BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Anillos Semineterianos

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

Daniel Joshua Anaya Palacios

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Iván Fernando Vilchis Montalvo

PUEBLA, PUEBLA. 07/24

BUAP

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

DANIEL JOSHUA ANAYA PALACIOS

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 29 de mayo de 2024, con la tesis titulada:

Anillos Semineterianos

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 24 de junio de 2024

DR. RAÚL ESCOBEDO CONDE
COORDINADOR DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA · FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS · SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO · 1578

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
(222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Para Don Pastor y Doña Blanca, mis amados padres,
y para el Rafa, la Meli y la Mitatos, mis queridos hermanos.

Agradecimientos

A mis padres, porque todo lo bueno que pueda haber en mí lo sembraron ellos, aún más, lo siguen cultivando cada día con su amor y con su ejemplo.

Al profe Vilchis, por sus invaluables enseñanzas matemáticas y no-matemáticas (si es que existe algo no-matemático en la vida de un matemático).

A los amigos que conocí aquí, Manuel, Josué, Damagor y Constantino, por su compañia y ánimo. Hicieron de esta experiencia algo más ameno y divertido.

A los amigos de antes y ahora, el men y el Ha, por su cariño y su constante apoyo.

A mi esposa Laura, por su amor, su apoyo y la forma tan bella en que enriquece mi vida.

A mis hermanos, Rafa, Meli y Milagros, por su cariño, apoyo y ejemplo.

A las personas que conforman la FCFM, por sus contribuciones directas e indirectas a mi formación. Especialmente al profe Cejudo que me ha enseñado mucho y me ha ayudado a resolver dudas, al profe Iván Martínez que me ha ensañado lógica y es un gran ejemplo de trabajo y dedicación, a Angóa y compañía por ser inspiración y ejemplo de entrega a la comunidad, y a Tere, otro gran ejemplo de profesionalismo y servicio a la facultad, por hacer más fácil todo lo administrativo y soportar mi escasa habilidad en esa área.

A los miembros del comité tutorial, el Dr. Alejandro Alvarado, el Dr. Carlos Alberto López Andrade y el MC. Oscar Pérez López

por su tiempo, correcciones y comentarios que enriquecieron este trabajo.
Al CONAHCYT, sin la beca no me habría podido dedicar a estudiar.

Índice general

Introducción

0.1. Motivación

Las siguientes definiciones de semineteriano son dadas por distintos autores:

Definición 0.1 (Kourki, F., Tribak, R. [1])**.** *Sean A un anillo conmutativo y M un A-módulo. M es semineteriano si, para todo módulo cociente M/N no cero de M, existe un submódulo $K/N \leq M/N$ neteriano y distinto de cero.*

Definición 0.2 (F. Kasch [2], Capítulo 9, ejercicio (8).)**.** *Sean R un anillo y M un R-Módulo derecho. M es Kasch-semineteriano si, para todo $N \leq M$ distinto de cero. El radical de N es distinto de N, es decir $Rad(N) \neq N$.*

Como ambas definiciones parten de dualizar la definición de semiartiniano:

Definición 0.3. *Sean R un anillo y M_R un R-módulo derecho. M es semiartiniano derecho si, para todo módulo cociente M/N no cero de M, tiene un submódulo artiniano derecho distinto de cero.*

Están relacionadas, por ejemplo en que todo módulo neteriano es semineteriano y Kasch-semineteriano, pero no son equivalentes. Esto se evidencia en el $\mathbb{Z}$-módulo $M = \mathbb{Z}_{p^\infty}$, con p un primo. Este módulo no es neteriano y su anillo es conmutativo. En él cada módulo cociente es isomorfo a M, y tiene un submódulo isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ que es neteriano, por lo tanto M es semineteriano. Pero $Rad(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$, por lo que $M = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ no es Kasch-semineteriano. Lo que también aclara que no basta conmutatividad en el anillo para que los conceptos sean equivalentes.

Por otro lado, el concepto de modulo max es el siguiente:

Definición 0.4. *Sean R un anillo y M un R-Módulo. Entonces M es max si cada $N \leq M$ distinto de cero, tiene un submódulo máximo.*

Los módulos max han sido estudiados, por ejemplo en [4]. En este caso resulta que el concepto Kasch-semineteriano es equivalente a max.

Proposición 0.1. *Sean R un anillo y M_R un R-módulo derecho. Entonces M es max si y solo si M es Kasch-semineteriano.*

Demostración.

Sea M Kasch-semineteriano, esto es, cada $N_R \leq M$ cumple que $Rad(N)_R \neq N$, esto si y solo si la intersección de los submódulos máximos de N es distinta de N, esto si y solo si existe $K_R < N$ máximo. Lo que equivale a ser max. $\square$

Por lo que se plantea el estudio de anillos y módulos semineterianos, sus características como generalización de neterianos y condiciones de finitud y su relación con otros conceptos como los anillos y módulos máx.

0.2. Antecedentes

En los años 70, dos matemáticos, Constantin Nastasescu y Nicolae Popescu escriben [12] (1968), donde exponen interesantes relaciones entre los conceptos de anillos semiartinianos y anillos max. En este texto no se les llamaba de esa forma a los anillos max, sino anillos que cumplen que cada uno de sus módulos tiene la propiedad de que cada submódulo no cero tiene un submódulo máximo. Ahora bien, en [15], Robert C. Shock, escribe algo similar a lo siguiente: Un módulo artiniano puede ser caracterizado mediante ciertas propiedades de sus módulos cociente. Esto es, un módulo M es artiniano si y solo si las siguientes condiciones se cumplen:

I) Cada módulo cociente no cero contiene un submódulo mínimo.

II) El soclo de cada módulo cociente es finitamente generado.

El dual de módulo cociente es submódulo. Así el dual de I) es

I') Todo submódulo no cero de M tiene un submódulo máximo.

Entonces llama a los módulos con la pripiedad I), módulos min y a los que cumplan I') módulos max.
Retomando lo que ya mencionamos en la motivación, Kasch llama a estos módulos, quizá de forma equivocada, módulos semineterianos, por nacer del dual de los módulos semiartinianos.
Ahora ¿con qué razón nos atrevemos a decir que no son "tan" semineterianos los anillos max? con la razón que da tener definidos semineterianos como lo hacen Rachid Tribak y Farid Kourki en [1], pues si bien es aceptable que el dual de cociente es submódulo y el dual de min es max, del mismo modo es aceptable que el dual de artiniano es neteriano. En este sentido si se escribe

I) Todo módulo cociente tiene un submódulo artiniano

se puede dualizar en la forma

I') Todo módulo cociente tiene un submódulo neteriano.

que es lo que se hace en [1], donde se demuestra (solo para anillos conmutativos) que todo módulo semineteriano es una extensión

esencial de módulos de la forma A/P con A el anillo y P un primo tal que A/P es neteriano. Es decir, son extensiones esenciales de sumas de módulos neterianos. Lo que no se puede decir de los anillos max.
También Tribak y Kourki estudian en el artículo [5], anillos semiartinianos, pero en los dos artículos se desarrollan los conceptos considerando anillos conmutativos, quizá por que las conexiones hacen Popescu y Nastasescu funcionan bien en ese contexto.

0.3. Sobre el contenido de la tesis

Se asume de inicio que el lector conoce las definiciones básicas de Teoría de anillos y Teoría de módulos. Conceptos básicos de Teoría de Categorías así como los Teoremas de isomorfismos en módulos y el Teorema de la correspondencia.
En en la primera sección del Capítulo 1, se desarrollan los resultados más básicos sobre Teorías de torsión y en la segunda sección se resumen algunos resultados sobre anillos max.
En el Capítulo 2 se encuentran los resultados centrales de la tesis, consta de tres secciones, en las primeras dos se desarrollan algunos resultados del artículo [1] de forma detallada y con algunas generalizaciones y resultados propios de este trabajo. En la sección tres se comparan los conceptos de semineteriano, semiartiniano y max.

Los resultados y conclusiones se describen en el último capítulo.

En los Apéndices se desarrolla a detalle herramientas que no se consideran básicas y resultan muy útiles en este trabajo. En la primera sección se expone la construcción de lo que llaman idealización de un módulo (o extensión trivial de un anillo) y algunos resultados importantes sobre sus ideales, sus ideales primos, sus ideales máximos y como se comporta cuando el anillo es neteriano. Esta construcción es útil para construir ejemplos y contraejemplos en el trabajo. Finalmente en la segunda sección se estudia el grupo $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ (con p un número primo) debido a que es un ejemplo muy útil en la tesis, con una construcción y propiedades muy peculiares.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Teorías de torsión desde sus axiomas.

Dado R un anillo, denotamos por $R-$Mod a la clase de todos los R-módulos izquierdos. En general la pensaremos como una categoría cuyas flechas son los morfismos de R-modulos. Si C es un clase de R-módulos, tomando todos los morfismos entre sus módulos tendremos que es una subcategoría plena de R-Mod. Usaremos la notación $Hom(A, B)$ para denotar los morfismos de módulos cuyo dominio es A y codominio es B.

Definición 1.1. *Sea R un anillo y $M, N, K \in R$-Mod. Entonces*

$$N' \xrightarrow{f'} N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \xrightarrow{g'} K'$$

es una sucesión exacta si para cada par de flechas componibles en la sucesión, se cumple:
$Im(f') = ker(f)$, $Im(f) = ker(g)$ y $Im(g) = ker(g')$.
La sucesión se dirá exacta corta si $N' = K' = 0$ y es exacta, es decir

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

y $0 = ker(f)$, $Im(f) = ker(g)$, $Im(g) = K$.

Es inmediato que, si consideramos una sucesión como en (1.1), f es inyectiva y g es suprayectiva. Entonces, $N \cong Im(f) \leq M$ y por el Primer Teorema de isomorfismos tendremos que $K \cong M/Im(f)$, ya que $Im(f) = Ker(g)$. Por lo que toda sucesión exacta corta tiene, salvo isomorfismos, la forma.

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\nu} M/N \longrightarrow 0 \tag{1.2}$$

con i la inclusión y ν el morfismo canónico. Un lema que nos será útil al trabajar las sucesiones exactas cortas es en esta sección es el siguiente:

Lema 1.1 (Propiedad del cokernel)**.** *Sean R un anillo y M, N, K y P R-módulos. Si*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$$

es exacta corta y en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & K \arrow[r] & 0 \\
& & P & &
\end{tikzcd}$$

se cumple que $h \neq 0$ y $h \circ f = 0$ entonces existe un único morfismo $\gamma : K \to P$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & K \arrow[r] \arrow[dl, "\gamma"] & 0 \\
& & P & &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración.
Definimos la asignación

$$\begin{aligned} \gamma :&K \to P \\ &k \mapsto h(m) \end{aligned}$$

para algún $m \in M$ tal que $g(m) = k$. Veamos que γ es función. Sean $k, k' \in K$ tales que $k = k'$. Como $g : M \to K$ es suprayectiva, existen $m, m' \in M$ tales que $g(m) = k$ y $g(m') = k'$. Luego $g(m) = g(m')$ entonces $m - m' \in Ker(g) = Im(f) \leq Ker(h)$, luego $h(m) = h(m')$, luego $\gamma(k) = \gamma(k')$.

Veamos que γ es morfismo de módulos. Sean $k, k' \in K$ y sea $rinR$. Entonces $\gamma(k) = h(m)$ con $m \in M$ y $k = g(m)$, y $\gamma(k') = h(m')$ con $m' \in M$ y $k' = g(m')$. Notemos que $\gamma(rk) = h(rm)$ pues $rm \in M$ es tal que $rk = rg(m) = g(rm)$. Similarmente se tiene que $\gamma(rk') = h(rm')$. Y $\gamma(k + k') = h(m + m')$ pues $m + m' \in M$ son tales que $k + k' = g(m) + g(m') = g(m + m')$. Luego

$$\begin{aligned}\gamma(rk) &= h(rm)\\ &= rh(m)\\ &= r\gamma(k)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\gamma(k + k) &= h(m + m')\\ &= h(m) + h(m')\\ &= \gamma(k) + \gamma(k')\end{aligned}$$

Por lo tanto γ es morfismo de módulos.
Por último veamos que $h = \gamma \circ g$. Sean $m \in M$, entonces $(\gamma \circ g)(m) = \gamma(g(m)) = h(m)$. La unicidad de γ es consecuencia de su definición.
$\square$

Definición 1.2. *Sea R un anillo.*

- *Llamaremos teoría de torsión a un par $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ donde $\mathcal{T}, \mathcal{F} \subseteq R-mod$, son clases de módulos cerradas bajo isomorfismos. Tales que, cumplen los siguientes axiomas:*

    1. $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \{0\}$

2. *$Hom(T, F) = 0$ para cada $T \in \mathcal{T}$ y cada $F \in \mathcal{F}$*
3. *Para cada $M \in R$-Mod, existen $N \in \mathcal{T}$, $K \in \mathcal{F}$ y flechas $f \in Hom(N, M)$, $g \in Hom(M, K)$ tales que la sucesión*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$$

es exacta corta.

- *Si $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una teoría de torsión, diremos que $\mathcal{T}$ es una clase de torsión y $\mathcal{F}$ es una clase libre de torsión.*

Notemos que 1 se puede deducir de 3 y 2: De 3 tenemos que $0 \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$ y de 2 es el único. Como las clases son cerradas bajo isomorfismos podemos tomar en 3 una sucesión exacta corta del tipo (1.2) y tendremos que cada $-$módulo M tiene un submódulo N tal que $N \in \mathcal{T}$ y $M/N \in \mathcal{F}$.

Proposición 1.1. *Si $\mathcal{T} \subseteq R-Mod$ es una clase de torsión, entonces es cerrada bajo cocientes, sumas directas y extensiones de módulos. Es decir, para $\mathcal{T} \subseteq R-Mod$ clase de torsión, se cumple lo siguiente:*

1. *Si $M \in \mathcal{T}$ y $N \leq M$ entonces $M/N \in \mathcal{T}$*
2. *Si $M, M' \in \mathcal{T}$ entonces $M \oplus M' \in \mathcal{T}$*
3. *Si $N, K \in \mathcal{T}$ y*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$$

es exacta corta, entonces $M \in \mathcal{T}$

Demostración.

1. Sean $M \in \mathcal{T}$ y $N \leq M$. Veamos que $M/N \in \mathcal{T}$. Por axioma 3 de la Definición 1.2, existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow K/N \xrightarrow{i} M/N \xrightarrow{\nu} \frac{(M/N)}{K/N} \longrightarrow 0$$

con $K/N \in \mathcal{T}$ y $\frac{(M/N)}{K/N} \in \mathcal{F}$. Como $M \in \mathcal{T}$ y $\frac{(M/N)}{K/N} \in \mathcal{F}$ entonces, del axioma 2, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & M \arrow[d, "\nu'"'] \arrow[dr, "0"] & & \\
0 \arrow[r] & K/N \arrow[r, "i"] & M/N \arrow[r, "\nu"] & \frac{(M/N)}{K/N} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

conmuta. Luego $\nu = 0$ y eso si y solo si $M/N = K/N$. Por lo tanto $M/N \in \mathcal{T}$.

2. Sean $M, M' \in \mathcal{T}$, entonces $M \oplus M'$, por 2, cumple que existe un submódulo $N \leq M \oplus M'$ tal que

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \oplus M' \xrightarrow{\nu} M \oplus M'/N \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta, $N \in \mathcal{T}$ y $M \oplus M'/N \in \mathcal{F}$, luego, por axioma 2 el siguiente diagrama [1]

$$\begin{tikzcd}
 & & M \arrow[d, "Id+0"'] \arrow[dr, "0"] & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] & M \oplus M' \arrow[r, "\nu"] & M \oplus M'/N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

conmuta y de aquí que $M \oplus 0 \leq N$, similarmente para $M' \oplus 0$ por lo que $M \oplus M' = N \in \mathcal{T}$.

3. Sean $N, K \in \mathcal{T}$ y sea

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta. Veamos que $M \in \mathcal{T}$. Por el axioma 3 de la Definición 1.2, existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\nu} M/N' \longrightarrow 0$$

---

[1]Denotamos $Id + 0 : M \to M \oplus M'$ al morfismo definido por $Id + 0(m) = m + 0 \in M \oplus M'$

con $N' \in \mathcal{T}$ y $M/N' \in \mathcal{F}$ a y $M/N' \in \mathcal{F}$. Entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\nu"] & K \arrow[r] & 0 \\
& & M/N' & &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Luego, usando el Lema 1.1 tenemos que existe un único $\gamma : K \to M/N'$ tal que $\gamma \circ g = \nu$ pero $\gamma \in Hom(K, M/N') = 0$ por lo que $\nu = 0$ y eso si y solo si $N' = M$. Por lo tanto $M \in \mathcal{T}$. $\square$
Ahora, el recíproco se cumple.

Proposición 1.2. *Si $C \subseteq R-Mod$, cerrada bajo isomorfismos, sumas directas, cocientes y extensiones de módulos entonces existe una teoría de torsión τ tal que C es su clase de torsión.*

Demostración.
Definimos $\mathcal{F}^C = \{F \in R-Mod | Hom(N, F) = 0, \forall N \in C\}$. Veamos que $\tau = (C, \mathcal{F}^C)$ es una teoría de torsión. Los axiomas 1 y 2 son inmediatos de la definición de $\mathcal{F}^C$.
Sea $M \in R$-Mod.Veamos que existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N_0 \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

con $N_0 \in C$ y $F \in \mathcal{F}^C$. Sea $\mathcal{T}_C(M) = \{N \leq M | N \in C\}$ consideremos el submódulo:

$$N_0 := \sum_{N \in \mathcal{T}_C(M)} N \tag{1.3}$$

Sabemos que hay un morfismo canónico

$$f : \bigoplus_{N \in \mathcal{T}_C(M)} N \longrightarrow \sum_{N \in \mathcal{T}_C(M)} N$$
$$f \longmapsto \sum_{i \in Sop(f)} f(i)$$

suprayectivo. Entonces

$$\left(\sum_{N \in \mathcal{T}_C(M)} N \right) \cong \bigoplus_{N \in \mathcal{T}_C(M)} N/ker(f)$$

por el primer teorema de isomorfismos y así, debido a que C es cerrada bajo cocientes y sumas directas concluimos que

$$N_0 =: \left(\sum_{N \in \mathcal{T}_C(M)} N \right) \in C.$$

Veamos que $M/N_0 \in \mathcal{F}^C$.
Sea $g \in Hom(T, M/N_0)$ para alguna $T \in C$, entonces $Im(g) \leq M/N_0$ entonces existe $K \leq M$ tal que $K/N_0 = Im(g) \cong T/ker(g) \in C$ debido a que C es cerrada bajo cocientes. Entonces

$$0 \longrightarrow N_0 \xrightarrow{i} K \xrightarrow{\nu} K/N_0 \longrightarrow 0$$

es exacta corta y $N_0, K/N_0 \in C$, por lo tanto, al ser C cerrada bajo extensiones de módulos, tenemos que $K \in C$, entonces $K = N_0$, esto es $Im(g) = 0$, por lo que $Hom(T, M/N_0) = 0$ para todo $T \in C$. Por lo tanto $M/N_0 \in \mathcal{F}^C$. Así, $\tau = (C, \mathcal{F}^C)$ es una teoría de torsión.
$\square$

Dadas las $\tau_1 = (\mathcal{T}_1, \mathcal{F}_1), \tau_2 = (\mathcal{T}_2, \mathcal{F}_2)$ teorías de torsión de R-Mod, para un anillo R, diremos que $\tau_1 \leq \tau_2$ si y solo si $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. En este sentido, dada cualquier clase C, podemos encontrar a la menor clase de torsión $\mathcal{T}_C$ que la contiene. Esta será la clase de torsión generada por C.

Proposición 1.3. *Sea A un anillo y $C \subseteq R-Mod$. Entonces la clase de torsión generada por C se genera de la siguiente forma: Primero, tomemos*

$$\mathcal{F}^C = \{F \in R - Mod | Hom(M, F) = 0, \forall M \in C\}$$

y finalmente

$$\mathcal{T}_C = \{T \in R - Mod | Hom(T, F) = 0, \forall F \in \mathcal{F}^C\}$$

Demostración.

Veamos que $\mathcal{T}_C$ es una clase de torsión.
Sean $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{T}_C$, tenemos que

$$Hom(\oplus_{i\in I} M_i, F) = \prod_{i\in I} Hom(M_i, F) = 0$$

lo que demuestra que $\mathcal{T}_C$ es cerrada ante sumas directas. Ahora, si $M \in \mathcal{T}_C$ y $N \leq M$ entonces, si $f \in Hom(M/N, F)$ entonces $f \circ \nu : M \to F$ debe ser cero. Por lo que $M/N = Im(\nu) \subseteq ker(f)$ entonces $f = 0$ ó $N = M$. Por lo que $\mathcal{T}_C$ es cerrado bajo cocientes. Finalmente, sean $N, K \in \mathcal{T}_C$ y $M \in R-$Mod tales que la sucesión

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$$

es exacta corta. Entonces tomemos $h \in Hom(M, F)$ con $F \in \mathcal{F}$, luego

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & K \arrow[r] & 0 \\ & & F & & \end{tikzcd}$$

y por el Lema (1.1) tenemos que existe un único morfismo $\gamma : K \to F$ tal que $\gamma \circ g = h$, pero $\gamma \in Hom(K, F) = 0$ y está definida, para cada $m \in M$ como $0 = \gamma(m) = h(m)$ esto es $h = 0$. De modo que $M \in \mathcal{T}_C$. Por lo tanto, usando (1.2) tenemos que $\mathcal{T}_C$ es clase de torsión. □

Proposición 1.4. *Si $C \subseteq R$-Mod es una clase cerrada bajo isomorfismos y cocientes, entonces, la clase de torsión generada por C es la conformada por los R-módulos M que cumplen, para cada $N \lneq M$, existe $K \in C$ tal que $0 \neq K \leq M/N$.*

Demostración.
Primero caractericemos a $\mathcal{F}^C$:
$F \in \mathcal{F}^C$ si y solo si para $N \leq F$ y $N \in C$ implica $N = 0$.

$\Rightarrow$] Sea $N \leq F$ y $F \in \mathcal{F}^C$, si $N \in C$ entonces $Hom(N, F) = 0$, entonces, como siempre existe $i : N \to F$, se tiene que $N = 0$

$\Leftarrow$] Sea F tal que no tiene submódulos no cero que pertenezcan a C y $T \in C$. Entonces, para $f \in Hom(T, F)$ sucede que $T/ker(f) \cong Im(f) \leq F$ por lo tanto, desde que C es cerrada bajo isomorfismos y cocientes, sucede que $Im(f) \in C$, por lo tanto $f = 0$.

Ahora caractericemos a $\mathcal{T}_C$:
$T \in \mathcal{T}_C$ si y solo si, para cada T/N existe $0 \neq K \leq T/N$ tal que $K \in C$.

$\Rightarrow$] $\mathcal{T}_C$ es una clase de torsión, por lo que si $N \leq T$, se tiene que $T/N \in \mathcal{T}$, luego, si no existe $K \leq T/N$ con $K \in C$ tendríamos que $T/N \in \mathcal{F}$, como demostramos antes, por lo que $N = T$. Así, concluimos que para cada $T \in \mathcal{T}$ y $N \lneq T$ existe $K \in C$ con $0 \neq K \leq T/N$.
$\Leftarrow$] Sea $F \in \mathcal{F}^C$ y $f : T \to F$, con $f \neq 0$ entonces $ker(f) \neq T$, luego $T/ker(f)$ cumple que existe $0 \neq K \in C$ tal que $K \leq T/ker(f) \cong Im(f)$, usando el Primer Teorema de Isomorfismos. Luego, $K \cong K' \leq F$ con $K' \neq 0$, lo que es una contradicción con lo demostrado antes. Así $T \in \mathcal{T}_C$. $\square$

Notemos que, por dualidad, si $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una teoría de torsión se cumple que F es cerrado bajo submódulos, productos y extensiones de módulos.

Definición 1.3. *Sea R un anillo, diremos que $\mathcal{T}$ es una clase de torsión hereditaria si, es una clase de torsión y es cerrada bajo submódulos.*

Ahora, también nos será útil la siguiente condición suficiente para que una clase de torsión $\mathcal{T}_C$, generada por una clase C sea hereditaria.

Proposición 1.5. *Sea R un anillo y $C \subseteq R - Mod$. Si C es cerrada bajo submódulos y cocientes, entonces $\mathcal{T}_C$ es una clase de torsión hereditaria.*

Para demostrarla necesiteremos un resultado auxiliar que se formula en términos de capsulas inyectivas, por lo que definimos:

Definición 1.4. *Sean R un anillo y E un $R-$módulo.*

- *Diremos que E es inyectivo si, para cada par de módulos M, N, $f : M \to N$ morfismo inyectivo y $h : M \to E$ existe un morfismo $g : N \to E$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & N \arrow[d, "g"] \\ & E \end{tikzcd}$$

  conmuta. Esto es $g \circ f = h$

- *Llamaremos $E(M)$ al menor módulo inyectivo tal que $M \leq^{es} E(M)$. Es llamado comúnmente cápsula inyectiva de M.*[2]

Ahora

Lema 1.2. *Sea $(\mathfrak{T}, \mathfrak{F})$ una teoría de torsión. Si $\mathfrak{F}$, la clase libre de torsión, es cerrada bajo cápsulas inyectivas entonces T es hereditaria.*

Demostración.
Sea $T \in \mathfrak{T}$ y $K \leq T$. Por *iii*) de la definición 1.2 tendremos que existe $M \leq K$ tal que $M \in \mathfrak{T}$ y $K/M \in \mathfrak{F}$. Luego, tomemos $E(K/M)$, que por hipótesis es libre de torsión ($E(K/M) \in \mathfrak{T}$). Ahora, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\nu"'] & T \\ K/M \arrow[r, "i"] & E(K/M) \end{tikzcd}$$

[2]Es conocido que este módulo siempre existe y es único salvo isomorfismos (por ejemplo [2], 5.5.3 y 5.6.3).

donde las flechas marcadas i son inclusiones y ν es el morfismo canónico. Ahora, por ser la cápsula inyectiva, tenemos que existe $g : T \to E(K/M)$ tal que

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "i \circ \nu"'] & T \arrow[d, "g"] \\ & E(K/M) \end{tikzcd}$$

conmuta. Pero $T \in \mathcal{T}$, por lo que $g = 0$. Entonces $\nu = 0$, por lo que $M = K$, es decir $K \in \mathcal{T}$, por lo que $\mathcal{T}$ es hereditaria. $\square$

Ahora si, demostremos la Proposición 1.5:

Demostración.
Supongamos que $\mathcal{F}_C$ no es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Entonces existe $F \in \mathcal{F}_C$ tal que $E(F) \notin \mathcal{F}_C$, entonces, existe $T \in C$ tal que hay un morfismo $f : T \to E(F)$ no cero.
Luego $Im(f) \cong T/\ker f \in \mathcal{T}_C$ y $A = Im(f) \cap F \leq F$ es no cero porque $Im(F)$ es no nulo y $F \leq^{es} E(F)$ y como $\mathcal{F}_C$ es cerrada bajo submódulos A es libre de torsión, pero $A \cong B/ker(f) \leq T/ker(f)$ por el teorema de la correspondencia, así, como C es cerrada bajo submódulos $B \in C$ y luego $B/ker(f) \in \mathcal{T}_C$, por lo que $0 \neq A \in \mathcal{T}_C \cap \mathcal{F}_C$, lo que es una contradicción. $\square$

1.2. Anillos y módulos max

Uno de los conceptos importantes en este trabajo es el de anillo max. En esta sección recorreremos rápidamente algunos resultados de anillos max con la intensión de resaltar las ideas que nos inspiran preguntas en los anillos semineterianos, es decir, para relacionar los conceptos que aquí aparecen con los que vendrán en el capítulo 2. La exposición esta basada en el segundo capítulo de la tesis [11].

Definición 1.5. *Sea R un anillo. Diremos que R es anillo perfecto izquierdo (resp. derecho) si todo $R-$módulo izquierdo (derecho) tiene cubierta proyectiva. R es perfecto si es izquierdo y derecho.*

Definición 1.6. *Sea R un anillo.*

- *Si I es un ideal de R izquierdo (resp. derecho). Diremos que I es un ideal T-nilpotente izquierdo (resp. derecho) si para cada sucesión $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de I existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r_1 ... r_{n_0} = 0$.*
- *Sea M un R-módulo izquierdo. Diremos que M es un módulo plano si el producto tensorial $\_ \otimes M$ es un funtor exacto.*

Ahora, uno de los resultados más importantes sobre anillos perfectos es el teorema siguiente, conocido como Teorema P de Bass.

Teorema 1.1. *Para un anillo R, son equivalentes:*

1. *R es un anillo perfecto izquierdo.*
2. *$\frac{R}{Rad(R)}$ [3] es un anillo semisimple y todo $R-$módulo izquierdo no nulo contiene un submódulo máximo.*
3. *$\frac{R}{Rad(R)}$ es un anillo semisimple y $Rad(R)$ es un ideal $T-$ nilpotente izquierdo.*
4. *Todo módulo izquierdo que es plano es un módulo proyectivo.*
5. *R satisface la condición de finitud de las cadenas descendentes de ideales principales derechos.*
6. *R no contiene conjuntos ortogonales infinitos de elementos idempotentes y todo módulo derecho no nulo contiene un submódulo mínimo.*

Como consecuencia de estos resultados es que Bass formula la siguiente conjetura:

[3] Dónde Rad(R) se refiere al radical de Jacobson del anillo

Proposición 1.6. *Un anillo es perfecto izquierdo si y solo si no contiene subconjuntos infinitos de elementos ortogonales idempotentes y cada $R-$módulo izquierdo tiene submódulo máximo.*

Es en ese contexto que se inicia el estudio de anillos max.

Definición 1.7. *Sea R un anillo, diremos que R es un anillo max izquierdo (resp. derecho) si todo $R-$módulo izquierdo (resp. derecho) M tiene un submódulo máximo.*

Definición 1.8. *Sea R un anillo y M un $R-$módulo izquierdo (derecho), entonces, M es max izquierdo (derecho) si para cada $0 \neq N \leq M$, existe un submódulo $N' \leq N$ que es máximo en N.*

Similarmente, R es max izquierdo si cada R-módulo izquierdo es max y R es max si es max izquierdo y max derecho. Algunos resultados interesantes para este trabajo son:

Proposición 1.7 ([11], Proposición 1.1.15)**.** *Si D es un dominio entero que no es un campo, entonces D no es un anillo max.*

Proposición 1.8 ([11], Corolario 1.1.18)**.** *Si R es un anillo max izquierdo e I es un ideal de R, entonces R/I es un anillo max izquierdo.*

Proposición 1.9 ([11], Corolario 1.1.19)**.** *Sea A un anillo conmutativo. Si A es max entonces todo ideal primo de A es ideal máximo de A.*

Proposición 1.10 ([11], Proposición 1.1.35)**.** *Si A es un anillo conmutativo max, neteriano, entonces es semiartiniano.*

Proposición 1.11 ([11], Corolario 1.1.38)**.** *Sea A un anillo conmutativo y max, entonces A es neteriano si y solo si A es artiniano.*

Definición 1.9. *Sean R un anillo y M un $R-$módulo, para cada α ordinal, definimos $Zoc_\alpha(M)$ de manera recursiva como sigue:*

- $Zoc_0(M) = 0$.

- *Si* α *es un ordinal, entonces* $Zoc_{\alpha+1}(M) = Zoc(M/Zoc_\alpha(M))$.
- *Si* α *es un ordinal límite, entonces*

$$Zoc_\alpha(M) = \bigcup_{\beta \lneq \alpha} Zoc_\beta(M).$$

Definición 1.10. *Sean* R *un anillo y* M *un* R*-módulo. Al menor ordinal tal que* $Zoc_\alpha(M) = Zoc_{\alpha+1}(M)$ *se le llama Longitud de Loewy del módulo* M*, denotada L(M).*

Proposición 1.12 ([11], Corolario 1.1.43)**.** *Sea* R *un anillo semiartiniano izquierdo. Entonces* R *es anillo max izquierdo si y solo si todo* M *módulo izquierdo tal que* $L(M)$ *es ordinal límite, es módulo max izquierdo.*

Definición 1.11. *Sea* R *un anillo y* M *un* $R-$*módulo, para cada* α *ordinal, definimos* $Rad_\alpha(M)$ *de manera recursiva como sigue:*

- $Rad_0(M) = M$.
- *Si* α *es un ordinal, entonces* $Rad_{\alpha+1}(M) = Rad(Rad_\alpha(M))$.
- *Si* α *es un ordinal límite, entonces*

$$Rad_\alpha(M) = \bigcap_{\beta \lneq \alpha} Rad_\beta(M).$$

Definición 1.12. *Sean* R *un anillo y* M *un* R*-módulo. Al menor ordinal tal que* $Rad_\alpha(M) = Rad_{\alpha+1}(M)$ *se le llama Longitud Dual de Loewy del módulo* M*, denotada LD(M).*

Proposición 1.13 ([11], Proposición 1.1.47)**.** *Sean* R *un anillo y* M *un* R*-módulo.* M *es un módulo max si y solo si* $Rad(M)_{LD(M)} = 0$*. Es decir, la cadena decreciente de radicales se estaciona en cero.*

Definición 1.13. *Sea* R *un anillo, se dice que* R *es un* $V-$*anillo izquierdo si todo módulo izquierdo simple es inyectivo.*

Proposición 1.14 ([11], Corolario 1.1.50)**.** *Todo* $V-$*anillo izquierdo es anillo max izquierdo.*

Definición 1.14. *Sea R un anillo, diremos que R es regular si, para todo $r \in R$ existe $s \in R$ tal que $r = rsr$*

Proposición 1.15 ([11], Corolario 1.1.56)**.** *Sea A es un anillo conmutativo. Si A es regular, entonces es max.*

Teorema 1.2 ([11], Teorema 1.2.4)**.** *Sea R un anillo. Son equivalentes:*

1. *R es un anillo max izquierdo.*
2. *Todo anillo cociente de R es un anillo max.*
3. *El anillo cociente $R/Rad(R)$ es un anillo max izquierdo y $Rad(R)$ es T-nilpotente izquierdo.*
4. *El anillo R contiene un ideal I que es T-nilpotente izquierdo y el anillo cociente R/I es un anillo max.*

Ejemplo 1.1. *Las condiciones de ser anillo max izquierdo y anillo max derecho son mutuamente independientes. Para mostrarlo consideremos F un campo, V un espacio vectorial con una base $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, es decir, de dimensión $|\mathbb{N}|$ y los subespacios*

$$V_n = \bigoplus_{1}^{n} Fv_i.$$

Ahora, si llamamos $S = End(V)$ entonces

$$N = \{\phi \in S | Dim(Im(\phi)) \lneq \infty \text{ y para cada } n \in \mathbb{N},\ \phi(v_{n+1}) \in V_n\}$$

y $A = \{k_{-}(v) = kv | k \in F\}$ son los subconjuntos que necesitamos para crear el anillo perfecto izquierdo que no es max derecho.

Primero notemos que $R = A + N$ es subanillo de S.
Ahora, si $\phi \in N$ y $k \in K$, tenemos que $k_{-} \circ \phi \in N$ y $\phi \circ k_{-} \in N$, luego, como son transformaciones lineales y todo elemento R es de

la forma $k_- + \phi$, con $\phi \in N$ eso es suficiente para que concluir que N es ideal bilateral de R.
Además, de la condición de que $\phi(V_{n+1}) \leq V_n$ tenemos que todos los elementos de N son nilpotentes, por lo tanto $1 = 1 - \phi^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto $(1-\phi)(1-\phi+\phi^2+...+\phi^{n-1}) = 1$, entonces $N \leq Rad(R)$. Ahora bien $R/N = \{f + N | f \in R\}$ es simple, puesto que cada elemento es una unidad. De modo que N es máximo en R y entonces $Rad(R) \leq N$, por lo que $N = Rad(R)$.
Ahora, usaremos el Teorema 1.1 para determinar si R es perfecto y luego max izquierdo o derecho. Mas específicamente usaremos $2) \longleftrightarrow 3)$, por lo que solo falta probar que $Rad(R)$ es T-nilpotente derecho pero no izquierdo.
Sea $\{\gamma_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq N$ una sucesión. Como la imagen de cada γ_i tiene por imagen un espacio de dimensión finita, existe siempre un V_{n_0} tal que $\phi_i(V) \leq V_{n_0}$, así, digamos que $\gamma_1(V) \leq V_n$ entonces

$$\begin{aligned}
\gamma_{n+1} \circ ... \circ \gamma_1(V) &\leq \gamma_{n+1} \circ ... \gamma_2(V_n) \\
&\leq \gamma_{n+1} \circ ... \circ \gamma_3(V_{n-1}) \\
&. \\
&. \\
&. \\
&\leq \gamma_{n+1}(V_{(n-(n-1))}) = \gamma_{n+1}(V_1) = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto N es T-nilpotente derecho. Entonces R es perfecto derecho y así, R es max derecho.
Ahora, consideremos

$$\begin{aligned}
P_n : V &\to V \\
v &\mapsto \sum_{i=1}^{n+1} (\pi_i(v))
\end{aligned}$$

donde π_i es la i-ésima proyección en la base $\{v_i\}$. Y también la transformación lineal γ determinada por

$$\begin{aligned}\gamma^* : \{v_i\}_{i\in N} &\to V\\ v_1 &\mapsto 0\\ v_i &\mapsto v_{i-1}(i \neq 1)\end{aligned}$$

Ahora, consideremos las transformaciones lineales $\phi_n = \sigma \circ P_n$, que nos permiten formar una sucesión $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq N$.
Ahora consideremos

$$\begin{aligned}\phi_1 \circ ... \circ \phi_n(V) &\geq \langle \phi_1 \circ ... \circ \phi_n(v_{n+1})\rangle\\ &= \langle \phi_1 \circ ... \circ \phi_{n-1}(v_n)\rangle\\ &.\\ &.\\ &.\\ &= \langle \phi_1(v_2)\rangle\\ &= \langle v_1\rangle\end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión no se anula al multiplicar de esa manera, en ningún $n \in N$. Así que N no es nilpotente izquierdo. Por lo tanto N no es max izquierdo.
Ahora bien, por el teorema 1.1, inciso 6) tenemos que R es anillo perfecto derecho y esto implica que es semineteriano [4] izquierdo, por lo que, este ejemplo también nos dice que existen anillos semineterianos que no son max.

[4]De hecho 6) nos dice que todo R- módulo izquierdo tiene zoclo distinto de cero, pero eso nos dice que el anillo es semiartiniano izquierdo y por lo tanto seminetariano.

Capítulo 2

Módulos semineterianos

El propósito de este capítulo es presentar los resultados del estudio hecho en el artículo [1] en un contexto no conmutativo. En adelante R será un anillo asociativo (no necesariamente conmutativo) y con unidad. M denotará un R-módulo izquierdo salvo que se indique algo distinto, $N \leq M$ denota que N es submódulo de M y $N \leq^{es} M$ que N es un submódulo esencial de M. Similarmente $I \leq {}_R R$ denotará que I es un ideal izquierdo de R, $I \leq R_R$ denotará que I es un ideal derecho de R y $I \leq R$ que I es un ideal bilateral. Cuando se estudien anillos conmutativos denotaremos A al anillo.

Definición 2.1. *Sea R un anillo, M un R-módulo izquierdo, denotaremos:*

a) $Spec(R) = \{I \leq R | I \text{ es ideal primo } \}$,

b) $Max(R) = \{I \leq R | I \text{ es ideal máximo}\}$.

c) $Max({}_R R) = \{I \leq_R R | I \text{ es ideal izquierdo máximo}\}$.

Para $x \in M$ definimos:

1. *El anulador de x, como* $An_R(x) = \{r \in R | rx = 0\}$.

2. *$An(M) = \{r \in R | rM = 0\}$ será llamado anulador de M.*

3. *$N \leq M$ es un submódulo primo si, para todo $N' \leq N$ con $N' \neq 0$ sucede que $An(N') = An(N)$.*

4. *Un ideal primo P de R se dirá asociado a M si existe $x \in_R M$ tal que $An(x) = P$ y $As(_RM) = \{P \leq R | P$ es primo asociado de $M\}$.*

5. *El soporte de $_RM$, que denotaremos $Sop(_RM)$ es el conjunto de los ideales primos P del anillo tales que PM es distinto de cero.*

Denotaremos $Con(R) = \{P \leq R | R/P$ es neteriano izquierdo y P es primo$\}$.
Escribiremos $M_1 \hookrightarrow M$, si existe $N \leq M$ tal que $M_1 \cong N$, o equivalentemente si existe un monomorfismo $f : M_1 \to M$.

Proposición 2.1. *Sea R un anillo, M un R-módulo, $P \in As(_RM)$ entonces $R/P \hookrightarrow_R M$*

Demostración: Por hipótesis, debe existir $x \in M$ tal que $P = An(x)$. Consideremos el morfismo

$$f : R \to Rx \tag{2.1}$$
$$r \mapsto rx \tag{2.2}$$

es claramente un morfismo de R-módulos suprayectivo y $Ker(f) = An(x) = P$ así, por el Primer Teorema de Isomorfismos $R/P \cong Rx$.
$\square$

2.1. Módulos suficientemente neterianos

En esta sección estudiaremos el concepto de "módulo suficientemente neteriano".

Definición 2.2. I) *Diremos que $_RM$ un R-módulo es suficientemente neteriano izquierdo si cada $N \leq M$, contiene un submódulo neteriano izquierdo no cero.*

II) *R es suficientemente neteriano izquierdo si lo es como R-módulo izquierdo.*

III) *Diremos que $_RM$ es localmente neteriano izquierdo si todos sus submódulos izquierdos finitamente generados son neterianos izquierdos.*

Similarmente se define para el caso derecho y conmutativo.

Ejemplo 2.1. *El módulo $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ no es neteriano y si es suficientemente neteriano.*[1]

Para el desarrollo de otro ejemplo y otras conexiones entre localmente neteriano y suficientemente neteriano usaremos el siguiente lema que se encuentra en [[2] Lema 6.6.6].

Lema 2.1. *Sean R un anillo y Γ un conjunto de submódulos de un R-módulo izquierdo M. Entonces, entre todos los subconjuntos $\Lambda \subset \Gamma$ tales que*

$$\sum_{N\in\Lambda} N = \bigoplus_{N\in\Lambda} N$$

hay un conjunto máximo Λ_0.

Corolario 2.1. *Existe $\mathcal{N}_M \leq R_M$ tal que $\mathcal{N}_M = \bigoplus_{i\in I} N_i$ tal que $N_i \leq M$ es neteriano para cada $i \in I$ y máximo con esa propiedad (es suma directa de submódulos neterianos).*

Ejemplo 2.2. *Para cada R-módulo izquierdo $\mathcal{N}_M$, determinado en el Corolario 2.1, es localmente neteriano izquierdo.*
Para ver esto consideremos $B = \{m_i \in \mathcal{N}_M | 1 \leq i \leq n\}$, luego $K = \langle B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle m_i\rangle$, pero cada m_i se puede expresar de la forma $m_i = \sum_{j\in I'} m'_j$ con $I' \subset I$ finito y cada $m'_j \in N_j$, como N_j es neteriano

[1] ver A.2.

$\langle m_j \rangle$ es neteriano para cada $j \in I'$, además la suma es directa pues cada uno es elemento de un solo N_j y la suma de los N_j es directa. Luego la suma directa finita de neterianos es neteriano, así $\langle m_i \rangle$ es submódulo de un neteriano y entonces neteriano. Finalmente, la suma finita de neterianos es neteriano porque es cociente de la suma directa finita de neterianos. De esta forma K es neteriano izquierdo.

Ejemplo 2.3. *Si R es un anillo neteriano izquierdo, cada R-módulo ${}_RM$, es localmente neteriano izquierdo.*

Ejemplo 2.4. *Tomemos F un campo y $T = \prod_{i=1}^{\infty} F_i$ dónde $F_i = F$ para cada $0 \leq i$. Tomemos el subanillo generado por $R = \{\oplus_i^{\infty} F_i, 1\}$, este anillo tiene el ideal $\oplus_i^{\infty} F_i$ que no es finitamente generado por lo que R no es neteriano y notemos que para cada $f \in R - \{1\}$, el ideal generado por f, fR es neteriano. Por lo que R es suficientementeneteriano pero no es localmente neteriano.*

Ejemplo 2.5. *Consideremos $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{Z}-$módulo. Ahora, consideremos la extensión trivial $\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Q}$, definida en [A.1]. Es claro que $M = \mathbb{Q}$ es localmente neteriano y $An_{\mathbb{Z}}(M) = 0$. Por lo que M y $An(M)$ son suficientemente neterianos. Entonces, usando [2.11] $\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Q}$ es suficientemente neteriano.*

Denotemos por $Net(R)$, $LNet(R)$ y $SufNet(R)$ a la clase de R-módulos neterianos, localmente neterianos y suficientemente neterianos respectivamente.

Proposición 2.2. *Sea R un anillo. Entonces*

$$Net(R) \subset LNet(R) \subset SufNet(R)$$

Demostración: Debido a que $Net(R)$ es cerrada bajo submódulos, $Net(R) \subseteq LNet(R)$ y $Net(R) \subset SufNet(R)$. Finalmente Si $M \in LNet(R)$ cada $0 \neq N \leq M$ contiene submódulos finitamente generados no cero, así tiene submódulos neterianos no cero, por lo que $LNet(R) \subseteq SufNet(R)$. $\square$

Proposición 2.3. *Sean R un anillo y M un R-módulo. Los siguientes enunciados se cumplen:*

1. *Si M es localmente neteriano izquierdo, entonces para cada $N \leq M$, N y M/N son localmente neterianos izquierdos.*

2. *Si $M = \oplus_{i \in I} M_i$, M es localmente neteriano izquierdo si y solo si cada M_i es localmente neteriano izquierdo.*

3. *$LN(M) = \sum_{N \in Net(M)} N$, con $Net(M)$ la clase de los submódulos neterianos izquierdos de M. Es el mayor submódulo de M localmente neteriano.*

Demostración:
1) Sea M un $R-$módulo localmente neteriano izquierdo y $N \leq M$. Si $K \leq N$ es finitamente generado, entonces $K \leq M$ y finitamente generado luego K es neteriano izquierdo. Por lo que N es localmente neteriano izquierdo.
Ahora, conideremos culquier $K/N \leq M/N$ finitamente generado, digamos por $\bar{k} = \{\bar{k_1}, ..., \bar{k_n}\}$ y tomemos un conjunto de representantes $k = \{k_1, ..., k_n\} \subset M$. Llamemos a $K' = \langle k \rangle$, el generado por k. Es un submódulo de M finitamente generado, por lo tanto neteriano y $K = K' + N$, esto implica

$$K/N = (K' + N)/N = \nu_{K'}(K'),$$

con $\nu : M \to M/N$ el morfismo canónico y $\nu_{K'} : K' \longrightarrow \nu(K')$. Como $\nu_{K'}$ es suprayectivo y K' neteriano $\nu_{k'}(K')$ es neteriano, por lo tanto K/N es neteriano.
2) $\Rightarrow$] Supongamos que M es localmente neteriano izquierdo, entonces N es localmente neteriano izquierdo para cada submódulo de M, en particular M_i para cada $i \in I$.
$\Leftarrow$] Sea $K \leq \oplus_{i \in I} M_i$, con K finitamente generado, digamos por $k = \{k_1, ..., k_m\}$. Notemos que

$$\langle k_j \rangle \hookrightarrow \oplus_{l \in Sop(k_j)} \langle k_j(l) \rangle$$

para cada $j \in \{1, ..., m\}$. Pero $k_j(l) \in M_l$ por lo que $\langle k_j(i)\rangle$ es neteriano, entonces

$$\oplus_{l \in Sop(k_j)} \langle k_j(l)\rangle$$

es neteriano porque el soporte de k_j es finito y la suma directa finita de módulos neterianos es neteriano. Así que $\langle k_j\rangle$ al ser isomorfo a un submódulo de un módulo neteriano es neteriano. En consecuencia $\oplus_{i=1}^{m}\langle k_i\rangle$ es una suma directa finita de módulos neterianos y por esa razón neteriano. Finalmente

$$\begin{aligned} f : \oplus_{i=1}^{m}\langle k_i\rangle &\longrightarrow K \\ (r_1k_1, ..., r_mk_m) &\longmapsto \sum_{i=1}^{m} r_ik_i \end{aligned}$$

es suprayectiva y por lo tanto K es neteriano.
3)Como $\oplus_{N \in Net(M)} N$ es suma directa de neterianos es también suma directa de localmente neterianos, por lo que, de 2) se sigue que es localmente neteriano. Además, el morfismo

$$\begin{aligned} f : \oplus_{N \in Net(M)} N &\longrightarrow \sum_{N \in Net(M)} N \\ \alpha &\longmapsto \sum_{i \in sop(\alpha)} \alpha(i) \end{aligned}$$

es suprayectivo, por lo que de 1) se sigue que $\sum_{N \in Net(M)} N$ es localmente neteriano. $\square$

Proposición 2.4. *Sean R un anillo y M un R-módulo izquierdo. Entonces $\mathcal{N}_M \leq^{es} LN(M)$*

Demostración.
Como vimos en el Ejemplo (2.2) $\mathcal{N}_M$ es localmente neteriano, por lo tanto $\mathcal{N} \leq LN(M)$. Ahora, sea $0 \neq K \leq LN(M)$, si $K \cap \mathcal{N} = 0$ entonces $K' = \langle k\rangle$ con $0 \neq k \in K$, es neteriano y cumple $K' \cap N = 0$, lo que contradice la condición de maximalidad de $\mathcal{N}$. Por lo tanto $\mathcal{N} \cap K \neq 0$. $\square$

Ejemplo 2.6. *Si $_RM$ es un módulo neteriano, su cápsula inyectiva $E(M)$ es suficientemente neteriano.*

Definición 2.3. *Sea R un anillo, diremos que un R-módulo M es finitamente cogenerado si*

$$E(M) = E(S_1) \oplus ... \oplus E(S_n)$$

con S_i un módulo simple para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Ejemplo 2.7. *Si $_RM$, un R-módulo es tal que $Zoc(M) \leq^{es} M$, entonces cada submódulo N, no cero, contiene un submódulo simple no trivial. Por lo tanto, M es suficientemente neteriano. En particular, los módulos semiartinianos y los finitamente cogenerados son suficientemente neterianos.*

Esta noción es la forma de dualizar la de finitamente generado y ahora nos permitirá comparar el neteriano con suficientemnte neteriano, para eso, el lema siguiente y la consecuente proposición cuya demostración podemos encontrar en [10].

Lema 2.2. *Sea R un anillo entonces el R-módulo M es finitamente cogenerado si y solo si se cumplen las siguientes 2 condiciones*

1. *$Zoc(M) \leq^{es} M$ y*
2. *$Zoc(M)$ es finitamente generado.*

Proposición 2.5. *Un R-módulo es artiniano izquierdo si y solo si cada módulo cociente de $_RM$ es finitamente cogenerado.*

Ahora si, la siguiente proposición es consecuencia de estos resultados.

Proposición 2.6. *Las siguientes proposiciones son equivalentes para un anillo R:*

I) *Cada R-módulo suficientemente neteriano izquierdo tiene zoclo esencial.*

II) *Cada R-módulo neteriano izquierdo es artiniano izquierdo.*

Demostración.
$II) \Rightarrow I)$] Sea M un R-módulo suficientemente neteriano y $N \leq M$ no cero. Entonces existe $K \leq N$, neteriano. Por lo tanto K es artiniano, así K tiene submódulos simples, por lo tanto $N \cap Zoc(M) \neq 0$. Es decir $Zoc(M) \leq^{es} M$.
$I) \Rightarrow II)$]
Sea M un R-módulo neteriano, entonces cada módulo cociente es neteriano, de ahí, $Zoc(M/N) \leq^{es} M/N$ y $Zoc(M/N)$ es finitamente generado, por lo tanto M/N es finitamente cogenerado y por 2.5 M es artiniano izquierdo. □

En la siguiente proposición se caracterizan a los dominios enteros que son suficientemente neterianos.

Proposición 2.7. *Sea R un anillo que contiene un ideal I tal que ${}_RAn(x) = 0$ para todo $x \in I$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

I) *R es suficientemente neteriano izquierdo.*

II) *R es neteriano izquierdo.*

Demostración.
$I) \Rightarrow II)$
Sea $x \in I$, $x \neq 0$. Como R es suficientemente neteriano izquierdo, Rx contiene un submódulo neteriano distinto de cero, digamos L. Sea $y \in L$, no cero, Ry es neteriano por ser submódulo de L. Finalmente, $Ry \cong R$ con el isomorfismo

$$\begin{aligned} f : R &\to Ry \\ r &\mapsto ry \end{aligned}$$

sin duda un morfismo inyectivo porque el núcleo de f coincide con el anulador de y con $y \in I$ y claramente suprayectiva. Por lo que R

es neteriano.
$II) \Rightarrow I)$
Todo neteriano izquierdo es suficientemente neteriano izquierdo. □

En el siguiente resultado, se estudia la cerradura de la clase de módulos suficientemente neterianos bajo cápsulas inyectivas, submódulos y sumas directas.

Proposición 2.8. *Sea N un submódulo de un R-módulo izquierdo M.*

(I) *Si M es suficientemente neteriano izq., entonces así lo es N. Si $N \leq^{es} M$ entonces se cumple que N suficientemente neteriano izquierdo si y solo si M lo es.*

(II) *Si M es suficientemente neteriano izquierdo, entonces su cápsula inyectiva $E(M)$ también lo es.*

(III) *Si N y M/N son suficientemente neterianos, entonces M lo es.*

(IV) *Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos. Entonces, la suma directa $\oplus_{i\in I} M_i$, resulta en un módulo suficientemente neteriano si y solo si M_i lo es, para cada $i \in I$.*

Demostración.

(I) Si M es suficientemente neteriano izq. es claro que N lo es. Ahora, si N es suficientemente neteriano y $N \leq^{es} M$ entonces dado $0 \neq K \leq M$, entonces $0 \neq K \cap N \leq N$ así, contiene un submódulo neteriano no cero, digamos K', por lo que $K' \leq K$ no cero y neteriano, es decir, M es suficientemente neteriano izquierdo.

(II) Es consecuencia del inciso anterior y la definición de $E(M)$.

(iii) Sea $K \leq M$ distinto de cero, si $K \cap N \neq 0$ entonces K tiene un submódulo neterinano distinto de cero. En el otro caso $K \oplus N/N \leq M/N$ tiene un submódulo neteriano distinto de cero, digamos L/N y $K \oplus N/N \cong K$ porque la suma es directa, así $L/N \hookrightarrow K$, es decir es isomorfo a un submódulo de K, neteriano distinto de cero y por lo tanto M es suficientemente neteriano izquierdo.

(iv) $\Rightarrow]$ Si $\oplus_{i \in I} M_i$ es suficientemente neteriano, cada submódulo de él lo es, así M_i es suficientemente neteriano para cada $i \in I$.
$\Leftarrow]$ Si M_i es suficientemente neteriano para cada $i \in I$. Probemos que las sumas directas finitas de suficientemente neterianos izquierdos es suficientemente neteriano izquierdo. Sea $K = \oplus_{i \in k} M_i$, con k un conjunto finito, por inducción sobre el numero de elementos de k:
Si es 1, se cumple por hipótesis. Supongamos que se cumple para cada subconjunto de tamaño n y k tiene n+1 elementos. Entonces $K = \oplus_{i \in k} M_i$, luego tendremos que $K' = \oplus_{i \in k \setminus \{j\}} M_i$, con $j \in k$, es suficientemente neteriano izquierdo y además $K/K' \cong M_j$ es también suficientemente neteriano izquierdo, por lo tanto, por el inciso III), K es suficientemente neteriano izquierdo.
Ahora, para el caso en que la suma es sobre I, con I cualquier conjunto, consideremos $0 \neq N \leq \oplus_{i \in I} M_i$ y $\alpha \in N$ no cero, entonces $\langle \alpha \rangle \hookrightarrow \oplus_{i \in soport(\alpha)} \langle \alpha(i) \rangle$[2] pero cada $\langle \alpha(i) \rangle \leq M_i$ es suficientemente neteriano izquierdo, y la suma directa finita de ellos es suficientemente neteriano izquierdo, luego $\langle \alpha \rangle$ es suficientemente neteriano izquierdo y así, existe $K \neq 0$ neteriano que cumple $K \leq \langle \alpha \rangle \leq N$, por lo tanto M es suficientemente neteriano izquierdo. □

Ahora, la clase de A-módulos suficientemente neterianos no es, en general, cerrada bajo cocientes ni productos, eso los podemos

[2] Aquí estamos considerando $Soport(\alpha) = \{i \in I | \alpha(i) \neq 0\}$ conjunto que es finito de la definición de $\oplus_{i \in I} M_i$.

ver en los siguientes ejemplos

Ejemplo 2.8. *Sea A un dominio entero que no es neteriano (por ejemplo $A = K[x_1, X_2...]$ con K un campo) y sea $I \leq A$ un ideal máximo de A. Consideremos el anillo $A \ltimes E(A/I)$. Como A/I es simple, es neteriano, luego $M = E(A/I)$ es suficientemente neteriano, por 2.8 y $Zoc(M) \leq^{es} M$, pues es la cápsula inyectiva de un simple. Ahora, por ([13],pag 47,Corolario 1.), An(M)=0 así que $Zoc(An(M)) = An(M) = 0$. Luego $Zoc(A \ltimes E(A/I)) \leq^{es} (A \ltimes E(A/I))$ por [A.3], por lo tanto $A \ltimes E(A/I)$ es suficientemente neteriano pero $A \cong \frac{A \ltimes E(A/I)}{0 \ltimes E(A/I)}$, no es suficientemente neteriano (pues estaría en contradicción con 2.7).*

Ejemplo 2.9. *Sea F un campo y $A = F[X_1, X_2...]$. Para cada $n \geq 1$, consideremos el ideal $I_n = \sum_{i \geq n+1} AX_i$. Notemos que $A/I_n \cong F[X_1, ..., X_n]$ es un A-módulo neteriano. Luego, el morfismo*

$$f : A \to \prod_{n \geq 1} A/I_n \tag{2.3}$$

$$r \mapsto (r + I_n)_{n \geq 1} \tag{2.4}$$

tiene por kernel la intersección de los I_n, que es cero, por lo tanto es inyectivo. Esto es

$$A \hookrightarrow \prod_{n \geq 1} A/I_n.$$

De dónde, si

$$\prod_{n \geq 1} A/I_n$$

es suficientemente neteriano así lo sería A, pero al ser un dominio entero tendríamos que es neteriano, lo que es una contradicción.

En contraposición, el producto de anillos suficientemente neterianos si es suficientemente neteriano.

Proposición 2.9. *Sea $\{R_i\}_{i \in I}$ una familia de anillos y $R = \Pi_{i \in I} R_i$. Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes:*

I) *El anillo R es suficientemente neteriano izquierdo*

II) *El anillo R_i es suficientemente neteriano izquierdo para cada $i \in I$*

Demostración:
$I) \Rightarrow II)$
Si R es un anillo suficientemente neteriano izquierdo, cada ideal lo es, entonces, tomemos, para $x_i \in R_i$, la función $\bar{x_i}$ que asigna a cada $j \neq i$ el cero de R_j y a i le asigna x_i. Es claro que $\bar{x_i} \in R$ y $K_i = \{\bar{x_i} | x_i \in R_i\} \leq R$ es un ideal, pero aún más es un subanillo isomorfo, como anillo a R_i y K_i es suficientemente neteriano por ser ideal de R y como $RK_i = K_iK_i$, (porque es una operación "coordenada a coordenada") tenemos que K_i es suficientemente neteriano como K_i-módulo, es decir, $R_i \cong K_i$ es un anillo suficientemente neteriano izquierdo.
$I) \Leftarrow II)$
Partiendo de que cada R_i es un anillo suficientemente neteriano izquierdo y tenemos que $K_i \leq R$ es semineteriano como R-módulo izquierdo, y por la Proposición 2.8 inciso IV) tenemos que $\oplus_{i \in I} K_i$ es suficientemente neteriano como R-módulo izquierdo.
Finalmente, notemos que $\oplus_{i \in I} K_i = \oplus_{i \in I} R_i \leq^{es} R$ y $\oplus_{i \in I} K_i$ es suficientemente neteriano izquierdo como R-módulo por lo que, de la Proposición 2.8 se sigue que R es suficientemente neteriano. $\square$

Ahora, podemos caracterizar a los módulos suficientemente neterianos como aquellos que son extensión esencial de un modulo localmente neteriano.

Proposición 2.10. *Sea M un R-módulo izquierdo, las siguientes propiedades son equivalentes:*

I) *M es suficientemente neteriano*

II) *$Ln(M) \leq^{es} M$*

III) $\mathcal{N}_M \leq^{es} M$

Demostración:
$I) \Longleftrightarrow II)]$
Es claro que si $Ln(M) \leq^{es} M$ entonces M es suficientemente neteriano. Para el recíproco tomemos $0 \neq N \leq M$, tal que $N \cap LN(M) = 0$, entonces para cada $x \in N$, Rx no es neteriano, por lo que N no puede ser suficientemente neteriano. Lo que sería una contradicción. Así $N \cap LN(M) \neq 0$ y por lo tanto $LN(M) \leq^{es} M$.
$II) \Rightarrow III)]$
Por la Proposición (2.4) tenemos que $\mathcal{N}_M \leq^{es} LN(M) \leq^{es} M$.
$III) \Rightarrow II)$
Por la Proposición (2.4) tenemos que $\mathcal{N}_M \leq Ln(M) \leq M$ y $\mathcal{N}_M \leq^{es} M$. Por lo que, si $0 \neq K \leq M$ entonces $0 \neq \mathcal{N}_M \cap N \leq Ln(M) \cap K$, así $Ln(M) \leq^{es} M$. □

Proposición 2.11. *Sea A un anillo conmutativo, entonces son equivalentes para un $A-$módulo M:*

1. *El anillo $A \ltimes M$ es suficientemente neteriano.*
2. *Los A-módulos $An(M)$ y M son suficientemente neterianos.*
3. *El A módulo $M \oplus An(M)$ es suficientemente neteriano.*

Demostración. $1 \Rightarrow 2]$
La magia de la idealización aparece inmediatamente porque $M \cong 0 \ltimes M \leq A \ltimes M$, como ser suficientemente neteriano es cerrado bajo submódulos tenemos que M es suficientemente neteriano. Similarmente $An(M) \cong An(M) \ltimes 0 \leq A \ltimes M$.
$1 \Leftarrow 2]$
Sean $H = \{I \leq An(M) | I \text{ es neteriano}\}$ y $w = \{N \leq M | N \text{ es neteriano}\}$ luego consideremos $Ln(An(M)) \ltimes Ln(M))$ cumple ser localmente neteriano en $A \ltimes M$, además, por [2.10], $Ln(An(M)) \leq^{es} An(M)$ y $Ln(M) \leq^{es} M$.
Entonces, por la Proposición[A.1.1] tenemos que

$$Ln(An(M)) \ltimes Ln(M) \leq^{es} R \ltimes M$$

luego, por el Teorema [2.10] tenemos que $A \ltimes M$ es suficientemente neteriano.
$2 \Longleftrightarrow 3]$ del Teorema [2.8] inciso IV. $\square$

Corolario 2.2. *Sean A un anillo conmutativo y M un $A-$módulo finitamente generado entonces $A \ltimes M$ es suficientemente neteriano si y solo si A, M lo son.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Considerando la Proposición 2.8, tenemos:
$M \cong 0 \ltimes M \leq A \ltimes M$ y similarmente $Ann(M) \ltimes 0 \leq A \ltimes M$, son ideales del anillo, se tiene que son submódulos de un módulo suficientemente neteriano y por lo tanto suficientemente neterianos, ahora, si $\{x_1, ..., x_n\} \subset M$ tal que $\langle x_1, ...x_n \rangle$ genera a M consideremos el siguiente morfismo de $A-$módulos:

$$\begin{aligned} f : A/An(M) &\to M^n \\ r + An(M) &\mapsto (rx_1, rx_2, ..., rx_n) \end{aligned}$$

notemos que $f(r) = 0$ si y solo si $r \in An(M)$ esto es $r \in 0 + An(M)$ por lo que f es inyectivo es decir

$$A/An(M) \hookrightarrow M^n$$

pero el producto finito de módulos suficientemente neterianos es suficientemente neteriano, entonces $A/An(M)$ es submódulo de un suficientemente neteriano así, suficientemente neteriano. Finalmente A es extensión de $An(M)$ y $A/An(M)$ por lo tanto es suficientemente neteriano.
$\Leftarrow]$ Como $An(M) \leq A$, por la Proposición 2.8, es suficientemente neteriano e inmediato de la Proposición 2.11 $A \ltimes M$ es suficientemente neteriano. $\square$

Ahora, consideremos un tipo particular de módulos. Sea R un anillo y M un $R-$módulo. Denotemos $R[x]$ al anillo de polinomios con coeficientes en R.
Ahora, llamaremos

$$M[x] = \{m_0 + m_1x^1 + ... + m_nx^n | m_i \in M, 0 \leq i \leq n \in \mathbb{Z}\}.$$

Por simplicidad utilizaremos $m[x]$ para denotar un elemento de $M[x]$, a la parte en M de los términos $m_i x^i$ $(0 \leq i \leq n)$ que lo conforman (es decir los m_i) los llamaremos coeficientes i-ésimos y llamaremos grado de $m[x]$ al máximo i tal que el coeficiente $i-$ésimo no es cero. Es un grupo abeliano con la suma "término a término" es decir:

$$(m_0 + m_1 x^1 + ... + m_n x^n) + (m'_0 + m_1 x^1 + ... + m'_r x^r) =$$
$$(m_0 + m'_0) + (m_1 + m'_1)x + ... + (m_n + m'_n)x^n + ... + m'_r x^r$$

cuando $n \lneq r$. El neutro es 0 (cero en cada coeficiente). La conmutatividad y asociatividad se siguen de que M es un grupo abeliano. Luego, $M[x]$ es un R módulo de forma natural:

$$R \times M[x] \to M[x] \tag{2.5}$$
$$(r, m0 + ... + m_n x^n) \mapsto rm_0 + ... + rm_n x^n \tag{2.6}$$

dónde claramente $1m[x] = m[x]$ y $0m[x] = 0$, $(r+r')m[x] = rm[x] + r'm[x]$ y $r(m[x] + m'[x]) = rm[x] + rm'[x]$. Luego, esto se puede extender para que $M[x]$ sea un $R[x]$-módulo. Para ello basta definir la operación en polinomios con un solo término distinto de cero como $r_j x^j (m_i x^i) = r_j m_i x^{j+i}$. Dónde claramente $r_i m_k \in M$ y así $r_i m_k x^{i+k} \in M[x]$. Luego si el grado de $r[x]$ es n y el grado de $m[x]$ es k, entonces definimos

$$r[x]m[x] = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} r_j x^j m_i x^i$$

recordando que la suma se realiza finalmente término a término.

Lema 2.3. *Sea R un anillo, M un R-módulo izquierdo y $N \leq M$. Entonces son equivalentes:*

1. $N \leq^{es} M$.

2. $N[X] \leq^{es} M[x]$ *, como* $R[x]-$*módulos.*

Demostración.
$1 \Rightarrow 2]$
Sea $m(x) = m_0 + m_1 x + ... m_n x^n \in M[x]$ con $m_n \neq 0$, esto es f es de grado n. Demostraremos por inducción sobre el grado de f que existe $t \in R$ tal que $0 \neq tm(x) \in N[x]$, esto es implica que para todo submódulo K no cero de $M[x]$, se cumple que $N[x] \cap K \neq 0$. Para eso, tomemos el paso base $n = 0$, entonces $m_n \in M$, así, existe $t \in R$ tal que $tm_n \in N[x]$. Ahora supongamos que se cumple para todo $g \in M[x]$ de grado $n-1$. Podemos escribir $m(x) = g(x) + m_n x^n$, por hipótesis general tenemos que $tm_n \in N$ para algún $t \in R$ y por hipótesis inductiva, existe $t' \in R$ tal que $t'tg \in N[x]$, así $t'tf \in N[x]$.
$1 \Leftarrow 2]$
Sea $0 \neq K \leq M$, entonces $0 \neq K[x] \leq M[x]$ por lo que $K[x] \cap N[x] \neq 0$ entonces existe $0 \neq f \in K[x] \cap N[x]$ de grado n, esto si y solo si $0 \neq f_n \in K \cap N$ por lo tanto $K \cap N \neq 0$. $\square$
Para este tipo de módulos se tiene lo siguiente.

Teorema 2.1. *Sea* R *un anillo y* M *un* $R-$*módulo. Si* M *es neteriano entonces* $M[x]$ *es un* $R[x]-$*módulo neteriano.*

Cuya demostración se encuentra en ([8], 2.15.7). Ahora, podemos replicarlo para módulos suficientemente neterianos.

Teorema 2.2. *Sean* R *un anillo y* M *un* $R-$*módulo izquierdo. Si* M *es suficientemente neteriano izquierdo entonces* $M[x]$ *es suficientemente neteriano izquierdo como* $R[x]-$*módulo.*

Demostración.
Sea $N \leq M$ un submódulo neteriano de M, por el teorema anterior $N[x]$ es submódulo neteriano de $M[x]$, luego

$$\sum_{N \in Net(M)} N[x] \leq Ln(M[x])$$

por lo tanto $Ln(M)[x] \leq Ln(M[x])$ y como M es suficientemente neteriano, de la Proposición 2.8 tenemos que $Ln(M) \leq^{es} M$ por lo

que, del Lema 2.3, tenemos que $Ln(M[x]) \leq^{es} M[X]$, por lo tanto $M[x]$ es suficientemente neteriano.
$\square$

Corolario 2.3. *Sean R un anillo suficientemente neteriano e I un conjunto de índices finito entonces $R[x_i]_{i\in I}$ es suficientemente neteriano.*

Definición 2.4. *Sean R un anillo y M un R-módulo izquierdo. Diremos que M es uniforme izquierdo si para cada N, K submódulos de M, se cumple que $N \cap K \neq 0$. Esto es equivalente a que $N \leq^{es} M$ para cada submódulo de M.*

Un resultado conocido es el siguiente:

Proposición 2.12. *Si R es un anillo neteriano izquierdo entonces cada R-módulo izquierdo M contiene un submódulo uniforme no nulo.*

Aún más, notemos que basta que el anillo sea suficientemente neteriano izquierdo.

Proposición 2.13. *Si R es un anillo. Entonces, todo $R-$módulo izquierdo M suficientemente neteriano tiene un submódulo uniforme no nulo.*

Demostración.
Sea M un R-módulo izquierdo y $0 \neq K \lneq M$ un submódulo neteriano. Luego sea $X = \{N \lneq K | N$ es suplemento de algún $U \leq K\}$, tiene elemento máximo, digamos $X_0 \lneq K$. Digamos que U_0 es aquel tal que X_0 es su suplemento. Notemos que $U_0 \neq 0$ puesto que $X_0 \lneq K$. Veamos que U_0 es uniforme:
Sea L, L' submódulos de U_0, si $L \cap L' = 0$ entonces $X_0 \oplus L \cap L' = 0$, de la condición de maximalidad de X_0 se tiene que $L = 0$ ó $L' = 0$, por lo tanto U_0 es uniforme. $\square$

2.2. Anillos y módulos semineterianos

Hemos visto que $SufNet(R)$ es cerrada bajo submódulos, extensiones y sumas directas, 2.8, pero no por módulos cociente. Entonces, en la siguiente parte se estudia la clase de torsión hereditaria más grande dentro de $SufNet(R)$.

Definición 2.5. *Sea M un R-módulo izquierdo. Diremos que M es semineteriano izquierdo si para cada N, submódulo propio de M, M/N tiene un submódulo neteriano y distinto de cero. Un anillo es semineteriano izquierdo si lo es como R-módulo izquierdo.*

Notemos que, si en vez de neteriano se sustituye suficientemente neteriano o localmente neteriano la definición se mantiene equivalente, puesto que tendríamos de igual manera un submódulo neteriano no cero.

Definición 2.6. *Sea M un R-módulo zquierdo.*

- *Diremos que M es localmente artiniano si cada K submódulo izquierdo finitamente generado de M, K es artiniano izquierdo.*

- *Diremos que M es semiartiniano izquierdo si para cada N, submódulo izquierdo propio de M, M/N tiene un submódulo izquierdo simple distinto de cero.*

Denotemos $SNet(R)$ a la clase de R-módulos izquierdos semineterianos, $LArt(R)$ y $SArt(R)$ a la clase de R-módulos localmente artinianos y semiartinianos izquierdos respectivamente.
De manera similar al caso de semineteriano, se puede reformular que M es semiartiniano si para cada N, submódulo propio de M, M/N tiene un submódulo localmente artiniano, y se obtiene una definición equivalente.

Proposición 2.14. *Sea R un anillo. Lo siguiente se cumple:*

1. *$SNet(R)$ es la clase de torsión hereditaria más pequeña que contiene a la clase $LNet$.*

2. *$SArt(R)$ es la clase de torsión más pequeña que contiene a la clase $LArt(R)$. Aún más, ambas clases de torsión son hereditarias.*

Demostración.

1. Por la proposición [2.3,1], $LNet$ es cerrada bajo cocientes, submódulos y por definición es cerrada bajo isomorfismos. Así, usando [1.4] tenemos que $SNet$ es la clase de torsión generada por $LNet$, aún más, por [1.5] tenemos que es hereditaria.

2. Bajos los mismo argumentos, usando que $LArt$ también es cerrado bajo submódulos y módulos cociente.

□

Proposición 2.15. *Sea R un anillo, lo siguiente se cumple:*

$$Net \subseteq LNet \subseteq SNet \subseteq SufNet$$

Demostración. De la proposición [2.2] tenemos que $Net \subseteq LNet \subseteq Sufnet$. De la proposición [2.14] tenemos que la clase se $SNet$ es una clase de torsión que contiene a $LNet$ ahora, si $M \in SNet$ entonces para todo cociente distinto de cero existe un submódulo neteriano distinto de cero, por lo que $M = M/0$ tiene submódulo neteriano, luego, al ser una clase de torsión hereditaria tenemos que para cada $N \leq M$ se cumple que N tiene un submódulo neteriano no cero. Por lo tanto $M \in SufNet$. □

Definición 2.7. *Sea A un anillo conmutativo.*

- *Diremos que un anillo A es cero dimensional si cada ideal primo I es un ideal máximo.*

- *Diremos que M, un A módulo es cero dimensional, $dim(M) = 0$, si $Sop(M) \subseteq Max(A)$.*

Proposición 2.16. *Los siguientes son equivalentes para un anillo A y M un A-módulo:*

I) *M es semiartiniano*

II) *M es semineteriano y $dim(M) = 0$*

Demostración.
$I) \Rightarrow II)]$
Sea M un A-módulo semiartiniano, entonces, para cada $N \leq M$ se cumple que M/N tiene zoclo distinto de cero, es decir, existe un submódulo simple $K \leq M/N$, por lo que M es semineteriano y de [[5], Proposición 2.9] se tiene que $dim(M) = 0$.
$II) \Rightarrow I)]$
Sea M un A-módulo semineteriano con $dim(M) = 0$. Si $N \leq M$ se cumple que M/N tiene un submódulo K neteriano, pero si M es cero dimensional entonces M/N también lo es y luego $dim(K) = 0$ así que, por [[6], Proposición 2.6] K es artiniano, por lo tanto tiene un submódulo simple y así M/N es semiartiniano. □

Ahora, consideremos los anillos siguientes

Definición 2.8. *Sea R un anillo. Diremos que R es NA-anillo, si M es R-módulo neteriano izquierdo entonces M es R-modulo artiniano izquierdo.*

Proposición 2.17. *Sea A un anillo conmutativo. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *Todo A-módulo semineteriano es semiartiniano ($SNet = SArt$).*

2. *Todo A-módulo suficientemente neteriano tiene zoclo esencial.*

3. *A es NA-anillo.*

Demostración.
2 $\Longleftrightarrow$ 3] Proposición [2.6].
1 $\Rightarrow$ 3] Sea M un $A-$módulo neteriano, entonces es semineteriano, por suposición, es semiartiniano, luego, de la Proposición [2.16], tenemos que $Dim(M) = 0$ entonces, de [[6], Proposición 2.6] tenemos que M es artiniano, por lo que A es NA-anillo.
2 $\Rightarrow$ 1] Sea M semineteriano, entonces M/N tiene un submódulo neteriano distinto de cero, y si $K/N \leq M/N$ entonces $K \leq M$ es semineteriano y por lo tanto K/N tiene un submódulo neteriano distinto de cero, así tenemos que M/N es suficientemente neteriano, luego M/N tiene zoclo distinto de cero. Por lo tanto M es semiartiniano. □

En general, si M es localmente neteriano, una suma directa infinita de copias de él es aún semineteriano, y al ser la clase de módulos semineterianos de torsión y hereditaria, todos los submódulos y cocientes de este tipo de módulos son también semineterianos, por lo que podemos pensar que los módulos semineterianos son algo así como sumas directas de módulos localmente neterianos, sus submódulos y los cocientes de estas. Para formalizar esta afirmación necesitamos el concepto de $M-$generado y $M-$subgenerado.

Definición 2.9. *Sean R un anillo y M, N $R-$módulos.*

1. *Diremos que N es $M-$generado si existe morfismo $f : \oplus_{i \in I} M_i \to N$, suprayectivo con $M_i = M$ para cada $i \in I$ e I un conjunto.*

2. *Diremos que K es M-subgenerado si $K \leq N$ y N es $M-$generado.*

3. *Llamaremos $\sigma[M]$ a la subcategoría plena de $R-Mod$ cuyos objetos son todos los módulos M-subgenerados*

Proposición 2.18. *Sea R un anillo, entonces los siguientes son equivalente para un $R-$módulo M distinto de cero:*

I) *M es semineteriano.*

II) *N es semineteriano para cada $N \in \sigma[M]$.*

III) *Para cada $0 \neq N \in \sigma[M]$, N contienen un submódulo neteriano no cero.*

IV) *Cada módulo cociente de M es suficientemente neteriano.*

V) *Para cada $N \in \sigma[M]$, $Ln(N) \leq^{es} N$.*

Demostración.
$I) \Rightarrow II)]$
De 2.14 tenemos que la clase de semineterianos es de torsión y es hereditaria, luego cerrada bajo sumas directas, cociente y submódulos, por lo tanto si N es M-subgenerado es semineteriano.
$II) \Rightarrow III)$
es inmediato de que todo modulo semineteriano es suficientemente neteriano (Proposición 2.15).
$III) \Rightarrow IV)$
Cada módulo cociente de M, digamos M/K cumple que $M/K \in \sigma[M]$ por lo tanto contiene un submódulo netriano no cero. Luego, cada $N \leq M/K$ sigue cumpliendo $N \in \sigma[M]$ por lo tanto tiene un submódulo neteriano no cero, esto es M/K es suficientemente neteriano.
$IV) \Rightarrow I)]$
En particular, cada módulo cociente de M tiene un submódulo neteriano no cero.
$V) \Rightarrow I)$
En particular, cada módulo cociente de M, digamos M/K, cumple $Ln(M/K) \leq^{es} M/K$ por lo tanto tiene un submódulo neteriano no cero.
$II) \Rightarrow V)$
Por hipotesis cada $N \in \sigma[M]$ es semineteriano, así, N es suficientemente neteriano (2.15), por 2.10, $Ln(N) \leq^{es} N$. □

Corolario 2.4. *R es un anillo semineteriano izquierdo si y solo si todo R-módulo izquierdo M es semineteriano.*

Corolario 2.5. *Si R es semineteriano izquierdo entonces todo R-módulo izquierdo M tiene un submódulo uniforme no nulo.*

Demostración. Usando el teorema anterior y 2.13 □

Entonces el concepto de módulo localmente uniforme y anillo localmente uniforme generaliza a semineteriano.

Definición 2.10. *Sean R un anillo y M un R-módulo. Diremos que M es semiuniforme si cada módulo cociente de M, M/N tiene un submódulo uniforme. Diremos que R es un anillo semiuniforme si todo R-módulo tiene un submódulo uniforme no nulo.*

En ese sentido tendremos el Corolario anterior se reescribe como que todo anillo semineteriano es semiuniforme. Además todo módulo semineteriano es semiuniforme, 2.13. Para terminar esta sección, el teorema de la base de Hilbert es válido para semineterianos cuando el anillo es conmutativo:

Proposición 2.19 ([1], Teorema 3.19)**.** *Sean A un anillo conmutativo y M un $A-$módulo izquierdo entonces son equivalentes:*

1. *M es semineteriano como A-módulo.*

2. *$M[x]$ es semineteriano como $R[x]$-módulo.*

2.3. Semineterianos vs Max vs Semiartinianos

En esta sección compararemos dos conceptos de este trabajo que, en principio, parten de dualizar el concepto de semiartiniano. Estos son, max y semineterianos. Primero, estos conceptos son diferentes:

1. En el apéndice exponemos el módulo $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, con p un número primo, el cual es un $\mathbb{Z}-$módulo semineteriano y no es max.

2. Por el ejemplo anterior tenemos que $\mathbb{Z}$ no es un anillo max. Aún más, al ser neteriano es semineteriano. Eso es, un anillo conmutativo semineteriano y no max.

3. En el Ejemplo [1.1], podemos ver que el concepto de max y el de artiniano tienen lado y que hay anillos semineterianos izquierdos que no son max.

Como expusimos en el capítulo dos, todo módulo izquierdo semiartiniano es semineteriano. Ahora, si el anillo es conmutativo, también pasa que todo anillo semiartiniano es max, como se demuestra en [[12], Teorema 3.1]. Ahora, consideremos:

Proposición 2.20 ([11], Corolario 1.1.38)**.** *Sea A un anillo conmutativo max. Si A es neteriano entonces es artiniano.*

Podemos generalizarla en el siguiente sentido:

Proposición 2.21. *Sea A un anillo conmutativo max y M un A-módulo. Son equivalentes:*

1. *M es semineteriano.*

2. *M es semiartiniano.*

Demostración.
$1 \Rightarrow 2$]
Usando [[1], Teorema 3.7] tenemos que M es una extensión esencial de módulo de la forma $\oplus_{i\in I} A/P_i$ con $P_i \in Con(A)$ e I un conjunto. Pero, como A es max, todo ideal primo es máximo, entonces $\oplus_{i\in I} A/P_i$ es semisimple y por lo tanto semiartiniano, luego M es extensión esencial de un semiartiniano por lo que es semiartiniano ([5],Lema 2.1)
$2 \Rightarrow 1$]
Siempre se cumple por definición que $SArt(A) \subseteq SNet(A)$. $\square$

Corolario 2.6. *Sea A es un anillo max conmutativo. Son equivalentes*

1. *A es semineteriano.*
2. *A es semiartiniano.*

Ahora notemos que, $\mathbb{Z}$ también es un ejemplo de que la afirmación "Si A es un anillo y M un A-módulo semineteriano, entonces M es max si y solo si es M semineteriano" es falsa, aún cuando el anillo es conmutativo, por el ejemplo de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Aún así, este tipo de afirmación si es cierta para cuando lo afirmamos sobre toda la clase de módulos o bien sobre el anillo. Consideremos los siguientes teoremas que caracterizan a los anillos semiartinianos y a los max respectivamente:

Teorema 2.3 ([12], Teorema 3.1)**.** *Sea A un anillo conmutativo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es semiartiniano.*
2. a) *$Rad(A)$ es $T-$nilpotente.*
   b) *$A/Rad(A)$ es semiartiniano y regular.*
3. *Todo ideal primo es máximo y para cada A-módulo M, se cumple que $As(M) \neq \emptyset$.*
4. *A es semiuniforme y max.*

Teorema 2.4 ([14], Teorema.)**.** *Sea A un anillo conmutativo. A es max si y solo si $Rad(A)$ es T-nilpotente y $A/Rad(A)$ es regular.*

De los cuales tenemos, gracias al trabajo realizado en el capítulo 2, las siguiente proposición para anillos conmutativos:

Proposición 2.22. *Sea A un anillo conmutativo semineteriano, entonces son equivalentes:*

1. *A es semiartiniano.*

2. *A es max.*

3. *Todo ideal primo es máximo.*

4. *Todo módulo suficientemente neteriano tiene zoclo esencial.*

Demostración.
1) $\Rightarrow$ 2)] De 2.3, por la equivalencia ente 1 y 4.
2) $\Rightarrow$ 3)] Proposición 1.9.
3) $\Rightarrow$ 1)] Por la Proposición 2.16 tenemos que A es semiartiniano.
4) $\Leftrightarrow$ 1)] De que A es semineteriano y el Corolario 2.4 tenemos que $A - Mod = SNet(A)$ y por la Proposición 2.6 tenemos que $SArt = SNet$ por lo que A es semiartiniano. □

Aunque la demostración se da a través de varios resultados anteriores lo que ocurre en la proposición anterior se resume en que, cuando el anillo es conmutativo, "A es semiartiniano" es equivalente a "A es semiuniforme y max", pero como vimos en la Proposición 2.13 los anillos semineterianos son siempre semiuniformes. Entonces la siguiente proposición es consecuencia.

Proposición 2.23. *Sea A un anillo conmutativo, semiuniforme tal que cada ideal primo es máximo, entonces son equivalentes:*

1. *A es semineteriano.*

2. *A es semiatiniano.*

3. *A es max.*

Demostración 1) $\Rightarrow$ 2)
Por la Proposición 2.16 A es semiartiniano.
2) $\Rightarrow$ 3)
Si el anillo A es conmutativo, entonces anillo semiartiniano implica anillo max.

3) $\Rightarrow$ 1)
por el Teorema 2.3 (4) $\to$ 1)) tenemos que A es max y semiuniforme por lo que A es seminartiniano y entonces semineteriano. $\square$

Capítulo 3

Conclusiones

En este trabajo, hemos estudiado algunos conceptos que se proponen en [1]. Estos son, localmente neteneriano, suficientemente neteriano y semineteriano, resaltando que muchos de los resultados presentados e el Capítulo 2 son propios de esta tesis, una buena parte son simplemente la adaptación de los resultados presentados en [1] pero sin la hipótesis de que el anillo es conmutativo:

- Proposición 2.1
- Proposición 2.3
- Proposición2.6
- Proposición 2.8
- Proposición 2.9
- Lema 2.3
- Teorema 2.2
- Corolario 2.3
- Proposición 2.14

- Proposición 2.15
- Proposición 2.18
- Corolario2.4

Como es de esperarse, no en todas las proposiciones anteriores se consiguió replicar el resultado en forma completa, pero si en la mayoría. En los caso en que no se consigue demostrar el resultado completo, tenemos la hipótesis de que no se cumple en general, aunque no estamos seguros pues no damos contraejemplos, las propiedades que no se pueden replicar tienen que ver con la forma y distribución de los ideales primos y algunos resultados de álgebra conmutativa que no se generalizan. Se espera continuar en esto consiguiendo contraejemplos o bien, encontrando nuevas herramientas para demostrar que funcionen en álgebra no conmutativa.
El otro tipo de resultados propios de este trabajo son, o bien nuevos del todo, o bien extensiones de los dados en [1]. Son los siguientes:

- Proposición 2.13 que es propia del trabajo.
- Proposición 2.10 que agrega una equivalencia (III)) y no necesita de que R sea conmutativo.
- Corolario 2.5
- Proposición 2.21 es propia del trabajo.
- Proposición 2.22 es propia de este trabajo.
- Proposición 2.23 es propia del trabajo.

Como conclusiones podemos decir que los conceptos de seminoeteriano y max son distintos, tanto en anillos como en módulos y sin importar si el anillo es conmutativo o no, se dan ejemplos y se demuestra que si el anillo es conmutativo, todo ideal primo es maximo y es un anillo semiuniforme, anillo max, anillo semiartiniano y anillo semineteriano son equivalentes.

La relación entre semineteriano y semiartiniano es muy estrecha pero son conceptos diferentes tanto en módulos como en anillos (conmutativos y no conmutativos). Así como en semiartiniano y max, se tiene la hipótesis de que ser semineteriano derecho y semineteriano izquierdo son independientes pero no se consiguió un ejemplo, esperamos hacerlo en un trabajo futuro.
Los módulos semiuniformes generalizan a semineteriano y semiartiniano y son condición suficiente para que un anillo conmutativo max sea semiartiniano y se tiene la hipótesis de que en el contexto no conmutativo no sucede. Se considera que hay espacio para la investigación en esta dirección y que en anillos no conmutativos las relaciones entre los conceptos son interesantes, considerando los módulos y anillos semiuniformes como otro punto de aproximación que va sobre la misma linea de investigación.

Apéndice A

Apéndice

A.1. Idealización de un módulo.

Definición A.1. [1] *Sea A un anillo, M un A-módulo. La idealización de M por A, también llamada extensión trivial de A por M, es el anillo $A \ltimes M = \{(r,m) | r \in A, m \in M\}$. Con las operaciones:*

$$\begin{aligned} + : A \ltimes M \times A \ltimes M &\longrightarrow A \ltimes M \\ ((r,m),(r',m')) &\mapsto (r+r', m+m') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : A \ltimes M \times A \ltimes M &\longrightarrow A \ltimes M \\ ((r,m),(r',m')) &\mapsto (rr', rm' + r'm) \end{aligned}$$

Veamos que en efecto es un anillo:
Primero, $(A \ltimes M,\ +,\ (0{,}0))$ es un grupo, definido como el producto de los grupos subyacentes del anillo y el módulo $A \times M$ y es conmutativo porque A y M son grupos conmutativos. Ahora, $(R \ltimes M, +, (0,0), \cdot, (1,0))$ es un anillo:

[1] consideramos que no hay ambigüedad al usar "·","+" puesto que en cada caso se refieren a la operación definida en el anillo y el módulo iniciales y luego como a partir de ellas se construye el nuevo anillo por lo que, en cierto sentido son la misma operación en toda la construcción.

- Asociatividad

$$\begin{aligned}[(r,m)(r',m')]\,(r'',m'') &= (rr', r'm+rm')(r'',m'')\\ &= ((rr')r'', r''\,(r'm+rm')+rr'm'')\\ &= ((rr')r'', r''r'm+r''rm+rr'm'')\\ &= (r(r'r''), rr'm''+rr''m'+r'r''m)\\ &= (r(r'r''), r(r''m'+r'm'')+r'r''m)\\ &= (r,m)\,[(r',m')(r'',m'')]\end{aligned}$$

  dónde se ve la necesidad de que A esa conmutativo.

- Sean $(r,m),(r',m') \in A \ltimes M$, entonces $(r,m)(r',m') = (rr', rm' + r'm) = (r'r, r'm+rm') = (r',m')(r,m)$. Es decir, el anillo es conmutativo.

- El neutro del producto es $(1,0)$ porque $(1,0)(r,m) = (1r, r0 + 1m) = (r,m)$.

Ahora, notemos que es posible ver a A como un subanillo de $A \ltimes M$,

$$\begin{aligned} i : A &\to A \ltimes M\\ r &\mapsto (r,0)\end{aligned}$$

que es un morfismo inyectivo de anillos. De ahí que $A \ltimes M$ es una extensión de A.
También Si N es un submódulo de M, entonces $0 \ltimes N$ es un submódulo de $A \ltimes M$:
Si $(0,m),(0,m') \in 0 \ltimes M$ y $(r,m'') \in A \ltimes M$ entonces

$$(0,m)+(0,m') = (0,m+m') \in 0 \ltimes N$$

y para cada $(r,m') \in A \ltimes M$ se cumple que

$$(r,m')\cdot(0,m) = (0r, rm+0m') = (0,rm) \in 0 \ltimes N$$

.
En particular $0 \ltimes M$ es ideal del anillo, de ahí que $A \ltimes M$ es la idealización de M. Aún más, $(0 \ltimes M)^2 = 0$ ya que $(0,m)(0,m') = (0, 0m+0m') = (0,0)$ para cualesquiera $m,m' \in M$. Notemos que además sucede que $M \cong 0 \ltimes M$ como $A-$módulos.

A.1.1. Ideales y elementos especiales en la extensión trivial

En esta sección estudiamos los ideales primos, máximos y principales de $R \ltimes M$.

Teorema A.1. *Sea A un anillo, I un ideal de A, M un $A-$módulo y $N \leq M$ entonces:*

1. *$I \ltimes N$ es ideal de $A \ltimes M$ si y solo si $IM \subseteq N$.*
2. *Si $I \ltimes N$ es un ideal de $A \ltimes M$ entonces M/N es un $A/I-$módulo y $\frac{A \ltimes M}{I \ltimes N} \cong A/I \ltimes M/N$.*

Demostración.
1. Es inmediato de la definición de $A \ltimes M$.
2. Si M es un $A-$módulo y $I \ltimes N \leq A \ltimes M$. Veamos que esto determina un A/I módulo. Definimos el A/I-módulo M/N por $(r+I)(m+N) := rm+N$.
Ahora, si $m+N = m'+N$ tendremos que

$$\begin{aligned}(r+I)(m+N) &= (rm' + r(m-m') + N)\\ &= rm' + N\\ &= (r+I)(m'+N)\end{aligned}$$

similarmente si $(r+I) = (r'+I)$ entonces

$$(r+I)(m+N) = r'm - (r'-r)m + N$$

pero $r - r' \in I$ luego, debido a que $IM \subseteq N$, $(r'-r)m \in N$ así

$$(r+I)(m+N) = (r'm+N) = (r'+I)(m+N).$$

De esta manera, la operación está bien definida. Veamos que cumple ser un módulo:

- Sean $(r+I) \in A/I$ y $m+N, m'+N$ entonces

  $$\begin{aligned}(r+I)\left[(m+N)+(m'+N)\right] &= r+I)(m+m'+N) \\ &= (r(m+m)+N) \\ &= (rm+rm'+N) \\ &= (rm+N)(rm'+N) \\ &= (r+I)(m+N)+(r+I)(m'+N)\end{aligned}$$

  dónde usamos que $r(m+m') = rm+rm'$ debido a que M es A-módulo.

- Sean $(r+I), (r'+I) \in R/I$ y $m+N$

  -

    $$\begin{aligned}(r+I)+(r'+I)\left[(m+N)\right] &= (r+r'+I)(m+N) \\ &= ((r+r')m+N) \\ &= (rm+r'm+N) \\ &= (rm+N)(r'm+N) \\ &= (r+I)(m+N)+(r'+I)(m+N)\end{aligned}$$

    dónde usamos que $r+r'(m) = rm+r'm$ debido a que M es A-módulo.

  -

    $$\begin{aligned}(r+I)((r'+I)(m+N)) &= (r+I)(r'm+N) \\ &= r(r'm)+N \\ &= rr'm+N \\ &= (rr'+I)(m+N) \\ &= ((r+I)(r'+I))(m+N)\end{aligned}$$

    dónde usamos que $r(r'm) = rr'm$, debido a que M es $A-$módulo.

- $(1+I)(m+N) = (m+N)$

Lo que demuestra que M/N es un A/I- módulo.
Esto nos permite definir el morfismo:

$$\phi : R \ltimes M \to \frac{R}{I} \ltimes \frac{M}{N} \tag{A.1}$$
$$(r, m) \mapsto (r + I, m + N) \tag{A.2}$$

que es claramente suprayectivo. Ahora $\phi((r, m)) = 0$ si y solo si $r \in I, m \in N$ por lo que $ker(\phi) = (I, N)$. Por lo tanto, del Primer Teorema de isomorfismos, $\frac{R \ltimes M}{I \ltimes N} \cong R/I \ltimes M/N$. □

Ejemplo A.1. *Sea* $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ *y* $N = 6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, *entonces, con* $I = 6\mathbb{Z}$, *se cumple que* $IM = (6\mathbb{Z})(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) = N$ *por lo que* $I \ltimes N \leq R \ltimes M$.

Aún así, el teorema nos dice como son muchos de los ideales de la extensión trivial pero no es cierto que todos son de esa forma.

Ejemplo A.2. *Consideremos* $R = \mathbb{Z}_4$, $M = \mathbb{Z}_2$ *con* $I = (R \ltimes M)((2, 1)) = \{(0, 0), (2, 1)\}$, *que no tiene la forma* $I \ltimes N$ *con* $I \leq R$ *y* $N \leq M$.

Corolario A.1. *Sea* A *un anillo conmuativo, entonces* I *es un ideal de* A, *y* M *un* A*-módulo. Entonces*

1. $\frac{A \ltimes M}{I \ltimes M} \cong A/I$.
2. $\frac{A \ltimes M}{0 \ltimes M} \cong A$.
3. *Los ideales de* $A \ltimes M$ *que contienen a* $0 \ltimes M$ *son de la forma* $J \ltimes M$ *con* $J \leq A$.

Demostración.

1. $\frac{A \ltimes M}{I \ltimes M} \cong A/I \ltimes 0 \cong A/I$
2. $\frac{A \ltimes M}{0 \ltimes M} \cong A/0 \ltimes M/M \cong A \ltimes 0 \cong A$

3. Claramente , para todo J ideal de A se cumple $JM \subseteq M$ por lo que $J \ltimes M \leq A \ltimes M$, luego, si $0 \ltimes M \leq I \leq A \ltimes M$ entonces, los elementos de I tiene la forma (i, m) con $m \in M$, cumplen ser un subgrupo con la suma y cerrado bajo producto, de modo que $I' = \{i \in A | \exists (i, m) \in I\}$ es ideal en A así $I = I' \ltimes M$.

$\square$

Teorema A.2. *Sea A un anillo y M un $A-$módulo entonces:*

1. *Los ideales primos de $A \ltimes M$ son de la forma $P \ltimes M$ con $P \in Spec(A)$.*

2. *Los ideales máximos de $A \ltimes M$ son de la forma $I \ltimes M$ con $I \in Max(A)$.*

3. *Los ideales radicales de $A \ltimes M$ tienen la forma $I \ltimes M$ con I un ideal radical en A.*

Demostración.

1. Sea q un ideal primo de $A \ltimes M$, entonces $(0 \ltimes M)^2 = 0 \subseteq q$, entonces $0 \ltimes M \subseteq q$ y usando el corolario [A.1], tenemos que q tiene la forma $J \ltimes M$, luego, si $J \leq A$ no es primo, tendríamos $r, r' \in A$ tales que $rr' \in J$, luego $(r, 0)(r', 0) \in (J, M) = q$, así, de que q es primo, $(r, 0) \in q$ ó $(r', 0) \in q$ por lo tanto $r \in J$ ó $r' \in J$ concluyendo que J debe ser primo.

2. Como cada ideal I máximo es primo tenemos, igual que en el inciso anterior, que $0 \ltimes M \leq I$. Luego I es de la forma $I' \ltimes M$, [A.1,3], por lo que si existe J tal que $I' \lneq J$ entonces $I \lneq J \ltimes M$ por lo tanto $J = A$ debido a que I es máximo, por lo tanto I' es máximo en A.

3. Sea E un ideal radical de $A \ltimes M$. Entonces

$$E = \sqrt{E} = \cap\{Q|Q \in Spec(A \ltimes M), E \subseteq Q\}$$

pero al ser la intersección de primos tenemos que $0 \ltimes M \leq E$ por lo que E es de la forma $J \ltimes M$ de aquí, por 1, todos los ideales primos son de la forma $P \ltimes M$, tenemos que

$$J \ltimes M = E = \bigcap_{P \ltimes M \in Spec(A \ltimes M), E \leq P \ltimes M} (P \ltimes M) = (\bigcap_{P \in Spec(A), J \leq P} P) \ltimes M$$

esto es J es radical en A.

Corolario A.2. *Si A es un anillo y M un $A-$módulo entonces $Dim(A \ltimes M) = Dim(A)$*

Demostracion. Si $P_0 \leq P_1 \leq ...$ es una sucesión de ideales primos en el anillo A entonces $P_0 \ltimes M \leq P_1 \ltimes M \leq ...$ es una sucesión de la misma longitud en el anillo $A \ltimes M$, por definición $Dim(A) = Dim(A \ltimes M)$. □

Teorema A.3. *Sea A un anillo, M un $A-$módulo y $J \ltimes M)(a, m)$un ideal principal de $A \ltimes M$. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

- $(A \ltimes M)(a, m) = Aa \ltimes (Am + aM)$.
- $(a, 0) \in (A \ltimes M)(a, m)$.
- *Existe $x \in A$ tal que $xa = a$ y $mx \in aM$.*

Demostración.
$1 \Rightarrow 2]$
Si $(A \ltimes M)(a, m) = Aa \ltimes (Am + aM)$ entonces $(a, 0) = (1a, am + a(-m) \in Aa \ltimes (Am + aM) = (A \ltimes M)(a, m)$.
$2 \Rightarrow 3]$
Si $(a, 0) \in (A \ltimes M)(a, m)$ entonces existe $(r, m') \in (A \ltimes M)$ tal

que $(r,m')(a,m) = (ra, am' + rm) = (a,0)$ esto es $ra = a$ y $rm = a(-m') \in aM$.
$3 \Rightarrow 1]$
Sea $x \in A$ tal que $xa = a$ y $xm \in aM$. Entonces $xm = am'$ para algún $m' \in M$. Si $(ra, sm + an) \in Aa \ltimes (Am + aM)$, entonces

$$\begin{aligned}
(ra, sm + an) &= (rxa, sm + xan) \\
&= (rxa, xan) + (0, sm) \\
&= (rxa, xan) + (0, sm) \\
&= (r,n)(xa,0) + (s,0)(0,m) \\
&= (r,n)(xa, xm - am') + (s,0)\left((a,m) - (a,0)\right) \\
&= (r,n)(x,-m')(a,m) + (s,0)(a,m) - (sx, s(-m'))(a,m) \\
&\in (A \ltimes M)(a,m)
\end{aligned}$$

por lo tanto $Aa \ltimes (Am + aM) \subseteq (A \ltimes M)(a,m)$ y la otra contención es inmediata. $\square$

Ejemplo A.3.

- *Sea $A = \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}$. Si tomamos $(2,2) \in A$, tenemos que $(2,2) = (1,-1)(2,2) \in A(2,2)$ por lo tanto, del teorema A.3, $R(2,2) = 2\mathbb{Z} \ltimes 2\mathbb{Z}$.*
- *Pero si consideramos $A = \mathbb{Z} \ltimes 2\mathbb{Z}$ entonces no es posible que $(2,0) \in A(2,2)$ pues para eso se tendría que $-1/2 \in 2\mathbb{Z}$. Luego $A(2,2) \neq 2\mathbb{Z} \ltimes 2\mathbb{Z}$.*

Teorema A.4. *Sean A un anillo y M un A módulo, entonces*

1. *$A \ltimes M$ es neteriano si y solo si A lo es y M es finitamente generado.*

2. *$A \ltimes M$ es artiniano si y solo si A lo es y M es finitamente generado.*

Demostración.
1. $\Rightarrow]$

Si $A \ltimes M$ es neteriano entonces $A \cong \frac{A\ltimes M}{0\ltimes M}$ es neteriano. Luego, tenemos que $0 \ltimes M$ es ideal de A por lo tanto finitamente generado. Es decir, existen $\{(0, m_i)\}_{0\leq i\leq n} \subset 0 \ltimes M$ que lo generan. Notemos que $(0, 0) \in A \ltimes M(0, m_i)$ para cada $1 \leq i \leq n$ y luego, por A.3 tenemos que $A\ltimes M(0, m_i) = A0\ltimes(Am_i+0M) = 0\ltimes Am_i$. Entonces

$$0 \ltimes M = \sum_{i=1}^{n} \langle (0, m_i)\rangle \tag{A.3}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (0 \ltimes Am_i) \tag{A.4}$$

$$= 0 \ltimes \sum_{i=1}^{n} Am_i \tag{A.5}$$

por lo tanto M es finitamente generado.
$\Leftarrow$]
Ahora, si A es neteriano y M finitamente generado. Demostraremos que todos los ideales primos son finitamente generados, recordemos que un ideal primo de $A \ltimes M$ es de la forma $P \ltimes M$, ([A.2])con P un ideal primo de A luego, P es finitamente generado, como M también es finitamente generado tenemos que $P\ltimes M$ es finitamente generado. Así, cada ideal primo del anillo es finitamente generado es conocido que esto es equivalente a que es neteriano.

2.$\Rightarrow$]
Supongamos que $A \ltimes M$ es artiniano. Como es un anillo conmutativo artiniano entonces es neteriano por lo tanto M es finitamante generado y $A \cong \frac{A\ltimes M}{0\ltimes M}$ así, A es artiniano.
$\Leftarrow$]
Si A es artiniano y M es finitamente generado entonces, es sabido que A es neteriano y $Dim(A) = 0$, ahora, de la caracterización de los primos tenemos que $Dim(A \ltimes M) = Dim(A) = 0$ y como M es finitamente generado y A neteriano tenemos que $A \ltimes M$ es neteriano. Así $A \ltimes M$ es neteriano y de dimensión cero por lo tanto artiniano. $\square$

Teorema A.5. *Sean A un anillo y M un $A-$módulo, entonces son equivalentes:*

1. $I \leq^{es} A \ltimes M$.
2. *Existe un ideal $I' \leq A$ y un submódulo N de M tales que $I' \ltimes N \leq I$ con $I' \leq_{es} An(M)$ y $N \leq^{es} M$.*

Demostración
$1 \Rightarrow 2]$
Si $An(M) = 0$ consideremos $H = \{K \leq M | 0 \ltimes K \leq I\}$, $I' = 0$ y

$$N = \sum_{K \in H} K \leq M.$$

Entonces $I' = An(M) = 0$ y para cada $0 \neq L \leq M$, se tiene que $I \cap 0 \ltimes L \neq 0$ entonces existe $0 \neq K \leq M$ tal que $0 \ltimes K = I \cap 0 \ltimes L$ por lo que $K \cap L \neq 0$. Así $N \leq^{es} M$.

Sean, $I \cap (An(M) \ltimes 0) = I' \ltimes 0$, con $An(M) \neq 0$, por hipótesis tendremos que $I' \neq 0$. Luego, $I' \leq^{es} An(M)$, pues si $0 \neq K \leq An(M) \leq A$ entonces

$$\begin{aligned} I' \cap K &= (I \cap An(M)) \cap K \\ &= I \cap (An(M) \cap K) \\ &= I \cap K \neq 0 \end{aligned}$$

igualmente $I \cap (0 \ltimes M) = 0 \ltimes N$ implica $N \leq^{es} M$.
$2 \Rightarrow 1]$
Como $I' \ltimes N \leq I$ es suficiente demostrar que $I' \ltimes N \leq A \ltimes M$. Ahora, sea $K \leq A \ltimes M$. Supongamos que $0 \neq (r, m) \in K$ con $r \neq 0$, si $rM = 0$ tendremos que $r \in An(M)$ y como $I \leq^{es} An(M)$ entonces $I' \cap \langle r \rangle \neq 0$ esto es, existe $\alpha \in A$ tal que $0 \neq \alpha r \in I'$, si $m = 0$ tenemos que $0 \neq (\alpha r, 0) \in I \cap K$, si $\alpha m \neq 0$ entonces $\langle \alpha m \rangle \cap N \neq 0$ por lo que existe $\beta \in A$ tal que $0 \neq \beta\alpha m \in N$, de modo que $0 \neq \beta\alpha(r, m) \in I \cap K$.

Finalmente, en el caso en que $rM \neq 0$ tenemos que existe $n \in M$ tal que $rn \neq 0$ luego, existe $\alpha \in A$ tal que $0 \neq \alpha rn \in N$, así $0 \neq (0, \alpha n)(r, m) = (0, r\alpha n) \in I' \ltimes N$ por lo tanto $I \cap K \neq 0$. De dónde concluimos que $I \leq^{es} A \ltimes M$

Corolario A.3. *Sean A un anillo y M un $A-$módulo entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $Zoc(A \ltimes M) \leq^{es} A \ltimes M$
2. $Zoc(An(M)) \leq^{es} An(M)$ *y* $Zoc(M) \leq^{es} M$
3. $Zoc(An(M) \oplus M) \leq^{es} An(M) \oplus M$

Demostración.
Tenemos que $Zoc(A \ltimes M) = (Zoc(A) \cap An(M)) \ltimes Zoc(M)$, por lo que, de tenemos que 2) $\Longleftrightarrow$ 1).
Luego, de $Zoc(An(M) \oplus M) = Zoc(An(M)) \oplus Zoc(M)$ por lo que 2) $\Longleftrightarrow$ 3). $\square$

A.2. El grupo de Prüfer

En esta sección desarrollaremos con detalle el grupo de Prüfer para un primo $p \in \mathbb{Z}$. Las ideas incluidas en esta construcción son generalizadas con ayuda del lenguaje de categorías, permitiendonos verla como un caso especial de colímites. Esto es, como un objeto con sus correspondientes inclusiones y con una propiedad universal sobre cierto tipo de colecciones de objetos. Para esto definiremos algunos conceptos.

Definición A.2. *Un conjunto dirigido C es un conjunto no vacío que es orden parcial $(C, \leq)$ tal que, para cada par de elementos $c, c' \in C$, existe su supremo. Es decir, existe $c \vee c'$ tal que es la menor de las cotas superiores del conjunto $\{c, c'\}$.*

Ejemplo A.4. *Para cada $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{N}$, C es un conjunto dirigido con el orden $\leq$.*

Definición A.3. *Sean I un conjunto dirigido, $\mathscr{C}$ una categoría y $\{C_i\}_{i\in I}$ un conjunto de objetos indizados por I. Diremos que $(C_k, f_{ij} : C_i \to C_j)_{i,j\in I}$ es un diagrama directo de silueta I si cumple:*

1. *f_{ii} es la identidad en C_i*
2. *$f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$*

Definición A.4. *Sean $\mathscr{C}$ una categoría, I un conjunto dirigido y $(\{C_K\}_{k\in I}, \{f_ij\}_{,i,j\in I})$ un diagrama directo de silueta I.*

- *Un Conono para este diagrama es par $(A, \{\phi_i\}_i \in I)$ conformado por un objeto $A \in \mathscr{C}$ y una familia de morfismos $p_i : C_i \to A$ tal que, para cada f_{ij} el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & A & \\ C_i \arrow[ur, "p_i"] \arrow[rr, "f_{ij}"'] & & C_j \arrow[ul, "p_j"'] \end{tikzcd}$$

  conmuta.

- *El límite directo para este diagrama (si existe) es un cocono $(C, \{p_i\}_i \in I)$. Con la propiedad de que, para todo cocono $(A, \phi_{i_{i\in I}})$ existe una única flecha $\breve{f} : C \to A$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & A & \\ & C \arrow[u, "\breve{f}"] & \\ C_i \arrow[uur, "\phi_i"] \arrow[ur, "p_i"] \arrow[rr, "f_{ij}"'] & & C_j \arrow[uul, "\phi_j"'] \arrow[ul, "p_j"'] \end{tikzcd}$$

  conmuta para cada $i, j \in I$.

Ahora, consideremos la categoría $\mathbb{Z} - Mod$, o bien, equivalentemente la de todos los grupos abelianos Ab. Podemos definir al

grupo de Prüfer como el limite directo del siguiente diagrama:
Sea $I = \mathbb{N}$ con el orden total usual y tomemos p un número primo. Ahora $\{\mathbb{Z}_{p^n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ la colección de objetos, en este caso de grupos abelianos (o $\mathbb{Z}$-módulos).
Definimos las funciones:

$$\begin{aligned} f_{ij} : \mathbb{Z}_{p^i} &\to \mathbb{Z}_{p^j} \\ a &\mapsto p^{j-i}a \end{aligned}$$

con $i \leq j$. Notemos que son morfismos de grupos y que f_{ii} es la identidad, además, si tomemos $i \leq j \leq k$

$$f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}.$$

Por lo que es un diagrama directo de silueta $\mathbb{N}$.
Veamos que el límite directo de este diagrama existe. Tomando $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{Z}-$módulo, definimos $\mathbb{Q}_p = \{z/p^n | z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ es un submódulo de $\mathbb{Q}$ (o bien un grupo abeliano con la suma usual) que además contiene a $\mathbb{Z}$ como submódulo propio. Entonces llamaremos $Z_{p^\infty} = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$, es decir al módulo cociente de $\mathbb{Q}_p$ con $\mathbb{Z}$.

Proposición A.1. *En el contexto de las definiciones anteriores se cumple:*

- *Para todo $g \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^{p^n} = 0$, es decir, es nilpotente y se anula en alguna potencia de p.*
- *$\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es el límite directo del diagrama directo $(\mathbb{Z}_{p^n}, f_{ij})$.*
- *La retícula $[0, \mathbb{Z}_{p^\infty}]$ es isomorfa a $\mathbb{N}$.*
- *Todo submódulo de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es esencial.*
- *Todo submódulo de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es superfluo*[2].

[2] También son llamados pequeños (small module). Un módulo N es superfluo en M si $N + K = M$ implica que $K = M$

Demostración.

- Sea $g \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$, es de la forma $\frac{z}{p^l}+\mathbb{Z}$ con $z \in \mathbb{Z}$ y $l \in \mathbb{N}$. Entonces

$$(\frac{z}{p^l} + \mathbb{Z})^{p^n} = p^l(\frac{z}{p^l}) + \mathbb{Z} = z + \mathbb{Z} = 0 + \mathbb{Z}$$

  .

- Primero definimos

$$\begin{aligned} p_i : Z_{p^i} &\to \mathbb{Z}_{p^\infty} \\ a &\mapsto \frac{a}{p^i} + \mathbb{Z} \end{aligned}$$

  Es un morfismo de grupos y además inyectivo. Ahora, notemos que para cada $i \leq j$

$$p_j \circ f_{ij}(a) = \frac{p^{j-i}a}{p_j} + \mathbb{Z} = \frac{a}{p^i} + \mathbb{Z}$$

  por lo que $(\mathbb{Z}_{p^\infty}, p_i)$ es un cocono directo para el diagrama (Z_{p^n}, f_{ij}). Ahora, si (A, ϕ_i) es otro cocono directo para este diagrama.Notemos que, por lo demostrado en el punto anterior, podemos tomar para cada $g \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$ existe un n mínimo tal que $g^{p^n} = 1$, llamemos n_g a este número. Ahora, siempre podemos escribir $g = \frac{z_g}{p^{n_g}} + \mathbb{Z}$ de manera única con la condición de que $z_g \leq p^{n_g}$. Definimos

$$\begin{aligned} \breve{f} : \mathbb{Z}_{p^\infty} &\to A \\ g &\mapsto \phi_{n_g}(z_g) \end{aligned}$$

  que está bien definida des que (n_g, z_g) es un par único para cada $g \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Ahora, asuminedo su representación única veamos que es morfismo de grupos:

$$\begin{aligned}
\breve{f}(g+h) &= \breve{f}\left(\frac{z_g}{p^{n_g}}+\frac{z_h}{p^{n_h}}\right)\\
&= \frac{p^{n_h}z_g \breve{+} p^{n_g}z_h}{p^{n_g+n_h}}\\
&= \phi_{n_g+n_h}(p^{n_h}z_g+p^{n_g}z_h)\\
&= \phi_{n_g+n_h}(f_{n_g(n_g+n_h)}(z_g)+f_{n_h(n_g+n_h)}(z_h))\\
&= \phi_{n_g+n_h}(f_{n_g(n_g+n_h)}(z_g))+\phi_{n_g+n_h}(f_{n_h(n_g+n_h)}(z_h))
\end{aligned}$$

luego, como $(A,\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es un cocono directo, tenemos que

$$\phi_{n_g+n_h}(f_{n_g(n_g+n_h)}(z_g))+\phi_{n_g+n_h}(f_{n_h(n_g+n_h)}(z_h)) = \phi_{n_g}(z_g)+\phi_{n_h}(z_h)$$

por lo tanto $\breve{f}(g+h)=\breve{f}(g)+\breve{f}(h)$.
Finalmente, si $a\in Z_{p^i}$

$$\begin{aligned}
\breve{f}\circ p_i(a) &= \breve{f}(a/p_i)\\
&= \phi_i(a).
\end{aligned}$$

es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& A & \\
& \mathbb{Z}_{p^\infty} \arrow[u, "\breve{f}"] & \\
\mathbb{Z}_i \arrow[uur, "\phi_i"] \arrow[ur, "p_i"'] \arrow[rr, "f_{ij}"'] & & \mathbb{Z}_j \arrow[uul, "\phi_j"'] \arrow[ul, "p_j"]
\end{tikzcd}$$

conmuta para cada $i,j\in I$.

- Si llamamos $C_i=p_i(\mathbb{Z}_{p^i})\leq\mathbb{Z}_{p^\infty}$ tenemos una cadena infinita de submódulos

  $$0=C_0\leq C_1\leq ...\leq C_n...$$

  además $C_n/C_{n-1}\cong C_1$ es simple. Por lo que no hay submódulos propios de C_n que contengan a C_{n-1} además, cada submódulo $0\neq N\leq\mathbb{Z}_{p^\infty}$ contiene al menos a un C_n, esto debido a que $g \in N$ implica $\langle g \rangle \leq N$, pero $g^{p^n} = 0$ por lo que $\langle g \rangle$ es finito y de orden p^k con $k \leq n$. Ahora, si N es finito, existe un g tal que $n_g = max\{n_h | h \in N\}$, entonces $N = C_{n_g}$. Si N no es finito entonces $C_n \leq N$ para cada $n \in \mathbb{N}$ por lo que, con las inclusiones tendríamos que $(N, C_n \hookrightarrow N)$ es un cocono y así, por la propiedad universal del límite directo, $\mathbb{Z}_{p^\infty} \hookrightarrow N$ entonces $N = \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

- Si $N \leq \mathbb{Z}_{p^\infty}$ propio, el orden total de la reticula de submódulos implica que, dado cualquier otro módulo K, se tiene que $N \leq K$ o $K \leq N$ por lo que la intersección es nula si y solo si uno de los dos lo es, por lo que $N \leq^{es} \mathbb{Z}_{p^\infty}$

- Si $N \leq \mathbb{Z}_{p^\infty}$ propio, el orden total de la retícula de submódulos implica que, dado cualquier otro módulo K, se tiene que $N \leq K$ o $K \leq N$ por lo que $N + K = max\{N, K\}$ por lo que $N \leq^{sup} Z_{p^\infty}$.

Ahora, es consecuencia que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es artiniano, pues cada submódulo $N \not\leq \mathbb{Z}_{p^\infty}$ es un C_n y tiene un numero finito de submódulos, así semiartiniano y semineteriano, pero no max, puesto que no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{Z}_{p^\infty}/C_n$ sea simple.

Referencias

[1] KOURKI, Farid; TRIBAK, Rachid. On seminoetherian rings and modules. Communications in Algebra, 2022, vol. 50, no 12, p. 5200-5216.

[2] Kasch, F. (1982). Modules and rings (Vol. 17). Academic press.

[3] Stenström, B. (2012). Rings of quotients: an introduction to methods of ring theory (Vol. 217). Springer Science & Business Media.

[4] Tuganbaev, A. (2003). Max rings and V-rings. In Handbook of Algebra (Vol. 3, pp. 565-584). North-Holland.

[5] Kourki, Farid, and Rachid Tribak. " On semiartinian and Π-semiartinian modules."Palestine Journal of Mathematics 7 (2018): 99-107.

[6] Kourki, F., & Tribak, R. (2018). Some results on locally Noetherian modules and locally Artinian modules.

[7] Anderson, D. D., & Winders, M. (2009). Idealization of a module. Journal of Commutative Algebra, 1(1), 3-56.

[8] Nastasescu, C., & Van Oystaeyen, F. (2012). Dimensions of ring theory (Vol. 36). Springer Science & Business Media.

[9] Annin, S. (2002). Associated primes over skew polynomial rings. Communications in Algebra, 30(5), 2511-2528.

[10] Vámos, P. (1968). The dual of the notion of “finitely generated”. Journal of the London Mathematical Society, 1(1), 643-646.

[11] Gómez Macedo, Rolando. (2011). “Anillos Máx”. (Tesis de Maestría). Universidad Nacional Autónoma de México, Coordinación General de Estudios de Posgrado, UNAM. Recuperado de https://repositorio.unam.mx/contenidos/3428164

[12] Năstăsescu, C., & Popescu, N. (1968). Anneaux semi-artiniens. Bulletin de la Société mathématique de France, 96, 357-368.

[13] Sharpe, D. W., Vamos, P. (1972). Injective Modules. Cambridge: Cambridge University Press.

[14] Hamsher, R. M. (1967). Commutative rings over which every module has a maximal submodule. Proceedings of the American Mathematical Society, 18(6), 1133-1137.

[15] Shock, R. (1974). Dual generalizations of the Artinian and Noetherian conditions. Pacific Journal of Mathematics, 54(2), 227-235.