



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Corrimiento al rojo en Gravedad de Cotton

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Julio César Cano Rodríguez

Asesorado por

Dr. Alfredo Herrera Aguilar

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero

Puebla, Pue.
Mayo de 2024



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Corrimiento al rojo en Gravedad de Cotton

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Julio César Cano Rodríguez

Asesorado por

Dr. Alfredo Herrera Aguilar

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero

Puebla, Pue.
Mayo de 2024

Título: Corrimiento al rojo en Gravedad de Cotton
Estudiante: JULIO CÉSAR CANO RODRÍGUEZ

COMITÉ

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo
Presidente

Dr. Gilberto Silva Ortigoza
Secretario

Dr. Iraís Rubalcava García
Vocal

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla
Vocal

Dr. Alfredo Herrera Aguilar
Asesor

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Asesor

Índice general

Resumen	VII
Introducción	IX
1. Ecuaciones de campo y principio variacional	1
1.1. Variación de la acción	4
2. Solución exacta en el vacío	9
2.1. Solución esféricamente simétrica y estática	10
2.2. Singularidades	13
2.2.1. Singularidades de la métrica de Schwarzschild-(anti) de Sitter	14
2.2.2. Singularidades de la solución de Harada	15
3. Geodésicas en el espaciotiempo de la solución de Harada	21
3.1. Cantidades conservadas	22
3.2. Ecuaciones de movimiento	25
3.2.1. Geodésicas tipo tiempo	25
3.2.2. Geodésicas nulas	27
4. Cambio de frecuencia	31
5. Emisores en órbitas circulares y en el plano ecuatorial	35
6. Detectores en movimiento radial	39
7. Corrimientos al rojo y al azul en términos de los parámetros del espaciotiempo	43
Conclusión	48
A. Cuadrado del tensor de Weyl	51
B. Identidad de Palatini	55
C. Símbolos de Christoffel	57
D. Componentes del tensor de Ricci	59
E. Escalar de Ricci	63
F. Componentes del tensor de Cotton	65
Bibliografía	69

Resumen

En este trabajo se derivan las ecuaciones de campo de una Teoría Extendida de la Gravedad conocida como “Gravedad de Cotton” y se muestra cómo el tensor de Cotton puede describir los efectos de la gravedad más allá de la relatividad general. Asimismo, se obtiene una solución exacta en el vacío para una fuente esféricamente simétrica y estática que puede considerarse una generalización de la métrica de Schwarzschild, además se analizan sus singularidades así como también el comportamiento de las geodésicas para partículas con y sin masa. Como una aplicación directa de la métrica encontrada se hallan expresiones analíticas para el corrimiento al rojo y al azul en términos de los parámetros del espaciotiempo.

Palabras clave: *Gravitación, Relatividad General, Corrimiento al rojo, Teorías Extendidas de la Gravedad, Gravedad de Cotton.*

Introducción

La teoría de la relatividad general proporciona una descripción del espacio, el tiempo, la gravedad y la materia a nivel macroscópico. Einstein formuló su teoría de tal manera que el espacio y el tiempo no son entidades absolutas, como en la mecánica clásica, sino cantidades dinámicas determinadas por la distribución y el movimiento de la materia y la energía, usando una elegante estructura matemática que conduce a predicciones que han recibido una espectacular confirmación experimental.

Sin embargo, en los últimos años han surgido varios problemas y deficiencias al tratar de explicar fenómenos astrofísicos y cosmológicos en el contexto de la relatividad general, que han llevado a la conclusión de que esta no es la teoría definitiva de la interacción gravitacional. Por ejemplo, para explicar el descubrimiento de 1998 de la expansión acelerada del Universo, en el contexto de la relatividad general, es necesario introducir la *energía oscura*, pero qué es esta sigue siendo una pregunta abierta. La energía oscura constituye aproximadamente el 68% del Universo y además se distribuye uniformemente a través de él, no sólo en el espacio sino también en el tiempo, por lo tanto, su efecto no se diluye a medida que este se expande. Esta distribución uniforme da como resultado que la energía oscura no tenga ningún efecto gravitacional local, sino más bien un efecto global en el Universo, produciendo así una fuerza repulsiva que tiende a acelerar su expansión [1]. Por otro lado, como es bien sabido, el gas, el polvo y las estrellas que constituyen a las galaxias y las galaxias que forman a los cúmulos de galaxias, giran a tal velocidad que la gravedad generada por la materia observable no podría mantenerlas unidas, deberían haberse “desintegrado” hace mucho tiempo, este fenómeno es conocido como *el problema de las curvas de rotación galácticas*. Estas observaciones llevaron a los físicos a creer que algo que todavía no se ha podido detectar directamente, está dando masa adicional a las galaxias y a los cúmulos, generando la gravedad adicional que necesitan para permanecer intactas y que además constituye el 26% de la materia del Universo, esta extraña y desconocida materia fue llamada *materia oscura* ya que no es visible [2]. Por estas y otras razones se han propuesto varias teorías gravitacionales alternativas que intentan formular al menos un esquema semiclásico en el que la relatividad general y sus logros podrían replicarse. Unos de los enfoques más prometedores son las llamadas *Teorías Extendidas de la Gravedad*, estas se basan en correcciones y ampliaciones de la teoría de Einstein [3].

El enfoque estándar, en cosmología y astrofísica, que se utiliza para subsanar las deficiencias de la relatividad general es tomar las ecuaciones de Einstein como *la teoría correcta* de la gravedad y siempre que se encuentre que la teoría está en discrepancia con las observaciones en cualquier escala de distancia, se deben hacer modificaciones al tensor de energía-momento mediante la introducción *ad hoc* de nuevas fuentes gravitacionales para poder restablecer la concordancia con las observaciones. Un punto de vista diferente es el siguiente: aumentar la acción de Einstein-Hilbert con invariantes de curvatura adicionales, la elección de los posibles términos adicionales es prácticamente ilimitada, pues abarca contracciones apropiadas de potencias arbitrariamente altas del tensor de Riemann [3, 4]. Ya que *no existe* un principio fundamental, *a priori* casi nada se puede decir ni a favor ni en contra de ningún candidato a tal adición y esta libertad se debe al hecho de que en primer lugar no fue un requerimiento de un principio fundamental lo que llevó a la elección específica de la acción de Einstein-Hilbert. En 2021 Junpei Harada propuso una nueva teoría y mostró cómo el tensor de Cotton puede describir los efectos de la gravedad más allá de la relati-

vidad general; a esta nueva teoría él la llamó “Gravedad de Cotton” [6]. En este trabajo, a partir de una acción y un principio variacional (el formalismo de Palatini), se deducen las ecuaciones de campo y se explica en qué sentido estas extienden la relatividad general de Einstein.

Los agujeros negros son predicciones de la teoría de la relatividad general de Albert Einstein y han sido el foco de intensos estudios durante muchos años ya que proporcionan una rica fuente de desafíos teóricos y experimentales. Los agujeros negros, por su propia definición, son imposibles de detectar directamente, sin embargo, recientes avances tecnológicos han dado lugar a nuevos métodos de detección a través de ondas gravitacionales y mediante la observación de sus sombras. Un testimonio de la importancia de estos objetos astrofísicos es el Premio Nobel de Física de 2020, el cual se dividió: una mitad fue otorgada a Roger Penrose “por el descubrimiento de que la formación de agujeros negros es una predicción sólida de la teoría general de la relatividad”, la otra mitad a Reinhard Genzel y Andrea Ghez “por el descubrimiento de un objeto compacto supermasivo en el centro de nuestra galaxia” [5].

De acuerdo con lo mencionado previamente, las Teorías Extendidas de la Gravedad plantean el problema de recuperar y ampliar los resultados bien establecidos de la relatividad general, en particular, la cuestión de encontrar nuevas soluciones. Como es bien sabido, además de las soluciones cosmológicas, las soluciones con simetría esférica y axial juegan un papel fundamental en varios problemas astrofísicos que van desde los agujeros negros hasta los núcleos galácticos activos. Es por ello que este nuevo enfoque, para ser consistente con los resultados de la teoría de Einstein, deberían incluir soluciones como las de Schwarzschild y Kerr, pero presentar, en general, nuevas soluciones que podrían ser físicamente interesantes. La solución de Schwarzschild describe el campo gravitacional fuera de un cuerpo aislado, estático y esféricamente simétrico con masa M [16]. En la teoría propuesta por Harada también existe una solución similar a la de Schwarzschild para una fuente con las mismas características, la cual es la primera solución exacta no trivial a las ecuaciones de Cotton en el vacío descubierta, su deducción se presenta en este trabajo, se analizarán las singularidades coordenadas que tiene y cómo estas *pueden* corresponder a horizontes, además se estudiará el movimiento geodésico de partículas de prueba en este espaciotiempo y también se discutirán las modificaciones hechas al potencial efectivo debido al parámetro γ que aparece en la solución.

Asimismo, considerando que la solución obtenida en el vacío puede representar de manera general el campo gravitacional externo generado por un objeto esféricamente simétrico, se mostrará una expresión analítica del corrimiento al rojo y al azul de los fotones emitidos por partículas geodésicas masivas, como estrellas o planetas, que orbitan alrededor de dicho objeto. Este análisis se llevará a cabo bajo la suposición de que las partículas de prueba que emiten los fotones siguen órbitas circulares ecuatoriales, mientras que los detectores están en movimiento radial. La expresión resultante se formulará en términos de los parámetros del espaciotiempo: la masa M de la fuente, la constante cosmológica Λ y un factor totalmente nuevo γ , además de los radios orbitales tanto de la partícula emisora como del detector distante [34]. En principio, estas expresiones permiten estimar estadísticamente los parámetros del espaciotiempo mediante un ajuste bayesiano, es decir, con la ayuda de datos observacionales: el corrimiento al rojo y al azul medidos en determinados puntos de las órbitas de las partículas de prueba y sus radios, con sus respectivos errores [35].

Capítulo 1

Ecuaciones de campo y principio variacional

En 2021 Junpei Harada [6] propuso una nueva Teoría Extendida de la Gravedad la cual llamó “Gravedad de Cotton”, donde la parte geométrica (el tensor de Einstein con o sin el término cosmológico) se reemplaza por el tensor de Cotton y la parte de la materia se reemplaza por divergencias del tensor de energía-momento. En concreto, las ecuaciones de campo en esta teoría son

$$C_{\nu\rho\sigma} = 16\pi G \nabla_\mu T^\mu{}_{\nu\rho\sigma}, \quad (1.1)$$

donde $C_{\nu\rho\sigma}$ es el tensor de Cotton, el cual está definido por

$$C_{\nu\rho\sigma} \equiv \nabla_\rho R_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma R_{\nu\rho} - \frac{1}{6} (g_{\nu\sigma} \nabla_\rho R - g_{\nu\rho} \nabla_\sigma R), \quad (1.2)$$

con $R_{\mu\nu}$ y R , el tensor de Ricci y el escalar de curvatura (o de Ricci), respectivamente, y

$$\nabla_\mu T^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\nabla_\rho T_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma T_{\nu\rho}) - \frac{1}{6} (g_{\nu\sigma} \nabla_\rho T - g_{\nu\rho} \nabla_\sigma T), \quad (1.3)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento y $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ es su traza. El tensor de Cotton debe su nombre al matemático francés Émile Cotton, quien fue el primero en introducir este objeto para describir la curvatura de variedades riemannianas de dimensión n [7]. En lo que sigue se trabajará en $n = 4$ dimensiones, se adoptará la conexión habitual de Levi-Civita para definir la derivada covariante [10, 13, 16], además, la signatura de la métrica será $(-, +, +, +)$. El tensor de Cotton satisface las siguientes propiedades:

(I) $C_{\nu\rho\sigma} = -C_{\nu\sigma\rho}$.

Demostración. Se sigue inmediatamente de la definición del tensor de Cotton.

(II) $C_{\nu\rho\sigma} + C_{\rho\sigma\nu} + C_{\sigma\nu\rho} = 0$.

Demostración. El tensor de Cotton puede escribirse de la siguiente manera $C_{\nu\rho\sigma} = \nabla_\rho S_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma S_{\nu\rho}$, siendo $S_{\nu\sigma} = R_{\nu\sigma} - \frac{1}{6} g_{\nu\sigma} R$; es claro que $S_{\nu\sigma} = S_{\sigma\nu}$, entonces

$$C_{\nu\rho\sigma} + C_{\rho\sigma\nu} + C_{\sigma\nu\rho} = \nabla_\rho S_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma S_{\nu\rho} + \nabla_\sigma S_{\rho\nu} - \nabla_\nu S_{\rho\sigma} + \nabla_\nu S_{\sigma\rho} - \nabla_\rho S_{\sigma\nu} = 0. \quad (1.4)$$

(III) $g^{\nu\rho} C_{\nu\rho\sigma} = 0$ y $g^{\nu\sigma} C_{\nu\rho\sigma} = 0$.

Demostración. Una forma especialmente útil de las identidades de Bianchi proviene de contraerlas dos veces:

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda} (\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu}) \\ &= \nabla^\mu R_{\rho\mu} - \nabla_\rho R + \nabla^\nu R_{\rho\nu}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

o, equivalentemente,

$$\nabla^\mu R_{\rho\mu} = \frac{1}{2}\nabla_\rho R. \quad (1.6)$$

Al utilizar la identidad anterior:

$$\begin{aligned} g^{\nu\rho}C_{\nu\rho\sigma} &= g^{\nu\rho}\nabla_\rho R_{\nu\sigma} - g^{\nu\rho}\nabla_\sigma R_{\nu\rho} - \frac{1}{6}(g^{\nu\rho}g_{\nu\sigma}\nabla_\rho R - g^{\nu\rho}g_{\nu\rho}\nabla_\sigma R) \\ &= \nabla^\nu R_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma R - \frac{1}{6}(g_{\nu\sigma}\nabla^\nu R - 4\nabla_\sigma R) \\ &= \frac{1}{2}\nabla_\sigma R - \nabla_\sigma R - \frac{1}{6}\nabla_\sigma R + \frac{2}{3}\nabla_\sigma R \\ &= 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

similarmente:

$$\begin{aligned} g^{\nu\sigma}C_{\nu\rho\sigma} &= g^{\nu\sigma}\nabla_\rho R_{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}\nabla_\sigma R_{\nu\rho} - \frac{1}{6}(g^{\nu\sigma}g_{\nu\sigma}\nabla_\rho R - g^{\nu\sigma}g_{\nu\rho}\nabla_\sigma R) \\ &= \nabla_\rho R - \nabla^\nu R_{\nu\rho} - \frac{1}{6}(4\nabla_\rho R - g_{\nu\rho}\nabla^\nu R) \\ &= \nabla_\rho R - \frac{1}{2}\nabla_\rho R - \frac{2}{3}\nabla_\rho R + \frac{1}{6}\nabla_\rho R \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

(IV) $\nabla^\nu C_{\nu\rho\sigma} = 0$.

Demostración. Al hacer el cálculo explícito se observa que:

$$\begin{aligned} \nabla^\nu C_{\nu\rho\sigma} &= \nabla^\nu\nabla_\rho R_{\nu\sigma} - \nabla^\nu\nabla_\sigma R_{\nu\rho} - \frac{1}{6}(g_{\nu\sigma}\nabla^\nu\nabla_\rho R - g_{\nu\rho}\nabla^\nu\nabla_\sigma R) \\ &= \nabla_\rho(\nabla^\nu R_{\nu\sigma}) - \nabla_\sigma(\nabla^\nu R_{\nu\rho}) - \frac{1}{6}(\nabla_\sigma\nabla_\rho R - \nabla_\rho\nabla_\sigma R) \\ &= \frac{1}{2}\nabla_\rho\nabla_\sigma R - \frac{1}{2}\nabla_\sigma\nabla_\rho R - \frac{1}{6}(\nabla_\sigma\nabla_\rho R - \nabla_\rho\nabla_\sigma R) \\ &= \frac{2}{3}(\nabla_\rho\nabla_\sigma - \nabla_\sigma\nabla_\rho)R, \end{aligned} \quad (1.9)$$

ya que la conexión es la de Levi-Civita, el resultado anterior es cero: $\nabla^\nu C_{\nu\rho\sigma} = 0$.

Puede observarse que, al igual que en la relatividad general, la conservación del tensor de energía-momento está garantizada:

$$0 = g^{\nu\sigma}C_{\nu\rho\sigma} = 16\pi Gg^{\nu\sigma}\nabla_\mu T^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = 16\pi G\nabla_\mu T^\mu{}_\rho. \quad (1.10)$$

Asimismo, si las ecuaciones de Einstein se cumplen, las ecuaciones de Cotton también se satisfacen, pues al insertar $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}$ y $R = -8\pi GT$ en el lado derecho de (1.3) se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^\mu{}_{\nu\rho\sigma} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8\pi G}\nabla_\rho G_{\nu\sigma} - \frac{1}{8\pi G}\nabla_\sigma G_{\nu\rho}\right) - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{8\pi G}g_{\nu\sigma}\nabla_\rho R + \frac{1}{8\pi G}g_{\nu\rho}\nabla_\sigma R\right), \\ 8\pi G\nabla_\mu T^\mu{}_{\nu\rho\sigma} &= \frac{1}{2}\left(\nabla_\rho R_{\nu\sigma} - \frac{1}{2}g_{\nu\sigma}\nabla_\rho R - \nabla_\sigma R_{\nu\rho} + \frac{1}{2}g_{\nu\rho}\nabla_\sigma R\right) - \frac{1}{6}(g_{\nu\rho}\nabla_\sigma R - g_{\nu\sigma}\nabla_\rho R), \\ 8\pi G\nabla_\mu T^\mu{}_{\nu\rho\sigma} &= \frac{1}{2}(\nabla_\rho R_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma R_{\nu\rho}) - \frac{1}{12}(g_{\nu\sigma}\nabla_\rho R - g_{\nu\rho}\nabla_\sigma R), \\ 16\pi G\nabla_\mu T^\mu{}_{\nu\rho\sigma} &= C_{\nu\rho\sigma}. \end{aligned}$$

Incluso si se agrega el término cosmológico, $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$ y $R = 4\Lambda - 8\pi GT$, también se recuperan las ecuaciones (1.1). Esto implica que si las ecuaciones de campo de la relatividad

general se cumplen, las de Gravedad de Cotton también, por ello cualquier solución a las ecuaciones de Einstein *con o sin* la constante cosmológica son soluciones de (1.1), sin embargo, su inverso no es cierto, es decir, incluso si la ecuación (1.1) se cumple, las ecuaciones de Einstein no necesariamente se satisfacen. Así pues, la teoría desarrollada por Harada tiene otras soluciones que no cumplen las ecuaciones de Einstein, es decir, Gravedad de Cotton tiene más información que relatividad general, pues en el caso de un espaciotiempo cualquiera de cuatro dimensiones, el tensor (1.2) tiene 16 componentes algebraicamente independientes [8], mientras que el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ tiene 10. En conclusión, las ecuaciones de Einstein son condiciones suficientes para las ecuaciones de Cotton y las ecuaciones de Cotton son condiciones necesarias para las ecuaciones de Einstein [6].

Como señala Harada [6], las ecuaciones de campo (1.1) pueden derivarse a partir de una acción y un principio variacional: en esta nueva teoría la acción de Einstein-Hilbert se sustituye por la acción de Weyl [9]:

$$I_W = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} C^{\mu\nu\rho\sigma} C_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (1.11)$$

donde $g = \det(g_{\mu\nu})$ y $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ es el llamado *tensor conforme* o de *Weyl* una combinación especial del tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, el tensor de Ricci $R_{\nu\sigma} = R^\mu{}_{\nu\mu\sigma}$ y el escalar de curvatura $R = R^\nu{}_\nu$, en cuatro dimensiones este está definido de la siguiente manera [10]:

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{6} (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}) R - \frac{1}{2} (g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho}). \quad (1.12)$$

Este tensor posee las mismas simetrías que el tensor de Riemann y además la contracción sobre cualquier par de índices da cero:

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = -C_{\mu\nu\sigma\rho} = -C_{\nu\mu\rho\sigma}, \quad (1.13)$$

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = C_{\rho\sigma\mu\nu}, \quad (1.14)$$

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} + C_{\mu\rho\sigma\nu} + C_{\mu\sigma\nu\rho} = 0, \quad (1.15)$$

$$C^\mu{}_{\nu\mu\sigma} = 0. \quad (1.16)$$

Asimismo, la acción para la materia en esta teoría está dada por

$$I_M = -8\pi G \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (1.17)$$

donde

$$T^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (g^{\mu\rho}T^{\nu\sigma} - g^{\nu\rho}T^{\mu\sigma} - g^{\mu\sigma}T^{\nu\rho} + g^{\nu\sigma}T^{\mu\rho}) - \frac{1}{6} (g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma}) T, \quad (1.18)$$

con $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-momento y $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ su traza, además $T_{\mu\nu}$ es una fuente que no depende de la conexión (esto se mostrará explícito más adelante). Debido a la forma en que está definido el tensor $T^{\mu\nu\rho\sigma}$, es fácil convencerse de que este objeto también comparte las mismas simetrías que el tensor de Riemann, esto es:

$$T_{\mu\nu\rho\sigma} = -T_{\mu\nu\sigma\rho} = -T_{\nu\mu\rho\sigma}, \quad (1.19)$$

$$T_{\mu\nu\rho\sigma} = T_{\rho\sigma\mu\nu}, \quad (1.20)$$

$$T_{\mu\nu\rho\sigma} + T_{\mu\rho\sigma\nu} + T_{\mu\sigma\nu\rho} = 0. \quad (1.21)$$

La variación de la acción de Weyl con respecto a la métrica llevó a R. Bach [4] a reescribir las ecuaciones de campo gravitacionales en presencia de un tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ de la siguiente manera:

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4\alpha_g} T_{\mu\nu}, \quad (1.22)$$

donde α_g es una constante de acoplamiento gravitacional. El “tensor de Bach” $W_{\mu\nu}$ desempeña el papel del tensor de Einstein de la relatividad general, este objeto tiene una estructura mucho más complicada que la que aparece en las ecuaciones de campo de relatividad general: se define de forma compacta como

$$W_{\mu\nu} = 2C^{\alpha}_{\mu\nu}{}^{\beta}{}_{;\beta;\alpha} + C^{\alpha}_{\mu\nu}{}^{\beta} R_{\alpha\beta}, \quad (1.23)$$

pero si se expresa de tal manera que el tensor de Weyl no aparezca explícitamente, surgirá una expresión más engorrosa para el tensor de Bach la cual involucra derivadas de hasta cuarto orden de la métrica con respecto a las coordenadas espaciotemporales [11]. A la teoría que surge de este enfoque se le conoce como *Gravedad Conforme* [9], sin embargo, la teoría de la gravedad desarrollada por Harada es diferente de la Gravedad Conforme, aunque la acción coincide. La diferencia no se origina en la acción sino en el principio variacional, pues como ya se mencionó, en gravedad conforme, se varía la acción de Weyl con respecto a la métrica. En Gravedad de Cotton el principio variacional que produce $C_{\nu\rho\sigma} = 16\pi G \nabla_{\mu} T^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}$ es el *formalismo de Palatini* [6].

En geometría diferencial, la métrica y la conexión son dos cantidades independientes y representan dos propiedades esencialmente diferentes del espaciotiempo, la métrica mide longitudes mientras que la conexión define la derivada covariante y el transporte paralelo, por lo tanto la noción de curvatura se puede definir para una conexión arbitraria $\tilde{\Gamma}: R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu}(\tilde{\Gamma}) = \partial_{\mu}\tilde{\Gamma}^{\lambda}{}_{\sigma\nu} - \partial_{\nu}\tilde{\Gamma}^{\lambda}{}_{\sigma\mu} + \tilde{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\rho}\tilde{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\sigma} - \tilde{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu\rho}\tilde{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\sigma}$. Al suponer que la conexión sea simétrica ($\tilde{\Gamma}^{\mu}{}_{\sigma\nu} = \tilde{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\sigma}$) y la métrica covariantemente constante ($\nabla_{\rho}g_{\mu\nu} = 0$), se encuentra que la conexión (y por lo tanto la curvatura de la variedad) está determinada únicamente por los componentes métricos: $\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right)$, esta conexión se llama la *conexión de Levi-Civita* [13]. En la relatividad general, normalmente se supone (tácitamente) que la conexión de Levi-Civita describe correctamente la física de la naturaleza y, por lo tanto, que la métrica es la única variable dinámica en la teoría.

El formalismo de Palatini [12] consiste en suponer que la variedad (el espaciotiempo) está equipada con una conexión arbitraria $\tilde{\Gamma}^{\mu}{}_{\sigma\nu}$, independiente de la métrica, de modo que la acción es función tanto de la métrica como de la conexión, que ahora deben considerarse como dos campos independientes. En general, el formalismo de Palatini puede conducir a conexiones más generales que la de Levi-Civita, sin embargo, en este trabajo se impondrá que la conexión sea la de Levi-Civita como un *ansatz* en el formalismo de Palatini.

1.1. Variación de la acción

Como primer paso se variará la acción de Weyl respecto a la conexión manteniendo fija la métrica. Utilizando la siguiente identidad (ver Apéndice A): $C^{\mu\nu\rho\sigma}C_{\mu\nu\rho\sigma} = R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} - 2R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \frac{1}{3}R^2$, I_W puede reescribirse así

$$I_W = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} - 2R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \frac{1}{3}R^2 \right). \quad (1.24)$$

El término de Gauss-Bonnet [14] está dado por

$$G = R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} - 4R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + R^2, \quad (1.25)$$

puede demostrarse a través de un cálculo directo [15] que

$$\int d^4x \sqrt{-g} G = \int d^4x \sqrt{-g} (R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} - 4R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + R^2) = 0, \quad (1.26)$$

por lo tanto, la siguiente expresión será equivalente a (1.24), pero escrita de una forma más simple:

$$\begin{aligned}
I_W &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(C^{\mu\nu\rho\sigma} C_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{2} G \right) \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} - 2R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \frac{1}{3} R^2 - \left(\frac{1}{2} R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} - 2R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} R^2 \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{6} R^2 \right) \\
&= \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{3} R^2 \right).
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Al variar I_W respecto a la conexión, manteniendo fija la métrica, se encuentra que

$$\begin{aligned}
\delta I_W &= \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\delta (R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}) - \frac{1}{3} \delta (R^2) \right] \\
&= \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\delta (R_{\mu}{}^{\nu\rho\sigma} R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}) - \frac{2}{3} R \delta R \right] \\
&= \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \left[(\delta R_{\mu}{}^{\nu\rho\sigma}) R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} + R_{\mu}{}^{\nu\rho\sigma} (\delta R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}) - \frac{2}{3} R \delta (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \right] \\
&= \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \left[2R_{\mu}{}^{\nu\rho\sigma} (\delta R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}) - \frac{2}{3} R g^{\mu\nu} \delta (R_{\mu\nu}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R_{\mu}{}^{\nu\rho\sigma} \delta R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} - \frac{1}{3} R g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right],
\end{aligned} \tag{1.28}$$

donde $\delta \equiv \frac{\delta}{\delta \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}}$, además se ha hecho uso de las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= g^{\mu\gamma} g_{\mu\lambda} R_{\gamma}{}^{\nu\rho\sigma} R^{\lambda}{}_{\nu\rho\sigma} \\
&= \delta_{\lambda}^{\gamma} R_{\gamma}{}^{\nu\rho\sigma} R^{\lambda}{}_{\nu\rho\sigma} \\
&= R_{\gamma}{}^{\nu\rho\sigma} R^{\gamma}{}_{\nu\rho\sigma} \\
&= R_{\mu}{}^{\nu\rho\sigma} R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{1.29}$$

y

$$\begin{aligned}
(\delta R_{\mu}{}^{\nu\rho\sigma}) R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} &= \delta (g_{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}) g^{\mu\epsilon} g_{\nu\zeta} g_{\rho\eta} g_{\sigma\theta} R_{\epsilon}{}^{\zeta\eta\theta} \\
&= g_{\mu\alpha} g^{\mu\epsilon} g^{\nu\beta} g_{\nu\zeta} g^{\rho\gamma} g_{\rho\eta} g^{\sigma\delta} g_{\sigma\theta} \left(\delta R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} R_{\epsilon}{}^{\zeta\eta\theta} \right) \\
&= \delta_{\alpha}^{\epsilon} \delta_{\zeta}^{\beta} \delta_{\eta}^{\gamma} \delta_{\theta}^{\delta} \left(\delta R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} R_{\epsilon}{}^{\zeta\eta\theta} \right) \\
&= \delta R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} R_{\alpha}{}^{\beta\gamma\delta} \\
&= R_{\mu}{}^{\nu\rho\sigma} \delta R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Para determinar la variación del tensor de Riemann se hará uso de la identidad de Palatini (ver Apéndice B)

$$\delta R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \nabla_{\rho} (\delta \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu}) - \nabla_{\sigma} (\delta \Gamma_{\rho\nu}^{\mu}), \tag{1.31}$$

al contraer el primer y tercer índices se obtiene la variación del tensor de Ricci:

$$\delta R_{\nu\sigma} = \nabla_{\rho} (\delta \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho}) - \nabla_{\sigma} (\delta \Gamma_{\rho\nu}^{\rho}). \tag{1.32}$$

Ahora se considerará el primer término de la última igualdad en (1.28), $R_{\mu}{}^{\nu\rho\sigma} \delta R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}$:

$$\begin{aligned}
R_{\mu}{}^{\nu\rho\sigma} \delta R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} &= R_{\mu}{}^{\nu\rho\sigma} [\nabla_{\rho} (\delta \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu}) - \nabla_{\sigma} (\delta \Gamma_{\rho\nu}^{\mu})] \\
&= R_{\mu}{}^{\nu\rho\sigma} \nabla_{\rho} (\delta \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu}) - R_{\mu}{}^{\nu\rho\sigma} \nabla_{\sigma} (\delta \Gamma_{\rho\nu}^{\mu}).
\end{aligned} \tag{1.33}$$

Al integrar por partes cada uno de los términos:

$$R_\mu^{\nu\rho\sigma}\delta R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \nabla_\rho(R_\mu^{\nu\rho\sigma}\delta\Gamma^\mu_{\sigma\nu}) - (\nabla_\rho R_\mu^{\nu\rho\sigma})\delta\Gamma^\mu_{\sigma\nu} - \nabla_\sigma(R_\mu^{\nu\rho\sigma}\delta\Gamma^\mu_{\rho\nu}) + (\nabla_\sigma R_\mu^{\nu\rho\sigma})\delta\Gamma^\mu_{\rho\nu}. \quad (1.34)$$

Al utilizar la antisimetría del tensor de Riemann en sus dos últimos índices y notar que todos los índices que aparecen están contraídos, se pueden renombrar de manera conveniente algunos de ellos en los términos tercero y cuarto:

$$-\nabla_\sigma(R_\mu^{\nu\rho\sigma}\delta\Gamma^\mu_{\rho\nu}) = -\nabla_\rho(R_\mu^{\nu\sigma\rho}\delta\Gamma^\mu_{\sigma\nu}) = \nabla_\rho(R_\mu^{\nu\rho\sigma}\delta\Gamma^\mu_{\sigma\nu}), \quad (1.35)$$

$$(\nabla_\sigma R_\mu^{\nu\rho\sigma})\delta\Gamma^\mu_{\rho\nu} = (\nabla_\rho R_\mu^{\nu\sigma\rho})\delta\Gamma^\mu_{\sigma\nu} = -(\nabla_\rho R_\mu^{\nu\rho\sigma})\delta\Gamma^\mu_{\sigma\nu}, \quad (1.36)$$

por lo tanto

$$R_\mu^{\nu\rho\sigma}\delta R^\mu_{\nu\rho\sigma} = 2\nabla_\rho(R_\mu^{\nu\rho\sigma}\delta\Gamma^\mu_{\sigma\nu}) - 2(\nabla_\rho R_\mu^{\nu\rho\sigma})\delta\Gamma^\mu_{\sigma\nu}. \quad (1.37)$$

Además, el último término de la ecuación anterior puede reescribirse así:

$$\begin{aligned} -2(\nabla_\rho R_\mu^{\nu\rho\sigma})\delta\Gamma^\mu_{\sigma\nu} &= -2[\nabla_\rho(g_{\mu\alpha}R^{\alpha\nu\rho\sigma})]\delta\Gamma^\mu_{\sigma\nu} \\ &= -2\nabla_\rho R^{\rho\sigma\alpha\nu}g_{\mu\alpha}\delta\Gamma^\mu_{\sigma\nu} \\ &= 2\nabla_\rho R^{\rho\sigma\nu\alpha}\delta\Gamma_{\alpha\sigma\nu}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

donde $\delta\Gamma_{\alpha\sigma\nu} \equiv g_{\mu\alpha}\delta\Gamma^\mu_{\sigma\nu}$, entonces

$$R_\mu^{\nu\rho\sigma}\delta R^\mu_{\nu\rho\sigma} = 2\nabla_\rho(R_\mu^{\nu\rho\sigma}\delta\Gamma^\mu_{\sigma\nu}) + 2\nabla_\rho R^{\rho\sigma\nu\alpha}\delta\Gamma_{\alpha\sigma\nu}. \quad (1.39)$$

Si además se utiliza la siguiente identidad de Bianchi $\nabla_\rho R^{\rho\sigma\nu\alpha} = \nabla^\sigma R^{\nu\alpha} - \nabla^\alpha R^{\sigma\nu}$, se obtiene:

$$R_\mu^{\nu\rho\sigma}\delta R^\mu_{\nu\rho\sigma} = 2\nabla_\rho(R_\mu^{\nu\rho\sigma}\delta\Gamma^\mu_{\sigma\nu}) + 2(\nabla^\sigma R^{\nu\alpha} - \nabla^\alpha R^{\sigma\nu})\delta\Gamma_{\alpha\sigma\nu}, \quad (1.40)$$

aunque la expresión anterior es correcta, es conveniente renombrar los índices del último término de la siguiente manera: $\alpha \rightarrow \sigma$, $\sigma \rightarrow \nu$ y $\nu \rightarrow \rho$:

$$R_\mu^{\nu\rho\sigma}\delta R^\mu_{\nu\rho\sigma} = 2\nabla_\rho(R_\mu^{\nu\rho\sigma}\delta\Gamma^\mu_{\sigma\nu}) + 2(\nabla^\rho R^{\nu\sigma} - \nabla^\sigma R^{\nu\rho})\delta\Gamma_{\sigma\nu\rho}. \quad (1.41)$$

Ahora se considerará el segundo término de la última igualdad en (1.28), $Rg^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} Rg^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= Rg^{\mu\nu}[\nabla_\rho(\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\rho_{\mu\rho})] \\ &= Rg^{\mu\nu}\nabla_\rho(\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}) - Rg^{\mu\nu}\nabla_\nu(\delta\Gamma^\rho_{\mu\rho}), \end{aligned} \quad (1.42)$$

al integrar por partes cada uno de los términos se obtiene:

$$Rg^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho(Rg^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}) - g^{\mu\nu}\nabla_\rho R\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \nabla_\nu(Rg^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\rho}) + g^{\mu\nu}\nabla_\nu R\delta\Gamma^\rho_{\mu\rho}. \quad (1.43)$$

Al utilizar el tensor métrico y notar que todos los índices que aparecen están contraídos, se pueden renombrar de manera conveniente algunos de ellos en los términos segundo, tercero y cuarto:

$$g^{\mu\nu}\nabla_\rho R\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g_{\rho\alpha}\nabla^\alpha R\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\nabla^\alpha R\delta\Gamma_{\alpha\mu\nu}, \quad (1.44)$$

$$\nabla_\nu(Rg^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\rho}) = \nabla_\rho(Rg^{\mu\nu}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu}), \quad (1.45)$$

$$g^{\mu\nu}\nabla_\nu R\delta\Gamma^\rho_{\mu\rho} = g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha}\nabla^\alpha R\delta\Gamma^\rho_{\mu\rho} = \delta^\mu_\alpha\nabla^\alpha Rg^{\rho\sigma}\delta\Gamma_{\sigma\mu\rho} = g^{\rho\sigma}\nabla^\mu R\delta\Gamma_{\sigma\mu\rho}, \quad (1.46)$$

por lo tanto,

$$Rg^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho(Rg^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - Rg^{\mu\nu}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu}) + g^{\rho\sigma}\nabla^\mu R\delta\Gamma_{\sigma\mu\rho} - g^{\mu\nu}\nabla^\alpha R\delta\Gamma_{\alpha\mu\nu}. \quad (1.47)$$

Al hacer el cambio $\mu \rightarrow \rho$ y $\rho \rightarrow \nu$ en $g^{\rho\sigma}\nabla^\mu R\delta\Gamma_{\sigma\mu\rho}$; y $\mu \rightarrow \nu$, $\nu \rightarrow \rho$ y $\alpha \rightarrow \sigma$ en $g^{\mu\nu}\nabla^\alpha R\delta\Gamma_{\alpha\mu\nu}$ se observa que

$$\begin{aligned} Rg^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \nabla_\rho(Rg^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - Rg^{\mu\nu}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu}) + g^{\nu\sigma}\nabla^\rho R\delta\Gamma_{\sigma\nu\rho} - g^{\nu\rho}\nabla^\sigma R\delta\Gamma_{\sigma\nu\rho} \\ &= \nabla_\rho(Rg^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - Rg^{\mu\nu}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu}) + (g^{\nu\sigma}\nabla^\rho R - g^{\nu\rho}\nabla^\sigma R)\delta\Gamma_{\sigma\nu\rho}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Entonces, al sustituir (1.41) y (1.48) en (1.28), se obtiene

$$\delta I_W = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R_{\mu}{}^{\nu\rho\sigma} \delta R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} - \frac{1}{3} R g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right] \quad (1.49)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[2 \nabla_{\rho} (R_{\mu}{}^{\nu\rho\sigma} \delta \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}) + 2 (\nabla^{\rho} R^{\nu\sigma} - \nabla^{\sigma} R^{\nu\rho}) \delta \Gamma_{\sigma\nu\rho} \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \nabla_{\rho} (R g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - R g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\nu}_{\mu\nu}) - \frac{1}{3} (g^{\nu\sigma} \nabla^{\rho} R - g^{\nu\rho} \nabla^{\sigma} R) \delta \Gamma_{\sigma\nu\rho} \right] \quad (1.50)$$

$$= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\nabla_{\rho} \left(R_{\mu}{}^{\nu\rho\sigma} \delta \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu} - \frac{1}{6} (R g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - R g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\nu}_{\mu\nu}) \right) \right. \\ \left. + (\nabla^{\rho} R^{\nu\sigma} - \nabla^{\sigma} R^{\nu\rho} - \frac{1}{6} (g^{\nu\sigma} \nabla^{\rho} R - g^{\nu\rho} \nabla^{\sigma} R)) \delta \Gamma_{\sigma\nu\rho} \right] \quad (1.51)$$

$$= \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_{\rho} \left[R_{\mu}{}^{\nu\rho\sigma} \delta \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu} - \frac{1}{6} (R g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - R g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\nu}_{\mu\nu}) \right] \\ + \int d^4x \sqrt{-g} \left(\nabla^{\rho} R^{\nu\sigma} - \nabla^{\sigma} R^{\nu\rho} - \frac{1}{6} (g^{\nu\sigma} \nabla^{\rho} R - g^{\nu\rho} \nabla^{\sigma} R) \right) \delta \Gamma_{\sigma\nu\rho}. \quad (1.52)$$

En esta última igualdad puede observarse que el primer sumando es la derivada total de cierta cantidad, por lo tanto, al imponer la condición de frontera $\delta \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} = 0$, el resultado de integrarlo será cero. El segundo término corresponde exactamente al tensor de Cotton, entonces

$$\delta I_W = \int d^4x \sqrt{-g} C^{\nu\rho\sigma} \delta \Gamma_{\sigma\nu\rho}, \quad (1.53)$$

por lo tanto, $\delta I_W = 0$ implica que $C^{\nu\rho\sigma} = 0$, bajo la condición de frontera antes mencionada.

Regresando a la parte de la materia, se observa que la variación de esta acción con respecto a la conexión, otra vez manteniendo la métrica fija, produce:

$$\delta I_M = -8\pi G \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu\rho\sigma} \delta R_{\mu\nu\rho\sigma} \\ = -8\pi G \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu\rho\sigma} g_{\mu\lambda} \delta R^{\lambda}_{\nu\rho\sigma}, \quad (1.54)$$

ya que la $T^{\mu\nu}$ es una fuente que no incluye a la conexión, se tendrá que $\delta T^{\mu\nu\rho\sigma} = 0$. Nuevamente, usando la identidad de Palatini se encuentra que:

$$T^{\mu\nu\rho\sigma} g_{\mu\lambda} \delta R^{\lambda}_{\nu\rho\sigma} = T^{\mu\nu\rho\sigma} g_{\mu\lambda} [\nabla_{\rho} (\delta \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}) - \nabla_{\sigma} (\delta \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu})] \\ = T^{\mu\nu\rho\sigma} g_{\mu\lambda} \nabla_{\rho} (\delta \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}) - T^{\mu\nu\rho\sigma} g_{\mu\lambda} \nabla_{\sigma} (\delta \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}), \quad (1.55)$$

al integrar por partes ambos términos:

$$T^{\mu\nu\rho\sigma} g_{\mu\lambda} \delta R^{\lambda}_{\nu\rho\sigma} = \nabla_{\rho} (T^{\mu\nu\rho\sigma} g_{\mu\lambda} \delta \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}) - g_{\mu\lambda} \nabla_{\rho} T^{\mu\nu\rho\sigma} \delta \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} - \\ \nabla_{\sigma} (T^{\mu\nu\rho\sigma} g_{\mu\lambda} \delta \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}) + g_{\mu\lambda} \nabla_{\sigma} T^{\mu\nu\rho\sigma} \delta \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}. \quad (1.56)$$

Si se renombran algunos índices de los siguientes términos y se utilizan la simetrías del tensor $T^{\mu\nu\rho\sigma}$, la expresión se simplifica:

$$-\nabla_{\sigma} (T^{\mu\nu\rho\sigma} g_{\mu\lambda} \delta \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}) = -\nabla_{\rho} (T^{\mu\nu\sigma\rho} g_{\mu\lambda} \delta \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}) = \nabla_{\rho} (T^{\mu\nu\rho\sigma} g_{\mu\lambda} \delta \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}), \quad (1.57)$$

$$-g_{\mu\lambda} \nabla_{\rho} T^{\mu\nu\rho\sigma} \delta \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} = -g_{\mu\lambda} \nabla_{\sigma} T^{\mu\nu\sigma\rho} \delta \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} = -g_{\mu\lambda} \nabla_{\sigma} T^{\sigma\rho\mu\nu} \delta \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}, \quad (1.58)$$

$$g_{\mu\lambda} \nabla_{\sigma} T^{\mu\nu\rho\sigma} \delta \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} = -g_{\mu\lambda} \nabla_{\sigma} T^{\mu\nu\sigma\rho} \delta \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} = -g_{\mu\lambda} \nabla_{\sigma} T^{\sigma\rho\mu\nu} \delta \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}. \quad (1.59)$$

Por lo tanto

$$T^{\mu\nu\rho\sigma} g_{\mu\lambda} \delta R^{\lambda}_{\nu\rho\sigma} = 2 [\nabla_{\rho} (T^{\mu\nu\rho\sigma} g_{\mu\lambda} \delta \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu})] - 2g_{\mu\lambda} \nabla_{\sigma} T^{\sigma\rho\mu\nu} \delta \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}. \quad (1.60)$$

Al hacer el cambio $\sigma \leftrightarrow \mu$ y $\rho \leftrightarrow \nu$ en el segundo término de la expresión anterior y tomar en cuenta las simetrías de $T^{\mu\nu\rho\sigma}$ se observa que

$$g_{\mu\lambda} \nabla_{\sigma} T^{\sigma\rho\mu\nu} \delta \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} = g_{\sigma\lambda} \nabla_{\mu} T^{\mu\nu\sigma\rho} \delta \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} = -\nabla_{\mu} T^{\mu\nu\rho\sigma} \delta \Gamma_{\sigma\nu\rho}, \quad (1.61)$$

donde $g_{\sigma\lambda} \delta \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} \equiv \delta \Gamma_{\sigma\nu\rho}$, por lo tanto

$$T^{\mu\nu\rho\sigma} g_{\mu\lambda} \delta R^{\lambda}_{\nu\rho\sigma} = 2\nabla_{\rho} (T^{\mu\nu\rho\sigma} g_{\mu\lambda} \delta \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}) + 2\nabla_{\mu} T^{\mu\nu\rho\sigma} \delta \Gamma_{\sigma\nu\rho}, \quad (1.62)$$

entonces

$$\begin{aligned} \delta I_M &= -8\pi G \int d^4x \sqrt{-g} (2\nabla_{\rho} (T^{\mu\nu\rho\sigma} g_{\mu\lambda} \delta \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}) + 2\nabla_{\mu} T^{\mu\nu\rho\sigma} \delta \Gamma_{\sigma\nu\rho}) \\ &= -16\pi G \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_{\mu} T^{\mu\nu\rho\sigma} \delta \Gamma_{\sigma\nu\rho}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Así pues, se ha encontrado que $\delta I_W + \delta I_M = 0$ implica que $C^{\nu\rho\sigma} - 16\pi G \nabla_{\mu} T^{\mu\nu\rho\sigma} = 0$, o equivalentemente

$$C_{\nu\rho\sigma} = 16\pi G \nabla_{\mu} T^{\mu}_{\nu\rho\sigma}. \quad (1.64)$$

A continuación se hará un comentario acerca de la condición de frontera impuesta $\delta \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} = 0$: ya que se ha adoptado la conexión de Levi-Civita, su variación (teniendo en cuenta que la métrica es fija) viene dada por:

$$\delta \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} \left[\delta \left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} \right) + \delta \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right) - \delta \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \right) \right], \quad (1.65)$$

por lo tanto, se está variando la acción con respecto a la derivada de la métrica manteniendo fija la propia métrica [6].

Capítulo 2

Solución exacta en el vacío

En el vacío, $T_{\mu\nu} = 0$, las ecuaciones de campo de Cotton se reducen a

$$C_{\nu\rho\sigma} = 0. \quad (2.1)$$

Harada menciona en su artículo, [6], que la ecuación anterior *debe de considerarse como una generalización de $R_{\mu\nu} = 0$ de la relatividad general*, pues se desprende claramente de la definición del tensor de Cotton que si $R_{\mu\nu}$ es cero, entonces $C_{\nu\rho\sigma}$ también es cero, y más aún, si $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$, entonces $C_{\nu\rho\sigma}$ es cero automáticamente pues el tensor métrico es *covariantemente constante*, es decir, $\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = 0$.

Aunque es plausible el argumento de Harada, puede no ser del todo correcto, una de las razones está relacionada con el tensor (1.3), pues en las ecuaciones de campo (1.1) parece desempeñar el papel de una fuente generalizada de materia y energía en Gravedad de Cotton. Claramente $T_{\mu\nu} = 0$ implica que $\nabla_\mu T^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = 0$ en (1.3), pero el inverso no necesariamente es verdadero, es decir, $\nabla_\mu T^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = 0$ no asegura que $T_{\mu\nu} = 0$, el cual representaría una fuente de materia no trivial. El segundo motivo se debe a una propiedad importante del tensor de Cotton que se mostrará a continuación, primero es importante recordar que el tensor de Weyl

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{6}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma})R - \frac{1}{2}(g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho}), \quad (2.2)$$

juega un papel importante en geometría pues una de sus propiedades más notables es que es invariante bajo *transformaciones conformes* [16], esto significa que si se calcula $C^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ para alguna métrica $g_{\mu\nu}$ y luego se vuelve a calcular para otra métrica dada por $\Omega^2 g_{\mu\nu}$, donde $\Omega = \Omega(x^\mu)$ es una función diferenciable distinta de cero, se obtiene lo mismo. De forma más precisa, se dice que dos métricas $g_{\mu\nu}$ y $\tilde{g}_{\mu\nu}$ son *conformes* entre sí si

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

Dada una variedad con dos métricas definidas en ella las cuales son conformes entre sí, se puede demostrar que los ángulos entre vectores y las proporciones de las magnitudes de los vectores, pero no las longitudes, son los mismos para cada métrica [19]. Además, las métricas también poseen el mismo tensor de Weyl, es decir, este es invariante bajo transformaciones de la métrica:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2 g_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad C^\mu{}_{\nu\rho\sigma} \rightarrow C^\mu{}_{\nu\rho\sigma}. \quad (2.4)$$

Cualquier cantidad que satisfaga una relación como la anterior se dice que es *conformemente invariante*, en particular, una métrica es *conformemente plana* si se puede reducir a la forma $g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2(x) \eta_{\mu\nu}$, donde $\eta_{\mu\nu}$ es una métrica plana, además, puede demostrarse que una condición necesaria y suficiente para que una métrica sea conformemente plana es que su tensor de Weyl sea cero en todas partes [21].

Al utilizar las siguientes identidades de Bianchi $\nabla^\mu R_{\mu\nu\rho\sigma} = \nabla_\rho R_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma R_{\nu\rho}$ y $\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla_\nu R$, y la definición del tensor de Weyl, se demostrará que este último está relacionado con el tensor de Cotton de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \nabla^\mu C_{\mu\nu\rho\sigma} &= \nabla^\mu R_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{6} (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}) \nabla^\mu R - \\
 &\quad \frac{1}{2} (g_{\mu\rho} \nabla^\mu R_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} \nabla^\mu R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} \nabla^\mu R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} \nabla^\mu R_{\mu\rho}) \\
 &= \nabla_\rho R_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma R_{\nu\rho} + \frac{1}{6} (g_{\nu\sigma} \nabla_\rho R - g_{\nu\rho} \nabla_\sigma R) - \\
 &\quad \frac{1}{2} \left(\nabla_\rho R_{\nu\sigma} - \frac{1}{2} g_{\nu\rho} \nabla_\sigma R - \nabla_\sigma R_{\nu\rho} + \frac{1}{2} g_{\nu\sigma} \nabla_\rho R \right) \\
 &= \frac{1}{2} (\nabla_\rho R_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma R_{\nu\rho}) - \frac{1}{12} (g_{\nu\sigma} \nabla_\rho R - g_{\nu\rho} \nabla_\sigma R) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\nabla_\rho R_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma R_{\nu\rho} - \frac{1}{6} (g_{\nu\sigma} \nabla_\rho R - g_{\nu\rho} \nabla_\sigma R) \right] \\
 &= \frac{1}{2} C_{\mu\nu\rho\sigma}.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Se observa entonces que $C_{\nu\rho\sigma} = 2\nabla^\mu C_{\mu\nu\rho\sigma}$, por lo tanto, cualquier métrica conformemente plana sirve como solución a las ecuaciones de Cotton (2.1), esto puede ser potencialmente un problema, ya que permitiría soluciones no físicas: por ejemplo, en cosmología, la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) es conformemente plana [16], por lo tanto, esta sería una solución a las ecuaciones de Cotton en el vacío, sin embargo, es ampliamente conocido que los modelos FLRW son soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein con materia.

Por lo tanto, la afirmación hecha por Harada no es del todo correcta, ya que ambas condiciones son distintas: $R_{\mu\nu} = 0$ es una restricción no trivial, mientras que $C_{\nu\rho\sigma} = 0$ es una identidad que se cumple automáticamente para todos los espaciotiempos conformemente planos, independientemente de sus fuentes o propiedades de simetría [17, 18].

2.1. Solución esféricamente simétrica y estática

Como ya se mencionó anteriormente, las ecuaciones (2.1) tienen otras soluciones que no satisfacen las ecuaciones de Einstein en el vacío. A continuación se presentará una solución exacta que *puede* considerarse como una generalización de la métrica de Schwarzschild que aparece en la relatividad general.

Un espaciotiempo esféricamente simétrico y estático admite una métrica de la forma [20]:

$$ds^2 = -e^\alpha dt^2 + e^\beta dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{2.6}$$

donde α y β son funciones solo de r . Tomando en cuenta esto, se resolverán las ecuaciones (2.1) utilizando como *ansatz* (2.6), para lograr esto se necesitan primero algunos resultados previos: es claro que las componentes diferentes de cero del tensor métrico son:

$$\begin{aligned}
 g_{00} &= -e^\alpha, & g^{00} &= -e^{-\alpha}, \\
 g_{11} &= e^\beta, & g^{11} &= e^{-\beta}, \\
 g_{22} &= r^2, & g^{22} &= \frac{1}{r^2}, \\
 g_{33} &= r^2 \sin^2 \theta, & g^{33} &= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}.
 \end{aligned}$$

Al igual que en el capítulo anterior, la conexión que se utilizará es la de Levi-Civita, por lo tanto, los símbolos de Christoffel pueden calcularse utilizando la siguiente fórmula

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right), \quad (2.7)$$

o escribiendo las ecuaciones geodésicas a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange del lagrangiano $L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda}$. Al establecer $t = x^0, r = x^1, \theta = x^2, \varphi = x^3$ y denotar con una prima (') la derivada respecto de r , se encuentra que (ver Apéndice C) los únicos símbolos de Christoffel distintos de cero son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2}\alpha', & \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}\alpha'e^{\alpha-\beta}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}\beta', \\ \Gamma_{22}^1 &= -re^{-\beta}, & \Gamma_{33}^1 &= -r\sin^2\theta e^{-\beta}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta\cos\theta, & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= \cot\theta. \end{aligned}$$

Las componentes del tensor de Ricci se pueden determinar a partir de la fórmula

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\alpha}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha}, \quad (2.8)$$

un cálculo explícito (ver Apéndice D) revela que las únicas componentes distintas de cero son

$$\begin{aligned} R_{00} &= e^{\alpha-\beta} \left(\frac{\alpha''}{2} + \frac{\alpha'^2}{4} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\alpha'}{r} \right), \\ R_{11} &= -\frac{\alpha''}{2} - \frac{\alpha'^2}{4} + \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'}{r}, \\ R_{22} &= -e^{-\beta} \left[1 + \frac{r}{2}(\alpha' - \beta') \right] + 1, \\ R_{33} &= \sin^2\theta R_{22}. \end{aligned}$$

El escalar de Ricci se calcula (ver Apéndice E) a partir de su definición: $R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, por lo tanto

$$R = e^{-\beta} \left[-\alpha'' - \frac{\alpha'^2}{2} + \frac{\alpha'\beta'}{2} - \frac{2}{r}(\alpha' - \beta') - \frac{2}{r^2} + \frac{2e^{\beta}}{r^2} \right]. \quad (2.9)$$

Ahora que se tienen todos los elementos necesarios, se pueden determinar las componentes distintas de cero del tensor de Cotton a partir de su definición (1.2):

$$C_{\nu\rho\sigma} \equiv \nabla_{\rho}R_{\nu\sigma} - \nabla_{\sigma}R_{\nu\rho} - \frac{1}{6}(g_{\nu\sigma}\nabla_{\rho}R - g_{\nu\rho}\nabla_{\sigma}R); \quad (2.10)$$

de acuerdo con los resultados del Apéndice F, de las sesenta y cuatro componentes iniciales, solo sobreviven tres: C_{010} , C_{212} y C_{313} , sin embargo, las últimas dos son proporcionales a la primera:

$$\begin{aligned} C_{010} &= e^{\alpha-\beta} \left(\frac{1}{3}\alpha'\alpha'' - \frac{1}{2}\alpha''\beta' - \frac{1}{6}\alpha'^2\beta' + \frac{\alpha'^2}{2r} - \frac{1}{6}\alpha'\beta'^2 - \frac{\alpha'\beta'}{6r} + \frac{1}{3}\alpha''' - \frac{1}{6}\alpha'\beta' \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\alpha'}{3r^2} + \frac{2\alpha''}{3r} + \frac{\beta''}{3r} + \frac{2}{3r^3} - \frac{\beta'^2}{3r} \right) - \frac{2e^{\alpha}}{3r^3}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$C_{212} = \frac{1}{2}r^2e^{-\alpha}C_{010}, \quad (2.12)$$

$$C_{313} = \sin^2\theta C_{212}. \quad (2.13)$$

Al igualar a cero la expresión C_{010} , se tiene una sola ecuación diferencial para dos incógnitas (α y β), la cual implica un acoplamiento de los coeficientes métricos g_{00} y g_{11} , por lo tanto, admite un número infinito de soluciones con, en general, cinco constantes de integración, sin embargo, como se argumenta en [25], para obtener una solución en el vacío de Gravedad de Cotton no trivial con una correspondencia consistente con la teoría de Einstein se debe tomar $\beta = -\alpha$, tal como ocurre en la solución de Schwarzschild de la relatividad general. Lo anterior permite que la componente C_{010} se reduzca a

$$3e^{-\alpha}C_{010} = -\frac{2}{r^3} + \left(\alpha''' + 3\alpha'\alpha'' + \alpha'^3 + \frac{\alpha''}{r} + \frac{\alpha'^2}{r} - \frac{2\alpha'}{r^2} + \frac{2}{r^3} \right) e^\alpha, \quad (2.14)$$

por lo tanto, la ecuación a resolver es $3e^{-\alpha}C_{010} = 0$. Si se introduce el cambio de variable $y(r) = \left(\alpha' + \frac{1}{r}\right) e^\alpha$ en (2.14), esta última podrá reescribirse de una manera más simple:

$$3e^{-\alpha}C_{010} = y'' - \frac{2}{r^3} = 0, \quad (2.15)$$

la ecuación anterior tiene como solución (después de integrar dos veces) $y = \frac{1}{r} + c_1r + c_2$, al deshacer el cambio de variable se obtiene

$$\left(\alpha' + \frac{1}{r} \right) e^\alpha = \frac{1}{r} + c_1r + c_2, \quad (2.16)$$

al multiplicar (2.16) por rdr (en la notación de Leibniz $\alpha' = \frac{d\alpha}{dr}$), se observa que esta se puede reescribir de la siguiente manera

$$(e^\alpha - c_1r^2 - c_2r - 1) dr + re^\alpha d\alpha = 0. \quad (2.17)$$

Si se define $P(r, \alpha) = e^\alpha - c_1r^2 - c_2r - 1$ y $Q(r, \alpha) = re^\alpha$, se observa que la ecuación diferencial (2.17) es exacta, ya que $\frac{\partial P(r, \alpha)}{\partial \alpha} = e^\alpha = \frac{\partial Q(r, \alpha)}{\partial r}$, por lo tanto, existe una función $f(r, \alpha)$ tal que $\frac{\partial f(r, \alpha)}{\partial r} = P(r, \alpha)$ y $\frac{\partial f(r, \alpha)}{\partial \alpha} = Q(r, \alpha)$, así, la ecuación se reduce a $df(r, \alpha) = 0$ cuya solución general es $f(r, \alpha) = C$, siendo C una constante arbitraria.

Al integrar $\frac{\partial f(r, \alpha)}{\partial r}$ respecto a r , puede hallarse $f(r, \alpha)$:

$$\begin{aligned} f(r, \alpha) &= \int (e^\alpha - c_1r^2 - c_2r - 1) dr \\ &= -r + re^\alpha - \frac{c_2r^2}{2} - \frac{c_1r^3}{3} + g(\alpha), \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde $g(\alpha)$ es una función arbitraria de α . Al derivar $f(r, \alpha)$ con respecto a α :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(r, \alpha)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(-r + e^\alpha r - \frac{c_2r^2}{2} - \frac{c_1r^3}{3} + g(\alpha) \right) \\ &= e^\alpha r + \frac{dg(\alpha)}{d\alpha}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Al sustituir la expresión anterior en $\frac{\partial f(r, \alpha)}{\partial \alpha} = Q(r, \alpha)$, se observa que

$$e^\alpha r + \frac{dg(\alpha)}{d\alpha} = e^\alpha r, \quad (2.20)$$

esto implica que $\frac{dg(\alpha)}{d\alpha} = 0$ y, por lo tanto, que $g(\alpha)$ es una constante arbitraria:

$$g(\alpha) = c. \quad (2.21)$$

En resumen, $f(r, \alpha) = -r + e^\alpha r - \frac{c_2 r^2}{2} - \frac{c_1 r^3}{3} + c = C$, esto implica que $e^\alpha = 1 + \frac{c_3}{r} + \frac{c_1}{3} r^2 + \frac{c_2}{2} r$ (con $c_3 = C - c$), por la manera en que aparece la coordenada r , si se renombran las tres constantes de integración como $c_3 = -2M$, $c_1 = -\Lambda$ y $c_2 = 2\gamma$, entonces la solución puede reescribirse así

$$e^\alpha = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 + \gamma r. \quad (2.22)$$

Por lo tanto, la métrica (2.6) toma la siguiente expresión

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 + \gamma r \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 + \gamma r \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.23)$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$. Al igual que en el caso de Schwarzschild, se supondrá que las coordenadas t , r , θ y φ pueden tomar los siguientes valores

$$t \in (-\infty, \infty), \quad r \in [r_0, \infty), \quad \theta \in (0, \pi), \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad (2.24)$$

donde r_0 es el radio del cuerpo; (2.23) es la primera solución exacta no trivial descubierta de las ecuaciones de campo de Gravedad de Cotton en el vacío [6].

Aunque $2M$, $\frac{\Lambda}{3}$ y γ son constantes de integración con dimensiones de longitud, $(\text{longitud})^{-2}$ y $(\text{longitud})^{-1}$, respectivamente, como sugiere la notación M es la masa del cuerpo central y Λ la constante cosmológica en “unidades relativistas” (que hacen que $c = G = 1$), pues en el límite en que $\Lambda, \gamma \rightarrow 0$, la métrica encontrada se reduce a la de Schwarzschild, mientras que si solo $\gamma \rightarrow 0$ se obtiene la de Schwarzschild-(anti) de Sitter. Así $\Lambda > 0$, y el término correspondiente $\frac{\Lambda}{3} r^2$, deberían indicar un espaciotiempo de fondo tipo de Sitter que sería relevante sólo a distancias cosmológicas, pues en la actualidad Λ se estima que es del orden de $\sim 10^{-52} \text{m}^{-2}$, si $\Lambda < 0$ señalaría un espaciotiempo de fondo tipo anti-de Sitter. Por otro lado, el término γr es totalmente nuevo, sin análogo en la relatividad de Einstein, pues no puede obtenerse de sus ecuaciones de campo; como señala Harada [6], puede considerarse que γ mide una *desviación* de la métrica de Schwarzschild, además el término γr debería de ser significativo a escalas de distancias galácticas. En otras palabras, para valores de $\gamma \approx 10^{-26} - 10^{-28} \text{m}^{-1}$, que es aproximadamente el valor de la longitud inversa de Hubble, D_H , el término newtoniano estándar $\frac{1}{r}$ todavía domina a distancias pequeñas, de modo que esta teoría produciría el mismo éxito experimental de la relatividad general a escalas del sistema solar. La “longitud de Hubble” se refiere a la escala característica de la expansión del universo y está relacionada con el parámetro de Hubble H_0 [16], que describe la velocidad a la que las galaxias se están alejando entre sí y se define de la siguiente manera: $D_H \equiv \frac{c}{H_0} \approx 1,4 \times 10^{26} \text{m}$.

Ya que la constante cosmológica Λ aparece naturalmente como una constante de integración, esta característica proporciona una ventaja teórica notable sobre las ecuaciones de campo de Einstein en la relatividad general pues allí, la presencia o ausencia de la constante cosmológica se fija “a mano” desde el principio. En lo que sigue se explorará el efecto del parámetro γ en la dinámica de partículas y en particular cómo esta métrica *puede* representar un espaciotiempo similar al de un agujero negro.

2.2. Singularidades

Si se desea escribir una solución de las ecuaciones de campo de relatividad general o de Gravedad de Cotton, se debe utilizar algún sistema de coordenadas particular, sin embargo, en general, un sistema de coordenadas solo cubre una parte de la variedad que pretende describir [13, 16, 21]. Por ejemplo, en la solución de Schwarzschild, las coordenadas no cubren el eje $\theta = 0$ ni $\theta = \pi$, pues el elemento de línea se degenera ahí, otros dos valores para los cuales la solución de Schwarzschild tiene problemas son $r = 2M$ y $r = 0$. Puntos como los anteriores que reflejan las deficiencias del sistema de coordenadas utilizado se denominan *singularidades coordenadas* y se dicen que

son *eliminables* o *removibles*, pues la introducción de otro sistema podría resolver este problema. Ya que la solución encontrada por Harada puede considerarse una generalización a la métrica de Schwarzschild–(anti) de Sitter, será conveniente primero hablar acerca de sus singularidades.

2.2.1. Singularidades de la métrica de Schwarzschild–(anti) de Sitter

En relatividad general, la solución de Schwarzschild suele interpretarse como un *agujero negro* de masa M en un espaciotiempo asintóticamente plano. Como ahora es bien sabido, la aparente singularidad de la métrica en $r = 2M$ corresponde a un *horizonte de eventos*, si bien esta superficie localmente es regular, globalmente funciona como un punto de no retorno: una vez que una partícula de prueba la atraviesa, nunca puede regresar (aunque esta es una definición aproximada y poco precisa), como nada puede escapar del horizonte de eventos, resulta imposible ver el interior, de ahí el nombre de agujero negro. En resumen, un agujero negro es simplemente una región del espaciotiempo separada del infinito por un horizonte de eventos [16].

Existe una solución en el vacío, para una métrica esféricamente simétrica y estática, a las ecuaciones de campo de Einstein modificadas con el término cosmológico Λ , esta es una generalización sencilla a la solución de Schwarzschild, que representa un agujero negro en un espacio asintóticamente de de Sitter (para $\Lambda > 0$) o anti-de Sitter (para $\Lambda < 0$) [10, 28]. La forma explícita de esta métrica es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.25)$$

En los modelos cosmológicos con un término Λ positivo aparecen horizontes de eventos distintos: el efecto de este término es hacer que el Universo se expanda tan rápidamente que para cada observador existen regiones desde las cuales la luz nunca puede llegarle, al límite de esta región se le conoce como el *horizonte de eventos cosmológico* del observador [26]. Esta singularidad es muy parecida a la singularidad coordenada del espaciotiempo de Schwarzschild, excepto que ahora se está dentro del horizonte, por lo tanto, se pueden enviar señales a través del horizonte, pero no hay forma de recibir información desde fuera del horizonte.

De acuerdo con [22], para hallar las singularidades de una métrica es necesario resolver la ecuación $g^{rr}(r) = 0$, que en este caso es:

$$1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 = 0, \quad (2.26)$$

la cual es una ecuación cúbica para r si se reescribe así: $r^3 + \tilde{p}r + \tilde{q} = 0$, con $\tilde{p} \equiv -\frac{3}{\Lambda}$ y $\tilde{q} \equiv -\frac{6M}{\Lambda}$. En general, un polinomio cúbico tiene tres raíces en \mathbb{C} , pero ya que los coeficientes de (2.26) son elementos de \mathbb{R} , la naturaleza de sus raíces dependerá de la función [23]:

$$D \equiv -108 \left(\frac{\tilde{q}^2}{4} + \frac{\tilde{p}^3}{27} \right) = -\frac{108}{\Lambda^2} (9\Lambda M^2 - 1), \quad (2.27)$$

la cual se conoce como el *discriminante* de (2.26). En concreto, si $D < 0$, entonces (2.26) tendrá una raíz real y dos complejas conjugadas, si $D = 0$, entonces todas las raíces de (2.26) serán reales y dos ellas serán iguales y si $D > 0$, entonces (2.26) tendrá tres raíces reales distintas. Si $M > 0$, entonces se tendrán las siguientes situaciones de acuerdo con [24]:

1. para $\Lambda < 0$, D es negativa y solo hay una raíz real que satisface $0 < R_0 < 2M$,
2. para $\Lambda > 0$ hay tres casos distintos:
 - a) si $3M > \Lambda^{-\frac{1}{2}}$, D es negativa y solo hay una raíz real e igual a $-R_0$,
 - b) para $3M = \Lambda^{-\frac{1}{2}}$, D es igual a cero y hay tres raíces reales, dos de ellas positivas e iguales a $R_1 = \sqrt{\Lambda}$ y la otra negativa e igual a $-2\sqrt{\Lambda}$,

- c) para $3M < \Lambda^{-\frac{1}{2}}$, D es positiva y hay tres raíces reales distintas que satisfacen $0 < 2M < R_2 < 3M < R_3$ y $R_4 < 0$. Tal como se describe en [26], R_3 representa un horizonte de eventos distinto al ya conocido de la solución de Schwarzschild conocido como *horizonte de eventos cosmológico*.

2.2.2. Singularidades de la solución de Harada

Ahora se considerará la solución de Harada, en este caso la ecuación a resolver para encontrar sus singularidades es

$$1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \gamma r = 0, \quad (2.28)$$

o, equivalentemente,

$$-\frac{\Lambda}{3r} (r^3 + ar^2 + br + c) = 0, \quad (2.29)$$

siendo $a \equiv -\frac{3\gamma}{\Lambda}$, $b \equiv -\frac{3}{\Lambda}$ y $c \equiv \frac{6M}{\Lambda}$. Ya que Λ y r son distintas de cero, será necesario entonces resolver la ecuación $r^3 + ar^2 + br + c = 0$, al reemplazar en esta la incógnita r por una nueva incógnita x relacionada con r a través de

$$r = x - \frac{a}{3}, \quad (2.30)$$

se obtiene una ecuación para x , la cual, como se puede verificar fácilmente, no contiene el término cuadrático, es decir se obtiene una *ecuación reducida* de la forma

$$x^3 + px + q = 0, \quad (2.31)$$

con $p \equiv b - \frac{a^2}{3} = -\frac{3(\Lambda + \gamma^2)}{\Lambda^2}$ y $q \equiv c - \frac{ba}{3} + \frac{2a^3}{27} = \frac{6M\Lambda^2 - 3\gamma\Lambda - 2\gamma^3}{\Lambda^3}$. Nuevamente la naturaleza de sus raíces dependerá de la función:

$$\begin{aligned} D &\equiv -108 \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right) \\ &= -108 \left[\frac{1}{\Lambda^3} (9\Lambda M^2 - 1) - \frac{3}{\Lambda^4} \left(3M\Lambda\gamma + \frac{\gamma^2}{4} + 2M\gamma^3 \right) \right], \end{aligned} \quad (2.32)$$

la cual es el *discriminante* de (2.31). En concreto, si $D < 0$, entonces (2.31) tendrá una raíz real y dos complejas conjugadas, si $D = 0$, entonces todas las raíces de (2.31) serán reales y dos ellas serán iguales y si $D > 0$, entonces (2.31) tendrá tres raíces reales distintas, sin embargo, puede sospecharse que el caso $D = 0$ es poco probable que ocurra pues implicaría una combinación muy específica entre M , Λ y γ . Para establecer cuál de los tres casos anteriores corresponde al de (2.32) se necesita saber con certeza cuál es la naturaleza, el signo y el orden de magnitud de γ , pues al igual que la “masa” M , debe determinarse individualmente para cada sistema físico. En un segundo trabajo, Harada lo aplicó a galaxias y encontró que, en promedio, γ toma valores del orden de $\sim 1 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2} \text{ pc}^{-1}$ [27].

Motivados por las razones físicamente interesantes que presentan las tres singularidades del caso 2. c) de la métrica de Schwarzschild-de Sitter y para poder hacer un análisis específico, en lo que sigue se supondrá que tanto M como Λ son positivas y que $3M < \Lambda^{-\frac{1}{2}}$. Es claro que si $\gamma > 0$, entonces D siempre es estrictamente positivo y se tendrán así tres raíces reales diferentes, por ello es conveniente introducir el cambio de variable

$$x = \sqrt{-\frac{4p}{3}} \cos \theta = \frac{2(\Lambda + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}}{\Lambda} \cos \theta \quad (2.33)$$

en (2.31), en consecuencia la ecuación cúbica se reescribe así:

$$\left[\frac{2(\Lambda + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}}{\Lambda} \right]^3 \cos^3 \theta + \left[-\frac{3(\Lambda + \gamma^2)}{\Lambda^2} \right] \frac{2(\Lambda + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}}{\Lambda} \cos \theta + \frac{6M\Lambda^2 - 3\gamma\Lambda - 2\gamma^3}{\Lambda^3} = 0, \quad (2.34)$$

al simplificar la expresión anterior se obtiene

$$4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta - \frac{3\gamma\Lambda + 2\gamma^3 - 6M\Lambda^2}{2(\Lambda + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}} = 0, \quad (2.35)$$

considerando la identidad trigonométrica $4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta - \cos 3\theta = 0$ puede despejarse θ :

$$\cos 3\theta = \frac{3\gamma\Lambda + 2\gamma^3 - 6M\Lambda^2}{2(\Lambda + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \theta = \frac{1}{3} \left[\cos^{-1} \left(\frac{3\gamma\Lambda + 2\gamma^3 - 6M\Lambda^2}{2(\Lambda + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + 2\pi n \right], \quad (2.36)$$

ya que el periodo de la función coseno es $2\pi n$. De esta manera se tiene que

$$x = \frac{2(\Lambda + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}}{\Lambda} \cos \left\{ \frac{1}{3} \left[\cos^{-1} \left(\frac{3\gamma\Lambda + 2\gamma^3 - 6M\Lambda^2}{2(\Lambda + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + 2\pi n \right] \right\}, \quad (2.37)$$

para $n = 0, 1, 2$. Por lo tanto, si $M, \Lambda,$ y γ son positivas, entonces $D > 0$ y las singularidades estarán localizadas en $r_n = x - \frac{\alpha}{3}$, es decir:

$$\begin{aligned} r_0 &= \alpha \cos \left(\frac{\beta}{3} \right) + \frac{\gamma}{\Lambda}, \\ r_1 &= \alpha \cos \left(\frac{\beta}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{\gamma}{\Lambda}, \\ r_2 &= \alpha \cos \left(\frac{\beta}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) + \frac{\gamma}{\Lambda}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

con

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \frac{2(\Lambda + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}}{\Lambda}, \\ \cos \beta &\equiv \frac{3\gamma\Lambda + 2\gamma^3 - 6M\Lambda^2}{2(\Lambda + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Ya que r está definida solo para valores positivos, véanse ecuaciones (2.24), los valores que tome β deben acotarse, para esto, puede observarse que las singularidades (2.38) pueden reescribirse así:

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{\gamma}{\Lambda} \left[1 + 2\Theta \cos \left(\frac{\beta}{3} \right) \right], \\ r_1 &= \frac{\gamma}{\Lambda} \left[1 + 2\Theta \cos \left(\frac{\beta}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) \right], \\ r_2 &= \frac{\gamma}{\Lambda} \left[1 + 2\Theta \cos \left(\frac{\beta}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde $\Theta \equiv \sqrt{1 + \frac{\Lambda}{\gamma^2}}$. Utilizando las tres ecuaciones anteriores se deduce que para que r_0, r_1 y r_2 sean positivas, β debe estar acotada en el intervalo

$$-3 \cos^{-1} \left(-\frac{1}{2\Theta} \right) < \beta < 3 \cos^{-1} \left(-\frac{1}{2\Theta} \right). \quad (2.41)$$

Si ahora se considera que $\gamma < 0$, entonces D podría tomar valores mayores, menores o incluso iguales a 0, esto dependerá de cuál es el resultado de evaluar el factor $\Delta \equiv 3M\Lambda\gamma + \frac{\gamma^2}{4} + 2M\gamma^3$ para un sistema específico: por ejemplo, si $\Delta > 0$ o $\Delta < 0$ y $|9\Lambda M^2 - 1| > \frac{3\Delta}{\Lambda}$, esto implica que $D > 0$ y las raíces seguirán estando dadas por las expresiones (2.38). Sin embargo, para que ahora r_0 , r_1 y r_2 sean positivas, β debe estar acotada en el intervalo

$$3 \cos^{-1} \left(-\frac{1}{2\Theta} \right) < \beta < -3 \cos^{-1} \left(-\frac{1}{2\Theta} \right) + 6\pi \quad (2.42)$$

En cualquier caso, para tener análogos de los dos horizontes aparentes físicamente interesantes que ocurren en el caso de Schwarzschild–de Sitter, implicaría que $\gamma < 0$ esté restringida a un conjunto muy específico de valores que dependen a su vez de los otros dos parámetros de la solución de Harada: M y Λ .

Ahora se considerará el caso en que $\gamma < 0$ y D es estrictamente negativo, entonces se tendrá una sola raíz real y dos complejas conjugadas, por lo tanto es útil introducir el cambio de variable:

$$x = \sqrt{-\frac{4p}{3}} \cosh \vartheta = \frac{2(\Lambda + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}}{\Lambda} \cosh \vartheta \quad (2.43)$$

en (2.31), por ende la ecuación cúbica se reescribe así:

$$4 \cosh^3 \vartheta - 3 \cosh \vartheta - \frac{3\gamma\Lambda + 2\gamma^3 - 6M\Lambda^2}{2(\Lambda + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}} = 0, \quad (2.44)$$

utilizando la identidad $4 \cosh^3 \vartheta - 3 \cosh \vartheta - \cosh 3\vartheta = 0$ puede despejarse ϑ :

$$\vartheta = \frac{1}{3} \left[\cosh^{-1} \left(\frac{3\gamma\Lambda + 2\gamma^3 - 6M\Lambda^2}{2(\Lambda + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + 2\pi ni \right], \quad (2.45)$$

ya que el periodo de la función coseno hiperbólico es $2\pi ni$. En consecuencia

$$x = \frac{2(\Lambda + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}}{\Lambda} \cosh \left\{ \frac{1}{3} \left[\cosh^{-1} \left(\frac{3\gamma\Lambda + 2\gamma^3 - 6M\Lambda^2}{2(\Lambda + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + 2\pi ni \right] \right\}, \quad (2.46)$$

así que para $D < 0$, las singularidades están localizadas en

$$\hat{r}_n = \hat{\alpha} \cosh \left(\frac{\hat{\beta}}{3} + \frac{2\pi ni}{3} \right) + \frac{\gamma}{\Lambda}, \quad (2.47)$$

para $n = 0, 1, 2$, con $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ dadas por

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &\equiv \frac{2(\Lambda + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}}{\Lambda}, \\ \cosh \hat{\beta} &\equiv \frac{3\gamma\Lambda + 2\gamma^3 - 6M\Lambda^2}{2(\Lambda + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Como r solo toma valores reales positivos, la única singularidad real aparece cuando $n = 0$, por lo tanto esta será la única que vale la pena considerar.

De acuerdo con [16], un criterio sencillo para determinar cuándo las singularidades de una métrica se deben al sistema de coordenadas utilizado, es el siguiente: la curvatura se mide mediante el tensor de Riemann y a partir de este objeto se pueden construir varias cantidades escalares y dado que los escalares son independientes de las coordenadas, tiene sentido decir que se vuelven

infinitos. El escalar más simple es el de Ricci $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, otros escalares de orden más alto son $R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ o $R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}$, este último recibe el nombre de *escalar de Kretschmann*. Por lo tanto, si alguno de estos escalares tiende a infinito cuando se toma el límite en algún punto, se dirá que ese punto es una singularidad de la curvatura y del espaciotiempo. En este trabajo se considerará que esta condición es suficiente para que un punto sea considerado una singularidad, pero en general un análisis más cuidadoso implicaría verificar si la variedad es *completa* (sin ser rigurosos esto quiere decir que comenzando en cualquier punto, se puede seguir una curva indefinidamente en cualquier dirección). Un cálculo directo [6], muestra que para la métrica de Harada se tiene que

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48M^2}{r^6} + \frac{8\gamma^2}{r^2} - \frac{8\gamma\Lambda}{r} + \frac{8\Lambda^2}{3}, \quad (2.49)$$

$$R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{10\gamma^2}{r^2} - \frac{12\gamma\Lambda}{r} + 4\Lambda^2, \quad (2.50)$$

$$R = -\frac{6\gamma}{r} + 4\Lambda. \quad (2.51)$$

Es interesante observar que cuando $\Lambda, \gamma \rightarrow 0$ los invariantes de curvatura anteriores se reducen exactamente a los de la solución de Schwarzschild. Es evidente que $r = 0$ presenta problemas, así que esta singularidad en el origen no es removible, en la literatura a este tipo se le denomina *singularidad intrínseca, de curvatura, física, esencial o real* [21]. Sin embargo, ninguna de las tres raíces halladas para $\gamma > 0$, ni la raíz encontrada para $\gamma < 0$ presentan dificultades, el espaciotiempo se comporta perfectamente bien allí, independientemente del signo de γ , las coordenadas (t, r) se vuelven singulares en $r = r_0, r_1, r_2$ y \hat{r}_0 : ya no están en correspondencia uno a uno con los eventos del espaciotiempo. Como ya se mencionó, este problema se puede solucionar introduciendo otro sistema de coordenadas, por ejemplo, seguir un procedimiento similar al que hicieron Kruskal y Szekeres [13], de forma independiente, y construir la máxima extensión analítica de la solución de Harada, al igual que ellos lo hicieron para la de Schwarzschild, sin embargo, esto va más allá de los objetivos del presente trabajo.

Para tener una idea de qué pueden representar las singularidades r_n de la métrica de Harada para $\gamma > 0$, sin hacer un análisis riguroso, se hará lo siguiente: puede observarse que si se utiliza la siguiente identidad trigonométrica $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$, entonces r_0, r_2 y r_3 se pueden reescribir de la siguiente manera

$$r_0 = \alpha \cos\left(\frac{\beta}{3}\right) + \frac{\gamma}{\Lambda}, \quad (2.52)$$

$$r_1 = -\frac{1}{2}\alpha \cos\left(\frac{\beta}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha \sin\left(\frac{\beta}{3}\right) + \frac{\gamma}{\Lambda}, \quad (2.53)$$

$$r_2 = -\frac{1}{2}\alpha \cos\left(\frac{\beta}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha \sin\left(\frac{\beta}{3}\right) + \frac{\gamma}{\Lambda}. \quad (2.54)$$

Escritas de esta modo, un cálculo explícito muestra que las tres raíces satisfacen las siguientes relaciones:

$$r_0 + r_1 + r_2 = \frac{3\gamma}{\Lambda}, \quad (2.55)$$

$$r_0 r_1 + r_0 r_2 + r_1 r_2 = -\frac{3}{\Lambda}, \quad (2.56)$$

$$r_0 r_1 r_2 = -\frac{6M}{\Lambda}. \quad (2.57)$$

Al tomar el límite cuando $\gamma \rightarrow 0$ (por la izquierda o por la derecha) en (2.52), (2.53) y (2.54) y utilizar las identidades trigonométricas $\cos^{-1}(-x) = \sin^{-1}x + \frac{\pi}{2}$ y $\cos(x - y) = \cos x \cos y +$

sen x sen y , las tres raíces encontradas se simplifican de la siguiente manera:

$$r_0^* = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \cos \psi - \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \sin \psi, \quad (2.58)$$

$$r_1^* = -\sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \cos \psi - \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \sin \psi, \quad (2.59)$$

$$r_2^* = \frac{2}{\sqrt{\Lambda}} \sin \psi, \quad (2.60)$$

donde $\sin(3\psi) = 3M\sqrt{\Lambda}$ y además $0 < \sin(3\psi) < 1$. Al considerar el límite cuando $M \rightarrow 0$ en (2.58) se obtiene

$$\lim_{M \rightarrow 0} r_0^* = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}, \quad (2.61)$$

de la relatividad general [10], se sabe que para una constante cosmológica positiva el término $\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ puede identificarse con $\frac{1}{H}$, el cual es el *horizonte cosmológico aparente* del espaciotiempo de de Sitter, siendo H el parámetro de Hubble. Por lo tanto, se dirá que r_0 es el horizonte cosmológico del espaciotiempo descrito por la métrica de Harada, además, ya que se está considerando el caso en que γ es positiva, es claro que $r_0 > r_0^*$, en consecuencia se puede inferir que el efecto de una $\gamma > 0$ en el espaciotiempo es atractivo, ya que está produciendo que el horizonte cosmológico aparente sea más grande.

Similarmente, al tomar el límite cuando $\Lambda \rightarrow 0$ en (2.60) se obtiene

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} r_2^* = 2M, \quad (2.62)$$

el cual coincide exactamente con el *horizonte de eventos* del agujero negro de la solución de Schwarzschild, por lo tanto, se dirá que r_2 es el horizonte de eventos de la solución de Harada. Nuevamente, puede observarse que $r_2 > r_2^*$ y, otra vez, concluir que el efecto de una $\gamma > 0$ es atractivo, ya que está produciendo que el horizonte de eventos aparente sea más grande.

El caso de r_1^* es más sencillo de analizar ya que a partir de (2.59) puede observarse que siempre toma valores negativos y por lo tanto no tiene relevancia física. Sin embargo, de r_1 puede decirse lo siguiente: ya que los valores de β se restringieron al intervalo (2.41), las tres raíces están ordenadas así $0 < r_1 < r_2 < r_0$, como r_2 fue asociado a un horizonte de eventos aparente, entonces r_1 correspondería a un *horizonte interno aparente*.

Ahora se considerará la singularidad \hat{r}_0 de la métrica de Harada para $\gamma < 0$: al tomar el límite cuando $\gamma \rightarrow 0$, se observa que \hat{r}_0 se reduce a

$$\hat{r}_0^* = \frac{2}{\sqrt{\Lambda}} \cosh \left[\frac{1}{3} \cosh^{-1} \left(3M\sqrt{\Lambda} \right) \right], \quad (2.63)$$

nuevamente, al tomar el límite cuando $M \rightarrow 0$ en la expresión anterior se obtiene

$$\lim_{M \rightarrow 0} \hat{r}_0^* = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}, \quad (2.64)$$

el cual coincide con el horizonte cosmológico aparente del espaciotiempo de de Sitter, es claro que $\hat{r}_0 < \hat{r}_0^*$, por lo tanto, se puede inferir que el efecto de una γ negativa es repulsivo, pues produce que el horizonte cosmológico sea más pequeño, aún así, en lo que sigue se dirá que \hat{r}_0 representa el horizonte cosmológico aparente del espaciotiempo para una D y γ menores a cero. Debe resaltarse que en este caso “falta” un segundo horizonte que represente o esté asociado al horizonte de eventos aparente que se tiene en el caso de Schwarzschild, lo cual podría representar una *inconsistencia*, además, como ya se mostró, incluso si $\gamma < 0$ y $D > 0$, para que esto ocurra γ depende de los valores que tomen M y Λ . Lo anteriormente discutido, da indicios de que una γ negativa debería descartarse, más adelante se presentarán más evidencias para excluirla.

Capítulo 3

Geodésicas en el espaciotiempo de la solución de Harada

Con el fin de comprender mejor la solución encontrada por Harada es conveniente considerar el comportamiento de las geodésicas: dada alguna métrica, se puede determinar el movimiento de partículas de prueba en *caída libre* en esa geometría. La suposición clave, contenida en la palabra “partícula de prueba”, es que se explorará el espaciotiempo de tal manera que se pueden ignorar las perturbaciones producidas en el campo gravitacional debido a su presencia. En ausencia de fuerzas no gravitacionales, el *principio de equivalencia* de Einstein afirma que las trayectorias que siguen las partículas de prueba con masa son geodésicas tipo tiempo, mientras que las no masivas siguen geodésicas nulas [10, 16, 21]. En Gravedad de Cotton se dará por válido este principio y, por lo tanto, lo discutido anteriormente seguirá siendo verdadero.

Para determinar el movimiento geodésico se necesitan los símbolos de Christoffel distintos de cero de la métrica (2.23) en términos de los parámetros del espaciotiempo, estos se pueden deducir a partir de los resultados del Apéndice C, pues tomando en cuenta que $e^\alpha = e^{-\beta} = 1 - \frac{2M}{r} + \gamma r + \frac{\Lambda r^2}{3}$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^0 &= \frac{2\Lambda r^3 - 3\gamma r^2 - 6M}{2r(\Lambda r^3 - 3\gamma r^2 - 3r + 6M)}, \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{18r^3} (2\Lambda r^3 - 3\gamma r^2 - 6M) (\Lambda r^3 - 3\gamma r^2 - 3r + 6M), \\ \Gamma_{11}^1 &= -\frac{2\Lambda r^3 - 3\gamma r^2 - 6M}{2r(\Lambda r^3 - 3\gamma r^2 - 3r + 6M)}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{3} (\Lambda r^3 - 3\gamma r^2 - 3r + 6M), \\ \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{3} (\Lambda r^3 - 3\gamma r^2 - 3r + 6M) \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Al sustituir las cantidades anteriores en la ecuación geodésica $\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{2\Lambda r^3 - 3\gamma r^2 - 6M}{r(\Lambda r^3 - 3\gamma r^2 - 3r + 6M)} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} &= 0, \\
 \frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{1}{18r^3} (2\Lambda r^3 - 3\gamma r^2 - 6M) (\Lambda r^3 - 3\gamma r^2 - 3r + 6M) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 \\
 - \frac{2\Lambda r^3 - 3\gamma r^2 - 6M}{2r(\Lambda r^3 - 3\gamma r^2 - 3r + 6M)} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 \\
 + \frac{1}{3} (\Lambda r^3 - 3\gamma r^2 - 3r + 6M) \left[\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 \right] &= 0, \\
 \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 &= 0, \\
 \frac{d^2 \varphi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} + 2 \cot \theta \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Aunque no parece haber muchas esperanzas de resolver este conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas, al ser (2.23) una métrica esféricamente simétrica, el trabajo se puede simplificar enormemente.

3.1. Cantidades conservadas

El movimiento geodésico de una partícula de prueba en un espaciotiempo descrito por una métrica $g_{\mu\nu}$ se rige por el lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$, siendo λ un parámetro afín de la geodésica. Al considerar la solución de Harada, la forma que toma \mathcal{L} es:

$$\begin{aligned}
 2\mathcal{L} &= g_{tt}\dot{t}^2 + g_{rr}\dot{r}^2 + g_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 + g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}^2 \\
 &= - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \gamma r\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \gamma r\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2,
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde $\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}$. En el lenguaje de la mecánica clásica, tanto t como φ en (3.3) son coordenadas cíclicas (si el lagrangiano de un sistema no contiene una coordenada determinada, se dice que la coordenada es cíclica o ignorable), por lo tanto, los momentos canónicos asociados p_t y p_φ , respectivamente, son constantes:

$$p_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = g_{tt}\dot{t} = - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \gamma r\right) \dot{t}, \tag{3.4}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi} = r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}. \tag{3.5}$$

Las dos son cantidades conservadas pues el momento canónico conjugado a una coordenada cíclica lo es. Estas constantes de movimiento se pueden interpretar de la siguiente manera: p_φ está asociado con la componente axial del momento angular de la órbita de la partícula y $-p_t$ está relacionado con su energía (como se explicará más adelante, para partículas sin masa, las dos cantidades en verdad pueden relacionarse con la energía y la componente axial del momento angular, mientras que para partículas masivas son la energía y la componente axial del momento angular, ambas por unidad de masa de la partícula).

Otra constante de movimiento está relacionada con la magnitud del momento angular, esto no es difícil de ver ya que (3.3) es un lagrangiano esféricamente simétrico, aún así esto se puede

comprobar mediante un cálculo explícito: la ecuación de movimiento para θ es

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \\ &= \frac{d}{d\lambda} (r^2 \dot{\theta}) - r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{d}{d\lambda} (r^2 \dot{\theta}) - \frac{p_\varphi^2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

al multiplicar la expresión anterior por $r^2 \dot{\theta}$ se obtiene una derivada total:

$$0 = \frac{d}{d\lambda} (r^2 \dot{\theta})^2 + \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{p_\varphi}{\sin \theta} \right)^2. \quad (3.7)$$

La simetría esférica permite imponer la condición inicial $\theta(\lambda_0) = \frac{\pi}{2}$ y $\dot{\theta}(\lambda_0) = 0$ para algún $\lambda = \lambda_0$, esto no es una pérdida de generalidad porque no hay una dirección preferencial en un espaciotiempo esféricamente simétrico. Así, la integración de (3.7) produce

$$(r^2 \dot{\theta})^2 = -p_\varphi^2 \cot^2 \theta, \quad (3.8)$$

es claro que el primer miembro nunca es negativo, mientras que el segundo miembro nunca es positivo, por lo tanto, ambos tienen que ser cero, esto implica que $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\dot{\theta} = 0$ siempre. En conclusión, si se orienta el sistema de coordenadas de modo que inicialmente la partícula se mueva en el plano ecuatorial, entonces la partícula permanecerá en él. Este resultado se deriva del teorema de unicidad para soluciones de tales ecuaciones diferenciales, ya que $\theta = \frac{\pi}{2}$ para todo λ satisface la ecuación, físicamente, el resultado es obvio a partir de la simetría esférica. De esta manera, (3.4) y (3.5) se convierten en

$$p_t = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 + \gamma r \right) \frac{dt}{d\lambda} = E, \quad (3.9)$$

$$p_\varphi = r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = L. \quad (3.10)$$

Otra manera de comprobar que la energía y el momento angular son cantidades conservadas es emplear el enfoque de los *vectores de Killing*: un espaciotiempo posee una simetría si admite un campo vectorial ξ^μ , llamado vector de Killing, tal que $\mathfrak{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0$. El símbolo \mathfrak{L}_ξ representa un operador conocido como la *derivada de Lie*, es un tipo especial de derivada que se puede aplicar a tensores de cualquier rango, está definida de tal manera que es lineal, satisface la regla de Leibniz y es independiente de la conexión [16, 21]. La derivada de Lie de un tensor arbitrario $T_{\beta \dots}^{\alpha \dots}$ está definida por

$$\mathfrak{L}_\xi T_{\beta \dots}^{\alpha \dots} = \xi^\gamma \partial_\gamma T_{\beta \dots}^{\alpha \dots} - T_{\beta \dots}^{\gamma \dots} \partial_\gamma \xi^\alpha - \dots + T_{\gamma \dots}^{\alpha \dots} \partial_\beta \xi^\gamma + \dots. \quad (3.11)$$

En particular, puede demostrarse [13] que la derivada de Lie del tensor métrico es $\mathfrak{L}_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu$, si además, en un sistema de coordenadas dado, las componentes de la métrica no dependen de x^α , entonces $\mathfrak{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0$, donde $\xi^\mu = (\partial_\alpha)^\mu$, el vector ξ^μ se denomina entonces vector de Killing. Así pues, la condición para que ξ^μ sea un vector de Killing es que

$$0 = \mathfrak{L}_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu, \quad (3.12)$$

por lo tanto, el tensor $\nabla_\mu \xi_\nu$ es antisimétrico si ξ^ν es un vector Killing. Los vectores de Killing se pueden utilizar para encontrar constantes asociadas con el movimiento a lo largo de una geodésica [16]. Suponiendo que u^α es tangente a una geodésica parametrizada afínmente por λ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} (u^\alpha \xi_\alpha) &= \nabla_\beta (u^\alpha \xi_\alpha) u^\beta \\ &= (\nabla_\beta u^\alpha) u^\beta \xi_\alpha + (\nabla_\beta \xi_\alpha) u^\alpha u^\beta \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

Geodésicas en el espaciotiempo de la solución de Harada
3.1 Cantidades conservadas

en la segunda línea, el primer término desaparece en virtud de la ecuación geodésica y el segundo término desaparece porque $\nabla_\beta \xi_\alpha$ es un tensor antisimétrico mientras que $u^\alpha u^\beta$ es simétrico. Por lo tanto, $u^\alpha \xi_\alpha$ es constante a lo largo de la geodésica.

Al ser la solución de Harada una métrica esféricamente simétrica y estática se sabe que existen dos vectores de Killing relacionados con la energía y la componente axial del momento angular [16]. La energía surge del vector de Killing temporal

$$\xi^\mu = (\partial_t)^\mu = (1, 0, 0, 0); \quad (3.14)$$

mientras que el vector de Killing cuya cantidad conservada asociada es la magnitud del momento angular es

$$\psi^\mu = (\partial_\varphi)^\mu = (0, 0, 0, 1); \quad (3.15)$$

puede observarse que ambos vectores de Killing conmutan: $[\xi^\mu, \psi^\mu] = 0$. En ambos casos es conveniente bajar el índice para obtener

$$\xi_\mu = \left(- \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 + \gamma r \right), 0, 0, 0 \right) \quad (3.16)$$

y

$$\psi_\mu = (0, 0, 0, r^2 \sin^2 \theta). \quad (3.17)$$

Como ya se demostró anteriormente, si K_μ es un vector de Killing, se sabe que

$$K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \text{constante}. \quad (3.18)$$

Además, siempre se tiene otra constante del movimiento para las geodésicas: la ecuación geodésica junto con la condición de que la métrica sea covariantemente constante, implica que la cantidad

$$\epsilon = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (3.19)$$

es constante a lo largo de la trayectoria. Para una partícula con masa $\lambda = \tau$ siendo τ el tiempo propio de la partícula de prueba y $\epsilon = 1$, entonces esta relación se convierte en $\epsilon = -g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 1$. Para partículas sin masa, como los fotones que se mueven a lo largo de trayectorias nulas, siempre se tiene $\epsilon = 0$ y la relación original se convierte en $\epsilon = -g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0$, siendo k^μ el cuadrivector de onda del fotón.

Nuevamente, no es difícil de ver que la simetría esférica de la métrica permite la conservación de la dirección del momento angular, lo cual significa que la partícula se moverá en un plano. Puede elegirse que este sea el plano ecuatorial del sistema de coordenadas; si la partícula no está en este plano, puede hacerse una rotación de coordenadas hasta que lo esté. Así, la conservación de la magnitud del momento angular implica que, para una sola partícula, puede elegirse

$$\theta = \frac{\pi}{2}. \quad (3.20)$$

El hecho anterior implica que $\frac{d\theta}{d\lambda} = 0$ y $\sin \theta = 1$ a lo largo de las geodésicas, por lo tanto las dos cantidades conservadas son

$$E = -\xi_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 + \gamma r \right) \frac{dt}{d\lambda} \quad (3.21)$$

y

$$L = \psi_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda}; \quad (3.22)$$

de nueva cuenta, para partículas sin masa, estos pueden considerarse como la energía y el momento angular conservados, mientras que para las partículas con masa son la energía y el momento angular por unidad de masa de la partícula conservados.

3.2. Ecuaciones de movimiento

Al considerar en la expresión (3.19) que $\dot{\theta} = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$, se obtiene

$$\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \gamma r\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \gamma r\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = -\epsilon, \quad (3.23)$$

si se multiplica la ecuación anterior por $1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \gamma r$ y se utilizan las expresiones dadas por (3.9) y (3.10), se obtiene la siguiente relación

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \frac{2M\epsilon}{r} - \frac{\Lambda}{3}\epsilon r^2 + \gamma\epsilon r + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \gamma r\right) = E^2 - \epsilon. \quad (3.24)$$

De esta manera se tiene que el movimiento geodésico de una partícula de prueba en el espaciotiempo descrito por la solución de Harada se rige por las ecuaciones (3.9), (3.10) y (3.24), con E y L constantes. Estas constituyen un sistema de tres ecuaciones diferenciales para tres funciones desconocidas: $t(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$, $r(\lambda)$. Puede observarse que está última está desacoplada de las primeras dos, en principio, la tarea consistiría en resolver primero para $r(\lambda)$ y sustituir la solución en (3.9) y (3.10), las cuales después pueden integrarse por separado [29, 31].

Un caso particular ocurre cuando el momento angular es idénticamente cero, la ecuación de movimiento (3.10) implica que $\varphi = \varphi_0 = \text{constante}$. La geodésica se limita entonces a la superficie tipo tiempo bidimensional $(\theta, \varphi) = (\frac{\pi}{2}, \varphi_0)$ y se dice que esta es una geodésica radial. En el caso más general, $L \neq 0$, puede elegirse a φ como parámetro afín a lo largo de cualquier geodésica tipo tiempo o nula y a partir de (3.10) puede verse que

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{L}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}, \quad (3.25)$$

al sustituir esto en (3.24) se obtiene

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2M}{r^3} + \frac{1}{r^2} + \left(\frac{2M\epsilon}{L^2} - \gamma\right) \frac{1}{r} - \frac{\epsilon}{L^2} \gamma r + \frac{\Lambda}{3} \frac{\epsilon}{L^2} r^2 + \left(\frac{E}{L}\right)^2 + \frac{\Lambda}{3} - \frac{\epsilon}{L^2}. \quad (3.26)$$

Para *simplificar* esta ecuación, es natural introducir la variable $u = \frac{1}{r}$, tal como se hace en el análisis de las órbitas keplerianas de la mecánica clásica, y obtener el análogo de la *ecuación de Binet*:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = 2Mu^3 + u^2 + \left(\frac{2M\epsilon}{L^2} - \gamma\right) u - \frac{\epsilon}{L^2} \frac{\gamma}{u} + \frac{\Lambda}{3r^2} \frac{\epsilon}{L^2} + \left(\frac{E}{L}\right)^2 + \frac{\Lambda}{3} - \frac{\epsilon}{L^2}, \quad (3.27)$$

esta ecuación diferencial determina completamente la parte (r, φ) de la geodésica. En general, ecuaciones como la anterior no tienen soluciones en términos de funciones elementales, a menudo las soluciones exactas que se encuentran se expresan en términos de las *funciones elípticas de Weierstrass* y de las *funciones elípticas de Jacobi* [29].

3.2.1. Geodésicas tipo tiempo

Cuando se consideran partículas de prueba masivas, es natural usar el tiempo propio τ como el parámetro afín de la geodésica en lugar de la λ , la cual está vinculada con el cuadrimomento P^μ de dicha partícula. Dado que el vector tangente asociado con τ es la cuadrivelocidad U^μ y además P^μ y U^μ están relacionados entre sí, puede demostrarse que también ambos parámetros están conectados de la siguiente manera: $\tau = m\lambda$. La ecuación (3.24) se convierte en

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V(r) = \frac{E^2 - 1}{2}, \quad (3.28)$$

donde

$$V(r) \equiv -\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3} + \frac{\gamma L^2}{2r} + \frac{\gamma}{2}r - \frac{\Lambda L^2}{6} - \frac{\Lambda}{6}r^2. \quad (3.29)$$

Además, las ecuaciones (3.9) y (3.10) se transforman en

$$\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \gamma r\right) \frac{dt}{d\tau} = E, \quad (3.30)$$

$$r^2 \frac{d\tau}{dt} = L. \quad (3.31)$$

En las expresiones anteriores, ahora E y L representan la energía y momento angular por unidad de masa, respectivamente. Puede observarse que (3.28) tiene la forma de una primera integral de movimiento de una partícula no relativista en el potencial $V(r)$ (llamado en adelante *potencial efectivo*), interpretándose el término $\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2$ como la energía cinética por unidad de masa, $V(r)$ como la energía potencial por unidad de masa y el lado derecho constante $\frac{E^2-1}{2}$ como la energía mecánica total por unidad de masa. El perfil de $V(r)$ para algunos valores de $\frac{L}{M}$ se representa en la Figura 3.1. Los valores extremos del potencial efectivo están dados por la condición $\frac{dV(r)}{dr} = 0$, lo que equivale a la siguiente ecuación de quinto grado

$$2\Lambda r^5 - 3\gamma r^4 + (3\gamma L^2 - 6M)r^2 + 6L^2 r - 18L^2 M = 0. \quad (3.32)$$

Las raíces de este polinomio y la condición $\frac{d^2V(r)}{dr^2} = 0$ definen la órbita circular estable más interna r_{ISCO} .

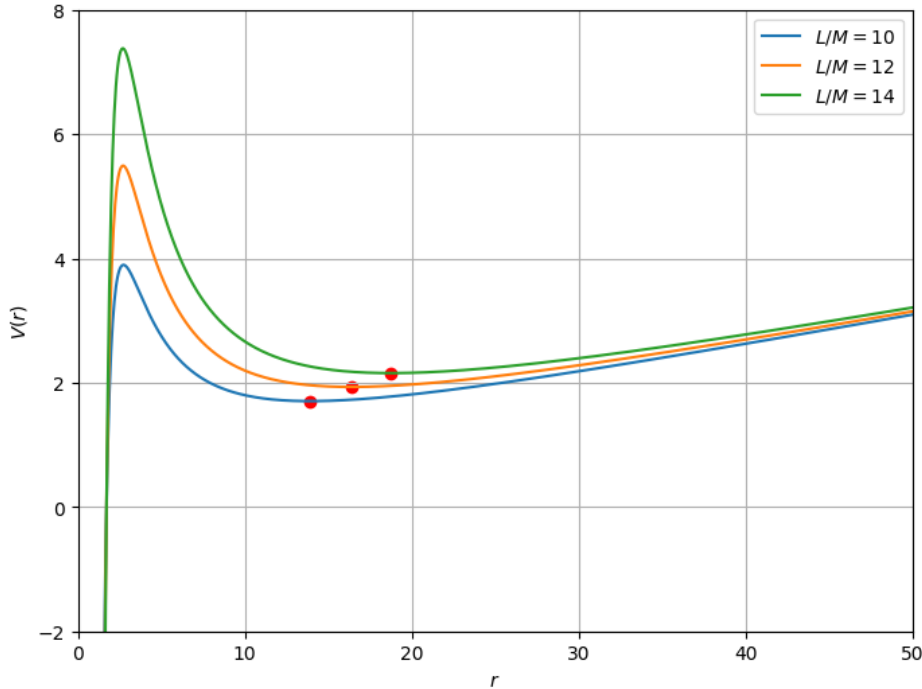


Figura 3.1: Gráfica del potencial efectivo (3.29) para distintos valores de $\frac{L}{M}$ y valores fijos positivos de Λ y γ . Los puntos marcan los mínimos de $V(r)$, ubicando las órbitas circulares estables.

3.2.2. Geodésicas nulas

Las ecuaciones de movimiento (3.9), (3.10) y (3.24) para una partícula sin masa ($\epsilon = 0$) son

$$\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \gamma r\right) \frac{dt}{d\lambda} = E_\gamma, \quad (3.33)$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = L_\gamma, \quad (3.34)$$

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L_\gamma^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \gamma r\right) = E_\gamma^2, \quad (3.35)$$

donde E_γ y L_γ son la energía y el momento angular de la partícula de prueba, respectivamente. A continuación se considerará a lo largo de la geodésica un nuevo parámetro afin definido por

$$\tilde{\lambda} = \lambda |L|, \quad (3.36)$$

en lugar de la λ original, siendo esta última el parámetro afin asociado con el cuadrimomento de la partícula de prueba. Cuando L es distinto de cero a lo largo de una geodésica, la fórmula anterior en verdad define un nuevo parámetro afin. El valor absoluto asegura que $\tilde{\lambda}$ aumenta hacia el futuro, al igual que λ , cualquiera que sea el signo de L , es decir, se preserva causalidad. Además $\tilde{\lambda}$ tiene las mismas unidades que L , es decir, una longitud al cuadrado, dado que λ es adimensional. En términos de $\tilde{\lambda}$, el sistema de ecuaciones diferenciales anterior se convierte en

$$\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \gamma r\right) \frac{dt}{d\tilde{\lambda}} = \frac{1}{b_\gamma^2}, \quad (3.37)$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\tilde{\lambda}} = \pm 1, \quad (3.38)$$

$$\left(\frac{dr}{d\tilde{\lambda}}\right)^2 + V_\gamma(r) = \frac{1}{b_\gamma^2}, \quad (3.39)$$

donde

$$b_\gamma \equiv \frac{L_\gamma}{E_\gamma}, \quad (3.40)$$

$$V_\gamma(r) \equiv \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \gamma r\right). \quad (3.41)$$

Al igual que en el caso de las geodésicas tipo tiempo, (cf. ecuación (3.28)), se observa que la ecuación (3.39) tiene la forma de una primera integral de movimiento de una partícula no relativista en el *potencial efectivo* $V_\gamma(r)$. La principal diferencia es que $V_\gamma(r)$ no depende de L , contrariamente al potencial efectivo $V(r)$ para partículas con masa. Puede concluirse entonces que una geodésica nula de una partícula de prueba sin masa está completamente caracterizada por la constante b_γ , esta cantidad puede interpretarse como el *parámetro de impacto*, análogo al que aparece en la mecánica clásica. Este importante resultado también pudo hacerse deducido sin haber reparametrizado la geodésica con (3.36), ya que en las ecuaciones (3.26) y (3.27) con $\epsilon = 0$ se reducen, respectivamente, a

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \gamma r\right) = \frac{1}{b_\gamma^2}, \quad (3.42)$$

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 - 2Mu^3 + u^2 + \gamma u - \frac{\Lambda}{3} = \frac{1}{b_\gamma^2}. \quad (3.43)$$

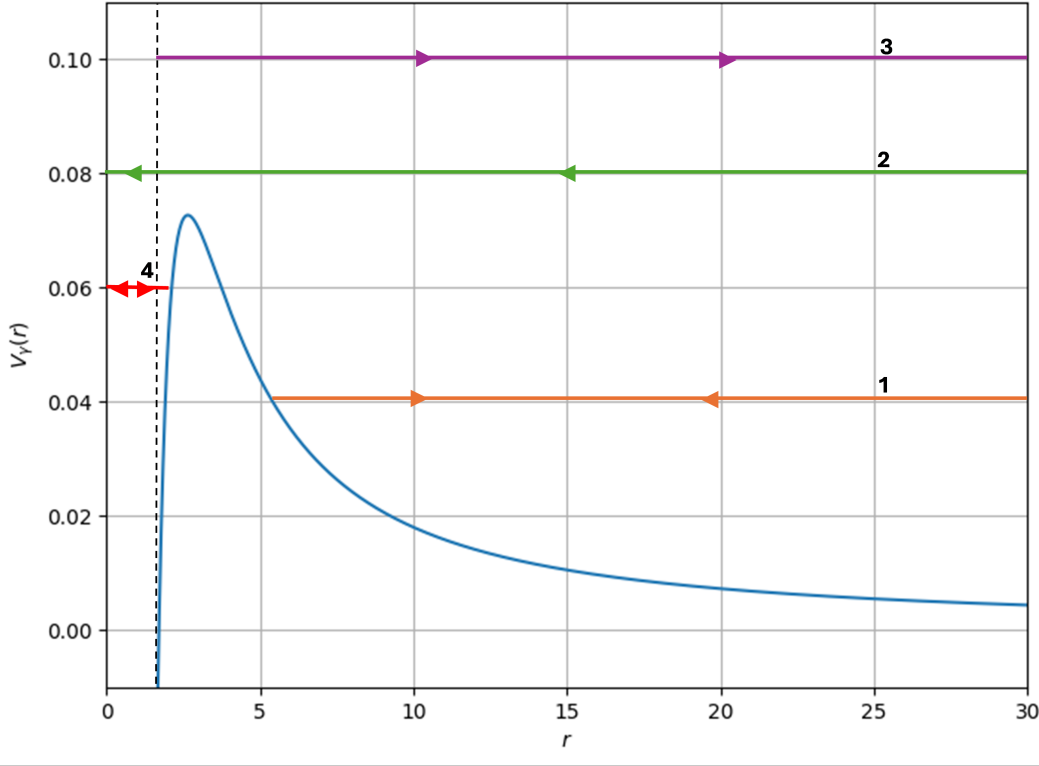


Figura 3.2: Gráfica del potencial efectivo (3.41) con valores arbitrarios positivos para M , Λ y γ . La línea punteada vertical marca la ubicación del horizonte de eventos. Las líneas horizontales marcadas del 1 al 4 corresponden a las órbitas que los fotones siguen para distintos valores de b_γ .

Cualquiera que sea la forma en que se escriba la ecuación diferencial de la órbita, solo un término depende de la elección de la órbita: el término b_γ , pues M , Λ y γ son propiedades de la geometría de la solución de Harada, no dependen de la elección de la órbita. Si en (3.39) el término $\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2$ se hace cero antes de que un fotón impacte con la fuente, esta partícula alcanza un punto de inflexión y luego regresa al infinito, en el caso contrario, el fotón incide sobre el objeto, de esta manera, el valor extremo b_{γ_c} que toma el parámetro de impacto separa las órbitas de los fotones capturados y dispersados. Haciendo $\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = 0$ en (3.39) se encuentra la siguiente relación entre b_γ y la coordenada radial:

$$b_\gamma(r) = \pm \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \gamma r}}. \quad (3.44)$$

A partir de la expresión anterior se deduce que el valor extremo del parámetro de impacto está dado por

$$b_{\gamma_c} = \left[\frac{1}{54M^2} \left(\sqrt{6\gamma M + 1} + 1 \right) + \frac{\gamma}{18M} \left(2\sqrt{6\gamma M + 1} + 3 \right) - \frac{\Lambda}{3} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.45)$$

puede observarse que cuando $\gamma \rightarrow 0$ y $\Lambda \rightarrow 0$, entonces $b_{\gamma_c} \rightarrow 3\sqrt{3}M$ al igual que en el caso de la solución de Schwarzschild. El valor extremo encontrado en (3.45) es una posición estacionaria en r , por lo tanto, $r(b_{\gamma_c})$ corresponde a una órbita circular, generalmente llamada *órbita circular de fotones* o *anillo de fotones*. Al conjunto de todos los anillos de fotones (uno por elección del plano ecuatorial) a menudo se le llama *esfera de fotones*.

Se pueden inferir varios tipos de órbitas de los fotones a partir de la Figura 3.2, siguiendo un análisis cualitativo como en [29, 30]. En vista de la ecuación de movimiento (3.39), cada geodésica que siguen los fotones se puede representar mediante una línea horizontal con ordenada b_γ^{-2} en esta figura, la cual debe estar por encima de la curva $V_\gamma(r)$ debido a que $\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2$ es una cantidad positiva. Por lo tanto, se excluye la región bajo la curva $V_\gamma(r)$. En concreto:

1. Para un fotón inicialmente entrante, es decir, un fotón emitido con $\frac{dr}{d\lambda} < 0$ desde una posición $r = r_e$, existen dos posibilidades, dependiendo de los valores de r_e y del parámetro de impacto b_γ :
 - a) Si $r_e > r(b_{\gamma_c})$ y b_γ es lo suficientemente grande como para cumplir $b_\gamma^{-2} < V_\gamma(r)$ (trayectoria 1 en la Figura 3.2), el fotón “rebota” en la barrera de potencial en algún valor mínimo r_p de r , el *periastro*.
 - b) Si $r_e < r(b_{\gamma_c})$ (trayectoria 4 en la Figura 3.2) o b_γ es lo suficientemente pequeño como para cumplir $b_\gamma^{-2} > V_\gamma(r)$ (trayectoria 2 en la Figura 3.2), el fotón no es detenido por la barrera de potencial y alcanza valores arbitrariamente pequeños de r y finalmente es absorbido por la fuente.

2. Para un fotón inicialmente saliente, es decir, un fotón emitido con $\frac{dr}{d\lambda} > 0$, necesariamente se tiene $r_e > r_1$, siendo r_2 el horizonte de eventos de la solución de Harada, entonces hay dos posibles resultados:
 - a) Si $r_e > r(b_{\gamma_c})$ (trayectoria 1 en la Figura 1) o b_γ es lo suficientemente pequeño como para cumplir $b_\gamma^{-2} < V_\gamma(r)$ (trayectoria 3 en la Figura 3.2), el fotón escapa al infinito.
 - b) si $r_2 < r_e < r(b_{\gamma_c})$ y $b_\gamma^{-2} < V_\gamma(r)$ (trayectoria 4 en la Figura 3.2), el fotón “rebota” en el lado izquierdo de la barrera de potencial, alcanzando un valor máximo r_a de r , el *apoastro*.

Un análisis más completo de las distintas órbitas que siguen los fotones en el espaciotiempo descrito por la solución de Harada consistiría en resolver la ecuación (3.42) o (3.43), tal como se describe en [31] para el caso de la solución de Schwarzschild, sin embargo, esto va más allá de los propósitos de este trabajo.

Capítulo 4

Cambio de frecuencia

Los tres primeros tests, propuestos por Albert Einstein en 1916 [32], para probar la teoría de la relatividad general, se referían a la precesión del perihelio de Mercurio, la curvatura de la luz en presencia de campos gravitacionales y el corrimiento al rojo gravitacional, estas tres pruebas se conocen hoy como *las pruebas clásicas de la relatividad general*. Originalmente se pensó que el test del corrimiento al rojo gravitacional era una demostración directa de la validez de esta teoría, ya que empleaba una solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein, la solución de Schwarzschild, pero pronto se comprendió que en realidad era solo una demostración del *principio de equivalencia débil* [33] y ahora está claro que cualquier teoría relativista de la gravitación consistente con este principio predecirá un corrimiento al rojo.

En términos generales, en la teoría de la gravedad de Einstein cuando dos observadores que se encuentran en un espaciotiempo curvo, sujetos a potenciales gravitacionales locales diferentes, intercambian fotones o pulsos luminosos y observan que las señales de luz enviadas por la fuente con una frecuencia inicial determinada son detectadas por el receptor con una frecuencia diferente medida localmente, a este fenómeno se le conoce como *corrimiento al rojo gravitacional* [33]. Cabe señalar que en la mayoría de los libros de texto [16, 20, 21, 22] cuando se analiza este problema utilizando la métrica de Schwarzschild suponen, por simplicidad, que el fotón emitido parte del reposo y que también el observador lo está, por reposo se refieren a que la parte espacial de la cuadrivelocidad del emisor y del observador son cero, es decir, $U^\mu = (U^t, 0, 0, 0)$. Como ya se expuso en el capítulo anterior, la solución encontrada por Harada puede representar, en general, el campo gravitacional exterior de un objeto esférico en un espaciotiempo de fondo tipo (anti) de Sitter, en el cual además está presente un efecto extra producido por el parámetro γ . En los siguientes capítulos se mostrará cuál es la expresión general para el corrimiento al rojo de fotones emitidos por partículas de prueba que orbitan este objeto.

Tal como se señaló previamente, un hecho importante acerca de la luz en el contexto de la relatividad especial y general, es que esta *viaja* a través de geodésicas nulas: a partir de la relación $-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \epsilon$, se identifica a $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ con k^μ , siendo este el cuádrimomento o cuádrivector de onda de los fotones que forman la luz, además para este caso se elige $\epsilon = 0$, entonces se tiene la ecuación geodésica $k_\mu k^\mu = 0$, la cual de forma explícita y en coordenadas esféricas, $k^\mu = (k^t, k^r, k^\theta, k^\varphi)$, se escribe de la siguiente manera

$$g_{tt} (k^t)^2 + g_{rr} (k^r)^2 + g_{\theta\theta} (k^\theta)^2 + g_{\varphi\varphi} (k^\varphi)^2 = 0. \quad (4.1)$$

De manera similar, las partículas masivas viajan a través de geodésicas tipo tiempo y, nuevamente, a partir de la relación $-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \epsilon$, al identificar a λ con τ , el tiempo propio de la partícula, se tendrá que $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ corresponde a la cuadrivelocidad $U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$ de dicha partícula. Además, para este caso se escoge $\epsilon = 1$, por lo tanto, se tiene la ecuación geodésica $U_\mu U^\mu = -1$, la cual al expandir y utilizar también coordenadas esféricas, $U^\mu = (U^t, U^r, U^\theta, U^\varphi)$, se escribe de

la siguiente manera

$$g_{tt} (U^t)^2 + g_{rr} (U^r)^2 + g_{\theta\theta} (U^\theta)^2 + g_{\varphi\varphi} (U^\varphi)^2 = -1. \quad (4.2)$$

Otro resultado importante en el contexto de la teoría de Einstein, es que la frecuencia ω_C de un fotón con cuadrivector de onda k_C^μ medida por un observador con cuadrivelocidad U_C^μ está dada por

$$\omega_C = - (k_\mu U^\mu)|_C, \quad (4.3)$$

donde el subíndice C se refiere al punto de emisión e o detección d en algún punto correspondiente P_C del espaciotiempo. Por lo tanto, la frecuencia de las señales luminosas medidas por un observador en movimiento con la partícula de prueba en el punto de emisión e es

$$\omega_e = - (k_\mu U^\mu)|_e, \quad (4.4)$$

mientras que la frecuencia detectada en el punto de detección d por un observador ubicado lejos de la fuente viene dada por

$$\omega_d = - (k_\mu U^\mu)|_d, \quad (4.5)$$

donde las cuadrivelocidades y cuadrimomentos del emisor y del detector son, respectivamente,

$$U_e^\mu = (U^t, U^r, U^\theta, U^\varphi)|_e, \quad k_e^\mu = (k^t, k^r, k^\theta, k^\varphi)|_e, \quad (4.6)$$

$$U_d^\mu = (U^t, U^r, U^\theta, U^\varphi)|_d, \quad k_d^\mu = (k^t, k^r, k^\theta, k^\varphi)|_d. \quad (4.7)$$

En Gravedad de Cotton se dará por hecho que todo lo anteriormente discutido sigue siendo verdadero. En lo que sigue, se considerará que el emisor de fotones es una partícula de prueba masiva que se mueve geodésicamente alrededor del objeto compacto en el espaciotiempo descrito por la métrica (2.23), con cuadrivelocidad dada por la ecuación anterior. Las condiciones que U_e^μ , U_d^μ , k_e^μ y k_d^μ satisfacen se considerarán en los capítulos siguientes. No obstante, es importante tener en cuenta que si se supone que las órbitas del emisor se encuentran en el plano ecuatorial, es decir, en el plano con coordenada angular $\theta = \frac{\pi}{2}$, el cuerpo en órbita no experimenta movimiento a lo largo de la dirección θ , en consecuencia, se deduce que U^θ debe ser igual a cero de manera inherente. Del mismo modo, al considerar que los fotones siguen trayectorias de geodésicas nulas en el plano ecuatorial, se concluye que k^θ también debe anularse inevitablemente.

El cambio de frecuencia z está definido de la siguiente manera

$$z \equiv \frac{\omega_e - \omega_d}{\omega_d}, \quad (4.8)$$

donde ω_e es la frecuencia emitida y ω_d la frecuencia detectada. La expresión anterior, aunque útil, se expresa de manera más conveniente así:

$$1 + z = \frac{\omega_e}{\omega_d}. \quad (4.9)$$

De este modo, el cambio de frecuencia asociado a la emisión y detección de fotones viene dado en general por la siguiente relación:

$$\begin{aligned} 1 + z &= \frac{\omega_e}{\omega_d} \\ &= \frac{-k_\mu U^\mu|_e}{-k_\mu U^\mu|_d} \\ &= \frac{(-g_{tt}k^tU^t - g_{rr}k^rU^r - g_{\theta\theta}k^\theta U^\theta - g_{\varphi\varphi}k^\varphi U^\varphi)|_e}{(-g_{tt}k^tU^t - g_{rr}k^rU^r - g_{\theta\theta}k^\theta U^\theta - g_{\varphi\varphi}k^\varphi U^\varphi)|_d}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Como se vio en el capítulo anterior, debido a la existencia de los campos vectoriales Killing $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$ y $\psi^\mu = (0, 0, 0, 1)$, hay dos cantidades conservadas, para partículas masivas estas

están relacionadas con la energía y el momento angular por unidad de masa en reposo de la partícula de prueba:

$$E = \frac{\tilde{E}}{m} = -g_{\mu\nu}\xi^\mu U^\nu = -g_{tt}U^t, \quad (4.11)$$

$$L = \frac{\tilde{L}}{m} = g_{\mu\nu}\psi^\mu U^\nu = g_{\varphi\varphi}U^\varphi. \quad (4.12)$$

Algo similar se tiene para las partículas sin masa, como los fotones, en este caso las cantidades conservadas son su energía y su momento angular:

$$E_\gamma = -g_{\mu\nu}\xi^\mu k^\nu = -g_{tt}k^t, \quad (4.13)$$

$$L_\gamma = g_{\mu\nu}\psi^\mu k^\nu = g_{\varphi\varphi}k^\varphi. \quad (4.14)$$

Cualesquiera de las cuatro relaciones anteriores pueden utilizarse para reescribir (4.10): si se utiliza (4.11) y (4.12) se tiene

$$1 + z = \frac{(Ek^t - g_{rr}k^r U^r - g_{\theta\theta}k^\theta U^\theta - Lk^\varphi)|_e}{(Ek^t - g_{rr}k^r U^r - g_{\theta\theta}k^\theta U^\theta - Lk^\varphi)|_d}, \quad (4.15)$$

mientras que si se usa (4.13) y (4.14)

$$1 + z = \frac{(E_\gamma U^t - g_{rr}k^r U^r - g_{\theta\theta}k^\theta U^\theta - L_\gamma U^\varphi)|_e}{(E_\gamma U^t - g_{rr}k^r U^r - g_{\theta\theta}k^\theta U^\theta - L_\gamma U^\varphi)|_d}. \quad (4.16)$$

Sin embargo, como se verá más adelante, es (4.16) la que es de más relevancia, pues en ella algunas de las cantidades involucradas se pueden medir o reescribir en términos de otras que también se pueden medir. Cabe señalar que esta es la expresión más general para el cambio de frecuencia que experimentan las señales de luz emitidas por partículas masivas en su camino a lo largo de geodésicas nulas hacia un observador distante. Es de suma importancia enfatizar que hay dos cambios de frecuencia diferentes en (4.16) relacionados con la propagación de la luz en la misma dirección y en la dirección opuesta con respecto al movimiento del emisor de fotones que orbita el objeto compacto, es decir, los cambios de frecuencia corresponden a una fuente de fotones que se aleja (desplazamiento al rojo) o se acerca (desplazamiento al azul), respectivamente [35].

Como ya se comentó, los objetos masivos radiantes (estrellas, por ejemplo) que orbitan el objeto esférico emiten ondas electromagnéticas hacia el detector, de modo que los fotones correspondientes viajan a lo largo de geodésicas nulas desde su emisión hasta su detección y en ellos está contenida información de la geometría del espaciotiempo, la cual está codificada en su cambio de frecuencia.

En los siguientes capítulos se mostrará una expresión para el cambio de frecuencia de fotones en términos de parámetros orbitales de objetos masivos radiantes (estrellas, por ejemplo) y los parámetros del espaciotiempo (el conjunto de parámetros M , Λ y γ), para el caso particular en que las partículas que emiten los fotones siguen órbitas circulares en el plano ecuatorial y los detectores, debido a la expansión del Universo producida por la constante cosmológica, están alejándose de la fuente siguiendo un movimiento radial.

Capítulo 5

Emisores en órbitas circulares y en el plano ecuatorial

Con el fin de obtener expresiones para $U_e^\mu = (U^t, U^r, U^\theta, U^\varphi)|_e$ y $k_e^\mu = (k^t, k^r, k^\theta, k^\varphi)|_e$, en este capítulo se estudiará el importante caso de las órbitas circulares y en el plano ecuatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$ de partículas de prueba, esto es, cuando $U^r = 0 = U^\theta$.

Para el caso de partículas con masa, se ha establecido la conservación de dos cantidades, representadas por $E = -g_{tt}U^t$ y $L = g_{\varphi\varphi}U^\varphi$. Estas ecuaciones pueden invertirse para obtener:

$$U^t = -\frac{E}{g_{tt}} = \frac{E}{1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \gamma r}, \quad (5.1)$$

$$U^\varphi = \frac{L}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{L}{r^2}. \quad (5.2)$$

En consecuencia, es crucial hallar expresiones para E y L que dependan solo de M , γ y Λ , para lograr esto se seguirá el siguiente enfoque: a partir de las ecuaciones (3.28) y (3.29)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r) = \frac{E^2 - 1}{2}, \quad (5.3)$$

$$V(r) = -\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3} + \frac{\gamma L^2}{2r} + \frac{\gamma}{2}r - \frac{\Lambda L^2}{6} - \frac{\Lambda}{6}r^2, \quad (5.4)$$

al identificar a $\frac{dr}{d\lambda}$ con la componente U^r de la cuadrivelocidad de una partícula masiva, se tiene que

$$\frac{1}{2} (U^r)^2 + V(r) = \frac{E^2 - 1}{2}. \quad (5.5)$$

Las órbitas circulares se definen como geodésicas tipo tiempo con $r = \text{constante}$. Tenemos entonces que $U^r = 0$ y además

$$V(r) = \frac{E^2 - 1}{2}, \quad \frac{dV(r)}{dr} = 0. \quad (5.6)$$

Si, adicionalmente, se consideran órbitas circulares *estables* el potencial deberá tener un mínimo estable, es decir, debe satisfacer que

$$\frac{d^2V(r)}{dr^2} > 0. \quad (5.7)$$

Puede hallarse una expresión para L utilizando la segunda igualdad en (5.6):

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dr} V(r) \\
 &= \frac{d}{dr} \left(-\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3} + \frac{\gamma L^2}{2r} + \frac{\gamma r}{2} - \frac{\Lambda L^2}{6} - \frac{\Lambda r^2}{6} \right) \\
 &= \frac{M}{r^2} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3ML^2}{r^4} - \frac{\gamma L^2}{2r^2} + \frac{\gamma}{2} - \frac{\Lambda r}{3} \\
 &= -\frac{L^2}{r^3} \left(1 - \frac{3M}{r} + \frac{\gamma r}{2} \right) + \frac{M}{r^2} + \frac{\gamma}{2} - \frac{\Lambda r}{3},
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

al despejar L en la ecuación anterior se obtiene

$$L = \pm r \sqrt{\frac{\frac{M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{\gamma r}{2}}{1 - \frac{3M}{r} + \frac{\gamma r}{2}}}. \tag{5.9}$$

Una expresión para E puede encontrarse utilizando la expresión anterior y la primera igualdad en (5.6):

$$\begin{aligned}
 E^2 &= 1 + 2V(r) \\
 &= 1 - \frac{2M}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2ML^2}{r^3} + \frac{\gamma L^2}{r} + \gamma r - \frac{\Lambda L^2}{3} - \frac{\Lambda r^2}{3} \\
 &= 1 - \frac{2M}{r} + \gamma r - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} + \gamma r - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) \\
 &= 1 - \frac{2M}{r} + \gamma r - \frac{\Lambda r^2}{3} + \left(\frac{\frac{M}{r} + \frac{\gamma r}{2} - \frac{\Lambda r^2}{3}}{1 - \frac{3M}{r} + \frac{\gamma r}{2}} \right) \left(1 - \frac{2M}{r} + \gamma r - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) \\
 &= \left(1 - \frac{2M}{r} + \gamma r - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) \left(1 + \frac{\frac{M}{r} + \frac{\gamma r}{2} - \frac{\Lambda r^2}{3}}{1 - \frac{3M}{r} + \frac{\gamma r}{2}} \right) \\
 &= \left(1 - \frac{2M}{r} + \gamma r - \frac{\Lambda r^2}{3} \right)^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{3M}{r} + \frac{\gamma r}{2}} \right),
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

al despejar E en la ecuación anterior se obtiene

$$E = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \gamma r \right) \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{3M}{r} + \frac{\gamma r}{2}}}. \tag{5.11}$$

Al sustituir (5.9) y (5.11) en (5.1) y (5.2), respectivamente, se encuentra que

$$U^t = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{3M}{r} + \frac{\gamma r}{2}}}, \tag{5.12}$$

$$U^\varphi = \pm \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\frac{M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{\gamma r}{2}}{1 - \frac{3M}{r} + \frac{\gamma r}{2}}}. \tag{5.13}$$

Por lo tanto, la cuadrivelocidad en el punto de emisión es

$$\begin{aligned}
 U_e^\mu &= (U^t, U^r, U^\theta, U^\varphi)|_e \\
 &= (U^t, 0, 0, U^\varphi)|_e,
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

donde

$$U_e^t = \sqrt{1 - \frac{3M}{r_e} + \frac{\gamma r_e}{2}}, \quad (5.15)$$

$$U_e^\varphi = \pm \frac{1}{r_e} \sqrt{\frac{M}{r_e} + \frac{\gamma r_e}{2} - \frac{\Lambda r_e^2}{3}}, \quad (5.16)$$

los valores permitidos por la coordenada radial están dados por la ecuación (2.24), es claro que deben excluirse aquellos que produzcan un signo negativo dentro de la raíz cuadrada.

Para el caso de los fotones, estos también siguen órbitas circulares y en el plano ecuatorial, por lo tanto, se tiene que $k^r = 0 = k^\theta$ y en consecuencia

$$\begin{aligned} k_e^\mu &= (k^t, k^r, k^\theta, k^\varphi) \Big|_e \\ &= (k^t, 0, 0, k^\varphi) \Big|_e, \end{aligned} \quad (5.17)$$

las expresiones para k_e^t y k_e^φ pueden deducirse de manera análoga a como se hizo para el caso de partículas masivas: a partir de las cantidades conservadas representadas por $E_\gamma = -g_{tt}k^t$ y $L_\gamma = g_{\varphi\varphi}k^\varphi$, al invertir estas dos ecuaciones se obtiene

$$k_e^t = - \frac{E_\gamma}{g_{tt}} \Big|_e = \frac{E_{\gamma_e}}{1 - \frac{2M}{r_e} - \frac{\Lambda}{3}r_e^2 + \gamma r_e} \quad (5.18)$$

$$k_e^\varphi = \frac{L_\gamma}{g_{\varphi\varphi}} \Big|_e = \frac{L_{\gamma_e}}{r_e^2}. \quad (5.19)$$

De manera similar a como se abordó el caso de las partículas masivas, es posible aplicar un enfoque análogo para los fotones y derivar expresiones para E_γ y L_γ en términos de los parámetros del espaciotiempo, sin embargo, como se verá en capítulos siguientes, esto resulta innecesario.

Tal como se mencionó en el Capítulo 3, en relatividad general, para una partícula de prueba masiva que orbita un agujero negro existe un radio mínimo, r_{ISCO} , en el que todavía es posible un movimiento circular estable [10, 16, 21] y un radio máximo, r_{OSCO} , el primero define la llamada *órbita circular estable más interna* y el segundo la *órbita circular estable más externa*; en un espaciotiempo de fondo determinado, a menudo se considera que estos dos radios marcan el borde interior y exterior, respectivamente, de un disco de acreción alrededor de un agujero negro. Para calcular r_{ISCO} se debe de resolver $\frac{dV(r)}{dr} = 0$ y $\frac{d^2V(r)}{dr^2} > 0$. Para la métrica de Schwarzschild $r_{ISCO} = 6M$, mientras que para la métrica de Harada aparece una ecuación de quinto grado que no se puede resolver analíticamente (cf. con la ecuación (3.32)). En este trabajo se considerará que las partículas que emiten los fotones se mueve en órbitas circulares estables, de tal manera que su radio de emisión r_e satisface que $r_{ISCO} < r_e < r_{OSCO}$.

Capítulo 6

Detectores en movimiento radial

En el espaciotiempo descrito por la solución encontrada por Harada, este experimenta una expansión debido a una constante cosmológica positiva que domina a grandes escalas, al *igual* que en el modelo actual del Universo. Por lo tanto, un detector debería alejarse radialmente de la fuente que produce el campo gravitacional en el caso de estar muy distante, estos detectores son los de interés en este trabajo. Lo discutido anteriormente implica que la cuadrivelocidad del detector en el punto de detección es

$$\begin{aligned} U_d^\mu &= (U^t, U^r, U^\theta, U^\varphi)|_d \\ &= (U^t, U^r, 0, 0)|_d, \end{aligned} \quad (6.1)$$

en consecuencia, es necesario encontrar expresiones para U_d^t y U_d^r , para lograrlo se aplicará el siguiente procedimiento: tal como se detalló en el capítulo previo, utilizando la conservación de la energía para partículas con masa, $E = -g_{tt}U^t$, se puede obtener una expresión para U^t

$$U^t = -\frac{E}{g_{tt}} = \frac{E}{1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \gamma r}. \quad (6.2)$$

Para partículas masivas en movimiento radial, L es idénticamente cero y, por lo tanto, el potencial efectivo (3.29) se reduce a

$$V(r) \equiv -\frac{M}{r} + \frac{\gamma}{2}r - \frac{\Lambda}{6}r^2, \quad (6.3)$$

y a partir de la ecuación (3.28) puede hallarse una expresión para U^r :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(U^r)^2 + V(r) &= \frac{E^2 - 1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}(U^r)^2 + \frac{1}{2} - \frac{M}{r} + \frac{\gamma r}{2} - \frac{\Lambda r^2}{6} = \frac{1}{2}E^2 \\ &\Rightarrow (U^r)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \gamma r\right) \\ &\Rightarrow U^r = \sqrt{E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \gamma r\right)}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Por lo tanto, la cuadrivelocidad del detector es

$$U_d^t = \frac{E_d}{1 - \frac{2M}{r_d} - \frac{\Lambda r_d^2}{3} + \gamma r_d}, \quad (6.5)$$

$$U_d^r = \sqrt{E_d^2 - \left(1 - \frac{2M}{r_d} - \frac{\Lambda r_d^2}{3} + \gamma r_d\right)}. \quad (6.6)$$

Ya sea en (6.5) o en (6.6), es necesario hallar una expresión para E_d en términos de M , γ y Λ . Como la energía es una cantidad conservada, el valor que tenga en un punto dado del espaciotiempo será el mismo que en cualquier otro. Un punto de particular importancia es aquel en donde la atracción gravitacional generada por la masa M de la fuente está completamente equilibrada por la expansión del Universo producida por la constante cosmológica Λ y el efecto atractivo o repulsivo producido por el parámetro γ , a este punto se le denominará *radio de gravedad cero* \tilde{r}_0 . Aunque se ha dicho “un punto” en realidad son un *conjunto infinito* de puntos que forman una esfera de radio \tilde{r}_0 concéntrica a la fuente del campo gravitacional en la que las partículas de prueba experimentan lo descrito anteriormente.

En \tilde{r}_0 la componente espacial de la cuadrivelocidad de una partícula de prueba será cero, lo cual implica que estará en reposo, por lo tanto

$$\begin{aligned} U^\mu|_{r_0} &= (U^t, U^r, U^\theta, U^\varphi)|_{r_0} \\ &= (U^t, 0, 0, 0)|_{r_0}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

usando este hecho se podrá encontrar una expresión para \tilde{r}_0 : recordando que la velocidad angular de una partícula masiva que sigue órbitas circulares está dada por la ecuación (5.13):

$$U^\varphi = \pm \frac{1}{r} \sqrt{\frac{M - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{\gamma r}{2}}{1 - \frac{3M}{r} + \frac{\gamma r}{2}}}, \quad (6.8)$$

se observa que $U^\varphi|_{\tilde{r}_0} = 0$ cuando $\frac{M}{\tilde{r}_0} - \frac{\Lambda}{3}\tilde{r}_0^2 + \frac{\gamma}{2}\tilde{r}_0 = 0$, o equivalentemente, cuando

$$-\frac{\Lambda}{3\tilde{r}_0} \left(\tilde{r}_0^3 - \frac{3\gamma}{2\Lambda}\tilde{r}_0^2 - \frac{3M}{\Lambda} \right) = 0. \quad (6.9)$$

Es necesario entonces hallar las raíces de la ecuación cúbica

$$\tilde{r}_0^3 + a\tilde{r}_0^2 + c = 0, \quad (6.10)$$

con $a \equiv -\frac{3\gamma}{2\Lambda}$ y $c \equiv -\frac{3M}{\Lambda}$. El cambio de variable $\tilde{r}_0 = x - \frac{a}{3}$, transforma la ecuación (6.10) en

$$x^3 + px + q = 0, \quad (6.11)$$

donde $p \equiv -\frac{a^2}{3} = -\frac{3\gamma^2}{4\Lambda^2}$ y $q \equiv c + \frac{2a^3}{27} = -\frac{12M\Lambda^2 + \gamma^3}{4\Lambda^3}$. El discriminante de la ecuación (6.11) es

$$\begin{aligned} D &= -108 \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right) \\ &= -108 \left(\frac{18M^2\Lambda^2 + 3M\gamma^3}{8\Lambda^4} \right), \end{aligned} \quad (6.12)$$

es claro que si $\gamma > 0$, el discriminante será estrictamente negativo y, de acuerdo con lo mencionado en el Capítulo 2, la ecuación (6.10) tendrá una raíz real y dos complejas conjugadas. Si en cambio, $\gamma < 0$, entonces D podría tomar valores mayores (si $\gamma < \sqrt[3]{-6M\Lambda^2}$), menores (si $\gamma > \sqrt[3]{-6M\Lambda^2}$) o iguales a cero (si $\gamma = \sqrt[3]{-6M\Lambda^2}$), según sea el resultado de evaluar $18M^2\Lambda^2 + 3M\gamma^3$ para un sistema en específico; si en particular el discriminante es estrictamente positivo se tendrán tres raíces reales distintas, pero si es cero dos de ellas serán iguales.

Al considerar $D < 0$ y $\gamma > 0$ será conveniente introducir el cambio de variable

$$x = \sqrt{-\frac{4p}{3}} \cosh \phi = \frac{\gamma}{\Lambda} \cosh \phi \quad (6.13)$$

en (6.11), de esta forma la ecuación cúbica se reescribe así:

$$4 \cosh^3 \phi - 3 \cosh \phi - \left(\frac{12M\Lambda^2}{\gamma^3} + 1 \right) = 0, \quad (6.14)$$

utilizando la identidad $4 \cosh^3 \phi - 3 \cosh \phi - \cosh 3\phi = 0$ puede despejarse ϕ :

$$\phi = \frac{1}{3} \left[\cosh^{-1} \left(\frac{12M\Lambda^2}{\gamma^3} + 1 \right) + 2\pi ni \right], \quad (6.15)$$

ya que el periodo de la función coseno hiperbólico es $2\pi ni$. En consecuencia

$$x = \frac{\gamma}{\Lambda} \cosh \left\{ \frac{1}{3} \left[\cosh^{-1} \left(\frac{12M\Lambda^2}{\gamma^3} + 1 \right) + 2\pi ni \right] \right\}, \quad (6.16)$$

es claro que la única raíz real ocurre cuando $n = 0$, por ello será la única que se conservará. En consecuencia, se tiene que el radio de gravedad cero para $\gamma > 0$ está localizado en

$$\begin{aligned} \tilde{r}_0 &= x - \frac{a}{3} \\ &= \frac{\gamma}{\Lambda} \cosh \left[\frac{1}{3} \cosh^{-1} \left(\frac{12M\Lambda^2}{\gamma^3} + 1 \right) \right] + \frac{\gamma}{2\Lambda}; \end{aligned} \quad (6.17)$$

una prueba de consistencia es que al tomar el límite cuando $\gamma \rightarrow 0^+$ se recupera el radio de gravedad cero en el espaciotiempo de Schwarzschild-de Sitter y en el de Kerr-de Sitter [34]:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \tilde{r}_0 = \left(\frac{3M}{\Lambda} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (6.18)$$

Como se mencionó anteriormente, todavía puede ocurrir que para algunas $\gamma < 0$ se tenga que $D > 0$, solo basta con que $\gamma < \sqrt[3]{-6M\Lambda^2}$, en este caso el radio de gravedad cero seguirá estando dado por (6.17), sin embargo al considerar el límite cuando $\gamma \rightarrow 0^-$ se obtiene

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^-} \tilde{r}_0 = \left(\frac{3M}{\Lambda} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (6.19)$$

lo cual también es consistente con el resultado hallado en [34].

Ahora, si $D > 0$ y $\gamma < 0$ se introduce el cambio de variable $x = \sqrt{-\frac{4p}{3}} \cos \phi = \frac{\gamma}{\Lambda} \cos \phi$ y al fijarse en la identidad trigonométrica $4 \cos^3 \phi - 3 \cos \phi - \cos 3\phi = 0$, se deduce que *los radios de gravedad cero* en este caso son

$$\tilde{r}^*_0 = \frac{\gamma}{\Lambda} \cos \left\{ \frac{1}{3} \left[\cos^{-1} \left(\frac{12M\Lambda^2}{\gamma^3} + 1 \right) + 2\pi n \right] \right\} + \frac{\gamma}{2\Lambda}, \quad (6.20)$$

para $n = 0, 1, 2$. Sin embargo, si en cualquiera de las tres raíces se toma el límite cuando $\gamma \rightarrow 0^-$, este no existe y no habría forma de comparar estas cantidades con otros resultados previos bien establecidos, además, tener tres raíces reales sería un problema, pues implicaría que existen tres distancias respecto a la fuente en las cuales una partícula de prueba estaría completamente estática, por ello, de esto y lo discutido anteriormente, se descartará que γ pueda tomar valores negativos para *sistemas astrofísicos reales* y en lo que sigue se considerará que solo toma valores positivos.

Ya que en \tilde{r}_0 también sucede que $U^r|_{\tilde{r}_0} = 0$, a partir de la ecuación (6.4), se observa que esto ocurre cuando

$$E_{\tilde{r}_0} = \sqrt{1 - \frac{2M}{\tilde{r}_0} - \frac{\Lambda \tilde{r}_0^2}{3} + \gamma \tilde{r}_0}, \quad (6.21)$$

por lo tanto, si se coloca el detector en $d = \tilde{r}_0$, la energía que este tendrá será

$$\begin{aligned} E_d &= \left\{ 1 - \frac{2M}{\frac{\gamma}{\Lambda} \cosh \left[\frac{1}{3} \cosh^{-1} \left(\frac{12M\Lambda^2}{\gamma^3} + 1 \right) \right] + \frac{\gamma}{2\Lambda}} - \left(\frac{\Lambda\gamma}{9} \cosh \left[\frac{1}{3} \cosh^{-1} \left(\frac{12M\Lambda^2}{\gamma^3} + 1 \right) \right] + \frac{\Lambda\gamma}{18} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma^2}{\Lambda} \cosh \left[\frac{1}{3} \cosh^{-1} \left(\frac{12M\Lambda^2}{\gamma^3} + 1 \right) \right] + \frac{\gamma^2}{2\Lambda} \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

En este trabajo se considerará que los detectores se están alejando radialmente de la fuente del campo gravitacional y además satisfacen que $\tilde{r}_0 < r_d < r_0$, siendo r_0 el horizonte cosmológico aparente encontrado en la sección 2.2.

Para el caso de los fotones detectados, estos tienen un cuádrimomento

$$\begin{aligned} k_d^\mu &= (k^t, k^r, k^\theta, k^\varphi) \Big|_d \\ &= (k^t, k^r, 0, k^\varphi) \Big|_d, \end{aligned} \quad (6.23)$$

ahora será necesario hallar expresiones para k_d^t , k_d^r y k_d^φ , para ello se adoptará un enfoque similar al empleado previamente para analizar los fotones en órbitas circulares y en el plano ecuatorial: a partir de las cantidades conservadas $E_\gamma = -g_{tt}k^t$ y $L_\gamma = g_{\varphi\varphi}k^\varphi$, estas se invierten para obtener dos componentes del cuádrimomento de los fotones en el punto de detección

$$k_d^t = -\frac{E_\gamma}{g_{tt}} \Big|_d = \frac{E_{\gamma d}}{1 - \frac{2M}{r_d} - \frac{\Lambda}{3}r_d^2 + \gamma r_d}, \quad (6.24)$$

$$k_d^\varphi = \frac{L_\gamma}{g_{\varphi\varphi}} \Big|_d = \frac{L_{\gamma d}}{r_d^2}. \quad (6.25)$$

Una expresión para k_d^r puede deducirse a partir de (3.35): como se están considerando fotones, se identifica a $\frac{dr}{d\lambda}$ con la componente k^r de su cuádrimomento, entonces

$$(k^r)^2 = E_\gamma^2 - \frac{L_\gamma^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \gamma r \right), \quad (6.26)$$

por lo tanto

$$k_d^r = \sqrt{E_{\gamma d}^2 - \frac{L_{\gamma d}^2}{r_d^2} \left(1 - \frac{2M}{r_d} - \frac{\Lambda r_d^2}{3} + \gamma r_d \right)}. \quad (6.27)$$

Aunque es útil la expresión anterior, en el siguiente capítulo se mostrará que es más conveniente hacer la siguiente manipulación algebraica con el fin de introducir, otra vez, una cantidad de fundamental importancia:

$$\begin{aligned} k_d^r &= \sqrt{E_{\gamma d}^2 \left[1 - \frac{1}{r_d^2} \left(1 - \frac{2M}{r_d} - \frac{\Lambda r_d^2}{3} + \gamma r_d \right) \left(\frac{L_{\gamma d}}{E_{\gamma d}} \right)^2 \right]} \\ &= E_{\gamma d} \sqrt{1 - \frac{1}{r_d^2} \left(1 - \frac{2M}{r_d} - \frac{\Lambda r_d^2}{3} + \gamma r_d \right) b_{\gamma d}^2}, \end{aligned} \quad (6.28)$$

donde $b_{\gamma d} = \frac{L_{\gamma d}}{E_{\gamma d}}$. En general puede definirse el cociente anterior para cualquier punto P_C del espaciotiempo, en particular para el punto de emisión e o detección d :

$$b_{\gamma C} = \frac{L_\gamma}{E_\gamma} \Big|_C, \quad (6.29)$$

puede observarse que $b_{\gamma C}$ es una cantidad que se conserva a lo largo de toda la trayectoria en la que viajan los fotones: desde su punto emisión hasta el de su detección, debido a que E_γ y L_γ son constantes de movimiento, por esta razón siempre se tendrá que $b_{\gamma e} = b_{\gamma d}$. Esta cantidad ya había sido introducida en el Capítulo 3 y se le denominó *parámetro de impacto* (cf. con la ecuación (3.44)), sin embargo, en el contexto del modelo desarrollado por Herrera y Nucamendi [35] se le conoce como el *parámetro de la deflexión* de la luz, pues representa la desviación de la luz debido al campo gravitacional en las proximidades de la fuente [34] y los efectos de la constante cosmológica Λ y el parámetro γ .

Los valores permitidos que puede tomar la coordenada radial tanto de U_d^r como de k_d^r son los de la ecuación (2.24), es claro que deben excluirse aquellos valores que producen un signo negativo dentro de la raíz cuadrada.

Capítulo 7

Corrimientos al rojo y al azul en términos de los parámetros del espaciotiempo

Para la configuración que se está considerando, es decir, emisores en órbitas circulares y en el plano ecuatorial, cf. ecuaciones (5.14) y (5.17), y detectores en movimiento radial, cf. ecuaciones (6.1) y (6.23), la expresión para el cambio de frecuencia (4.16) de los fotones se reduce a

$$1 + z = \frac{(E_\gamma U^t - L_\gamma U^\varphi)|_e}{(E_\gamma U^t - g_{rr} k^r U^r)|_d}, \quad (7.1)$$

al introducir el parámetro de deflexión de la luz (6.29) y tomar en cuenta que la energía de los fotones es una cantidad conservada siempre se tiene que $E_{\gamma_e} = E_{\gamma_d}$, la expresión anterior puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 1 + z &= \frac{E_\gamma \left(U^t - \left(\frac{L_\gamma}{E_\gamma} \right) U^\varphi \right) \Big|_e}{E_\gamma \left(U^t - g_{rr} \left(\frac{k^r}{E_\gamma} \right) U^r \right) \Big|_d} \\ &= \frac{(U^t - b_\gamma U^\varphi)|_e}{(U^t - g_{rr} \left(\frac{k^r}{E_\gamma} \right) U^r) \Big|_d}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

En principio, lo único que resta por hacer es sustituir las expresiones encontradas en los capítulos anteriores de todas las cantidades involucradas en la última igualdad. Sin embargo, es importante tomar en cuenta lo siguiente: la ecuación (3.40) da el parámetro de impacto o parámetro de deflexión de la luz en términos de M , Λ y γ y el radio de emisión de la partícula que emite los fotones, de tal manera que se puede considerar que b_γ está parametrizada como función del vector de posición \mathbf{R} de dicha partícula con respecto al centro de la fuente del campo gravitacional, pero tal como se discutió al final del Capítulo 4, existen dos cambios de frecuencia diferentes en (7.2) los cuales están relacionados con la propagación de la luz en la misma dirección o en la dirección opuesta con respecto al movimiento del emisor de fotones que orbita el objeto compacto, es decir, los cambios de frecuencia corresponden a una partícula masiva (la fuente de los fotones) que se aleja (desplazamiento al rojo) o se acerca (desplazamiento al azul), respectivamente [35], esto permite inferir que para una coordenada r dada, el parámetro de deflexión también se puede encontrar como función del ángulo φ entre la trayectoria de la partícula y la dirección hacia el centro de la fuente y la apertura angular δ del observador.

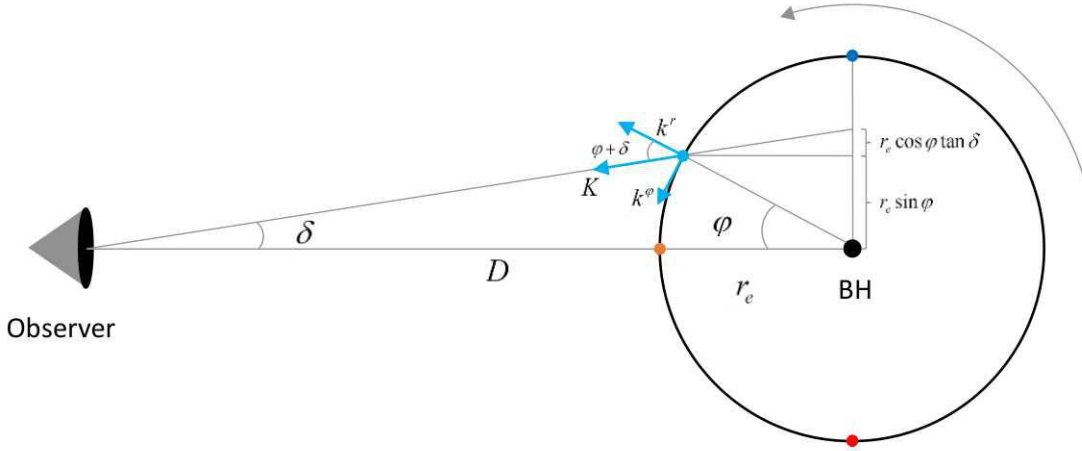


Figura 7.1: Ilustración del vector K y las relaciones geométricas entre el ángulo azimutal φ y el ángulo de apertura δ para un observador colocado en el plano ecuatorial a una distancia D . Diagrama tomado de [36].

Para obtener el parámetro de deflexión de la luz de los fotones provenientes de un punto general de la órbita circular en el plano ecuatorial (ver Figura 7.1), se seguirá el enfoque desarrollado en [36]: al desarrollar la contracción (3.19) y tomar $\epsilon = 0$ se obtiene

$$g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = g_{tt}(k^t)^2 + g_{rr}(k^r)^2 + g_{\theta\theta}(k^\theta)^2 + g_{\varphi\varphi}(k^\varphi)^2 = 0, \quad (7.3)$$

ya que el movimiento tiene lugar en el plano ecuatorial, entonces $k^\theta = 0$, además, al invertir las expresiones encontradas para las dos cantidades conservadas, $E_\gamma = -g_{tt}k^t$ y $L_\gamma = g_{\varphi\varphi}k^\varphi$, y sustituirlas en (7.3) se sigue que

$$g_{rr}(k^r)^2 + \frac{E_\gamma^2}{g_{tt}} + \frac{L_\gamma^2}{g_{\varphi\varphi}} = 0, \quad (7.4)$$

esta última expresión puede emplearse para expresar k^r en términos de las constantes de movimiento y las componentes de la métrica como se muestra a continuación

$$(k^r)^2 = -\frac{1}{g_{rr}} \left(\frac{E_\gamma^2}{g_{tt}} + \frac{L_\gamma^2}{g_{\varphi\varphi}} \right). \quad (7.5)$$

En lo que sigue, se supondrá que la partícula emisora está lo suficientemente lejos de la fuente del campo gravitacional para así poder considerar la configuración ilustrada en la Figura 7.1 en la cual aparece la apertura angular δ del observador y el ángulo azimutal φ , además se ha introducido geoméricamente el vector bidimensional auxiliar K definido por la siguiente descomposición:

$$k^r = K \cos(\varphi + \delta), \quad (7.6)$$

$$r_e k^\varphi = K \sin(\varphi + \delta), \quad (7.7)$$

con

$$K^2 = (k^r)^2 + r_e^2 (k^\varphi)^2. \quad (7.8)$$

De esta manera, al sustituir $L_\gamma = g_{\varphi\varphi}k^\varphi$ y (7.5) en (7.8) puede expresarse K^2 en términos de las constantes de movimiento y los componentes métricos de la siguiente manera

$$K^2 = -\frac{1}{g_{rr}} \left(\frac{E_\gamma^2}{g_{tt}} + \frac{L_\gamma^2}{g_{\varphi\varphi}} \right) - r_e^2 \frac{L_\gamma^2}{g_{\varphi\varphi}^2}. \quad (7.9)$$

Por otro lado, al sustituir (7.6) en (7.5), se encuentra otra relación similar para K^2

$$K^2 = -\frac{1}{g_{rr} \cos^2(\varphi + \delta)} \left(\frac{E_\gamma^2}{g_{tt}} + \frac{L_\gamma^2}{g_{\varphi\varphi}} \right). \quad (7.10)$$

Si se igualan las dos expresiones anteriores, se encuentra la siguiente ecuación para b_{γ_e}

$$(g_{tt} b_{\gamma_e}^2 + g_{\varphi\varphi}) g_{\varphi\varphi} \tan^2(\varphi + \delta) + r_e^2 g_{rr} g_{tt} b_{\gamma_e}^2 = 0, \quad (7.11)$$

al resolver esta última se encuentra que

$$b_{\gamma_e} = -\frac{g_{\varphi\varphi} \sin(\varphi + \delta)}{\sqrt{-g_{tt} \sqrt{g_{\varphi\varphi} \sin^2(\varphi + \delta) + r_e^2 g_{rr} \cos^2(\varphi + \delta)}}}, \quad (7.12)$$

el cual es el parámetro de flexión de la luz para un punto arbitrario de la órbita circular en el plano ecuatorial. Para el caso de la solución de Harada, se tiene que

$$b_{\gamma_e} = -\frac{r_e \sin(\varphi + \delta)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2M}{r_e} + \frac{\Lambda}{3} r_e^2 - \gamma r_e \right) \sin^2(\varphi + \delta)}}. \quad (7.13)$$

Ahora se pueden sustituir U_e^t , U_e^φ , U_d^t , U_d^r , k_d^r y b_{γ_e} de las ecuaciones (5.15), (5.16), (6.5), (6.6), (6.28) y (7.13), respectivamente, en (7.2) para obtener la expresión final para el cambio de frecuencia de fotones emitidos por partículas geodésicas masivas en un punto arbitrario de las órbitas circulares ecuatoriales en el espaciotiempo descrito por la solución de Harada de la siguiente manera:

$$1 + z_H = \frac{1}{E_d} \left(1 - \frac{2M}{r_d} - \frac{\Lambda}{3} r_d^2 + \gamma r_d \right) \times \left(\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{3M}{r_e} + \frac{\gamma}{2} r_e}} - \frac{r_e \sin(\varphi + \delta)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2M}{r_e} + \frac{\Lambda}{3} r_e^2 - \gamma r_e \right) \sin^2(\varphi + \delta)}} \sqrt{\frac{\frac{M}{r_e} - \frac{\Lambda}{3} r_e^2 + \frac{\gamma}{2} r_e}{1 - \frac{3M}{r_e} + \frac{\gamma}{2} r_e}} \right), \quad (7.14)$$

donde E_d está dada por (6.22). En el término U^φ de la ecuación (7.2) está contenido el momento angular L y este también posee signos \pm , de acuerdo con la ecuación (3.22), esto está relacionado con el sentido de la rotación de las partículas masivas alrededor de la fuente del campo gravitacional: $+$ o $-$ para sentido horario o antihorario, respectivamente. Sin embargo, debido a la simetría esférica del fondo, se elige el signo $+$ sin pérdida de generalidad.

La expresión (7.14) contiene dos componentes que incluye el *corrimiento al rojo gravitacional* z_g , así como el *corrimiento al rojo/azul cinemático* z_{cin} [34, 35, 36], de tal manera que

$$z_H = z_g + z_{cin}. \quad (7.15)$$

El corrimiento al rojo gravitacional está definido por

$$1 + z_g = \frac{1}{E_d} \left(1 - \frac{2M}{r_d} - \frac{\Lambda}{3} r_d^2 + \gamma r_d \right) \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{3M}{r_e} + \frac{\gamma}{2} r_e}}, \quad (7.16)$$

mientras que el corrimiento al rojo cinemático está determinado por

$$z_{cin} = \frac{1}{E_d} \frac{r_e \sin(\varphi + \delta)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2M}{r_e} + \frac{\Lambda}{3} r_e^2 - \gamma r_e \right) \sin^2(\varphi + \delta)}} \sqrt{\frac{\frac{M}{r_e} - \frac{\Lambda}{3} r_e^2 + \frac{\gamma}{2} r_e}{1 - \frac{3M}{r_e} + \frac{\gamma}{2} r_e}}. \quad (7.17)$$

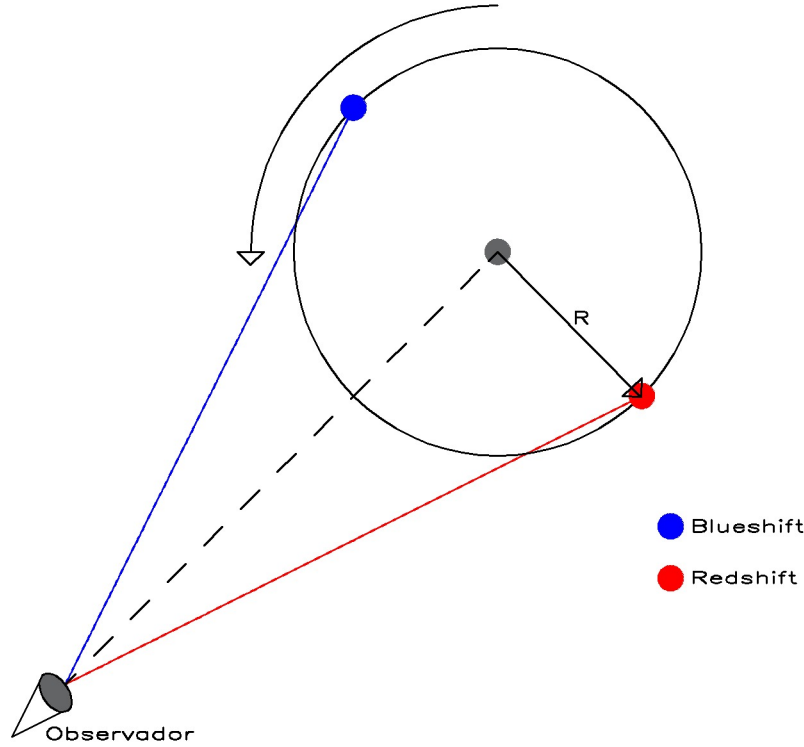


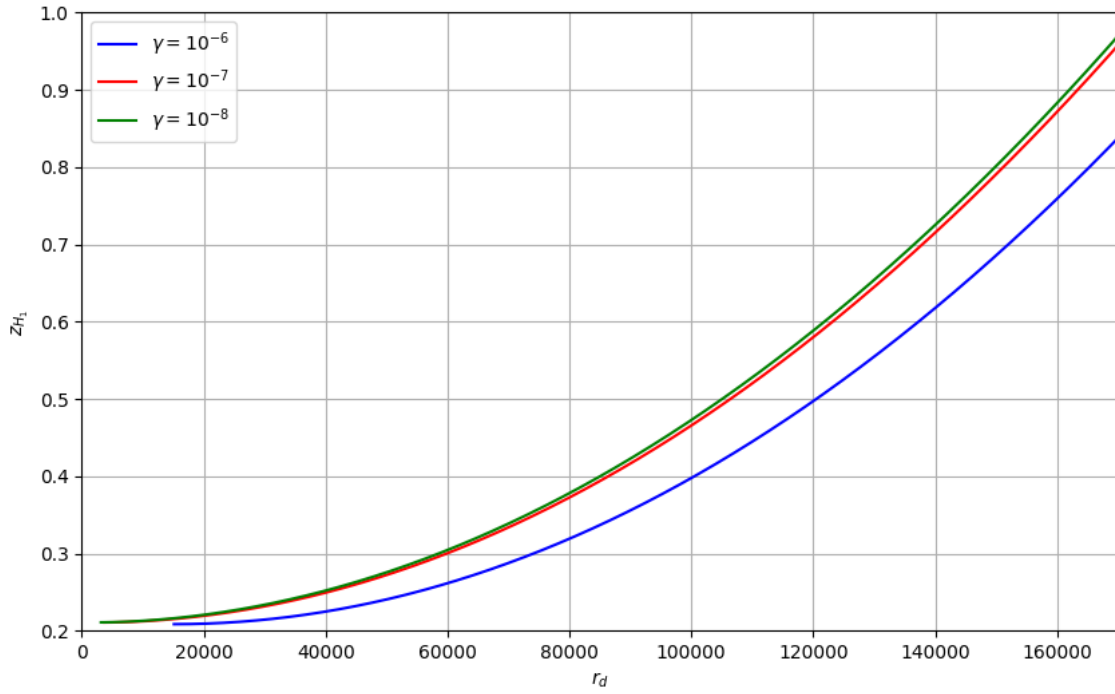
Figura 7.2: Representación esquemática de la configuración en la que una partícula geodésica masiva de prueba se mueve alrededor del objeto esférico en una órbita circular estable. Aquí, el emisor, el observador y la trayectoria de los fotones se encuentran en el plano ecuatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$. Además, el ángulo azimutal de la partícula emisora es de $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$.

Para explorar cuál puede ser el efecto de la nueva constante γ que aparece en la solución encontrada por Harada, se considerará el caso en que los fotones son emitidos por partículas ubicadas en la línea media, donde $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, entonces, el vector de posición de estas partículas con respecto al centro del agujero negro es ortogonal a la línea de visión del observador, ver Figura 7.2. Por lo tanto, al sustituir $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ en la fórmula del cambio de frecuencia (7.14) y considerar además que la apertura angular del observador es muy pequeña $\delta \approx 0$, se encuentra que los corrimientos al rojo ($\varphi = +\frac{\pi}{2}$) y al azul ($\varphi = -\frac{\pi}{2}$) son:

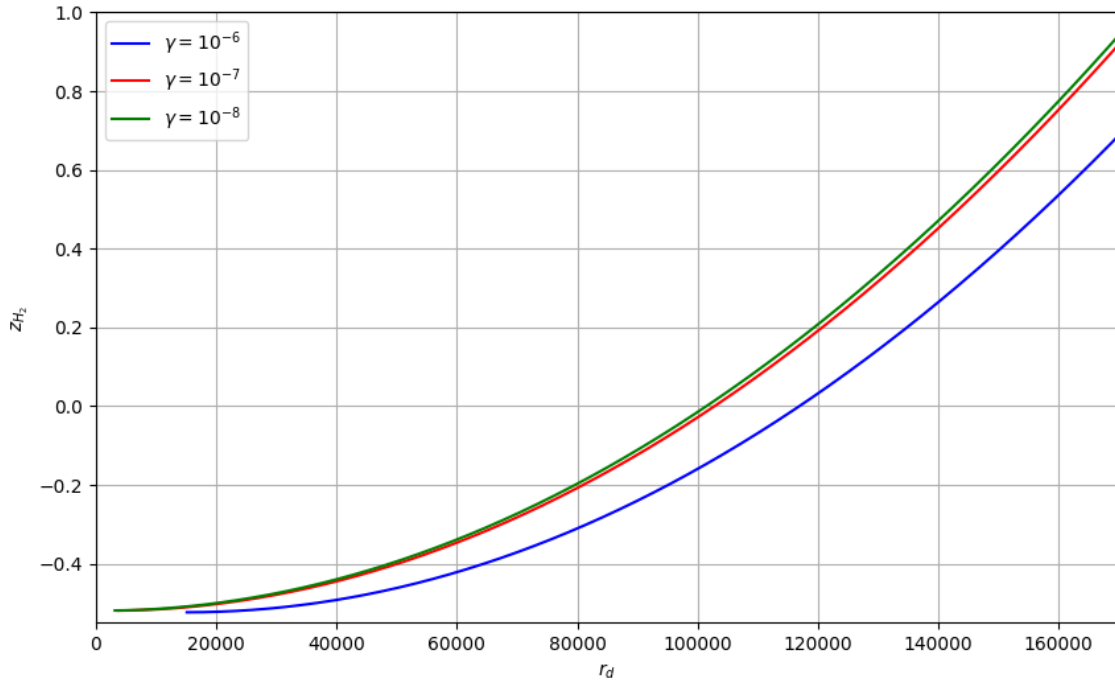
$$1 + z_{H_{1,2}} = \frac{1}{E_d} \left(1 - \frac{2M}{r_d} - \frac{\Lambda}{3} r_d^2 + \gamma r_d \right) \times \left(\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{3M}{r_e} + \frac{\gamma}{2} r_e}} \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_e} - \frac{\Lambda}{3} r_e^2 + \gamma r_e}} \sqrt{\frac{\frac{M}{r_e} - \frac{\Lambda}{3} r_e^2 + \frac{\gamma}{2} r_e}{1 - \frac{3M}{r_e} + \frac{\gamma}{2} r_e}} \right), \quad (7.18)$$

El comportamiento general de los corrimientos al rojo z_{H_1} y al azul z_{H_2} como función del radio del detector r_d para diferentes valores del parámetro γ se ilustra en la Figura 7.3, ambos ejes están en unidades adimensionales. Se puede ver que el cambio en la frecuencia de los fotones aumenta, en valor absoluto, a medida que γ disminuye, esto debido a que el término cuadrático en el que aparece la constante cosmológica Λ comienza a ser relevante a grandes distancias.

Corrimientos al rojo y al azul en términos de los parámetros del espaciotiempo



(a) z_{H_1}



(b) z_{H_2}

Figura 7.3: Corrimiento al rojo z_{H_1} y al azul z_{H_2} como función de la distancia del detector r_d para distintos valores de γ . El emisor orbita circularmente en el radio $r_e = 12M$ para cualquier curva, además se ha establecido $M = 1$ y $\Lambda = 10^{-10}$. Las curvas comienzan en el radio de gravedad cero a la izquierda y terminan antes del horizonte cosmológico aparente a la derecha, es decir, $\tilde{r}_0 < r_d < r_0$.

Conclusión

En este trabajo se han deducido las ecuaciones de campo de Gravedad de Cotton a partir de la acción propuesta por Junpei Harada, utilizando un principio variacional conocido como el formalismo de Palatini. Además se ha explicado en qué sentido esta nueva teoría extiende a la relatividad general: el conjunto de las soluciones de las ecuaciones de Einstein con o sin la constante cosmológica está contenido en el de las soluciones de las ecuaciones de campo Gravedad de Cotton, por ello, siempre que se satisfacen las ecuaciones de Einstein, las de Harada también se cumplen. Sin embargo, el inverso de esta proposición no es cierto, incluso si las ecuaciones de Cotton se satisfacen, las de Einstein no necesariamente lo harán.

Asimismo se demostró porqué, en general, $C_{\nu\rho\sigma} = 0$ no son las ecuaciones de campo de Cotton en el vacío ni tampoco pueden considerarse como una generalización de $R_{\mu\nu} = 0$ de la relatividad general, ya que estas últimas son una restricción no trivial, mientras que las primeras son una identidad que se cumple automáticamente para todos los espaciotiempo conformemente planos, independientemente de sus fuentes o propiedades de simetría, lo cual, podría ser potencialmente una desventaja, ya que permitiría soluciones no físicas.

También, utilizando como *ansatz* una métrica esféricamente simétrica y estática se dedujo una solución a $C_{\nu\rho\sigma} = 0$. En el proceso se descubrió que para este caso existe un acoplamiento de los coeficientes métricos g_{00} y g_{11} , pues el tensor de Cotton solo tiene una componente independiente, por lo tanto, la ecuación diferencial resultante admite un número infinito de soluciones con, en general, cinco constantes de integración. Este detalle impide que a partir de las ecuaciones se deduzca que $g_{00} = \frac{1}{g_{11}}$, tal y como se hace directamente al resolver $R_{\mu\nu} = 0$ en relatividad general para un elemento de línea igual. Sin embargo, al suponer que dichas componentes están relacionadas como se indicó, se obtiene una métrica con gran parecido a la solución de Schwarzschild-de Sitter, con la gran ventaja de que la *constante cosmológica*, surge como una constante de integración y, más aún, aparece un término lineal de la forma γr , donde γ es un nuevo parámetro o constante del espaciotiempo el cual no tiene un análogo en la teoría de Einstein.

Al analizar las singularidades de la métrica obtenida por Harada se encontró que para una $\gamma > 0$ en general existen tres, estas se pudieron interpretar de la siguiente manera: una de ellas representa un horizonte de eventos aparente, otra un horizonte cosmológico aparente y la tercera puede corresponder a un horizonte interno aparente. Además, al considerar límites apropiados cuando $M \rightarrow 0$ o $\Lambda \rightarrow 0$, de forma independiente, se encontró que el horizonte de eventos aparente de la solución de Harada tiende exactamente al de Schwarzschild, mientras que el horizonte cosmológico aparente se reduce al del espaciotiempo de de Sitter, el análisis también llevó a la conclusión de que una $\gamma > 0$ tiene un efecto atractivo, pues ocasiona que el horizonte cosmológico sea más grande. Para una $\gamma < 0$ también se pueden tener los mismos horizontes anteriores, pero sus existencias están comprometidas por los valores que tomen los parámetros del espaciotiempo. Sin embargo, en general solo existe una singularidad coordinada, además, al tomar límites apropiados se encontró que esta también tiende al horizonte del espaciotiempo de de Sitter, por ello esta singularidad pudo interpretarse como el horizonte cosmológico aparente, esto a su vez llevó a la conclusión de que una $\gamma < 0$ tiene un efecto repulsivo, ya que produce que dicho horizonte sea más pequeño.

De igual manera, al considerar el comportamiento de las geodésicas para partículas con y sin masa se halló una expresión general para el potencial efectivo que experimentaría una partícula

de prueba y se discutió la relevancia de que en él aparezcan términos lineales, cuando se ignora la constante cosmológica.

Finalmente, se dedujo una expresión general para el corrimiento al rojo y al azul que experimentan los fotones en el espaciotiempo descrito por la solución de Harada, considerando que las partículas de prueba que emiten los fotones siguen órbitas circulares y en el plano ecuatorial, mientras que los detectores están en movimiento radial. En el proceso de la deducción pudo confirmarse que una $\gamma > 0$ tiene un efecto atractivo, pues el radio de gravedad cero en este solución es mayor que en el de otros modelos, también pudo descartarse que $\gamma < 0$, ya que presentaría problemas conceptuales en un sistema astrofísico real, pues implicaría que existiesen tres distancias a las cuales una partícula de prueba está completamente estática. Asimismo, pudo observarse que el cambio en la frecuencia de los fotones aumenta a medida que γ disminuye, esto debido a que el término cuadrático en el que aparece la constante cosmológica Λ comienza a ser relevante y a dominar a grandes escalas. La expresión deducida para el cambio de frecuencia está en términos de los parámetros del espaciotiempo M , Λ y γ , así como también del radio de la órbita del detector r_d y el radio orbital de la partícula emisora r_e , esto en principio puede utilizarse para estimar estadísticamente el orden de magnitud de γ y compararse con los resultados obtenidos por Junpei Harada, lo cual es de mucha relevancia ya que el modelo relativista general utilizado en este trabajo no considera una distribución de materia en particular tal como lo supuso Harada.

Apéndice A

Cuadrado del tensor de Weyl

A continuación se demostrará que el cuadrado del tensor de Weyl, denotado por $C^{\mu\nu\rho\sigma}C_{\mu\nu\rho\sigma}$, se puede expresar en términos del tensor de curvatura de Riemann $R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}$, el tensor de Ricci $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ y el escalar de Ricci R ; en cuatro dimensiones, la fórmula está dada por

$$C^{\mu\nu\rho\sigma}C_{\mu\nu\rho\sigma} = R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} - 2R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \frac{1}{3}R^2. \quad (\text{A.1})$$

Es necesario recordar que, en cuatro dimensiones, el tensor de Weyl está definido de la siguiente manera [21] :

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{6}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma})R - \frac{1}{2}(g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho}); \quad (\text{A.2})$$

al utilizar el tensor métrico para subir y bajar índices puede observarse que el cuadrado del tensor de Weyl puede reescribirse así:

$$C^{\mu\nu\rho\sigma}C_{\mu\nu\rho\sigma} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}C_{\alpha\beta\gamma\delta}C_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (\text{A.3})$$

Al combinar (A.2) y (A.3) se tendrá que

$$\begin{aligned} C^{\mu\nu\rho\sigma}C_{\mu\nu\rho\sigma} = & g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta} \left[R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{6}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta})R \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}(g_{\alpha\gamma}R_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma}R_{\alpha\delta} - g_{\alpha\delta}R_{\beta\gamma} + g_{\beta\delta}R_{\alpha\gamma}) \right] \times \\ & \left[R_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{6}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma})R \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}(g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho}) \right], \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

al distribuir cada uno de los términos en (A.4) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
C^{\mu\nu\rho\sigma}C_{\mu\nu\rho\sigma} &= g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{6}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma})R \\
&\quad - \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}(g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho}) \\
&\quad\quad + \frac{1}{6}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta})R_{\mu\nu\rho\sigma}R \\
&\quad\quad + \frac{1}{36}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta})(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma})R^2 \\
&\quad - \frac{1}{12}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta})(g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho})R \\
&\quad\quad - \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}(g_{\alpha\gamma}R_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma}R_{\alpha\delta} - g_{\alpha\delta}R_{\beta\gamma} + g_{\beta\delta}R_{\alpha\gamma})R_{\mu\nu\rho\sigma} \\
&\quad - \frac{1}{12}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}(g_{\alpha\gamma}R_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma}R_{\alpha\delta} - g_{\alpha\delta}R_{\beta\gamma} + g_{\beta\delta}R_{\alpha\gamma})(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma})R \\
&\quad\quad + \frac{1}{4}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}(g_{\alpha\gamma}R_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma}R_{\alpha\delta} - g_{\alpha\delta}R_{\beta\gamma} + g_{\beta\delta}R_{\alpha\gamma})(g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} \\
&\quad\quad\quad - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho}). \quad (A.5)
\end{aligned}$$

Puede observarse que los siguientes términos en (A.5) son semejantes entre sí

- $\frac{1}{6}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma})R$ y $\frac{1}{6}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta})R_{\mu\nu\rho\sigma}R$,
- $\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}(g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho})$ y $\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}(g_{\alpha\gamma}R_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma}R_{\alpha\delta} - g_{\alpha\delta}R_{\beta\gamma} + g_{\beta\delta}R_{\alpha\gamma})R_{\mu\nu\rho\sigma}$,
- $\frac{1}{12}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta})(g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho})R$ y $\frac{1}{12}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}(g_{\alpha\gamma}R_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma}R_{\alpha\delta} - g_{\alpha\delta}R_{\beta\gamma} + g_{\beta\delta}R_{\alpha\gamma})(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma})R$;

ya que todos los índices están contraídos y solo basta hacer el cambio $\mu \rightarrow \alpha$, $\nu \rightarrow \beta$, $\rho \rightarrow \gamma$ y $\sigma \rightarrow \delta$. Entonces (A.5) se reduce a

$$\begin{aligned}
C^{\mu\nu\rho\sigma}C_{\mu\nu\rho\sigma} &= g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{3}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma})R \\
&\quad - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}(g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho}) \\
&\quad\quad + \frac{1}{36}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta})(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma})R^2 \\
&\quad - \frac{1}{6}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta})(g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho})R \\
&\quad\quad + \frac{1}{4}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}(g_{\alpha\gamma}R_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma}R_{\alpha\delta} - g_{\alpha\delta}R_{\beta\gamma} + g_{\beta\delta}R_{\alpha\gamma})(g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} \\
&\quad\quad\quad - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho}). \quad (A.6)
\end{aligned}$$

Es conveniente analizar cada uno de los sumandos en (A.6) por separado para observar cómo pueden reescribirse:

▪

$$g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\mu\nu\rho\sigma} = R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}$$

■

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{3} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} g_{\mu\sigma}) R \\
 &= \frac{1}{3} R_{\alpha\beta\gamma\delta} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} g_{\nu\rho} g_{\mu\sigma}) \\
 &= \frac{1}{3} R_{\alpha\beta\gamma\delta} (\delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} - \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta}) R \\
 &= \frac{1}{3} R_{\alpha\beta\gamma\delta} (g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) R \\
 &= \frac{1}{3} (g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} R_{\alpha\beta\delta\gamma}) R \\
 &= \frac{1}{3} (2R) R \\
 &= \frac{2}{3} R^2.
 \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
 & g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} (g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} R_{\mu\rho}) \\
 &= R^{\mu\nu\rho\sigma} (g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} R_{\mu\rho}) \\
 &= g_{\mu\rho} R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\rho} \\
 &= R^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma} + g_{\nu\rho} R^{\nu\mu\rho\sigma} R_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma} R^{\mu\nu\sigma\rho} R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} R^{\nu\mu\sigma\rho} R_{\mu\rho} \\
 &= R^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma} + R^{\mu\sigma} R_{\mu\sigma} + R^{\nu\rho} R_{\nu\rho} + R^{\mu\rho} R_{\mu\rho} \\
 &= 4R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.
 \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{36} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma} g_{\alpha\delta}) (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} g_{\mu\sigma}) R^2 \\
 &= \frac{1}{36} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} g_{\beta\gamma} g_{\alpha\delta}) (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} g_{\mu\sigma}) R^2 \\
 &= \frac{1}{36} (\delta_\gamma^\mu \delta_\delta^\nu g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} - \delta_\delta^\mu \delta_\gamma^\nu g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta}) (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} g_{\mu\sigma}) R^2 \\
 &= \frac{1}{36} (g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} - g^{\rho\nu} g^{\sigma\mu}) (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} g_{\mu\sigma}) R^2 \\
 &= \frac{1}{36} (g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g^{\rho\nu} g^{\sigma\mu} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} g_{\nu\rho} g_{\mu\sigma} + g^{\rho\nu} g^{\sigma\mu} g_{\nu\rho} g_{\mu\sigma}) R^2 \\
 &= \frac{1}{36} (16 - \delta_\mu^\nu \delta_\nu^\mu - \delta_\nu^\mu \delta_\mu^\nu + 16) R^2 \\
 &= \frac{1}{36} (32 - \delta_\mu^\mu - \delta_\mu^\mu) R^2 \\
 &= \frac{1}{36} (32 - 4 - 4) R^2 \\
 &= \frac{2}{3} R^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma} g_{\alpha\delta}) (g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} R_{\mu\rho}) R \\
&= \frac{1}{6} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} g_{\beta\gamma} g_{\alpha\delta}) (g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} R_{\mu\rho}) R \\
&= \frac{1}{6} (\delta_\gamma^\mu \delta_\delta^\nu g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} - \delta_\delta^\mu \delta_\gamma^\nu g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta}) (g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} R_{\mu\rho}) R \\
&= \frac{1}{6} (g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} - g^{\rho\nu} g^{\sigma\mu}) (g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} R_{\mu\rho}) R \\
&= \frac{1}{6} (g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} - g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} g_{\nu\rho} R_{\mu\sigma} - g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} g_{\mu\sigma} R_{\nu\rho} + g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} g_{\nu\sigma} R_{\mu\rho} \\
&\quad - g^{\rho\nu} g^{\sigma\mu} g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} + g^{\rho\nu} g^{\sigma\mu} g_{\nu\rho} R_{\mu\sigma} + g^{\rho\nu} g^{\sigma\mu} g_{\mu\sigma} R_{\nu\rho} - g^{\rho\nu} g^{\sigma\mu} g_{\nu\sigma} R_{\mu\rho}) \\
&= \frac{1}{6} (4R - \delta_\rho^\sigma g^{\rho\mu} R_{\mu\sigma} - \delta_\sigma^\rho g^{\sigma\nu} R_{\nu\rho} + 4R - \delta_\rho^\sigma g^{\rho\nu} R_{\nu\sigma} + 4R + 4R - \delta_\nu^\mu g^{\rho\nu} R_{\mu\rho}) R \\
&= \frac{1}{6} (16R - g^{\sigma\mu} R_{\mu\sigma} - g^{\rho\nu} R_{\nu\rho} - g^{\sigma\nu} R_{\nu\sigma} - g^{\rho\mu} R_{\mu\rho}) R \\
&= \frac{1}{6} (16R - 4R) R \\
&= 2R^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} (g_{\alpha\gamma} R_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma} R_{\alpha\delta} - g_{\alpha\delta} R_{\beta\gamma} + g_{\beta\delta} R_{\alpha\gamma}) (g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} R_{\mu\rho}) \\
&= \frac{1}{4} \left(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} g_{\alpha\gamma} R_{\beta\delta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} g_{\beta\gamma} R_{\alpha\delta} \right. \\
&\quad \left. - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} g_{\alpha\delta} R_{\beta\gamma} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} g_{\beta\delta} R_{\alpha\gamma} \right) \times (g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} R_{\mu\rho}) \\
&= \frac{1}{4} \left(\delta_\gamma^\mu g^{\nu\beta} g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} R_{\beta\delta} - \delta_\beta^\rho g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\sigma\delta} R_{\alpha\delta} - \delta_\alpha^\sigma g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\gamma} R_{\beta\gamma} + \delta_\delta^\nu g^{\mu\alpha} g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} R_{\alpha\gamma} \right) \\
&\quad \times (g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} R_{\mu\rho}) \\
&= \frac{1}{4} \left(g^{\nu\beta} g^{\rho\mu} g^{\sigma\delta} R_{\beta\delta} g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\rho} g^{\sigma\delta} R_{\alpha\delta} g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\beta} g^{\rho\gamma} R_{\beta\gamma} g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} \right. \\
&\quad \left. + g^{\mu\alpha} g^{\rho\gamma} g^{\sigma\nu} R_{\alpha\gamma} g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} \right) \times (g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} R_{\mu\rho}) \\
&= \frac{1}{4} \left(4R^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma} - g^{\nu\rho} g_{\mu\rho} R^{\mu\sigma} R_{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g_{\mu\rho} R^{\nu\rho} R_{\nu\sigma} + \delta_\rho^\alpha g^{\rho\gamma} R_{\alpha\gamma} R \right. \\
&\quad - g^{\rho\mu} g_{\nu\rho} R^{\nu\sigma} R_{\mu\sigma} + 4R^{\mu\sigma} R_{\mu\sigma} + \delta_\rho^\beta g^{\rho\gamma} R_{\beta\gamma} R - g^{\sigma\nu} g_{\nu\rho} R^{\mu\rho} R_{\mu\sigma} \\
&\quad - g^{\rho\mu} g_{\mu\sigma} R^{\nu\sigma} R_{\nu\rho} + \delta_\sigma^\alpha g^{\sigma\delta} R_{\alpha\delta} R + 4R^{\nu\rho} R_{\nu\rho} - g^{\sigma\nu} g_{\mu\sigma} R^{\mu\rho} R_{\nu\rho} \\
&\quad \left. + \delta_\nu^\delta g^{\nu\beta} R_{\beta\delta} R - g^{\nu\rho} g_{\nu\sigma} R^{\mu\sigma} R_{\mu\rho} - g^{\mu\sigma} g_{\nu\sigma} R^{\nu\rho} R_{\mu\rho} + 4R^{\mu\rho} R_{\mu\rho} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(8R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + 4R^2 \right) \\
&= 2R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + R^2.
\end{aligned}$$

Al sustituir las seis expresiones anteriores en (A.6) se tiene que

$$C^{\mu\nu\rho\sigma} C_{\mu\nu\rho\sigma} = R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} - 2R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \frac{1}{3} R^2. \quad (\text{A.7})$$

Apéndice B

Identidad de Palatini

Si se considerará una variación de la conexión $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, a una nueva conexión $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$ [21]

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \rightarrow \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \quad (\text{B.1})$$

puede observarse que la cantidad

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \quad (\text{B.2})$$

al ser la diferencia de dos conexiones, es un tensor del tipo (1, 2): en efecto, bajo una transformación de coordenadas $x^\mu \rightarrow x'^\mu$, se sabe que $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ se transforma como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \rightarrow \Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}, \quad (\text{B.3})$$

el segundo término impide que la conexión se transforme como un tensor, pero bajo una transformación de coordenadas $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu$, $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ se transforma como

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \rightarrow \tilde{\delta}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\nu} (\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha), \quad (\text{B.4})$$

y más aún, ya que $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ está formado por objetos evaluados en el mismo punto (objetos pertenecientes al mismo espacio tangente) es, por lo tanto, un tensor. La variación (B.1) da como resultado un cambio en el tensor de Riemann:

$$R^\alpha_{\mu\beta\nu} \rightarrow \tilde{R}^\alpha_{\mu\beta\nu} = R^\alpha_{\mu\beta\nu} + \delta R^\alpha_{\mu\beta\nu}. \quad (\text{B.5})$$

Para averiguar a qué corresponde $\delta R^\alpha_{\mu\beta\nu}$ se procederá de la siguiente manera: a partir de la definición del tensor de Riemann

$$R^\alpha_{\mu\beta\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\beta}^\alpha}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\beta}^\alpha - \Gamma_{\mu\beta}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\alpha, \quad (\text{B.6})$$

se calculará su variación respecto a la conexión:

$$\begin{aligned} \delta R^\alpha_{\mu\beta\nu} &= \delta \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\beta}^\alpha}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\beta}^\alpha - \Gamma_{\mu\beta}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\alpha \right) \\ &= \delta \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\beta} \right) - \delta \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\beta}^\alpha}{\partial x^\nu} \right) + \delta (\Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\beta}^\alpha) - \delta (\Gamma_{\mu\beta}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\alpha) \\ &= \frac{\partial (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha)}{\partial x^\beta} - \frac{\partial (\delta \Gamma_{\mu\beta}^\alpha)}{\partial x^\nu} + (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho) \Gamma_{\rho\beta}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\rho (\delta \Gamma_{\rho\beta}^\alpha) - (\delta \Gamma_{\mu\beta}^\rho) \Gamma_{\rho\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\beta}^\rho (\delta \Gamma_{\rho\nu}^\alpha), \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

si se suma y se resta la cantidad $\Gamma_{\beta\nu}^{\rho} (\delta\Gamma_{\mu\rho}^{\alpha})$ en la expresión anterior y se agrupan términos de manera conveniente se tendrá

$$\delta R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} = \left[\frac{\partial (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha})}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\rho\beta}^{\alpha} (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}) - \Gamma_{\mu\beta}^{\rho} (\delta\Gamma_{\rho\nu}^{\alpha}) - \Gamma_{\beta\nu}^{\rho} (\delta\Gamma_{\mu\rho}^{\alpha}) \right] - \left[\frac{\partial (\delta\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha})}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\rho\nu}^{\alpha} (\delta\Gamma_{\mu\beta}^{\rho}) - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} (\delta\Gamma_{\rho\beta}^{\alpha}) - \Gamma_{\beta\nu}^{\rho} (\delta\Gamma_{\mu\rho}^{\alpha}) \right]. \quad (\text{B.8})$$

Ya que $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ es un tensor del tipo (1, 2), tiene sentido calcular su derivada covariante: recordando que la derivada covariante de un tensor de este tipo es

$$\nabla_{\mu} A^{\nu}_{\rho\sigma} = \frac{\partial A^{\nu}_{\rho\sigma}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} A^{\lambda}_{\rho\sigma} - \Gamma_{\rho\mu}^{\lambda} A^{\nu}_{\lambda\sigma} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} A^{\nu}_{\rho\lambda}, \quad (\text{B.9})$$

no es difícil ver que

$$\nabla_{\beta} (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}) = \frac{\partial (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha})}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\rho\beta}^{\alpha} (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}) - \Gamma_{\mu\beta}^{\rho} (\delta\Gamma_{\rho\nu}^{\alpha}) - \Gamma_{\beta\nu}^{\rho} (\delta\Gamma_{\mu\rho}^{\alpha}) \quad (\text{B.10})$$

y

$$\nabla_{\nu} (\delta\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}) = \frac{\partial (\delta\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha})}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\rho\nu}^{\alpha} (\delta\Gamma_{\mu\beta}^{\rho}) - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} (\delta\Gamma_{\rho\beta}^{\alpha}) - \Gamma_{\beta\nu}^{\rho} (\delta\Gamma_{\mu\rho}^{\alpha}), \quad (\text{B.11})$$

por lo tanto

$$\delta R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} = \nabla_{\beta} (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}) - \nabla_{\nu} (\delta\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}), \quad (\text{B.12})$$

a la expresión anterior se le conoce como la *identidad de Palatini*. Si se contrae el primer y tercer índices se obtiene una expresión similar para el tensor de Ricci:

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = \nabla_{\alpha} (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}) - \nabla_{\nu} (\delta\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha}). \quad (\text{B.13})$$

Apéndice C

Símbolos de Christoffel

Como se discutió en el Capítulo 1, al suponer que la conexión sea simétrica ($\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}$) y que el tensor métrico sea covariantemente constante ($\nabla_{\gamma}g_{\alpha\beta} = 0$), se encuentra que la conexión está determinada únicamente por los componentes métricos

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\mu\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\mu}} \right); \quad (\text{C.1})$$

en este contexto, los $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ se denominan los *símbolos de Christoffel* [13]. A continuación, se determinarán los símbolos de Christoffel distintos de cero de una métrica esféricamente simétrica y estática como (2.6):

$$ds^2 = -e^{\alpha} dt^2 + e^{\beta} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\varphi^2), \quad (\text{C.2})$$

con $\alpha = \alpha(r)$ y $\beta = \beta(r)$. Por fines “prácticos” se establecerá que $t = x^0$, $r = x^1$, $\theta = x^2$ y $\varphi = x^3$; además se denotará como una prima (') la derivada con respecto a r . Aunque podría utilizarle directamente la expresión (C.1), la forma más rápida de calcular los símbolos de Christoffel es escribir las ecuaciones geodésicas

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} \frac{dx^{\rho}}{d\lambda} \frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} = 0, \quad (\text{C.3})$$

a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} - \frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} = 0 \quad (\text{C.4})$$

del lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda}, \quad (\text{C.5})$$

donde $\dot{x}^{\mu} \equiv \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}$ y λ es el tiempo propio de la partícula (para geodésicas tipo tiempo) o un parámetro afín (para geodésicas nulas). Utilizando la métrica (C.2), se observa que (C.5) se reescribe de la siguiente manera

$$L = -\frac{1}{2}e^{\alpha} \left(\frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{2}e^{\beta} \left(\frac{dx^1}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{2}r^2 \left(\frac{dx^2}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{2}r^2 \text{sen}^2 \theta \left(\frac{dx^3}{d\lambda} \right)^2. \quad (\text{C.6})$$

Entonces, para $\mu = 0$, la ecuación de Euler-Lagrange es

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(-e^{\alpha} \frac{dx^0}{d\lambda} \right) &= 0, \\ \frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} + \alpha' \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{dx^1}{d\lambda} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Puede observarse que los símbolos de Christoffel distintos de 0 del tipo $\Gamma_{\mu\nu}^0$ son

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2}\alpha'. \quad (\text{C.8})$$

Similarmente, para $\mu = 1$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(e^\beta \frac{dx^1}{d\lambda} \right) + \frac{1}{2}\alpha' e^\alpha \left(\frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 - \frac{1}{2}\beta' e^\beta \left(\frac{dx^1}{d\lambda} \right)^2 - r \left(\frac{dx^2}{d\lambda} \right)^2 - r \operatorname{sen}^2 \theta \left(\frac{dx^3}{d\lambda} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 x^1}{d\lambda^2} + \frac{1}{2}\alpha' e^{\alpha-\beta} \left(\frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{2}\beta' \left(\frac{dx^1}{d\lambda} \right)^2 - r e^{-\beta} \left(\frac{dx^2}{d\lambda} \right)^2 - r \operatorname{sen}^2 \theta e^{-\beta} \left(\frac{dx^3}{d\lambda} \right)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

De esta manera se tiene que los símbolos de Christoffel distintos de 0 del tipo $\Gamma_{\mu\nu}^1$ son

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2}\alpha' e^{\alpha-\beta}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}\beta', \quad \Gamma_{22}^1 = -r e^{-\beta}, \quad \Gamma_{33}^1 = -r \operatorname{sen}^2 \theta e^{-\beta}. \quad (\text{C.10})$$

De la misma forma, para $\mu = 2$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \frac{dx^2}{d\lambda} \right) - r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \left(\frac{dx^3}{d\lambda} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 x^2}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^2}{d\lambda} - \operatorname{sen} \theta \cos \theta \left(\frac{dx^3}{d\lambda} \right)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Por lo tanto, los símbolos de Christoffel distintos de 0 del tipo $\Gamma_{\mu\nu}^2$ son

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\operatorname{sen} \theta \cos \theta. \quad (\text{C.12})$$

Finalmente, para $\mu = 3$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \frac{dx^3}{d\lambda} \right) &= 0, \\ \frac{d^2 x^3}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^3}{d\lambda} + 2 \cot \theta \frac{dx^2}{d\lambda} \frac{dx^3}{d\lambda} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

En consecuencia, los símbolos de Christoffel distintos de 0 del tipo $\Gamma_{\mu\nu}^3$ son

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta. \quad (\text{C.14})$$

En resumen, los símbolos de Christoffel son:

$$\begin{array}{lll} \Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2}\alpha', & \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2}\alpha' e^{\alpha-\beta}, & \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}\beta', \\ \Gamma_{22}^1 = -r e^{-\beta}, & \Gamma_{33}^1 = -r \operatorname{sen}^2 \theta e^{-\beta}, & \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{33}^2 = -\operatorname{sen} \theta \cos \theta, & \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 = \cot \theta. \end{array}$$

Apéndice D

Componentes del tensor de Ricci

El alto grado de simetría de una métrica esféricamente simétrica y estática implica que muchas componentes del tensor de Ricci son automáticamente cero. Es claro que la métrica

$$ds^2 = -e^\alpha dt^2 + e^\beta dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (\text{D.1})$$

(con $\alpha = \alpha(r)$ y $\beta = \beta(r)$) es invariante bajo las siguientes transformaciones de coordenadas

$$x^0 \rightarrow x^{0'} = -x^0, \quad x^2 \rightarrow x^{2'} = -x^2, \quad x^3 \rightarrow x^{3'} = -x^3; \quad (\text{D.2})$$

(al establecer $t = x^0$, $r = x^1$, $\theta = x^2$, $\varphi = x^3$) por ello las componentes del tensor de Ricci también deberían ser invariantes: las transformaciones (D.2) tienen el siguiente efecto en las componentes del tensor de Ricci:

$$R_{0\mu} \rightarrow R_{0'\mu} = \frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} R_{t\nu} = -R_{0\mu} \quad (\text{para } \mu \neq 0), \quad (\text{D.3})$$

$$R_{2\mu} \rightarrow R_{2'\mu} = \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} R_{\theta\nu} = -R_{2\mu} \quad (\text{para } \mu \neq 2), \quad (\text{D.4})$$

$$R_{3\mu} \rightarrow R_{3'\mu} = \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} R_{\varphi\nu} = -R_{3\mu} \quad (\text{para } \mu \neq 3), \quad (\text{D.5})$$

por lo tanto, las componentes del tensor de Ricci con esta forma desaparecen. En consecuencia, las componentes que son necesarias calcular son R_{00} , R_{11} , R_{22} y R_{33} ; para ello se hará uso de la fórmula

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\alpha}^\nu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha \quad (\text{D.6})$$

y los resultados del Apéndice C:

■ R_{00} :

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= \frac{\partial \Gamma_{00}^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{0\alpha}^\alpha}{\partial x^0} + \Gamma_{00}^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha - \Gamma_{0\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda 0}^\alpha \\
 &= \frac{\partial \Gamma_{00}^1}{\partial x^1} + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{31}^3 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 \\
 &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2} \alpha' e^{\alpha-\beta} \right) + \left(\frac{1}{2} \alpha' e^{\alpha-\beta} \right) \left(\frac{1}{2} \beta' \right) + \left(\frac{1}{2} \alpha' e^{\alpha-\beta} \right) \left(\frac{1}{r} \right) + \left(\frac{1}{2} \alpha' e^{\alpha-\beta} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \\
 &\quad - \left(\frac{1}{2} \alpha' \right) \left(\frac{1}{2} \alpha' e^{\alpha-\beta} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \alpha'' e^{\alpha-\beta} + \frac{1}{2} \alpha' (\alpha' - \beta') e^{\alpha-\beta} + \frac{1}{4} \alpha' \beta' e^{\alpha-\beta} + \frac{1}{r} \alpha' e^{\alpha-\beta} - \frac{1}{4} \alpha'^2 e^{\alpha-\beta} \\
 &= e^{\alpha-\beta} \left(\frac{\alpha''}{2} + \frac{\alpha'^2}{4} - \frac{\alpha' \beta'}{4} + \frac{\alpha'}{r} \right)
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

■ R_{11} :

$$\begin{aligned}
 R_{11} &= \frac{\partial \Gamma_{11}^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{1\alpha}^\alpha}{\partial x^1} + \Gamma_{11}^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda 1}^\alpha \\
 &= -\frac{\partial \Gamma_{10}^0}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial x^1} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 \\
 &\quad - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3 \\
 &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2} \alpha' \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) + \left(\frac{1}{2} \beta' \right) \left(\frac{1}{2} \alpha' \right) + \left(\frac{1}{2} \beta' \right) \left(\frac{1}{r} \right) + \left(\frac{1}{2} \beta' \right) \left(\frac{1}{r} \right) \\
 &\quad - \left(\frac{1}{2} \alpha' \right)^2 - \left(\frac{1}{r} \right)^2 - \left(\frac{1}{r} \right)^2 \\
 &= -\frac{\alpha''}{2} + \frac{\alpha' \beta'}{4} + \frac{\beta'}{r} - \frac{\alpha'^2}{4}
 \end{aligned} \tag{D.8}$$

■ R_{22} :

$$\begin{aligned}
 R_{22} &= \frac{\partial \Gamma_{22}^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{2\alpha}^\alpha}{\partial x^2} + \Gamma_{22}^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha - \Gamma_{2\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda 2}^\alpha \\
 &= \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{23}^3}{\partial x^2} + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{31}^3 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3 \\
 &= \frac{\partial}{\partial r} (-re^{-\beta}) - \frac{\partial}{\partial r} (\cot \theta) + (-re^{-\beta}) \left(\frac{1}{2} \alpha' \right) + (-re^{-\beta}) \left(\frac{1}{2} \beta' \right) + (-re^{-\beta}) \left(\frac{1}{r} \right) \\
 &\quad + (-re^{-\beta}) \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) (-re^{-\beta}) - (-re^{-\beta}) \left(\frac{1}{r} \right) - \cot^2 \theta \\
 &= -e^{-\beta} + \csc^2 \theta + r\beta' e^{-\beta} - \frac{1}{2} r\alpha' e^{-\beta} - \frac{1}{2} r\beta' e^{-\beta} - \cot^2 \theta \\
 &= -e^{-\beta} \left[1 + \frac{r}{2} (\alpha' - \beta') \right] + 1
 \end{aligned} \tag{D.9}$$

■ R_{33} :

$$\begin{aligned}
 R_{33} &= \frac{\partial \Gamma_{33}^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{3\alpha}^\alpha}{\partial x^3} + \Gamma_{33}^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha - \Gamma_{3\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda 3}^\alpha \\
 &= \frac{\partial \Gamma_{33}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial x^2} + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{31}^3 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 \\
 &= \frac{\partial}{\partial r} (-r \operatorname{sen}^2 \theta e^{-\beta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (-\operatorname{sen} \theta \cos \theta) + (-r \operatorname{sen}^2 \theta e^{-\beta}) \left(\frac{1}{2} \alpha' \right) \\
 &\quad + (-r \operatorname{sen}^2 \theta e^{-\beta}) \left(\frac{1}{2} \beta' \right) + (-r \operatorname{sen}^2 \theta e^{-\beta}) \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) (-r \operatorname{sen}^2 \theta e^{-\beta}) \\
 &\quad - (\cot \theta) (-\operatorname{sen} \theta \cos \theta) \\
 &= -\operatorname{sen}^2 \theta e^{-\beta} - r \beta' \operatorname{sen}^2 \theta e^{-\beta} - 2 \cos^2 \theta + 1 - \frac{1}{2} \alpha' r \operatorname{sen}^2 \theta e^{-\beta} - \frac{1}{2} \beta' r \operatorname{sen}^2 \theta e^{-\beta} + \cos^2 \theta \\
 &= -\operatorname{sen}^2 \theta e^{-\beta} - \frac{1}{2} r \operatorname{sen}^2 \theta e^{-\beta} (\alpha' - \beta') + \operatorname{sen}^2 \theta \\
 &= \operatorname{sen}^2 \theta \left\{ e^{-\beta} \left[1 - \frac{1}{2} r (\alpha' - \beta') \right] + 1 \right\} \\
 &= \operatorname{sen}^2 \theta R_{22}
 \end{aligned} \tag{D.10}$$

En conclusión, las componentes distintas de cero del tensor de Ricci son

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= e^{\alpha-\beta} \left(\frac{\alpha''}{2} + \frac{\alpha'^2}{4} - \frac{\alpha' \beta'}{4} + \frac{\alpha'}{r} \right), \\
 R_{11} &= -\frac{\alpha''}{2} - \frac{\alpha'^2}{4} + \frac{\alpha' \beta'}{4} + \frac{\beta'}{r}, \\
 R_{22} &= -e^{-\beta} \left[1 + \frac{r}{2} (\alpha' - \beta') \right] + 1, \\
 R_{33} &= \operatorname{sen}^2 \theta R_{22}.
 \end{aligned}$$

Apéndice E

Escalar de Ricci

Al utilizar los resultados del Apéndice D y la definición del escalar de Ricci, puede hallarse una expresión para este último a través de un cálculo explícito:

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &= g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} \\ &= -e^{-\alpha} \left[e^{\alpha-\beta} \left(\frac{\alpha''}{2} + \frac{\alpha'^2}{4} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\alpha'}{r} \right) \right] + e^{-\beta} \left(-\frac{\alpha''}{2} - \frac{\alpha'^2}{4} + \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} R_{22} \\ &\quad + \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) (r^2 \sin^2 \theta R_{22}) \\ &= e^{-\beta} \left(-\frac{\alpha''}{2} - \frac{\alpha'^2}{4} + \frac{\alpha'\beta'}{4} - \frac{\alpha'}{r} \right) + e^{-\beta} \left(-\frac{\alpha''}{2} - \frac{\alpha'^2}{4} + \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'}{r} \right) + \frac{2}{r^2} R_{22} \tag{E.1} \\ &= e^{-\beta} \left[-\alpha'' - \frac{\alpha'^2}{2} + \frac{\alpha'\beta'}{2} - \frac{1}{r} (\alpha' - \beta') \right] + \frac{2}{r^2} \left[-e^{-\beta} \left(1 + \frac{r}{2} (\alpha' - \beta') - e^\beta \right) \right] \\ &= e^{-\beta} \left[-\alpha'' - \frac{\alpha'^2}{2} + \frac{\alpha'\beta'}{2} - \frac{1}{r} (\alpha' - \beta') \right] + e^{-\beta} \left[\left(-\frac{2}{r^2} - \frac{1}{r} (\alpha' - \beta') + \frac{2e^\beta}{r^2} \right) \right] \\ &= e^{-\beta} \left[-\alpha'' - \frac{\alpha'^2}{2} + \frac{\alpha'\beta'}{2} - \frac{2}{r} (\alpha' - \beta') - \frac{2}{r^2} + \frac{2e^\beta}{r^2} \right]. \end{aligned}$$

Apéndice F

Componentes del tensor de Cotton

A continuación, se calcularán las componentes distintas de cero del tensor de Cotton para una métrica esféricamente simétrica y estática como (2.6). Como se vio en el Capítulo 1, este tensor está definido de la siguiente manera

$$C_{\nu\rho\sigma} \equiv \nabla_{\rho}R_{\nu\sigma} - \nabla_{\sigma}R_{\nu\rho} - \frac{1}{6}(g_{\nu\sigma}\nabla_{\rho}R - g_{\nu\rho}\nabla_{\sigma}R), \quad (\text{F.1})$$

en principio, en 4 dimensiones, tendrá $4^3 = 64$ componentes; sin embargo, debido a que es antisimétrico respecto a sus dos últimos índices ($C_{\nu\rho\sigma} = -C_{\nu\sigma\rho}$), puede observarse que las componentes en las que ρ y σ sean iguales, automáticamente se reducen a cero. Además, usando el carácter diagonal de la métrica (2.6), es claro que las componentes en las que ν , ρ y σ sean todas diferentes entre sí también desaparecerán.

De lo anteriormente discutido, se concluye que las componentes con alguna posibilidad de ser no triviales son las de la forma $C_{0\rho 0}$, $C_{1\rho 1}$, $C_{2\rho 2}$ y $C_{3\rho 3}$, para $\rho \neq 0$, $\rho \neq 1$, $\rho \neq 2$ y $\rho \neq 3$, respectivamente; sin embargo, ya se puede anticipar que todas ellas estarán relacionadas entre sí debido a la siguiente propiedad del tensor de Cotton $g^{\nu\sigma}C_{\nu\rho\sigma} = 0$.

Explícitamente, se tiene que (F.1) es

$$\begin{aligned} C_{\nu\rho\sigma} &= \partial_{\rho}R_{\nu\sigma} - \Gamma_{\nu\rho}^{\alpha}R_{\alpha\sigma} - \Gamma_{\sigma\rho}^{\alpha}R_{\nu\alpha} - \partial_{\sigma}R_{\nu\rho} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha}R_{\alpha\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\alpha}R_{\nu\alpha} - \frac{1}{6}(g_{\nu\sigma}\partial_{\rho}R - g_{\nu\rho}\partial_{\sigma}R) \\ &= \partial_{\rho}R_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}R_{\nu\rho} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha}R_{\alpha\rho} - \Gamma_{\nu\rho}^{\alpha}R_{\alpha\sigma} - \frac{1}{6}(g_{\nu\sigma}\partial_{\rho}R - g_{\nu\rho}\partial_{\sigma}R), \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

tomando en cuenta los resultados de los Apéndices C, D y E, se obtiene:

▪ C_{010} :

$$\begin{aligned}
C_{010} &= \partial_1 R_{00} + \Gamma_{00}^1 R_{11} - \Gamma_{01}^0 R_{00} - \frac{1}{6} g_{00} \partial_1 R \\
&= \frac{d}{dr} \left[e^{\alpha-\beta} \left(\frac{\alpha''}{2} + \frac{\alpha'^2}{4} - \frac{\alpha' \beta'}{4} + \frac{\alpha'}{r} \right) \right] \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} \alpha' e^{\alpha-\beta} \right) \left(-\frac{\alpha''}{2} + \frac{\alpha' \beta'}{4} + \frac{\beta'}{r} - \frac{\alpha'^2}{4} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \alpha' \left[e^{\alpha-\beta} \left(\frac{\alpha''}{2} + \frac{\alpha'^2}{4} - \frac{\alpha' \beta'}{4} + \frac{\alpha'}{r} \right) \right] \\
&\quad - \frac{1}{6} e^\alpha \frac{d}{dr} \left\{ e^{-\beta} \left[-\alpha'' - \frac{\alpha'^2}{2} + \frac{\alpha' \beta'}{2} - \frac{2}{r} (\alpha' - \beta') - \frac{2}{r^2} + \frac{2e^\beta}{r^2} \right] \right\} \\
&= e^{\alpha-\beta} \left(\alpha' \alpha'' - \frac{3}{4} \alpha'' \beta' - \frac{1}{2} \alpha'^2 \beta' + \frac{1}{4} \alpha'^3 + \frac{\alpha'^2}{r} + \frac{1}{4} \alpha' \beta'^2 - \frac{\alpha' \beta'}{r} + \frac{1}{2} \alpha''' \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \alpha' \beta'' - \frac{\alpha'}{r^2} + \frac{\alpha''}{r} \right) + e^{\alpha-\beta} \left(-\frac{1}{4} \alpha' \alpha'' - \frac{1}{8} \alpha'^3 + \frac{1}{8} \alpha'^2 \beta' + \frac{\alpha' \beta'}{2r} \right) \\
&\quad + e^{\alpha-\beta} \left(-\frac{1}{4} \alpha' \alpha'' - \frac{1}{8} \alpha'^3 + \frac{1}{8} \alpha'^2 \beta' - \frac{\alpha'^2}{2r} \right) \\
&\quad - \frac{1}{6} e^{\alpha-\beta} \left(-\alpha''' - \alpha' \alpha'' + \frac{3}{2} \alpha'' \beta' + \frac{1}{2} \alpha' \beta'' + \frac{2\alpha'}{r^2} - \frac{2\alpha''}{r} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\beta''}{r} + \frac{4}{r^3} + \frac{1}{2} \alpha'^2 \beta' - \frac{1}{2} \alpha' \beta'^2 + \frac{2\alpha' \beta'}{r} + \frac{2\beta'^2}{r} \right) - \frac{2}{3r^3} e^\alpha \\
&= e^{\alpha-\beta} \left(\frac{1}{3} \alpha' \alpha'' - \frac{1}{2} \alpha'' \beta' - \frac{1}{6} \alpha'^2 \beta' + \frac{\alpha'^2}{2r} + \frac{1}{6} \alpha' \beta'^2 - \frac{\alpha' \beta'}{6r} + \frac{1}{3} \alpha''' \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{6} \alpha' \beta'' - \frac{2\alpha'}{3r^2} + \frac{2\alpha''}{3r} + \frac{\beta''}{3r} + \frac{2}{3r^3} - \frac{\beta'^2}{3r} \right) - \frac{2}{3r^3} e^\alpha, \tag{F.3}
\end{aligned}$$

▪ C_{020} :

$$C_{020} = \partial_2 R_{00} + \Gamma_{00}^2 R_{22} - \Gamma_{02}^0 R_{00} - \frac{1}{6} g_{00} \partial_2 R = 0,$$

▪ C_{030} :

$$C_{030} = \partial_3 R_{00} + \Gamma_{00}^3 R_{33} - \Gamma_{03}^0 R_{00} - \frac{1}{6} g_{00} \partial_3 R = 0,$$

▪ C_{101} :

$$C_{101} = \partial_0 R_{11} + \Gamma_{11}^0 R_{00} - \Gamma_{10}^1 R_{11} - \frac{1}{6} g_{11} \partial_0 R = 0,$$

▪ C_{121} :

$$C_{121} = \partial_2 R_{11} + \Gamma_{11}^2 R_{22} - \Gamma_{12}^1 R_{11} - \frac{1}{6} g_{11} \partial_2 R = 0,$$

▪ C_{131} :

$$C_{131} = \partial_3 R_{11} + \Gamma_{11}^3 R_{33} - \Gamma_{13}^1 R_{11} - \frac{1}{6} g_{11} \partial_3 R = 0,$$

▪ C_{202} :

$$C_{202} = \partial_0 R_{22} + \Gamma_{22}^0 R_{00} - \Gamma_{20}^2 R_{22} - \frac{1}{6} g_{22} \partial_0 R = 0,$$

▪ C_{212} :

$$\begin{aligned}
 C_{212} &= \partial_1 R_{22} + \Gamma_{22}^1 R_{11} - \Gamma_{21}^2 R_{22} - \frac{1}{6} g_{22} \partial_1 R \\
 &= \frac{d}{dr} \left\{ -e^{-\beta} \left[1 + \frac{r}{2} (\alpha' - \beta') \right] + 1 \right\} \\
 &\quad - r e^{-\beta} \left(-\frac{\alpha''}{2} - \frac{\alpha'^2}{4} + \frac{\alpha' \beta'}{4} + \frac{\beta'}{r} \right) - \frac{1}{r} \left\{ -e^{-\beta} \left[1 + \frac{r}{2} (\alpha' - \beta') \right] + 1 \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{6} r^2 \frac{d}{dr} \left\{ e^{-\beta} \left[-\alpha'' - \frac{\alpha'^2}{2} + \frac{\alpha' \beta'}{2} - \frac{2}{r} (\alpha' - \beta') - \frac{2}{r^2} + \frac{2e^\beta}{r^2} \right] \right\} \\
 &= e^{-\beta} \left(\frac{3}{2} \beta' - \frac{1}{2} \alpha' - \frac{1}{2} r \alpha'' + \frac{1}{2} r \alpha' \beta' + \frac{1}{2} r \beta'' - \frac{1}{2} r \beta'^2 \right) \\
 &\quad + e^{-\beta} \left(\frac{1}{2} r \alpha'' + \frac{1}{4} r \alpha'^2 - \frac{1}{4} r \alpha' \beta' - \beta' \right) + e^{-\beta} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2} \alpha' - \frac{1}{2} \beta' - \frac{e^\beta}{r} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{6} r^2 \left(-\alpha'' - \alpha' \alpha'' + \frac{3}{2} \alpha'' \beta' + \frac{1}{2} \alpha' \beta'' + \frac{2\alpha'}{r^2} - \frac{2\alpha''}{r} + \frac{2\beta''}{r} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{r^3} + \frac{1}{2} \alpha'^2 \beta' - \frac{1}{2} \alpha' \beta'^2 + \frac{2\alpha' \beta'}{r} + \frac{2\beta'^2}{r} \right) \\
 &= e^{-\beta} \left(-\frac{1}{3} \alpha' + \frac{1}{3} r \alpha'' - \frac{1}{12} r \alpha' \beta' + \frac{1}{6} r \beta'' - \frac{1}{6} r \beta'^2 + \frac{1}{4} r \alpha'^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{3r} + \frac{1}{6} r^2 \alpha''' + \frac{1}{6} r^2 \alpha' \alpha'' - \frac{1}{4} r^2 \alpha'' \beta' - \frac{1}{12} r^2 \alpha' \beta'' \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{12} r^2 \alpha'^2 \beta' + \frac{1}{12} r^2 \alpha' \beta'^2 \right) - \frac{1}{3r}, \tag{F.4}
 \end{aligned}$$

▪ C_{232} :

$$C_{232} = \partial_3 R_{22} + \Gamma_{22}^3 R_{33} - \Gamma_{23}^2 R_{22} - \frac{1}{6} g_{22} \partial_3 R = 0,$$

▪ C_{303} :

$$C_{303} = \partial_0 R_{33} + \Gamma_{33}^0 R_{00} - \Gamma_{30}^3 R_{33} - \frac{1}{6} g_{33} \partial_0 R = 0,$$

▪ C_{313} :

$$\begin{aligned}
 C_{313} &= \partial_1 R_{33} + \Gamma_{33}^1 R_{11} - \Gamma_{13}^3 R_{33} - \frac{1}{6} g_{33} \partial_1 R \\
 &= \partial_1 (\text{sen}^2 \theta R_{22}) - r \text{sen}^2 \theta e^{-\beta} R_{11} - \frac{1}{r} (\text{sen}^2 \theta R_{22}) - \frac{1}{6} r^2 \text{sen}^2 \theta \partial_1 R \\
 &= \text{sen}^2 \theta \left(\partial_1 R_{22} - r e^{-\beta} R_{11} - \frac{1}{r} R_{22} - \frac{1}{6} r^2 \partial_1 R \right) \\
 &= \text{sen}^2 \theta C_{212}, \tag{F.5}
 \end{aligned}$$

▪ C_{323} :

$$C_{323} = \partial_2 R_{33} + \Gamma_{33}^2 R_{22} - \Gamma_{32}^3 R_{33} - \frac{1}{6} g_{33} \partial_2 R = 0.$$

Por lo tanto, las componentes distintas de cero son C_{010} , C_{212} y C_{313} ; sin embargo, de (F.4) y

(F.5) se observa que $C_{313} = \text{sen}^2 \theta C_{212}$; más aún, si en (F.3) se factoriza $\frac{1}{3}e^\alpha$ se obtiene

$$3e^{-\alpha}C_{010} = e^{-\beta} \left(\alpha' \alpha'' - \frac{3}{2} \alpha'' \beta' - \frac{1}{2} \alpha'^2 \beta' + \frac{3\alpha'^2}{2r} + \frac{1}{2} \alpha' \beta'^2 - \frac{\alpha' \beta'}{2r} + \alpha''' - \frac{1}{2} \alpha' \beta'' - \frac{2\alpha'}{r^2} + \frac{2\alpha''}{r} + \frac{\beta''}{r} + \frac{2}{r^3} - \frac{\beta'^2}{r} \right) - \frac{2}{r^3}, \quad (\text{F.6})$$

y si en (F.4) se factoriza $\frac{1}{6}r^2$, entonces

$$\frac{6}{r^2}C_{212} = e^{-\beta} \left(-\frac{2\alpha'}{r^2} + \frac{2\alpha''}{r} - \frac{\alpha' \beta'}{2r} + \frac{\beta''}{r} - \frac{\beta'^2}{r} + \frac{3\alpha'^2}{2r} + \frac{2}{r^3} + \alpha''' + \alpha' \alpha'' - \frac{3}{2} \alpha'' \beta' - \frac{1}{2} \alpha' \beta'' - \frac{1}{2} \alpha'^2 \beta' + \frac{1}{2} \alpha' \beta'^2 \right) - \frac{2}{r^3}; \quad (\text{F.7})$$

es claro que $C_{212} = \frac{1}{2}r^2 e^{-\alpha} C_{010}$, lo cual verifica la afirmación hecha en párrafos anteriores:

$$\begin{aligned} g^{\nu\sigma} C_{\nu\rho\sigma} &= g^{00} C_{0\rho 0} + g^{11} C_{1\rho 1} + g^{22} C_{2\rho 2} + g^{33} C_{3\rho 3} \\ &= g^{00} C_{010} + g^{11} C_{111} + g^{22} C_{212} + g^{33} C_{313} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

En conclusión, se tiene solo una componente independiente distinta de cero, la cual es C_{010} .

Bibliografía

- [1] WEINBERG, D. H., WHITE, M. (Agosto del 2023). Dark Energy en R.L. Workman et al. (Particle Data Group), *Prog. Theor. Exp. Phys.* 2022, 083C01 (2022) and 2023 update. <https://pdg.lbl.gov/2023/reviews/rpp2023-rev-dark-energy.pdf>.
- [2] BAUDIS, L., PROFUMO, S. (Agosto del 2023). Dark Matter en R.L. Workman et al. (Particle Data Group), *Prog. Theor. Exp. Phys.* 2022, 083C01 (2022) and 2023 update. <https://pdg.lbl.gov/2023/reviews/rpp2023-rev-dark-matter.pdf>.
- [3] CAPOZZIELLO, S., DE LAURENTIS, M. (2011). Extended Theories of Gravity. *Physics Reports*, 509(4-5), 167-321. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2011.09.003>.
- [4] MANNHEIM, P. D. (2006). Alternatives to dark matter and dark energy. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 56(2), 340-445. <https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2005.08.001>.
- [5] POFFENBERGER, L. (Noviembre del 2020). 2020 Nobel Prize in Physics. *APS News*, Volume 29, Number 10. <https://www.aps.org/publications/apsnews/202011/nobel-physics.cfm>.
- [6] HARADA, J. (2021). Emergence of the Cotton tensor for describing gravity. *Physical Review D*, 103(12), L121502. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.103.L121502>.
- [7] COTTON, É. (1899). Sur les variétés à trois dimensions. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques, Serie 2, Volume 1, no. 4*, pp. 385-438. https://afst.centre-mersenne.org/item/AFST_1899_2_1_4_385_0/.
- [8] GARCÍA, A. A., HEHL, F. W., HEINICKE, C., MACÍAS, A. (2004). The Cotton tensor in Riemannian spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 21(4), 1099-1118. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/21/4/024>.
- [9] MANNHEIM, P. D., KAZANAS, D. (1989). Exact vacuum solution to conformal Weyl gravity and galactic rotation curves. *The Astrophysical Journal*, 342, 635. <https://doi.org/10.1086/167623>.
- [10] GRØN, Ø., HERVIK, S. (2007). Einstein's General Theory of Relativity. *Springer*.
- [11] VARIESCHI, G.U. (2010). A kinematical approach to conformal cosmology. *General Relativity and Gravitation*, 42, 929-974. <https://doi.org/10.1007/s10714-009-0890-y>.
- [12] BORUNDA, M., JANSSEN, B., BASTERO-GIL, M. (2008). Palatini versus metric formulation in higher-curvature gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2008(11), 008. <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2008/11/008>.
- [13] POISSON, E. (2007). A Relativist's toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics. *Cambridge University Press*.

- [14] FERNANDES, P. G. S., CARRILHO, P., CLIFTON, T., MULRYNE, D. J. (2022). The 4D Einstein–Gauss–Bonnet theory of gravity: a review. *Classical and Quantum Gravity*, 39(6), 063001. <https://doi.org/10.1088/1361-6382/ac500a>.
- [15] MARTÍN-GARCÍA, J. M. (1 de Diciembre del 2023). The Gauss–Bonnet term. *xAct*. <http://www.xact.es/xtras/documentation/tutorial/GaussBonnet.html>.
- [16] CARROLL, S. M. (2004). *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison-Wesley.
- [17] SUSSMAN, R. A., NÁJERA, S. (2023). Exact solutions of Cotton Gravity. [arXiv:2312.02115](https://arxiv.org/abs/2312.02115)[gr-qc].
- [18] SUSSMAN, R. A., NÁJERA, S. (2023). Cotton Gravity: the cosmological constant as spatial curvature. [arXiv:2311.06744](https://arxiv.org/abs/2311.06744)[gr-qc].
- [19] BLAU, M. (10 de Diciembre del 2023). Lecture Notes on General Relativity. <http://www.blau.itp.unibe.ch/GRlecturenotes.html>.
- [20] CHOQUET-BRUHAT, Y. (2015). *Introduction to General Relativity, Black Holes, and Cosmology*. Oxford University Press.
- [21] D’INVERNO, R., VICKERS, J. (2022). *Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding*. Oxford University Press.
- [22] HOBSON, M. P., EFSTATHIOU, G. P., LASENBY, A. N. (2006). *General Relativity: An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press.
- [23] KUROSH, A. (1984). *Higher Algebra*. Mir Publishers.
- [24] LAKE, K., ROEDER, R. C. (1977). Effects of a nonvanishing cosmological constant on the spherically symmetric vacuum manifold. *Physical Review D*, 15(12), 3513-3519. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.15.3513>.
- [25] SUSSMAN R. A., MANTICA C. A., MOLINARI L. G., NÁJERA S. (2024). Response to a critique of “Cotton Gravity”. [arXiv:2401.10479](https://arxiv.org/abs/2401.10479)[gr-qc].
- [26] GIBBONS, G. W., HAWKING, S. W. (1977). Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation. *Physical Review D*, 15(10), 2738–2751. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.15.2738>.
- [27] HARADA, J. (2022). Cotton gravity and 84 galaxy rotation curves. *Physical Review D*, 106(6). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.106.064044>.
- [28] RINDLER, W. (2006). *Relativity: Special, General, and Cosmological*. Oxford University Press.
- [29] GOURGOULHON, É. (13 de mayo de 2024). Geometry and physics of black holes: Lecture notes. <https://relativite.obspm.fr/blackholes/>.
- [30] MISNER, C. W., THORNE, K. S., WHEELER, J. A. (1973). *Gravitation*. W. H. Freeman.
- [31] CHANDRASEKHAR, S. (1983). *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford University Press.
- [32] EINSTEIN, A. (1916). Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen Der Physik*, 354(7), 769–822. <https://doi.org/10.1002/andp.19163540702>.
- [33] WILL, C. M. (2014). The Confrontation between General Relativity and Experiment. *Living Reviews in Relativity*, 17(1). <https://doi.org/10.12942/lrr-2014-4>.

- [34] MOMENNIA, M., HERRERA-AGUILAR, A., NUCAMENDI, U. (2023). Kerr black hole in de Sitter spacetime and observational redshift: Toward a new method to measure the Hubble constant. *Physical Review D*, 107(10). <https://doi.org/10.1103/physrevd.107.104041>.
- [35] HERRERA-AGUILAR, A., NUCAMENDI, U. (2015). Kerr black hole parameters in terms of the redshift/blueshift of photons emitted by geodesic particles. *Physical Review D*, 92(4). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.045024>.
- [36] MOMENNIA, M., BANERJEE, P., HERRERA-AGUILAR, A., NUCAMENDI, U. (2023). Schwarzschild black hole and redshift rapidity: A new approach towards measuring cosmic distances. [arXiv:2312.07426](https://arxiv.org/abs/2312.07426)[gr-qc].