



BUAP

Facultad de Ciencias de la Comunicación

**ANÁLISIS DEL CONTENIDO
HISTÓRICO EN LIBROS DE TEXTO DE
CÁLCULO DIFERENCIAL,
BACHILLERATOS MEXICANOS 2016 -
2021**

**Tesina para obtener el
grado de Especialidad
en Comunicación de la
Ciencia**

Presenta

Joel Villalvazo Guerrero

Director de tesina

Dr. Guillermo Carrera García

Miembros del comité tutorial

Mtra. Adriana Cervantes Figueroa

Mtro. Alejandro George Cruz

H. Puebla de Zaragoza, junio de 2024

Índice

Introducción	4
Antecedentes.....	7
El desarrollo de la Comunicación Pública de la Ciencia	7
La Evolución de los Medios e Instrumentos de Comunicación Pública de la Ciencia	12
Algunos Ejemplos de Análisis de Libros de Texto desde la Educación Matemática	14
Perspectiva teórica	18
Teorías de la recepción.....	18
La Comunicación Pública de la Ciencia.....	20
Los libros de Texto como Instrumentos de Comunicación Pública de la Ciencia	22
La Historia de las Matemáticas Como Recurso de Enseñanza y Aprendizaje.....	23
El Análisis de Libros de Texto Desde la Educación Matemática	27
Teoría Antropológica de lo Didáctico	28
Análisis del Contenido Histórico en Libros de Texto de Cálculo Diferencial, Bachilleratos Mexicanos 2016 - 2021	33
Metodología	33
Conclusiones	44
Propuestas	45
Bibliografía.....	46

Índice de figuras

Figura 1. Portada del libro: cálculo diferencial e integral	34
Figura 2. Portada del libro: cálculo diferencial	34
Figura 3. Portada del libro: cálculo diferencial, un nuevo enfoque	35
Figura 4. Portada: cálculo diferencial para bachilleratos tecnológicos.	35
Figura 5. Portada del libro: cálculo diferencial en competencias	36
Figura 6. Reseña histórica en libro 1	37
Figura 7. Ejemplo de contenido histórico en libro 2	37
Figura 8. Ejemplo de sección: ¿sabías qué? En libro 3	38
Figura 9. Breve reseña histórica sobre los procesos de cambio.	39
Figura 10. Ejemplo de preguntas para responder con base en el contenido histórico en libro 2	40
Figura 11. Ejemplo de preguntas para responder con base en un artículo en línea, libro 4	40
Figura 12. Actividad matemática con contenido histórico, libro 2	41
Figura 13. Actividad matemática con contenido histórico, libro 4	42
Figura 14. Actividad matemática con contenido histórico libro 4, segunda parte	43

Introducción

El cálculo diferencial es una de las asignaturas académicas que el estudiante percibe como más complejas durante su formación en las matemáticas del nivel Medio Superior en México, es común que el estudiante sufra un poco al aprender, por ejemplo, sobre límites, continuidad o diferenciación. Cuando se resuelven ejercicios relacionados con esos temas, muy a menudo se hace mecánicamente sin realmente saber qué se está haciendo o para qué se hace.

En México, de acuerdo con los planes de estudio vigentes para la Educación Media Superior (EMS), de la Secretaría de Educación Pública SEP (2017), la asignatura de cálculo diferencial se imparte durante el cuarto semestre de EMS, tanto para el bachillerato general en la asignatura de matemáticas IV, como para el bachillerato tecnológico en la asignatura de cálculo diferencial. En el rediseño para la generación del nuevo Marco Curricular Común para la Educación Media Superior MCCEMS estos temas se encuentran en la asignatura de pensamiento matemático III a impartirse en el tercer semestre.

En esta tesina de investigación, se reconoce como un problema a la falta de contextualización que enfrentan los estudiantes cuando aprenden sobre temas de cálculo diferencial en el bachillerato. Es común que no se preste atención a la comprensión y que se promueva un conjunto de prácticas primordialmente algorítmicas en el aula, la repetición de estos procedimientos se toma también como la base para la evaluación de los aprendizajes, por lo que al replicarlos se asume que se sabe utilizar al cálculo diferencial.

La pregunta que dirige el rumbo de la investigación es ¿cómo se utiliza la historia de las matemáticas en los libros de texto para la asignatura de cálculo diferencial en el nivel medio superior? Y se parte de la hipótesis: La historia de las matemáticas no es utilizada para contextualizar los problemas presentados en los libros de texto de cálculo para el nivel medio superior.

A pesar de que la evolución de la tecnología le ha permitido introducirse al aula de matemáticas como auxiliar en el aprendizaje, los libros de texto continúan siendo una herramienta, en ocasiones fundamental, para la formación de las habilidades necesarias para el entendimiento y uso de los conceptos y procedimientos que pertenecen al cálculo diferencial. Además, son auxiliares que el docente utiliza, entre otras cosas, para organizar la secuencia de los contenidos,

determinar el tipo de actividades que se realizan en clases y el tiempo que se dedica al aprendizaje de cada tema.

Para el estudiante de Educación Media Superior el cálculo es una de las herramientas matemáticas que presenta más dificultades durante su aprendizaje, Artigue (1995) reconoce tal problema y, entre otras cosas, lo relaciona con los nuevos modos de razonamiento a los que debe acceder quien aprende cálculo, pues pueden percibirse como poco naturales al pasar de razonamientos por equivalencias sucesivas a razonamientos por condiciones suficientes, es decir, de operar sobre objetos concretos como las ecuaciones, a razonar sobre propiedades abstractas como la derivabilidad o la continuidad. Neira (2013) sugiere que en el paso del álgebra escolar al cálculo diferencial puede haber una ruptura pues existen dificultades epistemológicas, semióticas, didácticas o culturales que se manifiestan durante tal transición.

Artigue (1995) señala que la enseñanza tradicional tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo, por lo que estos aspectos son los que se toman en cuenta para la evaluación. Es común que se deje de lado al entendimiento conceptual y al diálogo sobre la evolución y los significados de los objetos matemáticos. Vrancken et al. (2006) reconocen como una dificultad al aprendizaje y entendimiento del concepto de límite, elemento fundamental en el desarrollo del cálculo, además, el tratamiento durante su enseñanza y aprendizaje es claro ejemplo del privilegio que se da al rigor algorítmico y del descuido a la construcción de sentido.

De manera similar Neira (2013) afirma que existe una algebrización del cálculo, lo que considera como un enfoque reduccionista, por lo que invita a analizar la actividad matemática en las aulas, las prácticas escolares y la dimensión de significación y sentido de estas prácticas, incluidas las dimensiones didáctica y matemática. En este documento se considera importante la búsqueda de alternativas que permitan propiciar condiciones que ayuden al estudiante a reconocer al cálculo como una parte de las matemáticas que surgió a partir de la búsqueda de solución a un campo de problemas y ha evolucionado a través de la historia, y que si bien el cálculo utiliza procedimientos algebraicos, no se reduce a ellos.

Se considera de utilidad la inclusión de diferentes situaciones de la historia que resultaron en una evolución metodológica de las matemáticas, entre otras cosas, para contextualizar el aprendizaje de los objetos matemáticos. Esto podría ayudar al estudiante a reconocer a las matemáticas como parte de la historia y la evolución de la humanidad, como ciencia que ha estado,

y sigue estando, en constante desarrollo para solucionar problemas reales y significativos. Se pretende que los resultados de la investigación puedan servir como referencia para que quien hace investigación en educación matemática, la comunidad docente y el público interesado en el tema, puedan acceder a un análisis de la cantidad y el tipo de contenido histórico que se utiliza como fuente de aprendizaje en una muestra de libros de cálculo diferencial para bachillerato.

Se ha realizado esta investigación como parte de la Especialidad en Comunicación de la Ciencia de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, partiendo de la idea de que los libros de texto, digitales o en papel, pueden ser considerados como instrumentos de comunicación pública de la ciencia. Se hizo una exploración de la proporción en que se utiliza a la historia de las matemáticas en la muestra seleccionada y se analizó la manera en que se utiliza. Se presenta como el objetivo principal de la investigación: analizar el uso de la historia de las matemáticas en libros de cálculo para el nivel Medio Superior.

La metodología utilizada en la investigación es cualitativa, pues aunque se obtuvieron algunos resultados expresados con cantidades, estos no tienen un tratamiento estadístico para aportar datos cuantitativos que permitan considerar a la investigación como una del tipo mixto. Se presenta un diseño de análisis de libros de texto con enfoque en educación matemática, habiendo estudiado una muestra de cinco libros de texto de cálculo diferencial utilizados por docentes y estudiantes para la enseñanza y el aprendizaje del cálculo en el nivel Medio Superior. Para estructurar el análisis se utilizó la propuesta metodológica de Bittar (2022), quien se basa en la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Yves Chevallard.

La presente tesina de investigación está compuesta de tres capítulos. En el primer capítulo, titulado: antecedentes, se hace un breve recorrido del desarrollo histórico de la Comunicación de la Ciencia, se presenta un breve recuento de la evolución de los medios e instrumentos de Comunicación de la Ciencia y se resumen algunos ejemplos significativos de investigaciones relacionadas con la presente y que se consideran relevantes en el campo del análisis de libros de texto desde la Educación Matemática.

En el segundo capítulo, titulado: perspectiva teórica, se presentan información y definiciones que permiten dar un contexto conceptual sólido al estudio, así como el marco teórico que sustenta a la investigación. Se explora a grandes rasgos la Comunicación Pública de la Ciencia, los libros de texto como instrumentos de la Comunicación Pública de la Ciencia, la historia de las

matemáticas como recurso de enseñanza y aprendizaje, el análisis de libros de texto desde la Educación Matemática y la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

En el tercer capítulo que lleva el nombre de la investigación, se describe la propuesta metodológica de Bittar (2022) a través de la cual se realizó el análisis de los libros texto, se describe la muestra trabajada, se exponen extractos de los libros que se consideran interesantes para este estudio y se sintetizan y discuten los resultados del análisis de contenido para hacer conclusiones y generar propuestas.

Antecedentes

En este capítulo se hace un breve recorrido del desarrollo histórico de la Comunicación de la Ciencia, posteriormente se presenta un recuento de momentos clave en la evolución de los instrumentos de Comunicación de la Ciencia y se resumen algunos ejemplos significativos de investigaciones que se consideran relevantes para la temática de la presente investigación y que permiten tener una perspectiva más clara y fundamentada del contexto en el que se desarrolla el estudio.

El desarrollo de la Comunicación Pública de la Ciencia

La Comunicación Pública de la Ciencia ha tenido un largo recorrido para llegar a ser lo que ahora es, de una u otra manera acompañando siempre a la ciencia en su desarrollo y proliferación. En este sentido Ren y Zhai (2014) consideran que la historia de la comunicación y popularización de la ciencia comenzó en los albores de la civilización, a la par del surgimiento de la tecnología y la ciencia, haciéndose presente a través de la transmisión de habilidades que los trabajadores, artesanos o expertos compartían a personas sin experiencia, las cuales iban aprendiendo a través de la observación o la repetición. En esta etapa de la civilización el conocimiento no se puede considerar como científico por lo que los autores mencionados la reconocen como una fase de comunicación precientífica.

Dada la necesidad cada vez mayor de masificar el conocimiento, se establecieron los primeros centros educativos. En Grecia, por ejemplo, de acuerdo con Ruiz (2003) aparecen los sofistas que realizaban una labor de formación y enseñanza, aunque es necesario señalar que lo hacían a cambio de una remuneración económica. En Atenas, Platón fundó la Academia que ejerció

una gran influencia en la filosofía y las matemáticas de la época y posteriormente Aristóteles fundó el Liceo que tuvo una gran influencia en la siguiente etapa de la civilización griega.

En la Europa occidental, región que por tradición es el parámetro con el que se mide el avance científico y tecnológico, por lo menos hasta antes del siglo XX, de acuerdo con Grant (2016) la ciencia decayó a su punto más bajo entre los años 500 y 1000. Esta situación fue mejorando gracias a la influencia de diversos tratados científicos griegos y árabigos que en los siglos XII y XIII introdujeron un conjunto nuevo de literatura científica, gracias a lo que denominan una gran era de traducciones que permitió tener acceso a libros originalmente escritos en otras lenguas por medio de su transcripción en latín, que era considerada como la lengua universal del saber en la región. La traducción entonces se presenta como elemento valioso para la comunicación científica.

La integración de los métodos empíricos y lógicos para analizar a la naturaleza sentó las bases para el origen de la primera revolución científica, en este contexto Sánchez-Mora (2015) ubica en el siglo XVII a los primeros trabajos científicos surgidos con el objetivo directo de dar a conocer resultados de investigación a otras personas, iniciando como correspondencia entre científicos y luego entre estos y editores.

Quizás el más famoso de los estudiosos de la naturaleza de tal periodo es Galileo Galilei, reconocido como uno de los más grandes científicos de la historia, Santaolalla (2022) resalta su labor para favorecer la razón y la experimentación, incluso contra el poder que la iglesia ostentaba y hacia valer. Este autor reconoce a Galileo como un gran divulgador, considerando su libro: diálogos sobre los dos máximos sistemas del mundo, publicado en 1632, como uno de los más brillantes escritos sobre divulgación jamás publicados.

Este libro tiene, entre otras, un par de características que se consideran relevantes para el análisis desde la comunicación de la ciencia. En primer lugar, promueve el pensamiento copernicano en el cual la Tierra gira alrededor del Sol, y no al revés como era lo universalmente aceptado, lo que de acuerdo con Durán (2012) le valió su ingreso al índice de libros prohibidos y sufrir de un proceso inquisitorial que casi le cuesta la vida. La situación invita por un lado a la reflexión sobre los peligros que existían al comunicar ideas no promovidas o aceptadas por la autoridad y por otro lado a reconocer los alcances que puede tener una obra de este tipo, siendo en este caso de un profundo impacto en el ámbito científico y cultural, cambiando formas de pensar y allanando el camino para los científicos que habrían de seguirle.

Por otro lado, resulta interesante su estilo de redacción, la expresión a través del diálogo entre dos personajes ficticios permitió a Galileo presentar argumentos complejos de manera más accesible, pudiendo ser entendidas por el lector común y no solamente por la elite científica de la época. Esta idea se refuerza al hablar sobre el idioma seleccionado para su publicación, Ren y Zhai (2014) relatan como Galileo eligió al italiano común, en lugar del latín culto que era la norma de uso para las agrupaciones científicas y académicas contemporáneas, por lo que tras su publicación en 1632 se vendió por completo y de inmediato. Todo esto influyó en el desarrollo de la literatura científica y también en la comunicación pública de las ideas científicas.

Dando un salto a una época más reciente, Montañés (2010) señala que estudios como el informe Bodmer, realizado por el Council for the Royal Society of London en 1985, permitieron darse cuenta de que existía una situación poco favorable en cuanto a las políticas públicas en materia de comunicación científica pues se encontró que una gran cantidad de adultos tenían dificultades educativas elementales para comprender sobre ciencia. Las recomendaciones generadas a partir del informe fueron tomadas como guía a seguir en la búsqueda de la comprensión popular del conocimiento científico, sirviendo también como evidencia de la necesidad de acortar distancias entre la ciencia y el público.

Conforme la Comunicación Pública de la Ciencia ha ido obteniendo cada vez mayor importancia, se han desarrollado organismos gubernamentales que se dedican a promoverla y regularla. En México, de acuerdo con Orozco (2016a) el presidente Lázaro Cárdenas creó en 1935 al Consejo Nacional de Educación Superior y de la Investigación Científica, que después se convertiría en el Instituto Nacional de la Investigación Científica, INIC, estando a su cargo la coordinación y fomento de las actividades científicas y tecnológicas nacionales. El autor señala a 1970 como el año en que surgió CONACYT (actualmente CONAHCYT) con lo que en México se empezó a tener una política explícita para las actividades relacionadas con la ciencia y la tecnología.

En la actualidad cobra relevancia la noción del derecho al conocimiento, el Consejo Nacional de Humanidades Ciencias y Tecnologías CONAHCYT (2024) en la página web oficial del organismo reconoce al Acceso Universal al Conocimiento AUC, como:

parte del derecho humano a la ciencia, garantiza el goce de los beneficios que brindan la investigación humanística y científica y el desarrollo tecnológico a través de acciones,

espacios y materiales que ponen a disposición de las y los mexicanos los avances y la diversidad de saberes.

En el contexto internacional, la ONU propuso la Agenda 2030 sobre el Desarrollo Sostenible, que tiene la intención de mejorar la calidad de vida de toda la población mundial. En esta agenda podemos encontrar a la Educación de Calidad como uno de sus objetivos, además la ONU (2024) considera a la educación como factor clave para alcanzar muchos otros objetivos de la agenda. El organismo plantea que una Educación de Calidad ayuda en el proceso hacia la reducción de desigualdades, a avanzar en la búsqueda de la igualdad de género, a promover una vida más saludable y sostenible, así como a promover la tolerancia y desarrollar sociedades más pacíficas. Para esto se considera fundamental el papel de la comunicación científica.

Dentro del contexto actual de la Comunicación Pública de la Ciencia vale la pena mencionar al concepto de ciencia abierta, la UNESCO (2021) en el documento generado tras la reunión que se llevó a cabo en París del 9 al 24 de noviembre de 2021 define a la ciencia abierta como: “Un constructo inclusivo que combina diversos movimientos y prácticas con el fin de que los conocimientos científicos multilingües estén abiertamente disponibles y sean accesibles para todos”. (p. 7).

En tal documento se recomienda a los estados miembros que adopten medidas en siete ámbitos de acción: promover una definición común de la ciencia abierta, de los beneficios y desafíos que conlleva y de los diversos medios de acceder a ella, crear un entorno normativo propicio para la ciencia abierta, invertir en infraestructuras y servicios de ciencia abierta, invertir en recursos humanos, formación, educación, alfabetización digital y desarrollo de capacidades para la ciencia abierta, fomentar una cultura de la ciencia abierta y armonizar, promover enfoques innovadores para la ciencia abierta en las diferentes etapas del proceso científico los incentivos en favor de la ciencia abierta y promover la cooperación internacional y multipartita en el contexto de la ciencia abierta y con miras a reducir las brechas digital, tecnológica y de conocimientos.

En México los lineamientos por los cuales se garantiza el acceso universal al conocimiento son de relativamente reciente creación y se establecen en la Ley General en materia de Humanidades, Ciencias, Tecnologías e Innovación, publicada en el Diario Oficial de la Federación el 8 de mayo de 2023. En este sentido se considera relevante la mención del:

“Artículo 6. El Estado debe garantizar un entorno favorable para la promoción, desarrollo y comunicación de las humanidades, las ciencias, las tecnologías y la innovación, y adoptará medidas que promuevan la calidad técnica de la investigación, la disposición social y el acceso universal al conocimiento humanístico y científico y a sus beneficios sociales en todas las regiones del país, así como la adecuación cultural y la seguridad humana y ambiental de sus aplicaciones tecnológicas”. (pp. 4-5).

El reconocimiento de la importancia que tiene la comunicación científica por parte de las instituciones gubernamentales y educativas, así como la iniciativa de asociaciones civiles, ha propiciado el surgimiento de congresos en torno a la comunicación de la ciencia, por ejemplo, de acuerdo con Herrera-Lima (2018) la red Public Communication of Science and Technology PCST a partir de su nacimiento en 1989 realiza congresos, con cada vez más participantes, en los que se busca la promoción y el intercambio de experiencias, ideas, métodos, prácticas y perspectivas relacionadas con la comunicación de la ciencia.

Debido a la necesidad de compartir conocimientos con más personas y de promover el progreso dentro de la disciplina, se crearon algunas revistas académicas especializadas en la Comunicación Pública de la Ciencia, Orozco (2016b) considera que las tres principales en el área son Science Communication, Public Understanding of science y Journal of Science Communication, fundadas en 1979, 1992 y 2002, respectivamente. Del mismo modo se han editado libros sobre el tema, por ejemplo, Herrera-Lima (2018) considera que la compilación realizada por la red PCST llamada The handbook of public communication of science and technology se convirtió rápidamente en referente para los estudios de la Comunicación Pública de la Ciencia en diferentes niveles.

Existen también diversos programas de formación profesional relacionados con la Comunicación Pública de la Ciencia, en México se tienen como ejemplos al Diplomado en Comunicación Pública de la Ciencia de la UNAM, la Especialidad en Comunicación de la ciencia de la BUAP o la Maestría en Comunicación y Cultura del ITESO, entre otros. Todos estos esfuerzos hacen constar el valor que se le está dando a la Comunicación Pública de la Ciencia y el reconocimiento de la necesidad de seguirla promoviendo.

Conforme la Comunicación Pública de la Ciencia se ha ido desarrollando, ha estado acompañada de diversos medios que le han permitido acercarse a sus objetivos, en la siguiente sección se abordará tal temática.

La Evolución de los Medios e Instrumentos de Comunicación Pública de la Ciencia

El ser humano tiene en su naturaleza la necesidad de comunicarse, esta capacidad le permite sobrevivir, expresar emociones y necesidades, formar vínculos, cooperar, crear estructuras sociales, intercambiar ideas, aprender, resolver problemas y transmitir conocimientos, entre otras cosas. El desarrollo de esta habilidad y las necesidades cambiantes de la sociedad ha permitido a la humanidad hacer uso de diferentes medios para llevar a cabo sus procesos comunicativos.

Ren y Zhai (2014) proponen que, junto con el progreso de la tecnología y la ciencia, con el paso del tiempo los medios e instrumentos de comunicación de la ciencia han ido evolucionando y madurando. No es difícil deducir que la historia y evolución de los medios e instrumentos de Comunicación Pública de la Ciencia va de la mano del desarrollo de los medios de comunicación, y que estos a su vez evolucionan a partir de los avances de la tecnología. Briggs y Burke (2002) tomando como base a Innis mencionan que al hablar de medios se hace referencia a los materiales utilizados para la comunicación.

Como se ha mencionado, los inicios de la Comunicación de la Ciencia están más relacionados con la comunicación de la técnica, para lo cual fueron fundamentales el lenguaje y el cuerpo en movimiento como medios de comunicación. Para transferir su conocimiento, las sociedades recurrían a la tradición oral, los rituales y ceremonias, las pinturas rupestres, la creación y uso de herramientas, la observación y la participación directa en las actividades productivas.

Berruecos (2009) resalta que la forma en que el lenguaje se pone en escena está estrechamente relacionada con el tipo de canal utilizado, siendo ejemplos la oralidad o la escritura, con el tipo de soporte que podría ser visual o no visual, y con el espacio en el que se desarrolla pudiendo ser público o privado.

Briggs y Burke (2002) señalan sobre la tradición oral, que los relatos y canciones eran transmitidos de forma fluida y no estática, de creación colectiva, señalan como ejemplo popular de esto a la Iliada y la Odisea que, si bien llegaron a transcribirse y son ampliamente conocidos, se generaron como poemas orales. La transmisión de conocimientos a través de la oralidad en forma

de historias, canciones, leyendas y enseñanza directa fue fundamental para las sociedades antes del surgimiento de la escritura. Los conocimientos sobre plantas comestibles, venenosas y medicinales, técnicas y sitios de cacería, astronomía, estaciones climáticas y prácticas agrícolas se pasaban de generación en generación mediante relatos y enseñanzas verbales.

Como evidencia de la comunicación temprana del conocimiento matemático Estrada (2017) reconoce al llamado papiro del Rhind como uno de los primeros textos conocidos sobre el tema. En él se presentan ochenta y cuatro problemas que se consideran de aplicación comercial y para la agrimensura, planteados con lenguaje natural, característico de la que es reconocida como primera etapa de la historia de las matemáticas.

Como consecuencia de la ilustración surgieron diferentes medios para compartir el conocimiento, Sánchez-Mora (2015) resalta el tratamiento que dieron los diccionarios a las ciencias y las artes, su estructura y forma de escritura permitía que no fuera requerido conocimiento preparatorio por parte del lector. Estos instrumentos proporcionan definiciones precisas y comprensibles que permiten al lector interpretar y acceder al conocimiento científico básico, y al promover una uniformidad en el uso del lenguaje científico, permiten a la comunidad no especializada echar un vistazo a los términos y convencionalismos utilizados en diversas ramas de la ciencia.

Respecto a tecnologías más recientes, Ren y Zhai (2014) afirman que diversas investigaciones en China y diferentes partes del mundo, mostraron que la televisión fue el canal más importante a través del cual la población ha podido obtener información sobre ciencia y tecnología. En este espacio también surgieron reconocidas

En la actualidad la internet y los dispositivos móviles permiten tener un acceso más fácil a los resultados de la ciencia, es posible consultar investigaciones científicas, acceder a bases de datos, explorar cursos en línea de acceso abierto o de paga y participar en comunidades académicas locales o globales. Por otro lado, las redes sociales y foros permiten la difusión instantánea de descubrimientos y en ocasiones la interacción directa con expertos. Esta conectividad potencia el aprendizaje autodirigido, puede fomentar el interés por la ciencia y promover una ciudadanía más informada y participativa.

Con tales herramientas y las grandes cantidades de información disponible, surge también la necesidad de desarrollar la capacidad de análisis y selección de fuentes de información pues no toda la información disponible es confiable, actualizada o relevante, por lo que es vital evaluar su origen, propósito y la evidencia que la sustenta. Es importante poder distinguir entre hechos y opiniones, así como reconocer sesgos o desinformación e incluso reconocer si existen intenciones dañinas detrás de alguna publicación.

Cuando se habla de medios e instrumentos de comunicación de la ciencia también es necesario revisar su calidad y pertinencia. Como se ha establecido, los libros de texto se consideran como parte de este corpus de estudio y el análisis de libros de texto es un campo de estudio para la investigación, en el siguiente apartado se describen algunos trabajos relevantes para este estudio.

Algunos Ejemplos de Análisis de Libros de Texto desde la Educación Matemática

El análisis de libros de texto es una práctica común en el campo de la educación matemática y la planificación curricular. Consiste en examinar detenidamente los libros de texto utilizados en la enseñanza de las matemáticas con diversos objetivos, siendo algunos de los más recurrentes: evaluar su calidad, evolución, contenido y efectividad en el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina. El enfoque y la metodología de cada investigación están directamente relacionados con sus objetivos.

González y Sierra (2004), realizaron un estudio en el que diseñaron un instrumento para el análisis de libros de texto a través del cual muestran cómo han evolucionado los conceptos relativos a los puntos críticos en los libros de textos españoles publicados a lo largo del siglo XX. En sus palabras la decisión de estudiar este tema fue tomada debido a que:

Es un tópico que aparece en todos los libros de texto, es uno de los motores que dio pie al nacimiento del cálculo diferencial, una de las aplicaciones más características de éste y una fuente de problemas y fenómenos que podrían caracterizar las situaciones didácticas en los libros de texto” (p. 391).

Su investigación les permitió analizar la forma en que se presentan en los libros seleccionados los contenidos relacionados con el tema, su evolución y la relación que se mantiene con los planes educativos y contextos propios de cada época analizada. Presentan también una comparación entre editoriales, determinando que en una gran cantidad de los libros analizados

imperla la ausencia de contextualización, prevaleciendo lo algorítmico. Por otro lado, encontraron que los conceptos, problemas y definiciones se presentan de manera estática.

Como excepción destacan a las publicaciones de Grupo Cero de Valencia, concluyendo que, “siguiendo la fenomenología de Freudenthal, introducen y desarrollan los conceptos mediante una serie de actividades dirigidas” (P. 399). Tras su análisis sugieren que a través de esta estructura se busca lograr la comprensión y la justificación de los conceptos en lugar de la aplicación rutinaria de ciertas reglas memorizadas.

Los autores del estudio comentan que su interés por realizar un análisis de libros de texto surge de la hipótesis de que la práctica de la enseñanza, la que realmente se trabaja en clases, no está tan determinada por los decretos y órdenes ministeriales o acuerdos secretariales como por los libros de texto que se utilizan en el salón de clases, incluso si su diseño se hace con base en el currículo oficial.

En otra investigación de este tipo, que compara la evolución en la manera de abordar el desarrollo de un objeto matemático en los libros de texto a través del tiempo, Mellado et al. (2016) analizan el tratamiento que se le da al límite finito en diferentes libros de texto publicados entre 1933 y 2005. En su investigación consideraron 40 libros en los que analizaron al límite finito, tanto de sucesiones como de funciones.

En sus resultados reportan la frecuencia en que se manifestaba a través de cada tipo de registro de representación. Además, de enfocarse en los que denominan como “fenómenos de aproximación simple intuitiva (a.s.i) y retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones (i.v.s) y fenómenos de aproximación doble intuitiva o ADI y de ida-vuelta o retroalimentación en funciones (IVF)” (P. 128).

Estos ejemplos, entre otras cosas permiten entender que el análisis de libros de texto es una oportunidad de investigación, a la que incluso se le puede dedicar gran tiempo y esfuerzo, pero que también otorga recompensas, por ejemplo, la investigación de Mellado et al. (2016) se realizó en un tiempo aproximado de cuatro años y proporcionó resultados que se pudieron manifestar en capítulos de las tesis doctorales de los autores. Por otro lado, la consideración de periodos temporales tan amplios permite hacer una diferenciación epistemológica de las actividades, que

muy probablemente va a la par de las corrientes educativas de cada lugar y tiempo, un aspecto que vale la pena estudiar.

Por otro lado, Eren et al. (2015) analizaron el uso de la historia de las matemáticas en libros de texto de Turquía, para conocer como integran este recurso. Se analizaron cuatro libros de texto de diferentes niveles educativos, en los que pudieron encontrar 42 casos en los que se implementó tal estrategia de aprendizaje. Como resultados se dieron cuenta de que, el uso de la historia de las matemáticas en estos libros se hizo con el propósito de: “dar a las matemáticas una faceta humana, mostrar que los conceptos han evolucionado, desarrollar una perspectiva multicultural, explicar el papel de las matemáticas en la sociedad, cambiar la percepción de las matemáticas y proveer oportunidades de investigación” (P. 1).

En su estudio destacan el papel del análisis de contenido como técnica de investigación para obtener información de los libros de texto, que permite hacer inferencias válidas y significativas. Por otro lado, consideran que este tipo de investigaciones pueden ser de utilidad para los autores, editores y casas editoriales, quienes pueden usar tal información para incluir en los libros más oportunidades de acceso a la historia de las matemáticas.

De manera similar Schorcht (2018) analizó el uso de la historia de las matemáticas en Alemania, siendo su trabajo el primero en su tipo para tal país. En su estudio hace un análisis de 151 tareas que se relacionan de alguna manera con la historia de las matemáticas y las asocia con una de sus cuatro dimensiones: “conexión entre el presente y el pasado, evolución de las matemáticas en el tiempo, personas a través de la historia de las matemáticas y las metas y propósitos de las matemáticas” (P. 143).

Las dos investigaciones anteriores tienen objetivos similares, pero metodologías y categorías diferentes, que pueden servir como punto de partida para quien tenga la intención de investigar sobre estos temas, en especial si pretende indagar sobre los objetivos del uso de la historia de las matemáticas, siendo posible retomar las categorías propuestas por alguna de las investigaciones o generar unas diferentes.

Hablando de metodología, Bittar (2022) presenta una propuesta metodológica para el análisis de libros de texto, basada en la teoría antropología de lo didáctico de Chevallard, en la que se consideran los siguientes pasos: “Constituir el corpus para el análisis, la modelación de

praxeologías matemáticas presentes en la parte del curso del material, hacer el análisis matemático de las actividades propuestas, la modelación de praxeologías didácticas y la triangulación de datos” (P. 307).

Esta metodología la desarrolló a partir de su experiencia como parte del comité del programa nacional de libros de texto de Brasil, en el que además pudo ser testigo de la mejora en la calidad de los libros de texto cuando las casas editoriales son obligadas a evolucionar y mejorar su oferta de publicaciones, tras ser sometidas al análisis, pues sólo alcanzando ciertos indicadores de calidad podían ser parte de los textos seleccionables para ser utilizados en el aula. Siendo esto evidencia clara de la potencialidad de este tipo de investigaciones.

Son y Diletti (2017) hacen un metaanálisis sobre las oportunidades de aprendizaje que se presentan en los libros de texto de acuerdo con los marcos teóricos a los que están vinculados, considerando libros de Hong Kong, Singapur, Corea, China, Japón y los Estados Unidos. En su investigación toman en cuenta: “objetivos de aprendizaje, temarios, ubicación de los temas, tamaños de los libros, asignación de contenido, asignación de tiempos, repetición de contenidos, desarrollo de conceptos y procedimientos, el uso de la tecnología y el uso de los ejemplos propuestos” (P. 7). Además de los resultados propios de la investigación, se presenta información de utilidad para el futuro investigador de estos temas, como el tipo de preguntas que podrían considerarse, la manera de hacer análisis de problemas y la consideración de características contextuales.

Finalmente, Fan et al. (2013) hacen un estudio del estado del arte del análisis de libros de texto en educación matemática, considerando su desarrollo y hacia dónde se dirige este campo de investigación. Se relata el progreso que se ha tenido en décadas pasadas y las temáticas en las que se ha concentrado la investigación. Por sus características, esta investigación ha sido utilizada y referenciada por diversos autores, incluso en algunas de las investigaciones mencionadas párrafos atrás.

Todas las lecturas mencionadas, a su vez contienen estudios del estado del arte del análisis de libros de texto de matemáticas, sobre todo cercanos a los objetivos que se persiguen en cada una de ellas, por lo que el análisis de la bibliografía presente en cada una de ellas se convierte en una excelente oportunidad de ampliar el panorama del investigador que pretende adentrarse en estos temas.

Perspectiva teórica

En este apartado se desarrolla el sustento teórico sobre el cual se construye esta investigación y se definen los conceptos relacionados con ella. En primer lugar, se describen brevemente las llamadas teorías de la recepción, después se describe a la Comunicación Pública de la Ciencia y los modelos que se consideran adecuados para sostener la investigación, posteriormente se contrastan diferentes posturas con la intención de evidenciar la posibilidad de considerar a los libros de texto como instrumentos de Comunicación Pública de la Ciencia, a continuación se aborda el tema de la historia de las matemáticas como recurso de enseñanza y aprendizaje y para cerrar el capítulo se describe a la Teoría Antropológica de lo Didáctico que da el soporte teórico a la metodología.

Teorías de la recepción

Al hablar de libros o de cualquier medio de Comunicación Pública de la Ciencia, es fundamental considerar cómo los estudiantes o los públicos destinatarios perciben y se relacionan con el contenido. Guzmán (1992) reconoce a las llamadas teorías de la percepción como un conjunto heterogéneo de enfoques que se ocupan de cómo es la recepción y los efectos que tienen los textos sobre el lector. Su origen proviene de estudios literarios, aunque se considera que sus propuestas se pueden extender a la comunicación y en este caso a la Comunicación Pública de la Ciencia. Ball y Gutiérrez (2008) entienden a la recepción como una manera de identificación primaria con el objeto, fundamentada en la percepción y en el impacto que puede ocasionar un texto en el receptor, es decir, en el lector.

A decir de Guzmán (1992) las teorías de la recepción resaltan el papel activo del receptor tanto en el momento mismo de la lectura como en los efectos que deja el texto tras su recepción. Desde la perspectiva de estos enfoques el lector se convierte en el centro de los estudios pues se analiza su papel en el proceso de interpretación y creación de significado. El énfasis está en la interacción activa entre el receptor y la obra, sugiriendo que el significado no está simplemente codificado en el texto, sino que se produce en el acto de la recepción.

Nitschack (1991) afirma que para las teorías de la recepción no puede haber obra de arte o texto sin receptor, sin lector, pues se toma conocimiento de un texto solamente por medio de la lectura. Considera que incluso el escritor es el primer lector de su propio texto. Además, menciona

que los textos no están aislados y que sus efectos dependen del conjunto de textos en el que se encuentra inmerso.

El autor reconoce como relevantes dentro de estas teorías a las aportaciones de Hans Robert Jauss, quien propone que los lectores tienen un horizonte de expectativas basado en sus experiencias previas, conocimientos y contexto cultural y que este influye en cómo interpretan un texto. Sugiere que la recepción de un texto no es estática y cambia con el tiempo, variando entre diferentes grupos de lectores, desafiando la idea de que un texto tiene un significado fijo y universal.

Probablemente haya ocurrido al lector que al leer un mismo libro en diferentes etapas de su vida lo entienda de una manera distinta, esto podría deberse a diversos factores relacionados con la evolución personal y el contexto en el que se lee. Algunas razones pueden ser las nuevas experiencias vividas, el estado emocional, el conocimiento acumulado, el contexto externo, los cambios en las prioridades, metas o intereses y, por supuesto, las capacidades cognitivas pues suelen mejorar a medida que una persona madura. Valdría la pena preguntarse y analizar cómo todo esto puede ocurrir cuando se analiza un libro de texto, particularmente de matemáticas, pues este tipo de publicaciones tienen un enfoque más apegado a la objetividad.

En este sentido Guzmán (1992) señala que el lector tiende a rellenar por medio de su experiencia personal los espacios vacíos que presenta un texto. Sobre el ámbito escolar, menciona que puede considerarse como un peligro que la interpretación de los textos pueda tener recepciones que se podrían juzgar como no adecuadas, se promueve entonces la tendencia a instituir una determinada recepción. Menciona también que pueden existir dificultades comunicativas entre el texto y el estudiante, que pueden radicar en la discordancia de las expectativas.

Por otro lado, Nitschack (1991) reconoce a Iser como otro destacado contribuidor a las teorías de la recepción, aportando ideas como la posibilidad de considerar a la literatura como un acto de comunicación entre el texto y quien lo lee. Destaca la figura del lector implícito, una entidad teórica que representa el tipo de lector que el texto parece anticipar y para quien está diseñado. Tomar en cuenta a este lector implícito, permite saber para quien está diseñado el texto, pudiendo así analizar el nivel de dificultad, el tono, el estilo de enseñanza y los ejemplos utilizados.

De las ideas de Jauss e Iser surge la llamada estética de la recepción, sobre la que Ball y Gutiérrez (2008) señalan que entiende a la literatura como las relaciones circulares entre el autor, el texto y el lector. Desde la perspectiva de la estética de la recepción la complejidad de un trabajo literario radica en lo que no se dice y que estos elementos que no se dicen promueven que quien lee deba construir un sentido con el objetivo de deducir lo que el autor, posiblemente, trata de comunicar, surgiendo así lo que Iser denomina espacios de indeterminación.

Se considera al lector como participante activo en el proceso de lectura y durante este proceso sus experiencias y saberes son factores determinantes en la construcción de significados que aporta el texto. El sentido de un texto no reside solo en sus características intrínsecas, sino también en cómo es recibido y apreciado por los lectores a lo largo del tiempo, los textos ganan o pierden significado en diferentes contextos culturales e históricos.

Berruecos (2009) señala que el proceso de transmisión del conocimiento de la ciencia es principalmente a través del lenguaje, por lo que resulta de gran interés observarlo para delimitar sus características.

La Comunicación Pública de la Ciencia

Es importante reconocer la diversidad de definiciones que existen para la divulgación de la ciencia, incluso cada persona que hace divulgación podría tener su propia acepción. Sánchez (2018) propone una definición operativa, como punto de partida, para la divulgación de la ciencia, entendiéndola como una recreación del conocimiento científico para hacerlo accesible al público.

Por su parte Escobar-Ortiz y Rincón-Álvarez (2019) entienden a la divulgación de la ciencia como una forma específica de Comunicación Pública de la Ciencia, que puede incluir a algunos términos como popularización científica, vulgarización de la ciencia, difusión científica, entre otros. Además, sugieren que es común que en la práctica estos términos sean empleados como sinónimos constantemente.

Castelfranchi y Fazio (2021) describen a la Comunicación Pública de la Ciencia como toda comunicación que posibilita que el conocimiento originado dentro del ámbito científico sea parte de comunidades más amplias. Tiene como meta compartir “nociones, teorías y procesos científicos importantes, con quienes no son científicos (p. 9).

Ren y Zhai (2014), desde su contexto en China, reconocen a la comunicación y popularización de la ciencia como un fenómeno social que se encuentra estrechamente relacionado con la actividad científica y tecnológica, cumpliendo la función de hacer proliferar la información que de esta actividad se genera y promoviéndola en la sociedad, por lo que consideran que ha llegado a ser uno de los tres fenómenos básicos en el campo de la ciencia y la tecnología, siendo los dos restantes la innovación y la aplicación.

Sánchez (2018) reconoce que no existe un método único e infalible para divulgar la ciencia, cada divulgador tiene su propio estilo, de acuerdo con su preparación, personalidad y objetivos particulares. Comunicar la ciencia no es labor fácil, Craig (2019) menciona que la ciencia es intrínsecamente compleja por lo que encontrar una manera de simplificarla sin embrutecerla al punto de una mala interpretación es todo un reto.

Existen diferentes modelos de comunicación de la ciencia, basados en diferentes concepciones sobre el papel de la ciencia, el público objetivo y los medios de comunicación. De acuerdo con Castelfranchi y Fazio (2021) durante mucho tiempo los esfuerzos relacionados con la Comunicación de la Ciencia se enfocaron en la transmisión, pensando en un proceso que ocurre de arriba hacia abajo, unidireccionalmente, de los expertos hacia un público carente de información, lo que se conoce como público lego. A esta percepción y forma de comunicar la ciencia se le conoce como modelo de déficit.

En este documento se toman como referencia al modelo democrático y al modelo educativo, que se describen brevemente a continuación. De acuerdo con Durant (1999) el modelo democrático surge como una alternativa al modelo del déficit, y propone que el público tiene derecho a participar en el debate y la toma de decisiones sobre cuestiones científicas que le afectan o le interesan. Entre sus objetivos tiene fomentar el diálogo, la liberación y la responsabilidad social que tiene la ciencia. Se presenta como un modelo más inclusivo y pluralista, pero también que es más complejo y exigente.

Otro modelo de comunicación de la ciencia que se considera relevante para este documento es el educativo. De acuerdo con Stocklmayer et al., (2010) dicho modelo considera que la comunicación y la divulgación científica son herramientas de la pedagogía que pueden complementar y fortalecer la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias en los ámbitos formal e informal. Esto para promover la mejora en cuanto a la alfabetización científica, el razonamiento

científico y el pensamiento crítico. Este modelo es más didáctico y formativo, pero también más normativo y evaluativo.

Los libros de Texto como Instrumentos de Comunicación Pública de la Ciencia

No hay duda de que los libros han tenido un papel preponderante en la comunicación pública de la ciencia. Por el origen y la orientación de esta investigación, se considera necesario identificar las características de los libros de texto que podrían permitir clasificarlos como instrumentos de comunicación pública de la ciencia, mencionando también aquellas que podrían oponerse a tal caracterización.

Berruecos (2009) propone que cuando se habla de transmisión de conocimientos puede ser desde lo que nombra dos circuitos, uno de ellos en el ámbito formal, institucional, mediante un sistema de aprendizaje progresivo y planeado, bajo el control de una institución evaluadora y dirigido a un público que, por lo menos en teoría, es homogéneo. Por otro lado, se tiene a otro no formal, no institucional, que no sigue una currícula específica y en el que no se evalúa la adquisición del conocimiento ni se espera un público homogéneo.

Sánchez-Mora (2018) ubica en la parte final del siglo XIX a la distanciamiento de la ciencia que se aprendía a través de libros de texto y la que se podía encontrar en un artículo dirigido al público en general, la educación se volvía más especializada cada vez y por consecuencia se dio el surgimiento paulatino de grupos con intereses en común sobre temas de alta especialización, a los que no cualquier persona puede acceder y que tienen como referencias formativas a libros de texto que no cualquier persona puede entender, incluso si se considera una persona culta en otras ramas de la ciencia.

González y Sierra (2004) proporcionan una definición para los libros de texto, siendo:

Aquellos libros que utilizan habitualmente profesores y alumnos a lo largo del curso escolar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de un área de conocimiento. Su contenido es una estructura fácilmente reconocible, por la subdivisión en capítulos y temas que siguen los periodos básicos del calendario escolar (p. 391).

Sánchez-Mora (2018) considera que la llamada ciencia popular es una nueva forma de arte que participa simultáneamente de herramientas como el libro de texto, el reportaje, el ensayo

filosófico y el proyecto sociológico. Puede considerarse que el libro de texto es lo que Berruecos (2009) reconoce como un mediador entre la ciencia y el público.

La Historia de las Matemáticas Como Recurso de Enseñanza y Aprendizaje

Es común que, en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en diferentes niveles educativos, los esfuerzos se enfoquen en el aprendizaje y la consolidación de los procesos algorítmicos. También es común que este tipo de situaciones promuevan que el estudiante perciba a las matemáticas como algo descontextualizado de la realidad, que existen sólo en sus libros, problemas y exámenes.

Bernal y Lleras (1995) señalan que la visión del egresado del nivel educativo medio superior respecto a las matemáticas es de un conjunto estático de hechos y procedimientos, esto como consecuencia del énfasis que se pone en lo algorítmico y no así en lo conceptual, se aprende de forma puramente procedimental y mecánica. Parte de la labor del docente de matemáticas es idear estrategias que permitan superar a las prácticas tradicionalistas que no promueven el diálogo ni el desarrollo del pensamiento crítico, una de las alternativas es hacer uso de la historia de las matemáticas como recurso de enseñanza y aprendizaje.

Barbin et Al. (2020) señalan que por lo menos hace cuarenta años la integración de la historia de las matemáticas en la educación matemática se ha consolidado como un área de estudio, como práctica pedagógica y también en el ámbito de la investigación educativa. Los autores comentan la existencia de grupos académicos en las décadas de 1960 y 1970 para los que la historia se presentó como una terapia contra el dogmatismo promovido por la educación de esa época, pues a su entender permitía entender a las matemáticas no solamente como un lenguaje sino también como una actividad humana.

Como toda creación del intelecto humano las matemáticas se encuentran son parte de la sociedad, por lo que vale la pena tomar en cuenta a los contextos históricos y sociales en los surgieron los diferentes objetos y métodos matemáticos. Ruíz (2001) propone que cuando se aprende matemáticas, hacer un análisis de su historia ha llegado a ser uno de los instrumentos principales para la contextualización.

Los conceptos y métodos matemáticos atraviesan procesos de desarrollo y evolución a lo largo de la historia, tomar como referencia a estos procesos, así como a los campos de problemas

que los originaron, puede ser de utilidad durante el proceso de aprendizaje. En este sentido Batanero (2005) señala que:

Una mirada a la historia permite tomar conciencia de que los conceptos matemáticos no son inmutables; por el contrario, tanto en matemáticas como en otras ramas de las ciencias, son fruto del ingenio y la construcción humana para tratar de dar respuesta a situaciones problemáticas y están sujetos a evolución. (p. 249)

Desde la perspectiva del aprendizaje de la probabilidad, Batanero (2005) considera que el docente de matemáticas debe tener consciencia de que, durante su proceso de aprendizaje, los estudiantes se pueden encontrar con algunas de las paradojas y situaciones contraintuitivas que habrían ocurrido durante el desarrollo histórico del cálculo de probabilidades y el análisis de procesos estocásticos.

Chaves y Salazar (2003) proponen que la historia tiene una labor más elevada que la recopilación de anécdotas, datos y sucesos. Consideran que la historia junto con la epistemología y la didáctica, pueden formar una fuente teórica ampliamente aplicable a los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por su parte Moru (2009) otorga un papel importante a la historia, sugiere que los conceptos y métodos matemáticos son resultado de desarrollos del pasado, así que es apta para ser usada como una forma de entender a los problemas que los estudiantes enfrentan en su proceso de aprendizaje de las matemáticas.

En este sentido Polya (1981) sugiere que podría ser valioso presentar a los estudiantes la oportunidad de recorrer algunos de los grandes pasos de la evolución del pensamiento matemático, los momentos que realmente se consideren relevantes. Sugiere también que cuando se entiende cómo la humanidad ha adquirido el conocimiento de ciertos conceptos o métodos, se puede estar en una mejor posición para proponer cómo el aprendiz podría adquirir con menor dificultad y mayor profundidad tal parte del conocimiento.

Fried (2001) clasifica en tres grupos a las razones por las que los educadores podrían estar interesados en hacer uso de la historia de las matemáticas. El primero de estos grupos está relacionado con la humanización de las matemáticas, el segundo con hacer a las matemáticas más interesantes, entendibles y accesibles para los estudiantes, el tercer grupo se refiere a la capacidad de la historia de las matemáticas para dar una idea profunda sobre los problemas, conceptos y la

resolución de problemas. Al respecto Barbin et al. (2020) señalan que la historia de las matemáticas ha llegado a ser un recurso valioso para algunos enfoques epistemológicos, entre ellos se pueden nombrar a la epistemología histórica de Bachelard, la epistemología genética de Piaget y la epistemología fenomenológica de Freudenthal.

Por otro lado, Vidal y Quintanilla (2008) reconocen que cada vez se puede ver con mayor frecuencia a la historia de las matemáticas como componente de la educación matemática, llegando a conformarse como una línea de investigación, reconocida como análisis histórico-epistemológico. En la actualidad su importancia es tal que en el International Congress on Mathematical Education (ICME) se creó un grupo dedicado a la Historia y Pedagogía de las Matemáticas (HPM), así mismo existen grupos relacionados con el tema en diversos congresos e incluso congresos especializados.

Barbin et al. (2020) agrupan en tres clases a las contribuciones relacionadas directamente con la investigación teórica y experimental de la historia de las matemáticas en la educación matemática: epistemológica, cultural y didáctica. En cuanto a la contribución epistemológica, entre otras cosas los autores mencionan que la historia juega un papel crucial al proveer de ejemplos específicos y pertinentes de problemas en el contexto en el que los conceptos se originaron o fueron transformados. En cuanto a lo cultural, señalan que algunos trabajos encontraron que la historia provee una imagen diferente de las matemáticas, lo que permite una relación más positiva con el conocimiento matemático y su formación.

La historia permite ubicar a las matemáticas en el contexto de un determinado periodo, por lo que se pueden ligar con la filosofía, el arte y la literatura de esa época, así como con las necesidades sociales de ese contexto temporal. Respecto a la contribución didáctica, entre muchas otras cosas, se considera a la historia como algo útil en la formación del futuro docente de matemáticas y como una gran oportunidad de crecimiento para el docente que ya está frente a grupo, por otro lado, también puede servir como inspiración cuando se elaboran secuencias de enseñanza-aprendizaje y como enlace con múltiples áreas de la ciencia, favoreciendo al enfoque educativo que propone la educación STEAM.

Fried (2001) describe dos estrategias básicas para la introducción de la historia de las matemáticas en el salón de clases. A la primera de ellas le llama estrategia de adición, ya que no altera al plan de estudios en cuanto al contenido original del curso, esto evidentemente provoca un

incremento en cuanto al tiempo necesario para abordarlo. Esta estrategia utiliza actividades como la introducción de anécdotas históricas, biografías cortas, problemas aislados, etc. Entre sus desventajas se puede mencionar que se hace complicado insertar contenido adicional considerando que se cuenta con un tiempo limitado.

A la segunda le llama estrategia de acomodación, esta consiste en acomodar al plan de estudios a las circunstancias históricas o a un modelo histórico. Esto involucra cambios en la forma en que se presenta el material, por ejemplo, usando un desarrollo histórico en la explicación de una técnica o idea, u organizando la asignatura de acuerdo con un esquema histórico, lo cual no es tarea sencilla. Se considera que estas estrategias pueden tomarse en consideración al diseñar libros de texto de matemáticas que incluyan contenido histórico.

Sobre la construcción de un marco teórico para la historia de las matemáticas en la educación matemática, tarea nada sencilla, Fried et al. (2106) consideran que se deben abordar las cuestiones del por qué es necesario aprender historia, qué se ganaría con ello y qué valor hay al aprender de una u otra manera. Existe un largo camino que recorrer en este sentido, lo que presenta una oportunidad para la investigación educativa.

Fried (2001) presenta un debate sobre la inclusión de la historia de las matemáticas, un dilema sobre el acercamiento histórico a la educación matemática. Como factor fundamental considera al problema del tiempo, para lo que presenta soluciones en general para ambas estrategias mencionadas, en el caso de la estrategia de adición, menciona que se puede reemplazar un problema ordinario de clase por otro que se refiera al mismo contenido pero que tenga un contexto histórico. En el caso de la estrategia de acomodación, los programas no requieren la inclusión de temas adicionales, sino enseñar los temas de siempre de una manera diferente.

Además del problema del tiempo el autor analiza el asunto de la relevancia, considera como un problema a la necesidad de medir continuamente la relevancia, pues esto obliga al docente que utiliza el acercamiento histórico a hacer una especie de edición de la historia, para hacer uso de lo que considera relevante y descartando lo que no le parece así.

Por otro lado, Fried (2001) resalta el compromiso de los educadores con enseñar matemáticas modernas, las matemáticas que los estudiantes necesitarán en sus carreras profesionales, esto provoca que la historia de las matemáticas se subordine a las matemáticas

modernas por lo que la historia de las matemáticas deja de ser algo que se estudia para convertirse en algo que se utiliza. Señala también que cuando la historia es utilizada para justificar, mejorar, explicar y motivar prácticas y temas modernos, se vuelve inevitablemente anacrónica, el presente siendo la medida del pasado, lo que podría trivializar a la historia.

El autor indica que, para humanizar las matemáticas a través de la historia, ésta debe ser tomada muy seriamente, no sólo como una mera herramienta. Recomienda, tanto como sea posible, leer los textos como fueron escritos pues esto podría permitir mirar las matemáticas a través de los ojos y trabajos de quienes los concibieron, con las idiosincrasias de los propios autores y de la comunidad matemática de su época. Esto puede ayudar en la humanización de las matemáticas pues las relaciona con humanos reales en situaciones humanas reales, así como al clima social e intelectual en el que vivieron.

Sobre el análisis de textos originales en comparación con los libros de texto, menciona que estos últimos siguen un esquema de presentación y por lo general están cerrados a la indagación, mientras que los textos originales son producto de la indagación e invitan a ella. En este mismo sentido Fried et al. (2016) consideran que los estudiantes aprenden sobre sus propias matemáticas al experimentar y reflexionar sobre el contraste entre los conceptos modernos y sus contrapartes históricas.

Tras realizar un estudio de la historia de la matemática, como un recurso en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, Chaves y Salazar (2003) entre otras cosas concluyen que tal recurso coadyuva a la contextualización histórica de un concepto, así como al entendimiento de la evolución histórica del mismo. Barbin et Al. (2020) consideran que existe la necesidad de una mayor investigación empírica de campo de todos estos temas, pues esta subrepresentada en comparación con la investigación teórica. Una línea de investigación sobre esta temática se presenta en el análisis de libros de texto.

El Análisis de Libros de Texto Desde la Educación Matemática

A pesar de los avances tecnológicos y del surgimiento de múltiples fuentes de información y herramientas para el aprendizaje, los libros continúan siendo un componente importante en los procesos educativos, no siendo la excepción el aprendizaje de las matemáticas. Fan et Al. (2013) consideran que son portadores del currículo por lo que juegan un papel dominante en el escenario

educativo de las diversas asignaturas e incluso establecen muchas de las condiciones en las que se lleva a cabo la enseñanza y aprendizaje en el aula. Los resultados de sus investigaciones los llevaron a concluir que maestros que utilizan diferentes libros de texto mostraron diferentes estilos de estrategias de enseñanza.

El análisis de libros de texto es importante por diversos motivos y puede contribuir en diferentes aspectos, dependiendo de los objetivos que cada investigación persiga. Se puede por ejemplo analizar si el libro está alineado con el currículo vigente y con sus objetivos de aprendizaje, es posible también hacer análisis de la calidad del contenido presentado en el libro o su relevancia en el contexto educativo actual, así como su accesibilidad o la promoción de la inclusividad, entre muchas otras cosas.

Fan et Al. (2013) reconocen la amplitud de la investigación dedicada al análisis de libros de texto, pudiendo estar enfocada en sólo un libro o también en una serie de ellos, esto último puede permitir, entre otras cosas, explorar cómo se trata un tema o idea para reconocer las diferencias y similitudes con la que los autores en su contexto dan tratamiento a los diferentes objetos matemáticos y cómo esto se refleja en sus textos.

Existen diversos acercamientos y enfoques teóricos que se enfocan en el análisis epistemológico, en los que se estudia la manera en que se presenta el conocimiento matemático y cómo influye en el aprendizaje de las matemáticas. En este tipo de investigaciones podemos encontrar al análisis de la historia de las matemáticas como herramienta de aprendizaje, tema importante en esta investigación. En el primer capítulo de este documento podemos encontrar algunos ejemplos de análisis de libros de texto desde la educación matemática

Teoría Antropológica de lo Didáctico

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) es un marco de trabajo desarrollado por el profesor francés Yves Chevallard, en el que se propone una forma de entender cómo se enseña y se aprende, nació y es especialmente utilizada en la educación matemática, aunque ya no es exclusiva de esa área. De acuerdo con Chevallard y Bosch (2020a) esta teoría tiene como uno de sus objetivos explicar la relación de las sociedades humanas con lo didáctico, con todos los posibles factores del aprendizaje.

Chevallard (2022) explica la inclusión del adjetivo antropológico debido a que gradualmente se hizo evidente la necesidad de tomar en cuenta múltiples condiciones que no siempre pertenecen al salón de clases y que determinan toda actividad humana, pudiendo estar muy alejadas respecto al espacio social y el tiempo histórico de los estudiantes y maestros, y que en ocasiones sólo pueden conocerse parcialmente. El aprendizaje es una actividad social, la cual no puede existir fuera de un marco cognitivo de referencia.

Chevallard y Bosch (2020a) proponen que al adoptar un punto de vista antropológico se pretende abarcar la didáctica en cualquier lugar que se presente, se reconoce que el ejercicio de las matemáticas está presente en cúmulo de actividades humanas y de instituciones de la sociedad, prestando especial atención a las construcciones institucionales de conocimiento y las condiciones establecidas para diseminarlo.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico tiene como uno de sus conceptos fundamentales al de transposición didáctica, Chevallard y Bosch (2020b) la definen como: “las transformaciones que un objeto o cuerpo de conocimiento sufre desde el momento en que es producido, seleccionado y designado para ser enseñado hasta que en realidad es enseñado en determinada institución educativa” (p. 214).

Esto significa que el conocimiento científico, lo que saben los expertos, se transforma en conocimiento que se puede enseñar, pues de acuerdo con Chevallard (2020), para que la enseñanza de cualquier elemento de conocimiento sea posible, este deberá haber pasado por ciertas transformaciones, que lo preparan para ser enseñado. En este sentido, tomando un ejemplo de la educación matemática, preparar una lección sobre algún objeto matemático es hacer la transposición didáctica de tal objeto matemático.

La transposición didáctica aporta a la Teoría Antropológica de lo Didáctico fundamentando la mencionada transformación del conocimiento, dando estructura a los componentes del proceso educativo al identificar y diseñar actividades y materiales didácticos que sean pertinentes para los objetivos educativos y las características de los estudiantes, siendo base para analizar las prácticas educativas, tomando en cuenta al contexto socio-cultural, e incluso considerando la evolución histórica del conocimiento.

Es posible inferir que la transposición didáctica no se limita al ámbito escolar formal, sino que también se aplica en diferentes contextos, incluida la Comunicación Pública de la Ciencia pues quien practica esta labor, entre otras cosas, debe adaptar el conocimiento científico, seleccionar los medios y formatos de comunicación y tener claridad sobre los roles y actores involucrados en el proceso, todo esto teniendo siempre en cuenta que no se debe distorsionar el conocimiento científico pues la transposición didáctica no debe llevar a la inexactitud.

Al respecto Berruecos (2009) menciona que una hipótesis recurrente cuando se habla de ciencia es la existencia de un discurso primario, el que viene directamente de la investigación, construido con un vocabulario compartido entre personas de una comunidad restringida y con saberes a la par, y que por otro lado, existe un discurso secundario que se utiliza al comunicar la ciencia fuera de tal círculo, en el que se reformula el discurso, se utiliza la paráfrasis, se hace uso del dialogismo, entre otras estrategias, para adaptar el conocimiento científico a un formato que sea accesible y comprensible para un público no especializado de tal modo que el conocimiento pueda ser entendido, este proceso se acerca a la idea de la transposición didáctica.

Durante el proceso de transposición didáctica ocurre lo que Chevallard (2020) define como el principio de vigilancia epistemológica, refiriéndose a la supervisión continua y la atención crítica y reflexiva que se debe mantener sobre la transformación y adaptación del conocimiento con el objetivo de asegurar la precisión científica, mantener la claridad y coherencia y evitar la creación de malentendidos y conceptos erróneos. En el contexto de la comunicación pública de la ciencia también se hace presente esta vigilancia epistemológica para asegurar que la información científica presentada al público objetivo sea tanto accesible como precisa.

Sobre este tema Sánchez-Mora (2015) señala que cuando se hace ese trabajo de transposición didáctica, se debe considerar la riqueza de los procesos que directamente intervienen en la elaboración del conocimiento que se reconoce como primario, esto con el objetivo de que en el proceso de la divulgación de la ciencia la transposición no sea sólo una degradación, es necesario transformar sin desvirtuar, mantener la fidelidad del mensaje científico, incluso si sólo dispone de las herramientas del lenguaje natural para alcanzar sus objetivos.

Por otro lado, la Teoría Antropológica de lo Didáctico considera que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, o de cualquier área del conocimiento, depende las instituciones y de acuerdo con lo que describen Chevallard y Bosch (2020b) estas pueden entenderse en un sentido

más amplio de lo usual, pudiendo ser instituciones una clase, un matrimonio, una familia, el gobierno, una escuela, etc. Bajo esta premisa se considera que los libros de texto pueden ser considerados como instituciones pues contienen un conjunto de normas, prácticas y estructuras, que pueden regular y organizar una actividad social, en este caso la actividad de enseñanza y aprendizaje.

Al respecto Bittar (2022) menciona que una institución es un dispositivo social que impone reglas operativas, estas reglas son dirigidas a individuos, quienes en esta teoría se denominan sujetos de la institución. Padres e hijos son sujetos de la institución familia. Chevallard y Bosch (2020b) también nombran a los sujetos simplemente como personas y proponen que de las relaciones entre instituciones y personas se deriva la noción de posición institucional y que toda institución tiene por lo menos una posición. Esto lo ejemplifican con una clase, en la que hay dos posiciones institucionales básicas, la posición del docente y la del estudiante.

Considerando a los libros de texto como una institución, podría pensarse que los sujetos serían los individuos o los grupos que interactúan con estos libros y se ven influenciados por ellos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, pudiendo nombrar como los principales a autores, profesores y estudiantes.

Bittar (2022) destaca también a la noción de objeto, definiéndolo como cualquier cosa que existe para por lo menos un individuo o institución. Chevallard y Bosch (2020b) consideran que cualquier palabra que aparece en por lo menos un diccionario puede ser clasificada como objeto en el marco de la TAD, cualquier técnica o noción en matemáticas es también un objeto. Una persona puede tener relación con un objeto, siendo esta relación todo lo que la persona puede hacer, pensar o sentir con o sobre él, se dice que la persona conoce al objeto cuando esta relación existe. En la TAD saber algo siempre es en relación no sólo con las instituciones a las que el sujeto pertenece sino también en relación con las instituciones que reconocen la existencia del objeto y las diferentes formas de relacionarse con él.

Un concepto más que se utiliza en la Teoría Antropológica de lo Didáctico es el de noosfera, la RAE (2024) define este término como “conjunto de los seres inteligentes con el medio en que viven”. Por su parte, y desde la perspectiva de la TAD, Bittar (2022) la define como la esfera responsable de pensar, influenciar y decidir lo que será definido como el conocimiento a enseñar

en cada nivel educativo. Se considera que la noósfera está constituida por un conjunto de instituciones, por ejemplo, una asociación de maestros o las casas editoriales de libros de texto.

Esta noosfera, de acuerdo con lo que propone Chevallard (2020), está en la periferia del sistema de enseñanza, siendo punto de encuentro para los sujetos participantes en el funcionamiento didáctico, proporcionando el entorno cognitivo y cultural en el que se desarrolla el aprendizaje. Es el contexto en el que se realiza la transposición didáctica y donde interactúan los saberes científicos, pedagógicos, culturales y sociales.

Otro concepto clave en la Teoría Antropológico de lo Didáctico, y en la metodología que se presenta más adelante en este documento, es el de praxeología didáctica, que de acuerdo con Chevallard y Bosch (2020a) es el objetivo principal en el análisis del acercamiento a la cognición. Es el estudio sistemático de las actividades y tareas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje, así como los conocimientos teóricos y prácticos que las sustentan.

Bittar (2000) afirma que la TAD propone que toda actividad humana puede ser descrita por el denominado cuarteto praxeológico. Chevallard y Bosch (2020a) señalan que la TAD propone que una actividad puede ser descompuesta en una sucesión de tareas (t) de varios tipos (T). Para realizar una tarea es necesaria la utilización de una técnica (T) que es una forma de hacer las tareas del tipo T. Un tipo de tarea (T) y una técnica (τ) para realizar una tarea forman lo que en la TAD se conoce como el bloque técnico-práctico, el cómo se hace. La técnica es justificada y legitimada por una tecnología (θ) que la valida como una forma correcta de hacer una tarea (t) que pertenece a un tipo de tarea (T). A su vez, la tecnología (θ) es justificada por una teoría (Θ) que consiste en declaraciones de un carácter más general y abstracto. El Bloque [θ, Θ] es llamado teórico-tecnológico o bloque de conocimiento.

La actividad matemática puede ser descrita utilizando este modelo, si por ejemplo se tiene la tarea (t) de despejar la ecuación $5x = 10$, el tipo de tarea (T) es resolución de ecuaciones lineales, la técnica (τ) consiste en dividir ambos lados de la ecuación sobre 5, la tecnología (θ) consiste en la aplicación del inverso multiplicativo y la teoría (Θ) está determinada por las propiedades de las igualdades en matemáticas. La praxeología en la TAD permite analizar y comprender las prácticas educativas, proporciona un marco robusto para el diseño, evaluación y mejora de la enseñanza y el aprendizaje.

Análisis del Contenido Histórico en Libros de Texto de Cálculo Diferencial, Bachilleratos Mexicanos 2016 - 2021

En este capítulo se describe la parte práctica de la investigación comenzando por una explicación de la metodología, se describe el catálogo analizado, se modela la praxeología del contenido que incluye contenido histórico en la parte ilustrativa de los libros, se analizan las actividades propuestas para que el aprendiz resuelva y que incluyen contenido histórico para intentar modelar las praxeologías didácticas y se triangulan los datos de acuerdo con los objetivos de la investigación para después generar conclusiones y propuestas.

Metodología

Se presenta una investigación cualitativa. Se siguen las bases del análisis de libros de texto en educación matemática que propone hacer una evaluación y estudio crítico de cinco libros de texto de cálculo diferencial, siendo estos algunos de los más comunes que utilizan los docentes como apoyo para el aprendizaje del cálculo diferencial en el nivel Medio Superior. Se analizó la cantidad de ocasiones en las que se habla sobre la historia de las matemáticas y la forma en que se utiliza a la historia de las matemáticas como recurso de aprendizaje en tales libros.

Para el análisis se utilizó la propuesta metodológica de Bittar (2022) quien se basa en la teoría antropológica de lo didáctico de Chevallard. Tal propuesta presenta los siguientes pasos: constituir el catálogo a analizar, modelación de las praxeologías matemáticas presentes en la parte ilustrativa del libro, hacer el análisis de las actividades propuestas, modelación de las praxeologías didácticas y triangulación de datos.

Constitución del Catálogo Para Analizar

En el presente estudio se seleccionaron cinco libros de texto que son utilizados por profesores y estudiantes durante el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial en el bachillerato mexicano. A continuación, se describen brevemente las características principales de cada una de las publicaciones analizadas.

El designado como libro 1 de este estudio es titulado cálculo diferencial e integral, fue editado por el Colegio Nacional de Matemáticas, CONAMAT a través de la editorial Pearson y publicado en su cuarta edición en 2016, esta edición consta de 504 páginas y 11 capítulos, de los cuales 207 páginas y 5 capítulos están dedicados al cálculo diferencial. CONAMAT (2016)

describe el enfoque de este libro como cien por ciento práctico, su componente teórico sólo está constituido por conceptos básicos, se da mayor valor a los ejemplos que sirven de referencia para resolver los ejercicios. Los autores reconocen el valor del razonamiento, pero consideran que la práctica puede ayudar a que tal razonamiento se alcance con mayor rapidez y menor dificultad, haciendo bastante explícita su intencionalidad. El libro fue analizado en su formato físico.



Figura 1. Portada del libro: cálculo diferencial e integral. CONAMAT (2016)

El libro 2 de este estudio se titula cálculo diferencial y fue desarrollado por Ortiz et al., se trabajó con su tercera edición ebook en 2019 publicada por Grupo Editorial Patria y pertenece a la serie integral por competencias, consta de 178 páginas y 3 bloques. De acuerdo con lo que mencionan Ortiz et al (2019) el libro obedece a la actualización de los planes y programas de estudio del Bachillerato General mexicano y mencionan que se colocan a los problemas como el elemento principal que promueve el aprendizaje. El libro fue analizado en su formato digital a través de la plataforma eLibro, a la que es posible tener acceso a través de la biblioteca digital BUAP.

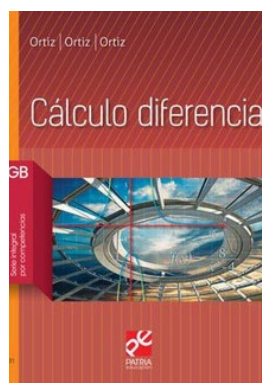


Figura 2. Portada del libro: cálculo diferencial. Ortiz et al (2019)

El libro 3 de este estudio, llamado cálculo diferencial: un nuevo enfoque fue escrito por Gustavo Guerrero y publicado en su primera edición ebook en 2019 por Grupo Editorial Patria, perteneciendo a la serie UNITEC, consta de 380 páginas organizadas en 10 unidades. De acuerdo con lo que menciona Guerrero (2019) el libro aborda los temas de una forma sencilla, sin abusar de tecnicismos. El libro se apega al plan y programa de estudios de bachillerato de UNITEC. El libro fue analizado en su formato digital a través de la plataforma eLibro.

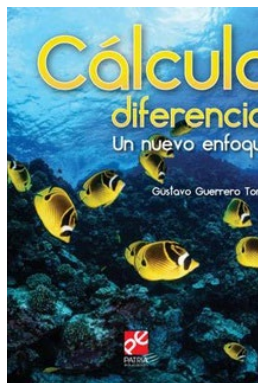


Figura 3. Portada del libro: cálculo diferencial, un nuevo enfoque. Guerrero (2019)

El libro 4 de este estudio, llamado cálculo diferencial para bachilleratos tecnológicos desarrollado por Ludwing Salazar fue publicado en su segunda edición ebook en 2018 por Grupo Editorial Patria y pertenece a la serie DGETI, consta de 201 páginas organizadas en 4 partes. De acuerdo con lo que menciona Salazar (2018) el libro está basado en el modelo de competencias y se apega plan de estudios de la DGETI, el autor señala que los temas se tratan de manera clara y concreta, pero sin perder el rigor matemático. El libro fue analizado en su formato digital a través de la plataforma eLibro.

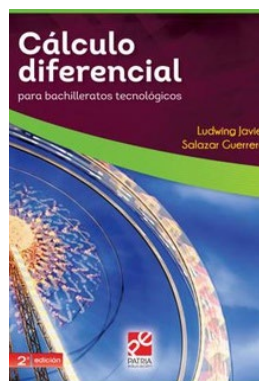


Figura 4. Portada: cálculo diferencial para bachilleratos tecnológicos. Salazar (2018)

El libro 5 de este estudio, llamado cálculo diferencial en competencias escrito por Carlos García y Martha Alvarado fue publicado en su segunda edición ebook en 2016 por Grupo Editorial Patria, consta de 317 páginas organizadas en 5 capítulos. De acuerdo con lo mencionado por García y Alvarado (2016) el libro es el primero en su género pues intentan abordar al cálculo de una manera diferente que toma fuertemente en cuenta a las aplicaciones y la teoría para fortalecer el conocimiento. El libro fue analizado en su formato digital a través de la plataforma eLibro.

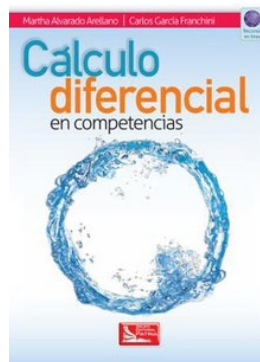


Figura 5. Portada del libro: cálculo diferencial en competencias. García y Alvarado (2016)

Modelación de las Praxeologías Matemáticas Presentes en la Parte Ilustrativa del Libro

La que en este estudio se denomina la parte ilustrativa del libro es la que incluye a todas las secciones en las que se introducen conceptos, se informa, se desarrollan ideas formativas y se proporcionan procedimientos ejemplo, entre otras cosas, es decir, aquellos segmentos del libro que no son actividades que el aprendiz debe resolver.

En el libro 1 el contenido histórico se presenta exclusivamente como reseñas históricas que se encuentran en la página inicial de cada capítulo, estas reseñas no describen tareas por lo que no es posible analizar su praxeología. En estas reseñas se describen a personajes relevantes de las matemáticas como Leibniz, Euler, Weistrass, Newton y L'Hopital, así como sus aportaciones más destacadas en temas relacionados con el cálculo diferencial. En ese sentido se considera que en lo relacionado a la historicidad de la que habla Schorcht (2018) se muestran a las aportaciones matemáticas como producto y no como matemáticas en evolución.

Por otro lado, en la dimensión de identidad que describe el mismo autor, se considera que estas apariciones de contenido histórico relacionadas directamente con personajes relevantes entran

en lo que describe como personalización, presentando a una figura reconocida e históricamente sobresaliente, con la muy probable intención de dar una cara humana a las matemáticas.

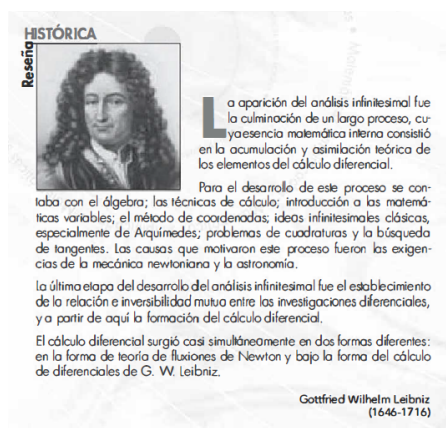


Figura 6. Reseña histórica en libro 1. CONAMAT (2016) p. 3

En el libro 2 del estudio el contenido histórico referencial o formativo se presenta combinado con actividades propuestas. En la figura 7 se puede ver un texto que hace referencia a la historia de las matemáticas, en lo relacionado a la historicidad de la que habla Schorcht (2018), aunque no se habla directamente de un proceso matemático en particular, se hace referencia a las matemáticas en evolución. En la dimensión de identidad se podría considerar que se trata personificación en la cual no se presenta a una figura histórica a modo de celebridad, sino que se hace referencia al contexto histórico y a individuos ordinarios.

En la trayectoria histórica del pensamiento científico de la humanidad, podemos observar los esfuerzos que se han hecho para comprender la realidad de los cambios que se presentan en la naturaleza.

Cuando el hombre dejó de ser nómada y se convirtió en sedentario se inició el cultivo de la tierra, así como la observación acerca de cómo el cambio de clima afectaba sus cosechas. Buscó explicaciones para estos cambios de clima y conoció las estaciones del año y cómo éstas dependen de la posición de la Tierra respecto al Sol.

Con el paso del tiempo, el hombre obtiene cada vez más conocimiento sobre el por qué de los cambios que ocurren en su entorno. Una herramienta muy poderosa para buscar la explicación de esos cambios la constituye el cálculo.

Iniciaremos el estudio del cálculo diferencial a partir de su evolución histórica, así como de la construcción e interpretación de modelos matemáticos sencillos que tienen como base la aritmética y la geometría.



Figura 7. Ejemplo de contenido histórico en libro 2. Ortiz et al (2019). p. 10

Por otro lado, este mismo libro presenta una sección similar a la descrita en el libro 1, sólo que no se presenta exclusivamente en los inicios de capítulo, sino que se puede encontrar en diferentes partes. En el apartado titulado: comprensión lectora, se presentan aportaciones de personajes reconocidos dentro del campo de las matemáticas.

El libro 3 inicia con un texto sobre la historia y evolución del cálculo en la que se destaca el proceso de creación de las bases del cálculo por Newton y Leibniz, es la única sección de este tipo en todo el libro. Por otro lado, en las secciones llamadas: ¿sabías qué? se presentan brevemente algunos datos sobre la temática que se está estudiando, algunos de ellos históricos, catorce de los treinta apartados de este tipo presentan contenido histórico.

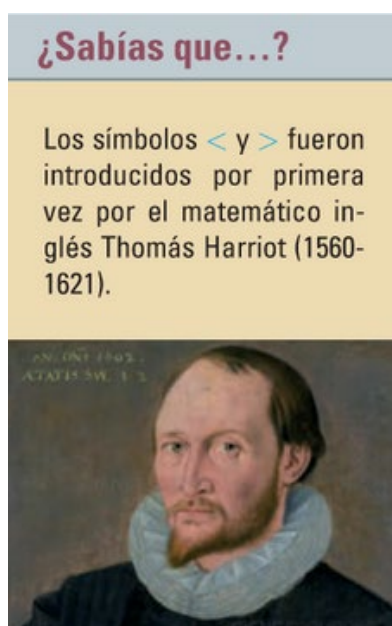


Figura 8. Ejemplo de sección: ¿sabías qué? En libro 3. Guerrero (2019). p. 8

En el libro 4 dentro de la temática de cambio y predicción y particularmente en lo relacionado con la posición, velocidad y aceleración, se incluye una breve historia del cálculo en la que se mencionan algunas aportaciones de los griegos, Descartes, Newton y Leibniz en ese sentido.

Como podemos ver los procesos de cambio están íntimamente relacionados con la naturaleza, luego para comprender a la naturaleza, debemos entender los procesos de cambio, pero éstos, por ser "continuos" no ofrecen ningún punto de partida sencillo, en el cual nuestra mente pueda ubicar y controlar. Este hecho originó durante siglos un gran desconcierto entre los matemáticos.



Los griegos dieron los primeros pasos en las matemáticas del cambio, al imaginarse las líneas como trazos realizados por puntos en movimiento, y cuando analizaron las líneas detalle a detalle, por medio de la técnica de dividir las líneas en segmentos "infinitamente pequeños". Otro paso lo dio el francés René Descartes cuando pensó en la concepción de una ecuación como función de variables y constantes, pero sobre todo cuando desarrolló la forma de representar gráficamente a dichas funciones.

Más tarde, alrededor de 1665, el inglés Isaac Newton ideó una prodigiosa creación mental llamada en la actualidad "cálculo infinitesimal", que por primera vez permitió el análisis matemático de todo proceso de cambio, lo hizo a través del estudio de las razones de cambio, fundamentalmente de tipo cinemático. Para su creación Newton se apoyó en la técnica de división de líneas en segmentos pequeños de los griegos y en el sistema gráfico de Descartes. Su creación probó su efectividad tan rápidamente que la utilizó para establecer las leyes del movimiento y la ley de la gravitación universal.

Por otra parte, en forma independiente a los estudios de Newton, entre 1673–1676 el alemán Gottfried Wilhelm Leibniz, basado en los análisis de Huygens, Descartes y Pascal, desarrolló también el "cálculo infinitesimal" bajo un tratamiento distinto al de Newton, a través de una concepción de tipo geométrico. Leibniz publicó su creación al público en 1684, mientras que Newton lo hizo en 1704.

La notación que usamos para el cálculo infinitesimal se debe a Leibniz. A él también le debemos los nombres de "cálculo diferencial" y "cálculo integral", así mismo, le debemos los términos de "función" y de "coordenadas".



Figura 9. Breve reseña histórica sobre los procesos de cambio. Salazar (2018). p. 163.

En el libro 5 prácticamente no se encontró contenido histórico, la única mención es breve sobre Newton y su segunda ley cuando se habla sobre la aceleración como la segunda derivada de una función de posición.

Análisis Matemático de las Actividades Propuestas

El libro 1 no presenta actividades que incluyen contenido histórico. Como los autores lo explican en las páginas introductorias del libro, CONAMAT (2016) su enfoque se centra en lo práctico por lo que predominan los ejercicios sin contexto. Es en el capítulo 5 que aborda las aplicaciones de la derivada en donde se pueden encontrar problemas que presentan una pequeña narrativa que proporciona contexto de la situación a resolver.

El libro 2 presenta actividades complementarias a los contenidos descritos para este mismo libro en el apartado previo. Estas actividades se presentan en forma de preguntas para responder con base en los textos y en las que no se propone actividad procedimental matemática por lo que no se incluirán en la sección de modelación de las praxeologías. Se encontró en este libro solamente una actividad que requiere procedimientos matemáticos y que utiliza contexto histórico para presentarse, esta será analizada en el apartado siguiente.

En el desarrollo histórico del cálculo son varias las interrogantes que es posible plantear:

- ¿Cómo surge el cálculo?
- ¿Qué problemas científicos provocan su surgimiento?

Para tratar de dar respuesta a éstas y otras preguntas, puedes consultar en Internet:

- ¿Por qué se considera a Newton y Leibniz como inventores del cálculo?

Figura 10. Ejemplo de preguntas para responder con base en el contenido histórico en libro 2. Ortiz et al. (2019) p. 10

El libro 3 no presenta actividades a resolver que incluyan contenido histórico. En la página 23 del libro 4 de Salazar (2018) se presenta un enlace para una lectura en línea sobre la historia del cálculo y se solicita que respondan a un cuestionario, de manera similar a lo descrito en el libro 2 de Ortiz et al (2019), no se propone actividad que requiera procedimientos matemáticos por lo que no se incluirán en la sección de modelación de las praxeologías.

ACTIVIDAD FORMATIVA CON TIC

Lee el artículo que aparece en el siguiente link:
<http://www.fca.unl.edu.ar/lntdef/Historia1.htm>

Actividades a realizar

1. Lee el artículo y escribe las palabras que no entiendas, busca su significado.
2. Contesta las preguntas que se plantean.
 - a) ¿Cuál es el tema central del artículo?
 - b) ¿Cuándo nace el cálculo diferencial?
 - c) ¿A quiénes se les considera los inventores del cálculo diferencial?
 - d) ¿Cuáles fueron los cuatro problemas científicos para el cual fue desarrollado el cálculo diferencial?
 - e) ¿Cuáles fueron los enfoques del trabajo de Gottfried Wilhelm Leibniz?
 - f) ¿Cuáles fueron los enfoques del trabajo de Issac Newton?
 - g) ¿Cuáles fueron las contribuciones de los hermanos Bernoulli?
 - h) Nombra los discípulos de Newton y de Leibniz.
 - i) ¿Quién define el término función?






Figura 11. Ejemplo de preguntas para responder con base en un artículo en línea, libro 4. Salazar (2018) p. 23

En la página 150 del mismo libro 4 se presenta una actividad muy similar a la previamente mencionada, se comparte enlace para una lectura en línea sobre la disputa por la autoría del cálculo entre Newton y Leibniz para responder algunas preguntas al respecto.

Modelación de las Praxeologías Didácticas

El libro 1 no presenta actividades que incluyen contenido histórico para modelar su praxeología. Por otro lado, en el libro 2 se presenta una actividad que puede considerarse que está contextualizada en la historia de las matemáticas y la tecnología, en la figura 12 se puede leer el planteamiento.

Situación didáctica

El 19 de abril de 1965, el cofundador de Intel, Gordon Moore, hizo un pronóstico referente a la cantidad de transistores que se puede empaquetar en un área de 1 pulgada cuadrada de silicio. Este pronóstico conocido como Ley de Moore establece que el número de transistores en una pulgada cuadrada de silicio se duplica aproximadamente cada dos años.

Cuando Moore hizo el pronóstico se tenían 30 transistores por pulgada cuadrada; para el año 2004 se podían empaquetar 592 millones de transistores en la misma área. Actualmente se están desarrollando aplicaciones con una tecnología de 28 nm (nanómetros). ¿Se ha cumplido el pronóstico? ¿Cuál es el límite de la Ley de Moore?

Investiga cuáles son los límites del silicio.

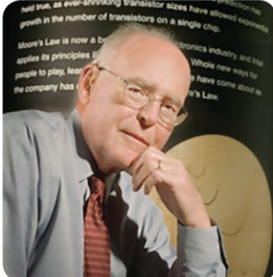


Figura 12. Actividad matemática con contenido histórico, libro 2. Ortiz et al. (2019) p. 6

En la actividad se presenta la indicación de resolver una tarea que propone modelar el crecimiento en la cantidad de transistores que se pueden colocar en un área determinada con el paso del tiempo, teniendo como premisa principal que cada vez la tecnología incrementa su capacidad de producir transistores más pequeños, en la descripción no se incluye la variación en el costo.

Se podría determinar como tipo de tarea a la creación de un modelo matemático, por la ubicación en el libro y el nivel académico se considera que una técnica adecuada para iniciar la comprensión del problema puede ser su representación tabular en una hoja de cálculo, la tecnología podría ser el hecho de que en una columna se puede representar el número de la iteración y en la otra la cantidad de transistores en esa iteración, teniendo en cuenta que en la siguiente fila la iteración se incrementa en uno y la cantidad de transistores se duplica. La teoría podría ser la valides en el uso de diferentes registros de representación semiótica, considerando la tabla como una forma de representar que en cada iteración la cantidad de transistores se duplica respecto a la iteración previa de la forma $C_i = 2 * C_{i-1}$.

Se considera que la intencionalidad del autor, más que el alumno consiga un modelo preciso, era que este se pueda dar cuenta del crecimiento exponencial considerando las tendencias que pueden existir en iteraciones muy altas, un número resultante que se podría considerar que

tiende a infinito, un tamaño de transistor que tiende a cero y las limitaciones físicas, tecnológicas y materiales a las que se enfrenta tal situación.

El libro 3 no presenta actividades propuestas que incluyen contenido histórico. El libro 4 de Salazar (2018) en la página 7 presenta una actividad en la que se tiene que calcular el área de un círculo por el método de exhaución, aunque no se menciona la parte histórica se considera que el procedimiento lo es, por lo que se realizará la modelación de la praxeología sobre la parte que corresponde al método mencionado.

Como tipo de tarea se puede considerar el calcular el área de un círculo de radio r , la técnica sería inscribir figuras regulares con cada vez mayor número de lados y el uso de las fórmulas para calcular su área, la tecnología sería que al aumentar el número de lados, las áreas de los polígonos se aproximan cada vez más al área del círculo y la teoría sería la relacionada con los límites que garantiza que el área del círculo es el límite de las áreas de los polígonos cuando su cantidad de lados tiende a infinito.

Apertura de la actividad

Deduce y aprende

Área de un círculo, método de exhaución

Propósito: El alumno determinará el área de un círculo utilizando polígonos inscritos.

Conocimientos previos: Área del círculo, área de un polígono.

Material:

- Juego de escuadras
- Compás
- Transportador
- Colores
- Hojas blancas
- Calculadora científica

Desarrollo de la actividad

1. Se forman equipos de cinco alumnos.
2. Cada alumno traza una circunferencia de 5 cm de radio en una hoja.
3. Cada alumno divide su circunferencia en cuatro partes iguales y traza el polígono, como en la figura de la derecha.
4. Ilumina de color azul la región entre el polígono y la circunferencia.
5. ¿Son iguales los ángulos centrales que se obtienen de dividir la circunferencia? _____ y miden _____ grados sexagesimales, o _____ radianes.
6. Traza una perpendicular a uno de los lados que pase por el centro de la circunferencia o bisectriz del ángulo (ver figura de la derecha).
7. Los ángulos centrales que se obtuvieron con la bisectriz miden _____.
8. En el ángulo donde se trazó la bisectriz se forman dos triángulos iguales, ilumínelos de diferente color. De uno de ellos vamos a conocer su altura o apotema que es uno de los catetos y lo llamaremos "a", el otro cateto es la mitad del lado de la base del triángulo, lo llamaremos "b".
9. Para calcular a procedemos así: buscamos una función que relacione el ángulo, la hipotenusa y el cateto adyacente; recuerda que el valor de $r = 5$.

La función es: $\cos 45^\circ = \frac{a}{r}$

de donde: $a = 5 \cos 45^\circ$

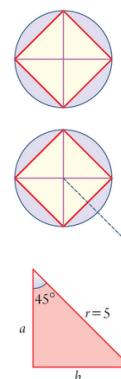


Figura 13. Actividad matemática con contenido histórico, libro 4. Ortiz et al. (2019) p. 7

- Realiza lo mismo para b . La función es: _____
 Despejamos $b =$ _____
- Pero como b es la mitad del lado del polígono, el lado mide $2b =$ _____. Ahora calculemos el área (A) del triángulo, que es la mitad del producto de la base por la altura.
- $$A = \frac{\quad}{2}$$
- Como son cuatro triángulos el área se multiplica por cuatro.
 Área del cuadrado: _____
10. Cada alumno traza una circunferencia de radio $r = 5$ cm y dentro de ella traza un polígono *inscrito* según la regla siguiente:
- el alumno 1: traza un polígono de tres lados, el alumno 4: uno de seis lados y
 el alumno 2: un polígono de ocho lados, el alumno 5: otro de nueve lados.
 el alumno 3: un polígono de cinco lados,
11. Ilumina el área entre el círculo y el polígono.
12. Cada alumno calcula el área del polígono lo más exacto que se pueda y anota su valor en la tabla siguiente.

Lados n	Área	Lados n	Área	Lados n	Área
3		5		8	
4		6		9	

Figura 14. Actividad matemática con contenido histórico libro 4, segunda parte. Ortiz et al. (2019) p. 7

Libro 5 no promueve actividades contextualizadas a través de la historia de las matemáticas, sólo en la página 201 se presenta como un consejo al facilitador el promover la investigación sobre historia de las matemáticas y la física.

Triangulación de los Datos

En función de la pregunta de investigación, y tras realizar el análisis del contenido histórico en la muestra seleccionada, se pueden hacer diferentes resúmenes cuantitativos que puedan complementar al análisis cualitativo.

En el libro 1, que sólo se encontró contenido histórico en la parte formativa o referencial del texto, y no en las actividades propuestas, y simplificando la cuantificación por el hecho de que se dedica una página completa al epígrafe en donde se muestra tal contenido al principio de cada unidad se podría resumir en que de las 207 páginas que corresponden al cálculo diferencial, 5 de ellas tienen contenido histórico.

En el libro 2 se encontró que en 9 ocasiones se incluyen contenido histórico del tipo descrito un par de secciones atrás, se comparten diferentes datos y se pregunta a los estudiantes sobre lo que se expresó en esa parte del texto. Si se quiere analizar en cuanto a cantidad, estas secciones utilizan aproximadamente media página por lo que puede constituirse como 4.5 páginas de las 178

que conforman el libro. Por otro lado, se encontró sólo una actividad propuesta que utiliza el contenido histórico para realizar un razonamiento matemático.

En el libro 3 la mencionada introducción al cálculo a través de la historia consta de 2 páginas. La mencionada sección ¿sabías que...? se presenta a lo largo de todo el libro y cuando aparece utiliza aproximadamente una novena parte de una página, si 14 de los 30 apartados de este tipo presentan contenido histórico se podría decir que el contenido histórico que representa es de 1.5 páginas. Tenemos entonces un total de 3.5 páginas de un total de 380 que componen al libro.

En el libro 4 la actividad analizada en cuanto a la praxeología didáctica consta de 3.5 páginas. Las secciones como la descrita en la parte ilustrativa del libro constituyen 2 páginas, repartidas en 4 entradas. En total son 5.5 páginas que tienen contenido histórico de un total de las 201 páginas que conforman al libro.

En el libro 5 el pequeño apartado en el que se menciona a Newton como responsable de la segunda ley consta de solamente dos renglones. El consejo de estudiar a la historia de las matemáticas es de sólo un renglón, por lo que se podría decir que de las 228 páginas que conforman el libro sólo 3 renglones hacen referencia a contenido histórico.

Cabe destacar que la mayor parte del contenido encontrado se centra en hacer una cronología de eventos, se habla quién y el cuándo, sin embargo, se omite en gran medida el desarrollo metodológico y la evolución del pensamiento alrededor del objeto matemático que se aborda en cada caso. Solamente en la actividad analizada, la de las aproximaciones sucesivas al área de un círculo, se refleja la intención didáctica de hacer al estudiante experimentar un método que fue un precursor del concepto moderno de límite, sirviendo como puente entre la matemática de la antigüedad y la moderna.

Conclusiones

Tras el análisis se hace evidente que la cantidad de contenido histórico no es muy amplio, valdría la pena analizar si esto es debido a las limitaciones de espacio en los libros, a que se considere que este tipo de actividades no aportan mucho al aprendizaje de las matemáticas modernas, o a algunas otras causas.

Se considera valioso utilizar herramientas de las ciencias de la comunicación, así como de la comunicación de la ciencia, para analizar la manera en que se presentan en los libros de texto la

información y las actividades matemáticas pues la transposición didáctica incluye al diseño de la información, se hace adaptación de conocimiento para ser transmitido de manera clara, accesible y comprensible.

Las teorías de la recepción pueden ser útiles para comprender por qué los autores de libros de texto de matemáticas suelen evitar incluir contenido narrativo. Es probable que teman que este tipo de enfoque conduzca a interpretaciones subjetivas, lo que podría considerarse incompatible con la objetividad que se espera en las matemáticas. Al evitar la narrativa, los autores podrían intentar minimizar la posibilidad de experiencias subjetivas que lleven al lector a conclusiones erróneas.

Tras el trabajo realizado en la investigación, surge una pregunta: cuando un ejercicio o actividad de matemáticas carece de contexto, ¿qué imagina el estudiante al resolverlo? ¿Se ignora por completo este aspecto, limitándose a la aplicación de procedimientos matemáticos, o el estudiante, desde la perspectiva de la estética de la recepción, crea un contexto para dar sentido a tal ejercicio o actividad?

Propuestas

A partir de lo expuesto en este documento, resulta evidente la necesidad de destinar más tiempo y recursos tanto a la investigación teórica como a la de campo sobre estos temas, que sin duda ofrecen valiosas oportunidades para el avance en la investigación educativa y en la comunicación de las ciencias.

Se considera importante superar la noción de que el contenido histórico en matemáticas se reduce a una simple cronología. Resulta valioso fomentar el análisis del desarrollo metodológico a lo largo de la historia, destacando cómo los enfoques y procesos han evolucionado, y aprovechar esta perspectiva como una fuente de aprendizaje. Se propone generar actividades tomando en cuenta lo anterior, además de tomar en cuenta al campo de problemas que dio origen y ayudó a desarrollar los diferentes objetos matemáticos.

Bibliografía

- Artigue, M. y Gómez, P. (Ed.). (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Bogotá/México: una empresa docente/Grupo Editorial Iberoamérica. 97-140.
- Ball, M y Gutiérrez, M. (2008). Estética de la recepción: Cuando los pequeños aún no leen. *Educere* 12(42) 439 – 445.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en educación secundaria. *RELIME*, 8(3), 247-263.
- Berruecos, L. (2009). *La divulgación puesta en discurso*. Dirección General de la Dirección General de Divulgación de la Ciencia, UNAM.
- Bittar, M. (2022). A methodological proposal for textbook analysis. *The Mathematics Enthusiast* Vol. 19 : No. 2 , Article 2. DOI: <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1555>
- Boyer, C. (1949) *The history of calculus and its conceptual development*. Dover Publications.
- Briggs, A. y Burke, P. (2002). *De Gutenberg a internet. Una historia social de los medios de comunicación*. Taurus historia.
- Castelfranchi, Y. y Fazio, M. (2021). *Comunicación Pública de la Ciencia*. CILAC, foro abierto de ciencias Latinoamérica y el Caribe, UNESCO.
- Chaves, E. y Salazar, J. (2003). La Historia de la Matemática como recurso metodológico en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Matemática: Una experiencia a nivel secundario. *UNICIENCIA*, 20(2), 259-266
- Chevallard, Y. (2000). *La transposición didáctica, del saber sabio al saber enseñado*. AIQUE Educación.
- Chevallard, Y. (2022). On the Genesis and Progress of the ATD. *Advances in the Anthropological Theory of the Didactic*. Birkhäuser 5-12
- Chevallard, Y. y Bosch, M. (2020a) Anthropological Theory of the Didactic. In: Lerman S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham. 53-61

- Chevallard, Y. y Bosch, M. (2020b) Didactic Transposition in Mathematics Education. In: Lerman S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham. 214-218
- Colegio Nacional de Matemáticas (2016). *Cálculo diferencial e integral, 4ª edición*. Pearson.
- Consejo Nacional de Humanidades Ciencias y Tecnologías CONAHCYT (2024). *Acceso Universal al Conocimiento*. Disponible en: <https://conahcyt.mx/acceso-universal-al-conocimiento/> [Consulta: 26 de enero de 2024].
- Craig, C. (2019). *The science of communicating science the ultimate guide*. CABI.
- Diario Oficial de la Federación (2023). *Ley general en materia de humanidades, ciencias, tecnologías e innovación*. Disponible en: <https://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/ref/lgmhcti.htm> [Consulta: 26 de enero de 2024].
- Durán, A. (2012). *Newton: la ley de la gravedad. La fuerza más atractiva del universo*. RBA.
- Durant, J. (1999). Participatory Technology Assessment and the Democratic Model of the Public Understanding of Science. *Science and Public Policy*, 26(5), 313-319. DOI: <https://doi.org/10.3152/147154399781782329>
- Eren, M., Bulut, M., & Bulut, N. (2015). A content analysis study about the usage of history of mathematics in textbooks in Turkey. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 11(1), 53–62. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1305a>
- Escobar-Ortiz, J. y Rincón-Álvarez, A. (2019). La divulgación científica y sus modelos comunicativos: algunas reflexiones teóricas para la enseñanza de las ciencias. *Revista Colombiana de Ciencias Sociales*, 10(1) pp.135-154. DOI: <https://doi.org/10.21501/22161201.3062>
- Estrada, J. (2018). El papiro del Rhind. *Revista A&H* (7), 24-33
- Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. *ZDM. International Journal on Mathematics Education*, 45(5), 633–646. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x>

- Fried, M. (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *Science & Education* 10, 391-408.
- Fried, M., Guillemette, David y Jahnke, H. (2016). Theoretical and/or conceptual frameworks for integrating history in mathematics education. *History and Pedagogy of Mathematics*. Montpellier, France. hal-01349228
- García, F. y Alvarado, M. (2016). *Cálculo diferencial en competencias, primera edición ebook*. Editorial Patria.
- González, M. y Sierra, M. (2004) Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas* 22(3), 389-408. <https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21990>
- Guzmán, J. (1992). Las teorías de la recepción: su concreción en la didáctica de la literatura. *El Guiniguada, Número Extraordinario 3, Fascículo: 1. Dedicado a: Actas del Segundo Congreso Internacional de la S.E.D.L.L.* (pp. 143-148).
- Grant, E. (2016). *La ciencia física en la edad media*. Fondo de Cultura Económica.
- Herrera-Lima, S. (2018). Lo socioambiental como objeto de comunicación: debates y tendencias en la intersección de la comunicación pública de la ciencia y la comunicación ambiental. *Comunicar ciencia en México, prácticas y escenarios*. (pp. 55-85). ITESO
- Montañés, O. (2010) Cuestiones actuales sobre comunicación pública de la ciencia. *ArtefaCToS*, 3(1), 3-11
- Moru, E. (2009). Epistemological obstacles in coming to understand the limit of a function at undergraduate level: a case from the National University of Lesotho. [Thesis submitted in fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in the School of Science and Mathematics Education in the Faculty of Education, University of the Western Cape]. <https://doi.org/10.1007/s10763-008-9143-x>
- Nitschack, H. (1991). La estética de la recepción. *Arete* 3(2) 283-295.

- Organización de las Naciones Unidas ONU (2024). *Objetivos de Desarrollo Sostenible*. Disponible en: <https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/> [Consulta: 26 de enero de 2024].
- Orozco, C. (2016a). Las políticas públicas de la comunicación de la ciencia en México. El Consejo Nacional de la Ciencia y Tecnología 1970-210. *De la academia al espacio público, comunicar la ciencia en México*. (pp. 12-43). ITESO.
- Orozco, C. (2016b). Tendencias de la investigación académica internacional en la comunicación pública de la ciencia. *Comunicar ciencia en México, tendencias y narrativas*. (pp. 16-38). ITESO.
- Ortiz, F. y Ortiz F. (2019). *Cálculo diferencial tercera edición*. Grupo Editorial Patria. <https://elibro.bibliotecabuap.elogim.com/es/lc/bibliotecasbuap/titulos/121278>
- Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery, On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*. John Wiley & Sons.
- Real Academia Española. (2024). Noósfera. En Diccionario de la lengua española. Recuperado el 13 de mayo, 2024, de <https://dle.rae.es/noosfera>
- Ren y Zhai. (2014). *Communication and Popularization of Science and Technology in China*. Springer.
- Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las matemáticas*. Editorial Mir.
- Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas*. EUNED.
- Sánchez-Mora, A. (2015). *La divulgación de la ciencia como literatura*. DGDC-UNAM.
- Santaolalla, J. (2022). *El bosón de Higgs no te va a hacer la cama: La física como nunca te la han contado*. Editorial Océano.
- Secretaría de Educación Pública (2017). *Planes de estudio de referencia del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior*. <http://sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/12491/4/images/libro.pdf>

- Schorcht, S. (2018). History of Mathematics in German Mathematics Textbooks (pp. 143–162).
https://doi.org/10.1007/978-3-319-73924-3_8
- Son, Ji-Won & Diletti, Jeri. (2017). What Can We Learn from Textbook Analysis? 10.1007/978-3-319-51187-0_1
- UNESCO. (2021). *Recomendación de la UNESCO sobre la Ciencia Abierta*. Disponible en:
https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000379949_spa [Consulta: 26 de enero de 2024].
- Vidal, M. y Quintanilla, R. (2008). La historia de la Matemática y su incorporación en el aula. Una síntesis de algunas propuestas. *XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*.
- Vrancken, S., Gregorini, M., Engler, A., Miller, D. y Hecklein, M. (2006) Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. Boletín, *Sociedad Argentina de Educación Matemática* 29, 9-19.