

MÉTRICA DE CARTAN-KILLING DE ÁLGEBRAS Y SUPERÁLGEBRAS DE LIE

Presenta:

VICTOR ADDI AMADOR ORTEGA

Una tesis presentada en cumplimiento parcial
de los requisitos para obtener el grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

Dirigida y asesorada por:

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada
Dr. José Eduardo Rosales Quintero

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

AGOSTO 2020

A la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla:

Los miembros del comité que evaluarán el examen profesional de VICTOR ADDI AMADOR ORTEGA, encuentran éste satisfactorio.

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero, Presidente

Dra. Iraís Rubalcava García, Secretario

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo, Vocal

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada, Asesora

Dr. José Eduardo Rosales Quintero, Asesor

AGRADECIMIENTOS

La finalización de esta tesis no habría sido posible sin todo el apoyo moral de mi hermano, Christan; y mi madre, Mariana. Sin el impulso que emana mi mejor amigo, Efraín; y sin el conocimiento y guía de mi amigo y mentor, el Dr. José Eduardo Rosales Quintero. Con ellos, y con todas las personas que me han tendido su mano en esta experiencia, estoy profundamente agradecido.

MÉTRICA DE CARTAN-KILLING DE ÁLGEBRAS Y SUPERÁLGEBRAS DE LIE

Resumen

Por Victor Addi Amador Ortega,
Benemérita universidad autónoma de Puebla
Agosto 2020

José Eduardo Rosales Quintero

Mercedes Paulina Velázquez Quesada

Se presenta una breve introducción, necesaria para definir la Forma de Killing y la métrica de Cartan-Killing, a partir de los conceptos elementales de la teoría de álgebras de Lie. Posteriormente se calculan las métricas de Cartan de las álgebras de Lie $\mathfrak{so}(3)$, $\mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{so}(1,3)$, $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C})$.

Más adelante, se expone una introducción al superálgebra Lineal, con los conceptos básicos para entender las súper álgebras de Lie y para definir la métrica de Cartan en ellas. Por último, se calcula la métrica de Cartan del superálgebra de Lie de $\text{Osp}(1,2)$.

Índice general

	Página
AGRADECIMIENTOS	III
RESUMEN	IV
CAPÍTULO	
1. Introducción	1
2. Álgebras y álgebras de Lie	3
2.1. Definiciones elementales	3
2.2. Constantes de estructura	5
2.3. Homomorfismos, derivaciones	6
2.4. Subconjuntos de álgebras de Lie	8
2.5. Módulos y Representaciones	11
2.5.1. Representación adjunta	14
2.6. Métrica de Cartan-Killing	15
2.7. Métrica de Cartan de $\mathfrak{so}(3)$	18
2.8. Métrica de Cartan del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$	18
2.9. Métrica de Cartan del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(1,3)$	19
2.10. Métrica de Cartan de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$	24
3. Superálgebra lineal	29
3.1. Espacios vectoriales graduados	29
3.2. Superálgebras	32
3.3. Superálgebras de Lie	33
3.4. Constantes de estructura y métrica de Cartan-Killing de Super álgebras de Lie	35
3.5. Métrica de Cartan de $\mathfrak{osp}(1,2)$	38

4. Resultados y conclusiones	41
REFERENCIAS	43
APÉNDICES	
A. Suma directa y producto tensorial	45
A.1. Suma directa de espacios vectoriales	45
A.2. Suma directa y semidirecta de álgebras de Lie	46
A.3. Producto tensorial de espacios vectoriales	46
A.4. Producto tensorial de álgebras de Lie	47
B. Algo sobre grupos	48
C. Constantes de estructura del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(1,3)$	52
D. Algebra espinorial	54
E. Símbolo de Levi-Civita	67

Dedicatoria

Al niño que aún vive en mí.

Capítulo Uno

Introducción

La refinación de las teorías físicas ha hecho cada vez más clara la conclusión de que la estructura de la física fundamental está caracterizada mediante las simetrías (ver por ejemplo, (Gross, 1996), (Weinberg, 1991), (Weyl, 1952), (Kirschenmann, 1973)). Es por ello que las matemáticas que estudian las simetrías han tomado, cada vez más, notable relevancia. No sólo con el enfoque necesario para la física, sino también con un enfoque meramente matemático.

El concepto de simetría engloba a su vez el de objeto, el de operaciones y el de *invariancia*. Tómese de ejemplo de objeto, un cuadrado, como operaciones el conjunto siguiente: $\{0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ\} \cup \{\text{reflexiones en torno a los ejes de simetría del cuadrado}\}$, donde las rotaciones se consideran en torno a un eje centrado en el circuncentro del cuadrado. Supongamos que se escoge una operación al azar, y se aplica al cuadrado mientras un observador permanece con los ojos cerrados. Al abrir los ojos, el observador será incapaz de aseverar con certeza si se ha hecho una de las operaciones mencionadas, y en caso de ser así, no podrá escoger cuál de ellas fue la efectuada. El hecho de que el observador sea incapaz de identificar la operación que fue aplicada al cuadrado es lo que se entiende por la invariancia de éste, bajo tales operaciones. El conjunto de operaciones entonces es llamado el conjunto de simetrías del cuadrado. La aplicación consecutiva de dos operaciones es, también, una

simetría, y como la operación identidad (dejar el cuadrado intacto) y las reversiones de todas las operaciones están incluidas en el conjunto que escogimos, tal conjunto es llamado **grupo de simetrías** del cuadrado (de todos los cuadrados, de hecho). Dado que se comporta como un grupo, los resultados de la teoría de grupos, en este caso discreta, aplican para los elementos del conjunto (apéndice B). Si, en cambio, el objeto en cuestión fuera un círculo, las rotaciones que lo dejan invariante son todas las rotaciones de un ángulo arbitrario $\phi \in [0, 2\pi)$; éste es entonces un grupo continuo (Grupo de Lie). y cualquiera de sus elementos puede ser generado mediante aplicaciones sucesivas de *transformaciones infinitesimales* $\delta\phi$ ($\phi \rightarrow \phi' = \phi + \delta\phi$). El grupo de simetrías del círculo entonces está *parametrizado* por el parámetro ϕ ; en el caso del grupo de simetrías de la esfera, el número de parámetros necesarios para cubrir todo el grupo es tres (Szekeres, 2005). Estos y otros grupos son relevantes en la física, y se encuentran asociados como grupo de simetría a diversos sistemas físicos; los elementos infinitesimales, o generadores, mediante la composición, forman la estructura de álgebra de Lie. En la mecánica analítica, lagrangiana, hamiltoniana, en la mecánica cuántica y en las décadas recientes en las teorías de norma, los grupos de simetría y sus álgebras de Lie cumplen roles fundamentales.

En esta tesis nos enfocaremos al objeto conocido como *métrica de Cartan-Killing*, introduciendo la teoría básica concerniente a las álgebras de Lie en el proceso de su construcción.

Capítulo Dos

Álgebras y álgebras de Lie

2.1. Definiciones elementales

Existen distintas, equivalentes, formas de definir las siguientes estructuras. Aquí presento la definición más común encontrada en la física que, además, se ajusta cómodamente al lenguaje, simbología, y herramientas usualmente usados en el análisis de la física moderna.

Definición 2.1: Un **álgebra** es un espacio vectorial, A sobre algún campo $\mathbb{F}$, en conjunto con una operación binaria, $\diamond : A \times A \longrightarrow A$, bilineal. Es decir, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, y $a, b, c \in A$,

$$(\alpha a + \beta b) \diamond c = \alpha a \diamond c + \beta b \diamond c$$

$$a \diamond (\alpha b + \beta c) = \alpha a \diamond b + \beta a \diamond c$$

En el caso de que exista un elemento e_A en el álgebra A tal que $e_A \diamond v = v \diamond e_A = v$, para todo $v \in A$, se dice que el álgebra es unital.

En física, los campos más usuales son $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, y son los campos con los que trabajaremos en lo sucesivo, sin embargo, como se dijo, la definición de álgebra es más general, y es compatible con cualquier campo bien definido.

Se dice que un álgebra A es asociativa si y sólo si cumple que, para cualesquiera $a, b, c \in A$, $a \diamond (b \diamond c) = (a \diamond b) \diamond c$. Asimismo, se dice conmutativa si $a \diamond b = b \diamond a$ para todo $a, b \in A$.

Definición 2.2: Un **álgebra de Lie** L es un álgebra, cuya operación bilineal $[\cdot, \cdot] : L \times L \longrightarrow L$, llamada corchete (o paréntesis) de Lie, cumple que, para todo $a, b, c \in L$

$$[a, a] = 0, \quad (2.1)$$

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0. \quad (2.2)$$

A la ecuación (2.1) se le suele llamar propiedad de antisimetría. La ecuación (2.2) es llamada **identidad de Jacobi**.

De la ecuación (2.1), y la bilinealidad de la operación, obtenemos $0 = [a + b, a + b] = [a, a] + [a, b] + [b, a] + [b, b] = [a, b] + [b, a]$

$$\therefore [a, b] = -[b, a] \quad (2.3)$$

En física, las álgebras están íntimamente relacionadas con los grupos de simetría de un sistema físico. En el formalismo de la mecánica clásica, el paréntesis de Poisson es una estructura que devela la función generadora de una simetría en el espacio de estados del sistema (espacio fase). Y su notación universal es $\{, \} : C_M^\infty \times C_M^\infty \longrightarrow C_M^\infty$, donde M es el espacio fase. Del mismo modo, en mecánica cuántica, las simetrías, y sus generadores son identificados mediante el corchete de Lie. La transición de mecánica clásica a mecánica cuántica emparenta ambas operaciones. Es por eso que en física se usa esta notación.

Un álgebra asociativa A , cumple la estructura de álgebra de Lie A_L definiendo en ella un corchete de Lie como sigue.

Definición 2.3: Sean $a, b \in A$, entonces se define el conmutador $[\cdot, \cdot] : A \times A \longrightarrow A$:

$$[a, b] \equiv a \diamond b - b \diamond a. \quad (2.4)$$

La ecuación (2.1) se cumple trivialmente, y la identidad de Jacobi puede verse:

$$\begin{aligned}
& [a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] \\
&= [a, b \diamond c - c \diamond b] + [b, c \diamond a - a \diamond c] + [c, a \diamond b - b \diamond a] \\
&= a \diamond (b \diamond c - c \diamond b) - (b \diamond c - c \diamond b) \diamond a \\
&\quad + b \diamond (c \diamond a - a \diamond c) - (c \diamond a - a \diamond c) \diamond b \\
&\quad + c \diamond (a \diamond b - b \diamond a) - (a \diamond b - b \diamond a) \diamond c \\
&= a \diamond b \diamond c - a \diamond c \diamond b - b \diamond c \diamond a + c \diamond b \diamond a \\
&\quad + b \diamond c \diamond a - b \diamond a \diamond c - c \diamond a \diamond b + a \diamond c \diamond b \\
&\quad + c \diamond a \diamond b - c \diamond b \diamond a - a \diamond b \diamond c + b \diamond a \diamond c \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Los espacios vectoriales matriciales como $\mathfrak{so}(n, \mathbb{F})$, $\mathfrak{su}(n, \mathbb{F})$, $gl(n, \mathbb{F})$ entre otros, son un álgebra bajo la multiplicación usual asociativa de matrices, y por ende un álgebra de Lie usando el conmutador como operación de álgebra. Note que, para cualquier álgebra de Lie que provenga de un álgebra asociativa, se cumple $[a, b \diamond c] = b \diamond [a, c] + [a, b] \diamond c$, veamos:

$$\begin{aligned}
b \diamond [a, c] + [a, b] \diamond c &= b \diamond (a \diamond c - c \diamond a) + (a \diamond b - b \diamond a) \diamond c \\
&= b \diamond a \diamond c - b \diamond c \diamond a + a \diamond b \diamond c - b \diamond a \diamond c \\
&= a \diamond b \diamond c - b \diamond c \diamond a \\
&= [a, b \diamond c].
\end{aligned}$$

2.2. Constantes de estructura

La dimensión de un álgebra de Lie es su dimensión como espacio vectorial: la cardinalidad del conjunto base. Se suele utilizar la notación $\beta = \{T_a; a = 1, 2, \dots, n\}$ (para bases contables no finitas se usa $\beta = \{T_a; a \in \mathbb{O}\}$, con $\mathbb{O}$ algún conjunto infinito contable), donde β es el

conjunto base, y n es la dimensión del álgebra. Dada una base seleccionada, se tiene entonces la siguiente relación:

$$[T_a, T_b] = \sum_{c=1}^n f_{ab}^c T_c = f_{ab}^c T_c. \quad (2.5)$$

Del segundo miembro de la igualdad al tercero se suprime el símbolo Σ de suma porque se está utilizando la convención de Einstein de Índices repetidos alternos (uno superior y uno inferior). Usaré esta convención a menos que pueda haber alguna ambigüedad. Los coeficientes f_{ab}^c son conocidos como las **constantes de estructura**. Las ecuaciones (2.1) y (2.2) se pueden escribir en términos de las constantes de estructura. En efecto, considérense, convenientemente, tres elementos T_a, T_b, T_c , de la base de un álgebra de dimensión n , entonces el corchete $0 = [T_a, T_a] = \sum_{m=1}^n f_{aa}^m T^m$. Debido a la independencia lineal de la base, entonces obtenemos:

$$f_{aa}^m = 0, \quad \forall a, m = 1, \dots, n.$$

Similarmente, de $[[T_a, T_b], T_c] + [[T_c, T_a], T_b] + [[T_b, T_c], T_a] = 0$ se obtiene:

$$f_{ab}^\ell f_{\ell c}^m + f_{ca}^\ell f_{\ell b}^m + f_{bc}^\ell f_{\ell a}^m = 0, \quad \forall a, b, c, m = 1, \dots, n.$$

Uno puede entonces definir *abstractamente* la *estructura* de un álgebra de Lie, escogiendo valores para las constantes de estructura, siempre y cuando éstos valores sean congruentes con la antisimetría y la identidad de Jacobi.

2.3. Homomorfismos, derivaciones

Definición 2.4: Dadas dos álgebras, A, B , un mapeo lineal $\phi : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo si para todo $a, b \in \mathfrak{g}_1$:

$$\phi([a, b]) = [\phi(a), \phi(b)], \quad (2.6)$$

con $\phi(a), \phi(b) \in B$. Debido a esto se suele decir que los homomorfismos *preservan la estructura algebraica*.

Definición 2.4.1: Un homomorfismo $\phi : A \rightarrow B$ inyectivo recibe el nombre de **monomorfismo**.

Definición 2.4.2: Un homomorfismo $\phi : A \rightarrow B$ sobreyectivo recibe el nombre de **epimorfismo**.

Definición 2.4.3: Un homomorfismo $\phi : A \rightarrow B$ que es inyectivo y sobreyectivo, recibe el nombre de **isomorfismo**.

Definición 2.4.4: Un homomorfismo $\phi : A \rightarrow A$ ($A = B$), es llamado **endomorfismo**.

Definición 2.4.5: Un endomorfismo que es a su vez un isomorfismo, es llamado **epimorfismo**.

Nótese ahora lo siguiente. Sea $\phi : L \rightarrow K$ es un isomorfismo entre álgebras, y sea $\beta = \{T_a\}_{a=1}^n$ una base de L . Gracias a las características del isomorfismo, y del álgebra lineal elemental, podemos escoger al conjunto $\beta' = \{\phi(T_a)\}_{a=1}^n$ como una base para K . Además, las relaciones $[T_a, T_b] = f_{ab}^c T_c$ definen la estructura del álgebra L . Ahora aplicamos el isomorfismo, y por su linealidad obtenemos que $[\phi(T_a), \phi(T_b)] = f_{ab}^c \phi(T_c)$, para todo a, b, c . Estas relaciones son las mismas que para L . Es por esto que se dice que si hay un isomorfismo entre álgebras, éstas son *isomorfas*, es decir, que tienen la misma forma, o bien, que *poseen la misma estructura*.

Definición 2.5 : Un mapeo $\delta : L \rightarrow L$, que cumple la condición:

$$\delta([a, b]) = [\delta(a), b] + [a, \delta(b)] \quad (2.7)$$

para todo $a, b \in L$, recibe el nombre de **derivación**.

Para un álgebra asociativa, A , un mapeo que haga $\delta(a \diamond b) = \delta(a) \diamond b + a \diamond \delta(b)$ es considerado también una derivación en el sentido de álgebras de Lie (definiendo el conmutador en el álgebra A), puesto que, es fácil ver, $\delta([a, b]) = [\delta(a), b] + [a, \delta(b)]$. La ecuación (2.7) hereda el nombre de *regla de Leibniz*, ya que es análoga a la regla de Leibniz de diferenciación de productos de funciones. Un ejemplo de derivación, y una de las definiciones más importantes en ésta disertación es la siguiente.

Definición 2.6 : Para un elemento dado x (fijo) en un álgebra de Lie, L , se define el mapeo $ad_x : L \longrightarrow L$ como sigue:

$$ad_x(y) \equiv [x, y], \quad (2.8)$$

para todo elemento $y \in L$, y recibe el nombre de **representación adjunta** o **mapeo adjunto** de x en L .

En efecto, $ad_x([a, b]) = [x, [a, b]]$, y por la identidad de Jacobi, y la antisimetría del corchete, $[x, [a, b]] = [[x, a], b] + [a, [x, b]] = [ad_x(a), b] + [a, ad_x(b)]$. Además, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $a, b \in L$, se encuentra que $ad_x(\alpha a + \beta b) = [x, \alpha a + \beta b] = \alpha[x, a] + \beta[x, b] = \alpha ad_x(a) + \beta ad_x(b)$.

Aún más, $ad_{\{\alpha x + \beta y\}}(a) = [\alpha x + \beta y, a] = \alpha[x, a] + \beta[y, a] = (\alpha ad_x + \beta ad_y)(a)$, de modo que $\alpha ad_x + \beta ad_y = ad_{\{\alpha x + \beta y\}}$, vistos como elementos de algún conjunto de mapeos de L en L .

Más adelante, veremos con más atención este mapeo.

2.4. Subconjuntos de álgebras de Lie

Dados dos subconjuntos L_1, L_2 , de un álgebra L , definimos la siguiente notación:

$$[L_1, L_2] = Span_{\mathbb{F}}\{[\ell_1, \ell_2] \mid \ell_1 \in L_1; \ell_2 \in L_2\}.$$

Donde, como es usual, $Span_{\mathbb{F}}M$ representa el generado lineal bajo el campo F del conjunto M .

Definición 2.7: Un subespacio vectorial K de L que es un álgebra bajo el mismo corchete de Lie que L , es un **subálgebra de Lie** de L .

De manera equivalente, podemos definir un subálgebra de Lie, K , de L como un conjunto que cumpla:

$$[K, K] \subseteq K,$$

puesto que los elementos de $[K, K]$ cumplen las propiedades del corchete de Lie, además de mantener cerradura bajo éste. Evidentemente, $\{0\}$ y L son subálgebras de Lie de L , y son

conocidas como *subálgebras triviales*. Con esta notación se pueden definir convenientemente otros subconjuntos de las álgebras, a saber:

Definición 2.8 : Sea K un subespacio de L . Si se cumple que

$$[K, L] \subseteq K$$

se dice que K es un **ideal** o **subálgebra invariante** de L .

Se conocen como ideales triviales o impropios a los subconjuntos $\{0\}$ y L , de L . Un ideal de L que no es trivial es llamado **ideal propio** de L .

Definición 2.9: El centro $Z(L)$ de L se define:

$$Z(L) := \{x \in L \mid [x, L] = 0\}, \quad (2.9)$$

o bien, $[Z(L), L] = \{0\}$. Es evidente que $Z(L)$ es un ideal, pues $\{0\} \subseteq Z(L)$.

Definición 2.10: El conjunto $L' = L^{\{1\}} := [L, L]$ se conoce como el **álgebra derivada** de L .

Inmediatamente se tiene que L' es un ideal de L , debido a que $[L, [L, L]] \subseteq [L, L]$, en efecto, sea $[a, b] \in [L, L] \subseteq L$, entonces, para todo $c \in L$, $[c, [a, b]] \in [L, L]$.

Definición 2.11: Los conjuntos

$$L^i = [L^{\{i-1\}}, L^{\{i-1\}}], \quad \text{para } i \geq 2, \quad (2.10)$$

reciben el nombre de **series derivadas**, o **series centrales superiores** de L .

De nuevo, se tiene, bajo la misma argumentación, que $L^{\{i\}}$ es un ideal de $L^{\{i-1\}}$. Por otra parte:

Definición 2.12: Los conjuntos

$$L_{\{i\}} = [L, L_{\{i-1\}}], \quad i \geq 2 \quad (2.11)$$

se conocen como las **series centrales inferiores**, donde $L_{\{1\}} = L^{\{1\}} = [L, L]$. De nuevo, por la identidad de Jacobi, se tiene que cada $L_{\{i\}}$ es ideal de $L_{\{i-1\}}$, y además, que cada $L^{\{i\}}$ y $L_{\{i\}}$ son ideales de L , y más aún, que $L^{\{i\}} \subseteq L_{\{i\}}$.

Si las series centrales superiores de algún álgebra L , igualan, para algún i finito, al conjunto $\{0\}$, se dice que L es soluble. Si esto mismo pasa con las series centrales inferiores, se dice que L es nilpotente. Dado que $L^{\{i\}} \subseteq L_{\{i\}}$, nilpotencia implica solubilidad.

Definición 2.13: Se dice que un álgebra de Lie L , cuyo primer álgebra derivada L' se anula ($L' = \{0\}$), es **abeliana**.

Definición 2.14: Un álgebra, no-abeliana, que no contiene ideales propios es un **álgebra simple**.

De modo que, para un álgebra simple, $L^{\{i\}} = L_{\{i\}} = L$, para todo i .

Definición 2.15: Un álgebra L resultante de la suma directa de álgebras simples (ver apéndice A.2) L_i , $i = 1, \dots, m$,

$$L = \bigoplus_{i=1}^m L_i \quad (2.12)$$

se conoce como **álgebra semisimple**.

Observemos que, sean L_i, L_j , dos ideales de un álgebra semisimple, por las propiedades de la suma directa de espacios vectoriales, $L_i \cap L_j = \{0\}$ (apéndice A), y por las propiedades de los ideales, $[L_i, L_j] \subseteq L_i$, y a su vez, $[L_j, L_i] \subseteq L_j$, pero como $[L_i, L_j] = \text{span}_{\mathbb{F}}\{[\ell_i, \ell_j] \mid \ell_i \in L_i, \ell_j \in L_j\} = \text{span}_{\mathbb{F}}\{-[\ell_j, \ell_i] \mid \ell_i \in L_i, \ell_j \in L_j\} = [L_j, L_i]$, entonces, forzosamente, $[L_i, L_j] = \{0\}$. De este modo, tenemos que los corchetes de Lie de un álgebra semisimple cumplen:

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= \{0\}, \quad i \neq j \\ [L_i, L_i] &= L_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde m es el número de álgebras simples que conforman L .

Notemos que es posible adoptar la notación

$$[L \oplus K, M] = [L, M] \oplus [K, M] \quad (2.14)$$

En efecto, un elemento arbitrario de $[L \oplus K, M]$, $[\ell + \kappa, \mu]$ reproduce $[\ell, \mu] + [\kappa, \mu]$, que es un elemento arbitrario de $[L, M] \oplus [K, M]$, de modo que $[L \oplus K, M] \subseteq [L, M] \oplus [K, M]$.

Viceversa, un elemento arbitrario de $[L, M] \oplus [K, M]$, $[\ell, m_1] + [\kappa, m_2]$, reproduce:

$$\begin{aligned} [\ell, m_1] + [\kappa, m_2] &= [\ell, m_1] + [\kappa, m_2] + [\kappa, m_1] - [\kappa, m_1] \\ &= [\ell + \kappa, m_1] + [\kappa, m_1 - m_2] \\ &\quad + [\ell + \kappa, m_1 - m_2] - [\ell + \kappa, m_1 - m_2] \\ &= [\ell + \kappa, 2m_1 - m_2] + [\ell + 2\kappa, m_1 - m_2], \end{aligned}$$

que es un elemento arbitrario de $[L \oplus K, M]$; por doble contención tenemos (2.14). De este modo, podemos ver que, sea $L = \bigoplus_{i=1}^m L_i$, un álgebra semisimple, entonces:

$$\begin{aligned} [L, L] &= \left[\bigoplus_{i=1}^m L_i, \bigoplus_{j=1}^m L_j \right] \\ &= \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^m [L_i, L_j], \\ &= \left[\bigoplus_{i=1}^m [L_i, L_i] \right] \oplus \left[\bigoplus_{i \neq j}^m [L_i, L_j] \right] \\ &= \bigoplus_{i=1}^m L_i \oplus \{0\} \\ &= L, \end{aligned}$$

y obtenemos que las series de un álgebra semisimple reproducen todo el álgebra.

2.5. Módulos y Representaciones

Las definiciones siguientes son usualmente usadas en la literatura existente de álgebras y superálgebras de Lie, y se presentan aquí por completez.

Definición 2.16: Un **anillo** R es un *grupo abeliano* (ver apéndice 2) que, además de la operación de grupo, $+$: $R \times R \rightarrow R$, tiene definida una operación, $\cdot$: $R \times R \rightarrow R$, que cumple:

- Es asociativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, para todo $a, b, c \in R$.
- Existe un elemento 1_R tal que $1_R \cdot a = a \cdot 1_R = a$ para todo $a \in R$.
- Es distributiva: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$; $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$; para todo $a, b, c \in R$.

La operación $\cdot$ en R se conoce como multiplicación, y cuando no hay ambigüedad, se denota $a \cdot b \equiv ab$, como la multiplicación aritmética. Los anillos prototípicos son $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, bajo la suma $(+)$ y la multiplicación $(\cdot)$ usuales. Si la multiplicación en un anillo es conmutativa se dice que el anillo *es conmutativo*. Los números naturales, enteros, racionales y reales son, evidentemente, conmutativos pero, en general, los anillos pueden ser *no conmutativos*, sin embargo en este documento no son de interés. Un álgebra puede ser identificada como un pseudo-anillo, es decir, un anillo sin unidad multiplicativa. Un álgebra unital cumple con las definiciones de anillo. Un anillo (álgebra) puede 'actuar' sobre un conjunto (espacio) como un endomorfismo.

Definición 2.17: Sea R un pseudo-anillo, y sea G un grupo abeliano. Se dice que G es un **R-módulo** si se define una operación $R \times G \rightarrow G$, $(a, \alpha) \rightarrow a\alpha$, tal que, para todo $a, b \in R$, $\alpha, \beta \in G$:

- $(ab)\alpha = a(b\alpha)$
- $a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta$.
- $(a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha$.

Si, además, el pseudo-anillo es unital, es decir, es un anillo, existe $1_R \in R$ tal que

- $1_R\alpha = \alpha$; $\forall \alpha \in G$.

Por otro lado, si la operación binaria está definida en $G \times R \rightarrow G$, por $(\alpha, a) \rightarrow \alpha a$, se dice que G es un R -módulo derecho. Aún más, cuando la operación puede usarse indistintamente $(a, \alpha) \equiv (\alpha, a) \equiv a\alpha \equiv \alpha a$, se dice que G es un R -bimódulo. De este modo, por ejemplo, un álgebra puede ser definida como un R -bimódulo, con R siendo un anillo (con unidad 1_R). Ésta definición de un álgebra es más frecuentemente utilizada en matemáticas, y aquí sólo la presentamos como ejemplo .

Como lo he mencionado anteriormente, en física, las álgebras están íntimamente relacionadas con los grupos de simetría de un sistema físico, mediante mapeos diferenciables en el grupo, y sus razones de cambio; estos grupos de simetría *actúan*, naturalmente, sobre algún espacio de configuraciones o de *estados* del sistema en cuestión. Es por ello, que es conveniente estudiar el modo en que las álgebras pueden actuar sobre espacios. La geometría diferencial ya se ha encargado ampliamente de estas cuestiones, y nosotros aquí nos dedicamos a un objeto en específico. Para introducirlo hemos de recordar, del álgebra lineal, que para cualquier espacio vectorial V , sobre un campo $\mathbb{F}$, el conjunto de mapeos lineales de V en V , generalmente denotado por $gl(V)$, es un espacio vectorial, definido necesariamente sobre el mismo campo $\mathbb{F}$; luego, la composición de mapeos, denotada digamos por $\circ$, opera dos mapeos para obtener uno nuevo. Esta operación es, por las propiedades lineales del espacio de mapeos, asociativa; entonces, el espacio $gl(V)$, junto con la operación composición es un álgebra sobre el campo $\mathbb{F}$, y si se considera el conmutador de composiciones, entonces, gracias a la asociatividad de la composición, se obtiene un álgebra de Lie, conocida como el álgebra general lineal de V . Cónsiderése ahora un álgebra de lie L , y un monomorfismo de álgebras de Lie, $\nu : L \rightarrow gl(V)$. Entonces, la estructura del producto en L es preservada por el conmutador en $gl(V)$ y, ya que $\nu(x) \in gl(V)$, con $x \in L$, si $v \in V$, entonces $(\nu(x))(v) = v' \in V$ y $\nu(x)$ es, efectivamente, un mapeo lineal, en el espacio de mapeos con la estructura de L . En la práctica, este proceso se resume mediante la siguiente definición.

Definición 2.18: Sean L un álgebra de Lie, y sea V un espacio vectorial sobre el mismo campo $\mathbb{F}$. V es un L -módulo si se puede definir una operación bilineal $(\cdot, \cdot) : L \times V \rightarrow V$,

denotada $(a, v) \equiv av$, que obedece

$$[a, b]v = a(bv) - b(av), \quad (2.15)$$

para todo $a, b \in L$, $v \in V$.

La operación bilineal, evidentemente, puede ser definida mediante un homomorfismo de álgebras. En tal caso, se suele decir que el homomorfismo es una representación de L en V . Cuando un espacio vectorial V es un L -módulo se dice que L *tiene una representación* en V , quien recibe el nombre de *espacio de representación*, o simplemente, abusando del lenguaje, también son llamados *representación*, sin embargo, aquí trataré de evitar la ambigüedad del término. En casos necesarios, se usa la notación $R(x)v$ para indicar que R es la representación de x que actúa sobre v en V .

Definición 2.19: Un L -submódulo W de V es un subespacio vectorial de V cuya imagen bajo L es un subconjunto de sí mismo, es decir, $L(W) \subseteq W$. Se conocen como submódulos triviales a los subespacios $\{0\}$ y V de V .

Definición 2.20: Un **módulo irreducible** es uno que no contiene submódulos no triviales. Trivialmente, los **módulos reducibles** son aquellos que no son irreducibles.

2.5.1. Representación adjunta

En la ecuación (2.8) se introdujo un operador que se le asigna a cada uno de los elementos de un álgebra de Lie, L , arbitraria. Si definimos ahora un mapeo:

$$R_{ad} : L \rightarrow gl(L); \quad R_{ad}(x) = ad_x \in gl(L), \quad (2.16)$$

tenemos que R_{ad} es una representación de L sobre sí misma, vista como espacio vectorial. El kernel del mapeo R_{ad} es el conjunto de elementos $x \in L$ tales que $ad_x(y) = [x, y] = 0$, es decir, de todos aquellos elementos $x \in L$ que conmutan con todos los elementos del álgebra L , que corresponde con el centro de L , $Z(L)$, definido en la ecuación (2.9) que, sabemos, es

un ideal. Para un álgebra abeliana, por ejemplo, el mapeo R_{ad} es el mapeo cero, mientras que para un álgebra simple, dado que el centro, o bien, el kernel consiste sólo del elemento cero, el mapeo es inyectivo. En términos de representaciones, podemos comprobar que R_{ad} es un homomorfismo de álgebras. Dado que en $gl(L)$, visto como álgebra, el corchete de Lie es el conmutador, tenemos que $ad_x \circ ad_y - ad_y \circ ad_x = [ad_x, ad_y]$; luego, $R_{ad}([x, y]) = ad_{[x, y]}$ debería corresponder, en el espacio de mapeos, con el conmutador de los mapeos adjuntos, veamos: $[ad_x, ad_y](z) = ad_x(ad_y(z)) - ad_y(ad_x(z)) = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = [[x, y], z] = ad_{[x, y]}(z)$, donde la última igualdad es debida a la identidad de Jacobi, y la antisimetría del corchete.

Si se escoge una base $\{T_a\}_{a=1}^n$ para el álgebra, el mapeo adjunto puede expresarse en términos de las constantes de estructura. $ad_{T_a}(T_b) = [T_a, T_b] = f_{ab}^c T_c$. Recordemos, del álgebra lineal, que las constantes f_{ab}^c son las entradas de la matriz que representa, en este caso, al mapeo ad_{T_a} , dada la base escogida. Entonces las matrices

$$(ad_{T_a})_b^c = f_{ab}^c \quad (2.17)$$

generan el conjunto de matrices en la representación de $\{T_a\}_{a=1}^n$ que corresponden al conjunto de mapeos $R_{ad}(L)$ en L . Además, podemos calcular la representación matricial de un elemento ad_x , con $x = x^a T_a$:

$$ad_x(T_b) = [x, T_b] = [x^a T_a, T_b] = x^a f_{ab}^c T_c; \quad (2.18)$$

con lo que

$$(ad_x)_b^c = x^a f_{ab}^c. \quad (2.19)$$

2.6. Métrica de Cartan-Killing

La propiedad de la representación adjunta, de ser inyectiva para las álgebras simples da pie a un producto en ellas:

Definición 2.21: El **producto o forma de Cartan-Killing** (o simplemente forma de

Killing) $\kappa(\cdot, \cdot) : L \times L \rightarrow \mathbb{F}$ se define:

$$\kappa(x, y) = \text{tr}(ad_x \circ ad_y). \quad (2.20)$$

Proposición: La forma de Killing cumple las propiedades:

1. Simetría: $\kappa(x, y) = \kappa(y, x)$.
2. Linealidad: $\kappa(\alpha x + \beta y, z) = \alpha \kappa(x, z) + \beta \kappa(y, z)$.
3. Invariancia: $\kappa(x, [y, z]) = \kappa([x, y], z)$.

Prueba: Los puntos 1 y 2 son inmediatos por las propiedades de la traza, mientras que, para la tercera prueba, considérese el conmutador, en el espacio $gl(L)$, de representaciones adjuntas. Tenemos $\kappa(x, [y, z]) = \text{tr}(ad_x \circ ad_{[y, z]}) = \text{tr}[ad_x \circ (ad_y \circ ad_z - ad_z \circ ad_y)] = \text{tr}(ad_x \circ ad_y \circ ad_z - ad_x \circ ad_z \circ ad_y) = \text{tr}(ad_x \circ ad_y \circ ad_z) - \text{tr}(ad_x \circ ad_z \circ ad_y)$; luego, la traza es invariante bajo una permutación cíclica de los mapeos, de modo que $\kappa(x, [y, z]) = \text{tr}(ad_x \circ ad_y \circ ad_z) - \text{tr}(ad_y \circ ad_x \circ ad_z) = \text{tr}(ad_x \circ ad_y \circ ad_z - ad_y \circ ad_x \circ ad_z) = \text{tr}[(ad_x \circ ad_y - ad_y \circ ad_x) \circ ad_z] = \text{tr}([ad_x, ad_y] \circ ad_z) = \text{tr}(ad_{[x, y]} \circ ad_z) = \kappa([x, y], z)$.

Además, la forma de killing es no-degenerada si y sólo si se define sobre un álgebra de Lie semisimple (Xu, 2017). Note también que éste último resultado implica que, en un álgebra de Lie simple, la forma de Killing es no degenerada.

Para evaluar la forma de Killing se debe escoger una base para el espacio de representación, digamos $\{T_a\}_{a=1}^n$. entonces, la forma de killing de dos vectores arbitrarios en el álgebra:

$$\begin{aligned} \kappa(x, y) &= \text{tr}(ad_x \circ ad_y) = (ad_x)_a^b (ad_y)_b^a = x^i f_{ia}^b y^k f_{kb}^a. \\ &= f_{ia}^b f_{kb}^a x^i y^k \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ésta forma de escribir κ motiva la siguiente definición:

Definición 2.22: El tensor métrico κ_{ab} de Cartan-Killing se define:

$$\kappa_{ab} = \frac{1}{I_{ad}} \kappa(T_a, T_b) = \frac{1}{I_{ad}} f_{ac}^d f_{bd}^c, \quad (2.22)$$

donde I_{ad} es una constante global, normalizadora (Fuchs y Schweigert, 2003). Cabe resaltar que el índice de suma d es el que corresponde a la multiplicación de las matrices que representan a los mapeos ad_{T_a} y ad_{T_b} , mientras que el índice de suma c es el de la operación traza sobre una matriz ($tr(A) = \sum_c A_c^c$). Esta es una observación que será útil en el capítulo siguiente.

La ecuación (2.21), se puede escribir:

$$\kappa(x, y) = I_{ad} \kappa_{ik} x^i y^k = I_{ad} x^T \kappa y, \quad (2.23)$$

tomando x, y como vectores columnas.

A continuación se calcula la métrica de Cartan para las álgebras de Lie $\mathfrak{so}(3)$, $\mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{so}(1, 3)$, y $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

2.7. Métrica de Cartan de $\mathfrak{so}(3)$

EL álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$, 3-dimensional tiene como reglas de conmutación:

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ij}^k L_k \quad (2.24)$$

Donde L_i , $i = 1, 2, 3$ son todos los generadores; el coeficiente ϵ_{ij}^k es el símbolo de Levi-Civita (apéndice E). Se puede ver entonces que las constantes de estructura son

$$f_{ij}^k = \epsilon_{ij}^k \quad (2.25)$$

Por lo tanto, la métrica de Cartan:

$$\begin{aligned} \kappa_{ij} &= \frac{1}{I_{ad}} f_{ik}^\ell f_{j\ell}^k \\ &= \frac{1}{I_{ad}} \epsilon_{ik}^\ell \epsilon_{j\ell}^k \\ &= -\frac{2}{I_{ad}} \delta_{ij} \end{aligned}$$

Si escogemos $I_{ad} = -2$ obtenemos:

$$\kappa_{ij} = \delta_{ij}, \quad (2.26)$$

o bien,

$$(\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

La selección de I_{ad} es a conveniencia, y usualmente usado para normalizar las entradas en la métrica.

2.8. Métrica de Cartan del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$

El álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2, \mathbb{C})$, 3-dimensional, tiene como reglas de conmutación las siguientes:

$$[t_i, t_j] = 2i\epsilon_{ij}^k t_k, \quad (2.28)$$

donde, los generadores son t_k ; ($k = 1, 2, 3$), el coeficiente i es la unidad imaginaria, y el coeficiente $\epsilon_{ij}{}^k$ es el *símbolo de Levi Civita*. Las constantes de estructura, en este caso, son

$$f_{ij}{}^k = 2i\epsilon_{ij}{}^k; \quad (2.29)$$

De modo que la métrica de Killing está dada por:

$$\kappa_{\ell m} = \frac{1}{I_{ad}} f_{\ell j}{}^k f_{mk}{}^j = \frac{1}{I_{ad}} (2i\epsilon_{\ell j}{}^k)(2i\epsilon_{mk}{}^j). \quad (2.30)$$

Usando la total antisimetría en los índices del símbolo de Levi-Civita, podemos escribir:

$$\kappa_{\ell m} = -\frac{1}{I_{ad}} 4\epsilon_{\ell j}{}^k \epsilon_{mk}{}^j = \frac{1}{I_{ad}} 4 \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{\ell j}{}^k \epsilon_{mk}{}^j = \frac{1}{I_{ad}} 4(2\delta_{\ell m}) = \frac{8}{I_{ad}} \delta_{\ell m}.$$

Escogemos $I_{ad} = 8$, para todos los valores de ℓ y m , con lo que finalmente, obtenemos:

$$(\kappa_{\ell m}) = (\delta_{\ell m}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

2.9. Métrica de Cartan del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(1, 3)$

Las reglas de conmutación del álgebra de Lie 6-dimensional, $\mathfrak{so}(1, 3)$, son:

$$[t_i, t_k] = i\epsilon_{ij}{}^k t_k, \quad (2.32)$$

$$[t_i, s_{j'}] = i\epsilon_{ij'}{}^{k'} s_{k'}, \quad (2.33)$$

$$[s_{i'}, s_{j'}] = -i\epsilon_{i'j'}{}^k t_k. \quad (2.34)$$

Donde t_i son los primeros 3 generadores en la base ordenada, y $s_{i'}$ son los últimos tres. Para hacerlo aún más claro, podemos escribir $s_1 = t_4$; $s_2 = t_5$; $s_3 = t_6$. Con esto, podemos separar la suma en la métrica de Cartan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\kappa_{\alpha\beta} &= \frac{1}{I_{ad}} f_{\alpha\gamma}{}^\lambda f_{\beta\lambda}{}^\gamma \\
&= \frac{1}{I_{ad}} \left(f_{\alpha i}{}^\lambda f_{\beta\lambda}{}^i + f_{\alpha i'}{}^\lambda f_{\beta\lambda}{}^{i'} \right) \\
&= \frac{1}{I_{ad}} \left(f_{\alpha i}{}^j f_{\beta j}{}^i + f_{\alpha i}{}^{j'} f_{\beta j'}{}^i + f_{\alpha i'}{}^j f_{\beta j}{}^{i'} + f_{\alpha i'}{}^{j'} f_{\beta j'}{}^{i'} \right)
\end{aligned}$$

de donde se separó la suma en γ de la primera igualdad a la segunda, y de la segunda a la tercera se separaron las sumas en λ . Ahora, de las reglas de conmutación, podemos notar que las constantes de estructura son:

$$\begin{aligned}
f_{ij}{}^k &= i\epsilon_{ij}{}^k, \\
f_{ij'}{}^{k'} &= i\epsilon_{ij'}{}^{k'}, \\
f_{i'j'}{}^k &= -i\epsilon_{i'j'}{}^k.
\end{aligned}$$

De donde se puede ver que las siguientes constantes se anulan,

$$f_{ij}{}^{k'} = f_{ij'}{}^k = f_{i'j'}{}^k = 0,$$

para todos los valores de i, j, k, i', j', k' . Por lo tanto, podemos obtener:

$$\begin{aligned}
\kappa_{k\ell} &= (f_{ki}{}^j f_{\ell j}{}^i + f_{ki}{}^{j'} f_{\ell j'}{}^i + f_{ki'}{}^j f_{\ell j}{}^{i'} + f_{ki'}{}^{j'} f_{\ell j'}{}^{i'}) \frac{1}{I_{ad}} \\
&= (f_{ki}{}^j f_{\ell j}{}^i + f_{ki'}{}^{j'} f_{\ell j'}{}^{i'}) \frac{1}{I_{ad}}, \\
\kappa_{k\ell'} &= (f_{ki}{}^j f_{\ell' j}{}^i + f_{ki}{}^{j'} f_{\ell' j'}{}^i + f_{ki'}{}^j f_{\ell' j}{}^{i'} + f_{ki'}{}^{j'} f_{\ell' j'}{}^{i'}) \frac{1}{I_{ad}} = 0, \\
\kappa_{\ell' k} &= (f_{\ell' i}{}^j f_{kj}{}^i + f_{\ell' i}{}^{j'} f_{kj'}{}^i + f_{\ell' i'}{}^j f_{kj}{}^{i'} + f_{\ell' i'}{}^{j'} f_{kj'}{}^{i'}) \frac{1}{I_{ad}} = 0, \\
\kappa_{\ell' k'} &= (f_{\ell' i}{}^j f_{k' j}{}^i + f_{\ell' i}{}^{j'} f_{k' j'}{}^i + f_{\ell' i'}{}^j f_{k' j}{}^{i'} + f_{\ell' i'}{}^{j'} f_{k' j'}{}^{i'}) \frac{1}{I_{ad}}, \\
&= (f_{\ell' i}{}^{j'} f_{k' j'}{}^i + f_{\ell' i'}{}^j f_{k' j}{}^{i'}) \frac{1}{I_{ad}}.
\end{aligned}$$

La métrica de Killing, ahora toma una forma

$$(\kappa_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Y podemos ignorar el cálculo de $\kappa_{ij'}$ y $\kappa_{i'j}$ para todos los valores de i, i', j, j' , con toda libertad. Veamos entonces el caso κ_{ij} :

$$\begin{aligned}
\kappa_{ij} &= \frac{1}{I_{ad}} [f_{ik}^{\ell} f_{j\ell}^k + f_{ik'}^{\ell'} f_{j\ell'}^{k'}] \\
&= \frac{1}{I_{ad}} [(i\epsilon_{ik}^{\ell})(i\epsilon_{j\ell}^k) + (i\epsilon_{ik'}^{\ell'})(i\epsilon_{j\ell'}^{k'})] \\
&= \frac{1}{I_{ad}} \left[- \sum_{k,\ell=1}^3 (\epsilon_{ik}^{\ell})(-\epsilon_{jk}^{\ell}) - \sum_{k',\ell'=1}^3 (\epsilon_{ik'}^{\ell'})(-\epsilon_{jk'}^{\ell'}) \right] \\
&= \frac{1}{I_{ij}} [2\delta_{ij} + 2\delta_{ij}] = \frac{4}{I_{ad}} \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Donde de nuevo se usó la indistinguibilidad de los subíndices y superíndices del símbolo de Levi-Civita. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\kappa_{i'j'} &= \frac{1}{I_{ad}} (f_{i'k}^{\ell'} f_{j'\ell'}^k + f_{i'k'}^{\ell} f_{j'\ell}^{k'}) \\
&= \frac{1}{I_{ad}} (-f_{ki'}^{\ell'} f_{j'\ell'}^k - f_{i'k'}^{\ell} f_{j'\ell}^{k'}) \\
&= -\frac{1}{I_{ad}} [(i\epsilon_{ki'}^{\ell'})(-i\epsilon_{j'\ell'}^k) + (-i\epsilon_{i'k'}^{\ell})(i\epsilon_{j'\ell}^{k'})] \\
&= -\frac{1}{I_{ad}} \left(\sum_{k,\ell'=1}^3 \epsilon_{i'\ell'}^k \epsilon_{j'\ell'}^k + \sum_{k',\ell=1}^3 \epsilon_{i'k'}^{\ell} \epsilon_{j'\ell}^{\ell} \right) \\
&= -\frac{1}{I_{ad}} (2\delta_{i'j'} + 2\delta_{i'j'}) = -\frac{4}{I_{ad}} \delta_{i'j'}.
\end{aligned}$$

Ahora, convenientemente escogemos $I_{ad} = 4$, de modo que :

$$(\kappa_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} (\delta_{ij}) & 0 \\ \hline 0 & -(\delta_{k\ell}) \end{array} \right). \quad (2.35)$$

Para obtener una expresión que recopile la información de los dos bloques de la matriz que hemos encontrado, es posible utilizar la delta de Kronecker. Considérese el objeto:

$$\kappa'_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha i} \delta_{j\beta} \delta^{ij} - \delta_{\alpha I} \delta_{J\beta} \delta^{IJ},$$

del que $\alpha, \beta = 1, \dots, 6$; $i, j = 1, 2, 3$; y $I, J = 4, 5, 6$. Considérese ahora el elemento de matriz $\kappa_{\sigma, \sigma+n}$, tal que $\sigma, \sigma+n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, pero $n \neq 0$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \kappa'_{\sigma, \sigma+n} &= \delta_{\sigma i} \delta_{j, \sigma+n} \delta^{ij} - \delta_{\sigma I} \delta_{J, \sigma+n} \delta^{IJ} \\ &= \delta_{\sigma, \sigma+n} - \delta_{\sigma, \sigma+n} = 0, \end{aligned}$$

pues $n \neq 0$, y obtenemos que $\kappa'_{\alpha\beta}$ es diagonal. Luego, considérese un elemento en la diagonal κ_{kk} (no suma implícita), donde, como hicimos la convención, $k \in \{1, 2, 3\}$;

$$\kappa'_{kk} = \delta_{ki} \delta_{jk} \delta^{ij} - \delta_{kI} \delta_{Jk} \delta^{IJ},$$

dado que $I, J \in \{4, 5, 6\}$, el segundo término del miembro derecho se anula, y del primero obtenemos una delta:

$$\kappa_{kk} = \delta_{kk} = 1 \quad (\text{no suma implícita}).$$

Del mismo modo, escogiendo un elemento κ_{KK} , $K \in \{4, 5, 6\}$ obtememos

$$\kappa_{KK} = -\delta_{KK} = -1 \quad (\text{no suma implícita}).$$

Entonces podemos estar seguros que la métrica de Cartan de $\mathfrak{so}(1, 3)$ se puede escribir:

$$\kappa_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha i} \delta_{j\beta} \delta^{ij} - \delta_{\alpha I} \delta_{J\beta} \delta^{IJ} \tag{2.36}$$

cuando las reglas de conmutación están dadas como en (2.32), (2.33), (2.34).

El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(1, 3)$ se puede entender como una suma directa de dos álgebras de Lie $\mathfrak{so}(3) \oplus (i)\mathfrak{so}(3)$, y en éste ejemplo podemos observar la descomposición, de la forma diagonal por bloques del tensor de Cartan. El primer bloque es la métrica de Cartan de $\mathfrak{so}(3)$, calculada en la ecuación (2.27), y el segundo se puede obtener mediante el mapeo $L_k \rightarrow iL_k$,

para todo $k = 1, 2, 3$, de la base de $\mathfrak{so}(3)$, y manteniendo un mismo valor de I_{ad} .

Vista como un conjunto de operadores infinitesimales del grupo $SO(1, 3)$, que deja invariante la métrica en el espacio de Minkowsky, los elementos de éste álgebra toman una representación con dos índices tensoriales. Los elementos generadores del álgebra pueden escribirse como:

$$M_{\alpha\beta} = x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha,$$

con $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$. A partir de ésta definición es posible encontrar el álgebra y las constantes de estructura. En el apéndice C obtenemos que

$$[M_{\alpha\beta}, M_{\mu\nu}] = (\eta_{\mu\beta} \delta_\alpha^\tau \delta_\nu^\sigma - \eta_{\nu\beta} \delta_\alpha^\tau \delta_\mu^\sigma - \eta_{\mu\alpha} \delta_\beta^\tau \delta_\nu^\sigma + \eta_{\nu\alpha} \delta_\beta^\tau \delta_\mu^\sigma) M_{\tau\sigma},$$

de donde las constantes de estructura son

$$f_{\alpha\beta, \mu\nu}{}^{\tau\sigma} = \eta_{\mu\beta} \delta_\alpha^\tau \delta_\nu^\sigma - \eta_{\nu\beta} \delta_\alpha^\tau \delta_\mu^\sigma - \eta_{\mu\alpha} \delta_\beta^\tau \delta_\nu^\sigma + \eta_{\nu\alpha} \delta_\beta^\tau \delta_\mu^\sigma. \quad (2.37)$$

La métrica:

$$\begin{aligned} I_{ad} \kappa_{ij, kl} &= f_{ij, \alpha\beta}{}^{\lambda\epsilon} f_{kl, \lambda\epsilon}{}^{\alpha\beta} \\ &= (\eta_{\alpha j} \delta_i^\lambda \delta_\beta^\epsilon - \eta_{\beta j} \delta_i^\lambda \delta_\alpha^\epsilon - \eta_{\alpha i} \delta_j^\lambda \delta_\beta^\epsilon + \eta_{\beta i} \delta_j^\lambda \delta_\alpha^\epsilon) (\eta_{\lambda\ell} \delta_k^\alpha \delta_\epsilon^\beta - \eta_{\epsilon\ell} \delta_k^\alpha \delta_\lambda^\beta - \eta_{\lambda k} \delta_\ell^\alpha \delta_\epsilon^\beta + \eta_{\epsilon k} \delta_\ell^\alpha \delta_\lambda^\beta). \end{aligned}$$

Desarrollando los dieciséis términos:

$$\begin{aligned} &= \eta_{\alpha j} \delta_i^\lambda \delta_\beta^\epsilon \eta_{\lambda\ell} \delta_k^\alpha \delta_\epsilon^\beta - \eta_{\alpha j} \delta_i^\lambda \delta_\beta^\epsilon \eta_{\epsilon\ell} \delta_k^\alpha \delta_\lambda^\beta - \eta_{\alpha j} \delta_i^\lambda \delta_\beta^\epsilon \eta_{\lambda k} \delta_\ell^\alpha \delta_\epsilon^\beta + \eta_{\alpha j} \delta_i^\lambda \delta_\beta^\epsilon \eta_{\epsilon k} \delta_\ell^\alpha \delta_\lambda^\beta \\ &\quad - \eta_{\beta j} \delta_i^\lambda \delta_\alpha^\epsilon \eta_{\lambda\ell} \delta_k^\alpha \delta_\epsilon^\beta + \eta_{\beta j} \delta_i^\lambda \delta_\alpha^\epsilon \eta_{\epsilon\ell} \delta_k^\alpha \delta_\lambda^\beta + \eta_{\beta j} \delta_i^\lambda \delta_\alpha^\epsilon \eta_{\lambda k} \delta_\ell^\alpha \delta_\epsilon^\beta - \eta_{\beta j} \delta_i^\lambda \delta_\alpha^\epsilon \eta_{\epsilon k} \delta_\ell^\alpha \delta_\lambda^\beta \\ &\quad - \eta_{\alpha i} \delta_j^\lambda \delta_\beta^\epsilon \eta_{\lambda\ell} \delta_k^\alpha \delta_\epsilon^\beta + \eta_{\alpha i} \delta_j^\lambda \delta_\beta^\epsilon \eta_{\epsilon\ell} \delta_k^\alpha \delta_\lambda^\beta + \eta_{\alpha i} \delta_j^\lambda \delta_\beta^\epsilon \eta_{\lambda k} \delta_\ell^\alpha \delta_\epsilon^\beta - \eta_{\alpha i} \delta_j^\lambda \delta_\beta^\epsilon \eta_{\epsilon k} \delta_\ell^\alpha \delta_\lambda^\beta \\ &\quad + \eta_{\beta i} \delta_j^\lambda \delta_\alpha^\epsilon \eta_{\lambda\ell} \delta_k^\alpha \delta_\epsilon^\beta - \eta_{\beta i} \delta_j^\lambda \delta_\alpha^\epsilon \eta_{\epsilon\ell} \delta_k^\alpha \delta_\lambda^\beta - \eta_{\beta i} \delta_j^\lambda \delta_\alpha^\epsilon \eta_{\lambda k} \delta_\ell^\alpha \delta_\epsilon^\beta + \eta_{\beta i} \delta_j^\lambda \delta_\alpha^\epsilon \eta_{\epsilon k} \delta_\ell^\alpha \delta_\lambda^\beta. \end{aligned}$$

Contrayendo todos los índices:

$$\begin{aligned}
I_{ad}\kappa_{ij,k\ell} &= \eta_{kj}\eta_{il} - \eta_{kj}\eta_{il} - \eta_{\ell j}\eta_{ik} + \eta_{\ell j}\eta_{ik} \\
&\quad - \eta_{kj}\eta_{il} + \eta_{ij}\eta_{k\ell} + \eta_{\ell j}\eta_{ik} - \eta_{ij}\eta_{\ell k} \\
&\quad - \eta_{ki}\eta_{j\ell} + \eta_{ki}\eta_{j\ell} + \eta_{\ell i}\eta_{jk} - \eta_{\ell i}\eta_{jk} \\
&\quad + \eta_{ki}\eta_{j\ell} - \eta_{ji}\eta_{k\ell} - \eta_{\ell i}\eta_{jk} + \eta_{ji}\eta_{\ell k} \\
&= 2(\eta_{ik}\eta_{j\ell} - \eta_{il}\eta_{jk}).
\end{aligned}$$

En este caso, es conveniente escoger $I_{ad} = 4$, de modo que

$$\kappa_{ij,k\ell} = \frac{1}{2}(\eta_{ik}\eta_{j\ell} - \eta_{il}\eta_{jk}). \quad (2.38)$$

2.10. Métrica de Cartan de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

El álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ se puede entender como la complejificación del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$. Existe un isomorfismo que relaciona los elementos de ambas bases:

$$t_{AB} = \alpha t_i(\sigma^i)_{AB}$$

Donde $[t_i, t_j] = 2i\epsilon_{ij}^k$, y la constante α es una constante de normalización, cuyo valor se escoge a conveniencia; en esta tesis lo dejaremos expresado, con la finalidad de no perder la generalidad. Además, hemos de tener en cuenta que t_{AB} es simétrico en AB , pues $(\sigma^k)_{AB} = \varepsilon_{BD}(\sigma^i)_A^D$ es simétrica en AB (apéndice D); siendo $(\sigma^i)_A^D$ las entradas de las matrices de Pauli. La tarea ahora es calcular las constantes de estructura y posteriormente la forma de Killing de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Dada la simetría de los índices AB de los generadores, esperamos obtener simetría en cada par de índices de $f_{AB,CD}^{EF}$, Comencemos por calcular el conmutador:

$$\begin{aligned}
[t_{AB}, t_{CD}] &= [\alpha t_i(\sigma^i)_{AB}, \alpha t_j(\sigma^j)_{CD}] \\
&= \alpha^2 (\sigma^i)_{AB} (\sigma^j)_{CD} [t_i, t_j] \\
&= \alpha^2 (\sigma^i)_{AB} (\sigma^j)_{CD} (2i\epsilon_{ij}^k t_k) \\
&= 2i\alpha^2 \epsilon_{ij}^k (\sigma^i)_{AB} (\sigma^j)_{CD} t_k
\end{aligned}$$

Usando que $\varepsilon_{BE}(\sigma^k)_A{}^E = (\sigma^k)_{AB}$, y $\varepsilon_{DF}(\sigma^k)_C{}^F = (\sigma^k)_{CD}$, escribimos:

$$[t_{AB}, t_{CD}] = 2i\alpha^2 \varepsilon_{BE} \varepsilon_{DF} \epsilon_{ij}{}^k (\sigma^i)_A{}^E (\sigma^j)_C{}^F t_k$$

Ahora usaremos la identidad siguiente (Apéndice D):

$$(\sigma^i)_A{}^E (\sigma^j)_C{}^F - (\sigma^j)_A{}^E (\sigma^i)_C{}^F = i\epsilon^{ij}{}_k [(\sigma^k)_A{}^F \delta_C{}^E - (\sigma^k)_C{}^E \delta_A{}^F]$$

Multiplicando ambos lados por $\epsilon_{ij}{}^\ell$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}{}^\ell (\sigma^i)_A{}^E (\sigma^j)_C{}^F - \epsilon_{ij}{}^\ell (\sigma^j)_A{}^E (\sigma^i)_C{}^F &= i\epsilon_{ij}{}^\ell \epsilon^{ij}{}_k [(\sigma^k)_A{}^F \delta_C{}^E - (\sigma^k)_C{}^E \delta_A{}^F] \\ \epsilon_{ij}{}^\ell (\sigma^i)_A{}^E (\sigma^j)_C{}^F + \epsilon_{ji}{}^\ell (\sigma^j)_A{}^E (\sigma^i)_C{}^F &= 2i\delta_k{}^\ell [(\sigma^k)_A{}^F \delta_C{}^E - (\sigma^k)_C{}^E \delta_A{}^F] \end{aligned}$$

Donde se ha utilizado la total antisimetría del símbolo de Levi-Civita en el segundo término del miembro izquierdo de la última ecuación, del cual ahora renombramos los índices i por j , y viceversa, con lo que obtenemos:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}{}^\ell (\sigma^i)_A{}^E (\sigma^j)_C{}^F + \epsilon_{ij}{}^\ell (\sigma^i)_A{}^E (\sigma^j)_C{}^F &= 2i [(\sigma^\ell)_A{}^F \delta_C{}^E - (\sigma^\ell)_C{}^E \delta_A{}^F] \\ 2\epsilon_{ij}{}^\ell (\sigma^i)_A{}^E (\sigma^j)_C{}^F &= 2i [(\sigma^\ell)_A{}^F \delta_C{}^E - (\sigma^\ell)_C{}^E \delta_A{}^F] \end{aligned}$$

Renombrando el índice libre ℓ por k , y cancelando factores:

$$\epsilon_{ij}{}^k (\sigma^i)_A{}^E (\sigma^j)_C{}^F = i [(\sigma^k)_A{}^F \delta_C{}^E - (\sigma^k)_C{}^E \delta_A{}^F]$$

Sustituyendo este último resultado en el conmutador:

$$\begin{aligned} [t_{AB}, t_{CD}] &= 2i\alpha^2 \varepsilon_{BE} \varepsilon_{DF} \{ i [(\sigma^k)_A{}^F \delta_C{}^E - (\sigma^k)_C{}^E \delta_A{}^F] \} t_k \\ &= -2\alpha^2 [\varepsilon_{DF}(\sigma^k)_A{}^F \varepsilon_{BE} \delta_C{}^E - \varepsilon_{BE}(\sigma^k)_C{}^E \varepsilon_{DF} \delta_A{}^F] t_k \\ &= -2\alpha^2 [(\sigma^k)_{AD} \varepsilon_{BC} - (\sigma^k)_{CB} \varepsilon_{DA}] t_k \end{aligned}$$

Para obtener una forma explícita de las constantes de estructura hay que ocupar la delta de cronecker para renombrar índices. Hay que usar que $(\sigma^k)_{EF} \delta_A{}^E \delta_D{}^F = (\sigma^k)_{AD}$, y similar con

$(\sigma^k)_{CB}$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
[t_{AB}, t_{CD}] &= -2\alpha^2[(\sigma^k)_{EF}\delta_A^E\delta_D^F\varepsilon_{BC} - (\sigma^k)_{EF}\delta_C^E\delta_B^F\varepsilon_{DA}]t_k \\
&= -2\alpha[\delta_A^E\delta_D^F\varepsilon_{BC} - \delta_C^E\delta_B^F\varepsilon_{DA}]\alpha t_k(\sigma^k)_{EF} \\
&= -2\alpha[\delta_A^E\delta_D^F\varepsilon_{BC} - \delta_C^E\delta_B^F\varepsilon_{DA}]t_{EF}
\end{aligned}$$

Con lo que obtenemos finalmente que

$$f_{AB,CD}{}^{EF} = -2\alpha[\delta_A^E\delta_D^F\varepsilon_{BC} - \delta_C^E\delta_B^F\varepsilon_{DA}]$$

Sin embargo no hay simetría en ningún par de índices. Esto es debido a que no se están contemplando todos los términos en las constantes. Para hacerlos aparecer, notemos que:

$$\begin{aligned}
[t_{BA}, t_{CD}] &= -2\alpha[\delta_B^E\delta_D^F\varepsilon_{AC} - \delta_C^E\delta_A^F\varepsilon_{DB}]t_{EF} \\
[t_{AB}, t_{DC}] &= -2\alpha[\delta_A^E\delta_C^F\varepsilon_{BD} - \delta_D^E\delta_B^F\varepsilon_{CA}]t_{EF} \\
[t_{BA}, t_{DC}] &= -2\alpha[\delta_B^E\delta_C^F\varepsilon_{AD} - \delta_D^E\delta_A^F\varepsilon_{CB}]t_{EF}
\end{aligned}$$

Sumando todos los conmutadores:

$$\begin{aligned}
[t_{AB}, t_{CD}] + [t_{AB}, t_{DC}] + [t_{BA}, t_{CD}] + [t_{BA}, t_{DC}] &= \\
&= -2\alpha[\delta_A^E\delta_D^F\varepsilon_{BC} - \delta_C^E\delta_B^F\varepsilon_{DA} + \delta_B^E\delta_D^F\varepsilon_{AC} - \delta_C^E\delta_A^F\varepsilon_{DB} \\
&\quad + \delta_A^E\delta_C^F\varepsilon_{BD} - \delta_D^E\delta_B^F\varepsilon_{CA} + \delta_B^E\delta_C^F\varepsilon_{AD} - \delta_D^E\delta_A^F\varepsilon_{CB}]t_{EF}
\end{aligned}$$

Ocupando la simetría en los índices de los generadores t_{XY} , y agrupando términos:

$$\begin{aligned}
4[t_{AB}, t_{CD}] &= -2\alpha[\varepsilon_{AC}(\delta_B^E\delta_D^F + \delta_D^E\delta_B^F) + \varepsilon_{AD}(\delta_B^E\delta_C^F + \delta_C^E\delta_B^F) \\
&\quad + \varepsilon_{BC}(\delta_A^E\delta_D^F + \delta_D^E\delta_A^F) + \varepsilon_{BD}(\delta_A^E\delta_C^F + \delta_C^E\delta_A^F)]t_{EF}
\end{aligned}$$

Reordenando y por la antisimetría en los subíndices de ε_{GH} :

$$\begin{aligned}
[t_{AB}, t_{CD}] &= \frac{\alpha}{2}[\varepsilon_{CA}(\delta_B^E\delta_D^F + \delta_D^E\delta_B^F) + \varepsilon_{DA}(\delta_B^E\delta_C^F + \delta_C^E\delta_B^F) \\
&\quad + \varepsilon_{CB}(\delta_A^E\delta_D^F + \delta_D^E\delta_A^F) + \varepsilon_{DB}(\delta_A^E\delta_C^F + \delta_C^E\delta_A^F)]t_{EF} \tag{2.39}
\end{aligned}$$

Para refinar más la expresión podemos ahora usar la simetría en t_{EF} . Notemos la siguiente transformación:

$$(\delta_B^E \delta_D^F + \delta_D^E \delta_B^F) t_{EF} = \delta_B^E \delta_D^F t_{EF} + \delta_D^E \delta_B^F t_{EF}$$

En el segundo término del miembro derecho de la igualdad intercambiamos los índices de suma $E \leftrightarrow F$,

$$\begin{aligned} (\delta_B^E \delta_D^F + \delta_D^E \delta_B^F) t_{EF} &= \delta_B^E \delta_D^F t_{EF} + \delta_D^F \delta_B^E t_{FE} \\ &= \delta_B^E \delta_D^F t_{EF} + \delta_D^F \delta_B^E t_{EF} \\ &= 2\delta_B^E \delta_D^F t_{EF} \end{aligned}$$

Todos los términos que resultan de la ecuación (2.39) se transforman igual, y obtenemos:

$$[t_{AB}, t_{CD}] = \alpha [\varepsilon_{CA} \delta_B^E \delta_D^F + \varepsilon_{DA} \delta_B^E \delta_C^F + \varepsilon_{CB} \delta_A^E \delta_D^F + \varepsilon_{DB} \delta_A^E \delta_C^F] t_{EF}$$

Es fácil ver ahora que las constantes de estructura

$$f_{AB,CD}{}^{EF} = \alpha [\varepsilon_{CA} \delta_B^E \delta_D^F + \varepsilon_{DA} \delta_B^E \delta_C^F + \varepsilon_{CB} \delta_A^E \delta_D^F + \varepsilon_{DB} \delta_A^E \delta_C^F]$$

son simétricas en cada par de índices que corresponden a un generador. Ahora podemos calcular la métrica de Cartan-Killing:

$$\begin{aligned} I_{ad} \kappa_{AB,CD} &= f_{AB,KL}{}^{MN} f_{CD,MN}{}^{KL} = \\ &= \alpha^2 [\varepsilon_{KA} \delta_B^M \delta_L^N + \varepsilon_{LA} \delta_B^M \delta_K^N + \varepsilon_{KB} \delta_A^M \delta_L^N + \varepsilon_{LB} \delta_A^M \delta_K^N] \\ &\quad [\varepsilon_{MC} \delta_D^K \delta_N^L + \varepsilon_{NC} \delta_D^K \delta_M^L + \varepsilon_{MD} \delta_C^K \delta_N^L + \varepsilon_{ND} \delta_C^K \delta_M^L] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{I_{ad}}{\alpha^2} \kappa_{AB,CD} = & \{ \varepsilon_{KA} \varepsilon_{MC} \delta_B^M \delta_L^N \delta_D^K \delta_N^L + \varepsilon_{KA} \varepsilon_{NC} \delta_B^M \delta_L^N \delta_D^K \delta_M^L \\
& + \varepsilon_{KA} \varepsilon_{MD} \delta_B^M \delta_L^N \delta_C^K \delta_N^L + \varepsilon_{KA} \varepsilon_{ND} \delta_B^M \delta_L^N \delta_C^K \delta_M^L \\
& + \varepsilon_{LA} \varepsilon_{MC} \delta_B^M \delta_K^N \delta_D^K \delta_N^L + \varepsilon_{LA} \varepsilon_{NC} \delta_B^M \delta_K^N \delta_D^K \delta_M^L \\
& + \varepsilon_{LA} \varepsilon_{MD} \delta_B^M \delta_K^N \delta_C^K \delta_N^L + \varepsilon_{LA} \varepsilon_{ND} \delta_B^M \delta_K^N \delta_C^K \delta_M^L \\
& + \varepsilon_{KB} \varepsilon_{MC} \delta_A^M \delta_L^N \delta_D^K \delta_N^L + \varepsilon_{KB} \varepsilon_{NC} \delta_A^M \delta_L^N \delta_D^K \delta_M^L \\
& + \varepsilon_{KB} \varepsilon_{MD} \delta_A^M \delta_L^N \delta_C^K \delta_N^L + \varepsilon_{KB} \varepsilon_{ND} \delta_A^M \delta_L^N \delta_C^K \delta_M^L \\
& + \varepsilon_{LB} \varepsilon_{MC} \delta_A^M \delta_K^N \delta_D^K \delta_N^L + \varepsilon_{LB} \varepsilon_{NC} \delta_A^M \delta_K^N \delta_D^K \delta_M^L \\
& + \varepsilon_{LB} \varepsilon_{MD} \delta_A^M \delta_K^N \delta_C^K \delta_N^L + \varepsilon_{LB} \varepsilon_{ND} \delta_A^M \delta_K^N \delta_C^K \delta_M^L \}
\end{aligned}$$

Contrayendo todos los índices, y tomando en cuenta que $\delta_A^A = 2$:

$$\begin{aligned}
\frac{I_{ad}}{\alpha^2} \kappa_{AB,CD} = & \{ 2\varepsilon_{DA} \varepsilon_{BC} + \varepsilon_{DA} \varepsilon_{BC} + 2\varepsilon_{CA} \varepsilon_{BD} + \varepsilon_{CA} \varepsilon_{BD} \\
& + \varepsilon_{DA} \varepsilon_{BC} + \varepsilon_{BA} \varepsilon_{DC} + \varepsilon_{CA} \varepsilon_{BD} + \varepsilon_{BA} \varepsilon_{CD} \\
& + 2\varepsilon_{DB} \varepsilon_{AC} + \varepsilon_{DB} \varepsilon_{AC} + 2\varepsilon_{CB} \varepsilon_{AD} + \varepsilon_{CB} \varepsilon_{AD} \\
& + \varepsilon_{DB} \varepsilon_{AC} + \varepsilon_{AB} \varepsilon_{DC} + \varepsilon_{CB} \varepsilon_{AD} + \varepsilon_{AB} \varepsilon_{CD} \}
\end{aligned}$$

Usando la antisimetría de ε_{XY} , reducimos los 16 términos anteriores a

$$\kappa_{AB,CD} = \frac{\alpha^2}{I_{ad}} \{ -8\varepsilon_{AD} \varepsilon_{BC} - 8\varepsilon_{AC} \varepsilon_{BD} \}$$

Finalmente:

$$\kappa_{AB,CD} = -\frac{8\alpha^2}{I_{ad}} \{ \varepsilon_{AC} \varepsilon_{BD} + \varepsilon_{AD} \varepsilon_{BC} \}$$

Podemos escoger $I_{ad} = -8\alpha^2$, y obtenemos

$$\kappa_{AB,CD} = \varepsilon_{AC} \varepsilon_{BD} + \varepsilon_{AD} \varepsilon_{BC}$$

Capítulo Tres

Superálgebra lineal

Los espacios vectoriales ganan estructura adicional si se considera una *graduación* de sus subespacios. Es decir, se asignan *grados* a los subespacios, etiquetados en un conjunto con alguna operación, generalmente conmutativa. En lo siguiente, nos centraremos en espacios vectoriales graduados en un anillo conmutativo. El caso particular de la graduación en el conjunto $\mathbb{Z}_2$ (ver apéndice B), confiere al espacio vectorial la estructura conocida como *superespacio vectorial*.

3.1. Espacios vectoriales graduados

Definición 3.1: Un **espacio vectorial graduado** es una descomposición de un espacio vectorial, en la suma directa de subespacios

$$V = \bigoplus_{g \in G} V_g, \quad (3.1)$$

con G un anillo conmutativo. Los elementos $v_g \in V_g$ son llamados homogéneos de grado g .

Definición 3.2: Un subespacio U de un espacio V , G -graduado, es un subespacio G -graduado si $U = \bigoplus_{g \in G} (U \cap V_g)$.

Definición 3.3: Sea $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$ un espacio vectorial graduado. Un mapeo lineal (endomorfismo) $f : V \rightarrow V$ es un homomorfismo (en el sentido de espacios vectoriales graduados)

si $f(v) \in V_g$, para todos los elementos $v \in V_g$. f resulta ser un endomorfismo también en cada uno de los subespacios V_g , pues $f(V_g) \subseteq V_g$.

Definición 3.4: Sean V, W dos espacios vectoriales G -graduados. Un mapeo lineal $f : V \rightarrow W$ tal que $f(V_g) \subseteq W_{g+h}$ es un **mapeo lineal homogéneo de grado h** . Si $W = V$ se dice que f es un endomorfismo lineal homogéneo de grado h .

Ahora, un homomorfismo puede verse como un endomorfismo homogéneo de grado cero, puesto que, si f es un homomorfismo, tenemos $f(V_g) \subseteq V_g = V_{g+0}$.

Definición 3.5: Se conoce como **superespacio vectorial** a un espacio vectorial $\mathbb{Z}_2$ -graduado, $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$. Al espacio $V_{\bar{0}}$ se le conoce como el **subespacio par** y a $V_{\bar{1}}$ como el **espacio impar** (en el contexto físico, también se les conoce como espacios bosónico y fermiónico respectivamente). Los elementos de $V_{\bar{0}}$ y los de $V_{\bar{1}}$ son llamados *elementos pares* e *impares*, respectivamente.

En un espacio vectorial V , $\mathbb{Z}$ -graduado se puede inducir una graduación en $\mathbb{Z}_2$ definiendo los subespacios $V_{\bar{0}} = \bigoplus_{z \in \mathbb{Z}} V_{2z}$, y $V_{\bar{1}} = \bigoplus_{z \in \mathbb{Z}} V_{2z+1}$. De este modo, todos los endomorfismos homogéneos de grado par en V se vuelven homomorfismos (de grado $\bar{0}$); y los impares, endomorfismos de grado $\bar{1}$.

Considérese el espacio de los endomorfismos $End(V)$ de algún superespacio vectorial V , con $dim(V_{\bar{0}}) = m$; $dim(V_{\bar{1}}) = n$, con una graduación $End(V) = \bigoplus_{\alpha} End_{\alpha}(V)$, donde $End_{\alpha}(V) = \{A \in End(V) \mid A(v) \in V_{\beta+\alpha}, \text{ para todo } v \in V_{\beta}\}$, es decir, los espacios $End_{\alpha}(V)$ están compuestos por endomorfismos homogéneos de grado α . La graduación $\mathbb{Z}_2$ de V induce una graduación de $End(V)$ en $\mathbb{Z}_2$ también. Ahora, también hablaremos de endomorfismos de grado par o impar (o, simplemente, homomorfismos pares e impares respectivamente).

Si se escoje una base ordenada para un superespacio vectorial $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$, tal que los primeros m vectores generen el subespacio par, y los últimos n vectores generen el espacio impar (una base tal es llamada *base homogénea*), identificaremos $(v_0, 0) \in V_{\bar{0}}$; $(0, v_1) \in V_{\bar{1}}$; siendo (v_0, v_1) un supervector, del que cada entrada es un vector en el espacio par e impar

respectivamente. Un homomorfismo f toma la forma matricial

$$f = \begin{pmatrix} A & 0_{m \times n} \\ 0_{n \times m} & D \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

donde A es una matriz $m \times m$, que representa la parte del homomorfismo que opera en $V_{\bar{0}}$, y D es una matriz $n \times n$ que opera en $V_{\bar{1}}$. Asimismo, las matrices de la forma

$$f' = \begin{pmatrix} 0_{m \times m} & B \\ C & 0_{n \times n} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

de la que B es una matriz $m \times n$, y C es una de $n \times m$ entradas, representan a los mapeos homogéneos de grado impar.

En efecto, veamos las siguientes relaciones;

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Dv_1 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Cv_0 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bv_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Para cualquier espacio de endomorfismos $End(V)$ de algún superespacio vectorial V , se define la supertraza:

Definición 3.6: El operador **supertraza** se define:

$$str \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = tr(A) - tr(D). \quad (3.8)$$

Es evidente que para cualquier operador impar, g , de la forma (3.3), $str(g) = 0$.

Ahora, la forma bilineal $K(,) : End(V) \rightarrow \mathbb{F}$, definida por:

$$K(\alpha, \beta) = str(\alpha\beta), \quad (3.9)$$

cumple lo siguiente (Kac, 1977):

$$\text{Consistencia: } K(\alpha, \beta) = 0, \quad \forall \alpha \in \ell(m, n)_{\bar{0}}, \beta \in \ell(m, n)_{\bar{1}} \quad (3.10)$$

$$\text{Supersimetría: } K(\alpha, \beta) = (-1)^{|\alpha||\beta|} K(\beta, \alpha) \quad \forall \alpha, \beta \in \ell(m, n) \quad (3.11)$$

$$\text{Invariancia: } K_s(\alpha, [\beta, \gamma]) = \kappa_s([\alpha, \beta], \gamma) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \ell(m, n) \quad (3.12)$$

3.2. Superálgebras

Definición 3.7: Sea G un anillo conmutativo. Un **álgebra G -graduada**, A es un espacio vectorial G -graduado, con una operación binaria $\diamond : A \times A \rightarrow A$, bilineal, asociativa, que cumple

$$\alpha_g \diamond \alpha_h \in A_{g+h} \quad (3.13)$$

para todo $\alpha_g \in A_g$, $\alpha_h \in A_h$, $a, g \in G$.

Cabe recalcar que si existe una identidad aditiva, $0 \in G$, y el espacio homogéneo de grado 0, V_0 , es diferente de cero, entonces este espacio está representado en todos los demás espacios homogéneos de grado arbitrario en el álgebra, dado que, sean $\alpha_0 \in A_0$, y $\alpha_g \in A_g$, entonces $\alpha_0 \diamond \alpha_g = ad_{\alpha_0}(\alpha_g) \in A_{g+0} = A_g$, para cualquier $\alpha_0 \in A_0$. También, nótese que los espacios A_g no son, en general, subálgebras, dado que, sean $\alpha_g, \beta_g \in A_g$, $\alpha_g \diamond \beta_g \in A_{g+g}$ en general diferente de A_g .

Definición 3.8: Un **superálgebra**, $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$ es un álgebra $\mathbb{Z}_2$ graduada.

Es evidente ahora que A_0 es un subálgebra, mientras que $A_{\bar{1}}$ no lo es.

3.3. Superálgebras de Lie

La generalización del concepto de álgebra de Lie en el contexto de las álgebras graduadas requiere de que el nuevo corchete de Lie, supercorchete, cumpla propiedades generalizadas. Esto confiere a las superálgebras de Lie estructura extra. El estudio detallado de tales sutilezas sale del alcance de este documento, pero se puede encontrar en (Kac, 1977), (Farmer, 1984). Con la intención de introducir las generalizaciones, se presenta la definición de superálgebra de Lie con un paso extra:

Definición 3.9: Dada una superálgebra asociativa, se define el **superconmutador** mediante:

$$[\alpha, \beta]_s = \alpha\beta - (-1)^{|\alpha||\beta|}\beta\alpha, \quad (3.14)$$

donde, ésta vez, $|\alpha|$ y $|\beta|$ son los grados de α y β respectivamente.

Es fácil ver, como en el caso de la definición 2.3, que el superconmutador cumple:

$$[\alpha, \beta]_s = -(-1)^{|\alpha||\beta|}[\beta, \alpha]_s \quad (3.15)$$

$$(-1)^{|\alpha||\gamma|}[\alpha, [\beta, \gamma]_s]_s + (-1)^{|\beta||\alpha|}[\beta, [\gamma, \alpha]_s]_s + (-1)^{|\gamma||\beta|}[\gamma, [\alpha, \beta]_s]_s = 0 \quad (3.16)$$

Las ecuaciones (3.15) y (3.16) son conocidas como propiedad de supersimetría, y la superidentidad de Jacobi, respectivamente; al anillo de graduación se le exige conmutatividad para evitar complicaciones en estas definiciones. Ahora, bien, de la misma manera que en la sección 2.1, donde el conmutador es un caso particular del corchete de Lie; el superconmutador de Lie es un caso particular del producto que define las superálgebras de Lie. Tal producto debe cumplir supersimetría y la superidentidad de Jacobi.

Antes de pasar a la definición formal de superálgebra de Lie, es conveniente derivar una forma equivalente de la superidentidad de Jacobi; a saber:

$$\begin{aligned}
& (-1)^{|\alpha||\gamma|}[\alpha, [\beta, \gamma]_s]_s + (-1)^{|\beta||\alpha|}[\beta, [\gamma, \alpha]_s]_s + (-1)^{|\gamma||\beta|}[\gamma, [\alpha, \beta]_s]_s = 0 \\
\Rightarrow \quad & (-1)^{|\alpha||\gamma|}[\alpha, [\beta, \gamma]_s]_s = -(-1)^{|\beta||\alpha|}[\beta, [\gamma, \alpha]_s]_s - (-1)^{|\gamma||\beta|}[\gamma, [\alpha, \beta]_s]_s \\
& = -(-1)^{|\beta||\alpha|}(-(-1)^{|\gamma||\alpha|}[\beta, [\alpha, \gamma]_s]_s) - (-1)^{|\gamma||\beta|}((-1)^{|\gamma|(|\alpha|+|\beta|)}[[\alpha, \beta], \gamma]) \\
& = (-1)^{|\alpha||\gamma|}[[\alpha, \beta]_s, \gamma]_s + (-1)^{|\alpha||\gamma|}(-1)^{|\beta||\alpha|}[\beta, [\alpha, \gamma]_s]_s \\
\Rightarrow \quad & [\alpha, [\beta, \gamma]_s]_s = [[\alpha, \beta]_s, \gamma]_s + (-1)^{|\beta||\alpha|}[\beta, [\alpha, \gamma]_s]_s \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Donde se ha ocupado la supersimetría y el hecho de que, dados dos elementos con grados $|\alpha|$ y $|\beta|$, su corchete de Lie es de grado $|\alpha| + |\beta|$. Nótese que en esta derivación no se usaron las propiedades del superálgebra asociativa, por lo que el resultado es válido para cualquier producto que obedezca la estructura de graduación, la supersimetría y la superidentidad de Jacobi. Dicho todo esto, definimos las superálgebras de Lie:

Definición 3.10: Un **superálgebra de Lie**, S , es un superespacio vectorial, dotado con una operación binaria, bilineal $[\cdot, \cdot] : S \times S \rightarrow S$, llamada **supercorchete de Lie**, que cumple supersimetría y la superidentidad de Jacobi; es decir, las ecuaciones (3.15) y (3.16) (equivalente a (3.17)) respectivamente.

A partir de ahora hablaremos de superálgebras de Lie, y omitiré el subíndice en el corchete, a menos que hubiera alguna ambigüedad. Notemos que el corchete entre dos elementos homogéneos de grado cero reproduce el corchete de Lie usual. Basta con revisar las ecuaciones (3.15) y (3.16), en las que, si $|\alpha| = |\beta| = \bar{0}$, el supercorchete de Lie se reduce al corchete de Lie usual, y como estamos hablando de elementos homogéneos de grado $\bar{0}$ arbitrarios, el subespacio homogéneo de grado cero de un superálgebra de Lie es, de hecho, un álgebra de Lie. Además, sean $\alpha \in S_{\bar{0}}$ y $\beta \in S_{\bar{1}}$, tenemos que $[\alpha, \beta] = ad_{\alpha}(\beta) \in S_{\bar{1}}$; es decir la restricción de la representación adjunta de S a $S_{\bar{0}}$, denotada usualmente $R_{ad}|_{S_{\bar{0}}}$, induce una representación de $S_{\bar{0}}$ en $S_{\bar{1}}$.

El espacio de endomorfismos de algún espacio vectorial V , $End(V)$, entonces puede convertirse en un superálgebra de Lie definiendo el superconmutador (3.14), y, como superálgebra

de Lie, éste espacio se denota $End(V) \equiv \ell(m, n)$, donde m, n son las dimensiones de las bases del subespacio par e impar, respectivamente, de V . De este modo, cualquier superálgebra de Lie S puede ser *encajada* en su propia superálgebra de Lie de Endomorfismos, $End(S)$. Esto quiere decir que existe un endomorfismo inyectivo $f : S \rightarrow End(S) \equiv \ell(m, n)$. Al escoger una base homogénea para S , el superálgebra encajada en $\ell(m, n)$ toma las formas matriciales discutidas en las ecuaciones (3.2) y (3.3) para los endomorfismos de grado $\bar{0}$ y $\bar{1}$ respectivamente. Es conveniente, a partir de ahora, pensar en las superálgebras de Lie estando encajadas en $\ell(m, n)$ pues, mediante la forma matricial de los elementos de éstas, surgen las definiciones siguientes naturalmente.

3.4. Constantes de estructura y métrica de Cartan-Killing de Super álgebras de Lie

Definición 3.11 Sean α, β , dos elementos arbitrarios de algún superálgebra de Lie, S . Se define la **superforma de Cartan-Killing**:

$$\kappa_s(\alpha, \beta) = str(ad_\alpha \circ ad_\beta). \quad (3.18)$$

Dado que la representación adjunta es un homomorfismo $R_{ad} : S \rightarrow \ell(m, n) = End(S)$, entoces, la restricción de la forma bilineal $K(,) : \ell(m, n) \rightarrow \mathbb{F}$ de la ecuación (3.9), a la imagen de R_{ad} , $K(,) : Ad(S) \rightarrow \mathbb{F}$ resulta ser la superforma de Killing, y por lo tanto, ésta cumple consistencia, supersimetría e invariancia:

$$\kappa_s(\alpha, \beta) = 0, \quad \forall \alpha \in S_{\bar{0}}, \beta \in S_{\bar{1}} \quad (3.19)$$

$$\kappa_s(\alpha, \beta) = (-1)^{|\alpha||\beta|} \kappa_s(\beta, \alpha) \quad \forall \alpha, \beta \in S \quad (3.20)$$

$$\kappa_s(\alpha, [\beta, \gamma]) = \kappa_s([\alpha, \beta], \gamma) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in S \quad (3.21)$$

A partir de ahora, de nuevo, hablaremos de la superforma de Killing, y omitiré el subíndice s , a menos que haya alguna ambigüedad. Del mismo modo que en las álgebras de Lie, se define la supermétrica de Cartan-Killing, pero antes de escribirla y usarla, es conveniente hacer algunas convenciones: Notemos que las propiedades (3.15) y (3.16), escritas en términos de las constantes de estructura, sufren también cambios. Recordemos que la base de una superálgebra de Lie, $S = S_{\bar{0}} \oplus S_{\bar{1}}$, se escoge homogénea por simplicidad, de modo que los primeros m elementos de la base generen $S_{\bar{0}}$, y los últimos n generen $S_{\bar{1}}$; así, los índices inferiores α, β de las constantes de estructura, $f_{\alpha\beta}{}^\gamma$ presentan antisimetría (como en el caso de las álgebras de Lie), siempre y cuando al menos uno de ellos sea menor o igual a m . De la ecuación (3.15) obtenemos:

$$f_{\alpha\beta}{}^\gamma = -(-1)^{|\alpha||\beta|} f_{\beta\alpha}{}^c, \quad (3.22)$$

donde ahora convenimos que $|\alpha| \equiv |T_\alpha|$ es el grado del generador T_α . Usaremos esta convención si no hay ambigüedad. El único caso en el que las constantes de estructura son simétricas es cuando $|\alpha||\beta| = 1$, que exige que $|\alpha| = |\beta| = 1$, es decir, que ambos generadores T_α, T_β sean homogéneos de grado 1:

$$f_{ab}{}^c = -(-1)^{(\bar{1})(\bar{1})} f_{ba}{}^c = -(-1) f_{ba}{}^c = f_{ba}{}^c \quad (3.23)$$

En cualquier otro caso ($|\alpha| = 0$, $|\beta| = 0$ ó $|\alpha| = |\beta| = 0$), las constantes de estructura son antisimétricas. Estas nuevas relaciones, motivan a utilizar índices que distingan si se trata de elementos de la base de grado par o de grado impar. En esta tesis, la convención que usaremos es la siguiente: Ocuparemos índices griegos para una suma sobre todos los valores; índices latinos minúsculos ($i, j, k, \dots$) para los índices que correspondan a elementos pares; e índices latinos mayúscula $A, B, C, \dots$ para aquéllos que correspondan a elementos impares. A los índices latinos minúsculos les llamaremos ahora índices de grado par, o bien, abusando del lenguaje, simplemente índices pares. Del mismo modo, a los índices latinos mayúscula, los llamaremos índices de grado impar o, simplemente, impares. Con este nuevo lenguaje, se presenta la supermétrica de Cartan-killing;

Definición 3.12: El tensor métrico de Cartan-Killing para superálgebras de Lie se define:

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{I_{ad}} \kappa_s(T_\alpha, T_\beta) = \frac{1}{I_{ad}} \sum_{\mu} f_{\alpha\mu}{}^{\nu} f_{\beta\nu}{}^{\mu} (-1)^{|\mu|} \quad (3.24)$$

Que es la forma de la métrica de Cartan utilizada usualmente. (ver por ejemplo (MacDowell y Mansouri, 1977)). La razón del factor $(-1)^{|\mu|}$ surge de la definición de la superforma de Killing. Observemos que, si separamos la suma en μ en partes par e impar se obtiene:

$$I_{ad}\kappa_{\alpha\beta} = \sum_i f_{\alpha i}{}^{\nu} f_{\beta\nu}{}^i (-1)^{|i|} + \sum_A f_{\alpha A}{}^{\nu} f_{\beta\nu}{}^A (-1)^{|A|} \quad (3.25)$$

Pero $|i| = 0, \forall i = 1, \dots, m$; y $|A| = 1, \forall A = m+1, \dots, m+n$, luego

$$I_{ad}\kappa_{\alpha\beta} = f_{\alpha i}{}^{\nu} f_{\beta\nu}{}^i - f_{\alpha A}{}^{\nu} f_{\beta\nu}{}^A$$

Donde el primer término del miembro derecho es la traza del primer bloque A de una matriz de la forma $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, mientras que el segundo término es el negativo de la traza del bloque D , tal y como lo requiere la definición de la super forma de Killing. Ahora, separando las sumas sobre ν :

$$I_{ad}\kappa_{\alpha\beta} = f_{\alpha i}{}^j f_{\beta j}{}^i + f_{\alpha i}{}^B f_{\beta B}{}^i - f_{\alpha A}{}^j f_{\beta j}{}^A - f_{\alpha A}{}^B f_{\beta B}{}^A \quad (3.26)$$

Esta vez no aparece el signo, debido a que el índice ν es de multiplicación de matrices.

Consideremos que el superconmutador de dos elementos pares resulta siempre en otro elemento par. De modo que las constantes de estructura $f_{ij}{}^A = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, m; \quad A = m+1, \dots, n$. Del mismo modo, el superconmutador de un elemento par con uno impar, siempre resultará en un elemento impar, y por eso $f_{iA}{}^j = -f_{Ai}{}^j = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, m; \quad A = m+1, \dots, n$. Finalmente, bajo la misma argumentación, encontramos que: $f_{AB}{}^C = 0, \forall A, B, C = m+1, \dots, n$. Resumimos estas observaciones en la siguiente ecuación:

$$f_{ij}{}^A = f_{iA}{}^j = f_{AB}{}^C = 0 \quad (3.27)$$

Para cualesquiera valores de los índices, considerando las convenciones para los grados discutidos anteriormente.

Ahora, vale la pena observar que la métrica de Cartan-Killing, escrita como en (3.26), se reduce usando las relaciones (3.27), cuando se restringen los grados de α y β . Tenemos que :

$$\begin{aligned}
I_{ad}\kappa_{kl} &= f_{ki}^j f_{lj}^i + f_{ki}^B f_{lB}^i - f_{kA}^j f_{lj}^A - f_{kA}^B f_{lB}^A \\
&= f_{ki}^j f_{lj}^i - f_{kA}^B f_{lB}^A \\
I_{ad}\kappa_{kC} &= f_{ki}^j f_{Cj}^i + f_{ki}^B f_{CB}^i - f_{kA}^j f_{Cj}^A - f_{kA}^B f_{CB}^A = 0 \\
I_{ad}\kappa_{Ck} &= f_{Ci}^j f_{kj}^i + f_{Ci}^B f_{kB}^i - f_{CA}^j f_{kj}^A - f_{CA}^B f_{kB}^A = 0 \\
I_{ad}\kappa_{CD} &= f_{Ci}^j f_{Dj}^i + f_{Ci}^B f_{DB}^i - f_{CA}^j f_{Dj}^A - f_{CA}^B f_{DB}^A \\
&= f_{Ci}^B f_{DB}^i - f_{CA}^j f_{Dj}^A
\end{aligned}$$

De modo que, para cualquier superálgebra de Lie, la matriz de la forma de Killing tiene forma diagonal por bloques:

$$(\kappa_{\alpha\beta}) = \frac{1}{I_{ad}} \begin{pmatrix} (k_{ij}) & (\kappa_{Aj}) \\ (\kappa_{iB}) & (k_{AB}) \end{pmatrix} = \frac{1}{I_{ad}} \begin{pmatrix} (k_{ij}) & 0 \\ 0 & (k_{AB}) \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Esta propiedad corresponde con la invariancia de la forma de killing. En lo siguiente, calcularemos la métrica de Cartan-Killing con la plácida libertad de ignorar las partes κ_{iA} y κ_{Bj} de la métrica.

3.5. Métrica de Cartan de $\mathfrak{osp}(1,2)$

Las relaciones de conmutación de $\mathfrak{osp}(1,2)$ son:

$$[t_i, t_j] = 2i\epsilon_{ij}^k t_k; \quad [t_i, t_A] = -(\sigma_i)_A^B t_B; \quad [t_A, t_B] = -(\sigma^i)_{AB} t_i, \quad (3.29)$$

donde, cabe resaltar, los índices mayúscula corren esta vez solamente entre dos valores *espinoriales*. Los coeficientes $(\sigma_i)_A^B$ son las entradas de las matrices de Pauli, definidas como en

el apéndice D. Las constantes de estructura que no se anulan son:

$$f_{ij}{}^j = 2i\epsilon_{ij}{}^k, \quad (3.30)$$

$$f_{iA}{}^B = -(\sigma_i)_A{}^B, \quad (3.31)$$

$$f_{AB}{}^i = -(\sigma^i)_{AB}. \quad (3.32)$$

Veamos primero:

$$\begin{aligned} \kappa_{ij} &= \frac{1}{I_{ad}} (f_{ik}{}^\ell f_{j\ell}{}^k - f_{iA}{}^B f_{jB}{}^A) \\ &= \frac{1}{I_{ad}} (8\delta_{ij} - (-\sigma_i)_A{}^B (-\sigma_j)_B{}^A) \\ &= \frac{1}{I_{ad}} (8\delta_{ij} - (\sigma_i \sigma_j)_A{}^A). \end{aligned}$$

Donde el primer término fue calculado igual que en el ejemplo del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$. Para el segundo término usamos, del apéndice D, que $\sigma_i \sigma_j = i\epsilon_{ij}{}^k \sigma_k + \delta_{ij}$, luego:

$$\begin{aligned} \kappa_{ij} &= \frac{1}{I_{ad}} (8\delta_{ij} - (i\epsilon_{ij}{}^k \sigma_k + \delta_{ij} \mathbb{1})_A{}^A) \\ &= \frac{1}{I_{ad}} (8\delta_{ij} - i\epsilon_{ij}{}^k (\sigma_k)_A{}^A - \delta_{ij} (\mathbb{1})_A{}^A). \end{aligned}$$

Además, dado que hay suma implícita en A , el segundo y tercer término representan las trazas de σ_k y de $\mathbb{1}$ respectivamente. Las matrices de Pauli son de traza nula y, dado que los índices latinos mayúscula corren solamente entre dos valores, $(\mathbb{1})_A{}^A = 2$:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{I_{ad}} (8\delta_{ij} - \delta_{ij}(2)) \\ &= \frac{1}{I_{ad}} (6\delta_{ij}) \end{aligned}$$

Entonces, ya que las partes κ_{iA} y κ_{Bj} de la métrica de un superálgebra se anulan, resta calcular solo κ_{AB} . Habíamos encontrado que $I_{ad}\kappa_{AB} = f_{Ai}{}^C f_{BC}{}^i - f_{AC}{}^j f_{Bj}{}^C$, que, por la antisimetría en subíndices mixtos, y la simetría en índices impares, podemos escribir:

$$\begin{aligned} I_{ad}\kappa_{AB} &= -f_{iA}{}^C f_{CB}{}^i - f_{CA}{}^i \\ &= f_{iB}{}^C f_{CA}{}^i - f_{iA}{}^C f_{CB}{}^i \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de las constantes de estructura:

$$\begin{aligned}
I_{ad}\kappa_{AB} &= [-(\sigma_i)_B^C][-(\sigma^i)_{CA}] - [-(\sigma_i)_A^C][-(\sigma^i)_{CB}] \\
&= (\sigma_i)_B^C(\sigma^i)_{CA} - (\sigma_i)_A^C(\sigma^i)_{CB} \\
&= (\sigma_i\sigma^i)_{BA} - (\sigma_i\sigma^i)_{AB} \\
&= (3\mathbb{1})_{BA} - (3\mathbb{1})_{AB} \\
&= 3\varepsilon_{AD}(\mathbb{1})_B^D - 3\varepsilon_{BD}(\mathbb{1})_A^D \\
&= 3\varepsilon_{AD}\delta_B^D - 3\varepsilon_{BD}\delta_A^D \\
&= 3\varepsilon_{AB} - 3\varepsilon_{BA} \\
&= 6\varepsilon_{AB}
\end{aligned}$$

Finalmente, considerando que $(\varepsilon_{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, y escogiendo $I_{ad} = 6$, tenemos que

$$(\kappa_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} (\delta_{ij}) & 0 \\ \hline 0 & (\varepsilon_{AB}) \end{array} \right) \quad (3.33)$$

Ahora bien, del mismo modo que en la sección 2.9, con el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(1,3)$, podemos escribir

$$\kappa_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha i}\delta_{j\beta}\delta^{ij} + \varepsilon_{AB}\delta_{\alpha}^A\delta_{\beta}^B \quad (3.34)$$

de donde los índices latinos minúscula corren de 1 a 3, y los mayúscula entre 4 y 5. Los índices α, β toman valores entre 1 y 5.

Capítulo Cuatro

Resultados y conclusiones

En esta tesis hemos presentado los conceptos mediante los cuales se define la métrica de Cartan para álgebras de Lie, con lo cual, se han calculado las métricas tabuladas en (4.1), junto con el álgebra al que corresponden, sus constantes de estructura y la elección de la constante de normalización I_{ad} , escogida en esta tesis a conveniencia. En el proceso, se detallaron los pormenores de los cálculos, así como las técnicas necesarias para llevarlos a cabo, como el uso del álgebra tensorial y espinorial. En los apéndices se detallan también conceptos laterales, útiles o necesarios para el desarrollo óptimo del tema central.

En el futuro planeamos calcular las métricas de más superálgebras de Lie, así como la aplicación de los resultados obtenidos en el campo de las teorías de norma.

Algebra de Lie	Constantes de estrutura	Métrica de Cartan	Constante nomalizadora
$\mathfrak{so}(3)$	$f_{ij}{}^k = \epsilon_{ij}{}^k$	$\kappa_{ij} = \delta_{ij}$	$I_{ad} = -2$
$\mathfrak{su}(2)$	$f_{ij}{}^k = 2i\epsilon_{ij}{}^k$	$\kappa_{\ell m} = \delta_{\ell m}$	$I_{ad} = 8$
$\mathfrak{so}(1, 3)$	$f_{ij}{}^k = i\epsilon_{ij}{}^k$ $f_{ij'}{}^{k'} = i\epsilon_{ij'}{}^{k'}$ $f_{i'j'}{}^k = -i\epsilon_{i'j'}{}^k$	$\kappa_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha i}\delta_{j\beta}\delta^{ij} - \delta_{\alpha i'}\delta_{j'\beta}\delta^{i'j'}$	$I_{ad} = 4$
$\mathfrak{so}(1, 3)$	$f_{\alpha\beta,\mu\nu}{}^{\tau\sigma} = \eta_{\mu\beta}\delta_{\alpha}^{\tau}\delta_{\nu}^{\sigma}$ $- \eta_{\nu\beta}\delta_{\alpha}^{\tau}\delta_{\mu}^{\sigma}$ $- \eta_{\mu\alpha}\delta_{\beta}^{\tau}\delta_{\nu}^{\sigma} + \eta_{\nu\alpha}\delta_{\beta}^{\tau}\delta_{\mu}^{\sigma}$	$\kappa_{ij,k\ell} = \frac{1}{2}(\eta_{ik}\eta_{j\ell} - \eta_{i\ell}\eta_{jk})$	$I_{ad} = 4$
$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$	$f_{AB,CD}{}^{EF} = \alpha[\varepsilon_{CA}\delta_B^E\delta_D^F$ $+ \varepsilon_{DA}\delta_B^E\delta_C^F + \varepsilon_{CB}\delta_A^E\delta_D^F$ $+ \varepsilon_{DB}\delta_A^E\delta_C^F]$	$\kappa_{AB,CD} = \varepsilon_{AC}\varepsilon_{BD} + \varepsilon_{AD}\varepsilon_{BC}$	$I_{ad} = -8\alpha^2$
$\mathfrak{osp}(1, 2)$	$f_{ij}{}^k = 2i\epsilon_{ij}{}^k$ $f_{iA}{}^B = -(\sigma_i)_A{}^B$ $f_{AB}{}^i = -(\sigma^i)_{AB}$	$\kappa_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha i}\delta_{j\beta}\delta^{ij} + \varepsilon_{AB}\delta_{\alpha}^A\delta_{\beta}^B$	$I_{ad} = 6$

Cuadro 4.1 Resultados

REFERENCIAS

- Del Castillo, Gerardo F Torres (2010). *Spinors in four-dimensional spaces*. Vol. 59. Springer Science & Business Media.
- Farmer, Richard Joseph (1984). “Orthosymplectic superalgebras in mathematics and physics”. Tesis doct. PhD thesis, University of Tasmania.
- Fuchs, Jürgen y Christoph Schweigert (2003). *Symmetries, Lie algebras and representations: A graduate course for physicists*. Cambridge University Press, pág. 257.
- Gross, David J (1996). “The role of symmetry in fundamental physics”. En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 93.25, págs. 14256-14259.
- Kac, Victor G (1977). “Lie superalgebras”. En: *Advances in mathematics* 26.1, pág. 17.
- Kirschenmann, Peter (1973). “Symmetries and reflections: Scientific essays: EP Wigner Cambridge, Mass.: MIT Press, 1970”. En: *Studies in History and Philosophy of Science Part A* 4.2, págs. 193-207.
- MacDowell, Samuel W y Fereydoon Mansouri (1977). “Unified geometric theory of gravity and supergravity”. En: *Physical Review Letters* 38.14, pág. 739.
- Peldan, Peter (1994). “Actions for gravity, with generalizations: a title”. En: *Classical and Quantum Gravity* 11.5, pág. 1087.
- Szekeres, Peter (2005). *A Course in Modern Mathematical Physics*, pág. 616.
- Weinberg, Steven (1991). “Conceptual foundations of the unified theory of weak and electromagnetic interaction”. En: *Origin Of Symmetries*. World Scientific, págs. 215-223.
- Wess, Julius y Jonathan Bagger (1992). *Supersymmetry and supergravity*. Princeton university press.
- Weyl, Hermann (1952). “Symmetry Princeton University Press”. En: *Princeton, New Jersey*, pág. 17.
- Xu, Xiaoping (2017). *Representations of Lie Algebras and Partial Differential Equations*. Springer, pág. 35.

APÉNDICES

Apéndice A

Suma directa y producto tensorial

A.1. Suma directa de espacios vectoriales

Sean $\{V_1, \dots, V_n\}$ espacios vectoriales, sobre un campo $\mathbb{F}$, tales que $V_i \cap V_j = \{0\}$, para $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$, se define el conjunto:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n \equiv \bigoplus_{i=1}^n V_i \equiv \{(v_1, \dots, v_n) \mid v_i \in V_i, i = 1, \dots, n\}, \quad (\text{A.1})$$

que forma un espacio vectorial bajo las operaciones:

$$(v_1, \dots, v_n) + (u_1, \dots, u_n) = (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n) \quad (\text{A.2})$$

$$\alpha(v_1, \dots, v_n) = (\alpha v_1, \dots, \alpha v_n), \quad (\text{A.3})$$

para todo $u_i, v_i \in V_i$; $i = 1, \dots, n$. Es fácil ver que bajo estas consideraciones, el conjunto V es un espacio vectorial. Si los espacios vectoriales V_i son disjuntos entre sí, se puede definir la suma directa de espacios vectoriales considerando la relación de equivalencia $0_{V_1} \equiv 0_{V_2} \equiv \dots \equiv 0_{V_n}$.

Note que podemos escribir

$$(v_1, \dots, v_n) = (v_1, 0, \dots, 0) + (0, v_2, 0, \dots, 0) + (0, \dots, 0, v_n).$$

De este modo, es posible identificar el espacio vectorial V_i con el conjunto $\{(0, \dots, v_i, \dots, 0) \mid v_i \in V_i\}$, $i = 1, \dots, n$. Es por esta razón que se suele escribir $v_i + \dots + v_n = (v_1, \dots, v_n)$, cuando

está claro que los elementos v_i , $i = 1, \dots, n$, pertenecen a una suma directa de espacios vectoriales. También, es evidente que cada espacio V_i es un subespacio vectorial de $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$, y como consecuencia, la dimensión de V , $\dim(V) = \sum_{i=1}^n \dim(V_i)$.

Un espacio vectorial W puede descomponerse en la suma directa de sus subespacios vectoriales W_j , si sucede que $W_i \cap W_j = \{0\}$ para $j \neq i$; $i, j = 1, \dots, n$.

A.2. Suma directa y semidirecta de álgebras de Lie

Un álgebra de Lie L resultante de la suma directa de espacios vectoriales $\{L_i\}_{i=1}^n$ es una suma directa de álgebras de Lie

$$L = \bigoplus_{i=1}^n L_i, \quad (\text{A.4})$$

si, además de las condiciones (A.2) y (A.3), se tiene que cada espacio vectorial L_i es, por sí mismo, un álgebra de Lie y un ideal propio de L . Los productos (corchetes), entonces cumplen

$$[a, b] \in L_i \quad \text{si } a, b \in L_i \quad (\text{A.5})$$

$$[L_i, L_j] = \{0\} \quad \text{si } i \neq j \quad (\text{A.6})$$

con $i, j = 1, \dots, n$.

Si, de la descomposición de algún álgebra de Lie L en subálgebras L_1, L_2 resulta que, por ejemplo $[L_1, L_2] \subseteq L_2$, entonces se dice que L es la *suma semidirecta* de álgebras de Lie.

A.3. Producto tensorial de espacios vectoriales

Sean V, W espacios vectoriales sobre el mismo campo $\mathbb{F}$, el producto cartesiano $V \times W$ es llamado **producto tensorial** $V \otimes W$ de V y W , si se consideran las identificaciones (relaciones de equivalencia):

$$\left. \begin{aligned} \alpha(v, w) &\equiv (\alpha v, w) \equiv (v, \alpha w) \\ (v + v', w) &\equiv (v, w) + (v', w) \\ (v, w + w') &\equiv (v, w) + (v, w'). \end{aligned} \right\} \Delta \quad (\text{A.7})$$

Entonces $V \times W/\Delta = V \otimes W$, como conjunto cociente. Se denota $v \otimes w \equiv (v, w)$ a los elementos del espacio $V \otimes W$. El mapeo $\phi : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$ definido por $\phi(v \otimes w) = w \otimes v$, para cualesquiera $v \in V$, $w \in W$ es un isomorfismo, por lo que $V \otimes W \cong W \otimes V$, es decir, son isomorfos.

De las relaciones de equivalencia se tiene inmediatamente que $v \otimes 0_W = 0_V \otimes w = 0_{V \times W}$, y en consecuencia se tiene que, si $\{v_i\}_{i=1}^n$ es una base para V y $\{w_j\}_{j=1}^m$ es una para W , entonces el conjunto $\{v_i \otimes w_j\}_{i,j=1}^{i=n, j=m}$ es linealmente independiente en $V \otimes W$, y lo genera. Entonces, la dimensión de $V \otimes W$ es $\dim(V \otimes W) = \dim(V) \times \dim(W)$.

A.4. Producto tensorial de álgebras de Lie

Primero considérese el producto tensorial de álgebras A, A' , $\otimes : A \times A' \rightarrow A \otimes A'$ definido por

$$(x \times x') \diamond (y \times y') := (x \diamond y) \otimes (x' \diamond y')$$

.

Sean L, L' dos álgebras de Lie, entonces el producto tensorial $L \otimes L'$ obedece el corchete $\otimes : L \times L' \rightarrow L \otimes L'$ definido por:

$$[(a \otimes a'), (b \otimes b')] = ([a, b] \otimes [a, b])$$

Para todo $a, b \in L$, $a', b' \in L'$.

Definiendo el conmutador en las álgebras A, A' , se puede recuperar la definición de producto tensorial de álgebras de Lie definido en el párrafo anterior.

Apéndice B

Algo sobre grupos

Un conjunto G , junto con una operación $\circ : G \rightarrow G$, que obedece las siguientes condiciones:

- Cerradura ($a \circ b \in G$ para todo $a, b \in G$).
- Asociatividad ($a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ para cualesquier $a, b, c \in G$).
- Elemento identidad ($\exists e \in G$ de tal modo que $e \circ a = a \circ e = a$ para cualquier $a \in G$).
- Invertibilidad ($\forall a \in G, \exists a^{-1}$ que cumple $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$).

Llamadas axiomas de grupo.

Un grupo cuya operación es conmutativa ($a \circ b = b \circ a$, para cualesquier $a, b \in G$) es llamado abeliano. Usualmente, cuando la operación se define abstractamente, se suele expresar simplemente ab para todo $a, b \in G$.

Un subconjunto H de un grupo G es un *subgrupo* de G si los elementos de H obedecen los axiomas de grupo de la definición anterior.

Dado un subgrupo H de G , se definen los conjuntos:

$$aH = \{ah \mid h \in H\}$$

$$Ha = \{ha \mid h \in H\}$$

con a fijo en G . Tales conjuntos son llamados *clase lateral izquierda* y *clase lateral derecha* respectivamente. También se puede encontrar como coset izquierdo y coset derecho, respectivamente, por su nombre en inglés.

Cuando sucede que $aH = Ha$ para todo $a \in G$, se dice que H es un subgrupo normal de G . Es común llamar a las clases laterales derechas simplemente clases laterales, especificando si es izquierda sólo en caso de ser necesario. Usaremos esta convención.

El conjunto de todas las clases laterales de un subgrupo se denota G/H , y suele ser llamado *grupo cociente*.

Algunas propiedades remarcables de las clases laterales son las siguientes:

- La cardinalidad de todas las clases laterales $|aH|$ (número de elementos en el conjunto) es igual a la cardinalidad del subgrupo generatriz $|H|$.
- Las clases laterales de un subgrupo pueden ser disjuntas o iguales en todos los casos; es decir $aH = bH$ o $aH \cap bH = \phi$.
- El grupo cociente forma un grupo bajo la operación $(aH)(bH) = abH$, en el que el elemento identidad es obviamente H .
- (Teorema de Lagrange:) La cardinalidad del grupo G es divisible por la cardinalidad de las clases laterales, y es igual a la cardinalidad del grupo cociente $|G/H|$, es decir $|G|/|H| = |G/H| \in \mathbb{Z}$.

La segunda de estas propiedades permite inducir en cualquier grupo G , dado un subgrupo H una partición, definiendo las clases de equivalencia siguientes:

$$a \equiv b \Leftrightarrow aH = bH \Leftrightarrow b \in aH$$

Esta relación de equivalencia recibe el nombre de equivalencia modulo H . Para ciertos fines,

es de utilidad seleccionar a uno de los elementos de una familia para representarla. Cuando se hace esta selección, el elemento recibe el nombre de *representante*.

Ejemplo: El grupo $\mathbb{Z}_2$.

Los números enteros $\mathbb{Z}$ forman un grupo abeliano bajo la suma. Consideremos las clases laterales del subgrupo $2\mathbb{Z}$.

Notemos que $2\mathbb{Z} + 0 = 2\mathbb{Z} \pm 2 = 2\mathbb{Z} \pm 4 = \dots$ Para todos los números pares. Asimismo, $2\mathbb{Z} \pm 1 = 2\mathbb{Z} \pm 3 + \dots$ para todos los números impares. Es decir, las clases laterales se reducen al conjunto de los números pares, $2\mathbb{Z}$ y al de los números impares que denotaremos $\mathbb{O}$. De modo que el grupo cociente:

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{2\mathbb{Z}, \mathbb{O}\}$$

De la operación que se define en el grupo cociente se tienen las siguientes relaciones:

$$2\mathbb{Z} + 2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$$

$$+ \mathbb{O} = 2\mathbb{Z}$$

$$2\mathbb{Z} + \mathbb{O} = \mathbb{O}$$

Siendo $2\mathbb{Z}$ el elemento identidad, como se había anticipado. Es usual que los representantes de las familias $2\mathbb{Z}$ y $\mathbb{O}$ sean 0 y 1 respectivamente.

El grupo de los enteros bajo la suma módulo 2, $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ (también llamado el grupo cíclico de dos elementos) es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Algunos autores, de hecho, definen el grupo $\mathbb{Z}_2$ como $\mathbb{Z}/2$. Es por ello que identificamos a estos grupos entre sí, y escribiremos $\mathbb{Z}_2$ en lugar de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Los elementos de $\mathbb{Z}_2$ pueden expresarse en la manera siguiente:

$$[\alpha] \equiv \alpha + 2\mathbb{Z} \equiv \{x \in \mathbb{Z} \mid x = \alpha + p, p \in 2\mathbb{Z}\}$$

Es claro que cuando α es par, el conjunto $[\alpha]$ resulta el de los números pares, y cuando es impar, $[\alpha]$ es el conjunto de los números impares.

Apéndice C

Constantes de estructura del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(1, 3)$

La definición de un elemento infinitesimal del grupo de Lie $SO(1, 3)$ está dada por:

$$M_{\alpha\beta} = x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha \quad (\text{C.1})$$

Para verificar que éstos elementos satisfacen un álgebra, y por ende obtener las constantes de estructura correspondientes, considérese el conmutador de dos elementos, dígase $M_{\alpha\beta}$ y $M_{\mu\nu}$:

$$[M_{\alpha\beta}, M_{\mu\nu}] = (x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha)(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) - (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha)$$

Del formalismo usual de las variedades diferenciables, usaremos la métrica $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ para bajar o subir índices. También, tengamos en cuenta que $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$; tenemos:

$$\begin{aligned} [M_{\alpha\beta}, M_{\mu\nu}] = & x_\alpha \left\{ \frac{\partial x_\mu}{\partial x^\beta} \partial_\nu + x_\mu \partial_\beta \partial_\nu - \frac{\partial x_\nu}{\partial x^\beta} \partial_\mu - x_\nu \partial_\beta \partial_\mu \right\} \\ & - x_\beta \left\{ \frac{\partial x_\mu}{\partial x^\alpha} \partial_\nu + x_\mu \partial_\alpha \partial_\nu - \frac{\partial x_\nu}{\partial x^\alpha} \partial_\mu - x_\nu \partial_\alpha \partial_\mu \right\} \\ & - x_\mu \left\{ \frac{\partial x_\alpha}{\partial x^\nu} \partial_\beta + x_\alpha \partial_\nu \partial_\beta - \frac{\partial x_\beta}{\partial x^\nu} \partial_\alpha - x_\beta \partial_\nu \partial_\alpha \right\} \\ & - x_\nu \left\{ \frac{\partial x_\alpha}{\partial x^\mu} \partial_\beta + x_\alpha \partial_\mu \partial_\beta - \frac{\partial x_\beta}{\partial x^\mu} \partial_\alpha - x_\beta \partial_\mu \partial_\alpha \right\} \end{aligned}$$

Dado que las derivadas conmutan, podemos ver que todos los términos con segundas derivadas se anulan, entonces, tenemos:

$$[M_{\alpha\beta}, M_{\mu\nu}] = x_\alpha \left\{ \frac{\partial x_\mu}{\partial x^\beta} \partial_\nu - \frac{\partial x_\nu}{\partial x^\beta} \partial_\mu \right\} - x_\beta \left\{ \frac{\partial x_\mu}{\partial x^\alpha} \partial_\nu - \frac{\partial x_\nu}{\partial x^\alpha} \partial_\mu \right\} \\ - x_\mu \left\{ \frac{\partial x_\alpha}{\partial x^\nu} \partial_\beta - \frac{\partial x_\beta}{\partial x^\nu} \partial_\alpha \right\} + x_\nu \left\{ \frac{\partial x_\alpha}{\partial x^\mu} \partial_\beta - \frac{\partial x_\beta}{\partial x^\mu} \partial_\alpha \right\}$$

Consideremos ahora lo siguiente,

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial (\eta_{\mu\sigma} x^\sigma)}{\partial x^\alpha} = \eta_{\mu\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\alpha} = \eta_{\mu\sigma} \delta_\alpha^\sigma = \eta_{\mu\alpha},$$

con lo que obtenemos:

$$[M_{\alpha\beta}, M_{\mu\nu}] = x_\alpha \{ \eta_{\mu\beta} \partial_\nu - \eta_{\nu\beta} \partial_\mu \} - x_\beta \{ \eta_{\mu\alpha} \partial_\nu - \eta_{\nu\alpha} \partial_\mu \} \\ - x_\mu \{ \eta_{\alpha\nu} \partial_\beta - \eta_{\beta\nu} \partial_\alpha \} + x_\nu \{ \eta_{\alpha\mu} \partial_\beta - \eta_{\beta\mu} \partial_\alpha \}$$

Ahora, también usemos que $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$, para reordenar los términos y escribir:

$$[M_{\alpha\beta}, M_{\mu\nu}] = \eta_{\mu\beta} (x_\alpha \partial_\nu - x_\nu \partial_\alpha) - \eta_{\nu\beta} (x_\alpha \partial_\mu - x_\mu \partial_\alpha) \\ - \eta_{\mu\alpha} (x_\beta \partial_\nu - x_\nu \partial_\beta) + \eta_{\nu\alpha} (x_\beta \partial_\mu - x_\mu \partial_\beta) \\ = \eta_{\mu\beta} M_{\alpha\nu} - \eta_{\nu\beta} M_{\alpha\mu} - \eta_{\mu\alpha} M_{\beta\nu} + \eta_{\nu\alpha} M_{\beta\mu}.$$

Deseamos conocer la forma de las constantes de estructura, en este caso con seis índices, que satisfacen $[M_{\alpha\beta}, M_{\mu\nu}] = f_{\alpha\beta,\mu\nu}{}^{\tau\sigma} M_{\tau\sigma}$, de modo que podemos usar *deltas* de Kronecker para factorizar el operador $M_{\tau\sigma}$:

$$[M_{\alpha\beta}, M_{\mu\nu}] = \eta_{\mu\beta} \delta_\alpha^\tau \delta_\nu^\sigma M_{\tau\sigma} - \eta_{\nu\beta} \delta_\alpha^\tau \delta_\mu^\sigma M_{\tau\sigma} - \eta_{\mu\alpha} \delta_\beta^\tau \delta_\nu^\sigma M_{\tau\sigma} + \eta_{\nu\alpha} \delta_\beta^\tau \delta_\mu^\sigma M_{\tau\sigma} \\ = (\eta_{\mu\beta} \delta_\alpha^\tau \delta_\nu^\sigma - \eta_{\nu\beta} \delta_\alpha^\tau \delta_\mu^\sigma - \eta_{\mu\alpha} \delta_\beta^\tau \delta_\nu^\sigma + \eta_{\nu\alpha} \delta_\beta^\tau \delta_\mu^\sigma) M_{\tau\sigma}.$$

Finalmente, hemos demostrado que los operadores $M_{\alpha\beta}$ forman un álgebra, $\mathfrak{so}(1,3)$, cuyas constantes de estructura son:

$$f_{\alpha\beta,\mu\nu}{}^{\tau\sigma} = \eta_{\mu\beta} \delta_\alpha^\tau \delta_\nu^\sigma - \eta_{\nu\beta} \delta_\alpha^\tau \delta_\mu^\sigma - \eta_{\mu\alpha} \delta_\beta^\tau \delta_\nu^\sigma + \eta_{\nu\alpha} \delta_\beta^\tau \delta_\mu^\sigma \quad (\text{C.2})$$

Nótese que, debido a la antisimetría de los operadores $M_{\alpha\beta}$, Las constantes de estructura son antisimétricas en cada par de índices referentes a un operador, es decir

$$f_{\alpha\beta,\mu\nu}{}^{\tau\sigma} = -f_{\beta\alpha,\mu\nu}{}^{\tau\sigma} = -f_{\alpha\beta,\nu\mu}{}^{\tau\sigma} = -f_{\alpha\beta,\mu\nu}{}^{\sigma\tau}.$$

Apéndice D

Algebra espinorial

En el cálculo de métricas de Cartan hemos utilizado propiedades de objetos conocidos como espinores. Presentamos aquí las definiciones necesarias y demostramos algunas propiedades. Se puede encontrar la teoría del formalismo espinorial en (Del Castillo, 2010), (Wess y Bagger, 1992).

Se define el símbolo ε_{AB} , $A, B = 0, 1$ de la manera siguiente:

$$\varepsilon_{AB} = -\varepsilon_{BA} \quad (\text{D.1})$$

$$\varepsilon_{01} = -\varepsilon_{10} = -1 \quad (\text{D.2})$$

Es útil visualizar la representación matricial del símbolo ε_{AB} :

$$(\varepsilon_{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.3})$$

Donde el índice A es fila, mientras que el B es columna. De (D.1) inmediatamente tenemos que $\varepsilon_{00} = \varepsilon_{11} = 0$. Se define también ε^{AB} :

$$\varepsilon_{AB}\varepsilon^{BC} = \delta_A^C$$

Donde δ_A^C se entiende como la usual delta de Kronecker. Se puede obtener que $\varepsilon^{AB} = \varepsilon_{BA} = -\varepsilon_{AB}$. Adoptamos las convenciones subida y bajada de índices:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{BF}\Psi^{A\dots F\dots Z} &= \Psi^{A\dots}_{B}{}^{\dots Z} \\ \varepsilon^{BF}\Psi_{A\dots F\dots Z} &= \Psi_{A\dots}{}^B{}_{ \dots Z} \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Así podemos ver, por ejemplo, que

$$\varepsilon_A^C = \varepsilon_{AB}\varepsilon^{BC} = \delta_A^C \quad (\text{D.5})$$

Los únicos objetos con índices espinoriales que utilizamos en los cálculos de éste documento son las matrices de Pauli $(\sigma_i)_A^B = (\sigma^i)_A^B$ (subíndice para fila, superíndice para columna) definidas como sigue:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.6})$$

Es fácil mostrar que

$$[\sigma^i, \sigma^j] = \sigma^i \sigma^j - \sigma^j \sigma^i = 2i\epsilon^{ij}_k \sigma^k \quad (\text{D.7})$$

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} = \sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i = 2\delta^{ij} \quad (\text{D.8})$$

Consecuentemente:

$$\begin{aligned} [\sigma^i, \sigma^j] + \{\sigma^i, \sigma^j\} &= 2\sigma^i \sigma^j = 2i\epsilon^{ij}_k \sigma^k + 2\delta^{ij} \\ \Rightarrow \quad \sigma^i \sigma^j &= i\epsilon^{ij}_k \sigma^k + \delta^{ij} \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Además, todas ellas son de traza nula, es decir:

$$\text{Tr}(\sigma^i) = (\sigma^i)_A^A = 0, \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

También que $\sigma_1\sigma^1 = \sigma_2\sigma^2 = \sigma_3\sigma^3 = \mathbb{1}$; y con esto último:

$$\sigma_i \sigma^i = \sigma_1\sigma^1 + \sigma_2\sigma^2 + \sigma_3\sigma^3 = 3\mathbb{1}. \quad (\text{D.10})$$

Es relevante prestar atención a las matrices $(\sigma^i)_{AB} = \varepsilon_{BD}(\sigma^i)_A^D$.

Proposición: Las matrices $(\sigma^i)_{AB}$ son simétricas en los índices AB , es decir: $(\sigma^i)_{AB} = (\sigma^i)_{BA}$

Demostración. La convención que usamos para bajar y subir índices no es una multiplicación matricial, sino una identidad espinorial. Si deseamos ver al objeto $\varepsilon_{BD}(\sigma^i)_A^D$ como una multiplicación matricial, donde ε_{BD} y $(\sigma^i)_A^D$ tienen las formas (D.3) y (D.6) respectivamente, podemos:

$$\varepsilon_{BD}(\sigma^i)_A^D = -(\sigma^i)_A^D \varepsilon_{DB} = -(\sigma^i)_A^0 \varepsilon_{0B} - (\sigma^i)_A^1 \varepsilon_{1B}$$

Revisemos los valores de $(\sigma^i)_{AB}$ para cada valor de $A, B = 0, 1$:

Para $i = 1$:

■ A=0

- B=0 $(\sigma^1)_{00} = -(\sigma^1)_0^0 \varepsilon_{00} - (\sigma^1)_0^1 \varepsilon_{10} = -(1)(1) = -1.$
- B=1 $(\sigma^1)_{01} = -(\sigma^1)_0^0 \varepsilon_{01} - (\sigma^1)_0^1 \varepsilon_{11} = 0.$

■ A=1

- B=0 $(\sigma^1)_{10} = -(\sigma^1)_1^0 \varepsilon_{00} - (\sigma^1)_1^1 \varepsilon_{10} = -(1)(1) = 0.$
- B=1 $(\sigma^1)_{11} = -(\sigma^1)_1^0 \varepsilon_{01} - (\sigma^1)_1^1 \varepsilon_{11} = -(1)(-1) = 1.$

Luego,

$$((\sigma^1)_{AB}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ((\sigma^1)_{BA}) \quad (\text{D.11})$$

Para $i = 2$:

• A=0

- B=0 $(\sigma^2)_{00} = -(\sigma^2)_0^0 \varepsilon_{00} - (\sigma^2)_0^1 \varepsilon_{10} = -(-i)(1) = i.$
- B=1 $(\sigma^2)_{01} = -(\sigma^2)_0^0 \varepsilon_{01} - (\sigma^2)_0^1 \varepsilon_{11} = 0.$

• A=1

- B=0 $(\sigma^2)_{10} = -(\sigma^2)_1^0 \varepsilon_{00} - (\sigma^2)_1^1 \varepsilon_{10} = -(1)(1) = 0.$
- B=1 $(\sigma^2)_{11} = -(\sigma^2)_1^0 \varepsilon_{01} - (\sigma^2)_1^1 \varepsilon_{11} = -i(-1) = i.$

Luego,

$$((\sigma^1)_{AB}) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = ((\sigma^1)_{BA}) \quad (\text{D.12})$$

Finalmente, para $i=3$:

• $A=0$

$$\circ B=0 \quad (\sigma^2)_{00} = -(\sigma^3)_0^0 \varepsilon_{00} - (\sigma^3)_0^1 \varepsilon_{10} = 0.$$

$$\circ B=1 \quad (\sigma^2)_{01} = -(\sigma^3)_0^0 \varepsilon_{01} - (\sigma^3)_0^1 \varepsilon_{11} = -(1)(-1) = 1.$$

• $A=1$

$$\circ B=0 \quad (\sigma^1)_{10} = -(\sigma^3)_1^0 \varepsilon_{00} - (\sigma^3)_1^1 \varepsilon_{10} = -(-1)(1) = 1.$$

$$\circ B=1 \quad (\sigma^1)_{11} = -(\sigma^3)_1^0 \varepsilon_{01} - (\sigma^3)_1^1 \varepsilon_{11} = 0.$$

Luego,

$$((\sigma^1)_{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = ((\sigma^1)_{BA}) \quad (\text{D.13})$$

Con lo que queda demostrada la proposición. $\square$

Ahora probemos la siguiente identidad, que usamos en la sección 2.10.

Proposición: Se cumple la identidad:

$$(\sigma_i)_A^B (\sigma_j)_C^D - (\sigma_j)_A^B (\sigma_i)_C^D = i \epsilon_{ij}^k [(\sigma_k)_A^D \delta_C^B - (\sigma_k)_C^B \delta_A^D] \quad (\text{D.14})$$

Demostración. Notemos que los casos $i = j$ se cumplen trivialmente, por lo que comenzamos por el caso $i = 1, j = 2$, con lo que el valor no nulo de k es $k = 3, \epsilon_{12}^3 = 1$. Es conveniente notar que todos los casos de la forma $(0, 0, C, D)$, $(A, B, 0, 0)$, $(1, 1, C, D)$, y $(A, B, 1, 1)$ se reducen a 0 en el miembro izquierdo, pues tanto σ_1 como σ_2 tienen elementos diagonales iguales a cero, así, $(\sigma_1)_A^A (\sigma_2)_C^D - (\sigma_2)_A^A (\sigma_1)_C^D = 0$, y $(\sigma_1)_A^B (\sigma_2)_C^C - (\sigma_2)_A^B (\sigma_1)_C^C = 0$, (no suma implícita) $\forall A, B, C, D = 0, 1$. En tales casos, el cálculo se reduce a verificar que el

miembro derecho es equivalente a cero, es decir, hay que probar que:

$$(\sigma_3)_A^D \delta_C^A - (\sigma_3)_C^A \delta_A^D = 0 \quad (\text{D.15})$$

$$(\sigma_3)_A^C \delta_C^B - (\sigma_3)_C^B \delta_A^C = 0, \quad (\text{D.16})$$

que, de hecho, son el mismo caso, con signo contrario cambiándo el índice A por C (sin suma implícita), o viceversa. Por las propiedades de δ_A^B , los casos que no se anulan debido a ésta, son los que cumplen $D = C = A$ en la ecuación (D.15), es decir, hay que probar:

$$(\sigma_3)_A^A \delta_A^A - (\sigma_3)_A^A \delta_A^A = 0 \quad (\text{D.17})$$

(sin suma implícita). Que se reduce a los casos triviales:

$$(\sigma_3)_0^0(1) - (\sigma_3)_0^0(1) = 0$$

$$(\sigma_3)_1^1(1) - (\sigma_3)_1^1(1) = 0$$

Por lo que están probados los casos:

- $(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1),$
- $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0)$
- $(1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)$
- $(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1)$

Quedan por probar los casos $(0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0)$, con los que se completa el conjunto de 16 formas de combinar 1 y 0 en cuatro lugares ($2^4 = 16$).

- $(0, 1, 0, 1)$

$$(\sigma_1)_0^1(\sigma_2)_0^1 - (\sigma_2)_0^1(\sigma_1)_0^1 = i[(\sigma_3)_0^1\delta_0^1 - (\sigma_3)_0^1\delta_0^1]$$

$$0 = 0$$

- $(0, 1, 1, 0)$

$$(\sigma_1)_0^1(\sigma_2)_1^0 - (\sigma_2)_0^1(\sigma_1)_1^0 = i[(\sigma_3)_0^0\delta_1^1 - (\sigma_3)_1^1\delta_0^0]$$

$$2i = 2i$$

- $(1, 0, 0, 1)$

$$(\sigma_1)_1^0(\sigma_2)_0^1 - (\sigma_2)_1^0(\sigma_1)_0^1 = i[(\sigma_3)_1^1\delta_0^0 - (\sigma_3)_0^0\delta_1^1]$$

$$-2i = -2i$$

- $(1, 0, 1, 0)$

$$(\sigma_1)_1^0(\sigma_2)_1^0 - (\sigma_2)_1^0(\sigma_1)_1^0 = i[(\sigma_3)_1^0\delta_1^0 - (\sigma_3)_1^0\delta_1^0]$$

$$0 = 0$$

El caso $i = 2, j = 1$ está contenido en el anterior, pues

$$(\sigma_2)_A^B(\sigma_1)_C^D - (\sigma_1)_A^B(\sigma_2)_C^D = i\epsilon_{21}^3[(\sigma_3)_A^D\delta_C^B - (\sigma_3)_C^B\delta_A^D]$$

Se puede escribir como

$$-[(\sigma_1)_A^B(\sigma_2)_C^D - (\sigma_2)_A^B(\sigma_1)_C^D] = -i[(\sigma_3)_A^D\delta_C^B - (\sigma_3)_C^B\delta_A^D]$$

que se reduce al caso $i = 1, j = 2$. Del mismo modo, los casos $i = 1, j = 3$ y $i = 3, j = 1$ son equivalentes, así como $i = 2, j = 3$ y $i = 3, j = 2$.

Caso $i = 3, j = 1$:

Tenemos que k debe ser 2, y por tanto $\epsilon_{31}^2 = 1$

$$(\sigma_3)_A^B(\sigma_1)_C^D - (\sigma_1)_A^B(\sigma_3)_C^D = i[(\sigma_2)_A^D\delta_C^B - (\sigma_2)_C^B\delta_A^D]$$

Sin embargo en este caso no es posible tomar el atajo anterior. Los casos resaltados son aislados y es más conveniente hacer la lista completa de los casos y sustituir uno a uno los valores necesarios. Tenemos:

$$\blacksquare (0, 0, 0, 0)$$

$$(\sigma_3)_0^0(\sigma_1)_0^0 - (\sigma_1)_0^0(\sigma_3)_0^0 = i[(\sigma_2)_0^0\delta_0^0 - (\sigma_2)_0^0\delta_0^0]$$

$$1(0) - (0)1 = i[0(1) - 0(1)]$$

$$0 = 0$$

$$\blacksquare (0, 0, 0, 1)$$

$$(\sigma_3)_0^0(\sigma_1)_0^1 - (\sigma_1)_0^0(\sigma_3)_0^1 = i[(\sigma_2)_0^1\delta_0^0 - (\sigma_2)_0^0\delta_0^1]$$

$$(1)(1) - (0)(0) = i[(-i)(1) - (0)(0)] =$$

$$1 = 1$$

$$\blacksquare (0, 0, 1, 0)$$

$$(\sigma_3)_0^0(\sigma_1)_1^0 - (\sigma_1)_0^0(\sigma_3)_1^0 = i[(\sigma_2)_0^0\delta_1^0 - (\sigma_2)_1^0\delta_0^0]$$

$$(1)(1) - (0)(0) = i[(0)(0) - (i)(1)]$$

$$1 = 1$$

$$\blacksquare (0, 0, 1, 1)$$

$$(\sigma_3)_0^0(\sigma_1)_1^1 - (\sigma_1)_0^0(\sigma_3)_1^1 = i[(\sigma_2)_0^1\delta_1^0 - (\sigma_2)_1^0\delta_0^1]$$

$$(1)(0) - (0)(-1) = i[(-i)(0) - (i)(0)]$$

$$0 = 0$$

$$\blacksquare (0, 1, 0, 0)$$

$$(\sigma_3)_0^1(\sigma_1)_0^0 - (\sigma_1)_0^1(\sigma_3)_0^0 = i[(\sigma_2)_0^0\delta_0^1 - (\sigma_2)_0^1\delta_0^0]$$

$$(0)(0) - (1)(1) = i[(0)(0) - (-i)(1)]$$

$$-1 = -1$$

$$\blacksquare (0, 1, 0, 1)$$

$$(\sigma_3)_0^1(\sigma_1)_0^1 - (\sigma_1)_0^1(\sigma_3)_0^1 = i[(\sigma_2)_0^1\delta_0^1 - (\sigma_2)_0^1\delta_0^1]$$

$$(0)(1) - (1)(0) = i[(-i)(0) - (-i)(0)]$$

$$0 = 0$$

$$\blacksquare (0, 1, 1, 0)$$

$$(\sigma_3)_0^1(\sigma_1)_1^0 - (\sigma_1)_0^1(\sigma_3)_1^0 = i[(\sigma_2)_0^0\delta_1^1 - (\sigma_2)_1^1\delta_0^0]$$

$$(0)(1) - (1)(0) = i[(0)(1) - (0)(1)]$$

$$0 = 0$$

$$\blacksquare (0, 1, 1, 1)$$

$$(\sigma_3)_0^1(\sigma_1)_1^1 - (\sigma_1)_0^1(\sigma_3)_1^1 = i[(\sigma_2)_0^1\delta_1^1 - (\sigma_2)_1^1\delta_0^1]$$

$$(0)(0) - (1)(-1) = i[(-i)(1) - (0)(0)]$$

$$1 = 1$$

$$\blacksquare (1, 0, 0, 0)$$

$$(\sigma_3)_1^0(\sigma_1)_0^0 - (\sigma_1)_1^0(\sigma_3)_0^0 = i[(\sigma_2)_1^0\delta_0^0 - (\sigma_2)_0^0\delta_1^0]$$

$$(0)(0) - (1)(1) = i[(i)(1) - (0)(0)]$$

$$-1 = -1$$

$$\blacksquare (1, 0, 0, 1)$$

$$(\sigma_3)_1^0(\sigma_1)_0^1 - (\sigma_1)_1^0(\sigma_3)_0^1 = i[(\sigma_2)_1^1\delta_0^0 - (\sigma_2)_0^0\delta_1^1]$$

$$(0)(1) - (0)(1) = i[(0)(1) - (0)(1)]$$

$$0 = 0$$

$$\blacksquare (1, 0, 1, 0)$$

$$(\sigma_3)_1^0(\sigma_1)_1^0 - (\sigma_1)_1^0(\sigma_3)_1^0 = i[(\sigma_2)_1^0\delta_1^0 - (\sigma_2)_1^0\delta_1^0]$$

$$(0)(1) - (1)(0) = i[(i)(0) - (i)(0)]$$

$$0 = 0$$

$$\blacksquare (1, 0, 1, 1)$$

$$(\sigma_3)_1^0(\sigma_1)_1^1 - (\sigma_1)_1^0(\sigma_3)_1^1 = i[(\sigma_2)_1^1\delta_1^0 - (\sigma_2)_1^0\delta_1^1]$$

$$(0)(0) - (1)(-1) = i[(0)(0) - (i)(1)]$$

$$1 = 1$$

$$\blacksquare (1, 1, 0, 0)$$

$$(\sigma_3)_1^1(\sigma_1)_0^0 - (\sigma_1)_1^1(\sigma_3)_0^0 = i[(\sigma_2)_1^0\delta_0^1 - (\sigma_2)_0^1\delta_1^0]$$

$$(-1)(0) - (0)(1) = i[(i)(0) - (-i)(0)]$$

$$0 = 0$$

$$\blacksquare (1, 1, 0, 1)$$

$$(\sigma_3)_1^1(\sigma_1)_0^1 - (\sigma_1)_1^1(\sigma_3)_0^1 = i[(\sigma_2)_1^1\delta_0^1 - (\sigma_2)_0^1\delta_1^1]$$

$$(-1)(1) - (0)(0) = i[(0)(0) - (-i)(1)]$$

$$-1 = -1$$

$$\blacksquare (1, 1, 1, 0)$$

$$(\sigma_3)_1^1(\sigma_1)_1^0 - (\sigma_1)_1^1(\sigma_3)_1^0 = i[(\sigma_2)_1^0\delta_1^1 - (\sigma_2)_1^1\delta_1^0]$$

$$(-1)(1) - (0)(0) = i[(i)(1) - (0)(0)]$$

$$-1 = -1$$

- $(1, 1, 1, 1)$

$$(\sigma_3)_1^1(\sigma_1)_1^1 - (\sigma_1)_1^1(\sigma_3)_1^1 = i[(\sigma_2)_1^1\delta_1^1 - (\sigma_2)_1^1\delta_1^1]$$

$$(-1)(0) - (0)(-1) = i[(0)(1) - (0)(1)]$$

$$0 = 0$$

Finalmente, el caso $i = 2$, $j = 3$, resulta que $k = 1$, y $\epsilon_{23}^1 = 1$

- $(0, 0, 0, 0)$

$$(\sigma_2)_0^0(\sigma_3)_0^0 - (\sigma_3)_0^0(\sigma_2)_0^0 = i[(\sigma_1)_0^0\delta_0^0 - (\sigma_1)_0^0\delta_0^0]$$

$$(0)(1) - (1)(0) = i[(0)(1) - (0)(1)]$$

$$0 = 0$$

- $(0, 0, 0, 1)$

$$(\sigma_2)_0^0(\sigma_3)_0^1 - (\sigma_3)_0^0(\sigma_2)_0^1 = i[(\sigma_1)_0^1\delta_0^0 - (\sigma_1)_0^0\delta_0^1]$$

$$(0)(0) - (1)(-i) = i[(1)(1) - (0)(0)]$$

$$i = i$$

- $(0, 0, 1, 0)$

$$(\sigma_2)_0^0(\sigma_3)_1^0 - (\sigma_3)_0^0(\sigma_2)_1^0 = i[(\sigma_1)_0^0\delta_1^0 - (\sigma_1)_1^0\delta_0^0]$$

$$(0)(1) - (1)(i) = i[(0)(0) - (1)(1)]$$

$$-i = -i$$

- $(0, 0, 1, 1)$

$$(\sigma_2)_0^0(\sigma_3)_1^1 - (\sigma_3)_0^0(\sigma_2)_1^1 = i[(\sigma_1)_0^1\delta_1^0 - (\sigma_1)_1^0\delta_0^1]$$

$$(0)(-1) - (1)(0) = i[(1)(0) - (1)(0)]$$

$$0 = 0$$

$$\blacksquare (0, 1, 0, 0)$$

$$(\sigma_2)_0^1(\sigma_3)_0^0 - (\sigma_3)_0^1(\sigma_2)_0^0 = i[(\sigma_1)_0^0\delta_0^1 - (\sigma_1)_0^1\delta_0^0]$$

$$(-i)(1) - (0)(0) = i[(0)(0) - (1)(1)]$$

$$-i = -i$$

$$\blacksquare (0, 1, 0, 1)$$

$$(\sigma_2)_0^1(\sigma_3)_0^1 - (\sigma_3)_0^1(\sigma_2)_0^1 = i[(\sigma_1)_0^1\delta_0^1 - (\sigma_1)_0^1\delta_0^1]$$

$$(-i)(0) - (0)(-i) = i[(1)(0) - (1)(0)]$$

$$0 = 0$$

$$\blacksquare (0, 1, 1, 0)$$

$$(\sigma_2)_0^1(\sigma_3)_1^0 - (\sigma_3)_0^1(\sigma_2)_1^0 = i[(\sigma_1)_0^0\delta_1^1 - (\sigma_1)_1^1\delta_0^0]$$

$$(-i)(0) - (0)(i) = i[(0)(1) - (0)(1)]$$

$$0 = 0$$

$$\blacksquare (0, 1, 1, 1)$$

$$(\sigma_2)_0^1(\sigma_3)_1^1 - (\sigma_3)_0^1(\sigma_2)_1^1 = i[(\sigma_1)_0^1\delta_1^1 - (\sigma_1)_1^1\delta_0^1]$$

$$(-i)(-1) - (0)(0) = i[(1)(1) - (0)(0)]$$

$$i = i$$

$$\blacksquare (1, 0, 0, 0)$$

$$(\sigma_2)_1^0(\sigma_3)_0^0 - (\sigma_3)_1^0(\sigma_2)_0^0 = i[(\sigma_1)_1^0\delta_0^0 - (\sigma_1)_0^0\delta_1^0]$$

$$(i)(1) - (0)(0) = i[(1)(1) - (0)(0)]$$

$$i = i$$

$$\blacksquare (1, 0, 0, 1)$$

$$(\sigma_2)_1^0(\sigma_3)_0^1 - (\sigma_3)_1^0(\sigma_2)_0^1 = i[(\sigma_1)_1^1\delta_0^0 - (\sigma_1)_0^0\delta_1^1]$$

$$(i)(0) - (0)(-i) = i[(0)(1) - (0)(1)]$$

$$0 = 0$$

$$\blacksquare (1, 0, 1, 0)$$

$$(\sigma_2)_1^0(\sigma_3)_1^0 - (\sigma_3)_1^0(\sigma_2)_1^0 = i[(\sigma_1)_1^0\delta_1^0 - (\sigma_1)_1^0\delta_1^0]$$

$$(i)(0) - (0)(i) = i[(1)(0) - (1)(0)]$$

$$0 = 0$$

$$\blacksquare (1, 0, 1, 1)$$

$$(\sigma_2)_1^0(\sigma_3)_1^1 - (\sigma_3)_1^0(\sigma_2)_1^1 = i[(\sigma_1)_1^1\delta_1^0 - (\sigma_1)_1^0\delta_1^1]$$

$$(i)(-1) - (0)(0) = i[(0)(0) - (1)(1)]$$

$$-i = -i$$

$$\blacksquare (1, 1, 0, 0)$$

$$(\sigma_2)_1^1(\sigma_3)_0^0 - (\sigma_3)_1^1(\sigma_2)_0^0 = i[(\sigma_1)_1^0\delta_0^1 - (\sigma_1)_0^1\delta_1^0]$$

$$(0)(1) - (-1)(0) = i[(1)(0) - (1)(0)]$$

$$0 = 0$$

$$\blacksquare (1, 1, 0, 1)$$

$$(\sigma_2)_1^1(\sigma_3)_0^1 - (\sigma_3)_1^1(\sigma_2)_0^1 = i[(\sigma_1)_1^1\delta_0^1 - (\sigma_1)_0^1\delta_1^1]$$

$$(0)(0) - (-1)(-i) = i[(0)(0) - (1)(1)]$$

$$-i = -i$$

- $(1, 1, 1, 0)$

$$(\sigma_2)_1^1(\sigma_3)_1^0 - (\sigma_3)_1^1(\sigma_2)_1^0 = i[(\sigma_1)_1^0\delta_1^1 - (\sigma_1)_1^1\delta_1^0]$$

$$(0)(0) - (-1)(i) = i[(1)(1) - (0)(0)]$$

$$i = i$$

- $(1, 1, 1, 1)$

$$(\sigma_2)_1^1(\sigma_3)_1^1 - (\sigma_3)_1^1(\sigma_2)_1^1 = i[(\sigma_1)_1^1\delta_1^1 - (\sigma_1)_1^1\delta_1^1]$$

$$(0)(-1) - (-1)(0) = i[(0)(1) - (0)(1)]$$

$$0 = 0$$

Con lo que hemos contemplado todas las igualdades, y demostrado la identidad. □

Apéndice E

Símbolo de Levi-Civita

Sea $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$ la base canónica del espacio euclidiano tridimensional, con métrica $diag(1, 1, 1)$.

Se define $\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk}$, $i, j, k = 1, 2, 3$ por:

$$\epsilon_{ijk} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) = Det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_j \\ \mathbf{e}_k \end{pmatrix} \quad (\text{E.1})$$

De las propiedades de los determinantes, y del triple producto escalar, se puede demostrar que el símbolo $\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk}$ es totalmente antisimétrico. También, de la definición, y de las propiedades de los determinantes, obtenemos:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \epsilon^{\ell mn} &= Det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_j \\ \mathbf{e}_k \end{pmatrix} Det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\ell \\ \mathbf{e}_m \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix} = Det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_j \\ \mathbf{e}_k \end{pmatrix} Det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\ell & \mathbf{e}_m & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} \\ &= Det \left[\begin{pmatrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_j \\ \mathbf{e}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\ell & \mathbf{e}_m & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} \right] = Det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_\ell & \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_m & \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_\ell & \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_m & \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_\ell & \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_m & \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \delta_{i\ell} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{j\ell} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{k\ell} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

De este resultado se pueden demostrar los siguientes tres:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{\ell mk} = \delta_i^\ell \delta_j^m - \delta_i^m \delta_j^\ell \quad (\text{E.2})$$

$$\epsilon_{i\ell k}\epsilon^{j\ell k} = 2\delta_i^j \quad (\text{E.3})$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{ijk} = 6 \quad (\text{E.4})$$

El símbolo de Levi-Civita se puede entender como una densidad tensorial, ver, por ejemplo (Peldan, 1994).