, por el motivo} \\
 \text{de variación, por lo tanto utilizamos los más} \\
 \text{notables.}
 \end{array}$$

Figura 7.10 Respuesta a la actividad 7 del equipo UCR.

7.3 Análisis bajo el ciclo de modelación

Como se observó en la Tabla 7.2, solo un equipo completó el ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincahe, et al., 2018). Este equipo era universitario y usó un carrito de control remoto. Los resultados muestran que este tipo de carritos facilitan a los estudiantes a completar el ciclo de modelación.

En este apartado se hace un análisis entre tipo de cochecitos por nivel educativo basándose en los equipos ya seleccionados (UCR, UCE, PCE, PCR) mediante la lupa del ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincache, et al., 2018). En la figura 7.11 se muestra la comparación del tránsito de los equipos UCR y PCR por el ciclo de modelación. Se observa claramente que los estudiantes de universidad alcanzaron a completar el ciclo de modelación, mientras que los de preparatoria se quedaron en la matematización. Ambos equipos fueron completando el ciclo de modelación de forma lineal debido a la propuesta experimental.

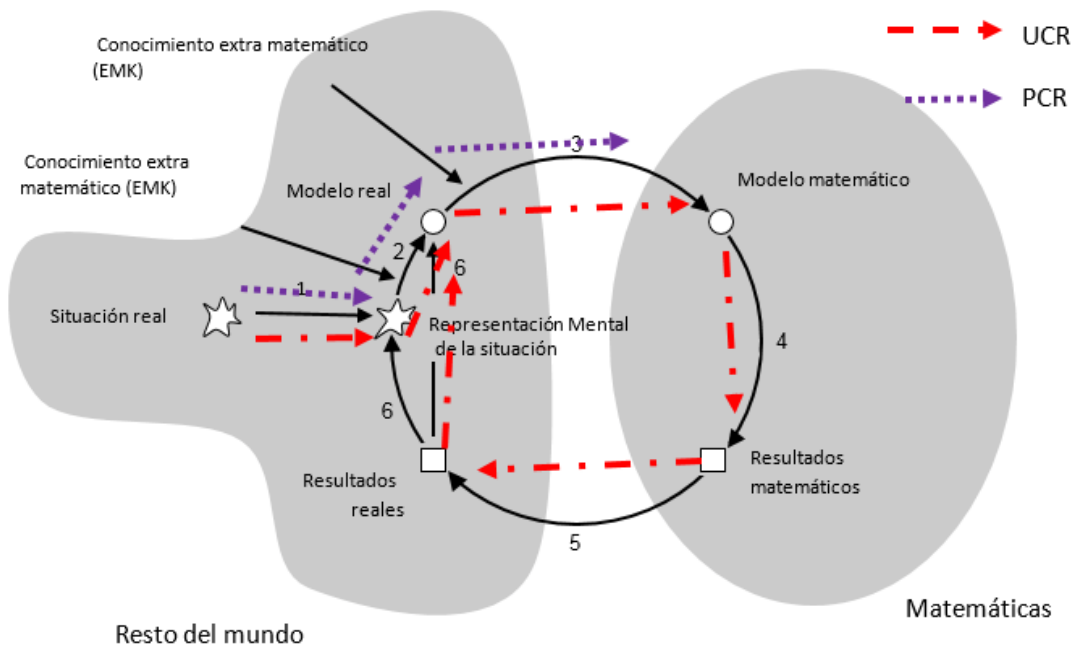


Figura 7.11 Análisis comparativo entre los cochecitos de control remoto según el nivel educativo en el ciclo de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincache, et al., 2018)

En la Figura 7.12 se muestra el tránsito de los equipos UCE y PCE también por el ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincache, et al., 2018). En ambos casos, se observa que ningún equipo de este nivel completó el ciclo. El equipo PCE no alcanzó a contestar la actividad 7 por lo cual se quedó a nivel del trabajo matemático. Se puede notar que no existe una gran diferencia entre el estadio donde se quedaron ambos equipos.

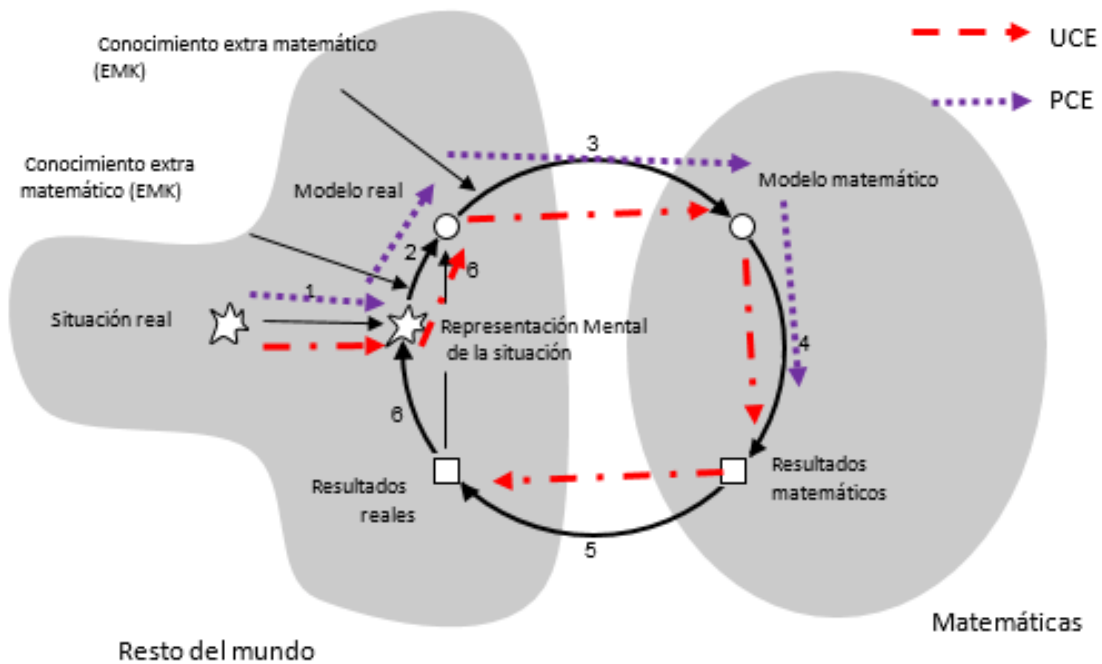


Figura 7.12 Análisis comparativo entre los cochecitos de empuje según el nivel educativo en el ciclo de Borromeo-Ferri (2010, citado en Huincahe, et al., 2018)

De acuerdo a lo observado en esta propuesta, se podría comentar que los estudiantes de ingeniería, a pesar de ser de nuevo ingreso (primer año), tienen mayor facilidad para solucionar problemas que requieran modelación matemática a comparación de los estudiantes de preparatoria en su último año.

Capítulo 8

8 CONCLUSIONES

Lo expuesto en esta investigación permite llegar a las siguientes conclusiones:

Los libros de texto que son utilizados en el nivel medio superior con perfil tecnológico no toman en consideración el mundo extramatemático en el que se origina la situación específica descrita en los problemas planteados. En los libros de Álgebra y Cálculo Integral no se encontró algún problema que se originara en un contexto real, mientras que, entre el libro de Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial y Probabilidad y Estadística se encontraron en total solo 12 problemas que parten de un contexto real, pero que se acompañan al menos del modelo real de la situación, similar al problema de la escuela flotante.

El libro de Cálculo Diferencial muestra en una porción mínima modelación matemática, a pesar de ser el único programa educativo en donde se menciona la necesidad de crear modelos matemáticos (Acuerdo secretarial 253, 2013).

El libro de Probabilidad y Estadística presenta la mayor frecuencia de problemas que involucran modelación matemática y una mayor cantidad de problemas que surgen en un contexto real en comparación con los libros analizados que componen la serie de BookMart. Un resultado similar fue reportado por Quiroz y Rodríguez (2015), pero en los libros de texto de matemáticas del nivel primario de la CONALITEG.

El libro de Geometría Analítica presenta en menor medida la modelación matemática con solo 8 problemas en todo el libro.

Sería recomendable que los libros de la serie BookMart presentarán en mayor medida problemas que involucren modelación matemática.

En el problema aplicado de la escuela flotante en Nigeria, perteneciente al libro de Geometría y Trigonometría, los estudiantes no pensaron en la modelación matemática que subyace en el problema a resolver porque la traducción de la situación real al modelo matemático fue realizada por los autores y en el problema no hay pregunta alguna que les permite validar su resultado con el mundo extramatemático. El estudiante solo se centra en responder y otorgar un resultado matemático, sin preocuparse por lo que sucede en el mundo de las matemáticas.

En relación con el problema idóneo, los estudiantes, en particular los preparatorianos, muestran dificultad en realizar la matematización, es decir, la traducción del resto del mundo al de las matemáticas. De cuatro equipos que tenían el modelo real solo uno logró matematizar la situación y alcanzar el modelo matemático. Se encontró como punto de tangencia la dificultad de matematizar la situación entre al trabajo realizado por Blum y Borromeo-Ferri (2009) donde observaron el tránsito de estudiantes alemanes de secundaria (16 años de edad) a través del ciclo de modelación de Blum y Leiß (2006) y esta investigación.

Para otros estudios o aplicaciones en el aula del problema idóneo se recomienda el uso exclusivo de carritos de control remoto al proporcionar datos más confiables en comparación a los carritos de empuje.

Referencias

- Blomhøj, M., & Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA*, 22(3), 123–139.
- Blum, W., & Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45–58.
- Borromeo-Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learner's modelling behavior. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 99–118.
- Cervantes, J. A. (2020). *Probabilidad y Estadística*. México: BookMart
- Deslauriers, J. (2019). *Investigación cualitativa*. Pereira, Colombia: Papiro.
- E. Villarreal y Mina (2020). Actividades experimentales con tecnologías en Escenarios de Modelización Matemática. *Bolema*, 34(67),786-824.
- Huincahue, J., Borromeo-Ferri, R., y Mena-Lorca, J. (2018). El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. *Enseñanza de Las Ciencias*, 36(1), 99–115.
- OCDE. (2016). *PISA 2015. IN EXCELLENCE AND EQUITY IN EDUCATION*. Retrieved from
- Pérez, A., & Barrios, F. (2019). *Geometría Analítica*. México: BookMart.
- Pollak, H. . (1969). How Can We Teach Applications of Mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, 2(2), 393–404.
- Quiroz, S., y Rodríguez, R. (2015). Análisis de praxeologías de modelación matemática en libros de texto de educación primaria. *Educación Matemática*, 27(3), 45–77.
- Romano, F. (2018). *Cálculo Diferencial*. México: BookMart.
- Romano, F. (2019). *Cálculo Integral*. México: BookMart.
- Salett, M., y Nelson, H. (1999). Modelación matemática: Estrategia para enseñar y aprender matemáticas. *Educación Matemática*, 11(1), 119–134.
- Subsecretaría de Educación Media Superior. Acuerdo Secretarial 653. México, 4 de septiembre de 2012.
- Toalá, R. (2019). *Geometría y Trigonometría*. México: BookMart.
- Trujillo, L. (2019). *Algebra*. México: BookMart.

Apéndice A. Propósitos formativos de las asignaturas de matemáticas pertenecientes al acuerdo secretarial 253

1.2. Propósitos formativos de las asignaturas

<i>Álgebra</i>	Que el estudiante desarrolle el razonamiento matemático y haga uso del lenguaje algebraico en la resolución de problemas de la vida cotidiana, dentro y fuera del contexto matemático, representados por modelos donde se apliquen conocimientos y conceptos algebraicos.
<i>Geometría y Trigonometría</i>	Que el estudiante interprete y resuelva problemas contextualizados que requieran la orientación espacial, a través del análisis, representación y solución por medio de figuras y procedimientos geométricos y algebraicos.
<i>Geometría Analítica</i>	Que el estudiante interprete, argumente, comunique y resuelva diversas situaciones problemáticas de su contexto por medios gráficos y analíticos, que incluyan la representación de figuras en el plano cartesiano.
<i>Cálculo Diferencial</i>	Que el estudiante relacione conocimientos de diversas disciplinas (sistemas y reglas o principios medulares) para estructurar ideas, argumentos y crear modelos que den solución a problemas surgidos de la actividad humana, tales como: la distribución inequitativa de los recursos económicos y la propagación rápida de enfermedades, entre otros; así como de fenómenos naturales (cambio climático, contaminación por emisión de gases, etc.), aplicando el razonamiento, el análisis e interpretación de procesos infinitos que involucren razones de cambio.
<i>Cálculo Integral</i>	Que el estudiante analice e interprete las relaciones entre las variables de problemas de la vida cotidiana relacionados con áreas, volúmenes, etc., que impliquen variaciones en procesos infinitos y los resuelva aplicando el teorema fundamental del cálculo.
<i>Probabilidad y Estadística</i>	Que el estudiante analice fenómenos sociales o naturales, utilizando las herramientas básicas de la estadística descriptiva y de la teoría de la probabilidad para muestrear, procesar y comunicar información social y científica, para la toma de decisiones.

Apéndice B. Clasificación del libro de Álgebra (Trujillo,2018).

Lección	Contenido Matemático	Actividad a realizar	Número de Actividad	Número de Problemas	Número de problemas que presentan modelación	Número de problemas que emergen en un escenario real	Número de problemas que proponen el modelo	
Uso de variables y expresiones algebraicas	Variable	Identificar tipo de variable	1	1	0	0	0	
			2	2	0	0	0	
Uso de los números y sus propiedades	Números reales	Crucigrama	3	1	0	0	0	
	Ley de exponentes	Efectuar operaciones	4	12	0	0	0	
1 parcial	Lenguaje algebraico	Identificar expresiones algebraicas	5	20	0	0	0	
	Conceptos Básicos del lenguaje algebraico	Evaluación numérica	Evaluar expresiones	6	7	0	0	0
		Operaciones Algebraicas	Efectuar operaciones Algebraicas	7	8	0	0	0
	Inventar problemas y escribirlos en lenguaje algebraico		8	1	0	0	0	
Patrones	Sucesiones Geométricas	Hallar sucesiones	9	9	0	0	0	

2 parcial	Sucesiones y series numéricas	Suma de Sucesiones	Sumar términos de sucesiones	10	11	0	0	0
		Sucesiones Geométricas	Completar una tabla	11	2	0	0	0
		Sucesión de Fibonacci	Investigar	12	1	0	0	0
		Sucesiones cuadráticas	Encontrar forma general de sucesiones	13	5	0	0	0
		Máximos y mínimos	Determinar máximo y mínimos	14	12	0	0	0
		Sucesiones	Encontrar la razón de cambio	15	10	0	0	0
	Variaciones lineales como introducción a la relación funcional	Razones y proporciones	Utilizar las razones y proporciones	1	7	3	0	0
	Variación proporcional	Regla de tres	Proponer problemas	2	1	0	0	0
		Proporción	Calcular valores y resolver problemas de porcentajes	3	10	2	0	0
	Tratamiento de lo lineal y lo no lineal	Polinomios	Completar una tabla	4	2	0	0	0
		Polinomios Lineales	Expresar algebraicamente	5	11	0	0	0
		Raíces	Encontrar raíces de funciones	6	11	0	0	0
		Operaciones con Polinomios	Efectuar operaciones Algebraicas	7	11	0	0	0
	El trabajo simbólico	Evolución de funciones	Pendiente	8	6	0	0	0

3 parcial	Representación y resolución de sistemas de ecuaciones	Funciones lineales	Solución de ecuaciones lineales	9	10	0	0	0	
		Sistema de dos ecuaciones		1	4	2	0	0	
		Sistema de dos ecuaciones		2	7	0	0	0	
		Sistema de dos ecuaciones		3	11	6	0	0	
		Sistema de dos ecuaciones		4	1	0	0	0	
		Trinomio cuadrado perfecto	Solución de sistema de ecuaciones	5	12	0	0	0	
		Graficación		6	6	0	0	0	
				7	5	0	0	0	
				8	4	3	0	0	
		Funciones y ecuaciones cuadráticas	Funciones cuadráticas	Máximos y mínimos	9	4	0	0	0
				Resolver y Graficar	10	9	0	0	0
		Elaborar problemario	11	3	0	0	0		

Apéndice C. Clasificación del libro de Geometría y Trigonometría (Toalá,2018).

Lección	Contenido Matemático	Actividad a realizar	Número de Actividad	Número de problemas	Número de problemas que presentan modelación	Número de problemas que emergen en un escenario real	Número de problemas que proponen el modelo	
1 parcial	Elementos, características y notación de ángulos	Tipos de ángulos	Medición, trazo y hallazgo de ángulos	1	2	0	0	0
				2	2	0	0	0
				3	1	0	0	0
	Conversiones de sistemas de medición angulares			4	1	0	0	0
				5	2	0	0	0
				6	15	0	0	0
				7	1	1	0	1
				8	1	1	0	1
	Sistemas angulares de medición	Sistemas de medición	Medir distancias mediante el uso de ángulos	9	1	0	0	0
				10	5	0	0	0
				11	3	0	0	0

Propiedades de los triángulos	Tipos de triángulos	Clasificar triángulos	12	4	0	0	0
			13	2	0	0	0
	Puntos y Rectas notables del triángulo	Hallar rectas y puntos notables del triángulo	14	4	0	0	0
			Teorema de Pitágoras	Utilización de Teorema de Pitágoras	15	3	1
	Teorema de Pitágoras	Teorema de Pitágoras a partir del Triángulo equilátero			16	2	1
				Trazo de triángulos	17	2	1
Suma de ángulos internos	Ángulos Internos en triángulos	Hallar medidas de ángulos	18	4	0	0	0
			19	3	0	0	0
	Diagonales y ángulos en polígonos	Hallar Diagonales	20	8	1	0	1
			21	5	0	0	0
			22	4	0	0	0
Propiedades de los polígonos	Área y Perímetro	Calcular áreas y Perímetros	23	1	0	0	0
			24	1	0	0	0
			25	1	0	0	0

	Elementos y propiedades de los ángulos en la circunferencia	Ángulos en la circunferencia	Identificar los tipos de ángulos dentro de la circunferencia	26	8	0	0	0
2 parcial	Patrones y Fórmulas de perímetros de figuras geométricas	Perímetro de figuras geométricas	Hallar el perímetro	1	1	1	0	1
				2	2	1	0	0
	Patrones y Fórmulas de áreas de figuras geométricas	Área de figuras geométricas	Hallar el área	3	2	2	1	0
				4	3	0	0	0
				5	2	0	0	0
				6	1	0	0	0
				7	5	0	0	0
				8	7	0	0	0
	Patrones y Fórmulas para la suma de ángulos internos en polígonos	Ángulos internos de polígonos	Demostrar la suma de ángulos internos de polígonos	9	4	0	0	0
				10	2	0	0	0
Patrones y Fórmulas de algunos ángulos de la circunferencia	Medición de ángulos	Medir ángulos	11	1	0	0	0	
	Medición de perímetros de polígonos y circunferencia	Medir perímetros de diferentes figuras geométricas	12	1	1	0	0	

			13	8	0	0	0	
	Criterio de congruencia de triángulos	Congruencia de triángulos	Utilizar criterios de congruencia	14	4	0	0	0
				15	3	0	0	0
				Isometrías	Utilizar el concepto de Isometría	16	3	0
	17	2	0			0	0	
	Congruencia o Semejanza	Semejanza de triángulos	Utilizar los criterios de Semejanza de triángulos	18	18	0	0	0
				19	1	0	0	0
				20	2	0	0	0
				21	1	0	0	0
				22	3	0	0	0
	Teorema de Tales y semejanza de triángulos	Teorema de tales	Utilizar el teorema de tales	23	4	0	0	0
3 parcial	Medida de ángulos y razones trigonométricas	Razones trigonométricas	Cálculo de ángulos y longitudes mediante razones trigonométricas	1	5	0	0	0
				2	1	0	0	0
				3	2	0	0	0
				4	4	0	0	0

			5	2	0	0	0		
			6	4	4	0	2		
			7	6	6	0	2		
			8	20	0	0	0		
El círculo trigonométrico, relaciones e identidades trigonométricas	Identidad trigonométrica	Deducir identidades	9	3	0	0	0		
			10	1	0	0	0		
			11	3	0	0	0		
			Ley de seno y ley de coseno		12	3	1	0	0
			Las identidades trigonométricas y sus relaciones	Identidad trigonométrica	Medición de distancias sobre la tierra	13	1	1	0
Verificar las identidades trigonométricas	14	1			0	0	0		

Apéndice D. Clasificación del libro de Geometría Analítica (Pérez A. y Barrios, 2019).

Lección	Contenido Matemático	Actividad a realizar	Número de Actividad	Número de problemas	Número de problemas que presentan modelación	Número de problemas que emergen en un escenario real	Número de problemas que proponen el modelo
1 parcial	Sistemas de coordenadas cartesianas	Distancia entre dos puntos	1	2	0	0	0
			2	1	0	0	0
			3	2	0	0	0
			4	3	0	0	0
		Distancia entre dos puntos	5	2	0	0	0
			6	4	0	0	0
			7	18	0	0	0
			8	1	0	0	0
Los lugares geométricos básicos; la recta y la circunferencia	Lugares Geométricos	Graficar	9	3	0	0	0
		Encontrar pendiente	10	23	0	0	0
		Ecuaciones de la recta	Hallar Ecuaciones	11	17	0	0

			12	4	0	0	0
			13	4	0	0	0
			14	2	0	0	0
			15	1	0	0	0
	Circunferencia	Hallar Ecuaciones	16	2	0	0	0
			17	1	1	1	0
	Elipse	Construcción de la elipse	18	1	0	0	0
La elipse, la parábola y la Hipérbola	Parábola	Construcción de la parábola	19	6	0	0	0
	Hipérbola	Construcción de la Hipérbola	20	5	0	0	0
	Punto medio	Calcular el punto medio	21	4	0	0	0
			22	12	0	0	0
La longitud de segmento, el punto medio la perpendicular entre otras	División de un segmento en una división dada	Dividir un segmento en una razón	23	13	0	0	0
			24	12	0	0	0
	Rectas Perpendiculares	Trazar rectas	25	4	0	0	0
			26	4	0	0	0

2 parcial	Intersección de rectas y lugares geométricos	Intersección de Rectas	Hallar la intersección	27	25	0	0	0	—
		Punto de Tangencia	Determinar si las rectas son tangentes	28	3	0	0	0	
	¿Qué tipos de lugares geométricos se precisan tratar con rectas y cónicas?	Formas de la recta	Encontrar las formas de la recta	1	9	0	0	0	
				2	2	0	0	0	
		Punto pendiente	Hallar la ecuación de la recta	3	2	0	0	0	
				4	3	0	0	0	
	Circunferencia	Halla los puntos y segmentos de la circunferencia	5	5	0	0	0		
			Halla la forma general de la circunferencia	6	8	0	0	0	
	Parábola	Construcción de la parábola		7	4	0	0	0	
			8	1	0	0	0		
		Halla la forma general de la parábola	9	4	0	0	0		
10			3	0	0	0			
			11	3	0	0	0		

	Elipse	Halla la forma general de la Elipse	12	4	0	0	0	
	Hipérbola	Halla la forma general de la Hipérbola	13	2	0	0	0	
¿Cómo construir la ecuación de la circunferencia?	Circunferencia	Construcción de la Circunferencia	14	12	0	0	0	—
			15	10	0	0	0	
Elementos históricos sobre la elipse, la parábola y la hipérbola	Elipse	Halla los segmentos de la elipse	16	2	2	1	1	
			17	1	1	1	1	—
Aplicaciones de los lugares geométricos en situaciones contextualizadas	Aplicación de las cónicas	Hallar la ecuación de la parábola	1	3	4	0	0	
3 parcial	El cono y sus cortes	Construcción del cono	2	1	0	0	0	
		Construir un cono	3	1	0	0	0	
	Los elementos de la ecuación general de las cónicas	Análisis de las cónicas	Indicar el tipo de cónica por cada función presentada	4	5	0	0	0
Los puntos en el plano de una	Análisis de las cónicas		5	3	0	0	0	

parábola, una circunferencia, una elipse y una hipérbola	Encontrar las ecuaciones de las cónicas	6	4	0	0	0
		7	10	0	0	0
		8	8	0	0	0

Apéndice E. Clasificación del libro de Cálculo Diferencial (Romano, 2018).

	Lección	Contenido Matemático	Actividad a resolver	Número de Actividad	Número de problemas	Número de problemas que presentan modelación	Número de problemas que emergen en un escenario real	Número de problemas que proponen el modelo
1 parcial	Elementos, características y notación de ángulos	Tipos de ángulos	Relaciona funciones	1	3	0	0	0
			Graficar	2	2	0	0	0
			Función lineal: evaluación y gráfica	3	2	2	0	1
			Elaboración de Funciones y Graficación	4	5	2	0	2
			Elaboración de funciones y evaluar	5	3	3	1	3
	Conceptos básicos del sistema de coordenadas	Sistemas de coordenadas	Determinar tipo de función	6	3	0	0	0
			Puntos Máximos	7	3	2	1	1
			Graficar e Interpretar datos	8	2	0	0	0
2 parcial	Usos de la derivada en diversas situaciones	Derivadas	Proponer modelos matemáticos	1	4	0	0	0
			Elaborar dibujos y afirmar argumentos	2	3	0	0	0
	Tratamiento intuitivo de los límites	Límites	Combinar funciones	3	1	0	0	0

		Predicción de fenómenos financieros	4	2	1	0	1	
		Máximos y mínimos	5	3	1	0	1	
		Escribir la función de una gráfica	6	2	0	0	0	
		Determinar límites	7	12	1	1	1	
	Tratamiento de cambio y variación	Derivada como razón de cambio	Predecir fenómenos naturales	8	3	3	0	3
			Predecir fenómenos naturales	9	5	3	0	2
	Introducción a las funciones continuas	Derivada como función	Derivación de funciones	1	19	1	0	1
3 parcial	Graficación de Funciones	Máximo y mínimos	Determinar valores críticos	2	9	1	0	1
			Determinar dominio y rango	3	4	0	0	0
			Determinar puntos de Inflexión	4	7	0	0	0
			Graficar y determinar puntos máximos, dominio y puntos de inflexión	5	8	0	0	0
			Graficar y determinar puntos máximos, dominio y puntos de inflexión	6	9	1	0	1
			Nociones básicas de derivación	Primera y Segunda Derivada	Predecir fenómenos físicos	7	2	1

		Elaborar modelos	8	3	2	0	2
		Calcular derivadas	9	14	0	0	0
		Cálculo de Derivadas	10	7	0	0	0
Optimización y Graficación de funciones elementales	Graficación de funciones algebraicas y trascendentes	Deducir igualdades	11	5	0	0	0
		Cálculo de ceros de la función	12	6	0	0	0

Apéndice F. Clasificación del libro de Cálculo Integral (Romano, 2019).

Lección	Contenido Matemático	Actividad a realizar	Número de Actividad	Número de problemas	Número de problemas que presentan modelación	Número de problemas que emergen en un escenario real	Número de problemas que proponen el modelo	
1 parcial	La gráfica como descripción del cambio	Gráficas	Interpretación de Gráficas	1	5	0	0	0
		Relación de Variables	Relacionar variables	2	2	0	0	0
	Aproximación de área bajo la curva	Aproximación de áreas bajo la curva	Calcular áreas	3	8	0	0	0
				4	18	0	0	0
				5	1	0	0	0
				6	1	0	0	0
				7	1	0	0	0
	Comparación de aproximación	Suma de figuras bajo la Curva	Calcular áreas de particiones	8	1	0	0	0
				9	10	0	0	0
	Conjeturar sobre expresión general del área bajo la curva	Suma de Figuras bajo la Curva	Calcular área bajo la curva	10	10	0	0	0
				11	9	0	0	0

			12	1	0	0	0		
			13	1	0	0	0		
Interpretación de área según el fenómeno	Funciones	Sustituir valores	14	3	3	0	3		
			15	1	1	0	1		
2 parcial	Introducción a la antiderivada	Derivadas e Integrales	Integrales	Investigación	1	4	0	0	0
			2	5	0	0	0		
	3	5	0	0	0				
	4	1	0	0	0				
	5	15	0	0	0				
	Construcción de tablas de integración	Sucesiones	Calcular sucesiones	6	9	0	0	0	
		Integrales	Calcular Integrales	7	19	0	0	0	
		Integrales Trigonometrías	Calcular Integrales	8	19	0	0	0	
		Integrales de exponentes y Logaritmos	Calcular Integrales	9	14	0	0	0	
	Técnicas para obtener la antiderivada	Integral por cambio de variable	Calcular Integrales	10	23	0	0	0	
Integración por partes		Calcular Integrales	11	20	0	0	0		

	Integración por fracciones parciales	Calcular Integrales	12	18	0	0	0	
	Sustitución Trigonométrica	Calcular Integrales	13	18	0	0	0	
			14	21	0	0	0	
3 parcial	Tratamiento analítico de las integrales definida e indefinida	Sumatorias de Riemann	Calcular sumas de Riemann	1	2	0	0	0
				2	1	0	0	0
				3	14	0	0	0
		Cálculo de longitudes, áreas y volúmenes	Calcular de longitud de arco	4	8	1	0	1
	¿Qué tipo de procesos se precisan para tratar la acumulación y su medida?	Área entre curvas	Calcular áreas limitadas	5	16	0	0	0
				6	10	0	0	0
		Volumen de solidos	Calcular el volumen de solidos	7	1	1	0	0
				8	1	0	0	0
				9	4	3	0	2
	Ejemplos de la cinemática y su interpretación contextual	Aplicación de la integral	Encontrar función de desplazamiento	10	2	2	0	2
				11	1	1	0	1

Apéndice G. Clasificación del libro de Probabilidad y Estadística

Lección	Contenido Matemático	Actividad a realizar	Número de Actividad	Número de problemas	Número de problemas que presentan modelación	Número de problemas que emergen en un escenario real	Número de problemas que proponen el modelo	
1 parcial	Conceptos básicos de Probabilidad y Estadística	Población y Muestra	1	8	0	0	0	
		Probabilidad	Realizar base de datos	2	4	0	0	0
				3	4	0	0	0
	Recolección de datos y su clasificación de clases	Elementos básicos de probabilidad	Realizar tablas de frecuencia	4	7	0	0	0
			Determinar elementos de probabilidad.	5	5	0	0	0
	Uso del conteo y probabilidad para eventos	Permutaciones y Combinaciones	Usar combinaciones y permutaciones	6	11	11	0	0
				7	4	4	0	0
	Conceptos de riesgo en situaciones conceptuales	Eventos aleatorios y deterministas	Determinar elementos aleatorios o deterministas	8	5	0	0	0
		Análisis de situaciones	Determinar probabilidades	9	7	7	1	0
				10	4	4	1	0

	Contextualización de los elementos de la probabilidad	Teorema de Bayes	Axiomas de probabilidad	11	2	0	0	0
Utilizar el teorema de Bayes			12	3	0	0	0	
Calcular la probabilidad			13	4	1	1	0	
2 parcial	Manejo de la información en situaciones de la vida cotidiana	Medidas de tendencia central	Cálculo de medidas de tendencia central	1	6	0	0	0
				2	2	0	0	0
		Gráficos	Realizar gráficos	3	6	0	0	0
				4	3	0	0	0
				5	3	0	0	0
				6	2	0	0	0
3 parcial	Significado de las medidas de dispersión	Medidas de dispersión	Calcular percentiles	1	2	0	0	0
				2	1	0	0	0
		Desviación estándar	Calcular varianza y desviación estándar	3	4	0	0	0
				4	4	0	0	0
		Medida de sesgo	Determinar curtosis y simetría	5	2	0	0	0
				6	4	0	0	0

	Relacionar los coeficientes de correlación	7	3	0	0	0
Coeficientes de correlación		8	8	0	0	0
	Realizar actividades relacionadas con estadística	9	2	1	1	0
		10	6	0	0	0

Apéndice H. Instrumento utilizado en la Fase 2.

Geometría y Trigonometría

Fecha: _____

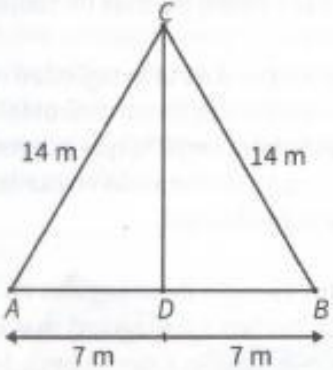

Apellido paterno	Apellido materno	Nombre
	Género <input type="checkbox"/>	Femenino
	<input type="checkbox"/>	Masculino
Número de lista: _____	Edad: (años) _____	(meses) _____
Nivel Educativo: _____		
Especialidad: _____		

1. Resuelve la siguiente actividad:

Actividad de aprendizaje 16

◀ Lleva a cabo la siguiente actividad.

1. En la figura se muestra una escuela flotante de la región de Lagos, Nigeria. Si el frente es un triángulo equilátero de 14 m de lado, ¿cuál es su altura?



Nota: No olvides argumentar la respuesta y escribir todo el procedimiento

Apéndice I. Instrumento utilizado en la fase 3.

Geometría Analítica

Fecha: _____

Nivel Educativo: _____

Especialidad: _____

1.

Apellido paterno

Apellido materno

Nombre

Género

Femenino

Masculino

Número de lista: _____

Edad: (años) _____ (meses) _____

2.

Apellido paterno

Apellido materno

Nombre

Género

Femenino

Masculino

Número de lista: _____

Edad: (años) _____ (meses) _____

3.

Apellido paterno

Apellido materno

Nombre

Género

Femenino

Masculino

Número de lista: _____

Edad: (años) _____ (meses) _____

4.

Apellido paterno

Apellido materno

Nombre

Género

Femenino

Masculino

Número de lista: _____

Edad: (años) _____ (meses) _____

Fecha: _____

Instrucciones. En equipo de 4 personas traigan un carrito de pilas, de tracción o de empuje para realizar un experimento de desplazamiento. Para lograr el objetivo realicen lo que se les pide en cada una de las siguientes actividades.

Actividad 1. Especifiquen que tipo de carrito (control remoto, tracción, empuje) usarán y describan sus características generales.

Actividad 2. Elijan una superficie donde puedan correr el carrito. Narren las características de la superficie.

Actividad 3. Planeen la forma en que pueden registrar los datos de posición y tiempo del carrito en movimiento. Escribanlo antes de hacer las mediciones.

Fecha: _____

Actividad 4. Realicen 10 mediciones de distancia y tiempo durante el movimiento del carrito y anótenlas en una tabla.

Actividad 5 Grafiquen la tabla de datos generada en la Actividad 4.

Actividad 6. Obtenga una expresión matemática que esté relacionada con la gráfica de la Actividad 5.

Actividad 7. Usen su expresión matemática para calcular la distancia recorrida por el carrito en el octavo instante de tiempo. Compárenla con el dato correspondiente de la Actividad 4. Si hay diferencias entre los valores numéricos, den una explicación.