



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

**FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA, OPCIÓN
INSTRUMENTACIÓN ELECTRÓNICA**

**Tesis para obtener el grado de
MAESTRO EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA OPCIÓN
INSTRUMENTACIÓN ELECTRÓNICA**

**“CONTROL DE POSICIÓN DE MIEMBROS SUPERIORES DE
UN ROBOT ANTROPOMÓRFICO HUMANOIDE DE 8 GDL”**

Presenta:

Ing. Jonathan Morones Reyes*

Asesores:

Dr. Emilio Miguel Soto García

Dr. José Fermi Guerrero Castellanos

Índice general

Introducción	VIII
Objetivos	X
Objetivo general	X
Objetivos específicos	X
Justificación	XI
1. Antecedentes y estado del arte	1
1.1. Robótica humanoide	1
1.1.1. Robots de dos brazos con estructura humanoide	2
1.2. Modelado de robots	5
1.2.1. Localización espacial	5
1.2.1.1. Representación de la posición	5
1.2.1.2. Representación de la orientación	6
1.2.2. Matrices de Transformación Homogénea	7
1.2.3. Cinemática directa	8
1.2.4. Cinemática inversa	9
1.2.5. Modelo Dinámico	10
1.3. Control con rechazo activo de perturbaciones	12
1.4. Funciones de Lyapunov de Control	15
1.4.1. fórmula universal de Sontag	18
2. Robot antropomórfico de doble brazo	20
2.1. Descripción del SRH-2B	20
2.1.1. Actuadores Lineales	21
2.1.2. Parametrización del sistema robótico	23
2.2. Modelo matemático del sistema en el espacio de las coordenadas articulares	25
2.2.1. Cinemática directa del brazo robot humanoide	26
2.2.2. Simulación numérica en lazo abierto	29
2.2.3. Modelo dinámico del brazo robot humanoide	31
2.2.4. Simulación numérica en lazo abierto	40
2.3. Modelo dinámico de los actuadores	42

2.3.1. Caracterización de los actuadores	43
2.3.2. Actuadores lineales	43
2.3.3. Conversión de movimientos y fuerzas	50
2.3.4. Actuador rotacional	55
3. Diseño de la ley de control del BRH-I	56
3.1. Control con rechazo activo de perturbación para el control del efecto final .	56
3.2. Diseño del control de seguimiento usando la Fórmula General de Sontag (FGS)	58
3.2.1. Simulación numérica	60
3.3. Simulación del modelo incluyendo los actuadores	66
3.4. Control colaborativo de seguimiento de trayectorias	68
3.4.1. Simulación numérica del algoritmo de consenso	70
4. Implementación de algoritmos de control para un robot antropomórfico	73
4.1. Descripción de la plataforma dSPACE y los controladores de potencia . . .	73
4.1.1. Características de la plataforma dSPACE	74
4.1.2. Controladores de potencia	75
4.2. Implementación del Algoritmo de Control	76
4.2.1. Resultados en tiempo real	78
Bibliografía	84
A. Actuadores Lineales	87
B. Motoreductor	89
B.1. Motor Buhler	90
C. Puente H	91
D. Modelo dinámico del BRH-I	92
E. Modelo dinámico del motor DC	100

Índice de figuras

1.	Datos de crecimiento del mercado de robots de servicio [5].	XI
1.1.	Vista isométrica del robot de doble brazo articulado ‘YuMi’[9].	3
1.2.	Robot colaborativo de doble brazo articulado ‘Baxter’[10].	3
1.3.	Robot humanoide ASIMO de Honda [6].	4
1.4.	Robot humanoide Robonaut 2, desarrollado por la NASA [17].	4
1.5.	Representación de un punto en el espacio en coordenadas cartesianas. . . .	6
1.6.	Representación de la rotación sobre el eje OU del sistema OUVW.	6
1.7.	Diagrama general del método ADRC basado en un ESO [23].	14
1.8.	Gráfica de la función $\dot{V}$ en el plano (x, u) [33].	17
2.1.	Diseño CAD del robot humanoide de 8 g.d.l.	21
2.2.	Localización de los actuadores dentro de la estructura robótica.	22
2.3.	Diagrama de cuerpo libre general, posición de reposo.	23
2.4.	Rangos de movilidad del diseño CAD de cada articulación [13].	24
2.5.	Determinación de ejes de referencia sobre el BRH-I.	25
2.6.	Diagrama de bloques de la cinemática de un brazo robótico de 4 g.d.l. . . .	30
2.7.	Gráficas de coordenadas del efector final.	30
2.8.	Representación entrada-salida del modelo dinámico del BRHI.	40
2.9.	Diagrama de bloques de la simulación en lazo abierto de la dinámica del Robot de 4 g.d.l.	41
2.10.	Gráficas de coordenadas del efector final.	41
2.11.	Obtención de los parámetros usando el sistema OptiTrack.	43
2.12.	Gráficas de posición y velocidad del actuador lineal.	44
2.13.	Gráficas de identificación de la planta del actuador AL4.	44
2.14.	Simulación de la función de transferencia y modelo dinámico del actuador lineal AL4.	46
2.15.	Gráficas de comparación de la posición y velocidad entre la función de transferencia y el modelo dinámico del AL4.	47
2.16.	Gráficas de posición y velocidad del actuador AL2.	47
2.17.	Gráficas de identificación de la planta del actuador AL2.	48

2.18. Simulación de la función de transferencia y modelo dinámico del actuador lineal AL4.	49
2.19. Gráficas de comparación de la posición y velocidad entre la función de transferencia y el modelo dinámico del AL2.	50
2.20. Diagrama de conversión de movimientos lineales a rotacionales.	51
2.21. Diagrama de bloques de los actuadores con conversión lineal a rotacional de movimiento y fuerza.	52
2.22. Simulación del bloque de actuadores lineales con la conversión de movimientos y fuerzas	53
2.23. Desplazamiento longitudinal del vástago de los actuadores.	53
2.24. Posiciones angulares de las articulaciones con conversión de movimientos de los actuadores lineales.	54
2.25. Toques proporcionados por los actuadores lineales.	54
2.26.	55
2.27.	55
3.1. Diagrama de bloques de la estrategia de control para el seguimiento de trayectorias del BRH-I.	61
3.2. Descripción de la estrategia de control ADRC y CLF en bloques de Simulink.	61
3.3. Respuesta de las posiciones angulares de los cuatro eslabones del BRH-I.	63
3.4. Respuesta del error de las posiciones angulares de los cuatro eslabones del BRH-I.	63
3.5. Respuesta de la estimación de la perturbación en cada articulación del BRH-I	64
3.6. Respuesta de error de la perturbaciones en las cuatro articulaciones del BRH-I.	65
3.7. Respuesta del control de las cuatro articulaciones del BRH-I.	65
3.8. Diagrama de bloques de la estrategia de control ADRC+CLF para el BRH-I incluyendo actuadores.	66
3.9. Diagrama de bloques de la estrategia de control ADRC+CLF para el BRH-I incluyendo actuadores y bloque de conversión de τ a $\mathbf{V_a}$	66
3.10. Descripción de la estrategia de control ADRC y CLF incluyendo actuadores en bloques de Simulink.	67
3.11. Comparación del torque de control contra el torque de los actuadores	67
3.12. Grafo del algoritmo de consenso líder-seguidor	68
3.13. Descripción del algoritmo de consenso para la simulación numérica en bloques de Simulink.	70
3.14. Respuesta de las posiciones angulares del BRH-I y BRH-D en consenso.	71

3.15. Respuesta del error de las posiciones angulares del BRH-I y BRH-D en consenso.	72
3.16. Respuesta de las velocidades angulares del BRH-I y BRH-D en consenso. . .	72
4.1. Tablero de conexiones dSPACE modelo CPL1104.	74
4.2. Modulo controlador puente H IBT_2.	75
4.3. Descripción de la estrategia de control en bloques de Simulink para la implementación con dSPACE	77
4.4. Diagrama de conexión del bloque DS1104SL_DSP_PWM.	78
4.5. Diagrama de conexión del bloque DS1104SL_DSP_PWM3.	78
4.6. Tablero de instrumentación y control, desarrollado en ControlDesk.	79
4.7. Evolución de la posición de la articulación a_1	79
4.8. Evolución de la posición de la articulación a_2	80
4.9. Evolución de la posición de la articulación a_4	80

Índice de tablas

2.1. Parámetros de los actuadores lineales AL2 y AL4.	22
2.2. Parámetros del actuador rotacional Kelvin	22
2.3. Parámetros de los brazos de 4 GDL del robot humanoide	24
2.4. Comparación de parámetros de la hoja de datos del proveedor y el modelo aproximando del actuador AL4	47
2.5. Comparación de parámetros de la hoja de datos del proveedor y el modelo aproximando del actuador AL2	50
2.6. Parámetros de conversión de movimientos lineales a rotacionales	52
3.1. Amplitudes para generar las trayectorias de referencia.	62
4.1. Descripción de las terminales de la fuente y la alimentación del motor. . . .	76
4.2. Descripción de las terminales de operación del modulo IBT_2	76

Introducción

Actualmente, existe una creciente tendencia por la automatización de procesos, se busca que una máquina pueda realizar una actividad específica o un grupo de actividades, ya sea para reemplazar al ser humano en sus tareas, mejorar el resultado de estas o incluso realizar algo que él mismo no podría o nunca hubiera imaginado [1]. Debido a la necesidad del ser humano por mejorar su entorno, disciplinas como la robótica ha tomando mayor presencia en diferentes actividades y áreas del conocimiento. Sin embargo, y por contradictorio que esto parezca, aunque los robots buscan reemplazar al ser humano en actividades repetitivas, peligrosas, de precisión, entretenimiento e investigación; la gran mayoría de los robots desarrollados hasta hoy, carecen de forma humana y más bien, son brazos articulados a los que se conoce como robots manipuladores [2, 3].

Existen diferentes formas para clasificar a los robots, una de las más claras es según su ambiente de aplicación. Tomando esta clasificación, un manipulador robótico es un robot industrial. De acuerdo con la norma ISO 8373:2012 [4] y La Federación Internacional de Robótica (IFR, por sus siglas en inglés)[5], un robot industrial es “Un manipulador multi-propósito automáticamente controlado, re-programable, programable en tres o más ejes, que se puede fijar en su lugar o móvil para su uso en aplicaciones de automatización industrial”.[5] y un robot de servicio es “Un robot que realiza tareas útiles para las personas o equipos de personas, excluida la aplicación de automatización industrial.”[5]

Considerando que vivimos en un mundo en el que el entorno, los espacios y las herramientas han sido creados y diseñados para el uso, comodidad e interacción entre seres humanos; es conveniente que los robots se adapten con mayor naturalidad a estas condiciones. A partir de la necesidad e importancia de la investigación de nuevos sistemas robóticos con las características anteriores, los robots humanoides son desarrollados convenientemente por la forma y las dimensiones espaciales del ser humano; este tipo de robot se encuentra en la clasificación de robot de servicio, debido a su capacidad para adaptarse a los diversos ambientes profesionales y ordinarios, pero no quita que podrían, también, ser integrados a procesos industriales.

El desarrollo más importante en esta área, es el robot creado por la empresa Honda, llamado ASIMO [6, 7]. Siendo este proyecto el que cuenta con mayor tiempo en desarrollo

en el área y que mayores avances ha alcanzado en investigación pero sin trascender hacia alguna aplicación específica, ha servido como principio y motivación de otros proyectos. Por ejemplo, el robot de servicio ‘Pepper’[8] que se puede adaptar a diferentes necesidades fuera de la industria, o los recientes robots manipuladores de doble brazo como el robot colaborativo ‘YuMi’, de la empresa ABB Robotics [9] o el robot colaborativo de doble brazo articulado ‘Baxter’ de la empresa Rethink Robotics[10].

Dado que los robots se van introduciendo cada vez más en actividades del ser humano, donde es importante la interacción social, los robots humanoides presentan una alternativa más amigable en la investigación del proceso de la interacción humano máquina. Interacción que es muy importante para brindar confianza, claridad y comodidad al usuario, principalmente en aplicaciones donde se requiere un trato directo o que involucre algún proceso de comunicación social. Es por esta razón la importancia de una estructura que además de realizar movimiento y actividades a la par o similar a las del ser humano, pueda comunicarse y comprender el lenguaje del mismo humano.

Pero, para poder llegar a ese nivel de interacción es necesario que el control sea lo más robusto y preciso posible. Los principales problemas de control en robots de doble brazo y robots humanoides, están relacionados con el contacto físico y la interacción entre los brazos (movimiento restringido) y el entorno en las operaciones de contacto con ambas manos. [11] Estos problemas generar perturbaciones en el sistema, por lo que resulta muy delicado a la hora de implementar un algoritmo de control. Por esta razón se propone desarrollar un algoritmo de control basado en el rechazo activo de perturbaciones (ADRC) y trabajar a la par ambos brazos con un algoritmo de consenso.

El resto de la Introducción presenta el objetivo general, los objetivos específicos y la justificación del trabajo de tesis. El presente trabajo está organizado de la siguiente manera: el capítulo I aborda el estado del arte de los sistemas robóticos de doble brazo, así como los antecedentes y conceptos necesarios de la robótica y de las técnicas de control empleadas (rechazo activo de perturbaciones y funciones de control de Lyapunov). En el capítulo II se presenta la descripción y la parametrización del sistema robótico humanoide sobre el que se basa el trabajo para, finalmente, obtener el modelo matemático tanto del sistema robótico como de los actuadores que lo componen. En el capítulo III se presenta el desarrollo de los algoritmos de control para el brazo robótico humanoide izquierdo, la propuesta del algoritmo de consenso para ambos brazos y las simulaciones que validan a la ley de control y al algoritmo de consenso. En el capítulo IV se expone la implementación del algoritmo de control diseñado sobre el sistema robótico construido y se analizan los resultados experimentales. Para terminar, se incluye un capítulo de conclusiones donde se explican las contribuciones obtenidas del desarrollo e implementación del trabajo de tesis.

Objetivos

Objetivo general

Desarrollar una estrategia de control bajo la técnica de rechazo activo de perturbaciones, implementándolo en tiempo real, para controlar la posición en el espacio del efector final de un robot tipo humanoide.

Objetivos específicos

- Obtener el modelo matemático de los miembros superiores del robot antropomórfico humanoide ya construido. El modelo deberá considerar los actuadores.
- Realizar una identificación paramétrica del modelo del sistema.
- Realizar una simulación numérica del sistema, en lazo abierto.
- Proponer una ley de control para el posicionamiento del efector final. El control estará basado en la técnica de rechazo activo de perturbaciones y deberá contemplar un algoritmo de consenso que permita la sincronización de ambos brazos.
- Implementar en tiempo real el control de posición de, al menos un brazo, del robot antropomórfico, utilizando el sistema dSPACE del laboratorio de control avanzado y el sistema mecánico disponible.

Justificación

La propia morfología de los robots humanoides hace que sean óptimos para realizar un sin fin de actividades y en una gran variedad de entornos, principalmente en entornos que resultan hostiles para los seres humanos. Además, hace más propicio el trabajo colaborativo entre el humano y la máquina, ya que su aspecto antropomórfico resulta más cómodo para las personas y su antropometría le posibilitan compartir las mismas áreas y herramientas que las personas, generando una sensación de seguridad contraria a la inseguridad de los robots manipuladores industriales. [12].

Estos sistemas robóticos humanoides, pueden tener una gran variedad de aplicaciones, en diferentes áreas de trabajo, campos de estudio o de servicio. Algunas de sus posibles aplicaciones en el área médica, podrían ser: para transportar materiales contaminantes, peligrosos y/o radiactivos; asistente en servicios médicos, asistencia a personas cuadripléjicas o con algún problema relacionado, etc. Pero también en el contexto de la fabricación, resultan mucho más seguros para trabajos de ensamblaje cooperativo con los humanos, soportar cargas mayores por un periodo de tiempo prolongado y adaptarse a los ambiente industriales.

Es debido a la extensa variedad de aplicaciones que el mercado de los robots de servicio ha ido aumentando, pasando de un 2 % en el 2016 a un 12 % en el 2017 que equivale a 5.2 US\$bn, billones de dólares. De acuerdo a las datos que anualmente proporciona la IFR, que se aprecian en la Figura 1, se pronostica que para el periodo de 2018 a 2020, alcance un valor de mercado de 26.8 US\$bn, lo que equivaldría a un crecimiento de entre el 20 % y 25 % del mercado anualmente. [5]

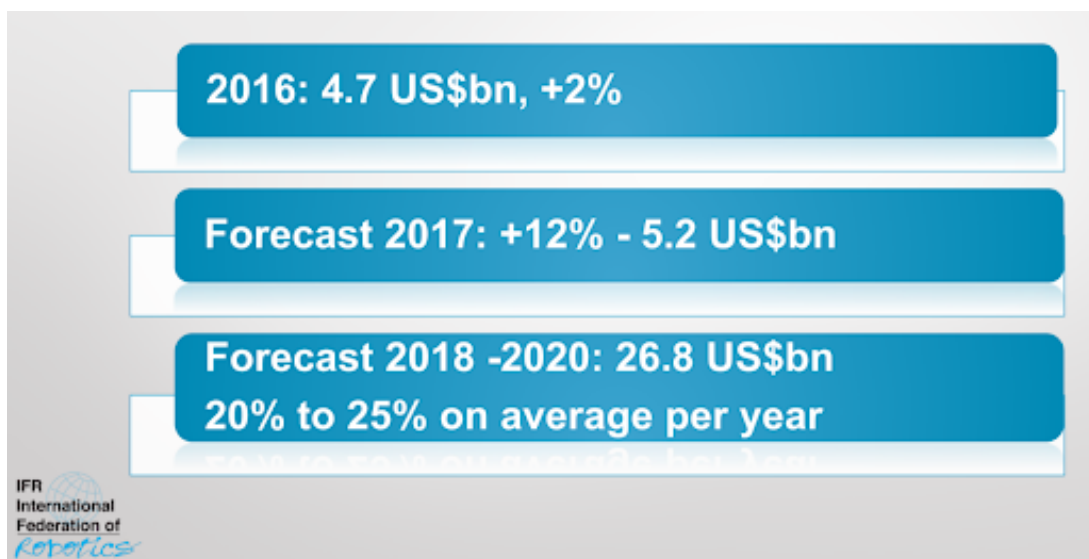


Figura 1: Datos de crecimiento del mercado de robots de servicio [5].

Este trabajo de tesis en particular, representa un paso más rumbo al desarrollo de un robot humanoide completamente autónomo para trabajo colaborativo y de asistencia. En principio, el correcto trabajo en la construcción del mecanismo y la aplicación de una adecuada ley de control, permite contar con una plataforma que sirva para probar diferentes algoritmos en el robot. Así mismo, debido al impacto y alcances que se tienen para éste proyecto, podría ser utilizado tanto en procesos administrativos como en procesos de laboratorio de la Facultad de Ciencias de la Electrónica.

El resultado que pretende alcanzar este trabajo de tesis parte del correcto modelado de la dinámica de una estructura articulada de torso y brazos, previamente desarrollada en un trabajo de tesis de licenciatura de la Facultad de Ciencias de la Electrónica [13]. Para llegar a la implementación de control de posición de ambos brazos, por medio de un algoritmo de consenso para lograr un trabajo colaborativo que podría verse reflejado en la repartición de cargas, con lo que permitirá en trabajos posteriores una mayor grado de interacción del robot con el medio. Establecer una adecuada ley de control, que sea capaz de compensar las perturbaciones externas aún sin conocer perfectamente el modelo del sistema, es un paso muy importante y necesario para proporcionar robustez al movimiento y posición del sistema robótico, que conduce al desarrollo de trayectorias y al trabajo colaborativo.

Capítulo 1

Antecedentes y estado del arte

En este primer capítulo se presenta un panorama general sobre la robótica humanoide, aplicaciones y perspectivas. Se comienza con una introducción sobre el tema de robótica humanoide y su creciente demanda, tanto para el área industrial como para el área de servicio. Se aborda el estado del arte y algunos ejemplos de robots de dos brazos con estructura humanoide. También, se presentan definiciones y conceptos preliminares que se utilizarán en el desarrollo de la tesis. Estos conceptos van desde el modelado de robots, hasta las técnicas de control colaborativo y de rechazo activo de perturbaciones.

1.1. Robótica humanoide

Buscando definir la terminología de la palabra robot, se encuentran las siguientes definiciones, empezando por la Real Academia Española (RAE) que dice: del inglés robot, y este del checo robot, de robota ‘trabajo, prestación personal’. Es una máquina o ingenio electrónico programable, capaz de manipular objetos y realizar operaciones antes reservadas solo a las personas. La Asociación de Industrias Robóticas (RIA, por sus siglas en inglés Robotic Industries Association), una de las asociaciones mundiales más importantes especializadas sobre robótica, lo define de la siguiente manera: un robot es un manipulador re-programable y multifuncional, diseñado para mover cargas, piezas, herramientas o dispositivos especiales, según trayectorias variadas y programadas.

Por otra parte, es importante tomar en cuenta las definiciones de robot industrial y robot de servicio. Resulta interesante la diferencia entre un concepto y otro, dado que un robot humanoide entra en la definición de robot de servicio pero un robot colaborativo parece estar entre las dos definiciones. A través de la Organización Internacional de Normalización (ISO, por sus siglas en inglés International Organization for Standardization), se establecen las siguientes definiciones:

- Robot industrial (ISO 8373: 2012): Un manipulador multipropósito automáticamente controlado, reprogramable, programable en tres o más ejes, que se puede fijar en su lugar o móvil para su uso en aplicaciones de automatización industrial.[5]
- Robot de servicio (ISO 8373: 2012): Un robot que realiza tareas útiles para las personas o equipos de personas, excluida la aplicación de automatización industrial.[5]

Dentro del campo de la robótica, específicamente de la robótica de servicio, se incluye el desarrollo de robots humanoides; lo cuales, se identifican por ser máquinas antropomórficas capaces de imitar los movimientos y funciones básicas del ser humano. En contraste con los robots industriales, los robots humanoides debe ser capaces de enfrentar la gran variedad de tareas y objetos que se encuentran en entornos dinámicos no estructurados [14]. Por tal motivo, el brazo de un robot humanoide debe ser de movilidad y flexibilidad antropomórfica, similares a las del ser humano, para una mejor adaptación en entornos y tareas humanas. Además, se espera que pronto pasen de ser máquinas funcionales, a inspirar y comunicar emociones a través de la interacción humana [15].

Gracias a sus características de antropometría y antropomorfismo, entre otras, los robots humanoides actuales son capaces de realizar actividades complejas; siendo las de rescate y apoyo en zonas de desastre las de mayor potencial. Sin embargo, este tipo de robots también puede aplicarse para asistir a personas enfermas o discapacitadas, para desarrollar tareas útiles dentro de un hospital o para dar información en establecimientos y centros comerciales. Es debido a su potencial para aplicaciones en diferentes ambiente, en lo cuales interactúan con personas, que surge una de las principales preocupaciones de los robots humanoides, la seguridad [16].

1.1.1. Robots de dos brazos con estructura humanoide

Los robots humanoides y robots de doble brazo con estructura humanoide, son cada vez más comunes tanto en el área de la investigación como en el sector industrial. Actualmente, empresas reconocidas en el desarrollo de robots antropomórficos industriales han desarrollado sus propias propuestas, algunas de las cuales incluso ya se comercializan. Por otra parte, una gran cantidad de institutos y universidad han aportado en la investigación y desarrollo de estos sistemas. A continuación, se presentan algunos de los sistemas robóticos y trabajos más relevantes en el área de la robótica humanoide y de doble brazo antropomórfico.

Yumi

La propuesta de robot colaborativo de la empresa ABB Robotic llamado “YuMi” es un robot de doble brazo articulado que cuenta con 7 GDL (grados de libertad) en cada

brazo. Esta disposición antropomórfica, además de incrementar el área de trabajo en comparación con un manipulador de su mismo tamaño, permite realizar múltiples tareas. Asimismo, esta estructura posibilita el intercambio de herramientas o efector final, además que cuenta con cámaras para realizar visión.

Por otra parte, la construcción es más ligera y segura para el usuario, permite ser portátil y ajustarlo a las diversas necesidades tanto industriales como de laboratorio. Cuenta con un tipo de control de movimiento restringido que detecta, por medio de la corriente de los actuadores, una posible colisión o el inicio de una colisión para detener el movimiento [9]. Esto aporta un grado de seguridad que le hace posible trabajar en conjunto con una persona.



Figura 1.1: Vista isométrica del robot de doble brazo articulado ‘YuMi’[9].

Baxter

Baxter es un robot colaborativo de doble brazo articulado, creado como una solución para una amplia gama de tareas, desde manipulación de materiales hasta el embalaje y carga en línea [10]. Con 7 GDL en cada brazo, Baxter pueden maniobrar como los brazos de un humano y adaptarse al área de trabajo.

Cuenta con cámaras integradas al actuador final que le permite una visión externa útil para la ejecución de las tareas. Además tiene un innovador sensor de detección de fuerza que le permite adaptarse a las demandas de fuerza de la tarea.

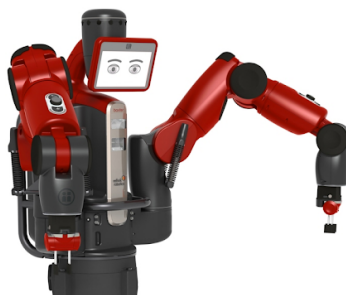


Figura 1.2: Robot colaborativo de doble brazo articulado ‘Baxter’[10].

ASIMO

El robot desarrollado por los ingenieros de Honda llamado ASIMO, es considerado el robot humanoide más avanzado de la actualidad debido a su autonomía para moverse y realizar tareas de forma similar a las de un ser humano. Cuenta con 57 GDL en total, dándole mayor movilidad al cuerpo del robot, figura 1.3. En el cuello tiene 2 GDL suficientes para cubrir el rango de visión. En el brazo cuenta con 4 GDL, si contamos 2 GDL en la muñeca y uno en el dedo pulgar son 7 en total, aparte de los movimientos de los otros dedos que son independientes. El robot ASIMO tiene unas dimensiones de 130 cm de altura y 50 Kg de peso, es ligero ya que su estructura está fabricada en aleación de magnesio.[6, 7]



Figura 1.3: Robot humanoide ASIMO de Honda [6].

Robonaut 2

Robonaut 2, presentado en la figura 1.4, es el nombre que tiene el robot humanoide antropomórfico, desarrollado y mejorado, por la NASA y General Motors, a partir del primer prototipo Robonaut. Con la idea de que este robot antropomórfico podría ayudar a los astronautas en sus labores en las estaciones espaciales, o en otros ambientes donde fueran requeridos, desarrollaron una estructura con 42 GDL independientes y más de 350 sensores. Los movimientos abarcan dos brazos con 7 GDL cada uno, dos manos con 12 GDL cada una, incluyendo los dedos, un cuello con 3 GDL y una cadera con 1 GDL, el sistema incluye 50 actuadores. Este robot humanoide, se lanzó a la Estación Espacial Internacional (ISS, por sus siglas en inglés), el 24 de febrero de 2011, cumpliendo un sueño de 15 años para poner un robot humanoide en el espacio.[17]



Figura 1.4: Robot humanoide Robonaut 2, desarrollado por la NASA [17].

1.2. Modelado de robots

El modelado de robots, específicamente de manipuladores robóticos, consiste en el conocimiento del movimiento y las fuerzas involucradas para posicionar el extremo final del manipulador en un punto dado, o bien, lograr que siga una trayectoria deseada. En primera instancia se busca conocer el movimiento ejecutado por dicho manipulador sin considerar las fuerzas que lo ocasionan, de lo cual se encarga la cinemática, para después estudiar la relación de estos movimientos con las fuerzas que los generan, lo que se estudia en la dinámica. La cinemática directa y la cinemática inversa proporcionan información para analizar el desplazamiento de trayectorias y la orientación del efector final, de acuerdo con las coordenadas articulares, las coordenadas cartesianas y su relación entre ellas. Por otra parte, la dinámica toma en consideración las fuerzas intrínsecas al estudio de los robots manipuladores, como serían las fuerzas endógenas y exógenas al sistema y el par aplicado por los actuadores, por lo cual es necesario conocer también el modelo de los actuadores.

1.2.1. Localización espacial

Antes de conocer la cinemática y dinámica del manipulador robótico, es necesario el estudio de la localización en el espacio de los eslabones y efector final del mismo[2]. Este estudio se lleva a cabo considerando dos atributos: la posición y orientación, ambos atributos son suficientes para determinar su ubicación en el espacio y la rotación en referencia a sus ejes de movimiento. Por tal motivo, se presentan herramientas matemáticas que ayudan en la representación y manipulación de dichos atributos [18]. Para poder describir la posición y orientación de un cuerpo en el espacio, se adjunta rígidamente un sistema de coordenadas al sólido de estudio. Después se describe la posición y orientación de este sistema con respecto al sistema de coordenadas de referencia [18].

1.2.1.1. Representación de la posición

Comúnmente se representa la posición de un cuerpo rígido en el espacio a través de un sistema coordinado de referencia con 3 componentes. Estos sistemas quedan definidos por tres ejes ortogonales entre sí, pero con un mismo origen, de tal modo que el sistema de referencia OXYZ se compone de los ejes OX, OY y OZ, como se observa en la Figura 1.5. Considerando el sistema de referencia anterior se puede ubicar un punto, en el espacio, a través de las coordenadas que corresponden a cada eje del propio sistema. Si se observa nuevamente la Figura 1.5, el punto $\mathbf{p}$ queda definido por las coordenadas (x,y,z) .

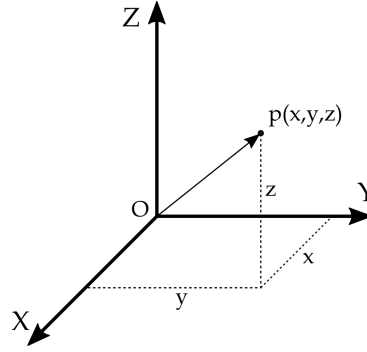


Figura 1.5: Representación de un punto en el espacio en coordenadas cartesianas.

De manera similar, el punto $\mathbf{p}$ puede representarse como un vector $\mathbf{P}$ y definir la posición en el espacio, a partir de un conjunto de coordenadas [18], dicho vector se representa por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

1.2.1.2. Representación de la orientación

Tratándose de cuerpos rígidos, concretamente de los eslabones de un manipulador robótico, no basta con conocer su posición en el espacio, además es importante saber su orientación con respecto al sistema de referencia, la cual se define por tres grados de libertad independientes [2, 18]. Para poder describir dicha orientación, se asigna rígidamente un sistema de coordenadas al objeto de estudio y se analiza la relación del nuevo sistema con respecto al de referencia [19].

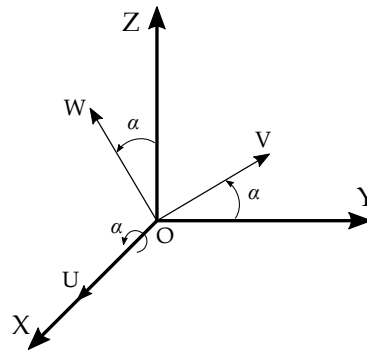


Figura 1.6: Representación de la rotación sobre al eje OU del sistema OUVW.

Una forma de describir la orientación de un objeto es utilizando matrices, este método es más cómodo y compacto lo que permite una mejor interpretación, a este método se le conoce como **matrices de rotación**. Considérese un sistema OXYZ de referencia fijo y un nuevo sistema OUVW coincidente con el anterior, pero rotado sobre el eje U, ver Figura 1.6. El sistema OXYZ tiene los vectores unitarios i_x, j_y, k_z , mientras que los del sistema

OUVW son i_u, j_v, k_w , con base en esto, es posible describir un vector $\mathbf{P}$ con referencia a cualquiera de los dos sistemas como a continuación [2]:

$$\begin{aligned} P_{uvw} &= [p_u \ p_v \ p_w]^T = p_u \cdot \mathbf{i}_u + p_v \cdot \mathbf{j}_v + p_w \cdot \mathbf{k}_w \\ P_{xyz} &= [p_x \ p_y \ p_z]^T = p_x \cdot \mathbf{i}_x + p_y \cdot \mathbf{j}_y + p_z \cdot \mathbf{k}_z \end{aligned} \quad (1.2)$$

Realizando algunas transformaciones es posible llegar a la siguiente equivalencia:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

donde $\mathbf{R}$ se denomina matriz de cosenos directores, la cual describe la orientación del sistema OUVW con respecto al sistema fijo OXYZ y se compone de la siguiente manera:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} i_x i_u & i_x j_v & i_x k_w \\ j_y i_u & j_y j_v & j_y k_w \\ k_z i_u & k_z j_v & k_z k_w \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

La representación de la orientación por medio de estas matrices resulta de mucha utilidad, especialmente cuando el sistema está rotado solo sobre uno de los ejes del sistema de referencia. Regresando a la Figura 1.6, el eje OX del sistema OXYZ coincide con el eje OU del sistema rotado OUVW, por lo tanto la orientación del sistema rotado se representa mediante la matriz:

$$\mathbf{R}(x, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

La matriz (1.5) se conoce como matriz de rotación básica (sobre el eje x), de la misma manera, se representan las matrices de rotación básicas sobre los ejes y (1.6) y sobre z (1.7) [19].

$$\mathbf{R}(y, \beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{R}(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

1.2.2. Matrices de Transformación Homogénea

Las matrices de transformación homogénea son una herramienta matemática de gran utilidad para representar la posición y rotación de un sólido en el espacio, con respeto a

un sistema de referencia [19]. Se define esta transformación de coordenadas de un sistema a otro, dentro de una matriz $\mathbf{T}$ de dimensiones 4×4 , la cual, se compone por cuatro submatrices: $\mathbf{R}_{3 \times 3}$ correspondiente a la matriz de rotación; $\mathbf{P}_{3 \times 1}$ correspondiente al vector de posición; $\mathbf{f}_{1 \times 3}$ correspondiente a un vector que representa una transformación de perspectiva y $\mathbf{s}_{1 \times 1}$ que representa un valor de escalado global. Sin embargo, en el caso de los manipuladores robóticos, únicamente son de interés los valores en $\mathbf{R}_{3 \times 3}$ y $\mathbf{P}_{3 \times 1}$, razón por la cual, se consideran los componentes en $\mathbf{f}_{1 \times 3}$ como nulos y el valor de $\mathbf{s}_{1 \times 1}$ como la unidad [2]. Por lo tanto, la matriz de transformación homogénea con la forma de la ecuación (1.8), representa la orientación y traslación de un sistema coordenado OUVW con respecto a otro de referencia OXYZ.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{P}_{3 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

De este modo, mediante las matrices de rotación homogénea, es posible representar una serie de movimientos rígidos como la multiplicación de matrices, lo cual se aplicara para obtener la cinemática directa [19].

1.2.3. Cinemática directa

La cinemática directa es una función vectorial que describe la relación entre las coordenadas articulares del manipulador, con las coordenadas cartesianas resultantes del movimiento de los eslabones que componen al manipulador [20]. Esto es, la posición cartesiana $[x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^3$ y orientación angular $[\alpha \ \beta \ \theta]^T \in \mathbb{R}^3$ del efector final del robot. Todo esto, con respecto al sistema de referencia de la base y en términos de las posiciones articulares $q \in \mathbb{R}^n$, de tal modo que, la posición del efector final queda descrito por:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha \\ \beta \\ \theta \end{bmatrix} = f_R(q) \quad (1.9)$$

En general, se requiere de 6 coordenadas para el posicionamiento de un robot en el espacio: 3 coordenadas con respecto a su posicionamiento cartesiano (x, y, z) y 3 coordenadas que describen la orientación del efector final (α, β, θ) [15].

Para describir la relación existente entre las coordenadas articulares y cartesianas, se hará uso de las matrices de transformación homogéneas, que ya fueron presentadas

anteriormente. Cabe mencionar que existen otros métodos que permiten describir la cinemática directa de un manipulador robótico, como es el caso del algoritmo de Denavit–Hartenberg, el cual, pudiera resultar más simple. Sin embargo, en el presente trabajo se decidió optar por las matrices de transformación homogénea debido a que permite una mayor disposición de los parámetros longitudinales y angulares.

Tomando en cuenta que, un manipulador robótico es una serie de eslabones conectados por medio de articulaciones, entonces, haciendo uso de las matrices de transformacional homogénea, se puede hacer una descripción de la posición y orientación relativa de un marco de referencia al anterior[21]. Para determinar las matrices homogéneas de cada eslabón que compone al manipulador robótico, se requiere establecer la notación que permite reconocer los eslabones y las articulaciones. En primer lugar, se enumeran los eslabones de e_0 a e_n , para n igual al número de grados de libertad, donde se designa con e_0 al eslabón base y, se enumeran las articulaciones de modo que la unión $i = 1, \dots, n$ conecta los eslabones e_{i-1} con e_i .

Una vez que se han determinado los parámetros y colocado los sistemas coordenados solidarios a cada eslabón, como mejor convenga, se obtiene ${}^{n-1}H_n \in R_{4 \times 4}$ que es una matriz de transformación homogénea, por lo tanto, la matriz está compuesta como lo muestra la ecuación (1.8). Sin embargo, únicamente describe la relacional relativa de un sistema H_n , de estudio, con el sistema H_{n-1} anterior. Para obtener la matriz de transformación $\mathbf{T}$ entre la base y el efector final del robot, o cualquier eslabón intermedio de interés, se debe realizar el producto de las diferentes matrices de transformación relativas, de la forma:

$$\mathbf{T} = {}^0H_1 \cdot {}^1H_2 \cdot {}^2H_3 \cdots {}^{n-1}H_n = {}^0H_n \quad (1.10)$$

Como se puede observar en la ecuación (1.10), la matriz $\mathbf{T}$ resultante, tiene las mismas características de una matriz de transformación homogénea; representadas en la ecuación (1.8), esto es que, está formada por una submatriz $\mathbf{R}_{3 \times 3}$ dedicada a la orientación y un vector $\mathbf{P}_{3 \times 1}$ dedicado al posicionamiento.

1.2.4. Cinemática inversa

La cinemática inversa busca solucionar el problema de la relación contraria a la cinemática directa, es decir, los valores que deben tomar las coordenadas articulares del robot $q = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_n]^T$ en función de las coordenadas cartesianas $(x, y, z, \alpha, \beta, \theta)$. Para resolver este problema encontraremos una solución cerrada que tendrá la siguiente forma:

$$q_n = f_R^{-1}(x, y, z, \alpha, \beta, \theta) \quad (1.11)$$

Encontrar la solución de la cinemática inversa es un problema mucho más complejo que el de la cinemática directa, esto se debe a que pueden existir una gran cantidad de solucio-

nes diferentes o, incluso, no tener solución analítica[2, 22]. Para el caso de presentar una cantidad indefinida de soluciones, una solución cerrada de la función permite determinar restricciones que aseguren la solución más adecuada de entre las posibles [2]. Considérese que físicamente, es más comprensible especificar una posición para un robot en coordenadas de efector final que en coordenadas articulares, por otro lado, el problema de la cinemática inversa aumenta con la complejidad del manipulador (número de grados de libertad)[22].

Para el caso de manipuladores robóticos de pocos grados de libertad o que sus movimientos se desarrollan en el plano $\mathbb{R}^2$, es relativamente sencillo obtener la cinemática inversa de forma analítica a través de operaciones trigonométricas. Sin embargo, cuando la cinemática de los manipuladores pasa a ser más compleja, se aconseja utilizar métodos sistematizados. Los métodos anteriores no se describen en este trabajo, ya que no tiene gran implicación en el mismo, aunque, el lector puede consultar estos temas en la bibliografía.

1.2.5. Modelo Dinámico

Considerando sistemas robóticos totalmente actuados, los cuales, cuentan con un actuador por cada grado de libertad (GDL) y, que al mismo tiempo, es igual al número de articulaciones. Los desplazamientos de las articulaciones, que pueden ser lineales o angulares, de un manipulador robótico de n -GDL, se representan en el vector $q \in \mathbb{R}^n$ [22], tal que:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

El modelo dinámico de un robot manipulador consiste en una ecuación diferencial vectorial, ya sea en las posiciones articulares (q) o en las posiciones cartesianas (x).

$$f(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau) = 0 \rightarrow \text{modelo dinámico articulado} \quad (1.13)$$

$$f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \tau) = 0 \rightarrow \text{modelo dinámico cartesiano} \quad (1.14)$$

donde q representa el vector de articulaciones, x representa el vector cartesiano y τ representa el vector de pares y fuerzas aplicadas en las articulaciones.

Para determinar el modelo dinámico de un manipulador robótica de n grados de libertad, se emplean las ecuaciones de movimiento de Lagrange. Estas ecuaciones expresan la energía total $\mathcal{E}$, de un robot manipulador de n grados de libertad, como la suma de

sus energías cinéticas $\mathcal{K}(q(t), \dot{q}(t))$ y su energía potencial $\mathcal{U}(q(t))$ [15, 22]. La ecuación se escribe la siguiente manera:

$$\mathcal{E}(q(t), \dot{q}(t)) = \mathcal{K}(q(t), \dot{q}(t)) + \mathcal{U}(q(t)) \quad (1.15)$$

donde $q, \dot{q} \in \mathbb{R}^n$ simbolizan los vectores de posición y velocidad articulares, respectivamente. Se puede notar que la energía cinética $\mathcal{K}(q(t), \dot{q}(t))$ depende de la posición y la velocidad articular del sistema, descrita por:

$$\mathcal{K}(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\dot{q}^2 \quad (1.16)$$

en cambio, la energía potencial $\mathcal{U}(q(t))$ unicamente depende de la posición y está descrita por:

$$\mathcal{U}(q(t)) = mgh \quad (1.17)$$

donde, $g = 9.81$ el valor de la gravedad.

Por otro lado, el lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ de un robot de n-GDL se define como la diferencia entre la energía cinética $\mathcal{K}(q, \dot{q})$ y la energía potencial $\mathcal{U}(q)$ [15, 22], es decir:

$$\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) = \mathcal{K}(q(t), \dot{q}(t)) - \mathcal{U}(q(t)) \quad (1.18)$$

Finalmente, las ecuaciones de movimiento de Lagrange para un manipulador de n grados de libertad, vienen dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} \right] = \tau_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.19)$$

donde $\tau = [\tau_1 \ \tau_2 \ \dots \ \tau_n]^T \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de pares aplicados, de manera tal que, el i -ésimo par τ_i está asociado a la i -ésima coordenada articular q_i [15]. De modo que, se tiene un número de ecuaciones dinámicas igual a n grados de libertad del sistema [22].

Por lo tanto, el cálculo de las ecuaciones de Lagrange, se reduce a cuatro etapas principalmente[22], que son:

1. Cálculo de la energía cinética: $\mathcal{K}(q(t), \dot{q}(t))$
2. Cálculo de la energía potencial: $\mathcal{U}(q(t))$
3. Cálculo del lagrangiano: $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))$
4. Desarrollo de las ec. de Lagrange: $\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} \right] = \tau$.

Es posible generalizar la energía cinética $\mathcal{K}(q, \dot{q})$, para cualquier robot de n-GDL, con una forma cuadrática en función de la velocidad articular, tal que:

$$\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (1.20)$$

donde $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia del robot, la cual es simétrica y, por lo tanto, definida positiva. Con la forma de $\mathcal{K}(q, \dot{q})$ de la ecuación (1.20), el lagrangiano de la ecuación (1.18) se reescribe como:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - \mathcal{U}(q(t)) \quad (1.21)$$

Considerando lo anterior, la ecuación de movimiento de Lagrange (1.19) toma la forma:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] \right] - \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] + \frac{\partial \mathcal{U}(q)}{\partial q} = \tau \quad (1.22)$$

Siendo que se cumple lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] = M(q) \dot{q} \quad (1.23)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] \right] = M(q) \ddot{q} + \dot{M}(q) \dot{q} \quad (1.24)$$

nuevamente se reescribe la ecuación de movimiento (1.22), tal que:

$$M(q) \ddot{q} + \underbrace{\dot{M}(q) \dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} [\dot{q}^T M(q) \dot{q}]}_{:=\mathcal{C}(q, \dot{q}) \dot{q}} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{U}(q)}{\partial q}}_{:=G(q)} = \tau \quad (1.25)$$

donde $\mathcal{C}(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas centrífugas o de Coriolis, $G(q) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas o pares gravitatorios, $\tau \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares y fuerzas aplicadas en las articulaciones, $q \in \mathbb{R}^n$ es el vector de posiciones articulares, $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de velocidades articulares y $\ddot{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de aceleraciones articulares. [15, 22].

Finalmente, el modelo dinámico de un manipulador robótico de n-GDL está definido por la ecuación (1.26), en su forma compacta como sigue:

$$M(q) \ddot{q} + \mathcal{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \tau \quad (1.26)$$

1.3. Control con rechazo activo de perturbaciones

El control con rechazo activo de perturbaciones (ADRC, por sus siglas en inglés Active Disturbance Rejection Control) es una metodología para control de sistemas no lineales, que se ha ido formando a lo largo de las últimas dos décadas, debido al problema de per-

turbaciones presente en el control automático [23]. Algunas otras metodologías de control han aparecido para tratar de dar solución a esta problemática, como el control adaptativo y el control robusto. Sin embargo, no alcanzan a cubrir las necesidades de dicha problemática de control, debido su limitado manejo de las perturbaciones y su complicada implementación [24].

Los inicios de la metodología ADRC se atribuyen al ingeniero y matemático francés Jean Victor Poncelet, quien sugirió en 1829 el principio de invarianza "las perturbaciones deben usarse para generar una señal de activación que tenderá a cancelar el efecto de la misma perturbación", que fue establecido formalmente por el profesor GV Schippanov en 1939 [25]. Después de varios años de avances, el profesor Jingqing Han, quien fue alumno de Schippanov en la Universidad Estatal de Moscú, propuso el Observador de Estado Extendido (ESO, por sus siglas en inglés Extended State Observer); el cual, se distingue notablemente por estimar tanto el efecto de las incertidumbres dinámicas del modelo como las perturbaciones externas [23], dentro de un mismo término de perturbación que se llamara "perturbación total".

El doctor Han propone cuatro soluciones a las limitación que existen en un PID, que incluyen lo siguiente: 1) una ecuación diferencial simple para ser utilizada como generador de perfil transitorio; 2) un diferenciador de seguimiento tolerante al ruido; 3) el uso de una ley de retroalimentación no lineal; y 4) la estimación y el rechazo de la perturbación total. A partir de estas propuestas se fórmula una ley de control que no se basa en el conocimiento preciso del modelo dinámico, que es extremadamente tolerante a las perturbaciones, tanto internas como externas, y fácil de implementar[24, 26].

El principio del ADRC es simplificar la descripción de la planta a través de agrupar todas las perturbaciones, externas e internas, en un solo término de perturbación total, dejando la dinámica en una representación de entrada-salida en la que se conservan los aspectos estructurales; el orden del sistema y, posiblemente, los factores que acompañan a las variables de entrada de control. Después, proceder a estimar los efectos de esta perturbación, de alguna manera precisa, para cancelar sus efectos mediante una ley de control de retroalimentación, utilizando la estimación de la perturbación recopilada [25]. Es preciso mencionar que dicha perturbación es no estructurada, lo que quiere decir que se compone por incertidumbres internas y externas o, perturbaciones endógenas y exógenas.

Se denominan perturbaciones exógenas aquellas que dependen puramente del tiempo y regularmente se generan por el medio ambiente, por sistemas que interactúan con la planta en estudio o por efectos de pruebas aplicadas a voluntad. Por otro lado, se denominan perturbaciones endógenas aquellas que dependen de variables internas: estados, salidas, entradas de control, no linealidades y parásitos no modificados. El desafío, entonces, es diseñar un observador de un solo estado que estime simultáneamente las variables de

estado no medidas del sistema y las perturbaciones desconocidas [25]. De tal modo que, la esencia del ADRC es el observador de estado extendido (ESO) [27].

El diagrama presentado en la Figura 1.7, proporciona un esquema básico de bloques que describe los componentes esenciales en un control ADRC, los cuales son dos: una ley de control de retroalimentación más pre-compensación para obtener la respuesta deseada de la salida y un ESO para estimar la perturbación total y cancelarla en línea [23].

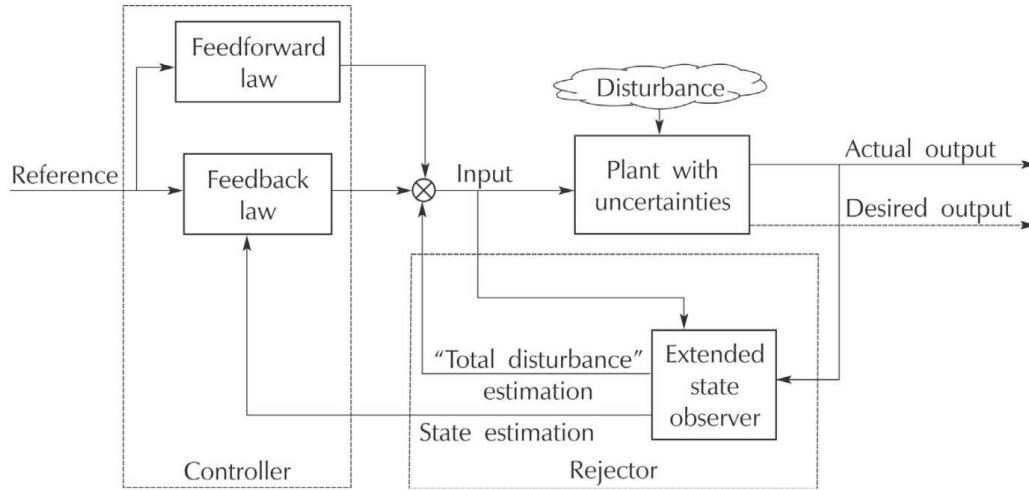


Figura 1.7: Diagrama general del método ADRC basado en un ESO [23].

El término de perturbación total, en general, es aplicable a la mayoría de los sistemas no lineales variantes en el tiempo de entrada y salida múltiple (MIMO). Sin embargo, se considera un sistema de segundo orden no lineal y variante en el tiempo como ejemplo demostrativo, descrito por la ecuación:

$$\ddot{y}(t) = f(y(t), \dot{y}(t), \xi(t), t) + bu(t) \quad (1.27)$$

donde y es la salida, u es la entrada y ξ es la perturbación externa. Se realiza un cambio de variable asignando $x_1 = y$ y $x_2 = \dot{y}$, luego el sistema (1.27) se reescribe:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2, \xi(t), t) + bu \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1.28)$$

donde $f(x_1, x_2, \xi(t), t)$ es una función dependiente tanto de los estados como de las perturbaciones externas, así como del tiempo. En base a los fundamentos del ADRC, ξ denota la perturbación total del sistema, la cual debe ser estimada y cancelada para lograr el objetivo de control. Por lo que, en lugar de tener un problema tradicional de identificación del sistema, el problema se ha transformado en el rechazo de perturbaciones [26].

Asumiendo que la derivada de f existe, se trata como una variable de estado adicional, $x_3 = F(t)$, entonces $\dot{F}(t) = G(t)$ con $G(t)$ desconocida, de modo que el sistema (1.28) se reescribe en un nuevo sistema.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + bu \\ \dot{x}_3 = G(t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1.29)$$

Ahora se diseña el ESO para estimar el vector de estados $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [y \ \dot{y} \ f]^T$, el cual está dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \lambda_1(y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 + \lambda_2(y - \hat{x}_1) + bu \\ \dot{\hat{x}}_3 = \lambda_3(y - \hat{x}_1) \end{cases} \quad (1.30)$$

donde $\hat{x}_3$ representa la estimación de la perturbación total y λ_1, λ_2 y λ_3 son las ganancias del observador, las cuales se pueden calcular por diferentes métodos, por ejemplo a través de un polinomio característico tipo Hurwitz.

Independientemente de cual ley de control u se elija, es importante resaltar que los coeficientes del controlador no dependen del modelo matemático de la planta, por lo tanto, el ADRC es considerablemente independiente del modelo. En este trabajo se propone un ley de control por Funciones de Lyapunov de Control, pocas veces visto en la literatura, por lo que se presentará en la siguiente sección.

1.4. Funciones de Lyapunov de Control

Las funciones de Lyapunov de control (CLF, por sus siglas en inglés Control Lyapunov Function) es un método de diseño de control que se generaliza a partir del concepto de función de Lyapunov para el análisis de la estabilidad [28, 29]. En el contexto de sistemas de control no lineales, Artstein en 1983 introdujo el concepto de CLF [30], que se ha convertido en parte fundamental del diseño de la retroalimentación [31]. Una fuerte razón es que, como la existencia de una función de Lyapunov es necesaria y suficiente para la estabilidad de un sistema sin entradas, entonces, la existencia de un CLF también es necesaria y suficiente para la estabilización de un sistema con una entrada de control [31, 32].

Supongase un sistema de control general

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1.31)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado y $u \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control. Se desea encontrar una función candidata de Lyapunov V , estrictamente definida positiva y continuamente diferenciable, tal que su derivada $\dot{V} < 0$, sea estrictamente negativa a partir de la selección de u .

Se considera que V es una CLF válida para el sistema (1.31) si cumple que para cada $x \neq 0$ existe un valor de u para el cual:

$$\dot{V}(x, u) := \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x, u) < 0 \quad (1.32)$$

entonces si se hace una buena elección de $V(x)$ se puede decir que el sistema posee un CLF. Se establece la siguiente definición.

Definición 1. Una función suave positiva definida y radialmente ilimitada $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ se llama función de control de Lyapunov (CLF) para (1.31) si

$$\inf_u \left\{ \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x, u) \right\} < 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (1.33)$$

El interés se centra en hallar una ley de retroalimentación continua:

$$u = k(x) \quad (1.34)$$

que hace al sistema, en lazo cerrado, global y asintóticamente estable. Además, se desea que V sea una CLF para el lazo cerrado, i.e, se espera que:

$$\frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x, k(x)) < 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (1.35)$$

Otro requisito deseable es que $k(0) = 0$ para mantener el equilibrio en el origen (suponiendo también que $f(0, 0) = 0$) [33].

Sin embargo, encontrar un valor de u para cada x no garantiza que estos valores formen una función continua $k(x)$. A este problema se le conoce como de selección continua, esto es que, a partir de una serie de conjuntos parametrizados por x se seleccione una función continua en x .

En [33] se pone el siguiente ejemplo. Dado un sistema con la forma:

$$\dot{x} = x[(u - 1)^2 - (x - 1)][(u + 1)^2 + (x - 2)] \quad (1.36)$$

Sea

$$V(x) := \frac{x^2}{2} \quad (1.37)$$

entonces

$$\dot{V} = x^2[(u-1)^2 - (x-1)][(u+1)^2 + (x-2)] \quad (1.38)$$

En este caso, basta con que alguna de las expresiones entre los corchetes sea negativa para que $\dot{V}$ se defina negativa. Los puntos en el plano (x, u) donde esto sucede, están dados por los interiores de las dos parábolas en la Figura 1.8.

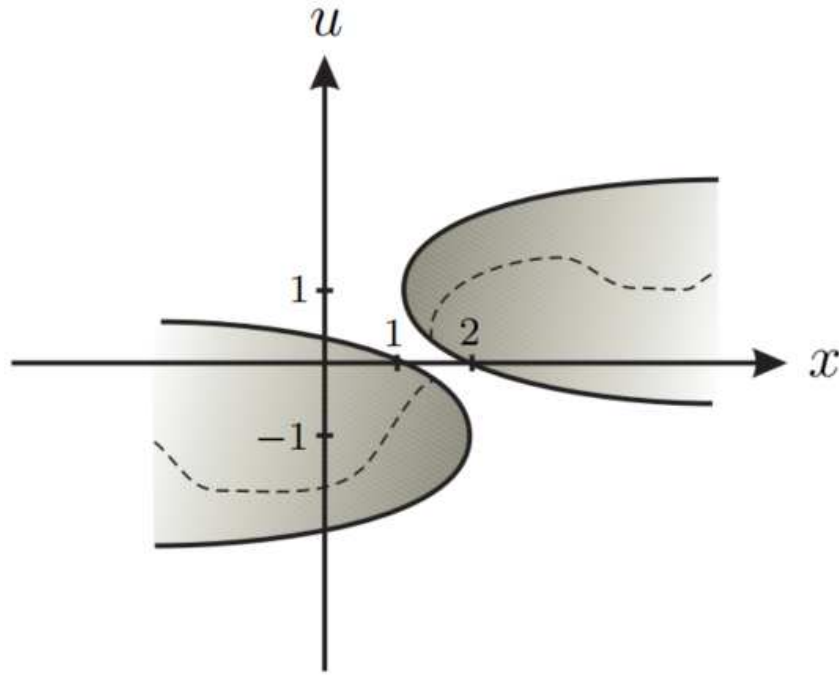


Figura 1.8: Gráfica de la función $\dot{V}$ en el plano (x, u) [33].

Se observa que la proyección de ambas parábolas sobre el eje x cubre el eje en su totalidad, lo que significa que V es una CLF. Por otra parte, de la Figura 1.8, también se puede observar que las parábolas no se tocan, esto significa que no existe una ley de retroalimentación continua capaz de hacer que $\dot{V}$ sea definida negativa. Existen varias opciones para solucionar este problema de discontinuidad en el control, sin embargo, este trabajo se centra en los sistemas afines, para los cuales es posible encontrar estabilizadores continuos.

Como herramienta de diseño de retroalimentación, la principal deficiencia que se puede encontrar en el concepto CLF es que no existe una técnica sistemática para encontrar una función V , válida como CLF, para sistemas no lineales generales. El cometido de hallar una CLF conveniente puede ser igual de complejo que el de diseñar un ley de estabilización de retroalimentación por algún otro método [28, 29]. Es por esta razón que, estos controles, pueden generarse a partir de una CLF mediante la fórmula explícita definida por Sontag.

1.4.1. fórmula universal de Sontag

Considere el sistema no lineal afín en la entrada:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (1.39)$$

donde $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ es el estado, $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$ es la entrada de control y, f y g son funciones de Lipschitz que se desvanecen en el origen. Si el sistema (1.39) admite una retroalimentación estática $k : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$, entonces existe una Función de Lyapunov de Control (CLF) $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, que es una función suave, definida positiva, tal que la ecuación (1.32) se convierte en:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(x)k(x) < 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (1.40)$$

Cabe señalar que (1.40) se puede satisfacer solo si

$$\frac{\partial V}{\partial x} g(x) = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial V}{\partial x} f(x) < 0 \quad (1.41)$$

Puesto que los controles son ilimitados, siempre es posible elegir u para lograr

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(x)u < 0 \quad (1.42)$$

a excepción de los valores de x en el que los términos con u son 0, en que se pierde la autoridad de control y se necesitaría que el primer término sea negativo por sí mismo.

La notación se simplifica si se define:

$$a(x) := \frac{\partial V}{\partial x} f(x), \quad b(x) := \left(\frac{\partial V}{\partial x} g(x) \right)^T \quad (1.43)$$

En particular, la propiedad CLF puede ser escrita como:

$$|b(x)| = 0 \quad \implies \quad a(x) < 0 \quad (1.44)$$

para todo $x \neq 0$

Si $V(x)$ es un CLF para (1.39) para cualquier función analítica real $\bar{q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\bar{q}(0) = 0$ y $b\bar{q}(b) > 0$ para $b \neq 0$, sea $\gamma_C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$k(x) = \gamma_C(a, b) := \begin{cases} \frac{a(x) + \sqrt{a(x)^2 + b(x)\bar{q}(b(x))}}{b(x)} & \text{if } b \neq 0 \\ 0 & \text{if } b = 0 \end{cases} \quad (1.45)$$

entonces la fórmula de Sontg proporciona una ley de control de estabilización particular $k(x)$, uniforme para todos $x \neq 0$ [34], tal que la función de control esté dada por $u : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$, definida de la siguiente forma

$$u_i(x) := -b_i(x)\gamma_C(a(x), \beta(x)), \quad i \in \{1, \dots, p\} \quad (1.46)$$

con $\beta(x) := \|b(x)\|^2$. Entonces u es tal que para todo x diferente de cero se cumple que $\frac{\partial V}{\partial x}f(x) + \frac{\partial V}{\partial x}g(x)u(x) < 0$.

La particularidad en $b = 0$ es removible, como muestra γ_C es analítico en función de a y b , con excepción de $x = 0$, donde (1.44) no se cumple. Esto evidencia que la ley de control no conduce perder la suavidad en lazo cerrado; por ejemplo, es suave (lejos de $x \neq 0$) si f , G y V son suaves. Por tanto, esta retroalimentación (1.45) estabiliza el sistema en lazo cerrado, con V como función de Lyapunov, como se muestra:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x}(f(x) + g(x)u) &= a(x) + b(x)u \\ &= a - b \frac{a + \sqrt{a^2 + |b|^4}}{|b|^2} b \\ &= a - \frac{a + \sqrt{a^2 + |b|^4}}{|b|^2} b^2 \\ &= -\sqrt{a^2 + |b|^4} < 0 \quad \forall x \neq 0 \end{aligned} \quad (1.47)$$

donde la desigualdad proviene de (1.44) y la afirmación es consecuencia del teorema de Lyapunov. Se utiliza $|b|^4$ en lugar de $|b|^2$ dentro de la ecuación (1.45) para asegurar la propiedad de suavidad en la ley de control, así como su continuidad en 0.

En cuanto a la estabilidad asintótica global en el equilibrio cero, se debe asegurar que $x = 0$ sea un punto de equilibrio, por eso que se necesita $f(0) = 0$. Mientras que, la ley de retroalimentación (1.45) es automáticamente continua en el origen ($x = 0$), si V satisface la propiedad de control pequeño, esto es que, para x pequeña; los valores de u que cumplen (1.44) también se pueden elegir pequeños. A la ecuación (1.45) se conoce como la fórmula de Sontag o, fórmula universal de Sontag [34, 35].

Capítulo 2

Robot antropomórfico de doble brazo

El segundo capítulo presenta la estructura robótica antropomórfica de doble brazo, sobre la cual está centrado el presente trabajo. Se inicia por una semblanza general de lo que implica una estructura antropomórfica, junto con las características del sistema robótico: composición, grados de libertad, materiales y uniones mecánicas. Después, se continúa con la descripción paramétrica de la estructura, esto involucra los rangos en los ángulos de movilidad, las longitudes, las masas y las inercias de cada uno de los eslabones. A continuación, se desarrolla el modelo matemático del sistema en el espacio de las coordenadas articulares, solo para uno de los brazos de la estructura considerando la equivalencia para el otro brazo. Finalmente se caracterizan y modelan los actuadores involucrados en el sistema.

2.1. Descripción del SRH-2B

El diseño del sistema robótico antropomórfico, es una versión actualizada del realizado en el 2017, en la Facultad de Ciencias de la Electrónica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) [13], se trata de un sistema robótico humanoide de dos brazos (SRH-2B). Este sistema robótico está integrado por dos brazos antropomórficos de 4 GDL cada uno, brazo izquierdo y brazo derecho, que se conforman a partir de pares cinemáticos rotaciones totalmente actuados, esto es, que por cada grado de libertad cuentan con un actuador que impulsa el movimiento de la respectiva articulación.

Se dice que una estructura es antropomórfica, cuando esta cuenta con una forma humanoide, es decir, similar a la del ser humano. En este caso, la disposición de doble brazo opuestos sobre la base le proporciona el aspecto antropomórfico, conjuntamente, el rango de los movimientos angulares de las articulaciones se diseñaron para replicar los rangos de movimiento del cuerpo humano. También se considera que este sistema es antropométrico, que se refiere a que las dimensiones estructurales están calculadas en base a las proporciones del cuerpo humano.

Como se puede observar en la Figura 2.1 una característica importante y peculiar de esta estructura robótica es la integración de piezas impresas en 3D. El material seleccionado para realizar las impresiones fue PETG. En el trabajo [13] se realizó una prueba estática de esfuerzo entre 4 materiales de impresión, que resulta en la selección de este material. Sin embargo, dado que el peso constante de la estructura fatiga el material a lo largo de su longitud, se incorporaron barras de aluminio para darle mayor soporte a los eslabones, ver Figura 2.1 (b). Las modificaciones realizadas a la estructura robótica de la Figura 2.1 (a), se efectuaron con el objetivo de darle mayor robustez y estabilidad al mecanismo tratando, en lo posible, no cambiar las dimensiones del primer diseño, ya que de estos depende conservar la antropometría y el antropomorfismo del diseño.

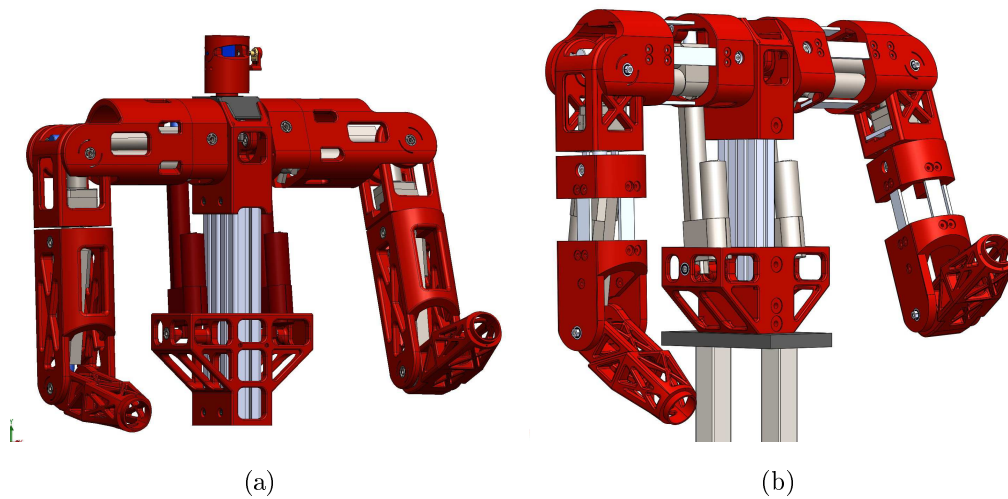


Figura 2.1: Diseño CAD del robot humanoide de 8 g.d.l.

Para el diseño de esta estructura robótica se seleccionaron actuadores lineales, ya que su capacidad de carga estática es mayor, además, estos actuadores pueden permanecer en su posición incluso después de apagar el sistema, lo que representa una ventaja en cuanto a consumo de energía.

2.1.1. Actuadores Lineales

Junto con los parámetros anteriores, es importante conocer también los parámetros de los actuadores utilizados en el robot. Los movimientos rotacionales sobre los pares cinemáticos son ejecutados por tres modelos de actuadores distintos, que se enumeran en la Figura 2.2. Los actuadores número AL2 y AL4, corresponden al modelo FA-PO-150-12-XX, son actuadores lineales de la marca Firgelli Automations que cuentan con retroalimentación, lo que permite medir la posición del vástago, ver apéndice A. La tabla 2.1, contiene los parámetros más importantes, de estos actuadores, a considerar en el desarrollo del modelo y parametrización del sistema.

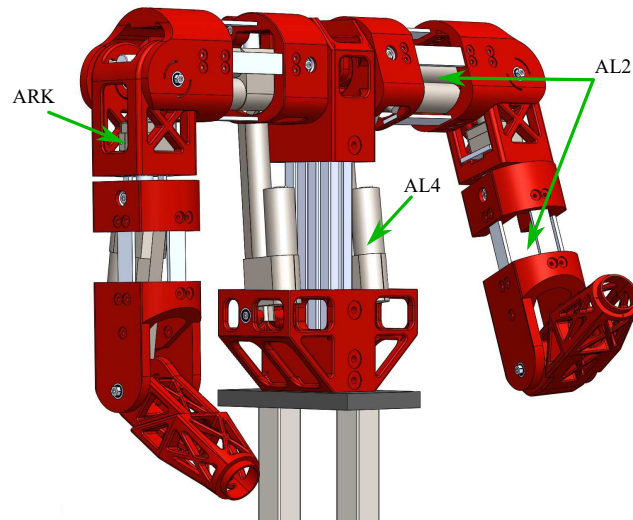


Figura 2.2: Localización de los actuadores dentro de la estructura robótica.

Tabla 2.1: Parámetros de los actuadores lineales AL2 y AL4.

Parametros	AL2		AL4	
Carrera del vástago	2 in	0.0508 m	4 in	0.1016 m
Velocidad	2 in/s	0.0508 m/s	0.5 in/s	0.127 m/s
Fuerza	35 lbf	155.69 N	150 lbf	667.23 N
Alimentación	12 V		12 V	
Masa	2.7 lbs	1.2247 Kg	2.9 lbs	1.3154 Kg

Por el contrario, el ARK es un actuador de tipo rotacional, específicamente es un motor de corriente directa (CD) con caja de engranajes modelo K30 / 1.13.021.3XX de la marca KELVIN, estos motores no cuentan con retroalimentación o sensor, por lo que se les acopló un potenciómetro. La tabla 2.2, muestra los parámetros a considerar de este actuador.

Tabla 2.2: Parámetros del actuador rotacional Kelvin

Parametros	ARK	
Velocidad	50.55 r.p.m.	5.2936 rad/s
Fuerza	0.78 Nm	
Alimentación	12 V	
Masa	0.415 Kg	

En las tablas 2.1 y 2.2, se encuentran las masas de los tres tipos de actuadores que integran el sistema, estos parámetros serán usados para calcular la masa total de cada eslabón.

2.1.2. Parametrización del sistema robótico

Para el desarrollo y simulación del modelo dinámico del sistemas robótico es necesario conocer los parámetros de la estructura, los cuales se pueden obtener, en su mayoría, con ayuda del modelo CAD que se realizó en el programa SolidWorks®. Los parámetros relevantes para el modelo dinámico son: la masa, la longitud, la distancia del centro de masa al eje de rotación y la inercia; de cada uno de los eslabones que componen a la estructura. En espacial, para conocer la masa de cada eslabón, es necesario conocer primero la masa de la piezas impresas en 3D y de las barras de aluminio, la suma de estos dos parámetros representa la masa del eslabón sin el actuador, se presentan en la tabla . Por último, a la masa del eslabón sin actuador se le suma la masa de las actuadores, para obtener la masa total del actuador.

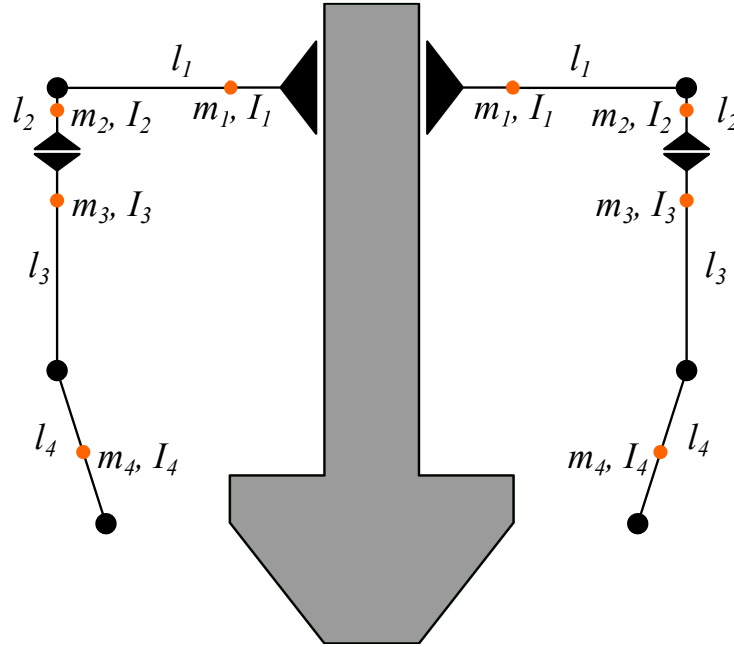


Figura 2.3: Diagrama de cuerpo libre general, posición de reposo.

Con el fin de tener una mejor perspectiva de los parámetros antes mencionados, se elaboró el diagrama de la Figura 2.3, donde se representa la estructura del robot y se localizan los parámetros. En esta figura se identifican con los términos: l_i a los valores de longitud de los eslabones, l_{ci} los valores de longitud del centro de masa al eje de rotación, m_i los valores de masa e I_i para los valores de inercia; donde $i = 1, 2, 3, 4$.

Los valores obtenidos del proceso de parametrización de la estructura, principalmente del modelo CAD, se concentran dentro de la Tabla 2.3, en la cual se identifican los términos, se muestran los valores medidos junto con su unidad de medición correspondiente y se proporciona una pequeña descripción de cada uno. Cabe señalar que los parámetros de esta tabla, pertenecen al brazo robótico humanoide izquierdo (BRHI), sin embargo, estos parámetros son iguales para ambos brazos, izquierdo y derecho, por tal motivo se

considera innecesario hacer alguna diferencia en la tabla o en los términos utilizados. Los parámetros de la Tabla 2.3 son necesarios para llevar a cabo tanto la simulación del modelo cinemático como la del modelo dinámico.

Tabla 2.3: Parámetros de los brazos de 4 GDL del robot humanoide

Término	Medida	Descripción
l_1	0.248 m	Longitud del eslabón 1
l_2	0.113 m	Longitud del eslabón 2
l_3	0.249 m	Longitud del eslabón 3
l_4	0.184 m	Longitud del eslabón 4
l_{c1}	0.100 m	Long. centro de masa del eslabón 1
l_{c2}	0.070 m	Long. centro de masa del eslabón 2
l_{c3}	0.100 m	Long. centro de masa del eslabón 3
l_{c4}	0.150 m	Long. centro de masa del eslabón 4
m_1	1.700 Kg	Masa del eslabón 1 (con actuadores)
m_2	0.700 Kg	Masa del eslabón 2 (con actuadores)
m_3	1.530 Kg	Masa del eslabón 3 (con actuadores)
m_4	0.515 Kg	Masa del eslabón 4 (con actuadores)
I_1	1.200 Kg m^2	Inercia del eslabón 1
I_2	0.400 Kg m^2	Inercia del eslabón 2
I_3	1.100 Kg m^2	Inercia del eslabón 3
I_4	0.800 Kg m^2	Inercia del eslabón 4

Finalmente, la tabla de la figura 2.4 contiene los rangos de movilidad, obtenidos a partir del diseño del sistema. Para este trabajo se descartan los movimientos del cuello, ya que únicamente se concentra en ambos miembros superiores que involucran el hombro y el codo, que es la articulación que une el brazo con el antebrazo.

		RANGO DE MOVILIDAD [grados °]		
ARTICULACION	MOVIMIENTO	BIOMECANICA	DISEÑO CAD	PROTOTIPO
CUELLO	Flexión	45	39.57	40.1
	Extensión	45	39.57	40.1
	Rotación derecha	60	360	360
	Rotación izquierda	60	360	360
HOMBRO	Flexión	180	100.87	100.2
	Extensión	60	2.54	3.9
	Abducción	180	87.77	86.4
	Aducción	30	0.62	0.3
	Rotación interna	90	360	360
	Rotación externa	70	360	360
CODO	Flexión	150	130.22	130.27
	Extensión	10	25.61	25.49

Figura 2.4: Rangos de movilidad del diseño CAD de cada articulación [13].

2.2. Modelo matemático del sistema en el espacio de las coordenadas articulares

El modelo matemático de un sistema robótico antropomórficos se conforma por las características físicas de la estructura, las disposiciones geométricas, los movimientos de las articulaciones, la localización y la dinámica que intervienen en el movimiento. Para poder establecer un modelo que involucre todas las características ya mencionadas, es necesario establecer un sistema de referencia fijo en la base y sistemas solidarios a los eslabones, como se muestra en el Figura 2.5.

Es importante señalar, que el desarrollo del modelo matemático que se realiza a continuación, está enfocado en el brazo robótico humanoide izquierdo (BRH-I). En primer lugar, se numeran los eslabones de e_0 a e_4 , de modo que e_0 corresponde a la base del robot, e_1 es el eslabón siguiente en la cadena cinemática y así sucesivamente. Después, se enumeran las articulaciones designando a_1 la unión entre el eslabón e_0 con e_1 , lo mismo se realiza para las demás articulaciones.

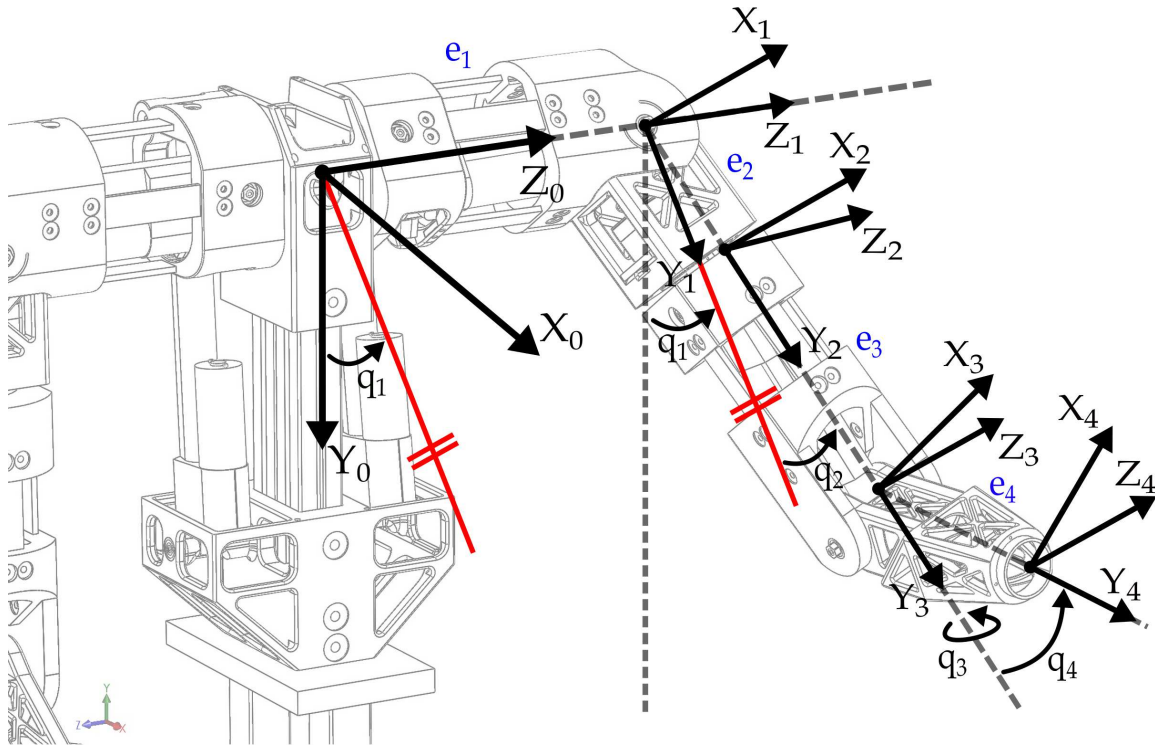


Figura 2.5: Determinación de ejes de referencia sobre el BRH-I.

Los sistemas de referencia que se muestran en la Figura 2.5 se establecen iniciando por el sistema de referencia de la base llamado $\mathcal{S}_0(X_0, Y_0, Z_0)$, en el cual el eje Z_0 tiene la misma dirección que el eje de rotación de la articulación a_1 . A partir del sistema $\mathcal{S}_0$ se establece el siguiente sistema $\mathcal{S}_1(X_1, Y_1, Z_1)$, unicamente girando el eje de rotación anterior Z_0 para hacer coincidir uno de los ejes en la dirección de la longitud del eslabón

siguiente (e_2), en este caso el eje Y_1 concurre con la dirección de la longitud del eslabón e_2 ; lo que provoca, automáticamente, que el eje sobrante X_1 coincida con el eje de rotación de la articulación siguiente (a_2). Sin embargo, puede suceder que el eje de rotación este en la misma dirección que la longitud del eslabón, por ejemplo: al realizar la rotación del eje X_1 el eje Y_2 concurre tanto con el eje de rotación de la articulación a_3 como con la dirección de la longitud del eslabón e_3 , en este caso se complementa el sistema $\mathfrak{S}_2(X_2, Y_2, Z_2)$ posicionando el eje Z_2 ortogonal al plano creado por Y_2 y X_2 . Como consecuencia de que un eje de rotación coincida con la longitud del eslabón, entonces se rota ese mismo eje, en este caso Y_2 , para hacer coincidir el eje Z_3 con el eje de rotación de la articulación a_3 y se agrega el eje X_3 para completar el sistema $\mathfrak{S}_3(X_3, Y_3, Z_3)$. Por último, se realiza la rotación del eje Z_3 para hacer que concurren el eje Y_4 con la longitud del eslabón e_4 y se completa el sistema $\mathfrak{S}_4(X_4, Y_4, Z_4)$ añadiendo el eje X_4 .

Es notorio que los ejes sobre los que se rota cada sistema, para establecer el siguiente sistema, no cambian su orientación, lo que quiere decir que son coincidentes. Esto se realiza a modo de estrategia para poder hacer más sencillo el cálculo de las matrices de transformación.

2.2.1. Cinemática directa del brazo robot humanoide

Ahora el interés, es obtener la cinemática directa del brazo robótico, de esta manera se puede conocer la posición en coordenadas cartesianas del efector final, con respecto a las coordenadas articulares. Para determinar el modelo cinemático que rige los movimientos del brazo robótico, se construye a través de las matrices de transformación homogénea, por lo cual es necesario establecer tanto los sistemas de referencia ($\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_4$), como los ángulos de rotación de las articulaciones (q_1, q_2, q_3, q_4) que se muestran en el diagrama de la Figura 2.5.

Partiendo del sistema de referencia general $\mathfrak{S}_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$ se comienzan a desarrollar las matrices de transformación, las cuales consisten en la rotación y traslación de cada sistema de referencia de dos eslabones consecutivos. Se denota con ${}^{n-1}H_n$ a la matriz de transformación que relaciona el sistema $\mathfrak{S}_n$ con respecto del sistema $\mathfrak{S}_{n-1}$ anterior, donde $n = 0, 1, 2, 3, 4$. De este modo se obtuvieron las matrices de transformación siguientes:

- Matriz de transformación de $\mathfrak{S}_0$ a $\mathfrak{S}_1$

$${}^0H_1 = \begin{pmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

- Matriz de transformación de $\mathfrak{S}_1$ a $\mathfrak{S}_2$

$${}^1H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & -S_2 & 0 \\ 0 & S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & -S_2 & l_2 C_2 \\ 0 & S_2 & C_2 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

- Matriz de transformación de $\mathfrak{S}_2$ a $\mathfrak{S}_3$

$${}^2H_3 = \begin{pmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S_3 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_3 \\ -S_3 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

- Matriz de transformación de $\mathfrak{S}_3$ a $\mathfrak{S}_4$

$${}^3H_4 = \begin{pmatrix} C_4 & S_4 & 0 & 0 \\ -S_4 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_4 & S_4 & 0 & l_4 S_4 \\ -S_4 & C_4 & 0 & l_4 C_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

De tal modo que, la cinemática directa se reduce a encontrar la matriz de transformación homogénea 0T_n , donde n es el eslabón del cual se desea conocer su posición y orientación con respecto al sistema de la base $\mathfrak{S}_0$. En la ecuación (2.5) se presenta la multiplicación de matrices con la que se obtiene la matriz de transformación homogénea referente al eslabón final o e_4 , de tal forma que:

$${}^0T_4 = {}^0H_1 \cdot {}^1H_2 \cdot {}^2H_3 \cdot {}^3H_4 = {}^0H_4 \quad (2.5)$$

Realizando el proceso de obtención de la matriz de transformación homogénea para cada eslabón, se tiene:

$${}^0T_1 = \begin{pmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}
{}^0T_2 &= \begin{pmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & -S_2 & l_2 C_2 \\ 0 & S_2 & C_2 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} C_1 & C_2 S_1 & -S_1 S_2 & l_2 S_1 C_2 \\ -S_1 & C_1 C_2 & -C_1 S_2 & l_2 C_1 C_2 \\ 0 & S_2 & C_2 & l_1 + l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
{}^0T_3 &= \begin{pmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & -S_2 & l_2 C_2 \\ 0 & S_2 & C_2 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_3 \\ -S_3 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} C_1 C_3 + S_1 S_2 S_3 & S_1 C_2 & C_1 S_3 - S_1 S_2 C_3 & l_2 S_1 C_2 + l_3 S_1 C_2 \\ -S_1 C_3 + C_1 S_2 S_3 & C_1 C_2 & -S_1 S_3 - C_1 S_2 C_3 & l_2 C_1 C_2 + l_3 C_1 C_2 \\ -C_2 S_3 & S_2 & C_2 C_3 & l_1 + l_2 S_2 + l_3 S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
{}^0T_4 &= \begin{pmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & -S_2 & l_2 C_2 \\ 0 & S_2 & C_2 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_3 \\ -S_3 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} C_4 & S_4 & 0 & l_4 S_4 \\ -S_4 & C_4 & 0 & l_4 C_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & x_4 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & y_4 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & z_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

donde

$$\begin{aligned}
r_{11} &= C_4(C_1C_3 + S_1S_2S_3) - S_1C_2S_4 \\
r_{12} &= S_4(C_1C_3 + S_1S_2S_3) + S_1C_2C_4 \\
r_{13} &= C_1S_3 - S_1S_2C_3 \\
r_{21} &= -C_4(S_1C_3 - C_1S_2S_3) - C_1C_2S_4 \\
r_{22} &= -S_4(S_1C_3 - C_1S_2S_3) + C_1C_2C_4 \\
r_{23} &= -S_1S_3 - C_1S_2C_3 \\
r_{31} &= -C_2S_3C_4 - S_2S_4 \\
r_{32} &= -C_2S_3S_4 + S_2C_4 \\
r_{33} &= C_2C_3 \\
x_4 &= l_2S_1C_2 + l_3S_1C_2 + l_4(S_1C_2C_4 + C_1C_3S_4 + S_1S_2S_3S_4) \\
y_4 &= l_2C_1C_2 + l_3C_1C_2 + l_4(C_1C_2C_4 - S_1C_3S_4 - C_1S_2S_3S_4) \\
z_4 &= l_1 + l_2S_2 + l_3S_2 - l_4(-S_2C_4 + C_2S_3S_4)
\end{aligned}$$

De (2.9) se obtiene las ecuaciones de la cinemática directa del brazo robótico, que son:

$$\begin{aligned}
x_4 &= l_2S_1C_2 + l_3S_1C_2 + l_4(S_1C_2C_4 + C_1C_3S_4 + S_1S_2S_3S_4) \\
y_4 &= l_2C_1C_2 + l_3C_1C_2 + l_4(C_1C_2C_4 - S_1C_3S_4 - C_1S_2S_3S_4) \\
z_4 &= l_1 + l_2S_2 + l_3S_2 - l_4(S_2C_4 - C_2S_3S_4)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

donde x_4 , y_4 y z_4 son las coordenadas espaciales del efector final con respecto al sistema de la base $\mathfrak{S}_0$. Con el fin de reducir y simplificar las funciones utilizadas, se expresa C_i en lugar de $\cos(q_i)$ y S_i en lugar de $\sin(q_i)$, donde $i = 1, 2, 3, 4$. Esta notación se continuará usando a lo largo del presente trabajo.

2.2.2. Simulación numérica en lazo abierto

Se realizó la simulación de la cinemática directa para corroborar los movimientos angulares de cada articulación, de este modo, se validó la cinemática y se procedió al desarrollo del modelo dinámico. En la figura 2.6 se muestra el diagrama a bloques de la simulación de la cinemática, donde la entrada q_1 va de $(-\pi/2, \pi/2)$, mientras las demás entradas son 0.

Como consecuencia de la entrada en q_1 , se tiene una rotación al rededor del eje z , por lo cual, el valor de posición en z se mantendrá constante y solo cambiarán los valores de x y y . La simulación se realiza empleando los parámetros de longitud de los eslabones,

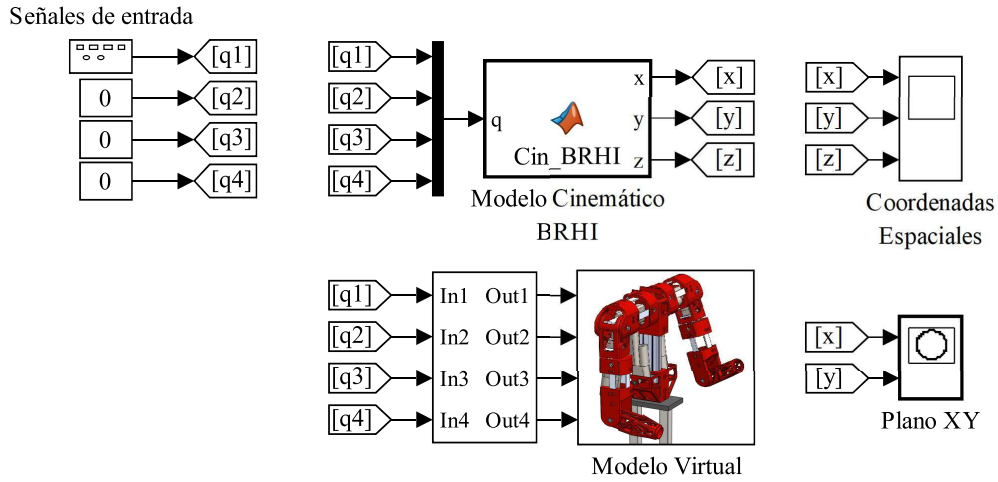


Figura 2.6: Diagrama de bloques de la cinemática de un brazo robótico de 4 g.d.l.

presentados en la tabla 2.3, en consecuencia la posición de las coordenadas son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.546 \leq x \leq 0.546 \\ 0 \leq y \leq 0.546 \\ 0.24818 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

En la gráfica de la Figura 2.7, se puede observar que la simulación presenta los rangos y valores esperados por la posición de las coordenadas espaciales.

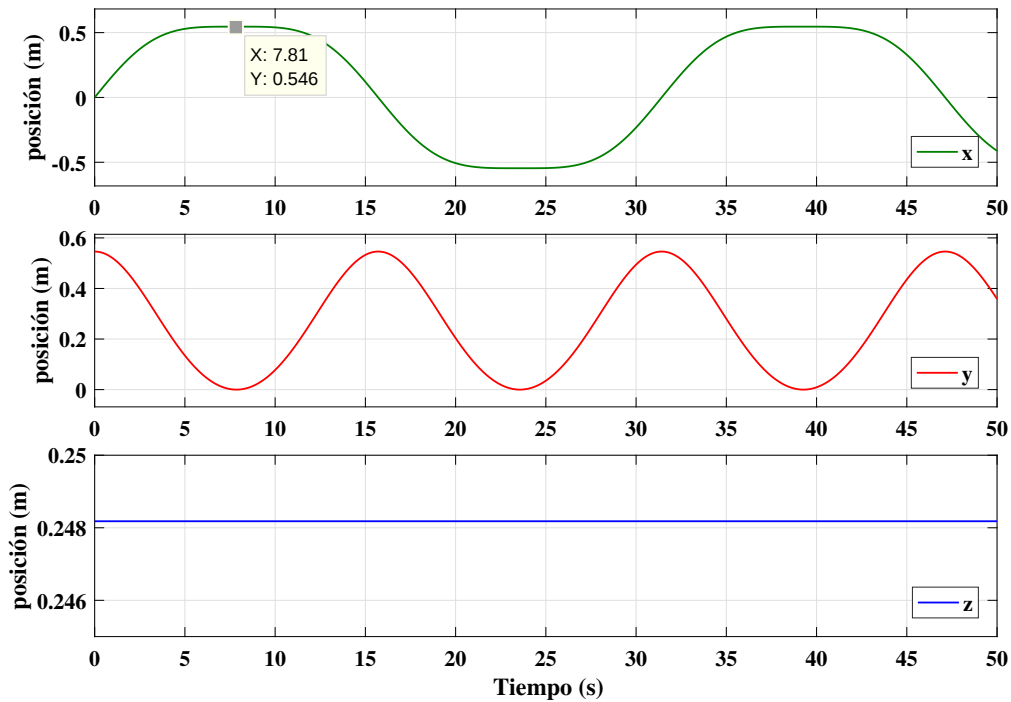


Figura 2.7: Gráficas de coordenadas del efector final.

2.2.3. Modelo dinámico del brazo robot humanoide

A pesar de que la cinemática proporciona el conocimiento de los movimientos del brazo robótico antropomórfico, para realizar la propuesta de control es necesario conocer las fuerzas involucradas en dicho movimiento, esto es el modelo dinámico del sistema. Aún así, los resultados obtenidos de la cinemática directa son de gran utilidad para obtener el modelo dinámico. Para modelar el brazo robótico se emplea el formalismo de Euler-Lagrange, por lo que primero se obtiene el Lagrangiano mediante la ecuación (1.18), el cual se compone por la diferencia de la energía cinética y la energía potencial. Para esto se establecen el vector de posiciones articulares $q(t) = [q_1(t) \ q_2(t) \ q_3(t) \ q_4(t)]^T$. Es recomendable descomponer el cálculo de las energías, ya sea cinética o potencial, como la suma de las energías asociadas a cada eslabón del sistema robótico, tal que:

$$\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}_1(q, \dot{q}) + \mathcal{K}_2(q, \dot{q}) + \mathcal{K}_3(q, \dot{q}) + \mathcal{K}_4(q, \dot{q}) \quad (2.12)$$

$$\mathcal{U}(q) = \mathcal{U}_1(q) + \mathcal{U}_2(q) + \mathcal{U}_3(q) + \mathcal{U}_4(q) \quad (2.13)$$

Dado que, el cálculo de la energía cinética se realiza por medio de la ecuación (1.16) en la que se requiere la velocidad, es necesario conocer la posición de los centros de masa, en el espacio (X, Y, Z) , con respecto al sistema de la base y las inercias de cada eslabón. Se calcula la energía cinética $\mathcal{K}_1(q, \dot{q})$ del eslabón e_1 , partiendo de la matriz de transformación homogénea (2.6), de la que se obtiene la posición del centro de masa del eslabón, que es:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ y_1 &= 0 \\ z_1 &= l_{c1} \end{aligned} \quad (2.14)$$

De la ecuación (2.14), se deduce el vector de velocidad v_1 , correspondiente a este centro de masa, tal que:

$$v_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

por lo tanto, el cuadrado de la velocidad v_1^2 es:

$$v_1^2 = v_1^T v_1 = 0 \quad (2.16)$$

Por otra parte, la posición angular se representa por el vector $\theta_1 = [0 \ 0 \ q_1]^T$ y la

velocidad angular por $\dot{\theta}_1 = w_1 = [0 \ 0 \ \dot{q}_1]^T$, de modo que el cuadrado de la velocidad se da como:

$$w_1^2 = w_1^T w_1 = \dot{q}_1^2 \quad (2.17)$$

Finalmente, la energía cinética $\mathcal{K}_1(q, \dot{q})$ del primer eslabón e_1 es:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}I_1 w_1^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1 0 + \frac{1}{2}I_1 \dot{q}_1^2 \\ &= \frac{1}{2}I_1 \dot{q}_1^2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ahora se calcula la energía cinética $\mathcal{K}_2(q, \dot{q})$ del eslabón e_2 , usando el mismo proceso que con el anterior. De la matriz de transformación homogénea (2.7), se obtiene la posición del centro de masa del eslabón, la cual es:

$$\begin{aligned} x_2 &= l_{c2} S_1 C_2 \\ y_2 &= l_{c2} C_1 C_2 \\ z_2 &= l_1 + l_{c2} S_2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

De acuerdo con la ecuación (2.19), el vector de velocidad v_2 del eslabón dos es:

$$v_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c2} C_1 C_2 \dot{q}_1 - l_{c2} S_1 S_2 \dot{q}_2 \\ l_{c2} S_1 C_2 \dot{q}_1 + l_{c2} C_1 S_2 \dot{q}_2 \\ l_{c2} C_2 \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

por lo tanto, el cuadrado de la velocidad v_2^2 , está dado por:

$$v_2^2 = v_2^T v_2 = l_{c2}^2 (\dot{q}_1^2 - \dot{q}_1^2 S_2^2 + \dot{q}_2^2) \quad (2.21)$$

En cuanto a la posición angular del eslabón e_2 se representa por el vector $\theta_2 = [q_2 \ 0 \ q_1]^T$ y la velocidad angular por $\dot{\theta}_2 = w_2 = [\dot{q}_2 \ 0 \ \dot{q}_1]^T$, de modo que el cuadrado de la velocidad queda:

$$w_2^2 = w_2^T w_2 = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \quad (2.22)$$

en consecuencia, la energía cinética $\mathcal{K}_2(q, \dot{q})$ del segundo eslabón e_2 es:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}I_2 w_2^2 \\ &= \frac{1}{2}m_2 l_{c2}^2 (\dot{q}_1^2 - \dot{q}_1^2 S_2^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}I_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Se repite el proceso para calcular la energía cinética $\mathcal{K}_3(q, \dot{q})$ correspondiente al tercer eslabón. Con base en la matriz de transformación (2.8), la posición del centro de masa del eslabón e_3 , está dado por:

$$\begin{aligned} x_3 &= l_2 S_1 C_2 + l_{c3} S_1 C_2 \\ y_3 &= l_2 C_1 C_2 + l_{c3} C_1 C_2 \\ z_3 &= l_1 + l_2 S_2 + l_{c3} S_2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

A partir de la ecuación (2.24), se obtiene el vector de velocidad v_3 del eslabón tres, dado por:

$$v_3 = \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 C_1 C_2 \dot{q}_1 + l_{c3} C_1 C_2 \dot{q}_1 - l_2 S_1 S_2 \dot{q}_2 - l_{c3} S_1 S_2 \dot{q}_2 \\ -l_2 S_1 C_2 \dot{q}_1 - l_{c3} S_1 C_2 \dot{q}_1 - l_2 C_1 S_2 \dot{q}_2 - l_{c3} C_1 S_2 \dot{q}_2 \\ l_2 C_2 \dot{q}_2 + l_{c3} C_2 \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

por lo tanto, el cuadrado de la velocidad v_3^2 , está dado por:

$$v_3^2 = v_3^T v_3 = (l_2 + l_{c3})^2 (\dot{q}_1^2 - \dot{q}_1^2 S_2^2 + \dot{q}_2^2) \quad (2.26)$$

Por otro lado, la posición angular del eslabón e_3 se representa por el vector $\theta_3 = [q_2 \ q_3 \ q_1]^T$ y la velocidad angular por $\dot{\theta}_3 = w_3 = [\dot{q}_2 \ \dot{q}_3 \ \dot{q}_1]^T$, de modo que el cuadrado de la velocidad queda:

$$w_3^2 = w_3^T w_3 = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 \quad (2.27)$$

entonces, la energía cinética $\mathcal{K}_3(q, \dot{q})$ del tercer eslabón e_3 es:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_3(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} I_3 w_3^2 \\ &= \frac{1}{2} m_3 (l_2 + l_{c3})^2 (\dot{q}_1^2 - \dot{q}_1^2 S_2^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Finalmente, se calcula la energía cinética $\mathcal{K}_4(q, \dot{q})$ correspondiente al cuarto y último eslabón. Con referencia en la matriz de transformación (2.9) se obtuvieron las ecuaciones (2.10), de las cuales se infiere la posición del centro de masa del eslabón e_4 , cambiando la distancia l_4 por l_{c4} , dando como resultado que:

$$\begin{aligned} x_4 &= l_2 S_1 C_2 + l_3 S_1 C_2 + l_{c4} (S_1 C_2 C_4 + C_1 C_3 S_4 + S_1 S_2 S_3 S_4) \\ y_4 &= l_2 C_1 C_2 + l_3 C_1 C_2 + l_{c4} (C_1 C_2 C_4 - S_1 C_3 S_4 + C_1 S_2 S_3 S_4) \\ z_4 &= l_1 + l_2 S_2 + l_3 S_2 - l_{c4} (-S_2 C_4 + C_2 S_3 S_4) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Considerando la ecuación (2.29), se obtiene el vector de velocidad v_4 del eslabón final, que está dado por:

$$v_4 = \begin{bmatrix} \dot{x}_4 \\ \dot{y}_4 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= (l_2 C_1 C_2 + l_3 C_1 C_2 - l_{c4}(S_1 C_3 S_4 - C_1 S_2 S_3 S_4 - C_1 C_2 C_4))\dot{q}_1 \\ &\quad - (l_2 S_1 S_2 + l_3 S_1 S_2 - l_{c4}(S_1 C_2 S_3 S_4 - S_1 S_2 C_4))\dot{q}_2 \\ &\quad - l_{c4}(C_1 S_3 S_4 - S_1 S_2 C_3 S_4)\dot{q}_3 - l_{c4}(S_1 C_2 S_4 - C_1 C_3 C_4 - S_1 S_2 S_3 C_4)\dot{q}_4 \\ \dot{y}_4 &= -(l_2 S_1 C_2 + l_3 S_1 C_2 + l_{c4}(C_1 C_3 S_4 + S_1 S_2 S_3 S_4 + S_1 C_2 C_4))\dot{q}_1 \\ &\quad - (l_2 C_1 S_2 + l_3 C_1 S_2 - l_{c4}(C_1 C_2 S_3 S_4 - C_1 S_2 C_4))\dot{q}_2 \\ &\quad + l_{c4}(S_1 S_3 S_4 - C_1 S_2 C_3 S_4)\dot{q}_3 - l_{c4}(C_1 C_2 S_4 + S_1 C_3 C_4 - C_1 S_2 S_3 C_4)\dot{q}_4 \\ \dot{z}_4 &= (l_2 C_2 + l_3 C_2 + l_{c4}(S_2 S_3 S_4 + C_2 C_4))\dot{q}_2 - l_{c4}C_2 C_3 S_4\dot{q}_3 - l_{c4}(S_2 S_4 + C_2 S_3 C_4)\dot{q}_4 \end{aligned} \quad (2.31)$$

por lo tanto, el cuadrado de la velocidad v_4^2 , está dado por:

$$\begin{aligned} v_4^2 = v_4^T v_4 &= (\dot{q}_4(l_{c4}C_4(S_1 C_3 - C_1 S_2 S_3) + l_{c4}C_1 C_2 S_4) + \dot{q}_1(l_{c4}S_4(C_1 C_3 + S_1 S_2 S_3) \\ &\quad + l_2 S_1 C_2 + l_3 S_1 C_2 + l_{c4}S_1 C_2 C_4) + \dot{q}_2(l_2 C_1 S_2 + l_3 C_1 S_2 + l_{c4}C_1 S_2 C_4 \\ &\quad - l_{c4}C_1 C_2 S_3 S_4) - \dot{q}_3 l_{c4}S_4(S_1 S_3 + C_1 S_2 C_3))^2 + (\dot{q}_2(l_2 S_1 S_2 + l_3 S_1 S_2 \\ &\quad + l_{c4}S_1 S_2 C_4 - l_{c4}S_1 C_2 S_3 S_4) - \dot{q}_1(l_2 C_1 C_2 - l_{c4}S_4(S_1 C_3 - C_1 S_2 S_3) \\ &\quad + l_3 C_1 C_2 + l_{c4}C_1 C_2 C_4) - \dot{q}_4(l_{c4}C_4(C_1 C_3 + S_1 S_2 S_3)) - l_{c4}S_1 C_2 S_4) \\ &\quad + \dot{q}_3 l_{c4}S_4(C_1 S_3 - S_1 S_2 C_3))^2 + (\dot{q}_4(l_{c4}S_2 S_4 + l_{c4}C_2 S_3 C_4) \\ &\quad - \dot{q}_2(l_2 C_2 + l_3 C_2 + l_{c4}C_2 C_4 + l_{c4}S_2 S_3 S_4) + \dot{q}_3 l_{c4}C_2 C_3 S_4)^2 \end{aligned} \quad (2.32)$$

En cuanto a la posición angular del eslabón e_4 , se representa por el vector $\theta_4 = [q_2 \ q_3 \ (q_1 + q_4)]^T$ y la velocidad angular por $\dot{\theta}_4 = w_4 = [\dot{q}_2 \ \dot{q}_3 \ (\dot{q}_1 + \dot{q}_4)]^T$, de modo que el cuadrado de la velocidad queda:

$$w_4^2 = w_4^T w_4 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_4)^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 \quad (2.33)$$

entonces, la energía cinética $\mathcal{K}_4(q, \dot{q})$ del eslabón e_4 es:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_4(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2}m_4 v_4^2 + \frac{1}{2}I_4 w_4^2 \\ &= \frac{1}{2}m_4 v_4^2 + \frac{1}{2}I_4 ((\dot{q}_1 + \dot{q}_4)^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Por lo tanto, la energía cinética total del brazo robótico, dada por la ecuación (2.12), da como resultado:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(q, \dot{q}) = & \frac{1}{2}I_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_{c2}^2(\dot{q}_1^2 - \dot{q}_1^2S_2^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}I_2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}m_3(l_2 + l_{c3})^2(\dot{q}_1^2 \\
& - \dot{q}_1^2S_2^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{1}{2}m_4((\dot{q}_4(l_{c4}C_4(S_1C_3 - C_1S_2S_3) \\
& + l_{c4}C_1C_2S_4) + \dot{q}_1(l_{c4}S_4(C_1C_3 + S_1S_2S_3) + l_2S_1C_2 + l_3S_1C_2 \\
& + l_{c4}S_1C_2C_4) + \dot{q}_2(l_2C_1S_2 + l_3C_1S_2 + l_{c4}C_1S_2C_4 - l_{c4}C_1C_2S_3S_4) \\
& - \dot{q}_3l_{c4}S_4(S_1S_3 + C_1S_2C_3))^2 + (\dot{q}_2(l_2S_1S_2 + l_3S_1S_2 + l_{c4}S_1S_2C_4 \\
& - l_{c4}S_1C_2S_3S_4) - \dot{q}_1(l_2C_1C_2 - l_{c4}S_4(S_1C_3 - C_1S_2S_3) + l_3C_1C_2 \\
& + l_{c4}C_1C_2C_4) - \dot{q}_4(l_{c4}C_4(C_1C_3 + S_1S_2S_3)) - l_{c4}S_1C_2S_4) \\
& + \dot{q}_3l_{c4}S_4(C_1S_3 - S_1S_2C_3))^2 + (\dot{q}_4(l_{c4}S_2S_4 + l_{c4}C_2S_3C_4) \\
& - \dot{q}_2(l_2C_2 + l_3C_2 + l_{c4}C_2C_4 + l_{c4}S_2S_3S_4) + \dot{q}_3l_{c4}C_2C_3S_4)^2) \\
& + \frac{1}{2}I_4((\dot{q}_1 + \dot{q}_4)^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Para completar el lagrangiano, se procede a calcular la energía potencial total del brazo robótico humanoide, por medio de la ecuación (1.17). Al igual que el cálculo de la energía cinética anterior, se desarrolla la energía potencia como la suma de sus partes, como lo muestra la ecuación (2.13). Se inicia el cálculo de la energía potencial $\mathcal{U}_1(q)$ para el primer eslabón e_1 , tal que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_1(q) &= m_1gy_1 \\
&= m_1g(0) = 0
\end{aligned} \tag{2.36}$$

La energía potencial $\mathcal{U}_2(q)$ del segundo eslabón e_2 , está dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_2(q) &= m_2gy_2 \\
&= m_1gl_{c2}C_1C_2
\end{aligned} \tag{2.37}$$

La energía potencial $\mathcal{U}_3(q)$ del tercer eslabón e_3 , dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_3(q) &= m_3gy_3 \\
&= m_3g(l_2C_1C_2 + l_{c3}C_1C_2)
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Y finalmente, la energía potencial $\mathcal{U}_4(q)$ del eslabón final e_4 , dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_4(q) &= m_4gy_4 \\
&= m_4g(l_2C_1C_2 + l_3C_1C_2 + l_{c4}(C_1C_2C_4 - S_1C_3S_4 + C_1S_2S_3S_4))
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Por lo tanto, la energía potencial total del brazo robótico, representada en la ecuación (2.13), está dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(q, \dot{q}) = & m_1 g l_{c2} C_1 C_2 + m_3 g (l_2 C_1 C_2 + l_{c3} C_1 C_2) + m_4 g (l_2 C_1 C_2 \\ & + l_3 C_1 C_2 + l_{c4} (C_1 C_2 C_4 - S_1 C_3 S_4 + C_1 S_2 S_3 S_4)) \end{aligned} \quad (2.40)$$

A partir del cálculo total de la energía cinética, ecuación 2.35 y la energía potencial, ecuación 2.40, se obtiene el lagrangiano representado por la ecuación (1.18), tal que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}) = & \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 (\dot{q}_1^2 - \dot{q}_1^2 S_2^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \\ & + \frac{1}{2} m_3 (l_2 + l_{c3})^2 (\dot{q}_1^2 - \dot{q}_1^2 S_2^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \\ & + \frac{1}{2} m_4 ((\dot{q}_4 (l_{c4} C_4 (S_1 C_3 - C_1 S_2 S_3) + l_{c4} C_1 C_2 S_4) + \dot{q}_1 (l_{c4} S_4 (C_1 C_3 \\ & + S_1 S_2 S_3) + l_2 S_1 C_2 + l_3 S_1 C_2 + l_{c4} S_1 C_2 C_4) + \dot{q}_2 (l_2 C_1 S_2 + l_3 C_1 S_2 \\ & + l_{c4} C_1 S_2 C_4 - l_{c4} C_1 C_2 S_3 S_4) - \dot{q}_3 l_{c4} S_4 (S_1 S_3 + C_1 S_2 C_3))^2 + (\dot{q}_2 (l_2 S_1 S_2 \\ & + l_3 S_1 S_2 + l_{c4} S_1 S_2 C_4 - l_{c4} S_1 C_2 S_3 S_4) - \dot{q}_1 (l_2 C_1 C_2 - l_{c4} S_4 (S_1 C_3 \\ & - C_1 S_2 S_3) + l_3 C_1 C_2 + l_{c4} C_1 C_2 C_4) - \dot{q}_4 (l_{c4} C_4 (C_1 C_3 + S_1 S_2 S_3)) \\ & - l_{c4} S_1 C_2 S_4) + \dot{q}_3 l_{c4} S_4 (C_1 S_3 - S_1 S_2 C_3))^2 + (\dot{q}_4 (l_{c4} S_2 S_4 + l_{c4} C_2 S_3 C_4) \\ & - \dot{q}_2 (l_2 C_2 + l_3 C_2 + l_{c4} C_2 C_4 + l_{c4} S_2 S_3 S_4) + \dot{q}_3 l_{c4} C_2 C_3 S_4)^2) \\ & + \frac{1}{2} I_4 ((\dot{q}_1 + \dot{q}_4)^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - m_1 g l_{c2} C_1 C_2 + m_3 g (l_2 C_1 C_2 + l_{c3} C_1 C_2) \\ & + m_4 g (l_2 C_1 C_2 + l_3 C_1 C_2 + l_{c4} (C_1 C_2 C_4 - S_1 C_3 S_4 + C_1 S_2 S_3 S_4)) \end{aligned} \quad (2.41)$$

A continuación, se desarrollan las ecuaciones de movimiento de Lagrange como se describe en la ecuación (1.19), en términos de las derivadas y derivadas parciales del Lagrangiano, dado por la ecuación (2.41), con respecto al tiempo t y a los ángulos q_1, q_2, q_3 y q_4 , respectivamente. Como resultado del tratamiento de las ecuaciones de movimiento

de Lagrange, se obtienen los toques generados por cada actuador, tal que:

$$\begin{aligned}
T_1 = & I_1\ddot{q}_1 + I_2\ddot{q}_1 + I_3\ddot{q}_1 + I_4\ddot{q}_1 + I_4\ddot{q}_4 + \ddot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 + \ddot{q}_1 l_2^2 m_3 \cos(q_2)^2 + \ddot{q}_1 l_2^2 m_4 \cos(q_2)^2 \\
& + \ddot{q}_1 l_3^2 m_4 \cos(q_2)^2 + \ddot{q}_1 l_{c2}^2 m_2 \cos(q_2)^2 + \ddot{q}_1 l_{c3}^2 m_3 \cos(q_2)^2 - \ddot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2)^2 \\
& - \ddot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_4)^2 - \ddot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \sin(q_2) + \ddot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_4)^2 \sin(q_2) \\
& + 2\ddot{q}_1 l_2 l_3 m_4 \cos(q_2)^2 + 2\ddot{q}_1 l_2 l_{c3} m_3 \cos(q_2)^2 - g l_2 m_3 \cos(q_2) \sin(q_1) \\
& - g l_2 m_4 \cos(q_2) \sin(q_1) - g l_3 m_4 \cos(q_2) \sin(q_1) + g l_{c2} m_2 \cos(q_2) \sin(q_1) \\
& - g l_{c3} m_3 \cos(q_2) \sin(q_1) + \ddot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2)^2 \cos(q_3)^2 + 2\ddot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2)^2 \cos(q_4)^2 \\
& - \dot{q}_1 \dot{q}_2 l_2^2 m_3 \sin(2q_2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 l_2^2 m_4 \sin(2q_2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 l_3^2 m_4 \sin(2q_2) \\
& - \dot{q}_1 \dot{q}_2 l_{c2}^2 m_2 \sin(2q_2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 l_{c3}^2 m_3 \sin(2q_2) + \dot{q}_1 \dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_2) \\
& + \dot{q}_1 \dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_4) + \ddot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) + 2\ddot{q}_1 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2)^2 \cos(q_4) \\
& + 2\ddot{q}_1 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2)^2 \cos(q_4) - 2\dot{q}_2 \dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \sin(q_2) \\
& - g l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_1) - g l_{c4} m_4 \cos(q_1) \cos(q_3) \sin(q_4) \\
& - 2\dot{q}_2 \dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3)^2
\end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}
T_2 = & I_2\ddot{q}_2 + I_3\ddot{q}_2 + I_4\ddot{q}_2 + \ddot{q}_2 l_2^2 m_3 + \ddot{q}_2 l_2^2 m_4 + \ddot{q}_2 l_3^2 m_4 + \ddot{q}_2 l_{c2}^2 m_2 + \ddot{q}_2 l_{c3}^2 m_3 + \ddot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \\
& + 2\ddot{q}_2 l_2 l_3 m_4 + 2\ddot{q}_2 l_2 l_{c3} m_3 - \ddot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3)^2 + (\dot{q}_1^2 l_2^2 m_3 \sin(2q_2))/2 \\
& + (\dot{q}_1^2 l_2^2 m_4 \sin(2q_2))/2 + (\dot{q}_1^2 l_3^2 m_4 \sin(2q_2))/2 + (\dot{q}_1^2 l_{c2}^2 m_2 \sin(2q_2))/2 \\
& + (\dot{q}_1^2 l_{c3}^2 m_3 \sin(2q_2))/2 - (\dot{q}_1^2 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_2))/2 - \ddot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \sin(q_3) \\
& + 2\dot{q}_1 \dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) - g l_2 m_3 \cos(q_1) \sin(q_2) - g l_2 m_4 \cos(q_1) \sin(q_2) \\
& - g l_3 m_4 \cos(q_1) \sin(q_2) + g l_{c2} m_2 \cos(q_1) \sin(q_2) - g l_{c3} m_3 \cos(q_1) \sin(q_2) \\
& + \ddot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3)^2 \cos(q_4)^2 + \dot{q}_2 \dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_3) + \dot{q}_1^2 l_2 l_3 m_4 \sin(2q_2) \\
& + \dot{q}_1^2 l_2 l_{c3} m_3 \sin(2q_2) + 2\ddot{q}_2 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_4) + 2\ddot{q}_2 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_4) \\
& - g l_{c4} m_4 \cos(q_1) \cos(q_4) \sin(q_2) + \dot{q}_1^2 l_2 l_{c4} m_4 \sin(q_3) \sin(q_4) \\
& + \dot{q}_1^2 l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_3) \sin(q_4) + \dot{q}_3^2 l_2 l_{c4} m_4 \sin(q_3) \sin(q_4) + \dot{q}_3^2 l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_3) \sin(q_4) \\
& + \dot{q}_4^2 l_2 l_{c4} m_4 \sin(q_3) \sin(q_4) + \dot{q}_4^2 l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_3) \sin(q_4) \\
& + \dot{q}_1^2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3)^2 \sin(q_2) + 2\dot{q}_1^2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_4)^2 \sin(q_2) \\
& - 2\dot{q}_2 \dot{q}_4 l_2 l_{c4} m_4 \sin(q_4) - 2\dot{q}_2 \dot{q}_4 l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_4) - 2\dot{q}_1 \dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3)^2 \\
& - 2\dot{q}_1 \dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_4)^2 - 2\dot{q}_3 \dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \cos(q_4)^2 \\
& - \ddot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_3) - \ddot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_4) \\
& - \ddot{q}_3 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \sin(q_4) - \ddot{q}_3 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \sin(q_4) - \ddot{q}_4 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_4) \sin(q_3) \\
& - \ddot{q}_4 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_4) \sin(q_3) + \dot{q}_1^2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_4) \sin(q_3) \sin(q_4)
\end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned}
& + \dot{q}_3^2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_4) \sin(q_3) \sin(q_4) + g l_{c4} m_4 \cos(q_1) \cos(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) \\
& - 2 \dot{q}_3 \dot{q}_4 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \cos(q_4) - 2 \dot{q}_3 \dot{q}_4 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \cos(q_4) \\
& - 2 \dot{q}_1^2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2)^2 \cos(q_4) \sin(q_3) \sin(q_4) + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \cos(q_4)^2 \sin(q_2) \\
& - 2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \cos(q_4)^2 \sin(q_3) - 2 \dot{q}_2 \dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3)^2 \cos(q_4) \sin(q_4) \\
& - 2 \dot{q}_1^2 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2)^2 \sin(q_3) \sin(q_4) - 2 \dot{q}_1^2 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2)^2 \sin(q_3) \sin(q_4) \\
& + \ddot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_4) - \dot{q}_1^2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3)^2 \cos(q_4)^2 \sin(q_2) \\
& + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3)^2 \cos(q_4)^2 + \ddot{q}_1 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4) \\
& + \ddot{q}_1 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4) + \ddot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4)^2 \sin(q_3) \\
& + 2 \dot{q}_1^2 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_2) + 2 \dot{q}_1^2 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_2) \\
& - 2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 l_2 l_{c4} m_4 \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) - 2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) \\
& - 2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_4 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2) \\
& + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_4 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2) \\
& - 2 \dot{q}_1 \dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_3) \sin(q_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_3 = & I_3 \ddot{q}_3 + I_4 \ddot{q}_3 + (\ddot{q}_3 l_{c4}^2 m_4)/2 - (\ddot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_4))/2 + (\dot{q}_1^2 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_3))/8 \\
& - (\dot{q}_2^2 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_3))/4 - (\ddot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \sin(q_2))/2 + (\ddot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_4) \sin(q_2))/2 \\
& - (\ddot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_4) \cos(q_3))/2 - (\dot{q}_1 \dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2))/2 + \dot{q}_2 \dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \\
& + \dot{q}_3 \dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_4) + (\dot{q}_1^2 l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_2) \sin(2q_3))/8 \\
& - (\dot{q}_1^2 l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_4) \sin(2q_3))/8 + (\dot{q}_2^2 l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_4) \sin(2q_3))/4 \\
& - (\dot{q}_1^2 l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_2) \cos(2q_4) \sin(2q_3))/8 + \dot{q}_1 \dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \sin(q_3) \\
& + g l_{c4} m_4 \sin(q_1) \sin(q_3) \sin(q_4) + (\dot{q}_1 \dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_3) \cos(q_2))/2 \\
& + (\dot{q}_1 \dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_4) \cos(q_2))/2 - \dot{q}_2 \dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_4) \cos(q_3) \\
& - \dot{q}_1 \dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_4) \sin(q_2) - (\dot{q}_1^2 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_2) \sin(2q_4) \cos(q_3))/4 \\
& - \ddot{q}_2 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \sin(q_4) - \ddot{q}_2 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \sin(q_4) \\
& - (\ddot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_4) \cos(q_2) \sin(q_3))/2 + g l_{c4} m_4 \cos(q_1) \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4) \\
& - \dot{q}_1 \dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_4) \cos(q_2) \sin(q_3) - (\dot{q}_1^2 l_2 l_{c4} m_4 \sin(2q_2) \cos(q_3) \sin(q_4))/2 \\
& - (\dot{q}_1^2 l_3 l_{c4} m_4 \sin(2q_2) \cos(q_3) \sin(q_4))/2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_4) \sin(q_2) \sin(q_3) \\
& - (\dot{q}_1 \dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_3) \cos(2q_4) \cos(q_2))/2 - \ddot{q}_1 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) \\
& - \ddot{q}_1 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 l_2 l_{c4} m_4 \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) \\
& + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4)
\end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}
T_4 = & I_4\ddot{q}_1 + I_4\ddot{q}_4 + \ddot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 - (\dot{q}_1^2 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_4))/2 - (\dot{q}_3^2 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_4))/2 \\
& - \ddot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \sin(q_3) - 2\dot{q}_2 \dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) + \ddot{q}_2 l_2 l_{c4} m_4 \sin(q_4) + \ddot{q}_2 l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_4) \\
& + \ddot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) - 2\dot{q}_1 \dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \sin(q_3) \\
& - g l_{c4} m_4 \cos(q_1) \cos(q_2) \sin(q_4) - g l_{c4} m_4 \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_1) \\
& + 2\dot{q}_1^2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2)^2 \cos(q_4) \sin(q_4) + \dot{q}_2^2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3)^2 \cos(q_4) \sin(q_4) \\
& + 2\dot{q}_2 \dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \cos(q_4)^2 + \dot{q}_1^2 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2)^2 \sin(q_4) \\
& + \dot{q}_1^2 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2)^2 \sin(q_4) - \ddot{q}_2 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_4) \sin(q_3) - \ddot{q}_2 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_4) \sin(q_3) \\
& + \dot{q}_1^2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \sin(q_2) \sin(q_3) + g l_{c4} m_4 \cos(q_1) \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_3) \\
& - 2\dot{q}_1^2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_4)^2 \sin(q_2) \sin(q_3) - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \cos(q_4)^2 \sin(q_2) \\
& + 2\dot{q}_1 \dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_4)^2 \sin(q_3) - \dot{q}_1^2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2)^2 \cos(q_3)^2 \cos(q_4) \sin(q_4) \\
& + \ddot{q}_1 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) + \ddot{q}_1 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \\
& + 2\dot{q}_1 \dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_4) - \dot{q}_1^2 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_3) \\
& - \dot{q}_1^2 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_3) - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2) \\
& - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2) + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_3) \sin(q_4)
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Reescribiendo la dinámica del brazo robótico humanoide a su forma compacta (1.26), el resultado es:

$$M(q)\ddot{q} + \mathcal{C}(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \tag{2.46}$$

donde

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) & M_{13}(q) & M_{14}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) & M_{23}(q) & M_{24}(q) \\ M_{31}(q) & M_{32}(q) & M_{33}(q) & M_{34}(q) \\ M_{41}(q) & M_{42}(q) & M_{43}(q) & M_{44}(q) \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

$$\mathcal{C}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) & C_{13}(q, \dot{q}) & C_{14}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) & C_{23}(q, \dot{q}) & C_{24}(q, \dot{q}) \\ C_{31}(q, \dot{q}) & C_{32}(q, \dot{q}) & C_{33}(q, \dot{q}) & C_{34}(q, \dot{q}) \\ C_{41}(q, \dot{q}) & C_{42}(q, \dot{q}) & C_{43}(q, \dot{q}) & C_{44}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \\ g_3(q) \\ g_4(q) \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Los términos que componen a las matrices (2.47), (2.48) y, al vector, (2.49) se presentan en el apéndice D.

El modelo dinámico (2.46) puede verse como un sistema con vector de entrada τ y, con salidas, los vectores q , $\dot{q}$ y $\ddot{q}$, tal como se observa en la Figura 2.8.



Figura 2.8: Representación entrada-salida del modelo dinámico del BRHI.

2.2.4. Simulación numérica en lazo abierto

El modelo dinámico obtenido es validado mediante una simulación numérica en lazo abierto, en la cual, las fuerzas que intervienen dentro del modelo matemático deben llevar al sistema a su punto de equilibrio. En el diagrama de la Figura 2.9, está contenida la dinámica que se obtuvieron de los cálculos.

Se realizó la simulación en lazo abierto del modelo dinámico, en la figura 2.9 se muestra el diagrama a bloques de esta simulación, en la que se observa que las entradas son 0.

En el caso de la simulación del modelo dinámico se otorgaron valores iniciales a las posiciones angulares de cada articulación esperando que el sistema tienda a su punto de equilibrio, donde los ángulos tienen valor igual a 0. Únicamente el ángulo q_3 , debido a la

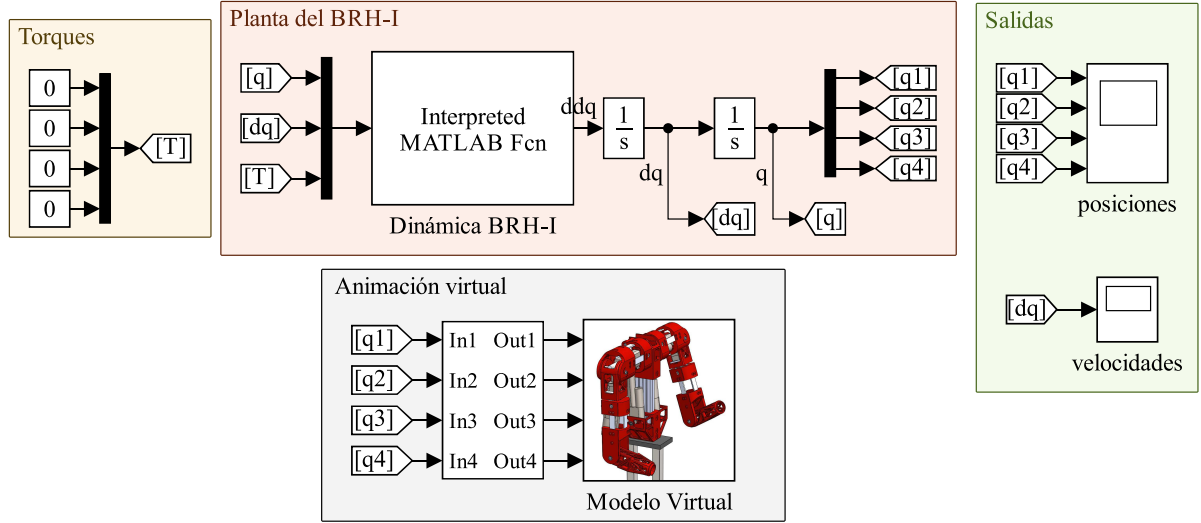


Figura 2.9: Diagrama de bloques de la simulación en lazo abierto de la dinámica del Robot de 4 g.d.l.

dirección de su eje de rotación, no necesariamente debe tender a 0. los valores iniciales son:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi/2 \\ \pi/4 \\ -\pi/8 \\ \pi/3 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

En las gráficas de las posiciones angulares, mostradas en la figura 2.10, se puede observar el comportamiento de los ángulos y como cada uno de ellos se aproxima a 0. De esta manera, se puede concluir que el modelo dinámico es correcto.

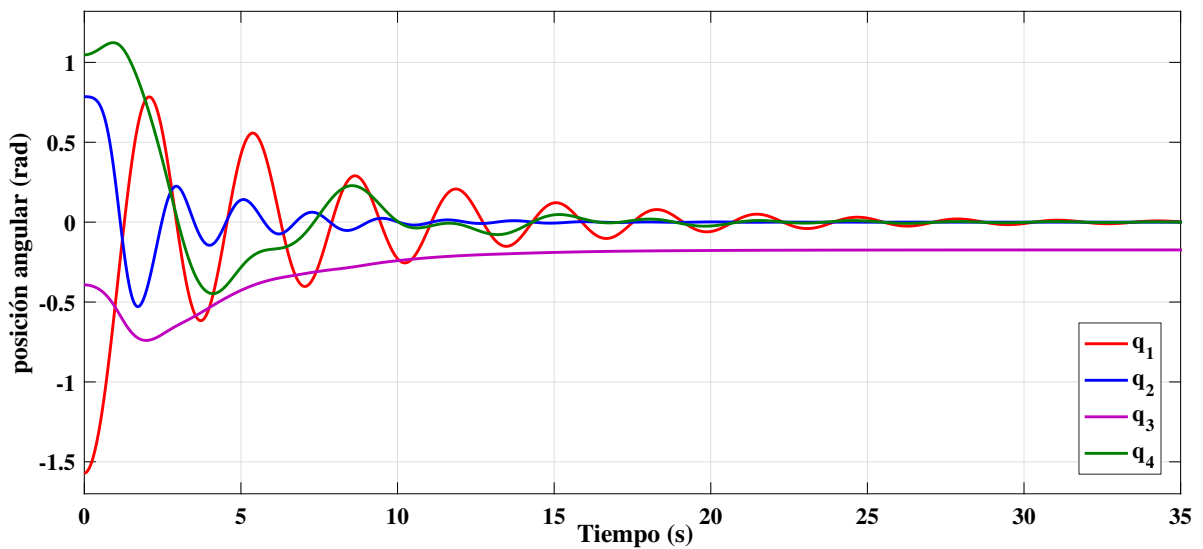


Figura 2.10: Gráficas de coordenadas del efector final.

2.3. Modelo dinámico de los actuadores

En un sistema robótico real, el par inducido representado por el vector τ es suministrado por un actuador que típicamente es electromecánico, neumático o hidráulico. Estos actuadores tienen su propia dinámica, la cual, describe la transformación de la entrada con respecto al par de salida del actuador [22]. En el caso particular del sistema robótico utilizado en este trabajo, todos los actuadores son electromecánicos, específicamente son motores de corriente continua. Este tipo de motores pueden modelarse mediante ecuaciones diferenciales de segundo orden, de manera que, se relaciona el voltaje de entrada V con el par de salida del motor. El modelo dinámico se presenta con mayor detalle en el apéndice E, de donde se extrae la ecuación (E.6) que representa un modelo dinámico simplificado, considerando $L \approx 0$ y $B \approx 0$, tal que:

$$J\dot{\omega} = \frac{K_m}{R_a}V - \frac{K_m^2}{R_a}\omega \quad (2.52)$$

El modelo dinámico de la ecuación (2.52) relaciona el voltaje V aplicado a la armadura del motor con el torque aplicado a la carga, en términos de su posición angular, velocidad y aceleración. Aplicando una transformación se puede representar este modelo dinámico en la forma de función de transferencia como en la ecuación (E.11) en el apéndice E.

$$G(s) = \frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{\frac{K_{sm}}{T_s}}{\frac{1}{T_s}s + 1} \quad (2.53)$$

No obstante, debido al desconocimiento de los parámetros que componen la ecuación (2.52), se obtiene el modelo aproximando una función de transferencia de primer orden a la respuesta de salida, dando como resultado una función de la forma:

$$G(s) = \frac{K_p}{T_p s + 1} \quad (2.54)$$

si se igualan las funciones (2.53) y (2.54), se obtiene que:

$$K_{sm} = \frac{K_p}{T_p} \quad (2.55)$$

$$T_s = \frac{1}{T_p} \quad (2.56)$$

las ecuaciones (2.55) y (2.56) sirven para obtener los parámetros del motor, de esta manera se obtiene la caracterización de los actuadores.

2.3.1. Caracterización de los actuadores

Para completar el modelo dinámico, se caracterizan y modelan los actuadores que integran y operan el robot. En el caso del presente trabajo, la estructura robótica humanoide propuesta se integra por actuadores tanto lineales como rotacionales, por lo tanto, se necesita obtener un modelo dinámico de cada tipo de actuador. Debido a que ambos tipos de actuadores son sistemas cerrados y no es posible conocer los parámetros de diseño, se caracterizan a partir de la respuesta a la entrada, siendo necesario algún sensor o sistema de medición de la variable deseada. Después de obtener la respuesta a la entrada, esta se representa como un sistema de primer orden con el objetivo de obtener su función de transferencia y, a partir de esta última, deducir la dinámica correspondiente.

2.3.2. Actuadores lineales

La estructura cuenta con dos diferentes modelos de actuadores lineales de la marca Firgelli, un modelo de actuador con distancia de carrera de 4 plg. que se llamara “AL4” y el otro modelo con distancia de carrera de 2 plg. al que se llamara “AL2”.

Para caracterizar los actuadores lineales se utilizó el sistema de captura de movimiento, del laboratorio de control avanzado, llamado OptiTrack®; en conjunto con MATLAB®. En primera instancia se calibran las cámaras del OptiTrack. Después, se crea un diagrama en MATLAB/Simulink usando los bloques de OptiTrack integrados para adquisición de señales. Finalmente se realizó una estructura de soporte sencilla para detener los actuadores y hacer la adquisición de los datos como se observa en la figura 2.11. Mediante el sistema OptiTrack se mide la posición que recorre el vástago del actuador lineal y esta posición es obtenida por el programa en Simulink en tiempo real. Por medio de un bloque algebraico dentro de Simulink se deriva la posición medida, con la finalidad de obtener la velocidad del sistema actuador lineal

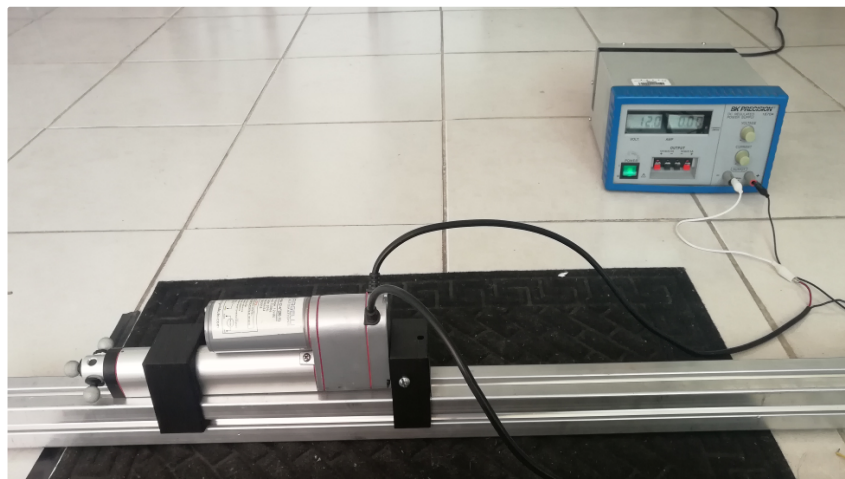


Figura 2.11: Obtención de los parámetros usando el sistema OptiTrack.

Las gráficas de la posición y la velocidad del AL4 se presentan en la figura 2.12, respectivamente.

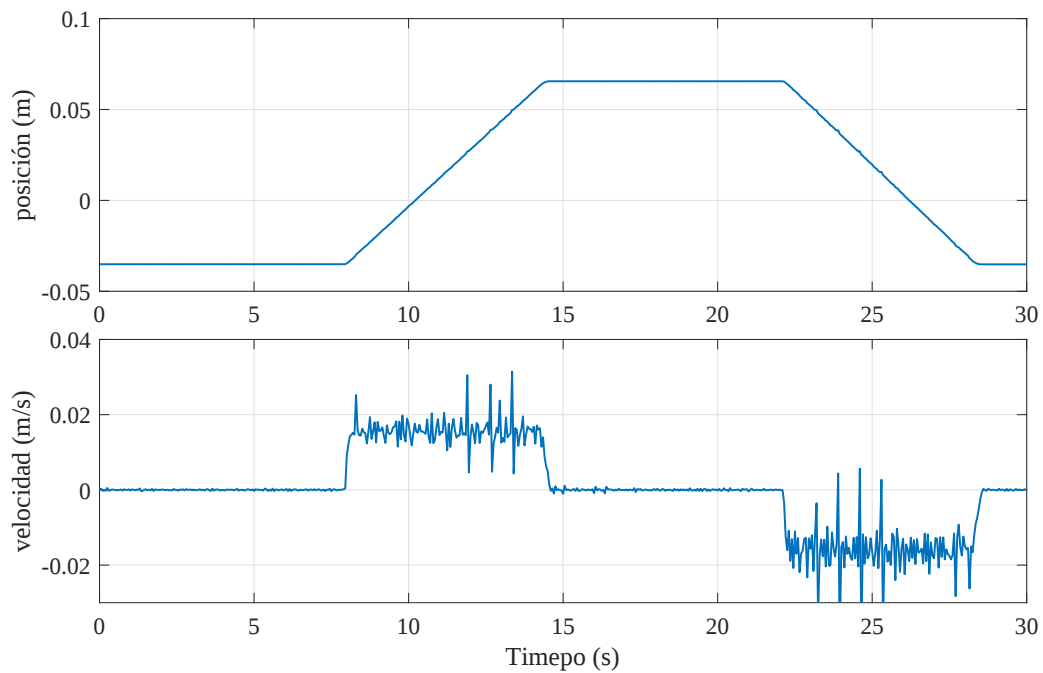


Figura 2.12: Gráficas de posición y velocidad del actuador lineal.

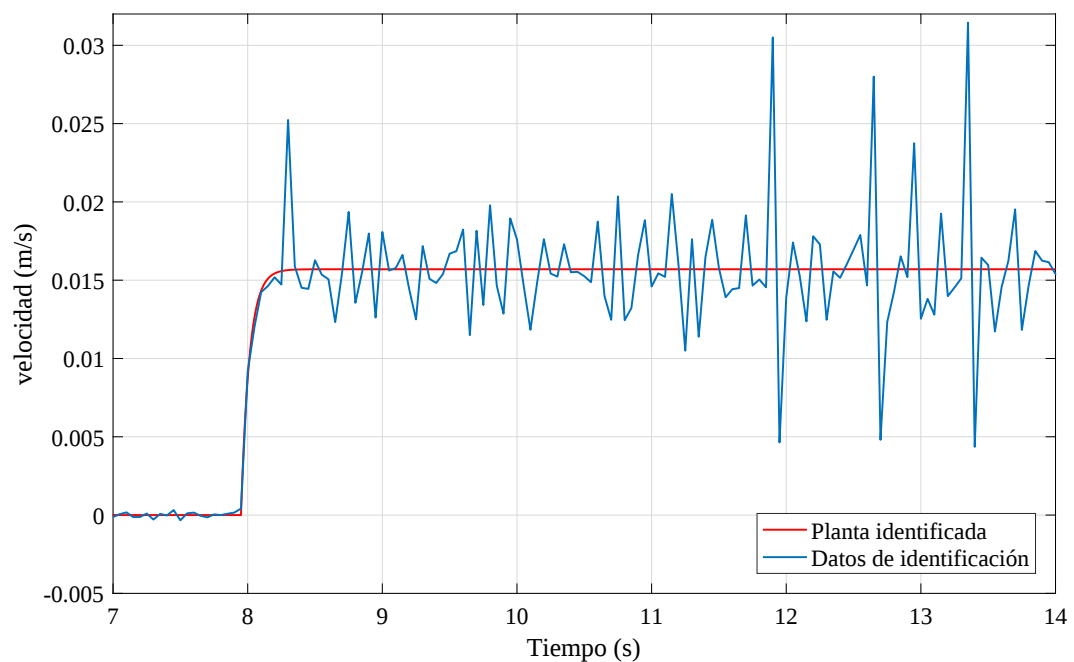


Figura 2.13: Gráficas de identificación de la planta del actuador AL4.

Utilizando el Toolbox “System identification” de MATLAB, se identifica el modelo del actuador lineal como una aproximación a un sistema de primer orden. Empleando

como datos de identificación o datos de entrada, la respuesta en velocidad del actuador lineal, se obtiene la gráfica de la planta identificada que representa la aproximación a un sistema de primer orden. En la Figura 2.13 se pueden observar tanto la gráfica de los datos de identificación, correspondiente a la respuesta en velocidad, como la planta identificada.

El sistema de primer orden obtenido para AL4, tiene una ganancia $K_p = 1.3082 \times 10^{-3}$ y un tiempo $T_p = 0.061435$, de tal modo que la función de transferencia de primer orden de la forma (2.53), queda como:

$$G(s) = \frac{1.3082 \times 10^{-3}}{0.061435s + 1} \quad (2.57)$$

si se sustituyen los valores obtenidos del sistema de primer orden (2.57), en las ecuaciones (2.55) y (2.56), se tiene que:

$$K_{sm} = \frac{1.3082 \times 10^{-3}}{0.061435} = 0.02129 \quad (2.58)$$

$$T_s = \frac{1}{0.061435} = 16.2773 \quad (2.59)$$

Sean las equivalencias de K_{sm} y T_s , de la dinámica del motor DC, como siguen

$$K_{sm} = \frac{K_m}{JR_a} = 0.02129 \quad (2.60)$$

$$T_s = \frac{K_m^2}{JR_a} = 16.2773 \quad (2.61)$$

y dado que el valor de la resistencia de armadura $R_a = 1.8\Omega$, entonces:

$$K_{sm} = \frac{K_m}{J} = 0.02129(1.8) = 0.038322 \quad (2.62)$$

$$T_s = \frac{K_m^2}{J} = 16.2773(1.8) = 29.2992 \quad (2.63)$$

de tal modo que es posible conocer los demás parámetros mediante despejes. De (2.62) se tiene que

$$K_m = 0.038322J \quad (2.64)$$

se sustituye (2.64) en (2.63), tal que:

$$\frac{K_m^2}{J} = \frac{(0.038322J)^2}{J} = \frac{0.001469J^2}{J} = 29.2992 \quad (2.65)$$

lo que da como resultado que

$$J = \frac{29.2992}{0.001469} = 19944.9966 \quad (2.66)$$

el valor obtenido de J se sustituye en (2.64), tal que:

$$K_m = 0.038322(19944.9966) = 764.3321 \quad (2.67)$$

Tanto los valores de la función de transferencia (2.57) como los que se dedujeron del modelo dinámico, son utilizados para realizar una simulación en lazo abierto como se muestra en la Figura 2.14. La entrada en la simulación es un escalón unitario con amplitud de 12 volts que se aplica en el segundo 5, después se aplica un escalón de -12 volts en el segundo 15 para dejar la entrada en 0. La salida de la función de transferencia es la velocidad por lo que se integra una vez para sacar la posición, por el contrario, en el caso del modelo dinámico la salida es la aceleración, por lo cual, al integrar una vez se obtiene la velocidad y al volver a integrar se obtiene la posición.

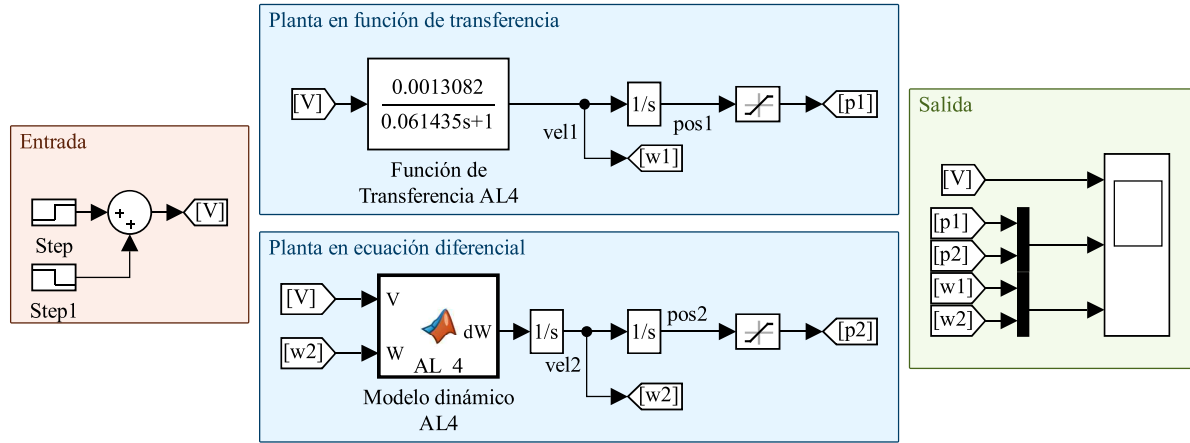


Figura 2.14: Simulación de la función de transferencia y modelo dinámico del actuador lineal AL4.

Los resultados de la simulación de la planta en función de transferencia y el modelo dinámico de la planta, fueron comparados en la gráfica de la figura 2.15, de esta manera se verifica el modelo dinámico obtenido a partir de la función de transferencia. También, se ratifico que cumpliera con los parámetros que el fabricante proporciona en su hoja de datos, como velocidad, distancia y tiempo de recorrido del vástago. En la Tabla 2.4 , se recopilan los resultados de los parámetros antes mencionados junto con los proporcionados por el proveedor, que se encuentran en el apéndice A.

De igual manera, como se realizó para determinar la dinámica del AL4, se repite el mismo proceso para aplicarlo al el AL2, a partir de aproximar una función de transferencia de primer orden equivalente a los datos de respuesta del sistema. Las gráficas de las posición y velocidad adquiridas mediante el sistema OptiTrack en unión con MATLAB/Simulink del AL2 se presentan en la figura 2.16, respectivamente.

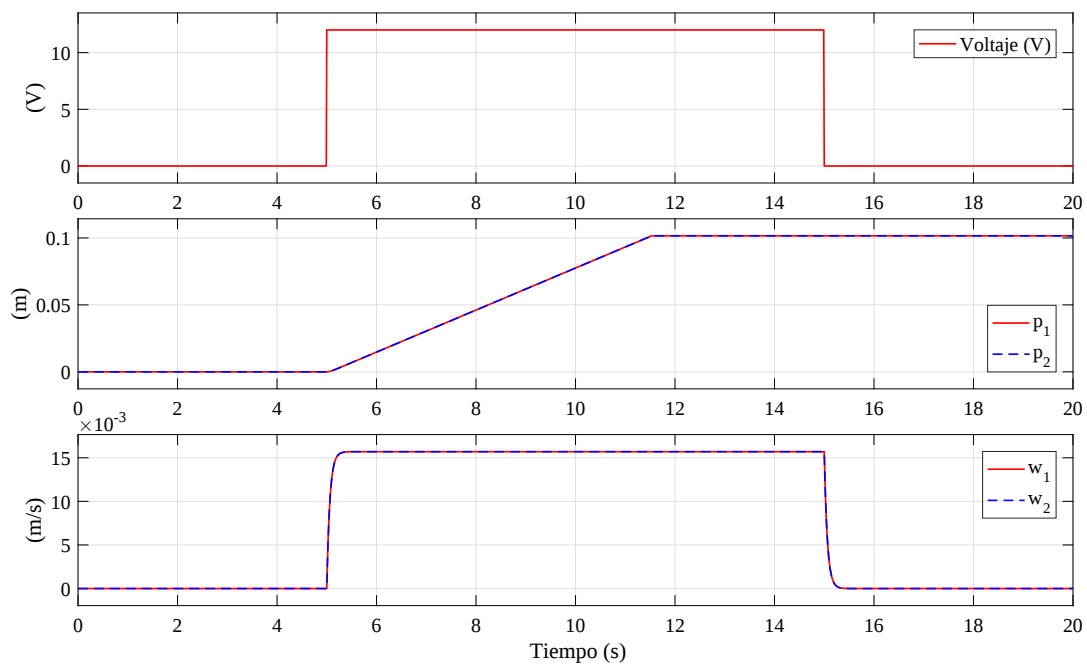


Figura 2.15: Gráficas de comparación de la posición y velocidad entre la función de transferencia y el modelo dinámico del AL4.

Tabla 2.4: Comparación de parámetros de la hoja de datos del proveedor y el modelo aproximando del actuador AL4

Parámetros	Hoja de datos	Modelo dinámico
<i>longitud</i>	0.1016 m	0.10067 m
<i>velocidad</i>	0.0127 m/s	0.0157 m/s
<i>tiempo de recorrido</i>	8 s	6.6 s

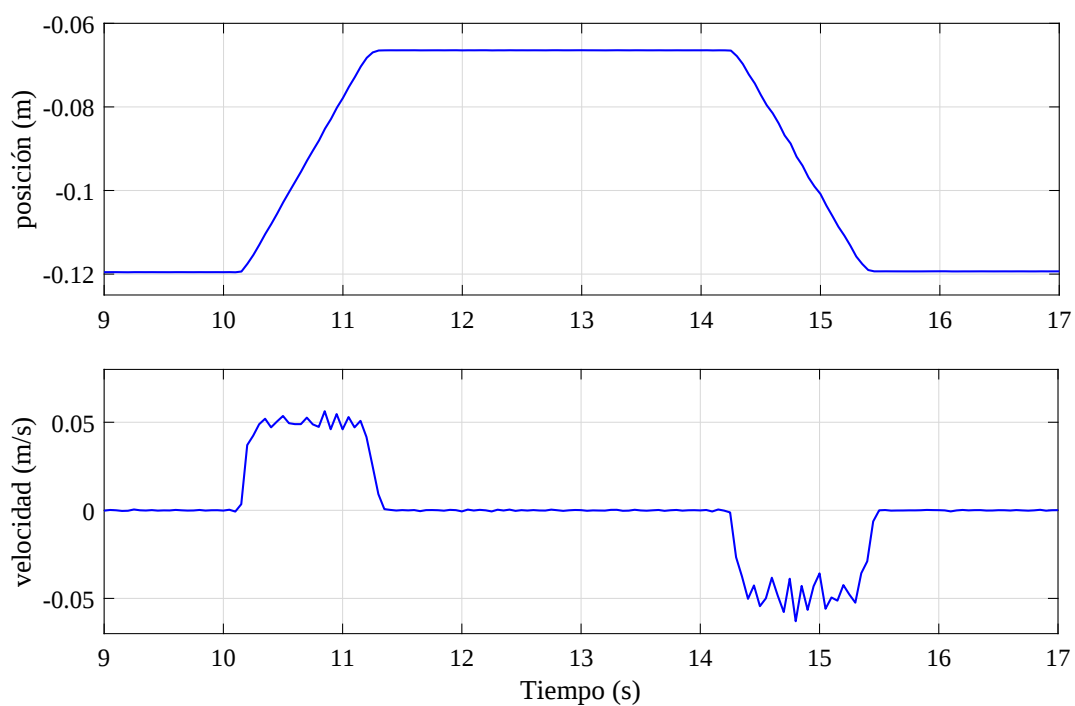


Figura 2.16: Gráficas de posición y velocidad del actuador AL2.

Luego, con la ayuda del Toolbox “System identification”, se identifica el modelo del actuador lineal a partir de los datos de la respuesta en velocidad del actuador lineal. En la Figura 2.17 se presenta la gráfica de los datos de identificación y la planta identificada.

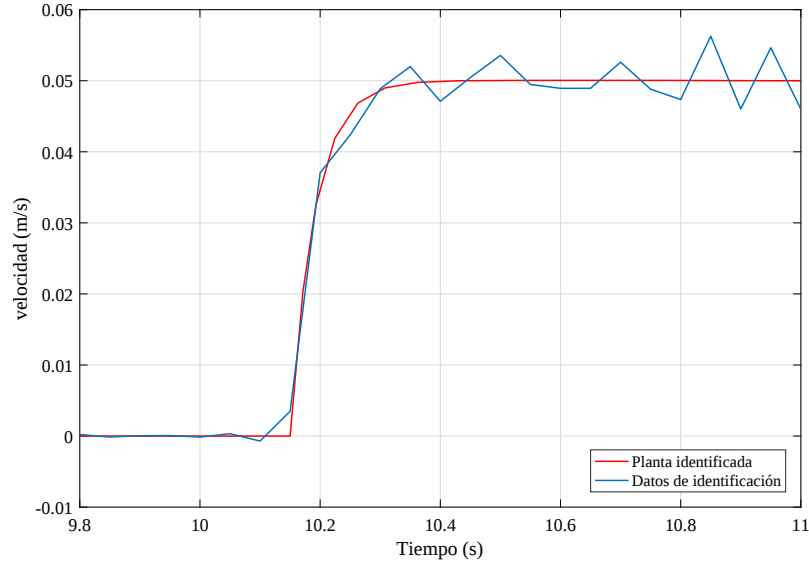


Figura 2.17: Gráficas de identificación de la planta del actuador AL2.

El sistema de primer orden obtenido para AL2, se representa en función de transferencia de primer orden de la forma (2.53), con ganancia $K_p = 4.1723 \times 10^{-3}$ y tiempo $T_p = 0.041028$, tal que:

$$G(s) = \frac{4.1723 \times 10^{-3}}{0.041028s + 1} \quad (2.68)$$

por consecuencia

$$K_{sm} = \frac{4.1723 \times 10^{-3}}{0.041028} = 0.1017 \quad (2.69)$$

$$T_s = \frac{1}{0.041028} = 24.3736 \quad (2.70)$$

Sean el valor de la resistencia de armadura $R_a = 1.8\Omega$, igual que en el AL4, entonces:

$$K_{sm} = \frac{K_m}{J} = 0.1017(1.8) = 0.18306 \quad (2.71)$$

$$T_s = \frac{K_m^2}{J} = 24.3736(1.8) = 43.87248 \quad (2.72)$$

Finalmente, realizando los mismo despejes que con el AL4, se precisan los parámetros desconocidos del AL2, los cuales son:

$$J = 1309.6262 \quad (2.73)$$

y

$$K_m = 239.7402 \quad (2.74)$$

Se realiza la simulación comparativa de la función de transferencia (2.68) y del modelo dinámico con ecuación de la forma (2.52), con los parámetros (2.73) y (2.74), como se muestra en la Figura 2.18. Se ingresa una entrada igual que en la simulación del AL4 , un escalón unitario con amplitud de 12 volts que se aplica en el segundo 5 y un escalón de -12 volts al segundo 15 para cancelar el primer escalón.

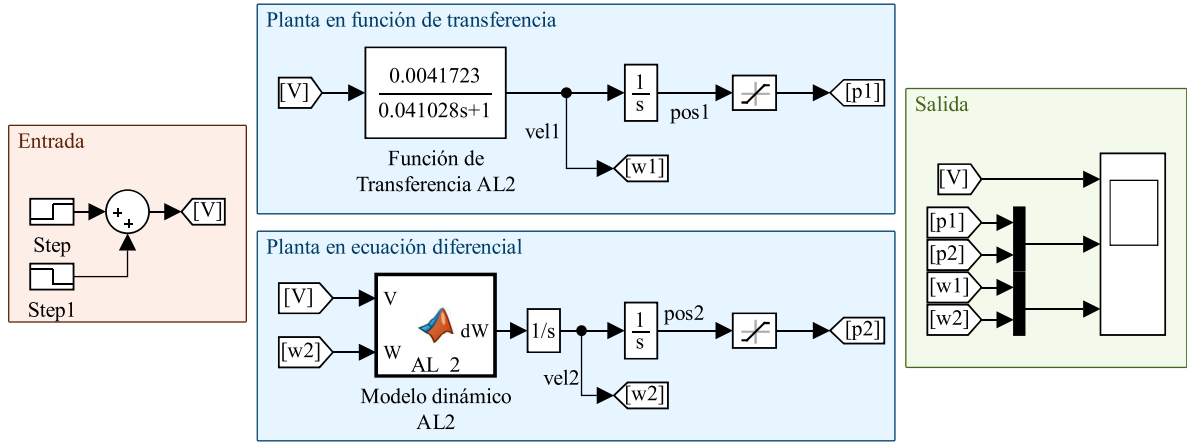


Figura 2.18: Simulación de la función de transferencia y modelo dinámico del actuador lineal AL4.

El resultado de la simulación de los modelos del AL2, se presentan en la Figura 2.19, en la que se aprecia una correspondencia de ambos modelos, en conclusión los parámetros calculados (2.73) y (2.74) son correctos, de esta manera se verifica el modelo dinámico obtenido a partir de la función de transferencia. Al igual que con el AL4, se ratifico que cumpliera con los parámetros proporcionados por el fabricante, tales como: velocidad, distancia y tiempo de recorrido del vástago. Estos parámetros, resultado de la caracterización, se recopilan en la Tabla 2.5, junto con los proporcionados por el proveedor, que se encuentran en el apéndice A.

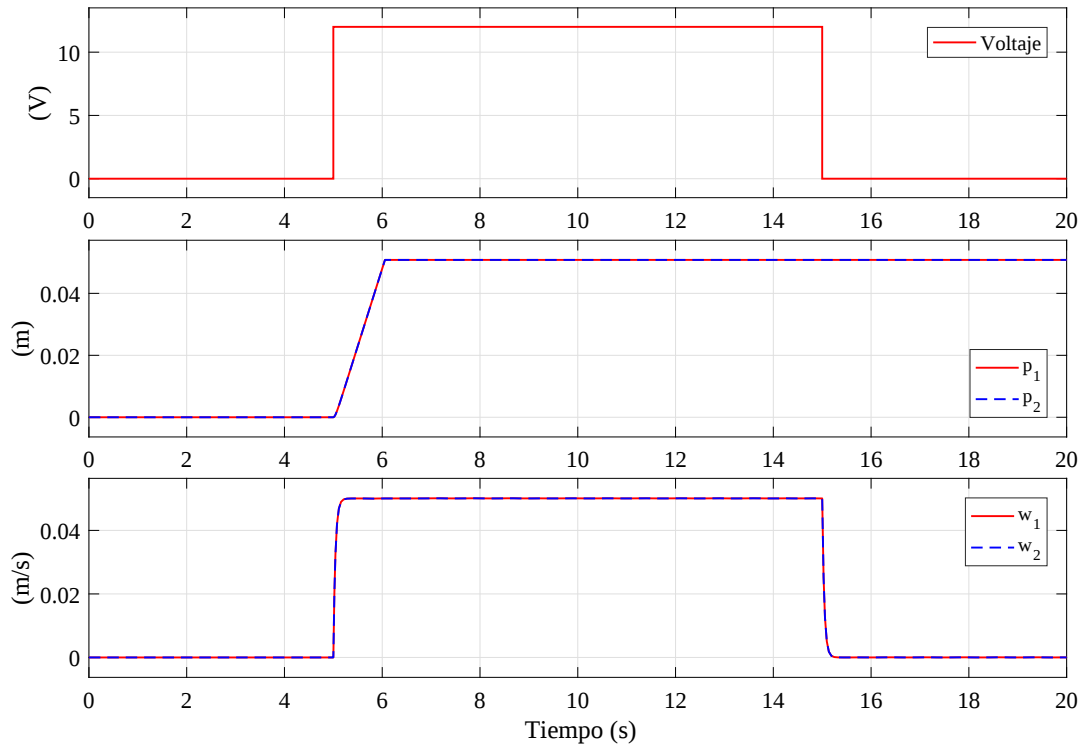


Figura 2.19: Gráficas de comparación de la posición y velocidad entre la función de transferencia y el modelo dinámico del AL2.

Tabla 2.5: Comparación de parámetros de la hoja de datos del proveedor y el modelo aproximando del actuador AL2

Parámetros	Hoja de datos	Modelo dinámico
<i>longitud</i>	0.0508 m	0.053 m
<i>velocidad</i>	0.0508 m/s	0.050 m/s
<i>tiempo de recorrido</i>	1 s	1.2 s

2.3.3. Conversión de movimientos y fuerzas

El emplear actuadores lineales para el movimiento de las articulaciones robóticas, implica una conversión de movimientos y fuerzas. Esto debido a que los actuadores lineales entregan desplazamientos y fuerzas lineales y, por otra parte, dada la naturaleza de las articulaciones de un brazo robótico antropomórfico, se requieren las posiciones angulares y los torques. Por tal motivo, es necesario obtener una función que describa este cambio de movimiento, en relación a los parámetros estructurales del BRHI y de la longitud de recorrido de los actuadores lineales correspondientes a cada articulación.

Para el análisis de los movimientos se utiliza el diagrama de la Figura 2.20, donde d_j es la distancia del centro de giro de la articulación a la base del actuador; c_j es la longitud

del actuador, la cual es variable y se mide desde la base del actuador al punto de palanca de giro; r_j es el radio de giro, que se mide del punto de palanca al centro de giro; ψ_j es el ángulo entre c_j y d_j ; y φ_j es el ángulo entre c_j y r_j ; para $j = 1, 2, 4$ según la articulación correspondiente.

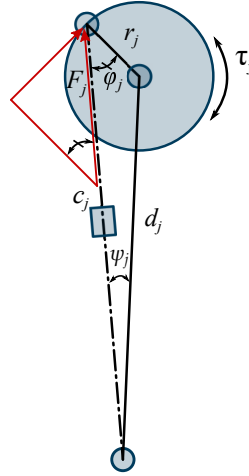


Figura 2.20: Diagrama de conversión de movimientos lineales a rotacionales.

De la Figura 2.20 se deduce una función matemática para determinar el cambio del ángulo φ_j en relación con la variación de la longitud del vástago c_j . Esta función está dada por:

$$\varphi_j = \cos^{-1} \left(\frac{c_j^2 + r_j^2 - d_j^2}{2c_j r_j} \right) \quad (2.75)$$

En cuanto a la conversión de las fuerzas suministradas por los actuadores lineales a torques, en la misma Figura 2.20 se representa la fuerza generada por el actuador F_j y el torque resultante τ_j , dando como resultado la relación:

$$\tau_j = F_j r_j \sin(\varphi_j) \quad (2.76)$$

Los valores de los parámetros en (2.75) están dados en la Tabla 2.6, organizados por actuador. Estos valores se obtienen del diseño de la estructura robótica y de los datos de los actuadores otorgados por el proveedor. En la misma tabla se muestran los resultados del ángulo φ_j para la longitud de carrera mínima y máxima c_j , de cada actuador y los resultados de los torques τ_j máximos, que se presenta cuando el ángulo $\varphi_j = 0$.

Tabla 2.6: Parámetros de conversión de movimientos lineales a rotacionales

Actuador	r_j	d_j	c_j		φ_j		F_j	τ_j
			min.	max.	min.	max.		max.
1	0.060 m	0.30465 m	0.25146 m	0.35306 m	149.42° o 0.83 π rad	33.23° o 0.185 π rad	667.23 N	40.0338 Nm
2	0.033 m	0.22172 m	0.20066 m	0.25146 m	126.09° o 0.70 π rad	24.08° o 0.133 π rad	155.69 N	5.1408 Nm
4	0.030 m	0.22866 m	0.20066 m	0.25146 m	157.47° o 0.87 π rad	38.26° o 0.21 π rad	155.69 N	4.6707 Nm

En la Figura 2.21 se muestra un diagrama a bloques de los actuadores junto con la conversión de lineal a rotacional de los movimientos y fuerzas, el sistema dinámico tiene como entrada el voltaje V y las salidas q , $\dot{q}$ y τ .

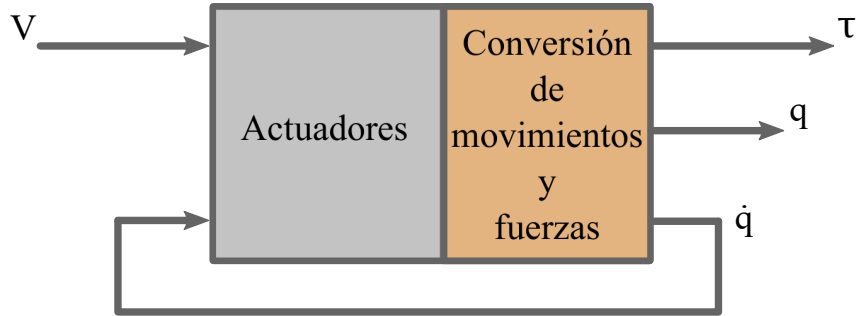


Figura 2.21: Diagrama de bloques de los actuadores con conversión lineal a rotacional de movimiento y fuerza.

Considerando los parámetros de la Tabla 2.6 para las ecuaciones (2.75) y (2.76), se realizan las simulaciones de las articulaciones donde están involucrados actuadores lineales. Notese que el actuador de la articulación 3 no aparece en la tabla, esto es debido a que en esta articulación no interviene un actuador lineal por lo que no es necesario hacer ninguna conversión de movimiento. Esta simulación tiene el objetivo de analizar y verificar el funcionamiento del bloque completo de actuadores, lo cual involucra la dinámica de los actuadores lineales y las funciones de conversión de movimientos para las 3 articulaciones involucradas. En la Figura 2.22 se presente el diagrama de simulación del bloque de actuadores.

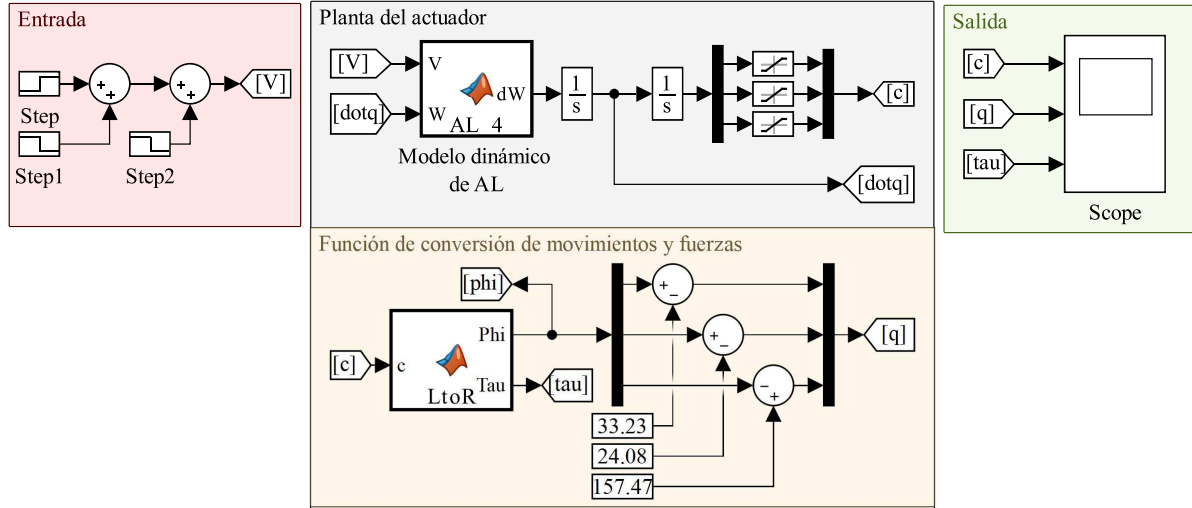


Figura 2.22: Simulación del bloque de actuadores lineales con la conversión de movimientos y fuerzas

La entrada en la simulación se compone de un escalón de 12 volts en el segundo 5 y un escalón de -12 volts en el segundo 20. En la Figura 2.23 se presenta la gráfica de longitud de carrera, es valor denotado c se ingresa al bloque de conversión del movimiento y fuerza para su cálculo.

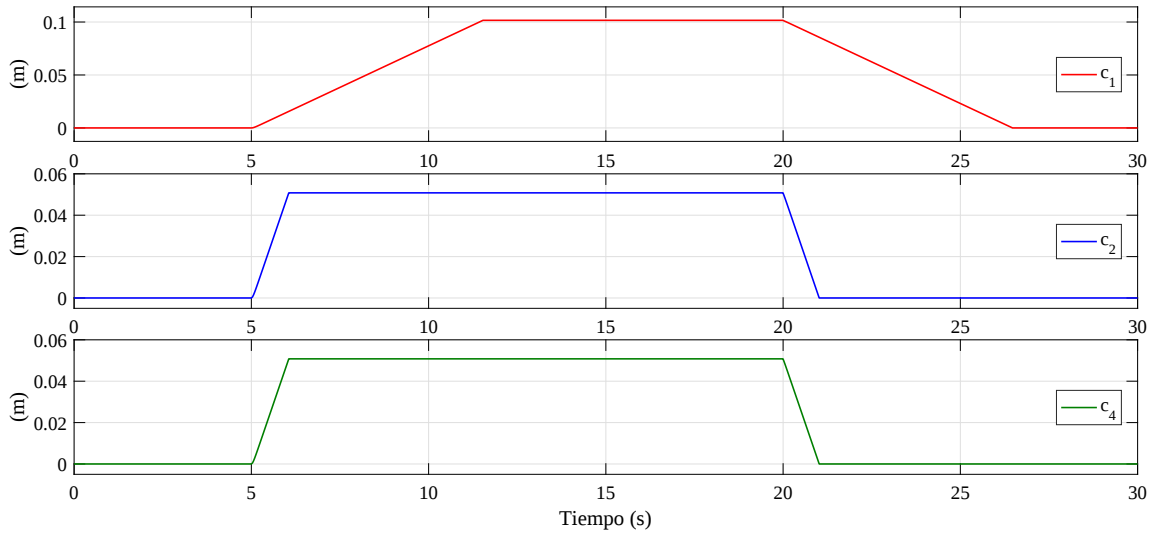


Figura 2.23: Desplazamiento longitudinal del vástago de los actuadores.

El cálculo correcto de la posición angular para el BRHI, va acompañado de restar el valor de ángulo de palanca φ_j , correspondiente a c_j máximo, a la salida φ , de este modo se obtiene el ángulo q de la articulación. Lo anterior es así, debido a que el ángulo φ_j , que corresponde a la máxima longitud del vástago, también es correspondiente a la posición angular 0 de la articulación. Con excepción de la articulación 4, donde se presenta el caso contrario para ángulo φ_j correspondiente al valor mínimo de c_j , equivale al valor de 0 de

la articulario. En la Figura 2.24 se muestran las gráficas de las posiciones angulares q de las articulaciones a_1, a_2 y a_4 .

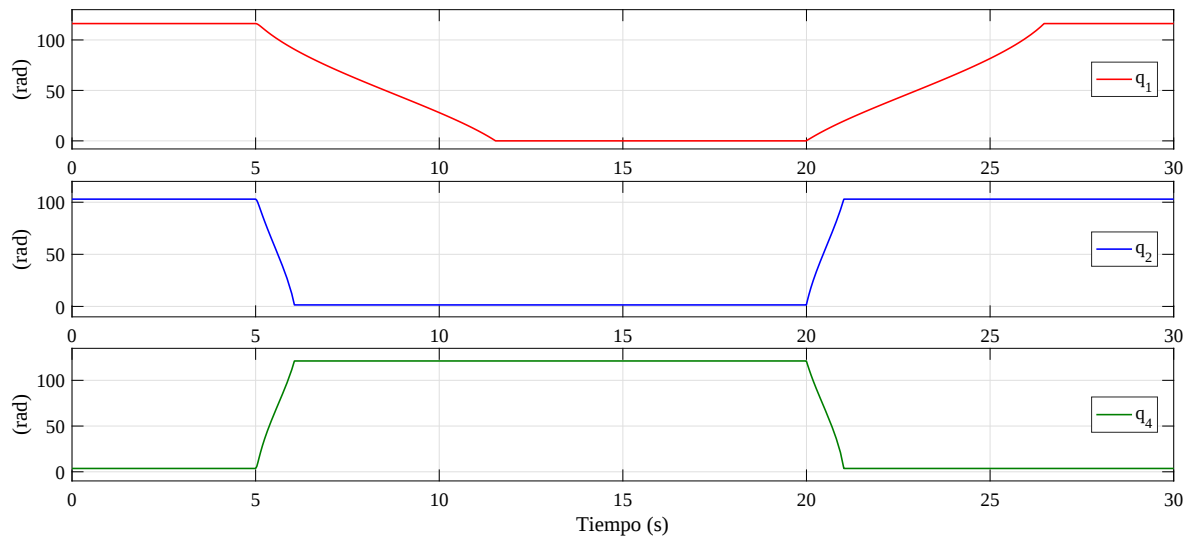


Figura 2.24: Posiciones angulares de las articulaciones con conversión de movimientos de los actuadores lineales.

Respecto a los torques τ_j , en la Figura 2.25 se presentan las gráficas correspondientes a los toques proporcionados por el actuador de cada eslabón. En estas gráficas se puede observar los torques máximos proporcionados por los actuadores.

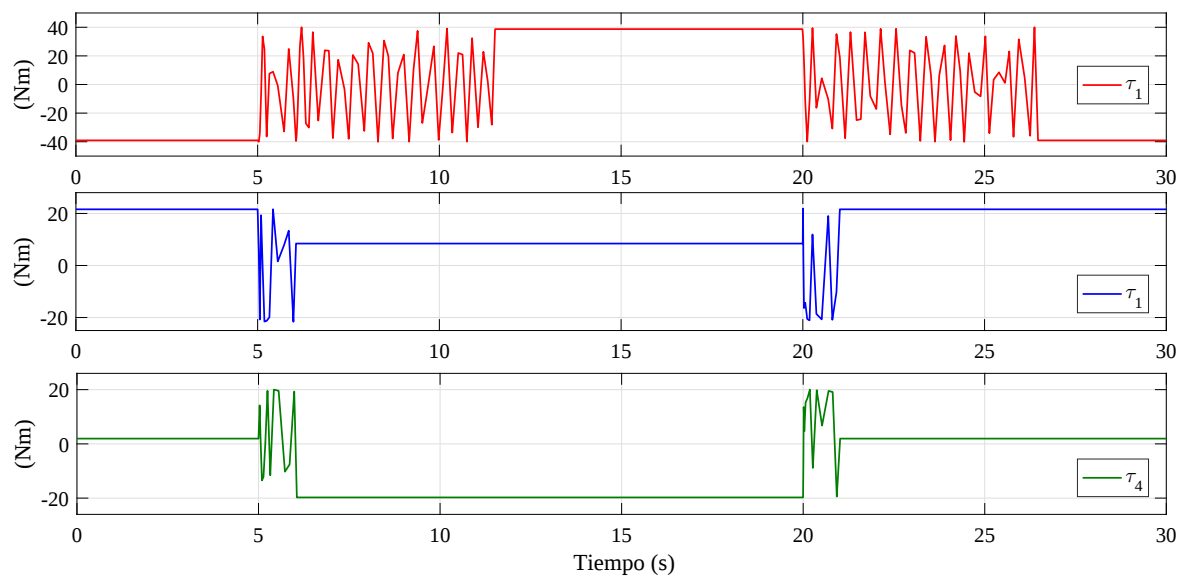


Figura 2.25: Toques proporcionados por los actuadores lineales.

2.3.4. Actuador rotacional

Con respecto al actuador de la articulación a_3 , este es del tipo rotacional, específicamente es un motor DC con caja de engranes, por lo cual no es necesario realizar ninguna conversión de movimiento o fuerza, además, el eje del motor es co-lineal al eje de rotación de esa misma articulación de modo que tampoco cuenta con ningún tipo de transmisión de movimiento. Los parámetros del modelo matemático del motor de la forma (2.52), son obtenidos de las hojas de datos del fabricante, que se presentan en los apéndices B y B.1. En base a estos parámetros se realiza la simulación del actuador rotacional como se muestra en la Figura 2.26, el objetivo de la simulación es validar los parámetros verificando que la salida del sistema, dada en velocidad w y toque τ_s , sea cercano o igual a los valores nominales en las hojas de datos.

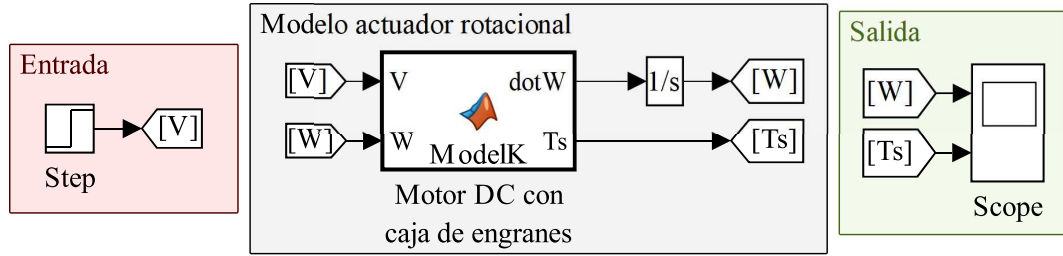


Figura 2.26

La entrada V , en la simulación 2.26, es un escalón de 12 volts y, a la salida, se obtienen la velocidad w y el toque τ_s que se muestran en las gráficas de la Figura 2.27. Se puede apreciar que estos valores son muy cercanos a los proporcionados por el fabricante, los cuales se encuentran en los apéndices B y B.1.

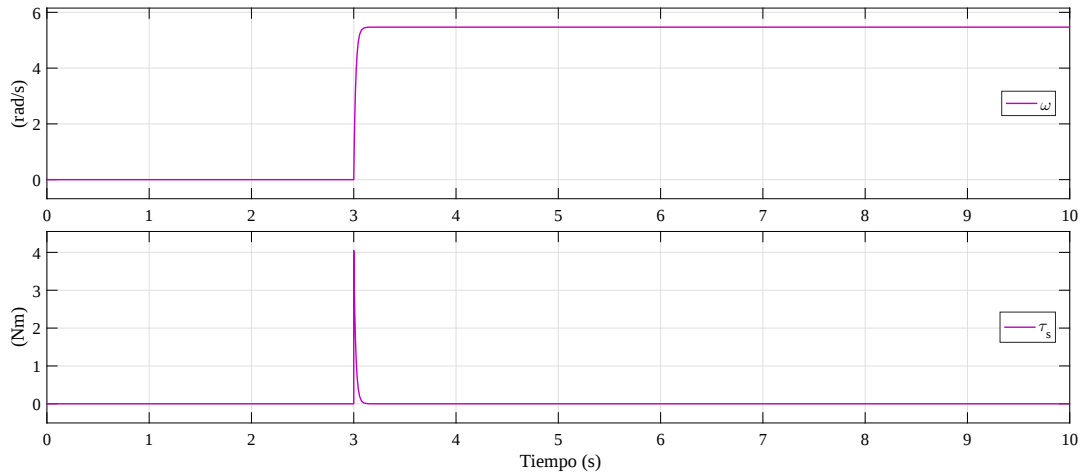


Figura 2.27

Capítulo 3

Diseño de la ley de control del BRH-I

El tercer capítulo contiene el desarrollo de los algoritmos de control propuestos a partir del modelo compacto de un robot manipulador. La presente propuesta de control está basada en la técnica de control con rechazo activo de perturbación (ADRC), mientras que el término de retroalimentación se obtiene usando el concepto de Función de Lyapunov de Control (CLF) mediante la fórmula universal de Sontag. El objetivo de control es el seguimiento de trayectorias de los ángulos articulares, por lo cual se realiza una simulación de los algoritmo de control propuestos, sobre el BRH-I. Del mismo modo, se presenta una propuesta de algoritmo de consenso para sincronizar las trayectorias entre los dos brazos del SRH-2B, el resultado de la propuesta se completa con una simulación del consenso.

3.1. Control con rechazo activo de perturbación para el control del efecto final

Se retoma el modelo dinámico en su forma compacta dado por la ecuación (2.46), sobre el cual se trabaja con el objetivo de aplicar la técnica de control ADRC. Considerando que una de las propiedades de la matriz de inercia $M(q)$, es la de ser invertible y asumiendo que el sistema está sujeto a perturbaciones externas representadas por el vector $\tau_d \in \mathbb{R}^4$, el modelo se puede escribir como:

$$\ddot{q} = M(q)^{-1}\tau - \underbrace{M(q)^{-1}[\mathcal{C}(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) - \tau_d]}_{\xi(t)} \quad (3.1)$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^4$ es al “perturbación total”, la cual se asume variante en el tiempo, que engloba la dinámica desconocida del sistema y el término de perturbación externa que afecta al mismo. En el presente trabajo, el vector de Coriolis $\mathcal{C}(q, \dot{q})$, el vector de pares gravitatorios $G(q)$ y el par de perturbación externa τ_d son considerados desconocidos y

son concentrados en el vector de perturbación total, tal que:

$$\ddot{q} = M(q)^{-1}\tau - \xi(t) \quad (3.2)$$

Se definen las siguientes variables de estados $x_1 = q \in \mathbb{R}^4$ y $x_2 = \dot{q} \in \mathbb{R}^4$, de modo que el sistema de la ecuación (3.2) se reescribe de la forma general como sigue:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = M^{-1}(x_1)\tau - \xi(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

A continuación, se diseña un observador de estado extendido que permita estimar el vector de perturbación total $\xi(t)$, además de los estados del sistema. Para la propuesta del observador debe considerarse que solo se conoce el vector x_1 , el cual es medido en cada eslabón del sistema. También, se considera que el valor nominal de la matriz generalizada de Inercia $M(x_1)$ es conocida. Y finalmente, que el vector de perturbación total $\xi(t)$ es uniformemente y absolutamente acotado, esto es:

$$\sup_t \|\xi(\cdot)\| = \|\xi(x_1, x_2, \tau_d, t)\|_\infty \leq K_0 \quad (3.4)$$

El diseño se realiza con base en el sistema de la ecuación (3.3), entonces se propone el observador de la forma siguiente:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \lambda_3(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = M^{-1}(x_1)\tau + \eta_1 + \lambda_2(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\eta}_1 = \eta_2 + \lambda_1(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\eta}_2 = \lambda_0(x_1 - \hat{x}_1) \end{cases} \quad (3.5)$$

donde la estimación del vector de perturbación total y su derivada temporal se denotan por η_1 y η_2 , respectivamente; la estimación del vector de posiciones y velocidades se denotan por $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$, respectivamente; τ es la entrada de control y el grupo de constantes $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ que son las ganancias del observador definidas positivas, las cuales se seleccionan con la ayuda de un polinomio Hurwitz de cuarto orden de la siguiente manera:

$$p_H(s) = (s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2)^2$$

$$\lambda_0 = w_n^4, \lambda_1 = 4\zeta w_n^3, \lambda_2 = 4\zeta^2 w_n^2 + 2w_n^2, \lambda_3 = 4\zeta w_n$$

3.2. Diseño del control de seguimiento usando la Fórmula General de Sontag (FGS)

En este trabajo se propone utilizar un control para sistemas no lineales, basado en función de control de Lyapunov, con el objetivo de hacer más robusto el control frente a incertidumbres internas de la dinámica del sistema y perturbaciones externas. En consecuencia, se diseña un controlador que permita la estabilización y seguimiento de trayectorias de las posiciones articulares del sistema robótico en cuestión, para lo que se denotará como $x_1^* \in \mathbb{R}^4$ a las posiciones de referencia. En base a la dinámica del sistema (3.3), se sugiere el siguiente control de retroalimentación:

$$\tau = M(x_1)(\ddot{x}_1^* + v) \quad (3.6)$$

donde $\ddot{x}_1^*$ es el término de pre-compensación resultado de la segunda derivada de la posición deseada y v es el componente de retroalimentación. Sustituyendo (3.6) en (3.3) se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= M^{-1}(x_1) \overbrace{(M(x_1)\ddot{x}_1^* + M(x_1)v)}^{\tau} - \xi(t) \\ \dot{x}_2 &= \ddot{x}_1^* + v - \xi(t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

por lo que, el sistema en espacio de estados queda representado por la ecuación (3.8).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x}_1^* + v - \xi(t) \end{cases} \quad (3.8)$$

De acuerdo a lo anterior, se asignan las variables de desviación $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^4$, tal que:

$$z_1 = x_1 - x_1^* \quad (3.9)$$

$$z_2 = x_2 - \dot{x}_1^* = \dot{x}_1 - \dot{x}_1^* \quad (3.10)$$

en que (3.9) es el error de seguimiento de posición y (3.10) es el error de velocidad. Así que, la dinámica del error de seguimiento en lazo cerrado se expresa como:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = v - \xi(t) \end{cases} \quad (3.11)$$

es notable que el sistema (3.11) tiene la forma:

$$\dot{z} = Az + B(v - \xi) \quad (3.12)$$

con $A \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ y $B \in \mathbb{R}^{8 \times 4}$.

En base a la teoría presentada sobre CLF, lo primero es encontrar una función $V(z)$, que sea una Función de Lyapunov de Control (CLF) para el sistema (3.11) relativa al equilibrio $z^e = (0 \ 0)^T$, la cual está definida por:

$$V(z) = z^T P z \quad (3.13)$$

además, se considera que el sistema (3.11) tiene un control estabilizante v , tal que:

$$v = -\epsilon B^T P z - \xi(t) \quad (3.14)$$

en la cual, $\epsilon \in \mathbb{R}^4$ son término de sintonización y $P \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ es la solución de la ecuación de Riccati (3.15), de modo que:

$$A^T P + P A - 2\epsilon P B B^T P = -Q \quad (3.15)$$

donde $Q \in \mathbb{R}^{8 \times 8} > 0$ es definida positiva y tiene la forma $Q = \text{diag}(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8)$.

Demostración. Para comprobar que la función (3.13) es una CLF válida para el sistema no lineal (3.11), se evalúa su derivada $\dot{V}(z)$ a lo largo de las trayectorias en lazo cerrado de (3.12), de modo que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z) &= \dot{z}^T P z + z^T P \dot{z} \\ &= \underbrace{z^T (A^T P + P A) z}_{:=a(z)} + \underbrace{2z^T P B}_{:=b(z)} (v - \xi(t)) \\ &= z^T \underbrace{(A^T P + P A - 2\epsilon P B B^T P)}_{-Q} z < 0 \\ &= -z^T Q z \quad z < 0, \forall z \neq 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

por lo tanto, la derivada $\dot{V}(z)$ es estrictamente negativa y, además, cumple con la propiedad (1.44) $\square$

Igualando la ecuación (3.16) con el modelo no lineal (1.39), se obtiene las equivalencias de $a(z)$ y $b(z)$ como se describen en (1.43), tal que:

$$a(z) := \frac{\partial V}{\partial z} f(z) = z^T (A^T P + P A) z \quad (3.17)$$

$$b^T(z) := \frac{\partial V}{\partial z} g(z) = 2z^T P B \quad (3.18)$$

Note que el control en (3.14) únicamente es utilizado para la CLF, sin embargo, el control propuesto en este trabajo será definido como en (1.46) mediante la fórmula universal de Sontag (1.45)

Considerando la forma de la ecuación (1.45) referente a la fórmula universal de Sontag, el observador de perturbaciones (3.5) y la CLF (3.13), la componente de retroalimentación v queda definida como:

$$v(z) = -b^T(z) (\gamma_C(a(z), b(z)) + \kappa) + \eta_1(t) \quad (3.19)$$

donde κ es una constante de sintonización definida positiva. Por otra parte, $(\gamma_C(a(z), b(z)))$ se define usando, tal que:

$$\gamma_C(a(z), b(z)) := \begin{cases} \frac{a(z) + \sqrt{a^2(z) + b^4(z)}}{b^2(z)} & \text{si } b \neq 0 \\ 0 & \text{si } b = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Sin embargo, dada la naturaleza del sistema BRH-I en que $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^4$ entonces el control de la ecuación (3.19) contiene una componente para cada grado de libertad del sistema, de tal forma que el control para cada articulario es:

$$v_1(z) = -b_1^T(z) (\gamma_{C1}(a_1(z), b_1(z)) + \kappa_1) + \eta_{11}(t) \quad (3.21)$$

$$v_2(z) = -b_2^T(z) (\gamma_{C2}(a_2(z), b_2(z)) + \kappa_2) + \eta_{12}(t) \quad (3.22)$$

$$v_3(z) = -b_3^T(z) (\gamma_{C3}(a_3(z), b_3(z)) + \kappa_3) + \eta_{13}(t) \quad (3.23)$$

$$v_4(z) = -b_4^T(z) (\gamma_{C4}(a_4(z), b_4(z)) + \kappa_4) + \eta_{14}(t) \quad (3.24)$$

El control propuesto en la expresión (3.19) representa la principal aportación, se puede notar que se trata de un control no lineal con rechazo activo de perturbaciones y que, además, posee propiedades interesantes de robustez, debido a que el sistema exhibe estabilidad asintótica al origen del error de seguimiento del espacio de estado para $\delta = (\xi(t) - \eta_1) = 0$.

3.2.1. Simulación numérica

La estrategia de control que fue propuesta en la sección anterior está conformada por dos bloques generales: el bloque de la ley de control y el bloque del observador de estado extendido. De manera general, se representa la estrategia de control, la planta del sistema BRH-I y el bloque de entrada que proporciona la trayectoria de referencia y sus derivadas, mediante el diagrama a bloques de la Figura 3.1.

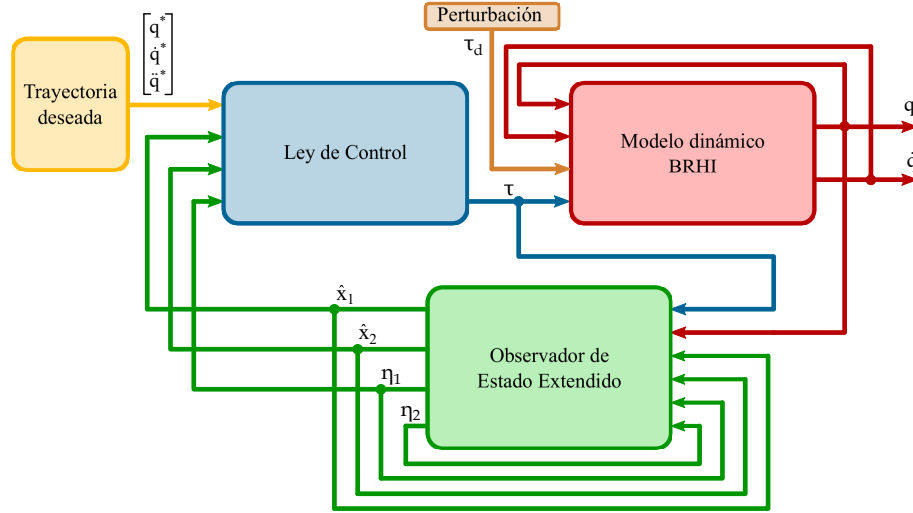


Figura 3.1: Diagrama de bloques de la estrategia de control para el seguimiento de trayectorias del BRH-I.

El diagrama de bloques que representa la estrategia de control, se traduce a los bloques de simulación como se muestra en la Figura 3.2. En esta se observan, de manera detallada, las entradas y salidas necesarias en cada bloque, también se aprecian las variables medidas con el objetivo de comprobar el funcionamiento de la ley propuesta. La ley de control se separa en los términos de seguimiento y retroalimentación para poder apreciar el desarrollo de la propuesta de control.

Por otra parte, se agregó un bloque de normalización de torques, el cual limita el torque de salida de la señal de control con respecto al toque que pueden proporcionar los actuadores, esto permite realizar el trabajo de sintonizar el control adecuadamente. Además se incluye un bloque que calcula la perturbación total ξ , basado en el conocimiento del modelo y de la perturbación aplicada de prueba para obtener un error, esto permite sintonizar y verificar el funcionamiento del observador.

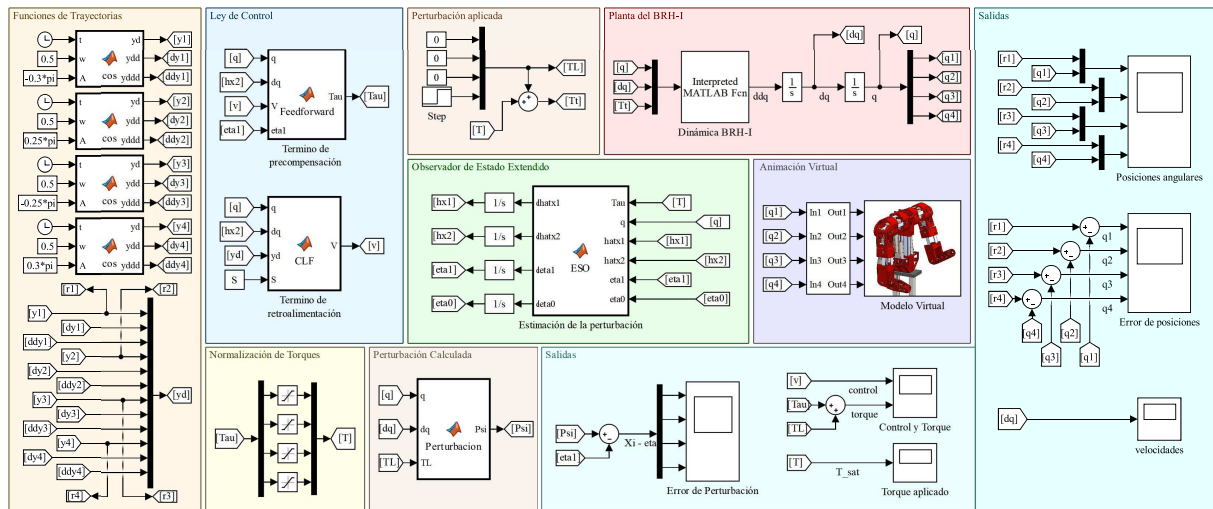


Figura 3.2: Descripción de la estrategia de control ADRC y CLF en bloques de Simulink.

Las trayectorias de referencia empleadas en esta simulación, son funciones sinusoidales que tiene una amplitud igual al ángulo máximo que puede rotar cada articulación, estas funciones están dadas por la ecuación (3.25). Este misma amplitud se suma en la posición para darle un rango de movilidad de 0 hasta el ángulo máximo, de tal modo que la simulación se aproxima a lo real, esto es:

$$x_1^* = A_{mp} \cos(wt) + A_{mp} \quad (3.25)$$

donde A_{mp} es la amplitud de la señal y el ángulo $wt = 0.5t$. En la tabla 3.1 se muestran las amplitudes utilizadas para cada articulación.

Tabla 3.1: Amplitudes para generar las trayectorias de referencia.

$\mathbf{x}_1^*$	q_1^*	q_2^*	q_3^*	q_4^*
$\mathbf{A}_{mp}$	-0.3π	0.25π	-0.25π	0.3π

Para calcular las ganancias del observador usando la ecuación (3.1) se determinan los parámetros $w_n = 18$ y $\zeta = 0.8$, con estos parámetros se pueden calcular $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ y λ_3 del polinomio de Hurwitz de cuarto orden, que son las ganancias del ESO. Entonces los valores de las ganancias son: $\lambda_0 = 104976$, $\lambda_1 = 18662$, $\lambda_2 = 1477.4$ y $\lambda_3 = 57.6$

Por otro lado, para calcular las ganancias mediante la fórmula universal de Sontag, se propone una matriz $Q = \text{diag}(20, 18, 12, 18, 2, 7, 7, 12)$ y los términos de sintonización $\epsilon = \text{diag}(0.4, 0.2, 0.3, 0.3)$, de tal modo que la matriz P , solución de la ecuación de Riccati, es:

$$P = \begin{bmatrix} 21.75 & 2.82 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.82 & 3.07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15.91 & 1.55 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.55 & 2.05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.13 & 0.77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.77 & 1.60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10.21 & 1.45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.45 & 2.11 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

También es importante mencionar que la perturbación aplicada al sistema durante la simulación, es un torque constante de magnitud de 2 Nm, que ocurre en el segundo 10 sobre el eslabón final del BRH-I.

En la gráfica de la Figura 3.3 se muestra el seguimiento de las trayectorias de referencia $x_1^* = (q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*)$, se puede notar que el tiempo transitorio de la posición cero del sistema, hasta converger en la trayectoria de referencia es entre 2 y 3 segundo. En esta gráfica no puede observarse bien la perturbación aplicada, sin embargo genera una pequeña desviación en la trayectoria de q_4 que rápidamente compensa.

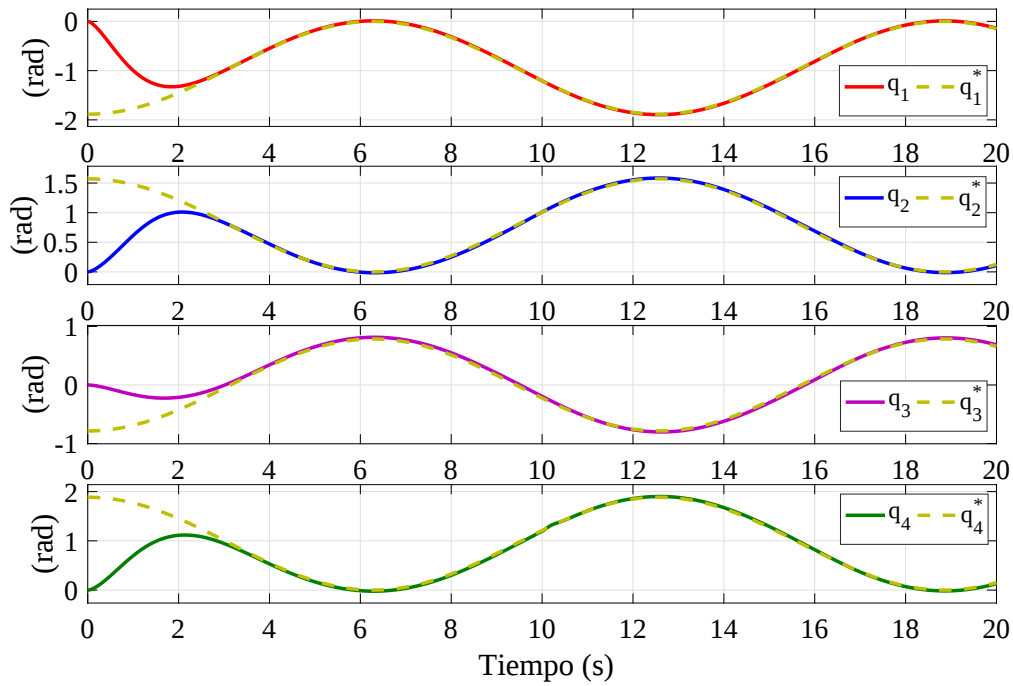


Figura 3.3: Respuesta de las posiciones angulares de los cuatro eslabones del BRH-I.

En consecuencia, la gráfica del error de las posiciones, donde se resta la posición angular de referencia menos la posición angular medida $x_1^* - x_1$, tiende a 0 en el mismo tiempo, ver Figura 3.4. En esta gráfica, se puede llegar a percibir la acción de la perturbación aplicada después del segundo 10.

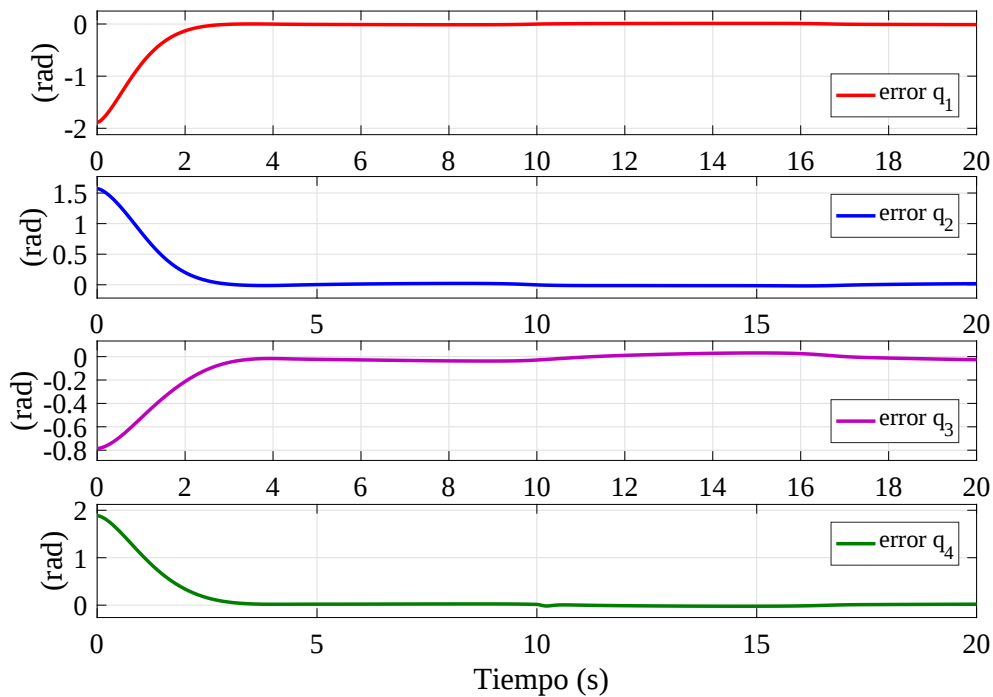


Figura 3.4: Respuesta del error de las posiciones angulares de los cuatro eslabones del BRH-I.

Adicionalmente, se realizó la comparación de la perturbación total ξ calculada por el bloque, que se toma como la perturbación de referencia ξ_{ref} , contra la perturbación estimada mediante el ESO, η_1 . Esta comparación se muestra en la Figura 3.5 en la que se observa que el observador va realizando una correcta estimación de la perturbación, después del segundo 10, donde se aplica la perturbación externa. En la gráfica de la perturbación de la cuarta articulación es muy notable la perturbación externa.

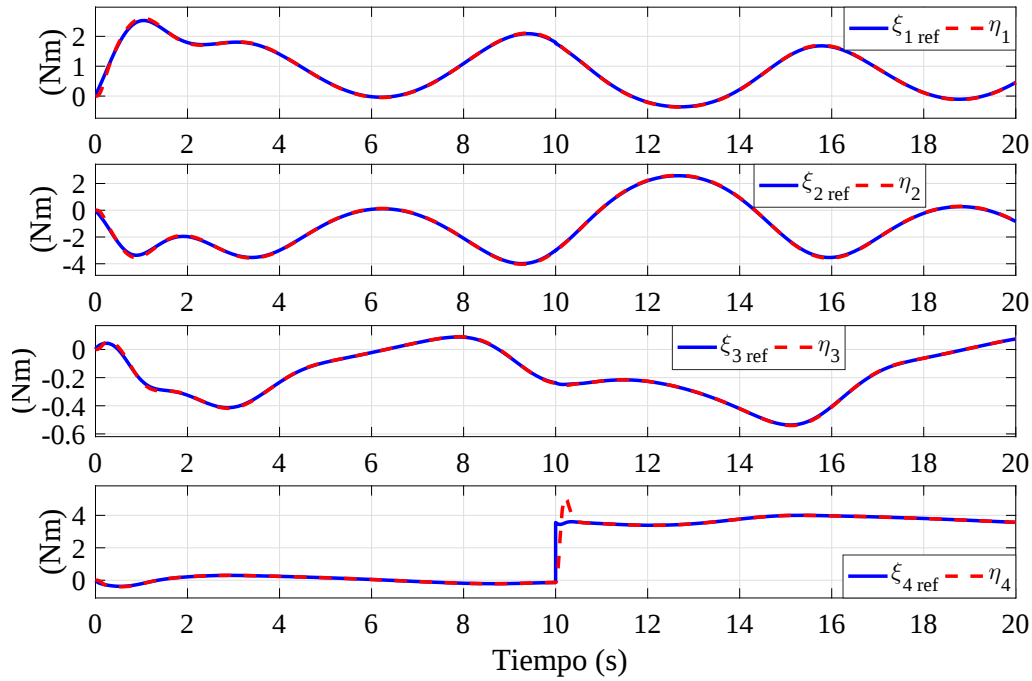


Figura 3.5: Respuesta de la estimación de la perturbación en cada articulación del BRH-I

Si se realiza una resta de las perturbaciones comparadas en la gráfica anterior, se obtiene la respuesta del error de la perturbación calculada contra la estimada, la cual se muestra en la Figura 3.6. En esta gráfica se observa de manera muy clara la perturbación aplicada en el segundo 10 y la variación que genera en el estimador de dicha perturbación, aunque se compensa rápidamente por las ganancias del observador. Y además, se ve también que dicha perturbación genera en consecuencia pequeñas perturbaciones los demás eslabones.

Finalmente, para llevar a cabo el seguimiento de trayectorias articulares se requiere de un toque aplicado que sale de la ley de control para cada articulación. Las gráficas de estos torques se presenta en la Figura 3.7, donde se observa la demanda de torque requerida en τ_4 para compensar la perturbación aplicada al sistema. Es debido a esta compensación, que es posible continuar el seguimiento de trayectoria a pesar de la presencia de la perturbación.

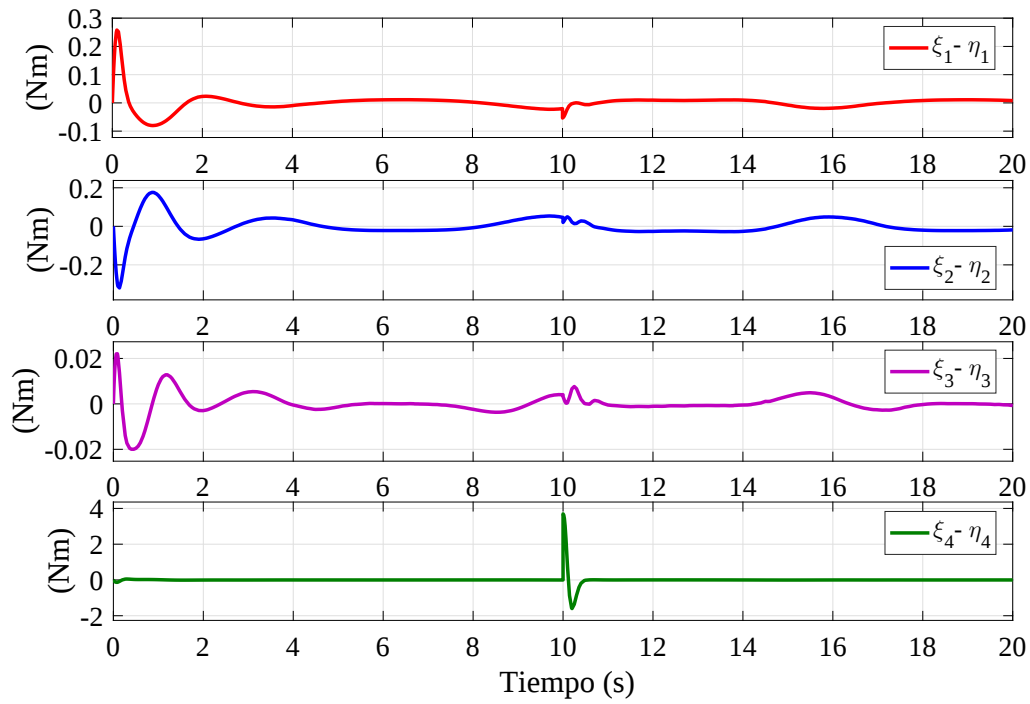


Figura 3.6: Respuesta de error de la perturbaciones en las cuatro articulaciones del BRH-I.

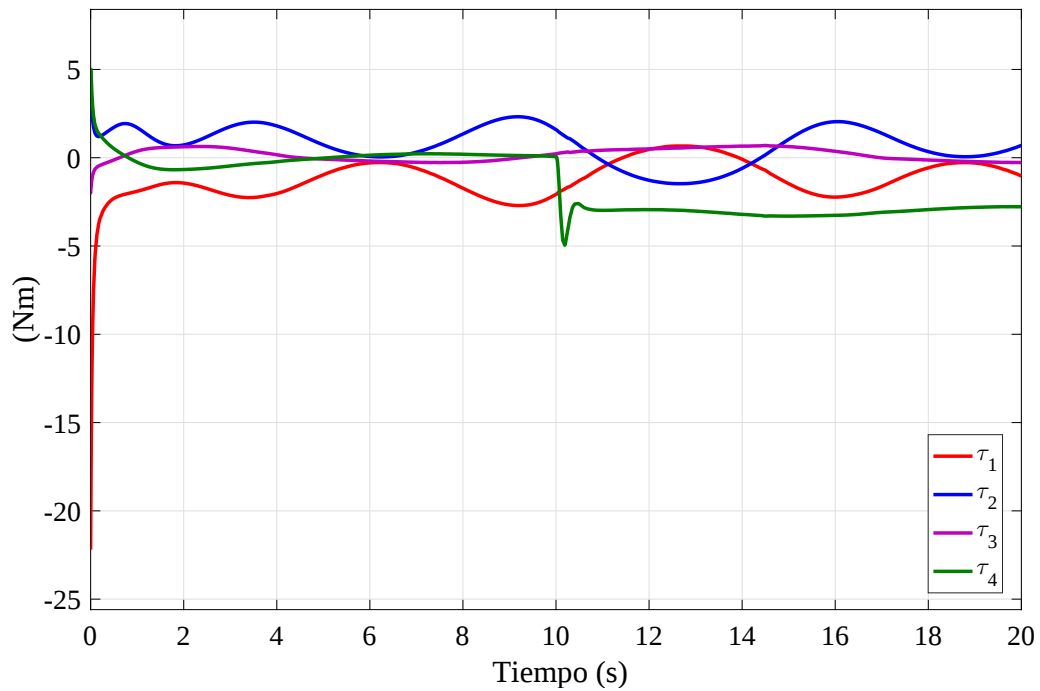


Figura 3.7: Respuesta del control de las cuatro articulaciones del BRH-I.

Los resultados obtenidos de las simulaciones, manifiestan un adecuado funcionamiento de la ley de control aplicada al sistema BRH-I y sugiere que es posible aplicar dicha metodología para cualquier tipo de sistema que se modele mediante las ecuaciones de movimiento de Lagrange.

3.3. Simulación del modelo incluyendo los actuadores

Debido a la importancia de los actuadores como aquellos elementos que generan el movimiento en un sistema robótica, es necesario realizar la simulación del algoritmo de control ADRC+CLF considerando el modelo de las actuadores. Para realizar dicha simulación se añade el bloque de actuadores al diagrama de bloques de la Figura 3.1, dando como resultado un nuevo diagrama que se presenta en la Figura 3.8.

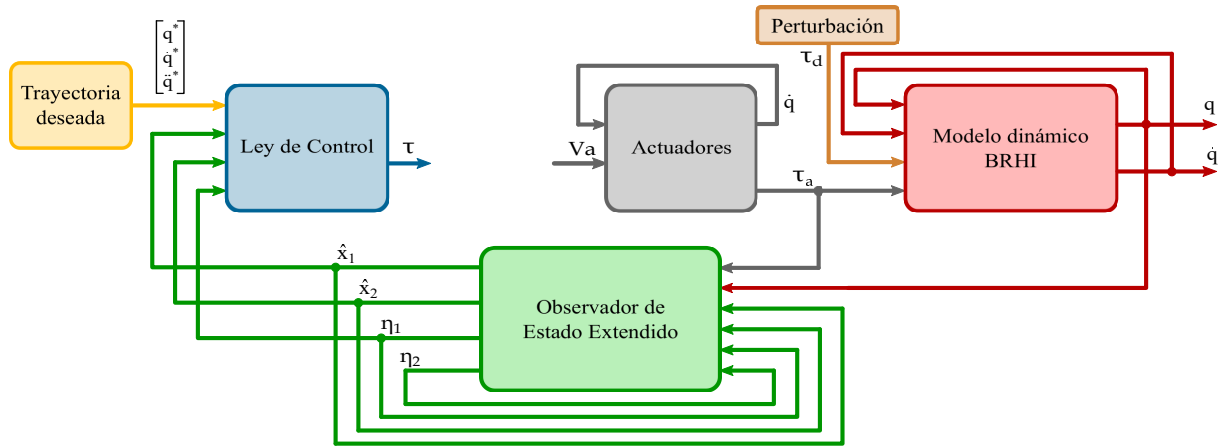


Figura 3.8: Diagrama de bloques de la estrategia de control ADRC+CLF para el BRH-I incluyendo actuadores.

Sin embargo, en la práctica, la salida del bloque de la ley de control es el torque τ y la entrada al bloque de actuadores debe ser un voltaje V_a , de tal modo que el τ que sale de la ley de control sea igual al τ_a entregado por los actuadores. Por este motivo, se realiza una conversión del toque a voltaje basada en el modelo y parámetros de los actuadores.

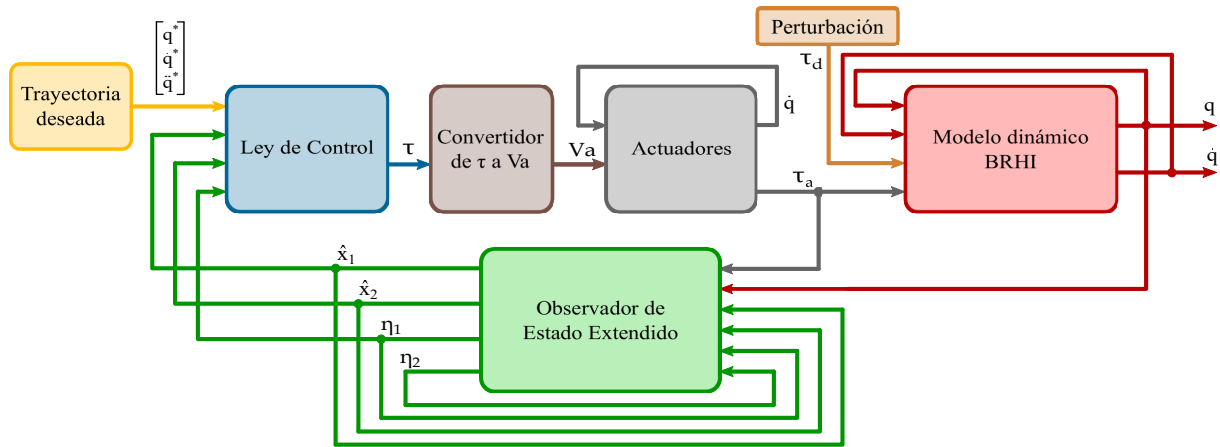


Figura 3.9: Diagrama de bloques de la estrategia de control ADRC+CLF para el BRH-I incluyendo actuadores y bloque de conversión de τ a V_a .

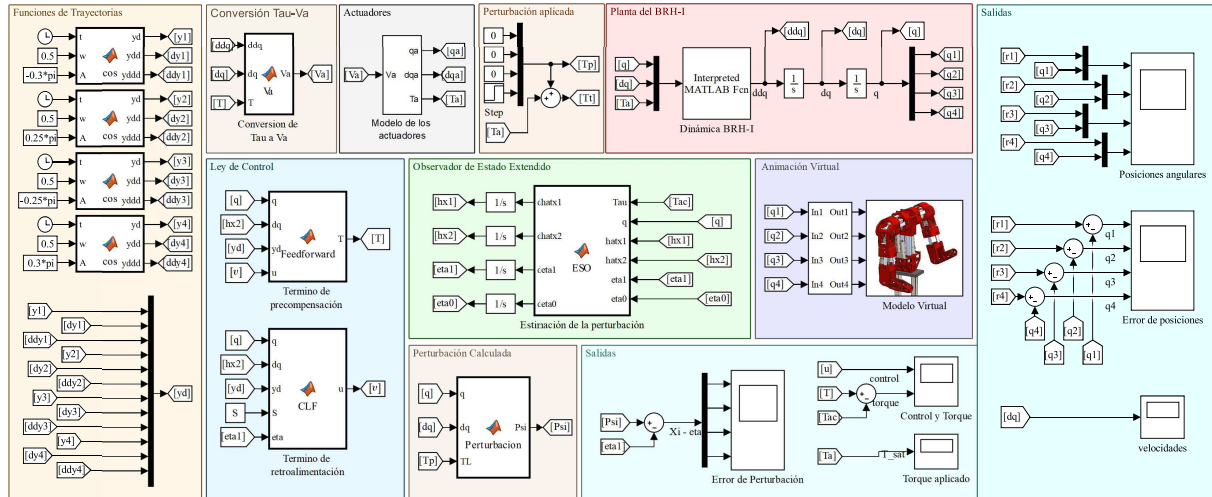


Figura 3.10: Descripción de la estrategia de control ADRC y CLF incluyendo actuadores en bloques de Simulink.

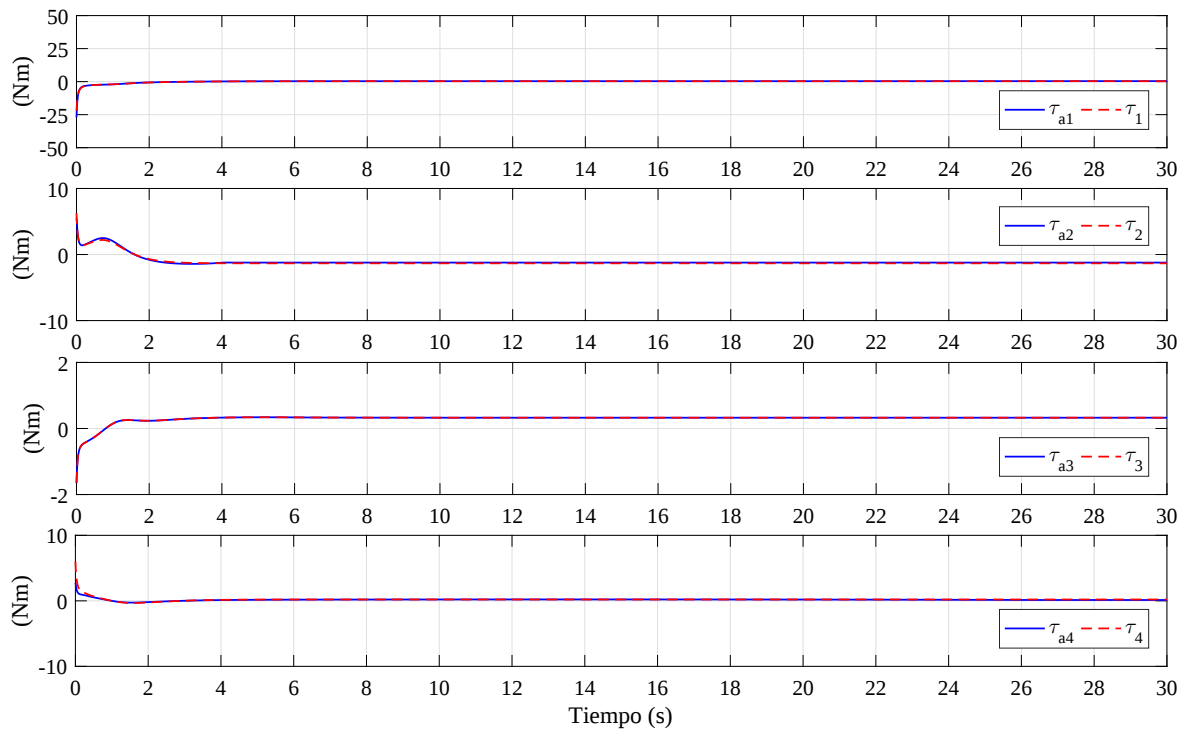


Figura 3.11: Comparación del torque de control contra el torque de los actuadores

3.4. Control colaborativo de seguimiento de trayectorias

Para realizar el diseño del algoritmo de consenso, que permita sincronizar las trayectorias de ambos brazos, se utiliza la topología líder-seguidor. En primera instancia el líder se comunica con el agente 1, que en este caso es el BRH-I, proporcionándole los términos de referencia necesarios para realizar el seguimiento, del modo como se presentó en la sección anterior. Después, el agente 1 le comunica esta misma información proveniente de sus estados al agente 2, que resulta ser el BRH-D, de tal modo que, para el agente 2 la referencia sera los estados del agente 1. En la Figura 3.12 se presenta el grafo que describe la comunicación en esta topología líder-seguidor planteada.

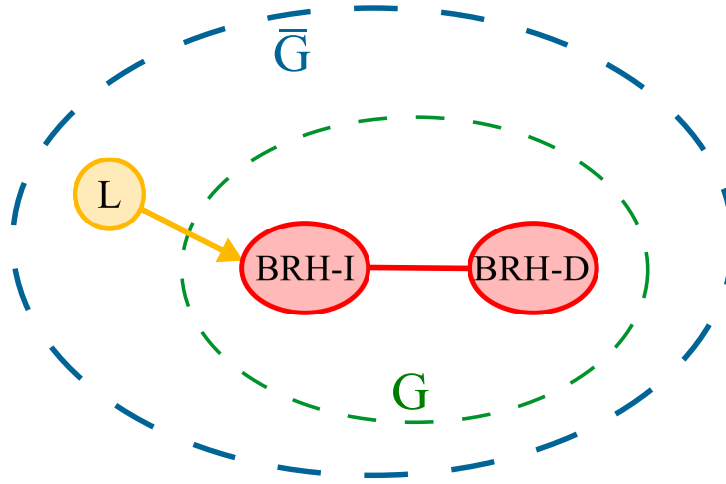


Figura 3.12: Grafo del algoritmo de consenso líder-seguidor

Partiendo de la ecuación (3.8), donde $x_1 = q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T$ y $x_2 = \dot{q} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3 \ \dot{q}_4]^T$, se agregan los subíndices $\mathcal{I}$ y $\mathcal{D}$ para identificar si pertenecen al BRH-I o al BRH-D, tanto en los estados como en el control v y la perturbación ξ . De tal modo que, los sistemas en espacio de estados de cada brazo robótico se representa de la siguiente manera:

- Para el BRH-I:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1\mathcal{I}} = x_{2\mathcal{I}} \\ \dot{x}_{2\mathcal{I}} = \ddot{x}_1^* + v_{\mathcal{I}} - \xi_{\mathcal{I}} \end{cases} \quad (3.27)$$

- Para el BRH-D:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1\mathcal{D}} = x_{2\mathcal{D}} \\ \dot{x}_{2\mathcal{D}} = \ddot{x}_{1\mathcal{I}} + v_{\mathcal{D}} - \xi_{\mathcal{D}} \end{cases} \quad (3.28)$$

De la ecuación (3.28) se puede notar, que el término de precompensación no es la segunda derivada de la posición angular deseada o de referencia, más bien, se trata de

la segunda derivada de la posición medida del agente 1, lo que obedece al algoritmo de consenso propuesto.

Con base en los sistemas (3.27) y (3.28) se asignan las variables de desviación (z_{1I}, z_{2I}) y (z_{1D}, z_{2D}), respectivamente. Debido a que la trayectoria para el agente 1 es enviada por el líder, las variables de desviación para el sistema (3.27) resultan igual que en (3.9), solo se agrega el subíndice tal que:

$$z_I \begin{cases} z_{1I} = x_{1I} - x_1^* \\ z_{2I} = x_{2I} - x_2^* = \dot{x}_{1I} - \dot{x}_1^* \end{cases} \quad (3.29)$$

Por otra parte, se asignan las variables de desviación para el sistema (3.28) considerando que las referencias que entran a este, provienen de los estados del BRH-I. De este modo, las variables de desviación son:

$$z_D \begin{cases} z_{1D} = x_{1D} - x_{1I} \\ z_{2D} = x_{2D} - x_{2I} = \dot{x}_{1D} - \dot{x}_{1I} \end{cases} \quad (3.30)$$

El desarrollo de las leyes de control mediante la fórmula universal de Sontag para el sistema (3.27) del BRH-I y el sistema (3.28) del BRH-D, con sus variables de desviación (3.29) y (3.30) respectivamente, es el mismo que el realizado en la sección 3.2. lo que da como resultado controles de la forma (3.20), tal que para cada articulación:

- Para el BRH-I:

$$\begin{aligned} v_{1I}(z_I) &= -b_{1I}^T(z_I) (\gamma_{C1I}(a_{1I}(z_I), b_{1I}(z_I)) + \kappa_{1I}) + \eta_{11I}(t) \\ v_{2I}(z_I) &= -b_{2I}^T(z_I) (\gamma_{C2I}(a_{2I}(z_I), b_{2I}(z_I)) + \kappa_{2I}) + \eta_{12I}(t) \\ v_{3I}(z_I) &= -b_{3I}^T(z_I) (\gamma_{C3I}(a_{3I}(z_I), b_{3I}(z_I)) + \kappa_{3I}) + \eta_{13I}(t) \\ v_{4I}(z_I) &= -b_{4I}^T(z_I) (\gamma_{C4I}(a_{4I}(z_I), b_{4I}(z_I)) + \kappa_{4I}) + \eta_{14I}(t) \end{aligned} \quad (3.31)$$

- Para el BRH-D:

$$\begin{aligned} v_{1D}(z_D) &= -b_{1D}^T(z_D) (\gamma_{C1D}(a_{1D}(z_D), b_{1D}(z_D)) + \kappa_{1D}) + \eta_{11D}(t) \\ v_{2D}(z_D) &= -b_{2D}^T(z_D) (\gamma_{C2D}(a_{2D}(z_D), b_{2D}(z_D)) + \kappa_{2D}) + \eta_{12D}(t) \\ v_{3D}(z_D) &= -b_{3D}^T(z_D) (\gamma_{C3D}(a_{3D}(z_D), b_{3D}(z_D)) + \kappa_{3D}) + \eta_{13D}(t) \\ v_{4D}(z_D) &= -b_{4D}^T(z_D) (\gamma_{C4D}(a_{4D}(z_D), b_{4D}(z_D)) + \kappa_{4D}) + \eta_{14D}(t) \end{aligned} \quad (3.32)$$

En este punto, previo a la simulación numérica del algoritmo de consenso, es importante mencionar los cambios necesarios en el modelo para el BRH-D. Utilizando el mismo sistema de referencia $\mathfrak{S}_0(X_0, Y_0, Z_0)$ que para el BRH-I, únicamente se cambia el eje Z_0 por la parte negativa, esto es $-Z_0$. Del mismo modo los valores de los parámetros longitudi-

nales del eslabón 1: l_1 y l_{c1} , del BRH-D son negativas. Además, para garantizar el correcto movimiento, considerando las limitaciones de movimiento diseñadas para un robot antropomórfico, las entradas de referencia para la articulación 2, deben ser negadas también. El resultado esperado del algoritmo de consenso es la sincronización de movimientos con el ángulo q_2 inverso o en espejo.

3.4.1. Simulación numérica del algoritmo de consenso

Se realiza la simulación del algoritmo de consenso para los BRH-I y BRH-D usando MATLAB/Simulink y siguiendo el grafo de la Figura 3.12. El diagrama de bloques que resulta de la descripción del algoritmo de consenso se muestra en la Figura 3.13; donde los agentes, que son el BRH-I y el BRH-D, tienen un control independiente ADRC+CLF. El consenso se realiza usando las mismas trayectorias de referencia que en la simulación del BRH-I, que tiene la forma (3.25) y las amplitudes de la tabla 3.1. Estas trayectorias se asumen como el líder, que se comunican con el agente BRH-I, luego, las salidas del modelo del BRH-I se toman como las referencias que se comunican para el agente BRH-D, lo que se puede observar en el bloque de Ley de control del BRH-D de la Figura 3.13.

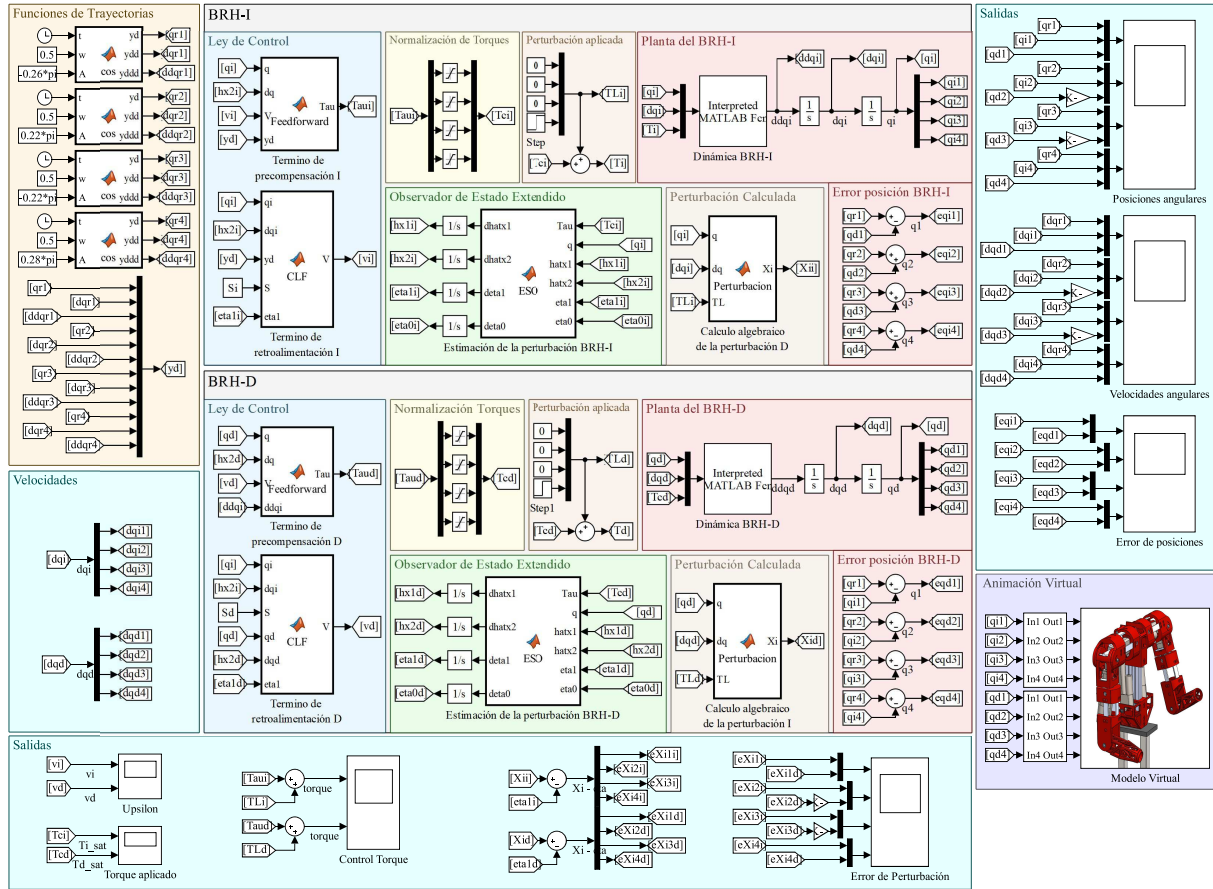


Figura 3.13: Descripción del algoritmo de consenso para la simulación numérica en bloques de Simulink.

Con el objetivo de hacer evidente la sincronización de trayectorias, se colocaron condiciones iniciales $q_D = [-0.2\pi \ -0.15\pi \ -0.2\pi \ 0.15\pi]^T$ para el BRH-D. En la gráfica de la Figura 3.14, se observa la convergencia a las trayectorias de referencia q^* de las posiciones angulares q_I y q_D . A pesar que se mantuvo la perturbación sobre el BRH-I, se puede ver que tanto la trayectoria de q_{4I} como de q_{4D} realiza la adaptación de la trayectoria para compensar la perturbación, de modo que se comprueba un buen funcionamiento del algoritmo de consenso.

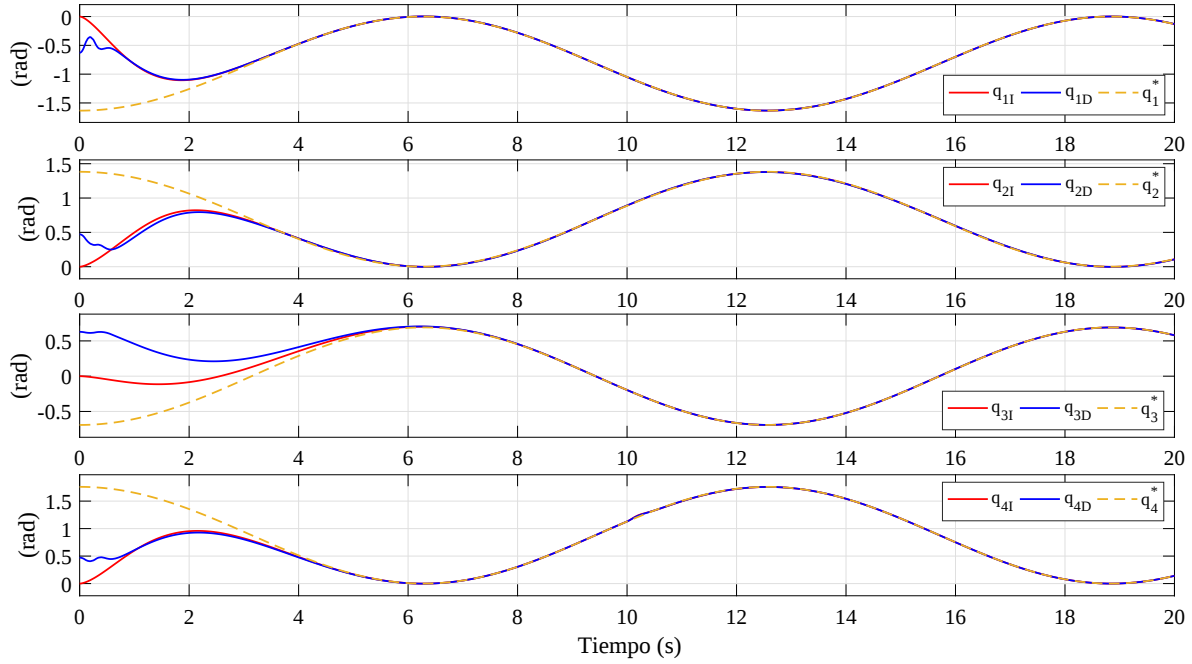


Figura 3.14: Respuesta de las posiciones angulares del BRH-I y BRH-D en consenso.

El error de seguimiento de las trayectorias se presenta en la gráfica de la Figura 3.15, estos errores consisten en la diferencia entre las posiciones articulares de referencia q^* y las posiciones articulares de los agentes BRH-I y BRH-D. En esta gráfica se puede notar que los errores convergen a 0, aún en el caso de las posiciones articulares del agente BRH-D, el cual a pesar de no recibir las referencias del líder logra la convergencia a 0 de los errores de posición.

De la misma manera, la velocidad de las articulaciones de los agentes realizan el seguimiento de acuerdo a las referencias de velocidad $\dot{q}^*$. En la gráfica de la Figura 3.16 se puede ver el seguimiento de las velocidades del consenso, donde el agente BRH-D realiza el seguimiento de la referencia aún sin comunicarse con él. Además, en esta gráfica se aprecia el efecto de la perturbación sobre $\dot{q}_{4I}$, es interesante notar que la velocidad $\dot{q}_{4D}$ realiza el seguimiento de la perturbación aún sin que se aplique una perturbación al agente BRH-D.

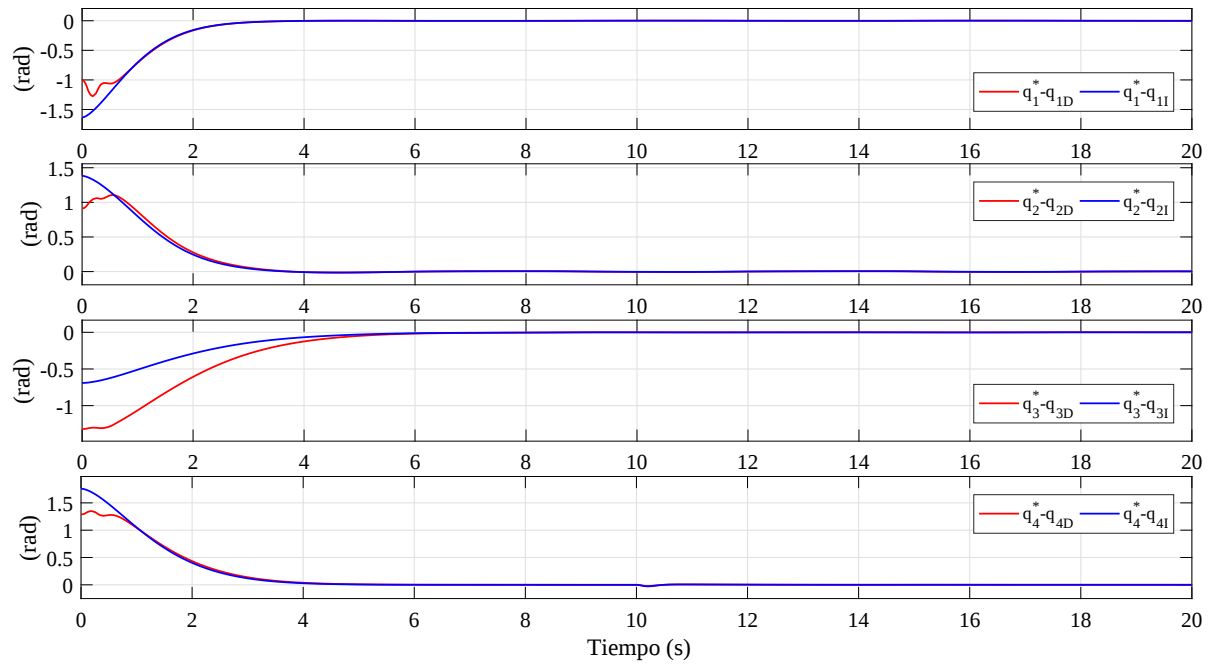


Figura 3.15: Respuesta del error de las posiciones angulares del BRH-I y BRH-D en consenso.

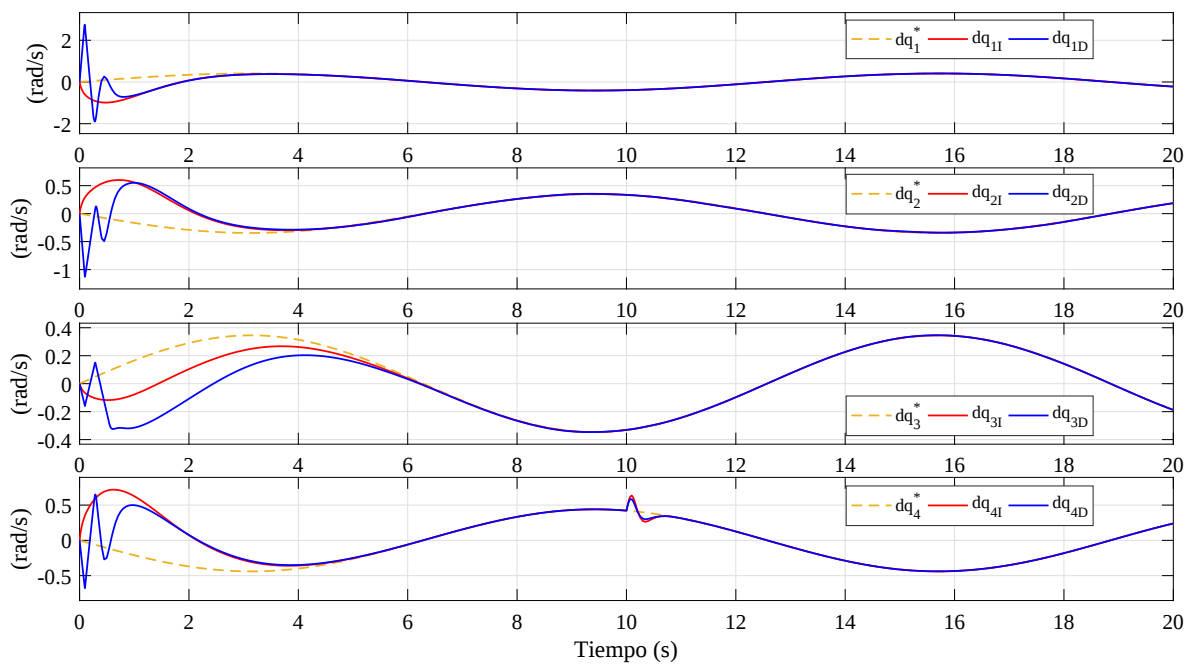


Figura 3.16: Respuesta de las velocidades angulares del BRH-I y BRH-D en consenso.

Capítulo 4

Implementación de algoritmos de control para un robot antropomórfico

En este capítulo se describe la implementación del algoritmo de control bajo la técnica ADRC propuesta en el capítulo anterior. Se inicia con la descripción de la plataforma experimental dSPACE, el software ControlDesk, los puertos de entrada y salida utilizados, la frecuencia de muestreo y los bloques de MATLAB/Simulink. También realiza una breve descripción de las tarjetas de control o drivers y su modo de operación. Finalmente, se presenta la implementación de la ley de control sobre el SRH y los resultados que se obtuvieron.

4.1. Descripción de la plataforma dSPACE y los controladores de potencia

Para realizar la implementación de la ley de control propuesta sobre el sistema robótico humanoide, se utilizó la plataforma experimental dSPACE que se encuentra en el Laboratorio de Control Avanzado, la cual se integra por una placa de control DS1104 R&D y los paneles de conexión CP1104/CLP1104. Esta plataforma está diseñada para el desarrollo de controladores multivariables y simulaciones en tiempo real, lo último debido a que está basado en un procesador de punto flotante 603 PowerPC que funciona a 250 MHz.

La dSPACE es una plataforma experimental de adquisición y procesamiento de señales en tiempo real, para el diseño y prueba de algoritmos de control. Una de las principales ventajas de esta plataforma es la fácil implementación, gracias que cuenta con su propia biblioteca de bloques de implementación para el programa MATLAB/Simulink. Esta biblioteca permite desarrollar los algoritmos de prueba sobre la misma interfaz de Simulink y después cargarlos al dSPACE para realizar las pruebas sin quitar o poner conexiones.

Además, se tiene la posibilidad de estar observando las señales adquiridas en tiempo real e, incluso, se puede intervenir de manera activa mediante un panel de control virtual o interfaz de usuario; el cual se puede crear a disposición personal mediante un programa llamado ControlDesk.

Por otra parte, la implementación se llevara a cabo sobre el SRH que se diseño y construyó en el Laboratorio de Control Avanzado de la BUAP-FCE. Debido al limite de PWM, solo se implementara sobre el BRH-I, el mismo que se tomo para realizar la mayoría de las simulaciones.

4.1.1. Características de la plataforma dSPACE

La plataforma está conformada por una gran cantidad de terminales de entrada y salida, tanto analógicas como digitales. Cuenta con terminales de entrada para codificadores incrementales, lo que permite el tratamiento de señales derivadas de un encoder con mayor facilidad. Y además, cuenta con terminales de salida tipo PWM. Todas las terminales de entrada/salida estan disponibles mediante un tablero de conexiones con indicadores led, ver Figura 4.1.

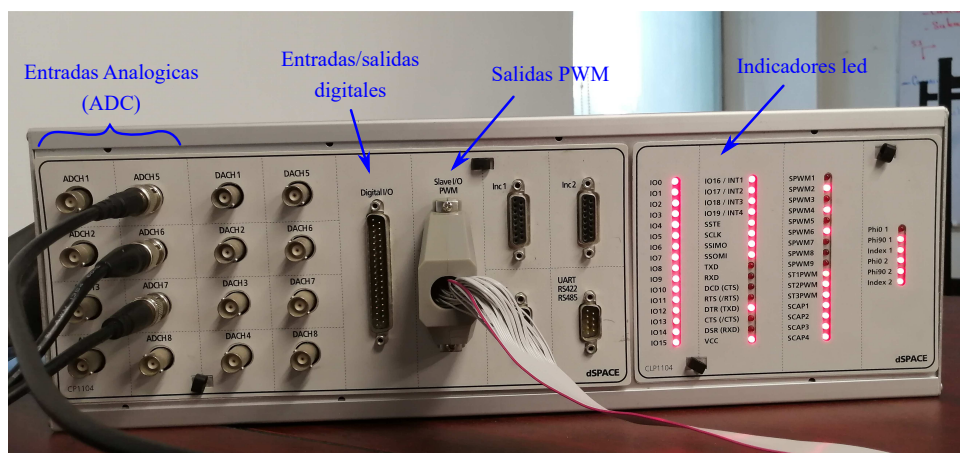


Figura 4.1: Tablero de conexiones dSPACE modelo CPL1104.

De forma específica, en este trabajo, se utilizaron los canales de entrada ADCH, que son entradas con convertidores de analógico a digital. Por medio de estas entradas, se realizó la adquisición de las señales de los sensores de posición de los actuadores. Posteriormente, por medio de los bloques de Simulink se convirtió la posición lineal de los actuadores a la posición angular de cada articulación.

Con respecto a la operación de los actuadores, se utilizaron las salidas PWM como señales de control, junto con los controladores de potencia. La plataforma dSPACE DS1104 cuenta con 4 PWMs independientes de 1 fase y con un módulo destinado a motores

trifasicos de 3 PWMs y las 3 señales inversas. Por lo tanto, se tiene un total de 7 PWMs independientes.

Debido a que cada manipulador o brazo robótico cuenta con 4 actuadores y, que para controlar cada actuador es necesario 2 PWMs, entonces para controlar un brazo robótico serían necesario 8 PWMs en total. Sin embargo, como el número máximo de PWM independientes que es posible obtener del dSPACE es de 7, fue necesario inmovilizar una articulación para eliminar un actuado. Por tal motivo, se decidió fijar la articulación a_3 y realizar la implementación únicamente con 3 actuadores, correspondientes a las articulaciones a_1 , a_2 y a_4 .

4.1.2. Controladores de potencia

El accionamiento de los actuadores eléctricos se lleva a cabo mediante una señal PWM, a través de variar el ciclo de trabajo de la misma con relación a la señal de control V_a , la cual proviene del algoritmo de control. Para poder utilizar la señal PWM es necesario un módulo de puente H como el IBT_2, Figura 4.2, basado en el integrado BTS7960, que es un medio puentes H de alta corriente. Este módulo proporciona una manera simple y segura de controlar actuadores eléctricos y soporta hasta 43 amperes y 27 volts, además, tiene un gran disipador que evita el sobrecalentamiento. Las características del módulo IBT_2 se pueden consultar en el apéndice C.



Figura 4.2: Modulo controlador puente H IBT_2.

La conexión del módulo IBT_2 es simple y puede controlarse de manera fácil. En un extremo se encuentran las terminales de entrada de alimentación del motor y las salidas de alimentación del mismo, las cuales se describen en la tabla 4.1.

Tabla 4.1: Descripción de las terminales de la fuente y la alimentación del motor.

Terminal	Descripción
B+	Alimentación positiva del motor
B−	Alimentación negativa del motor o tierra
M+	Salida positiva al motor
M−	Salida negativa al motor

Por otro lado, en el extremo contrario se encuentran las terminales de operación del módulo, descritas en la tabla 4.2. Para implementar el módulo, se activan ambos habilitadores R_EN y L_EN, esto es que se ponen en alto conectándolos a 5V, lo que permite la lectura de las variaciones de los PWM, por lo tanto, es necesario 2 PWMs independientes para cada módulo que operan a cada actuador. Aunque parece factible implementar estos módulos activando y desactivando los habilitadores para poder usar un solo PWM, sin embargo esto no es posible debido a que cuando ambos habilitadores no se encuentran activos el módulo deja de operar.

Tabla 4.2: Descripción de las terminales de operación del modulo IBT_2

Terminal	Descripción
RPWM	Nivel de avance o señal PWM. Activo en alto
LPWM	Nivel de reversa o señal PWM. Activo en alto
R_EN	Activación de entrada de avance. Habilitado en alto / Deshabilitado en bajo
L_EN	Activación de entrada de reversa. Habilitado en alto / Deshabilitado en bajo
R_IS	Avance, salida de alarma de corriente lateral
L_IS	Reversa, salida de alarma de corriente lateral
Vcc	+5V fuente de alimentación del microcontrolador
Gnd	Tierra de alimentación del microcontrolador

4.2. Implementación del Algoritmo de Control

Se llevo a cabo la implementación de la ley de control utilizando los bloques proporcionados por la interfaz de dSPACE en un modelo de bloques de Simulink. Sin embargo, debido a que la versión compatible de MATLAB para utilizar el sistema dSPACE es la 2009, es necesario rescribir los bloques de funciones de las simulaciones presentadas en el capítulo anterior. De esta manera, es posible completar la descripción de la estrategia de control agregando los bloques del dSPACE, como se muestra en la Figura 4.3.

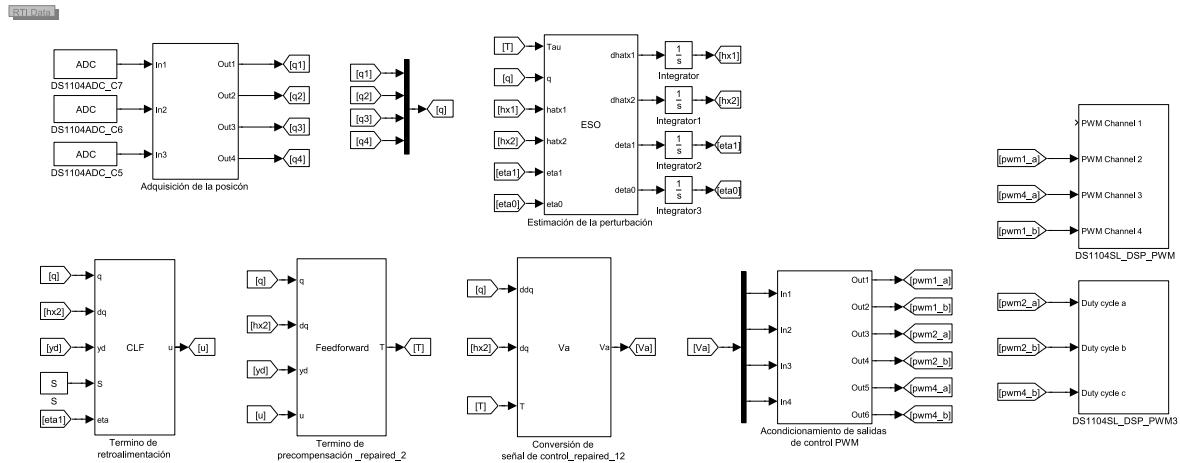


Figura 4.3: Descripción de la estrategia de control en bloques de Simulink para la implementación con dSPACE

Con referencia a la lectura de los sensores de posición de los actuadores, se utilizó el bloque DS1104ADC_CX que hace referencia a los canales analógicos de entrada de la plataforma dSPACE. Estas entradas cuentan con un convertidor analógico-digital de 12-bits, el cual es necesario multiplicar por 10 debido a una atenuación que se presenta en la lectura de la señal. Por último, se realiza la conversión de la señal medida por el sensor a longitud (metros) que corresponde, esto se hace dividiendo la longitud máxima entre el voltaje de alimentación de los sensores y multiplicando el resultado por la señal medida. De este modo se obtienen las posiciones lineales de los actuadores, las cuales es necesario convertir a posiciones angulares usando la ecuación (2.75).

Por otra parte, es necesario ajustar la señal de salida de la ley de control para convertirla en una señal PWM con la cual se opera el módulo de control de los actuadores. Para lo cual, se divide la salida de la ley de control entre el voltaje de alimentación de los actuadores, después el resultado entra aún saturador que va de -1 a 1 , el cual a su vez se utiliza en un bloque de decisión, donde dependiendo si es positivo o negativo activa y desactiva uno u otro PWM. Debido a que las señales de entrada con las que operan tanto el bloque DS1104SL_DSP_PWM como el bloque DS1104SL_DSP_PWM3 deben ser positivas, se saca el absoluto de la señal de control que proviene del saturador y luego se multiplica por cada salida del bloque de decisión, esto mandará a cero alguno de las señales o ambas según sea el caso, finalmente, así se generan los PWM necesarios para el control.

En las Figuras 4.4 y 4.5, se presentan diagramas de conexión correspondientes a los bloques de simulación, DS1104SL_DSP_PWM y DS1104SL_DSP_PWM3, utilizados para generar las señales de PWM. La finalidad de estos diagramas, es facilitar el reconocimiento y conexión de la terminal de PWMs.

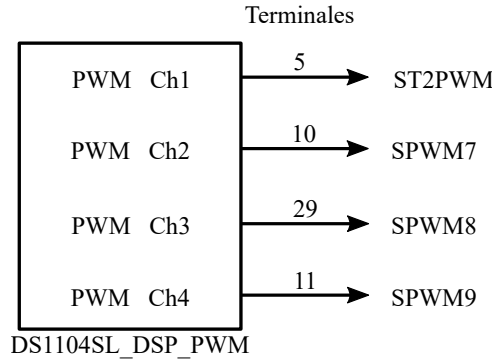


Figura 4.4: Diagrama de conexión del bloque DS1104SL_DSP_PWM.

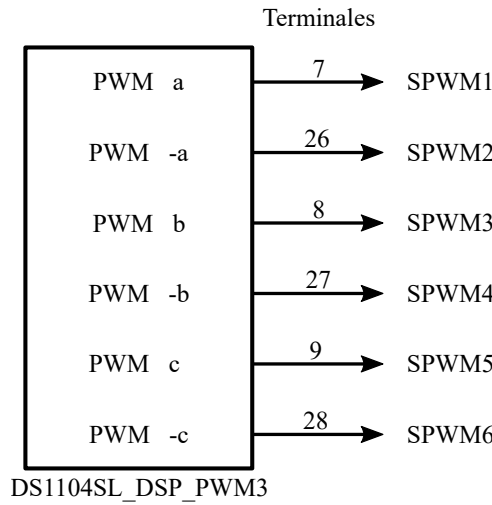


Figura 4.5: Diagrama de conexión del bloque DS1104SL_DSP_PWM3.

4.2.1. Resultados en tiempo real

Con el propósito de validar la estrategia de control basada en ADRC y CLF planteada en el capítulo anterior, se realizaron pruebas de estabilidad para el control de posición de las posiciones articulares. Durante la realización de esta prueba, la posición de referencia de cada actuador se fue determinando por medio de una barra deslizante en el panel de control, el cual se creo por medio del programa ControlDesk, ver Figura 4.6.

Los datos de las variables medidas de las pruebas, también se obtiene por medio del programa ControlDesk, lo que se realiza a través de fijar un tiempo, en segundos, que determina cada cuanto se guarda una muestra de la simulación, es decir, cada vez que se completa el tiempo asignado, se guarda una muestra en la carpeta determinada como un archivo de MATLAB. Para las pruebas realizadas se asigno un tiempo de muestra de 15 segundos.

Entre las variables medidas se incluyen las posiciones articulares en tiempo real y las referencias de las mismas, de tal modo que se obtuvo la respuesta del algoritmo de control

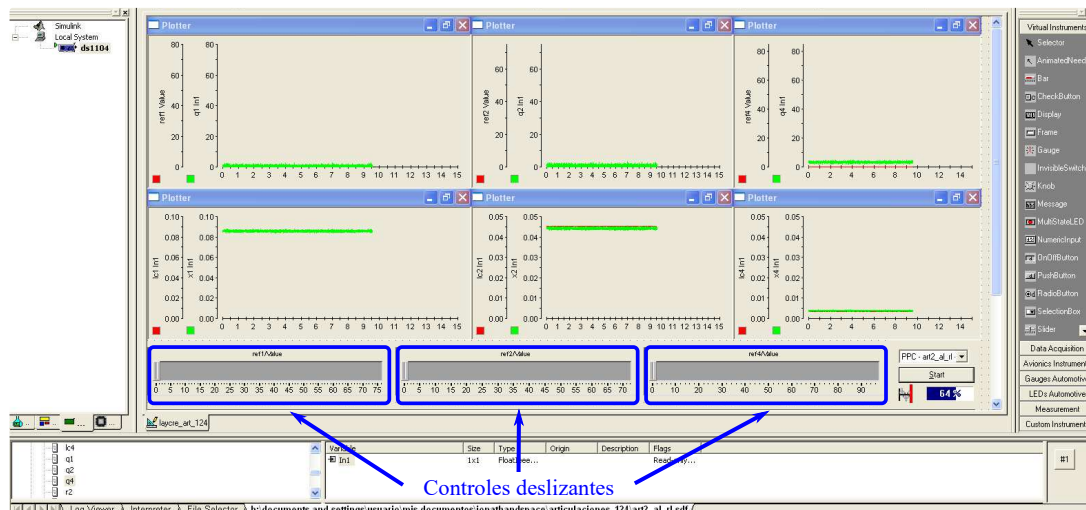
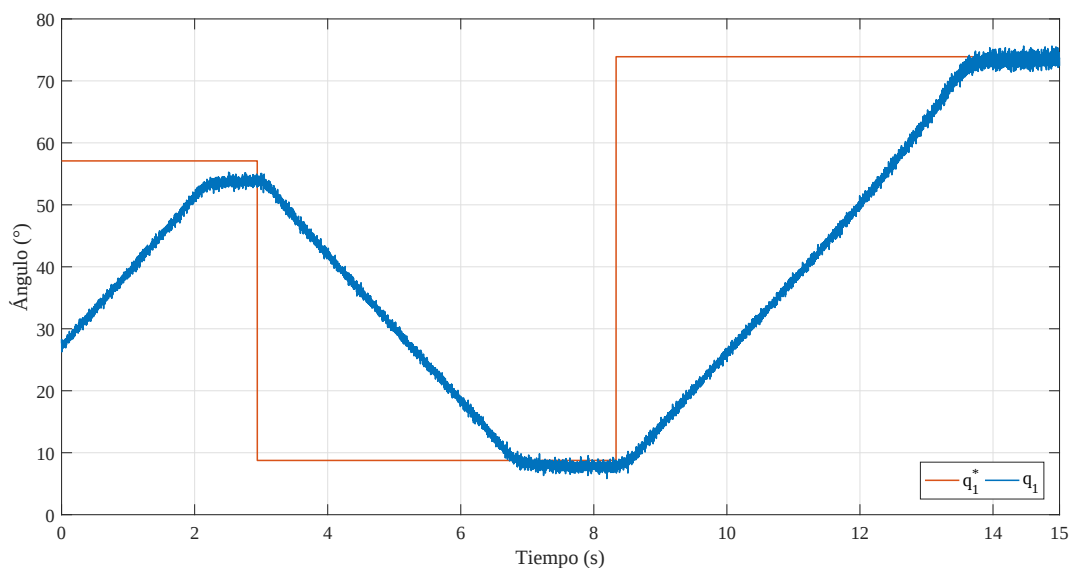


Figura 4.6: Tablero de instrumentación y control, desarrollado en ControlDesk.

para estabilizar el sistema a las posiciones deseadas. En las Figuras 4.7, 4.8 y 4.9, se muestran la evolución tanto de las referencias como de las posiciones articulares de las articulaciones implementadas: a_1 , a_2 y a_4 , respectivamente.


 Figura 4.7: Evolución de la posición de la articulación a_1 .

Debido a la forma de guardar los datos de las pruebas que tiene la plataforma junto con el programa, las referencias de las gráficas de las pruebas no necesariamente inician en 0. Sin embargo, lo interesante es observar que llegue al estado estable y el tiempo que tarda en alcanzarlo. En la Figura 4.7 se puede apreciar que tarda más tiempo en alcanzar la referencia, esto es debido a que la respuesta del actuador es más lenta.

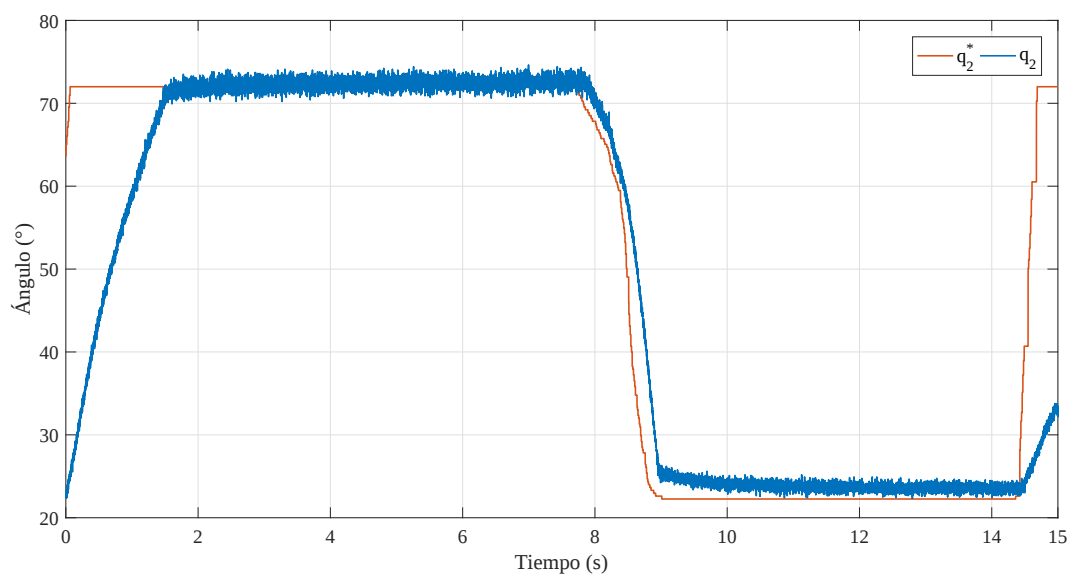


Figura 4.8: Evolución de la posición de la articulación a_2 .

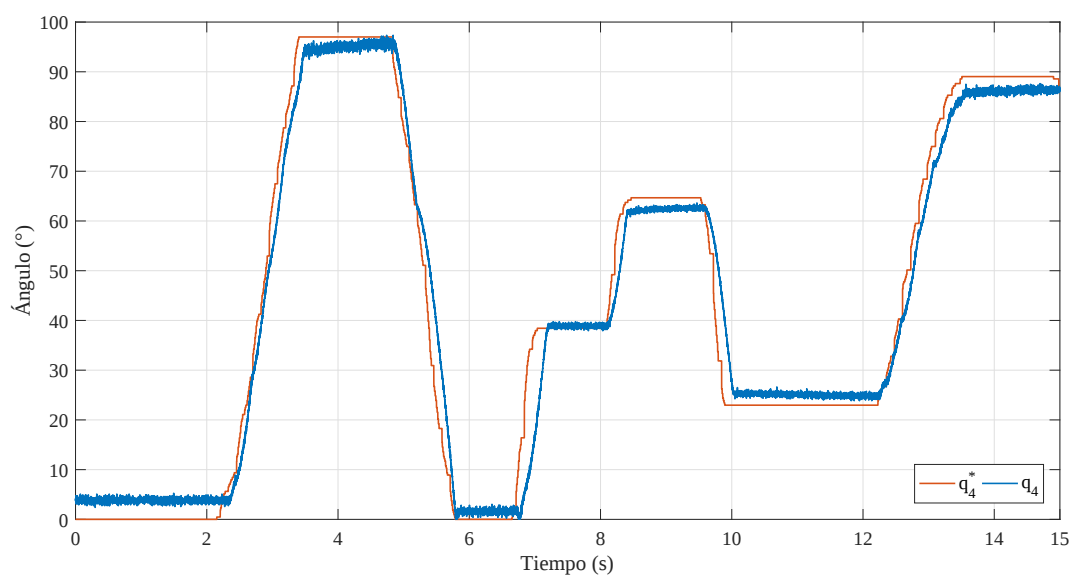


Figura 4.9: Evolución de la posición de la articulación a_4 .

Las pruebas en tiempo real del algoritmo de control proporcionan los resultados de estabilidad en el control de posición del BRH-I del SRH. Estos resultados incluyen parámetros desconocidos del modelo, que el algoritmo de control toma como perturbaciones, por lo cual, el algoritmo de control propuesto permite el control de posición de manera estable y robusta.

Conclusiones

La principal aportación de este trabajo de tesis es el diseño e implementación de una estrategia de control basada en ADRC y CLF para el control de posición y trayectoria de los miembros superiores, o brazos robóticos, de un robot antropomórfico humanoide.

En la primera etapa se obtuvo el modelo matemático en coordenadas articulares del SRH diseñado y construido en la BUAP-FCE, además, este modelo incluye el modelo de los actuadores empleados en el SRH. Por tal motivo el modelo matemático se dividió en dos sistemas: por una parte el modelo del SRH y por otra el modelo de los actuadores. Visto de una manera modular, esto permite sustituir el módulo de los actuadores por otro en el caso de decidir cambiarlos. Primero se desarrolló el modelo del SRH mediante el formalismo de Euler-Lagrange, se obtuvieron los parámetros mediante el software de diseño por computadora y se validó dicho modelo a través de una simulación en lazo abierto. Posteriormente, se obtuvieron los modelos de los actuadores aproximando la respuesta de cada uno a un sistema de primer orden, debido a que no se cuenta con los parámetros suficientes para realizar un modelo más preciso de dichos actuadores. Sin embargo, los resultados mostrados en la simulación de los actuadores muestran que es una buena aproximación de los modelos de cada actuador. La importancia de obtener el modelo matemático del SRH es que permite desarrollar y simular los algoritmos de control, ya sean libres o basados en modelo.

En la segunda etapa, se diseñó la propuesta de control de posición para el BRH-I del SRH, esta estrategia de control está basada en la técnica ADRC+CLF. Con la aplicación de estas dos técnicas de control, se pretendía que el sistema fuera menos dependiente del modelo, robusto ante las perturbaciones y convergiera a la posición deseada. Mediante la simulación en lazo cerrado de la estrategia de control, se validó el seguimiento de las trayectorias de referencia y los resultados en simulación muestran que la idea de agrupar a los términos desconocidos del modelo del sistema dentro del término de perturbación total junto con la perturbación externa, resulta interesante porque pone en evidencia la poca dependencia del control hacia el modelo matemático y garantiza la interacción con su entorno cualquiera que este sea. Se completó el análisis de la estrategia de control agregando el bloque de actuadores a la simulación, de tal forma que el torque de salida de los

actuadores τ_a sea igual la salida del control τ . Los resultados obtenidos de la simulación en lazo cerrado muestran el correcto funcionamiento del control agregando el modelo de los actuadores.

Por otro lado, se probó que dos brazos robóticos pueden trabajar en consenso, si se considera a cada brazo como un agente independiente. Se desarrolló un algoritmo de consenso, líder seguidor, que consiguió sincronizar el seguimiento de trayectorias de ambos brazos del SRH. De igual manera se validó el algoritmo de consenso mediante una simulación, en la cual se aplicó una perturbación para demostrar la robustez de los algoritmos de control independientes y la adecuada sincronización ante estos casos.

Finalmente, se realizó la implementación del algoritmo de control utilizando el SRH diseñado y construido en la BUAP-FCE, junto con la plataforma experimental dSPACE DS1104. Durante las pruebas, se pudo observar que el SRH no cuenta con la resistencia suficiente para soportar los torques generados por el peso de los actuadores y los movimientos, por lo cual se sugiere reconstruir dicho sistema con materiales de mayor resistencia. Además, el actuador lineal de la articulación a_2 no proporciona el torque suficiente para mover dicha articulación, una opción sería cambiar el actuador por uno de mayor torque sin modificar el diseño o mantener el mismo actuador y cambiar la disposición del diseño pero esto no asegura que pueda dar el torque necesario para el movimiento. Por otra parte, de respuesta del control se puede concluir que el funcionamiento es correcto pero es posible disminuir el error realizando un modelado de los actuadores más preciso o agregando un lazo interno de control en los actuadores que realice un seguimiento de torque, esto último sería lo más recomendable.

Desde una perspectiva general, este trabajo de investigación deja establecidas las bases necesarias para continuar con el desarrollo de sistemas colaborativos conformados por brazos robóticos y, posteriormente, un robot humanoide. Algunas opciones se presentan en la siguiente sección de trabajos a futuro.

Trabajos a futuro

En base a los aportes alcanzados de este trabajo, es posible plantear diferentes trabajos a futuro con el objetivo de mejorar los resultados obtenidos y de continuar el desarrollo del sistema robótico humanoide de doble brazo, algunos trabajos a futuro son:

- Diseñar un lazo de control interno para asegurar el seguimiento del torque por parte de los actuadores.

- Realizar las mejoras necesarias en el SRH, para poder implementar los algoritmos de control en ambos brazos.
- Implementar el algoritmo de control, en cada brazo robótico, en una tarjeta DSP con terminales PWM suficientes para las 4 articulaciones.
- Implementar el algoritmo de consenso utilizando un control descentralizado.

Bibliografía

- [1] H. Kitano and M. Asada. Robocup humanoid challenge: that's one small step for a robot, one giant leap for mankind. In *Proceedings. 1998 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Innovations in Theory, Practice and Applications (Cat. No.98CH36190)*, volume 1, pages 419–424 vol.1, Oct 1998.
- [2] A. Barrientos, A.B. Cruz, L.F. Peñín, and C. Balaguer. *Fundamentos de robótica*. McGraw-Hill, 2007.
- [3] A. Ollero. *Robótica*. Alfaomega, Barcelona, 2007.
- [4] Varios Autores. Iso 8373:2012 - robots and robotic devices – vocabulary. http://www.iso.org/iso/iso_catalogue/catalogue_tc/catalogue_detail.htm?csnumber=55890, 2014.
- [5] Varios Autores. International federation of robotics. <https://ifr.org/free-downloads/>, 2018.
- [6] Varios Autores. Honda worldwide | asimo | history. <http://world.honda.com/ASIMO/history/>, 2018.
- [7] Y. Sakagami, R. Watanabe, C. Aoyama, S. Matsunaga, N. Higaki, and K. Fujimura. The intelligent asimo: system overview and integration. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, volume 3, pages 2478–2483 vol.3, Sep. 2002.
- [8] Varios Autores. Pepper, the humanoid robot from softbank robotics. <https://www.ald.softbankrobotics.com/en/robots/pepper>, 2018.
- [9] Varios Autores. Yumi - robots industriales | abb. <http://new.abb.com/products/robotics/es/robots-industriales/yumi>, 2018.
- [10] Varios Autores. Baxter collaborative robots for industrial automation | rethink robotics. <https://www.rethinkrobotics.com/baxter/>, 2018.

- [11] D. Surdilovic, Y. Yakut, T. Nguyen, X. B. Pham, A. Vick, and R. Martin-Martin. Compliance control with dual-arm humanoid robots: Design, planning and programming. In *2010 10th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*, pages 275–281, Dec 2010.
- [12] C.M. Bergren. *Anatomy of a robot*. McGraw Hill, New York, 2003.
- [13] Jonathan Morones Reyes. Diseño y construcción de una estructura articulada antropomórfica para torso, brazo y cuello, 2017.
- [14] T. Zhao, J. Yuan, M. Zhao, and D. Tan. Research on the kinematics and dynamics of a 7-dof arm of humanoid robot. In *2006 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, pages 1553–1558, Dec 2006.
- [15] F. Reyes. *Robótica - control de robots manipuladores*. Alfaomega Grupo Editor, 2011.
- [16] E. Hernández, R. Velázquez, N. I. Giannoccaro, and C. A. Gutiérrez. Kinematic analysis and workspace simulation of humanoid robot kubo. In *2017 IEEE 37th Central America and Panama Convention (CONCAPAN XXXVII)*, pages 1–6, Nov 2017.
- [17] M. A. Diftler, J. S. Mehling, M. E. Abdallah, N. A. Radford, L. B. Bridgwater, A. M. Sanders, R. S. Askew, D. M. Linn, J. D. Yamokoski, F. A. Permenter, B. K. Hargrave, R. Platt, R. T. Savely, and R. O. Ambrose. Robonaut 2 - the first humanoid robot in space. In *2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2178–2183, May 2011.
- [18] J.J. Craig. *Robótica*. Area ingeniería. Pearson Educación de México, 2006.
- [19] M.W. Spong, S. Hutchinson, and M. Vidyasagar. *Robot Modeling and Control*. John Wiley & Sons, Inc., 2005.
- [20] Richard M. Murray, S. Shankar Sastry, and Li Zexiang. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA, 1st edition, 1994.
- [21] R.P. Paul. *Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control : the Computer Control of Robot Manipulators*. Artificial Intelligence Series. MIT Press, 1981.
- [22] R. Kelly, V. Santibáñez, and A. Loria. *Control of robot manipulators in joint space*. SpringerVerlag London, 2005.
- [23] Wenchao Xue, Yi Huang, and Zhiqiang Gao. On adrc for non-minimum phase systems: canonical form selection and stability conditions. *Control Theory and Technology*, 14(3):199–208, Aug 2016.

- [24] Yi Huang and Wenchao Xue. Active disturbance rejection control: Methodology and theoretical analysis. *ISA Transactions*, 53(4):963 – 976, 2014. Disturbance Estimation and Mitigation.
- [25] Hebertt Sira-Ramírez, Alberto Luviano-Juárez, Mario Ramírez-Neria, and Eric William Zurita-Bustamante. *Active Disturbance Rejection Control of Dynamic Systems: A Flatness-Based Approach*. Butterworth-Heinemann, 2017.
- [26] J. Han. From pid to active disturbance rejection control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 56(3):900–906, March 2009.
- [27] J. Wu, Y. Wang, J. Huang, and K. Xing. Artificial bee colony algorithm based auto-disturbance rejection control for rehabilitation robotic arm driven by pm-ts actuator. In *2012 Proceedings of International Conference on Modelling, Identification and Control*, pages 802–807, June 2012.
- [28] A. Shahmansoorian, B. Moshiri, A. Khaki Sedigh, and S. Mohammadi. A new stabilizing control law with respect to a control lyapunov function and construction of control lyapunov function for particular nonaffine nonlinear systems. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 13(4):563–576, Oct 2007.
- [29] Miroslav Krstic, Petar V. Kokotovic, and Ioannis Kanellakopoulos. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1st edition, 1995.
- [30] Zvi Artstein. Stabilization with relaxed controls. volume 7, pages 1163 – 1173, 1983.
- [31] J.F. Guerrero-Castellanos, H. Rifaï, V. Arnez-Paniagua, J. Linares-Flores, L. Saynes-Torres, and S. Mohammed. Robust active disturbance rejection control via control lyapunov functions: Application to actuated–ankle–foot–orthosis. *Control Engineering Practice*, 80:49 – 60, 2018.
- [32] Randy A. Freeman and Petar V. Kototovic. *Robust Nonlinear Control Design: State-space and Lyapunov Techniques*. Birkhauser Boston Inc., Cambridge, MA, USA, 1996.
- [33] D. Liberzon. *Nonlinear and Adaptive Control*. Lecture Notes, España, October 2016.
- [34] E. D. Sontag. *Mathematical control theory, deterministic finite dimensional systems*. Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg, second edition, 1998.
- [35] Eduardo D. Sontag. A ‘universal’ construction of artstein’s theorem on nonlinear stabilization. *Systems & Control Letters*, 13(2):117 – 123, 989.

Apéndice A

Actuadores Lineales



Feedback Rod Linear Actuator



Capable, versatile, and offering repeatable performance, the Feedback Rod Linear Actuator is equipped with a Bourns 10 turn potentiometer allowing you to determine the position of the actuator at any point in time. This actuator is available in various strokes with forces ranging from 35 - 200 lbs.

Standard Features and Benefits

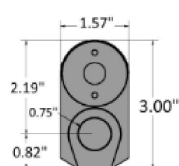
- **Internal limit switches** automatically shut off the unit at the end of stroke
- **Standard stroke lengths** of 2, 4, 6, 8, and 12 inches are available
- Delivers up to **200 lbs. of force** at an extension speed of .3 inches per second
- **IP 54 rated** - limited ingress protection
- **Temperature operating range** of -15°F to 150°F (-26°C to 65°C)
- Built in **Bourns potentiometer** with 10k Ohm resistance
- **High grade aluminum housing** resists corrosion
- Easily connects to feedback reading device like **Arduino**
- **Maintenance free**
- **CE and RoHS** certified

Specifications

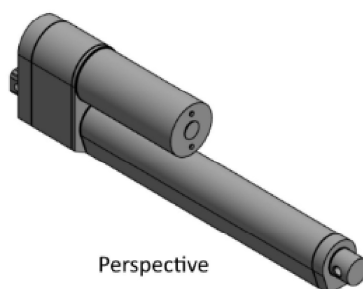
Model	FA-PO-35-12-XX	FA-PO-150-12-XX	FA-PO-240-12-XX
Dynamic Force	35 lb	150 lb	240 lb
Static Force	70lb	300 lb	400 lb
Speed (inches/second)	2 inches	0.5 inches	0.3 inches
Duty Cycle	20% at 100% load, 50% at 25% load. Max. 5 minutes continuous use		
Stroke Length	2, 4, 6, 8, and 12 inches		
IP Rating	54		
Input	12 volt DC		
Max Draw	5 A		
Clevis End	1/4" diameter		
Operational Temperature	-15°F to 150°F (-26°C to 65°C)		
Limit Switch	Built-in (factory preset)		
Safety Certifications	CE, RoHS		
Brackets	MB1 and/or MB6		
Feedback	10K Ohm 3-wire potentiometer, Linearity +/- 0.25% Power Rating 1 - 1.5 W		

Dimensions and Weight

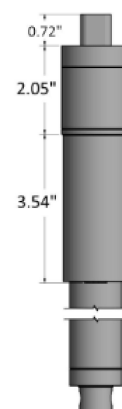
Stroke	Retracted Length	Extended Length	Weight
2 "	7.9 "	9.9 "	2.7 lbs
4 "	9.9 "	13.9 "	2.9 lbs
6 "	11.9 "	17.9 "	3.1 lbs
8 "	13.9 "	21.9 "	3.4 lbs
12 "	17.9 "	29.9 "	3.85 lbs



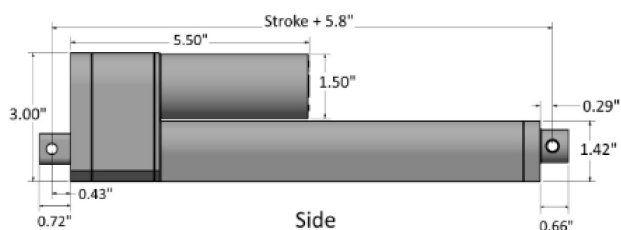
Front



Perspective



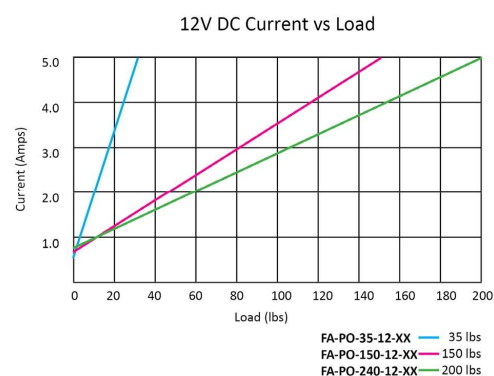
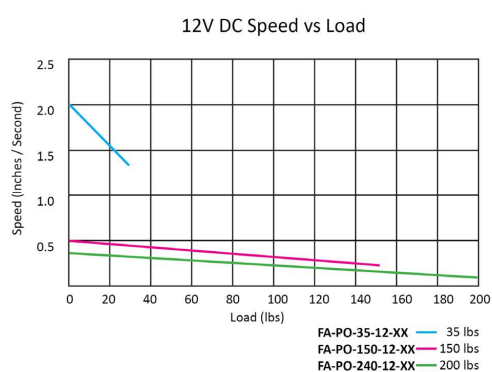
Top



Side

FA-PO-35-12-X
FA-PO-150-12-X
FA-PO-240-12-X

Performance Graphs



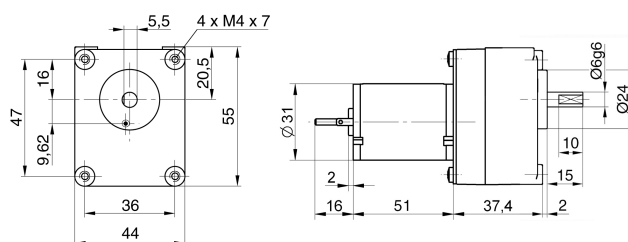
Apéndice B

Motoreductor



KELVIN
— A MOVERICA COMPANY —
www.kelvingear.com

Reductor + Motor **K30-1.13.021.xxx**



K30-Fijación

CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS

Reductor de gran resistencia mecánica para trabajo duro e intensivo en cualquier posición, a temperatura ambiente de -15 a 50°C, con par de utilización hasta 3 Nm, con carga uniforme.

- **Caja.** De fundición inyectada en Zamak, con fijación frontal por cuatro taladros roscados M4.
- **Reducción.** De engranajes rectos tallados, con piñones y ruedas de acero con tratamiento térmico superficial antifricción. El rodaje intermedio gira en ejes de acero tratado y rectificadas, fijos en la caja.
- **Eje de salida.** De acero, de Ø6 x 15 mm de longitud útil, con rebaje plano. Gira en rodamiento de bolas por el lado de salida y de agujas por el lado posterior.
- **Carga en el eje de salida:**

Dirección axial a la tracción	200 N ≈ 20 Kg.
Dirección axial al empuje	20 N ≈ 2 Kg.
Dirección radial, a 8 mm desde la caja	150 N ≈ 15 Kg.

- **Engrase.** Grasa al litio, grado 2.

- **Peso neto.** Con máximo número de pasos: 0,5 Kg.

ACOPLAMIENTO A MOTOR:

- **C. Continua:** tipo 1.13.021.301, 12 V - 6,3 W.
tipo 1.13.021.302, 24 V - 6,3 W.

■ OPCIONAL:

- Eje de salida de Ø8, sin rebaje plano.
- Fijación vertical por dos taladros roscados M4.
- Regulación de velocidad con variador electrónico CMC 30-6.

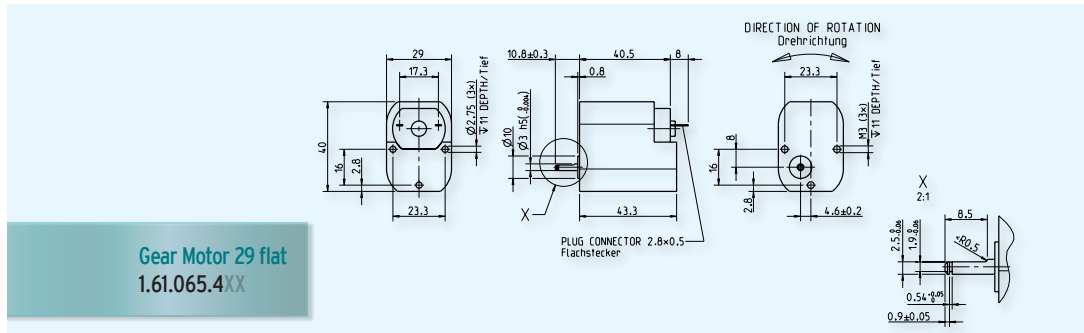
Evitar montar o desmontar ninguna pieza a golpes en el eje de salida, ya que podría dañar el reductor de forma irreparable.

Otras ejecuciones especiales, consultar.

B.1. Motor Buhler



Stock Service



■ Type / Baureihe 1.61.065.XXX

	Characteristics* / Nenndaten*					No load characteristics* / Leerlaufdaten*		Features* / Kenndaten*			
	Rated voltage Nenn- spannung	Rated current Nenn- strom	Rated torque Nenn-dreh- moment	Rated speed Nenn- drehzahl	Rotation Dreh- richtung	No load speed Leerlauf- drehzahl	No load current Leerlauf- strom	max. Torque max. Dreh- moment	Terminal resistance Anschluss- widerstand	Gear ratio Unter- setzungs- verhältnis	Stages Stufen
XXX	U/V / V	I _n / A	T _n /M _n / Ncm	n _n / rpm/min ⁻¹		n ₀ / rpm/min ⁻¹	I ₀ / A	T _{max} /M _{max} /Ncm	R / Ohm	i	
403	6	0.330	4.5	136	cw	190	0.125	6.3	6.5	27.4	4
404	6	0.330	9.0	64	ccw	91	0.125	12.6	6.5	56.6	5
405	6	0.280	15	34	cw	44	0.125	21	6.5	117	6
406	6	0.240	20	18	ccw	22	0.125	28	6.5	242	7
407	6	0.165	20	9.5	cw	10.5	0.125	28	6.5	499	8
408	6	0.150	20	4.8	ccw	5.1	0.125	42	6.5	1032	9
423	12	0.170	4.5	136	cw	190	0.060	6.3	27	27.4	4
424	12	0.170	9.0	64	ccw	91	0.060	12.6	27	56.6	5
425	12	0.140	15	34	cw	44	0.060	21	27	117	6
426	12	0.115	20	18	ccw	22	0.060	28	27	242	7
427	12	0.080	20	9.5	cw	10.5	0.060	28	27	499	8
428	12	0.065	20	4.8	ccw	5.1	0.060	42	27	1032	9
443	18	0.115	4.5	136	cw	190	0.050	6.3	61	27.4	4
444	18	0.115	9.0	64	ccw	91	0.050	12.6	61	56.6	5
445	18	0.100	15	34	cw	44	0.050	21	61	117	6
446	18	0.080	20	18	ccw	22	0.050	28	61	242	7
447	18	0.065	20	9.5	cw	10.5	0.050	28	61	499	8
448	18	0.055	20	4.8	ccw	5.1	0.050	42	61	1032	9
463	24	0.090	4.5	147	cw	202	0.045	6.3	93	27.4	4
464	24	0.090	9.0	69	ccw	97	0.045	12.6	93	56.6	5
465	24	0.080	15	35	cw	47	0.045	21	93	117	6
466	24	0.065	20	19	ccw	23	0.045	28	93	242	7
467	24	0.042	20	10	cw	11	0.045	28	93	499	8
468	24	0.038	20	5.3	ccw	5.5	0.045	42	93	1032	9

Apéndice C

Puente H

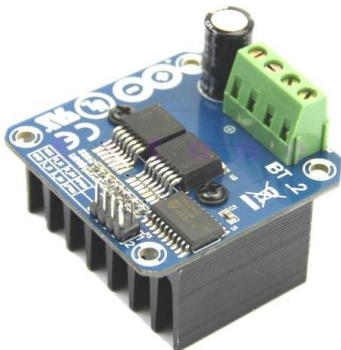


Handson Technology

User Guide

BTS7960 High Current 43A H-Bridge Motor Driver

The BTS7960 is a fully integrated high current H bridge module for motor drive applications. Interfacing to a microcontroller is made easy by the integrated driver IC which features logic level inputs, diagnosis with current sense, slew rate adjustment, dead time generation and protection against overtemperature, overvoltage, undervoltage, overcurrent and short circuit. The BTS7960 provides a cost optimized solution for protected high current PWM motor drives with very low board space consumption.



SKU: [DRV-1012](#)

Brief Data:

- Input Voltage: 6 ~ 27Vdc.
- Driver: Dual BTS7960 H Bridge Configuration.
- Peak current: 43-Amp.
- PWM capability of up to 25 kHz.
- Control Input Level: 3.3~5V.
- Control Mode: PWM or level
- Working Duty Cycle: 0 ~100%.
- Over-voltage Lock Out.
- Under-voltage Shut Down.
- Size: 46mm x 46mm x 38mm.
- Weight: ~66g.

1 | www.handsontec.com

Apéndice D

Modelo dinámico del BRH-I

En este apéndice se desglosan los términos dentro del modelo dinámico del BRH-I, que perteneces al SRH, partiendo de la ecuación compacta de un manipulador robótico.

$$M(q)\ddot{q} + \mathcal{C}(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (\text{D.1})$$

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) & M_{13}(q) & M_{14}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) & M_{23}(q) & M_{24}(q) \\ M_{31}(q) & M_{32}(q) & M_{33}(q) & M_{34}(q) \\ M_{41}(q) & M_{42}(q) & M_{43}(q) & M_{44}(q) \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) & C_{13}(q, \dot{q}) & C_{14}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) & C_{23}(q, \dot{q}) & C_{24}(q, \dot{q}) \\ C_{31}(q, \dot{q}) & C_{32}(q, \dot{q}) & C_{33}(q, \dot{q}) & C_{34}(q, \dot{q}) \\ C_{41}(q, \dot{q}) & C_{42}(q, \dot{q}) & C_{43}(q, \dot{q}) & C_{44}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \\ g_3(q) \\ g_4(q) \end{bmatrix} \quad (\text{D.4})$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} \quad (\text{D.5})$$

donde

$$\begin{aligned}
 M_{11}(q) = & I_1 + l_{c4}^2 m_4 + l_2^2 m_3 \cos(q_2)^2 + l_2^2 m_4 \cos(q_2)^2 + l_3^2 m_4 \cos(q_2)^2 \\
 & + l_{c2}^2 m_2 \cos(q_2)^2 + l_{c3}^2 m_3 \cos(q_2)^2 - l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2)^2 - l_{c4}^2 m_4 \cos(q_4)^2 \\
 & + l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2)^2 \cos(q_3)^2 + 2l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2)^2 \cos(q_4)^2 + 2l_2 l_3 m_4 \cos(q_2)^2 \\
 & + 2l_2 l_{c3} m_3 \cos(q_2)^2 - l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2)^2 \cos(q_3)^2 \cos(q_4)^2 \\
 & + 2l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2)^2 \cos(q_4) + 2l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2)^2 \cos(q_4) \\
 & + 2l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) \\
 & + 2l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) \\
 & + 2l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4)
 \end{aligned} \tag{D.6}$$

$$\begin{aligned}
 M_{12}(q) = & l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_4) - l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_3) \\
 & + l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4) + l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4) \\
 & + l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4)^2 \sin(q_3)
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

$$\begin{aligned}
 M_{13}(q) = & l_{c4}^2 m_4 \cos(q_4)^2 \sin(q_2) - l_{c4}^2 m_4 \sin(q_2) - l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_3) \sin(q_4) \\
 & - l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) - l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4)
 \end{aligned} \tag{D.8}$$

$$\begin{aligned}
 M_{14}(q) = & l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) + l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \\
 & + l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4)
 \end{aligned} \tag{D.9}$$

$$\begin{aligned}
 M_{21}(q) = & l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_4) - l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_3) \\
 & + l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4) + l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4) \\
 & + l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4)^2 \sin(q_3)
 \end{aligned} \tag{D.10}$$

$$\begin{aligned}
 M_{22}(q) = & I_2 + l_2^2 m_3 + l_2^2 m_4 + l_3^2 m_4 + l_{c2}^2 m_2 + l_{c3}^2 m_3 + l_{c4}^2 m_4 + 2l_2 l_3 m_4 \\
 & + 2l_2 l_{c3} m_3 - l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3)^2 + l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3)^2 \cos(q_4)^2 \\
 & + 2l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_4) + 2l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_4)
 \end{aligned} \tag{D.11}$$

$$\begin{aligned}
 M_{23}(q) = & -l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_4) - l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \sin(q_4) \\
 & - l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \sin(q_4)
 \end{aligned} \tag{D.12}$$

$$M_{24}(q) = -l_{c4}^2 m_4 \sin(q_3) - l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_4) \sin(q_3) - l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_4) \sin(q_3) \tag{D.13}$$

$$\begin{aligned}
 M_{31}(q) = & (l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_4) \sin(q_2))/2 - (l_{c4}^2 m_4 \sin(q_2))/2 \\
 & - (l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_4) \cos(q_2) \sin(q_3))/2 - l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) \\
 & - l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4)
 \end{aligned} \tag{D.14}$$

$$\begin{aligned}
 M_{32}(q) = & -(l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_4) \cos(q_3))/2 - l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \sin(q_4) \\
 & - l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \sin(q_4)
 \end{aligned} \tag{D.15}$$

$$M_{33}(q) = I_3 + (l_{c4}^2 m_4)/2 - (l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_4))/2 \tag{D.16}$$

$$M_{34}(q) = 0 \tag{D.17}$$

$$M_{41}(q) = l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) + l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) + l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \quad (D.18)$$

$$M_{42}(q) = -l_{c4}^2 m_4 \sin(q_3) - l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_4) \sin(q_3) - l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_4) \sin(q_3) \quad (D.19)$$

$$M_{43}(q) = 0 \quad (D.20)$$

$$M_{44}(q) = m_4 l_{c4}^2 + I_4 \quad (D.21)$$

$$\begin{aligned} C_{11}(q, \dot{q}) = & \dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_2) - \dot{q}_2 l_2^2 m_4 \sin(2q_2) - \dot{q}_2 l_3^2 m_4 \sin(2q_2) - \dot{q}_2 l_{c2}^2 m_2 \sin(2q_2) \\ & - \dot{q}_2 l_{c3}^2 m_3 \sin(2q_2) - \dot{q}_2 l_2^2 m_3 \sin(2q_2) + \dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_4) - 2\dot{q}_2 l_2 l_3 m_4 \sin(2q_2) \\ & - 2\dot{q}_2 l_2 l_{c3} m_3 \sin(2q_2) - 2\dot{q}_4 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2)^2 \sin(q_4) - 2\dot{q}_4 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2)^2 \sin(q_4) \\ & - 2\dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \sin(q_2) \sin(q_3) - 2\dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_4) \sin(q_3) \sin(q_4) \\ & - 2\dot{q}_2 l_2 l_{c4} m_4 \sin(q_3) \sin(q_4) - 2\dot{q}_2 l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_3) \sin(q_4) \\ & - 2\dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3)^2 \sin(q_2) - 4\dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_4)^2 \sin(q_2) \\ & - 2\dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2)^2 \cos(q_3) \sin(q_3) - 4\dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2)^2 \cos(q_4) \sin(q_4) \\ & + 4\dot{q}_2 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2)^2 \sin(q_3) \sin(q_4) + 4\dot{q}_2 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2)^2 \sin(q_3) \sin(q_4) \\ & + 2\dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3)^2 \cos(q_4)^2 \sin(q_2) \\ & + 2\dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2)^2 \cos(q_3) \cos(q_4)^2 \sin(q_3) \\ & + 2\dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2)^2 \cos(q_3)^2 \cos(q_4) \sin(q_4) - 4\dot{q}_2 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_2) \\ & - 4\dot{q}_2 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_2) + 4\dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2)^2 \cos(q_4) \sin(q_3) \sin(q_4) \\ & + 4\dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_4)^2 \sin(q_2) \sin(q_3) \\ & + 2\dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_4) \\ & + 2\dot{q}_3 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4) \\ & + 2\dot{q}_3 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4) \\ & + 2\dot{q}_4 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_3) \\ & + 2\dot{q}_4 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_3) \end{aligned} \quad (D.22)$$

$$\begin{aligned}
 C_{12}(q, \dot{q}) = & \dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_2) - \dot{q}_1 l_2^2 m_4 \sin(2q_2) - \dot{q}_1 l_3^2 m_4 \sin(2q_2) - \dot{q}_1 l_{c2}^2 m_2 \sin(2q_2) \\
 & - \dot{q}_1 l_{c3}^2 m_3 \sin(2q_2) - \dot{q}_1 l_2^2 m_3 \sin(2q_2) - 2\dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3)^2 \\
 & - 2\dot{q}_1 l_2 l_3 m_4 \sin(2q_2) - 2\dot{q}_1 l_2 l_{c3} m_3 \sin(2q_2) - 2\dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \sin(q_2) \\
 & + 2\dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3)^2 \cos(q_4)^2 + \dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_3) \\
 & - 2\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_4) \sin(q_3) \sin(q_4) - 2\dot{q}_1 l_2 l_{c4} m_4 \sin(q_3) \sin(q_4) \\
 & - 2\dot{q}_1 l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_3) \sin(q_4) - 2\dot{q}_1 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_3)^2 \sin(q_2) \\
 & - 4\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_4)^2 \sin(q_2) + 2\dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \cos(q_4)^2 \sin(q_2) \\
 & + 4\dot{q}_1 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2)^2 \sin(q_3) \sin(q_4) + 4\dot{q}_1 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2)^2 \sin(q_3) \sin(q_4) \\
 & + 2\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3)^2 \cos(q_4)^2 \sin(q_2) + \dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_4) \\
 & - 4\dot{q}_1 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_2) - 4\dot{q}_1 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_2) \\
 & + \dot{q}_2 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_4) + \dot{q}_2 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_4) \\
 & + 4\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2)^2 \cos(q_4) \sin(q_3) \sin(q_4) - \dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \cos(q_4)^2 \sin(q_2) \sin(q_3) \\
 & - 2\dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_3) \sin(q_4)
 \end{aligned} \tag{D.23}$$

$$\begin{aligned}
 C_{13}(q, \dot{q}) = & 2\dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3)^2 \cos(q_4)^2 - 2\dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3)^2 \\
 & - 2\dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_4) - 2\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2)^2 \cos(q_3) \sin(q_3) \\
 & - 2\dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_4)^2 \sin(q_3) + 2\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2)^2 \cos(q_3) \cos(q_4)^2 \sin(q_3) \\
 & - \dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_4) - \dot{q}_3 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_4) \\
 & - \dot{q}_3 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_4) - 2\dot{q}_4 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_3) \\
 & - 2\dot{q}_4 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_3) + 2\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_4) \\
 & + 2\dot{q}_1 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4) \\
 & + 2\dot{q}_1 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4)
 \end{aligned} \tag{D.24}$$

$$\begin{aligned}
 C_{14}(q, \dot{q}) = & \dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_4) - 2\dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \sin(q_2) - 2\dot{q}_1 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2)^2 \sin(q_4) \\
 & - 2\dot{q}_1 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2)^2 \sin(q_4) - 2\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \sin(q_2) \sin(q_3) \\
 & - 2\dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_4) - 4\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2)^2 \cos(q_4) \sin(q_4) \\
 & + 2\dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \cos(q_4)^2 \sin(q_2) - 2\dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_4)^2 \sin(q_3) \\
 & + 2\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2)^2 \cos(q_3)^2 \cos(q_4) \sin(q_4) - 2\dot{q}_3 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_3) \\
 & - 2\dot{q}_3 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_3) - \dot{q}_4 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_4) \\
 & - \dot{q}_4 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_4) + 4\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_4)^2 \sin(q_2) \sin(q_3) \\
 & - 2\dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_3) \sin(q_4) \\
 & + 2\dot{q}_1 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_3) \\
 & + 2\dot{q}_1 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_3)
 \end{aligned} \tag{D.25}$$

$$\begin{aligned}
 C_{21}(q, \dot{q}) = & 0.5\dot{q}_1 l_2^2 m_3 \sin(2q_2) + 0.5\dot{q}_1 l_2^2 m_4 \sin(2q_2) + 0.5\dot{q}_1 l_3^2 m_4 \sin(2q_2) \\
 & + 0.5\dot{q}_1 l_{c2}^2 m_2 \sin(2q_2) + 0.5\dot{q}_1 l_{c3}^2 m_3 \sin(2q_2) - 0.5\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_2) \\
 & + 2\dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) - 2\dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3)^2 \\
 & - 2\dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_4)^2 + \dot{q}_1 l_2 l_3 m_4 \sin(2q_2) + \dot{q}_1 l_2 l_{c3} m_3 \sin(2q_2) \\
 & + 2\dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3)^2 \cos(q_4)^2 + \dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_4) \sin(q_3) \sin(q_4) \\
 & + \dot{q}_1 l_2 l_{c4} m_4 \sin(q_3) \sin(q_4) + \dot{q}_1 l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_3) \sin(q_4) \\
 & + \dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3)^2 \sin(q_2) + 2\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_4)^2 \sin(q_2) \\
 & + 2\dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \cos(q_4)^2 \sin(q_2) - 2\dot{q}_1 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2)^2 \sin(q_3) \sin(q_4) \\
 & - 2\dot{q}_1 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2)^2 \sin(q_3) \sin(q_4) \\
 & - \dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3)^2 \cos(q_4)^2 \sin(q_2) \\
 & - 2\dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) \\
 & + 2\dot{q}_1 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_2) \\
 & + 2\dot{q}_1 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_2) + 2\dot{q}_4 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2) \\
 & + 2\dot{q}_4 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2) - 2\dot{q}_3 l_2 l_{c4} m_4 \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) \\
 & - 2\dot{q}_3 l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) \\
 & - 2\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2)^2 \cos(q_4) \sin(q_3) \sin(q_4) \\
 & - 2\dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_3) \sin(q_4)
 \end{aligned} \tag{D.26}$$

$$\begin{aligned}
 C_{22}(q, \dot{q}) = & \dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_3) - 2\dot{q}_4 l_2 l_{c4} m_4 \sin(q_4) - 2\dot{q}_4 l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_4) \\
 & - 2\dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \cos(q_4)^2 \sin(q_3) \\
 & - 2\dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3)^2 \cos(q_4) \sin(q_4)
 \end{aligned} \tag{D.27}$$

$$\begin{aligned}
 C_{23}(q, \dot{q}) = & \dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_3) + 2\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) - 2\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3)^2 \\
 & - 2\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_4)^2 - 2\dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \cos(q_4)^2 \\
 & + 2\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3)^2 \cos(q_4)^2 + \dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_4) \sin(q_3) \sin(q_4) \\
 & - 2\dot{q}_4 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \cos(q_4) - 2\dot{q}_4 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \cos(q_4) \\
 & + \dot{q}_3 l_2 l_{c4} m_4 \sin(q_3) \sin(q_4) + \dot{q}_3 l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_3) \sin(q_4) \\
 & - 2\dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \cos(q_4)^2 \sin(q_3) \\
 & - 2\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) - 2\dot{q}_1 l_2 l_{c4} m_4 \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) \\
 & - 2\dot{q}_1 l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4)
 \end{aligned} \tag{D.28}$$

$$\begin{aligned}
 C_{24}(q, \dot{q}) = & \dot{q}_4 l_2 l_{c4} m_4 \sin(q_3) \sin(q_4) - 2\dot{q}_2 l_2 l_{c4} m_4 \sin(q_4) - 2\dot{q}_2 l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_4) \\
 & - 2\dot{q}_3 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \cos(q_4) - 2\dot{q}_3 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \cos(q_4) \\
 & - 2\dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \cos(q_4)^2 + \dot{q}_4 l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_3) \sin(q_4) \\
 & + 2\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \cos(q_4)^2 \sin(q_2) - 2\dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3)^2 \cos(q_4) \sin(q_4) \quad (D.29) \\
 & + 2\dot{q}_1 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2) + 2\dot{q}_1 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2) \\
 & - 2\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_3) \sin(q_4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{31}(q, \dot{q}) = & (\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_3))/8 - (\dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2))/2 \\
 & + (\dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_3) \cos(q_2))/2 + (\dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_4) \cos(q_2))/2 \\
 & - \dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_4) \sin(q_2) + (\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_2) \sin(2q_3))/8 \\
 & - (\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_4) \sin(2q_3))/8 + \dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \sin(q_3) \\
 & + \dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \sin(q_4) \sin(q_2) \sin(q_3) \\
 & - (\dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_3) \cos(2q_4) \cos(q_2))/2 \\
 & - (\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_2) \sin(2q_4) \cos(q_3))/4 \quad (D.30) \\
 & - (\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_2) \cos(2q_4) \sin(2q_3))/8 \\
 & - \dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_4) \cos(q_2) \sin(q_3) \\
 & - 0.5\dot{q}_1 l_2 l_{c4} m_4 \sin(2q_2) \cos(q_3) \sin(q_4) \\
 & - 0.5\dot{q}_1 l_3 l_{c4} m_4 \sin(2q_2) \cos(q_3) \sin(q_4) \\
 & + 2\dot{q}_2 l_2 l_{c4} m_4 \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) \\
 & + 2\dot{q}_2 l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{32}(q, \dot{q}) = & \dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) - (\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2))/2 - (\dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_3))/4 \\
 & + (\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_3) \cos(q_2))/2 + (\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_4) \cos(q_2))/2 \\
 & - \dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_4) \cos(q_3) + (\dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_4) \sin(2q_3))/4 \\
 & + \dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_4) \sin(q_2) \sin(q_3) \quad (D.31) \\
 & - (\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_3) \cos(2q_4) \cos(q_2))/2 \\
 & + 2\dot{q}_1 l_2 l_{c4} m_4 \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) \\
 & + 2\dot{q}_1 l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4)
 \end{aligned}$$

$$C_{33}(q, \dot{q}) = \dot{q}_4 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_4) \quad (D.32)$$

$$\begin{aligned}
 C_{34}(q, \dot{q}) = & \dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_4) + \dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) - \dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_4) \cos(q_3) \\
 & - \dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_4) \sin(q_2) + \dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \sin(q_3) \quad (D.33) \\
 & - \dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(2q_4) \cos(q_2) \sin(q_3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{41}(q, \dot{q}) = & \dot{q}_1 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2)^2 \sin(q_4) - 2\dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \sin(q_3) - 0.5\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_4) \\
 & + \dot{q}_1 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2)^2 \sin(q_4) + \dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \sin(q_2) \sin(q_3) \\
 & + 2\dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_4) + 2\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2)^2 \cos(q_4) \sin(q_4) \\
 & - 2\dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \cos(q_4)^2 \sin(q_2) + 2\dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_4)^2 \sin(q_3) \\
 & - \dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2)^2 * \cos(q_3)^2 \cos(q_4) \sin(q_4) \\
 & - 2\dot{q}_2 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2) - 2\dot{q}_2 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2) \\
 & - 2\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_4)^2 \sin(q_2) \sin(q_3) \\
 & + 2\dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_3) \sin(q_4) \\
 & - \dot{q}_1 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_3) \\
 & - \dot{q}_1 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_3)
 \end{aligned} \tag{D.34}$$

$$\begin{aligned}
 C_{42}(q, \dot{q}) = & 2\dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \cos(q_4)^2 - 2\dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) + \dot{q}_3 l_2 l_{c4} m_4 \sin(q_4) \\
 & + \dot{q}_2 l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_4) - 2\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \cos(q_4)^2 \sin(q_2) \\
 & + \dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3)^2 \cos(q_4) \sin(q_4) - 2\dot{q}_1 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2) \\
 & - 2\dot{q}_1 l_3 l_{c4} m_4 \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2) \\
 & + 2\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_3) \sin(q_4)
 \end{aligned} \tag{D.35}$$

$$\begin{aligned}
 C_{43}(q, \dot{q}) = & 2\dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) \cos(q_4)^2 - 2\dot{q}_2 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_3) - 0.5\dot{q}_3 l_{c4}^2 m_4 \sin(2q_4) \\
 & - 2\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \sin(q_3) + 2\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_4) \\
 & + 2\dot{q}_1 l_{c4}^2 m_4 \cos(q_2) \cos(q_4)^2 \sin(q_3)
 \end{aligned} \tag{D.36}$$

$$C_{44}(q, \dot{q}) = 0 \tag{D.37}$$

$$\begin{aligned}
 g_1(q) = & g(l_2 m_3 \cos(q_2) \sin(q_1) + l_2 m_4 \cos(q_2) \sin(q_1) + l_3 m_4 \cos(q_2) \sin(q_1) \\
 & - l_{c2} m_2 \cos(q_2) \sin(q_1) + l_{c3} m_3 \cos(q_2) \sin(q_1) + l_{c4} m_4 \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_1) \\
 & + l_{c4} m_4 \cos(q_1) \cos(q_3) \sin(q_4) + l_{c4} m_4 \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4))
 \end{aligned} \tag{D.38}$$

$$\begin{aligned}
 g_2(q) = & g(l_2 m_3 \cos(q_1) \sin(q_2) + l_2 m_4 \cos(q_1) \sin(q_2) + l_3 m_4 \cos(q_1) \sin(q_2) \\
 & - l_{c2} m_2 \cos(q_1) \sin(q_2) + l_{c3} m_3 \cos(q_1) \sin(q_2) + l_{c4} m_4 \cos(q_1) \cos(q_4) \sin(q_2) \\
 & - l_{c4} m_4 \cos(q_1) \cos(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4))
 \end{aligned} \tag{D.39}$$

$$g_3(q) = g(l_{c4}m_4 \sin(q_1) \sin(q_3) \sin(q_4) + l_{c4}m_4 \cos(q_1) \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4)) \quad (D.40)$$

$$g_4(q) = g(l_{c4}m_4 \cos(q_1) \cos(q_2) \sin(q_4) + l_{c4}m_4 \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_1) - l_{c4}m_4 \cos(q_1) \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_3)) \quad (D.41)$$

Apéndice E

Modelo dinámico del motor DC

En éste apartado, se mostrará el modelo matemático del sistema servo-mecánico, el cual queda de la siguiente manera:

$$v(t) = R \cdot i(t) + K_e w \quad (\text{E.1})$$

$$\Rightarrow i = \frac{v}{R} - \frac{K_e w}{R} \quad (\text{E.2})$$

$$J\dot{w} = K_m \cdot i - \beta w \quad (\text{E.3})$$

Sustituyendo i en la segunda ecuación tenemos:

$$J\dot{w} = K_m \left(\frac{v}{R} - \frac{K_e w}{R} \right) - \beta w \quad (\text{E.4})$$

$$J\dot{w} = \frac{K_m v}{R} - \left(\frac{K_m K_e}{R} + \beta \right) w \quad (\text{E.5})$$

$$\left(\frac{R}{K_m K_e + R\beta} \right) J\dot{w}(t) = w(t) + \left(\frac{R}{K_m K_e + R\beta} \right) \left(\frac{K_m}{R} \right) v(t) \quad (\text{E.6})$$

Sea $T_s = \frac{RJ}{K_m K_e + R\beta}$ y $K_{sm} = \frac{K_m}{K_m K_e + R\beta}$, la ecuación del motor se escribe de la siguiente manera:

$$T_s \dot{w}(t) = -w + K_{sm} v(t) \quad (\text{E.7})$$

Por lo que procedemos a transformar la ecuación anterior en términos de (s), a partir de transformada de Laplace, por lo que tenemos.

$$T_s \Omega(s)s = \Omega(s) - + K_{sm} v(s) \quad (\text{E.8})$$

$$\Omega(s)(T_s + 1) = K_{sm} v(s) \quad (\text{E.9})$$

Así mismo la función de transferencia H queda de la siguiente manera:

$$H_1 = \frac{K_{sm}}{T_s s + 1} \quad (\text{E.10})$$

$$H_2 = \frac{K_{sm}}{s(T_s s + 1)} = \frac{K_{sm}/T_s}{s(s + 1/T_s)} \quad (\text{E.11})$$