



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

PERFILOMETRÍA DE DESPLAZAMIENTO LATERAL
MEDIANTE INTERFEROMETRÍA DE CORRIMIENTO
DE FASE

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

por

Miguel Ángel Navarro Ahuatl

Asesorado por

Dr. Cruz Meneses Fabián

Puebla Pue.
4 de julio de 2024



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

PERFILOMETRÍA DE DESPLAZAMIENTO LATERAL
MEDIANTE INTERFEROMETRÍA DE CORRIMIENTO
DE FASE

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

por

Miguel Ángel Navarro Ahuatl

Asesorado por

Dr. Cruz Meneses Fabián

Puebla Pue.
4 de julio de 2024

Título: PERFILOMETRÍA DE DESPLAZAMIENTO LATERAL
MEDIANTE INTERFEROMETRÍA DE CORRIMIENTO DE FASE
Estudiante: MIGUEL ÁNGEL NAVARRO AHUATL

COMITÉ

Dra. Ma. Rosario Pastrana Sánchez
Presidente

Dr. Juan Castillo Mixcóatl
Secretario

Dr. Rafael Izazaga Pérez
Vocal

Dr. Cruz Meneses Fabián
Asesor

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 7 |
| 1.1. Planteamiento del problema | 8 |
| 1.2. Objetivos | 8 |
| 1.2.1. Objetivo general | 8 |
| 1.2.2. Objetivos particulares | 8 |
| 1.3. Contexto del trabajo | 9 |
| 1.4. Organización de la tesis | 9 |
| 2. Tratamiento teórico | 11 |
| 2.1. Interferometría de corrimiento de fase | 11 |
| 2.1.1. Método PSI 3 pasos | 12 |
| 2.1.2. Método PSI 4 pasos | 14 |
| 2.2. Interferometría de desplazamiento lateral | 15 |
| 2.3. Series de Taylor | 17 |
| 2.4. Desenvolvimiento de fase | 19 |
| 2.4.1. Método de Itoh | 20 |
| 2.4.1.1. Desenvolvimiento en 1D | 20 |
| 2.4.1.2. Desenvolvimiento en 2D | 22 |
| 2.4.2. Método de Itoh optimizado | 27 |
| 2.5. Perfilometría por corrimiento de fase | 28 |
| 3. Perfilometría de desplazamiento lateral | 33 |
| 3.0.1. Conversión de píxeles a unidades métricas | 36 |
| 3.0.2. Conversión de unidades de fase a unidades métricas | 36 |
| 4. Resultados numéricos y experimentales | 39 |
| 4.1. Resultados numéricos | 39 |
| 4.2. Resultados experimentales | 43 |
| 5. Conclusiones | 49 |
| 5.0.1. Trabajos a futuro | 49 |

Dedicatoria

Para mi esposa.

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (Conahcyt) por la beca que me otorgó durante la elaboración de ésta tesis bajo el proyecto de Investigación Científica Básica con número de apoyo: 826007.

Al Dr. Antonio Barcelta Pinzón por mostrarme, orientarme y apoyarme el mundo de la investigación científica.

Al Dr. Cruz Meceses Fabián por el apoyo, paciencia y determinación en este trabajo de tesis.

A mi esposa Sonia De la Luz Mendez por su ayuda y comprensión en este proyecto.

A mi amigo Jose Manuel Bermúdez Méndez.

A cada miembro de mi jurado, por sus comentarios y observaciones en éste trabajo.

Resumen

La topografía o Perfilometría 3-D de objetos opacos medida con alta precisión con métodos sin contacto físico y de campo completo es un procedimiento apreciado en muchas áreas de la ciencia y la ingeniería. La proyección de luz incoherente con estructura periódica hace posible el cumplimiento de esta tarea exitosamente. La idea fundamental está basada en asociar las deformaciones de los patrones de luz proyectados a la topografía del objeto y, dicho sea de paso, la forma de su medición experimental clasifica el método empleado. Para cuantificar, típicamente, se usa una referencia (pantalla plana de referencia sin objeto) y posteriormente se agrega el objeto. Así, es posible conocer la topografía mediante la resta de la medición en ambas situaciones (patrón de franjas con objeto menos patrón de franjas sin objeto). Dos métodos son usados principalmente: 1) análisis de Fourier y 2) análisis de franjas por corrimiento de fase síncrono. En este trabajo de tesis de maestría se propone obtener la topografía del objeto sin usar referencia, que hasta donde se sabe esta idea no es conocida, y evaluar los patrones de luz estructurada mediante análisis de franjas por corrimiento de fase síncrono. Es posible evitar el uso de referencia debido a las ventajas inherentes que da el hecho de desplazar el objeto en dos direcciones ortogonales para obtener el gradiente de su topografía, y entonces aplicar una integral de trayectoria para obtener la forma del objeto. Debido a la analogía en interferometría de desplazamiento lateral, se le ha llamado a la presente propuesta “Perfilometría de Desplazamiento Lateral”.

Capítulo 1

Introducción

La interferometría estudia la superposición de dos o más ondas, en óptica, las ondas luminosas generalmente coherentes forman un patrón de franjas brillantes y oscuras. Las franjas brillantes son formadas debido a las ondas que llegan en fase, efecto conocido como interferencia constructiva, mientras que las oscuras son formadas debido a las ondas que llegan en contrafase, conocida como interferencia destructiva. La separación entre dos franjas brillantes o dos franjas oscuras es de una longitud de onda. Es conocido que la forma de las franjas, el contraste de ellas, así como el número, refleja la diferencia de las fases, amplitudes, estados de polarización, grado de coherencia entre las ondas involucradas en la interferencia [1]. Para el caso de la interferencia de dos ondas coherentes polarizadas linealmente en el mismo plano, en la práctica se supone conocida una de ellas, llamada onda de referencia, en la mayoría de los casos se considera una onda plana o una onda esférica, mientras que la segunda se considera onda de prueba u onda del objeto, por lo que las variaciones de las franjas en el patrón de interferencia son atribuidas a ésta. Con el punto de vista anterior, la evaluación de la fase del patrón de interferencia viene a ser la medida de las variaciones de fase de la onda que cruza el objeto [2, 3]. En general, las variaciones de fase pueden ser atribuidas a cambios en; la longitud de onda, índice de refracción, caminos ópticos, polarización de la luz, cambios del vector de propagación, etc. Bajo circunstancias adecuadas, la evaluación de fase puede ser interpretada en diferentes campos de la metrología para evaluar o medir diferentes variables o cantidades físicas, dentro de las que se puede mencionar: pruebas de superficies ópticas, espejos, lentes; estudio de fluidos, mezclas, densidades, velocidad de flujo; estudio interno de objetos usando tomografía, gradientes de temperatura en sólidos, líquidos y gases, en el estudio de vibraciones en placas metálicas para la observación, medición de modos y frecuencias naturales; en la medición de perfiles de objetos en 3-D, a nivel macroscópico y microscópico, en objetos estáticos o dinámicos. Muchas técnicas han sido propuestas para evaluar la fase del objeto usando una técnica conocida como interferometría de corrimiento de fase [4, 8] (PSI, de sus siglas en inglés). Mientras que otras emplean el método de la transformada de Fourier introducido por Takeda en 1982 [9], donde se introduce una fase lineal en lugar de un cambio de fase constante como en PSI. Por otro lado, el método de contorno de moiré es una técnica conocida para la medición de formas en tres dimensiones [10]. El interés reciente en esta técnica ha radicado en la medición automática apoyada por el procesamiento de datos en la computadora [11, 12, 13]. Para este propósito es fundamental tener

medios para; (1) hacer una distinción automática entre una depresión y una elevación a partir de un mapa de contorno del objeto, (2) asignar órdenes marginales automáticamente, incluyendo aquellas separadas por discontinuidades, (3) ubicar las líneas centrales de las líneas anchas, corrigiendo las variaciones de irradiancia causadas por la reflexión no uniforme de la luz en la superficie del objeto e (4) interpolar las regiones que se encuentran entre las líneas de contorno. Entre los métodos que satisfacen estas condiciones están; el método de escaneo de moiré [11] y el método de bloqueo de fase de moiré [13]. La técnica de Perfilometría por transformada de Fourier (FTP) está basada en el procesamiento por computadora para la medición automática de formas tridimensionales [14], asumiendo que el patrón capturado es modelado por un patrón de interferencia con portadora. En contraste con la técnica de contorno de moiré, un patrón de rejilla proyectado sobre la superficie del objeto es transformado por Fourier y procesado en su dominio de frecuencia espacial, así como en su dominio de señal espacial [14]. Esta técnica tiene una sensibilidad mucho mayor que la técnica de moiré convencional y es capaz de distinción automática entre una depresión y una elevación en la superficie del objeto. No hay ningún requisito para asignar órdenes marginales e interpolar datos en las regiones entre las franjas de contorno. La técnica está exenta de errores causados por las franjas de moiré espurias generadas por los componentes armónicos superiores del patrón de rejilla [11]. Últimamente, los métodos más reportados en la literatura hacen uso de interferometría de corrimiento de fase Phase Sifting Interferometry -PSI, de sus siglas en inglés) [1, 5, 6, 7]. El empleo de PSI es posible debido a que el patrón proyectado sobre el objeto es considerado como un patrón de interferencia [15, 16, 17, 18, 19], donde el patrón periódico es asociado a franjas portadoras en interferometría [20, 21, 22, 23], las cuales son introducidas por una inclinación relativa entre los dos haces que interfieren, aquí son introducidas sintéticamente por software [24, 25, 26, 27]. Mientras que la deformación de las franjas proyectadas sobre el objeto es interpretada como la fase del objeto [28]. Entonces el empleo de PSI permitirá estimar las deformaciones de las franjas mediante el computo de la fase [28, 29] y posteriormente, mediante una conversión geométrica será posible obtener la topografía el objeto [29].

1.1. Planteamiento del problema

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Obtener la forma tridimensional de un objeto mediante la introducción del concepto de desplazamiento lateral en proyección de franjas, sin usar un marco de referencia.

1.2.2. Objetivos particulares

1. Desarrollar el modelo teórico.
2. Implementar numéricamente el modelo teórico en el entorno de programación y cálculo numérico de computadora MATLAB o Python.
3. Diseñar la configuración del modelo experimental en un sistema de control manual.

4. Implementar experimentalmente el modelo y obtener resultados satisfactorios
5. Implementar sistemas de control electromecánico para optimización de control y movimiento.

1.3. Contexto del trabajo

El presente trabajo de tesis se desarrollo en el Laboratorio de Luz Estructurada (LLE) de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), el cual se encuentra dentro del área de la “Interferometría”, la cual es una de las líneas de investigación del Cuerpo Académico de Óptica (CAO).

1.4. Organización de la tesis

En esta sección se presenta una resumida descripción sobre los capítulos que consta este trabajo de tesis.

En el “Capítulo 1” se muestra la “Introducción”, hace el planteamiento del problema, se especifican los objetivos y se da una organización a la tesis.

En el “Capítulo 2” se aborda el tratamiento teórico que se usa como base para el desarrollo del trabajo realizado, con temas como “interferometría de corrimiento de fase”, “desenvolvimiento de fase”, “interferometría de desplazamiento lateral”, “perfilometría por corrimiento de fase” entre otros temas.

En el “Capítulo 3” se presenta el desarrollo teórico del método propuesto, denominado como “perfilometría de desplazamiento lateral”.

En el “Capítulo 4” se muestran valores teoricos por simulación numérica, así como los resultados experimentales obtenidos.

Finalmente en el “Capitulo 5” se dan las conclusiones del presente trabajo de tesis.

Capítulo 2

Tratamiento teórico

La interferencia óptica es el resultado de la superposición de dos o más ondas de luz, lo que conduce a una irradiancia que se desvía de la suma de las irradiancias de las ondas componentes individuales. Esta irradiancia se define como la energía medida por unidad de área por unidad de tiempo de las componentes del campo eléctrico de las ondas [8].

Existen varias técnicas para determinar la fase del objeto, entre las más importantes se encuentran la interferometría de corrimiento de fase (PSI por sus siglas en inglés “Phase Shifting Interferometry”), introducida por Bruning et al. en 1974 [4], y la interferometría de franjas portadoras (Carrier Fringes Interferometry, CFI), que utiliza el método de la transformada de Fourier, introducido por M. Takeda et al. en 1982 [9], por mencionar algunas.

2.1. Interferometría de corrimiento de fase

El método PSI consiste en una serie de interferogramas (imágenes con patrones de franjas) en los cuales existe una diferencia de fase entre cada uno, la cual es constante espacialmente y varía con el tiempo, por lo tanto, la fase puede ser recuperada mediante operaciones punto a punto con un frente de onda de referencia y otro de prueba o de objeto. Considerando dos campos ópticos que viajan en la misma dirección, con la misma frecuencia y misma polarización, se tienen las expresiones escalares para el campo óptico de referencia:

$$E_r(x, y) = E_{r0}(x, y)e^{i[\phi_r(x, y)]}, \quad (2.1)$$

y el campo óptico de prueba:

$$E_p(x, y) = E_{p0}(x, y)e^{i[\phi_p(x, y)]}. \quad (2.2)$$

La interferencia entre estos campos se calcula mediante:

$$\begin{aligned} I(x, y) &= \|[E_r(x, y) + E_p(x, y)]\|^2 \\ &= [E_r(x, y) + E_p(x, y)] [E_r^*(x, y) + E_p^*(x, y)], \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde $E_r^*(x, y)$ y $E_p^*(x, y)$ representan los valores conjugados de $E_r(x, y)$ y $E_p(x, y)$ respectivamente. Conforme a la identidad:

$$2 \cos [\phi_p(x, y) - \phi_r(x, y)] = e^{i[\phi_p(x, y) - \phi_r(x, y)]} + e^{-i[\phi_p(x, y) - \phi_r(x, y)]} \quad (2.4)$$

se simplifica la ecuacion 2.3, se obtiene:

$$I(x, y) = E_{r0}^2(x, y) + E_{p0}^2(x, y) + E_{r0}(x, y)E_{p0}(x, y) \{2 \cos [\phi_p(x, y) - \phi_r(x, y)]\},$$

de esta forma, la ecuación que describe los patrones de franjas es [8]:

$$I(x, y) = E_{r0}^2(x, y) + E_{p0}^2(x, y) + 2E_{r0}(x, y)E_{p0}(x, y) \cos [\phi(x, y)], \quad (2.5)$$

de forma simplificada se tiene la expresión:

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y)], \quad (2.6)$$

donde:

$$a(x, y) = E_{r0}^2(x, y) + E_{p0}^2(x, y), \quad (2.7)$$

que se conoce como “luz de fondo: background”, al término

$$b(x, y) = 2E_{r0}(x, y)E_{p0}(x, y), \quad (2.8)$$

como “luz de modulación: modulation lighth”, y por ultimo la “fase del objeto: object phase”:

$$\phi(x, y) = \phi_p(x, y) - \phi_r(x, y). \quad (2.9)$$

Agregando el corrimiento de fase a la ecuación 2.6, se obtiene:

$$I_n(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [\phi(x, y) + \alpha_n], \quad (2.10)$$

donde

$$\alpha_n = \left(\frac{2\pi}{N} \right) * n. \quad (2.11)$$

Bajo las condiciones

$$n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (2.12)$$

$$N \geq 3. \quad (2.13)$$

La ecuación 2.10 es un pilar en el método PSI [4], y como se observa, la intensidad de los patrones de franjas varia como una función cosenoidal, y al agregar el corrimiento de fase α_n se obtiene un sistema de N ecuaciones, que se pueden resolver para obtener la fase del objeto $\phi(x, y)$.

2.1.1. Método PSI 3 pasos

El método PSI necesita como mínimo 3 corrimientos para poder calcular la fase deseada y es usado en muchas investigaciones [6, 7, 19, 20, 24, 26, 27]. Para el caso particular donde $N = 3$ cada corrimiento se calcula:

$$\alpha_0 = 0, \quad (2.14)$$

$$\alpha_1 = \frac{2\pi}{3}, \quad (2.15)$$

$$\alpha_2 = \frac{4\pi}{3}. \quad (2.16)$$

Desarrollando la ecuación 2.10 para el método PSI de 3 pasos se obtienen la ecuaciones:

$$I_0(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) + \alpha_0], \quad (2.17)$$

$$I_1(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) + \alpha_1], \quad (2.18)$$

$$I_2(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) + \alpha_2]. \quad (2.19)$$

Conforme a la identidad trigonométrica:

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B, \quad (2.20)$$

y simplificando se obtienen las ecuaciones que modelan los patrones de franjas mediante el método PSI con tres pasos:

$$I_0(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos \phi(x, y). \quad (2.21)$$

$$I_1(x, y) = a(x, y) - \left(\frac{1}{2}\right) b(x, y) \cos \phi(x, y) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) b(x, y) \sin \phi(x, y). \quad (2.22)$$

$$I_2(x, y) = a(x, y) - \left(\frac{1}{2}\right) b(x, y) \cos \phi(x, y) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) b(x, y) \sin \phi(x, y). \quad (2.23)$$

Restando 2.23 y 2.22 se tiene:

$$I_2(x, y) - I_1(x, y) = \left(\sqrt{3}\right) b(x, y) \sin \phi(x, y). \quad (2.24)$$

Por otro lado, sumando 2.23 y 2.22

$$I_1(x, y) + I_2(x, y) = 2a(x, y) - b(x, y) \cos \phi(x, y). \quad (2.25)$$

Usando las ecuaciones 2.24, 2.25 se puede calcular la tangente de la fase:

$$\begin{aligned} \tan \phi(x, y) &= \frac{3\sqrt{3}b(x, y) \sin \phi(x, y)}{3\sqrt{3}b(x, y) \cos \phi(x, y)} \\ &= \frac{3[I_2(x, y) - I_1(x, y)]}{(\sqrt{3}) \{2I_0(x, y) - [I_1(x, y) + I_2(x, y)]\}} \end{aligned} \quad (2.26)$$

y de esta manera se obtiene la ecuación para calcular la fase deseada:

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \tan^{-1} [\tan \phi(x, y)] \\ &= \tan^{-1} \left\{ \frac{3[I_2(x, y) - I_1(x, y)]}{(\sqrt{3}) \{2I_0(x, y) - [I_1(x, y) + I_2(x, y)]\}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

En la figura 2.1 se tienen los patrones de franjas obtenidos mediante las ecuaciones 2.21, 2.22 y 2.23, así como también la fase (ecuación 2.27). El método PSI con 3 corrimientos de fase es el más simple con el conflicto que es sensible al ruido, por esta razón, es conveniente el aumentar el número de pasos y por siguiente se aumentarán el número de ecuaciones para los patrones de franjas.

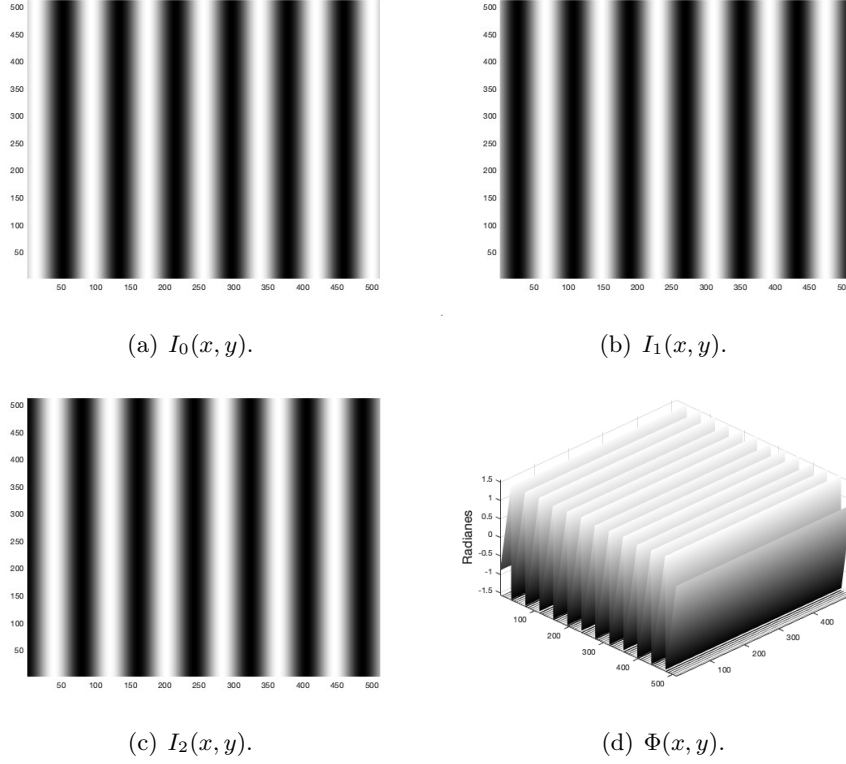


Figura 2.1: (a), (b), (c), patrones de franjas elaborados mediante el método PSI de 3 pasos, (d) fase de los patrones de franjas.

2.1.2. Método PSI 4 pasos

Parecido al caso anterior, se tienen ahora 4 interferogramas, mediante la ecuación 2.11 se obtienen los corrimientos $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = \pi$ y $\alpha_3 = \frac{3\pi}{2}$. Conforme a la ecuación 2.10 para generar los patrones de franjas por el método PSI, se obtienen las ecuaciones

$$I_0(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) + \alpha_0], \quad (2.28)$$

$$I_1(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) + \alpha_1], \quad (2.29)$$

$$I_2(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) + \alpha_2], \quad (2.30)$$

$$I_3(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) + \alpha_3]. \quad (2.31)$$

Usando a la identidad trigonométrica 2.20, y reduciendo se producen las ecuaciones:

$$I_0(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y)], \quad (2.32)$$

$$I_1(x, y) = a(x, y) - b(x, y) \sin[\phi(x, y)], \quad (2.33)$$

$$I_2(x, y) = a(x, y) - b(x, y) \cos[\phi(x, y)], \quad (2.34)$$

$$I_3(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \sin[\phi(x, y)], \quad (2.35)$$

las cuales son una parte fundamental en la interferometría y perfilometría [3, 5, 6, 7, 15, 16, 18, 20, 21].

Para poder calcular la fase de los patrones de franjas, se puede iniciar restando

$$I_0(x, y) - I_2(x, y) = 2b(x, y) \cos [\phi(x, y)], \quad (2.36)$$

y también

$$I_3(x, y) - I_1(x, y) = 2b(x, y) \sin [\phi(x, y)]. \quad (2.37)$$

La tangente de la fase se puede calcular:

$$\tan [\phi(x, y)] = \frac{I_3(x, y) - I_1(x, y)}{I_0(x, y) - I_2(x, y)}. \quad (2.38)$$

por consiguiente se obtiene la expresión matemática para calcular la fase deseada:

$$\Phi(x, y) = \tan^{-1} \left[\frac{I_3(x, y) - I_1(x, y)}{I_0(x, y) - I_2(x, y)} \right]. \quad (2.39)$$

En la figuras 2.2(a), 2.2(b), 2.2(c) y 2.2(d) se muestran los patrones de franjas elaborados mediante las ecuaciones 2.32, 2.33, 2.34 y 2.35. Y por último, en la figura 2.2(e) se observa la fase de los patrones de franjas mediante la ecuación 2.39 la cual tiene una ecuación

$$\phi(x, y) = \frac{2\pi}{P} x \quad (2.40)$$

2.2. Interferometría de desplazamiento lateral

La interferometría de desplazamiento lateral, conocida como Lateral Shear Interferometry (LSI), constituye un ámbito significativo dentro de la interferometría y se ha aplicado ampliamente en diversos campos, como pruebas en sistemas y componentes ópticos [1, 8, 23]. En este enfoque, un frente de onda en estudio se divide en dos partes idénticas mediante un divisor de haz y luego se recombinan estas partes con un desplazamiento adecuado. Esta técnica prescinde de la necesidad de un frente de onda de referencia conocido, ya que el frente de onda se compara consigo mismo. La metodología de LSI implica desplazar lateralmente una pequeña distancia transversal al frente de onda duplicado con respecto al original, generando así el patrón de interferencia entre los frentes original y desplazado.

Teniendo la expresión para el campo inicial

$$E(x, y) = E_0(x, y)e^{i\phi(x, y)}. \quad (2.41)$$

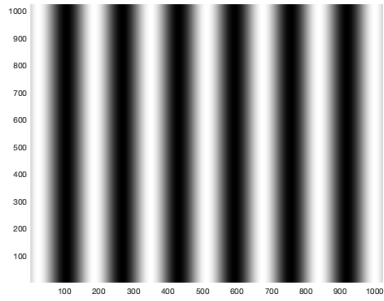
Los campos desplazados son:

$$E_1(x + \frac{1}{2}\Delta x, y) = E_{01}(x + \frac{1}{2}\Delta x, y)e^{i\phi(x + \frac{1}{2}\Delta x, y)}, \quad (2.42)$$

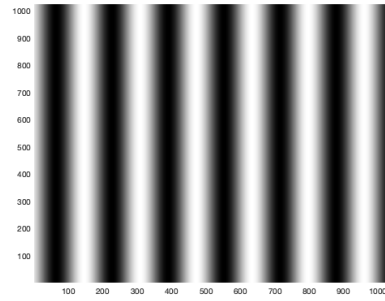
y

$$E_2(x - \frac{1}{2}\Delta x, y) = E_{02}(x - \frac{1}{2}\Delta x, y)e^{i\phi(x - \frac{1}{2}\Delta x, y)}. \quad (2.43)$$

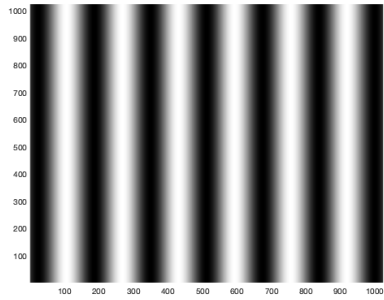
Tratamiento teórico
2.2 Interferometría de desplazamiento lateral



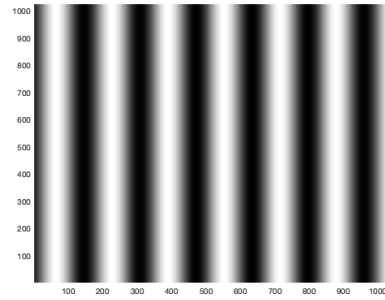
(a) $I_0(x, y)$.



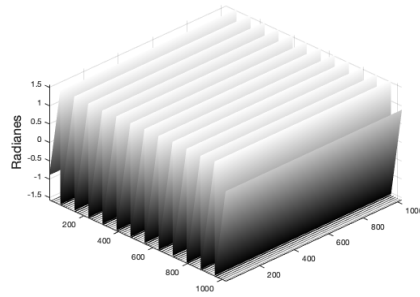
(b) $I_1(x, y)$.



(c) $I_2(x, y)$.



(d) $I_3(x, y)$.



(e) $\Phi(x, y)$.

Figura 2.2: (a), (b), (c), (d) patrones de franjas. (e) fase de los patrones de franjas calculada mediante el método PSI de 4 pasos.

Conforme la sección 2.1, la superposición de estos dos campos genera un patrón de interferencia:

$$\begin{aligned}
 I(x, y) = & E_{01}^2(x + \frac{1}{2}\Delta x, y) + E_{02}^2(x - \frac{1}{2}\Delta x, y) \\
 & + 2E_{01}(x + \frac{1}{2}\Delta x, y)E_{02}(x - \frac{1}{2}\Delta x, y) \cos \left[\phi(x - \frac{1}{2}\Delta x, y) - \phi(x + \frac{1}{2}\Delta x, y) \right],
 \end{aligned}
 \tag{2.44}$$

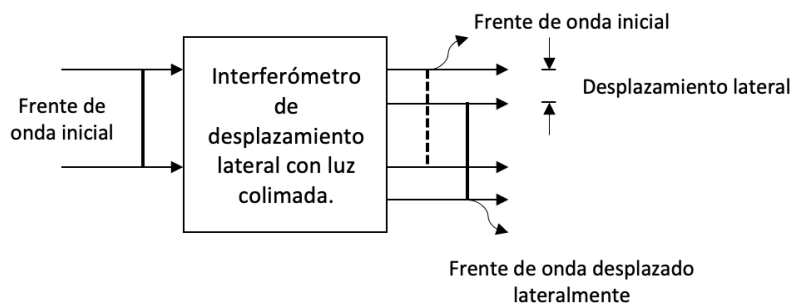


Figura 2.3: Esquema para LSI.

ó de forma simplificada:

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [\Delta\phi(x, y)], \quad (2.45)$$

que corresponde a la expresión para los patrones de interferencia, donde

$$a(x, y) = E_{01}^2(x + \frac{1}{2}\Delta x, y) + E_{02}^2(x - \frac{1}{2}\Delta x, y) \quad (2.46)$$

$$b(x, y) = 2E_{01}(x + \frac{1}{2}\Delta x, y)E_{02}(x - \frac{1}{2}\Delta x, y) \quad (2.47)$$

$$\Delta\phi(x, y) = \phi(x - \frac{1}{2}\Delta x, y) - \phi(x + \frac{1}{2}\Delta x, y) \quad (2.48)$$

Al agregar un corrimiento de fase a la ecuación de los patrones de interferencia se obtiene:

$$I_n(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [\Delta\phi(x, y) + \alpha_n]. \quad (2.49)$$

Usando el método de PSI es posible obtener la fase. Se tiene como un objetivo del presente trabajo obtener la fase a partir de los incrementos conocidos, este método sirve como base para el método propuesto en el campo de la perfilometría.

2.3. Series de Taylor

Sea f una función con infinitas derivadas, la serie de Taylor de esta función centrada en a se expresa como una serie de potencias de la forma:

$$f(x') = f(a) + (x' - a)f^{(1)}(a) + \frac{(x' - a)^{(2)}}{2!}f^{(2)}(a) + \dots, \quad (2.50)$$

se puede expresar como:

$$f(x') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x' - a)^n}{n!} f^{(n)}(a), \quad (2.51)$$

en donde $f^{(n)}$ es la " n -ésima derivada". Haciendo las sustituciones:

$$x' = x + \Delta x$$

$$a = x$$

La serie de Taylor de f se puede escribir como:

$$f(x + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Delta x)^n}{n!} f^{(n)}(x). \quad (2.52)$$

Desarrollando la ecuación 2.52 se obtiene:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x f^{(1)}(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2} f^{(2)}(x) + \frac{(\Delta x)^3}{6} f^{(3)}(x) + E_+(x),$$

por lo tanto la primera derivada de la función f se puede escribir como:

$$f^{(1)}(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} f^{(2)}(x) - \frac{(\Delta x)^2}{6} f^{(3)}(x) - \frac{1}{\Delta x} E_+(x), \quad (2.53)$$

Por otra parte, si el desplazamiento se realiza en sentido contrario, se obtiene la expresión:

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \Delta x f^{(1)}(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2} f^{(2)}(x) - \frac{(\Delta x)^3}{6} f^{(3)}(x) + E_-(x),$$

de la cual se puede obtener la aproximación:

$$f^{(1)}(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} f^{(2)}(x) - \frac{(\Delta x)^2}{6} f^{(3)}(x) + \frac{1}{\Delta x} E_-(x), \quad (2.54)$$

Sumando 2.53 y 2.54 y simplificando se obtiene:

$$f^{(1)}(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{12} f^{(3)}(x) - \frac{1}{\Delta x} E_+(x) + \frac{1}{\Delta x} E_-(x) \quad (2.55)$$

donde

$$E_+(x) = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(\Delta x)^n}{n!} f^{(n)}(x),$$

$$E_-(x) = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-\Delta x)^n}{n!} f^{(n)}(x).$$

La ecuación 2.55 se conoce como fórmula en diferencias centrales [29]. Si la función $f(x)$ tiene al menos la tercera derivada, entonces el error se puede escribir como:

$$E(x) = -\frac{(\Delta x)^2}{12} f^{(3)}(x),$$

lo cual como puede verse es un error de segundo orden. Se deduce, que si se conoce la diferencia de la función desplazada positivamente y la función desplazada negativamente, se puede calcular la función $f(x)$ integrando la ecuación 2.55:

$$f(x) = \int_a^b \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \right] dx + \int_a^b E(x) dx. \quad (2.56)$$

En la figura 2.4(a) se pueden observar las funciones $f(x + \Delta x)$ y $f(x - \Delta x)$, en donde el desplazamiento Δx es muy pequeño ($\Delta x \rightarrow 0$), mientras que en la figura 2.4(b) se observa la diferencia entre las funciones desplazadas ($f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)$).

Realizando la integración numérica de la ecuación 2.56 se obtiene la función $f(x)$ como se observa en la figura 2.5.

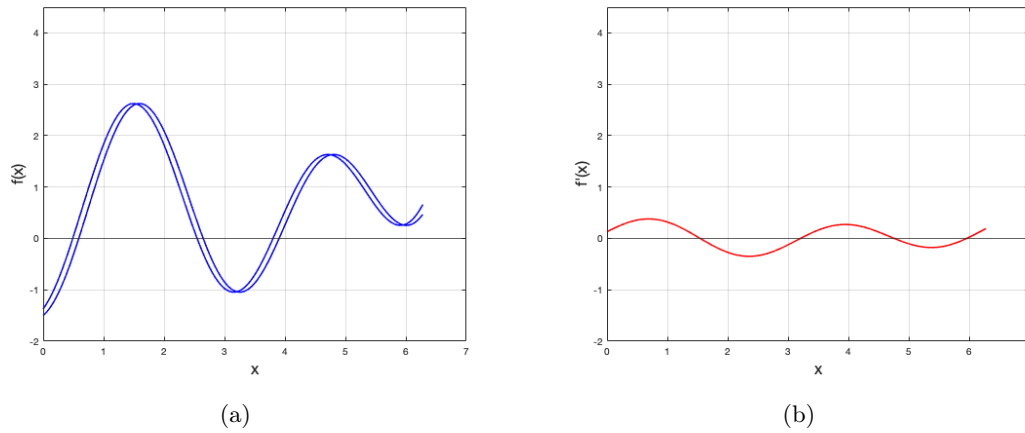


Figura 2.4: (a) Gráfica de las funciones $f(x + \Delta x)$ y $f(x - \Delta x)$. (b) Gráfica de la diferencia $f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)$.

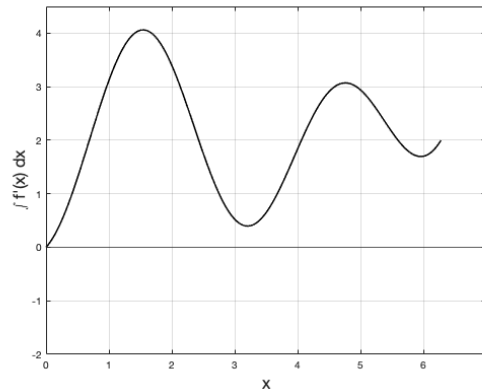


Figura 2.5: Función calculada por la integración numérica de la primera derivada.

2.4. Desarrollo de fase

En este capítulo se explica en que consiste el desarrollo de fase, se explica el algoritmo de Itoh para desarrollar la fase tanto para 1D como para 2D, así como también la optimización de este algoritmo, eligiendo el punto inicial de desarrollo. Como se vio en el capítulo 2.1.1 y 2.1.2, mediante el método PSI es posible calcular la fase de los patrones de franjas mediante las ecuaciones 2.27 o 2.43, pero resulta que esta fase tiene discontinuidades debido a la función tangente en un intervalo de $[-\pi, \pi]$, comúnmente llamada “fase envuelta” (ϕ_w). Es por esta razón que se recurre a desarrollar algoritmos que eliminen estas discontinuidades para obtener la fase deseada denominada como “fase desenrollada” (ϕ_u). Uno de los algoritmos principales gracias a su simplicidad y rapidez es el algoritmo de Itoh para desarrollo de fase el cual apareció en 1982 [31] y la idea

consiste en hallar la fase desenvuelta como un proceso de integración.

2.4.1. Método de Itoh

2.4.1.1. Desenvolvimiento en 1D

La fase envuelta se designa mediante el operador de envolvimiento usando la ecuación:

$$\Phi(j) = W \{ \phi(j) \} = \phi(j) + 2\pi K_1(j), \quad (2.57)$$

donde $K_1(j) \in \mathbb{Z}$, $\Phi(j)$ representa a la fase envuelta, el cual es un vector renglón de tamaño $1 \times n$. Así como tambien, se declara el operador de diferencias:

$$\Delta \{ \phi(j) \} = \phi(j) - \phi(j-1). \quad (2.58)$$

El objetivo es calcular la fase " $\phi(j)$ " a partir de la fase envuelta. Aplicando el operador de diferencias (ecuación 2.58) a la ecuación 2.57:

$$\begin{aligned} \Delta \{ \Phi(j) \} &= \Delta \{ W \{ \phi(j) \} \} \\ &= \Delta \{ \phi(j) + 2\pi K_1(j) \} \\ &= \Delta \{ \phi(j) \} + 2\pi \Delta \{ K_1(j) \}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

ahora, aplicando el operador de envolvimiento (ecuación 2.57) a la ecuación 2.59

$$\begin{aligned} W \{ \Delta \{ \Phi(j) \} \} &= W \{ \Delta \{ \phi(j) \} + 2\pi \Delta \{ K_1(j) \} \} \\ &= W \{ \Delta \{ \phi(j) \} \} + W \{ 2\pi \Delta \{ K_1(j) \} \} \\ &= \Delta \{ \phi(j) \} + 2\pi K_2(j) + 2\pi \Delta \{ K_1(j) \} \\ &= \Delta \{ \phi(j) \} + 2\pi [K_2(j) + \Delta \{ K_1(j) \}]. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Con las condiciones:

$$-\pi < W \{ \Delta \{ \Phi(j) \} \} \leq \pi. \quad (2.61)$$

$$-\pi < \Delta \{ \phi(j) \} \leq \pi. \quad (2.62)$$

Entonces de la ecuación 2.60 se deduce que:

$$2\pi [K_2(j) + \Delta \{ K_1(j) \}] = 0, \quad (2.63)$$

y tambien

$$W \{ \Delta \{ \Phi(j) \} \} = \Delta \{ \phi(j) \} \quad (2.64)$$

$$= \phi(j) - \phi(j-1). \quad (2.65)$$

Despejando la ecuación 2.58 se obtiene:

$$\phi(j) = \Delta \{ \phi(j) \} + \phi(j-1). \quad (2.66)$$

Lo que significa que se puede calcular la fase desenvuelta a partir de la fase envuelta, como se muestra en la ecuación 2.67

$$\begin{aligned}\phi_u(j) &= \sum_{jj=2}^j [W \{\Delta \{\Phi(jj)\}\} + \phi(jj - 1)] \\ &= \sum_{jj=2}^j [\Delta \{\phi(jj)\} + \phi(jj - 1)],\end{aligned}\tag{2.67}$$

donde jj toma valores desde 2 hasta n . En base a lo presentado, para calcular la fase mediante el algoritmo de Itoh se siguen los pasos:

1. Tener una fase envuelta calculada mediante la ecuación 2.57.

$$\Phi(j) = W \{\phi(j)\} = \phi(j) + 2\pi K_1(j).$$

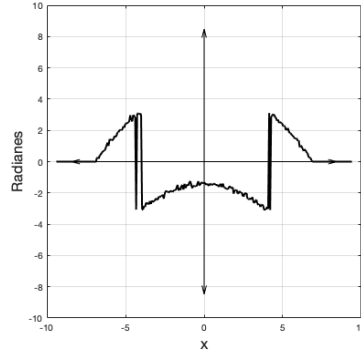


Figura 2.6: Fase envuelta en 1D $\Phi(j)$.

2. Aplicar el operador de diferencias a la fase envuelta (ecuación 2.58)

$$\Delta \{\Phi(j)\} = \Delta \{\phi(j)\} + 2\pi \Delta \{K_1(j)\}.$$

3. Aplicar el operador de envoltimiento a las diferencias de la fase envuelta.

$$W \{\Delta \{\Phi(j)\}\} = \Delta \{\phi(j)\}.$$

4. Sembrar valor inicial, que significa asignar un valor al primer dato de la fase deseada y tomarlo como un valor ya desenvuelto.

$$\begin{aligned}\phi(1) &= \Delta \{\phi_u(1)\} \\ &= 0.\end{aligned}$$

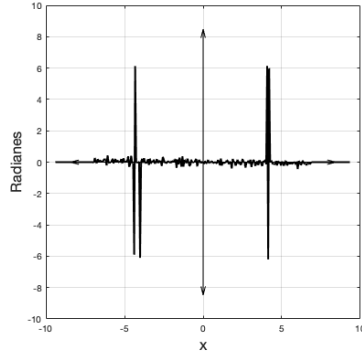


Figura 2.7: Diferencias de la fase envuelta en 1D $\Delta \{\Phi(j)\}$.

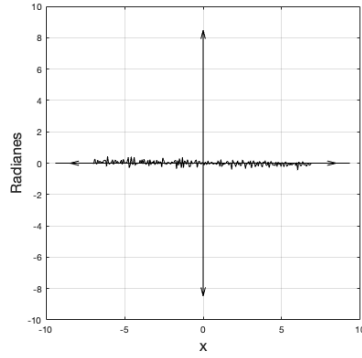


Figura 2.8: Envolvimiento de las diferencias de fase.

5. Calcular la fase desenvuelta empleando la ecuación 2.67.

$$\phi_u(j) = \sum_{jj=2}^j [\Delta \{\phi(jj)\} + \phi(jj - 1)].$$

2.4.1.2. Desarrollo en 2D

Tomando como referencia el método de itoh en 1D, el cual es un proceso de integración para la obtención de la fase, es posible extender este método en 2D, bajo ciertas condiciones, como lo es el que la magnitud de las diferencias de fase sea menor o igual a 2π .

Declarando al operador de envolvimento:

$$\Phi(i, j) = W \{\phi(i, j)\} = \phi(i, j) + 2\pi K, \quad (2.68)$$

donde $K \in \mathbb{Z}$, i va desde 1 hasta m (filas) y j va desde 1 hasta n (columnas).

Y al operador de diferencias:

$$\Delta \{\phi(i, j)\} = \{\phi(i, j) - \phi(i, j - 1), \phi(i, j) - \phi(i - 1, j)\}, \quad (2.69)$$

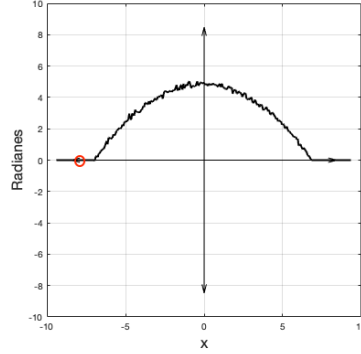


Figura 2.9: Fase desenvuelta calculada mediante el algoritmo de Itoh en 1D.

con la condición

$$-\pi < \Phi(i, j) \leq \pi. \quad (2.70)$$

Aplicando el operador de diferencias a la ecuación 2.68 resulta:

$$\Delta \{\Phi(i, j)\} = \{\Delta \{\Phi^x(i, j)\}, \Phi(i, j) - \Phi(i - 1, j)\}, \quad (2.71)$$

donde

$$\Delta \{\Phi^x(i, j)\} = \Phi(i, j) - \Phi(i, j - 1). \quad (2.72)$$

$$\Delta \{\Phi^y(i, j)\} = \Phi(i, j) - \Phi(i - 1, j). \quad (2.73)$$

Aplicando el operador de envolvimento a la ecuación 2.72, se obtiene:

$$W \{\Delta \{\Phi(i, j)\}\} = \{W \{\Delta \{\Phi^x(i, j)\}\}, W \{\Delta \{\Phi^y(i, j)\}\}\}, \quad (2.74)$$

con las condiciones:

$$-\pi < W \{\Delta \{\Phi(i, j)\}\} \leq \pi. \quad (2.75)$$

$$-\pi < W \{\Delta \{\Phi^x(i, j)\}\} \leq \pi. \quad (2.76)$$

$$-\pi < W \{\Delta \{\Phi^y(i, j)\}\} \leq \pi. \quad (2.77)$$

Conforme las ecuaciones 2.71 y 2.74 se tiene:

$$W \{\Delta \{\Phi^x(i, j)\}\} = W \{\Phi(i, j) - \Phi(i, j - 1)\} \quad (2.78)$$

$$= W \{\Phi(i, j)\} - W \{\Phi(i, j - 1)\} \quad (2.79)$$

$$= \phi(i, j) + 2\pi K_1 - \phi(i, j - 1) - 2\pi K_2 \quad (2.80)$$

$$= \phi(i, j) - \phi(i, j - 1) + 2\pi (K_1 - K_2), \quad (2.81)$$

bajo la condición de la ecuación 2.76:

$$2\pi (K_1 - K_2) = 0, \quad (2.82)$$

por lo tanto:

$$W \{\Delta \{\Phi^x(i, j)\}\} = \phi(i, j) - \phi(i, j - 1) \quad (2.83)$$

$$= \Delta \{\phi^x(i, j)\}. \quad (2.84)$$

Despejando la fase deseada de la ecuación 2.83

$$\phi(i, j) = W \{ \Delta \{ \Phi^x(i, j) \} \} + \phi(i, j - 1), \quad (2.85)$$

al asignar un valor al primer elemento de la fase deseada y tomarlo como un valor desenvuelto:

$$\begin{aligned} \phi(1, 1) &= \Delta \{ \phi^x(1, 1) \} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo que se obtiene la ecuación 2.86 para desenvolver la fase en dirección x la primera fila:

$$\begin{aligned} \phi(1, j) &= \sum_{jj=2}^j [W \{ \Delta \{ \Phi^x(1, jj) \} \} + \phi(1, jj - 1)] \\ &= \sum_{jj=2}^j [\Delta \{ \phi^x(1, jj) \} + \phi(1, jj - 1)]. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Por otra parte, para el desenvolvimiento en dirección y , se inicia aplicando el operador de envolvimiento a la ecuación 2.73:

$$\begin{aligned} W \{ \Delta \{ \Phi^y(i, j) \} \} &= W \{ \Phi(i, j) - \Phi(i - 1, j) \} \\ &= W \{ \Phi(i, j) \} - W \{ \Phi(i - 1, j) \} \\ &= \phi(i, j) + 2\pi K_3 - \phi(i - 1, j) - 2\pi K_4 \\ &= \phi(i, j) - \phi(i - 1, j) + 2\pi (K_3 - K_4). \end{aligned} \quad (2.87)$$

Aplicando la condición de la ecuación 2.77 queda:

$$2\pi (K_3 - K_4) = 0,$$

y ademas

$$\begin{aligned} W \{ \Delta \{ \Phi^y(i, j) \} \} &= \phi(i, j) - \phi(i - 1, j) \\ &= \Delta \{ \phi^y(i, j) \}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Despejando la fase deseada de la ecuación 2.88:

$$\phi(i, j) = W \{ \Delta \{ \Phi^y(i, j) \} \} + \phi(i - 1, j) \quad (2.89)$$

$$= \Delta \{ \phi^y(i, j) \} + \phi(i - 1, j), \quad (2.90)$$

por lo tanto, se puede tener la ecuación para desenvolver en dirección y :

$$\phi(i, j) = \sum_{ii=1}^i [\Delta \{ \phi^y(ii, j) \} + \phi(ii - 1, j)]. \quad (2.91)$$

Esto significa que se puede calcular la fase deseada a partir de las de las diferencias de fase en 2 direcciones ortogonales (x, y) y aproximandolas a derivadas parciales, con la condición que las diferencias de fase se encuentren dentro del intervalo $(-\pi, \pi]$. Conforme a lo explicado, para calcular la fase utilizando el algoritmo de Itoh en 2D se tienen los pasos siguientes:

1. Conociendo la fase envuelta en 2D conforme la ecuación 2.68.

$$\Phi(i, j) = W \{ \phi(i, j) \} = \phi(i, j) + 2\pi K.$$

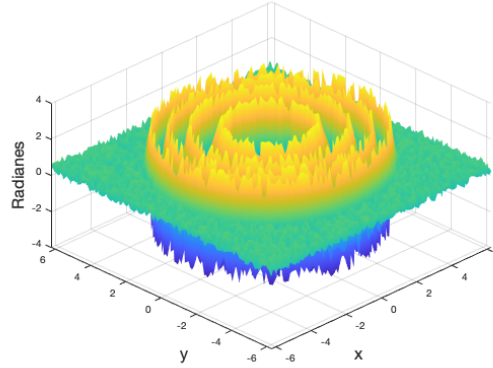


Figura 2.10: Fase envuelta en 2D $\Phi(i, j)$.

2. Aplicar el operador de diferencias en dirección x conforme la ecuación:

$$\Delta \{ \Phi^x(i, j) \} = \Phi(i, j) - \Phi(i, j - 1).$$

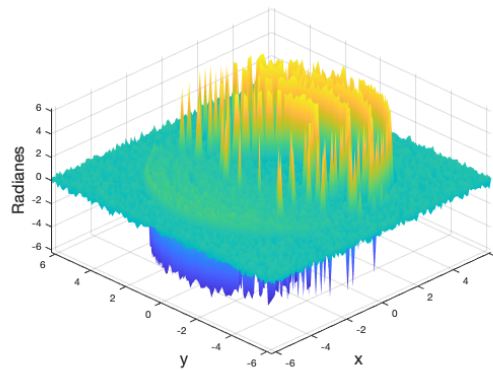


Figura 2.11: Diferencias de la fase envuelta en dirección “ x ”.

3. Aplicar el operador de diferencias en dirección y .

$$\Delta \{ \Phi^y(i, j) \} = \Phi(i, j) - \Phi(i - 1, j).$$

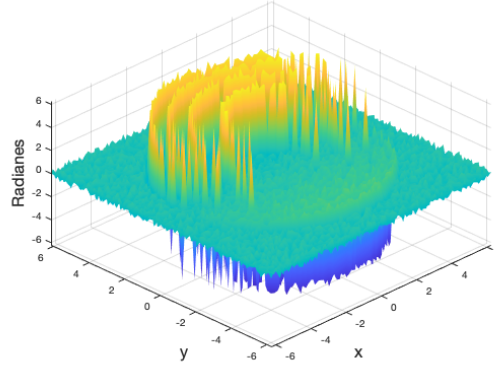


Figura 2.12: Diferencias de la fase envuelta en dirección “y”.

4. Aplicar el operador de envoltimiento a las diferencias de fase en dirección x .

$$W \{ \Delta \{ \Phi^x(i, j) \} \} = W \{ \Phi(i, j) - \Phi(i, j - 1) \}.$$

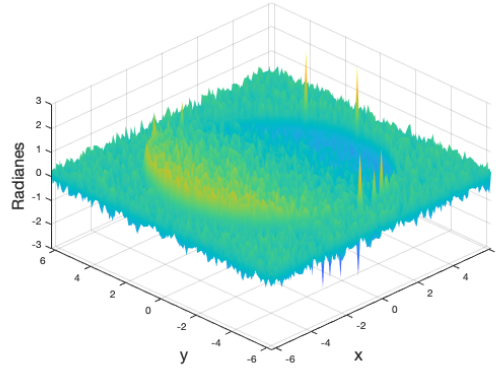


Figura 2.13: Envoltiendo a las diferencias de fase en dirección x

5. Aplicar el operador de envoltimiento a las diferencias de fase en dirección y .

$$W \{ \Delta \{ \Phi^y(i, j) \} \} = W \{ \Phi(i, j) - \Phi(i - 1, j) \}.$$

6. Desenvolver la fase en dirección x usando la ecuación 2.86 y en dirección y usar la ecuación 2.91.

$$\phi(1, j) = \sum_{jj=2}^j [\Delta \{ \phi^x(1, jj) \} + \phi(1, jj - 1)].$$

$$\phi(i, j) = \sum_{ii=1}^i [\Delta \{ \phi^y(ii, j) \} + \phi(ii - 1, j)].$$

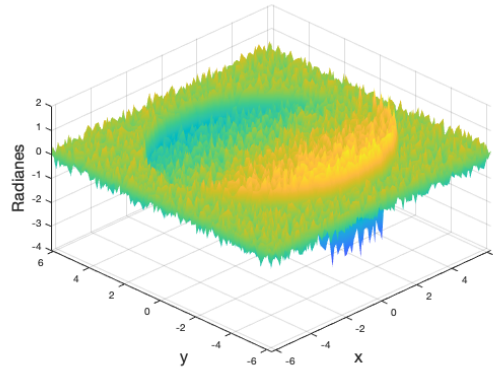


Figura 2.14: Envolviendo a las diferencias de fase en dirección y

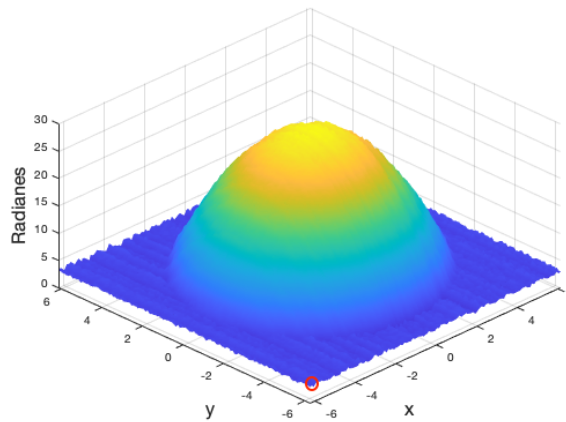


Figura 2.15: Fase desenvuelta en 2D $\phi(i, j)$.

2.4.2. Método de Itoh optimizado

Tomando como referencia el algoritmo de Itoh para el desarrollo de fase, se puede observar que al ser un algoritmo iterativo y que el valor $\phi(j)$ depende del valor $\phi(j-1)$, este acarrea valores de ruido, pero se puede disminuir esta contribución no deseada mediante la elección adecuada del punto de inicio del algoritmo, ya que al ser un algoritmo de integración de fase es posible realizar el desarrollo aplicando la propiedad de aditividad del intervalo en una integral definida:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx, \quad (2.92)$$

en donde $b \in [a, c]$.

Como se observa en la figura 2.16 el área bajo la curva de $f(x)$ es la misma si se calcula la integral con límites $[a, c]$ que si se efectúa con límites $[a, b]$ y después se suma la integral con límites $[b, c]$, es por esta razón que el algoritmo de Itoh se puede optimizar conservando

rapidez y simplicidad.

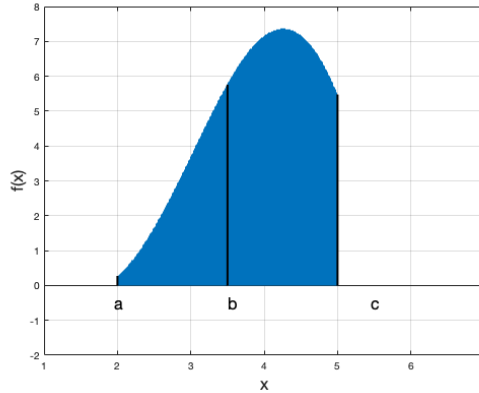


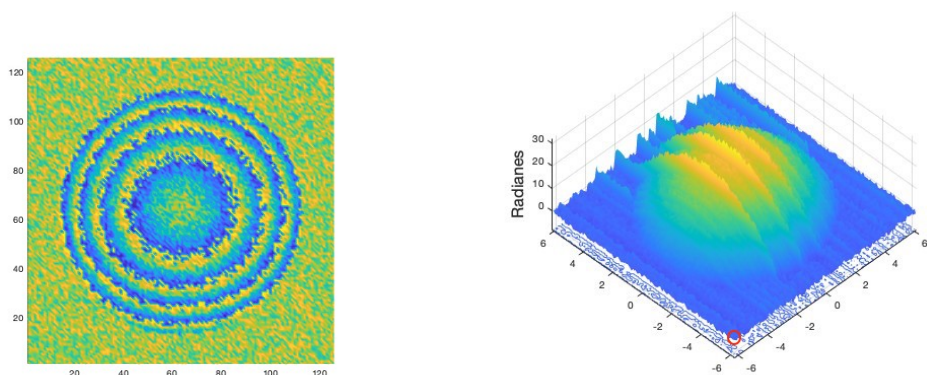
Figura 2.16: Área bajo la curva de la función $f(x)$ en un intervalo $[a, c]$.

Para este trabajo, se considera a la fase envuelta y desenvuelta como funciones en 2D, y se tienen derivadas en 2 direcciones ortogonales, como la integral de línea no depende de la trayectoria en el caso ideal, cuando se realiza el experimento existe la presencia de ruido, y al elegir el punto inicial para desenvolver la fase, esto ocasiona la disminución en el acarreo de ruido dentro de la información deseada. Tomando una fase envuelta en 2D con ruido moderado, como se muestra en la figura 2.17(a), la cual tiene un tamaño de 126×126 píxeles, se procede a desenvolver mediante el algoritmo de Itoh y el resultado se observa en la figura 2.17(b), mostrando acarreo de ruido en la zona de interés, mientras que en la figura 2.17(c) el acarreo de ruido se desplazó hacia el exterior de la información de la fase gracias a la elección del punto inicial de desenvolvimiento donde hay información de fase. La ventaja de usar el método de Itoh optimizado es que se conserva la velocidad de cálculo y aumenta la tolerancia ante ruido moderado.

2.5. Perfilometría por corrimiento de fase

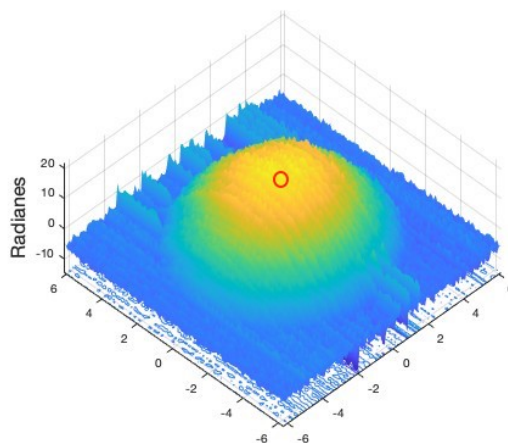
La “perfilometría por corrimiento de fase” conocida como PSP por sus siglas en inglés de “phase shifting profilometry”, es una técnica en la metrología óptica sin contacto de alta velocidad, precisión y resolución elevadas. Esta metodología permite realizar mediciones punto por punto con una menor susceptibilidad a las variaciones en la reflectividad de la superficie. Asimismo, facilita la medición de objetos altamente complejos con notables variaciones de textura, mostrando una reducida sensibilidad a la luz ambiental [15, 21, 25]. El corrimiento de fase puede ser ingresado mediante el método PSI [27], siendo el de cuatro pasos a utilizar en este trabajo [16]. Al proyectar un patrón de franjas conforme la ecuación 2.10 sobre un plano de referencia y un objeto de prueba se puede obtener la información de la topografía o perfilometría 3-D de un objeto, ya que es posible asociar las deformaciones que sufre el patrón de franjas debido al objeto con la fase.

El proceso consiste en proyectar los patrones de franjas sobre un plano de referencia como



(a) Fase envuelta $\Phi(x, y)$

(b) Fase desenvuelta calculada mediante el algoritmo de Itoh $\phi_{Itoh}(x, y)$, punto inicial (1,1).



(c) Fase desenvuelta calculada mediante el algoritmo de Itoh optimizado $\phi_u(x, y)$, punto inicial (63,63).

Figura 2.17: Comparación de algoritmos para desenvolvimiento de fase.

se observa en las figuras 2.18(a), 2.18(b), 2.18(c), 2.18(d) que corresponden a las ecuaciones:

$$I_{r0}(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [\beta(x, y)]. \quad (2.93)$$

$$I_{r1}(x, y) = a(x, y) - b(x, y) \sin [\beta(x, y)]. \quad (2.94)$$

$$I_{r2}(x, y) = a(x, y) - b(x, y) \cos [\beta(x, y)]. \quad (2.95)$$

$$I_{r3}(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \sin [\beta(x, y)], \quad (2.96)$$

donde $\beta(x, y)$ representa a la fase portadora de los patrones de franjas. Posteriormente, se agrega el objeto sobre el plano de referencia y se proyectan los mismos 4 patrones de franjas, pero estos tendrán la información de la topografía en la fase deseada $\phi(x, y)$, agregando

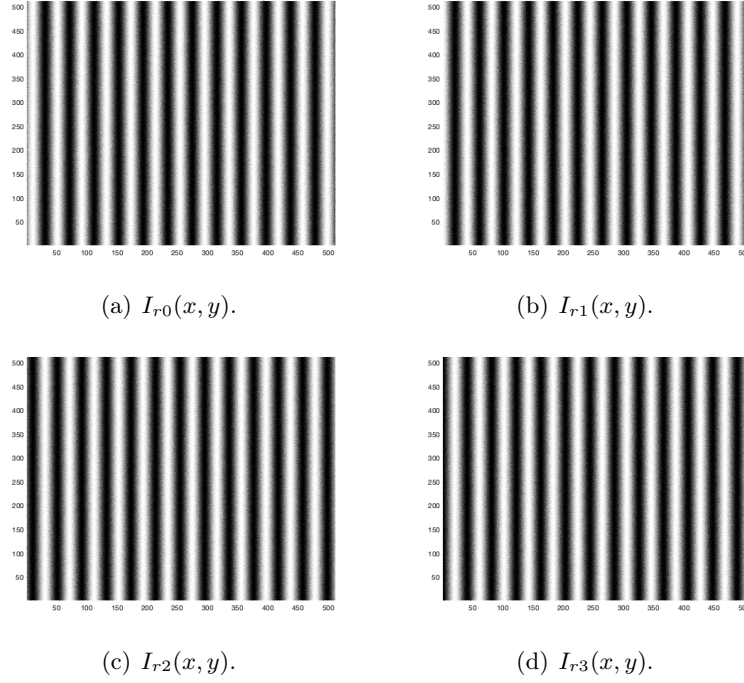


Figura 2.18: Patrones de franjas en plano de referencia.

esta fase a la ecuación 2.10 se obtiene la expresión para los patrones de franjas proyectados sobre un plano de referencia y el objeto:

$$I_{p0}(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [\phi(x, y) + \beta(x, y)]. \quad (2.97)$$

$$I_{p1}(x, y) = a(x, y) - b(x, y) \sin [\phi(x, y) + \beta(x, y)]. \quad (2.98)$$

$$I_{p2}(x, y) = a(x, y) - b(x, y) \cos [\phi(x, y) + \beta(x, y)]. \quad (2.99)$$

$$I_{p3}(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \sin [\phi(x, y) + \beta(x, y)]. \quad (2.100)$$

Definiendo las operaciones:

$$I_{r02}(x, y) = 2b(x, y) \cos [\beta(x, y)]. \quad (2.101)$$

$$I_{r31}(x, y) = 2b(x, y) \sin [\beta(x, y)]. \quad (2.102)$$

$$I_{p02}(x, y) = 2b(x, y) \cos [\phi(x, y) + \beta(x, y)]. \quad (2.103)$$

$$I_{p31}(x, y) = 2b(x, y) \sin [\phi(x, y) + \beta(x, y)]. \quad (2.104)$$

$$I_{p02}(x, y) * I_{r02}(x, y) + I_{p31}(x, y) * I_{r31}(x, y) = 4b^2(x, y) \cos \phi(x, y). \quad (2.105)$$

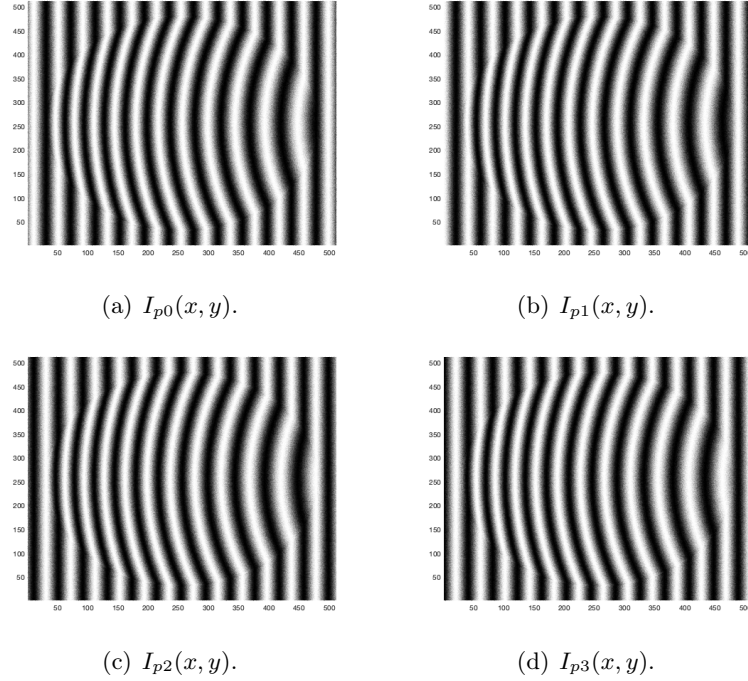


Figura 2.19: Patrones de franjas con objeto.

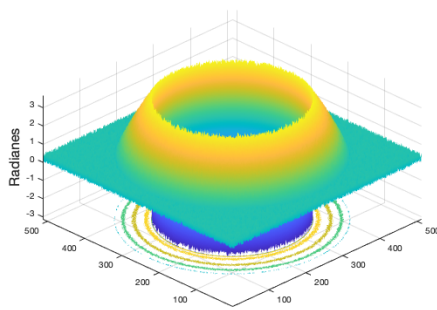
De forma similar

$$I_{p31}(x, y) * I_{r02}(x, y) - I_{r31}(x, y) * I_{p02}(x, y) = 4b^2(x, y) \sin \phi(x, y). \quad (2.106)$$

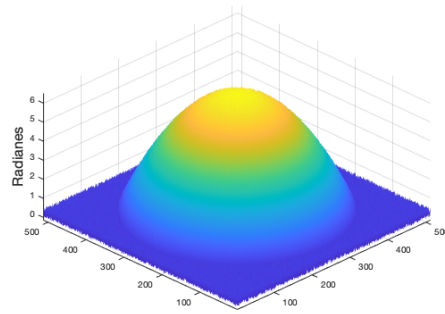
Tomando las ecuaciones 2.105, 2.106 es posible calcular la fase envuelta (ver figura 2.20(a))

$$\Phi(x, y) = \tan^{-1} \left[\frac{I_{p31}(x, y) * I_{r02}(x, y) - I_{r31}(x, y) * I_{p02}(x, y)}{I_{p02}(x, y) * I_{r02}(x, y) + I_{p31}(x, y) * I_{r31}(x, y)} \right]. \quad (2.107)$$

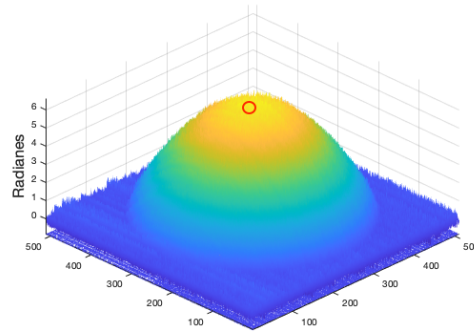
Aplicando al método de Itoh para desenvolver la fase envuelta de la ecuación 2.107 se obtiene la fase desenvuelta, la cual como se menciono anteriormente se realaciona con la topografía del objeto. En la figura 2.20(c) se observa el objeto virtual y el objeto calculado mediante el método PSP:



(a) Fase envuelta $\Phi(x, y)$.



(b) Objeto virtual.



(c) Fase virtual recuperada por el método PSP.

Figura 2.20: Comparación entre objeto virtual y objeto recuperado mediante el método PSP.

Capítulo 3

Perfilometría de desplazamiento lateral

En este trabajo se propone un método alternativo al de Perfilometría por corrimiento de fase de luz estructurada, donde el patrón de franjas es generado digitalmente, éste método consiste en obtener la perfilometría o topografía 3-D del objeto de manera directa, aplicando un corrimiento conocido de fase para obtener los patrones de franjas necesarios.

En el presente trabajo se propone prescindir del marco de referencia y obtener el gradiente de la superficie del objeto, realizando desplazamientos pequeños en dos direcciones ortogonales (x y y) como se realiza en el campo de la interferometría [23]. Además, el trabajo propuesto proporciona ventajas adicionales tales como el acarreo de ruido proveniente del marco de referencia así como también dado que los desplazamientos son muy pequeños permite aplicar directamente una integral de línea para obtener la forma de su topografía contenida en la fase de los patrones de franjas.

La fase deseada $\phi(x, y)$ se obtiene proyectando los patrones de franjas mediante el método PSI de 4 pasos en el objeto y posteriormente midiendo las intensidades, dichos patrones son descritos mediante la ecuación 3.1.

$$I_n(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [\phi(x, y) + \beta(x, y) + \alpha_n], \quad (3.1)$$

donde $\phi(x, y)$ es la fase deseada, $\beta(x, y)$ es la fase portadora y α_n es el corrimiento de fase conocido. Al desplazar el objeto en el eje x una distancia Δx se obtiene la expresión general para los patrones proyectados y capturados en esta nueva posición:

$$I_{xn}(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [\phi(x + \Delta x, y) + \beta(x, y) + \alpha_n], \quad (3.2)$$

Como solo el objeto se ha desplazado, solamente la fase $\phi(x, y)$ presenta el incremento en esta dirección. De manera similar, al desplazar el objeto en dirección y se tiene

$$I_{yn}(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [\phi(x, y + \Delta y) + \beta(x, y) + \alpha_n], \quad (3.3)$$

Por lo tanto, en la posición inicial se tendrán las expresiones para los patrones de franjas proyectados sobre el objeto

$$I_0(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [\phi(x, y) + \beta(x, y)]. \quad (3.4)$$

$$I_1(x, y) = a(x, y) - b(x, y) \sin [\phi(x, y) + \beta(x, y)]. \quad (3.5)$$

$$I_2(x, y) = a(x, y) - b(x, y) \cos [\phi(x, y) + \beta(x, y)]. \quad (3.6)$$

$$I_3(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \sin [\phi(x, y) + \beta(x, y)]. \quad (3.7)$$

En la posición con el desplazamiento Δx se tienen

$$I_{x0}(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [\phi(x + \Delta x, y) + \beta(x, y)]. \quad (3.8)$$

$$I_{x1}(x, y) = a(x, y) - b(x, y) \sin [\phi(x + \Delta x, y) + \beta(x, y)]. \quad (3.9)$$

$$I_{x2}(x, y) = a(x, y) - b(x, y) \cos [\phi(x + \Delta x, y) + \beta(x, y)]. \quad (3.10)$$

$$I_{x3}(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \sin [\phi(x + \Delta x, y) + \beta(x, y)]. \quad (3.11)$$

Y en la posición con el desplazamiento Δy

$$I_{y0}(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [\phi(x, y + \Delta y) + \beta(x, y)]. \quad (3.12)$$

$$I_{y1}(x, y) = a(x, y) - b(x, y) \sin [\phi(x, y + \Delta y) + \beta(x, y)]. \quad (3.13)$$

$$I_{y2}(x, y) = a(x, y) - b(x, y) \cos [\phi(x, y + \Delta y) + \beta(x, y)]. \quad (3.14)$$

$$I_{y3}(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \sin [\phi(x, y + \Delta y) + \beta(x, y)]. \quad (3.15)$$

Operando estas ecuaciones de forma similar a lo presentados en la sección 2.5 se obtienen las expresiones:

$$I_{02}(x, y) = I_0(x, y) - I_2(x, y) = 2b(x, y) \cos [\phi(x, y) + \beta(x, y)]. \quad (3.16)$$

$$I_{31}(x, y) = I_3(x, y) - I_1(x, y) = 2b(x, y) \sin [\phi(x, y) + \beta(x, y)]. \quad (3.17)$$

$$I_{x02}(x, y) = I_{x0}(x, y) - I_{x2}(x, y) = 2b(x, y) \cos [\phi(x + \Delta x, y) + \beta(x, y)]. \quad (3.18)$$

$$I_{x31}(x, y) = I_{x3}(x, y) - I_{x1}(x, y) = 2b(x, y) \sin [\phi(x + \Delta x, y) + \beta(x, y)]. \quad (3.19)$$

$$I_{y02}(x, y) = I_{y0}(x, y) - I_{y2}(x, y) = 2b(x, y) \cos [\phi(x, y + \Delta y) + \beta(x, y)]. \quad (3.20)$$

$$I_{y31}(x, y) = I_{y3}(x, y) - I_{y1}(x, y) = 2b(x, y) \sin [\phi(x, y + \Delta y) + \beta(x, y)]. \quad (3.21)$$

Siguiendo con el proceso, se obtiene:

$$\begin{aligned} [I_{x02}(x, y) * I_{02}(x, y)] + [I_{x31}(x, y) * I_{31}(x, y)] \\ = 4b^2(x, y) \cos [\Delta\phi_x(x, y)]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} [I_{x31}(x, y) * I_{02}(x, y)] - [I_{31}(x, y) * I_{x02}(x, y)] \\ = 4b^2(x, y) \sin [\Delta\phi_x(x, y)]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

De forma semejante,

$$\begin{aligned} [I_{y02}(x, y) * I_{02}(x, y)] + [I_{y31}(x, y) * I_{31}(x, y)] \\ = 4b^2(x, y) \cos [\Delta\phi_y(x, y)], \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} [I_{y31}(x, y) * I_{02}(x, y)] - [I_{31}(x, y) * I_{y02}(x, y)] \\ = 4b^2(x, y) \sin [\Delta\phi_y(x, y)], \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde $\Delta\phi_x(x, y) = \phi(x + \Delta x) - \phi(x, y)$ y $\Delta\phi_y(x, y) = \phi(x, y + \Delta y) - \phi(x, y)$. Calculando las diferencias de fase correspondientes

$$\Delta\Phi_x(x, y) = \tan^{-1} \left\{ \frac{[I_{x31}(x, y) * I_{02}(x, y)] - [I_{31}(x, y) * I_{x02}(x, y)]}{[I_{x02}(x, y) * I_{02}(x, y)] + [I_{x31}(x, y) * I_{31}(x, y)]} \right\}, \quad (3.26)$$

$$\Delta\Phi_y(x, y) = \tan^{-1} \left\{ \frac{[I_{y31}(x, y) * I_{02}(x, y)] - [I_{31}(x, y) * I_{y02}(x, y)]}{[I_{y02}(x, y) * I_{02}(x, y)] + [I_{y31}(x, y) * I_{31}(x, y)]} \right\}. \quad (3.27)$$

Como los desplazamientos Δx y Δy son muy pequeños, las diferencias de fase se encuentran dentro del intervalo $[-\pi, \pi]$, lo que significa que no se están envueltas y por tanto se tiene que:

$$\Delta\Phi_x(x, y) = \Delta\phi_x(x, y) \quad (3.28)$$

$$\Delta\Phi_y(x, y) = \Delta\phi_y(x, y) \quad (3.29)$$

de esta manera solo es necesario aplicar la integral de línea para obtener la fase y así recuperar la topografía del objeto.

Tomando como referencia las series de Taylor y la aproximación de la derivada se puede obtener:

$$\frac{\Delta\phi_x(x, y)}{\Delta x} \simeq \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y), \quad (3.30)$$

$$\frac{\Delta\phi_y(x, y)}{\Delta y} \simeq \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y). \quad (3.31)$$

Representando al gradiente de la fase como:

$$\nabla\phi(x, y), \quad (3.32)$$

la integral de trayectoria aplicada al gradiente de la fase es:

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \nabla\phi(x, y) \cdot d\vec{r} = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y) dx + \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y) dy \right] \quad (3.33)$$

$$= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} d\phi(x, y) \quad (3.34)$$

$$= \phi(x, y) - \phi(x_0, y_0), \quad (3.35)$$

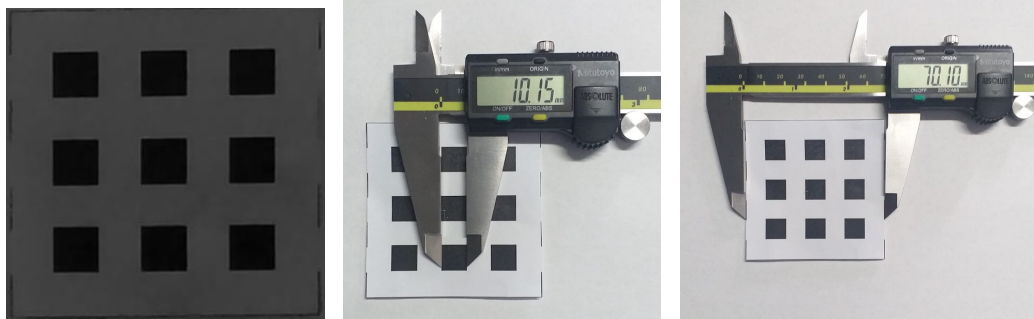
donde $\phi(x, y)$ es la fase deseada, y $\phi(x_0, y_0)$ corresponde al valor de un punto inicial. Al realizar esto, se obtiene la topografía 3-D del objeto.

| Conversión pixeles largo y ancho. | | |
|-----------------------------------|-------------------|-------------|
| Medida deseada (mm.) | Medida real (mm.) | No. pixeles |
| 10.00 | 10.15 | 47 |
| 70.00 | 70.10 | 328 |

Tabla 3.1: Conversión de unidades

3.0.1. Conversión de pixeles a unidades métricas

Dado que el método PDL realiza todos los calculos con pixeles y como resultado se requiere la topografía del objeto en unidades métricas reales (metros, centímetros, milímetros, etc) es necesario el realizar métodos de conversión de unidades. Iniciando con la calibración del sistema, se elaboró una impresión de una cuadrícula 3×3 de cuadrados de 1 centímetro por lado.



(a) Figura de calibración para conversión de unidades. (b) Medida real cuadrados de calibración. (c) Medida real figura de calibración.

Figura 3.1: Imágenes del proceso de calibración de unidades.

Ya impresa la figura de calibración se confirmó la medida real de los cuadrados con un valor de 10.25 milímetros. Calculando el número de pixeles dentro de cada cuadrado, se procede a determinar la medida de cada pixel para obtener un factor de conversión de pixeles a milímetros para el largo y ancho de las imagenes conforme a la tabla 3.1.

Por lo tanto, se tiene el factor de conversión de pixeles a mm.:

$$1 \text{ pixel} = 0.2256 \text{ mm.} \quad (3.36)$$

3.0.2. Conversión de unidades de fase a unidades métricas

En la figura 3.2 se observa el esquema de la realación geométrica entre los rayos proyectados y los rayos observados por la cámara.

En la figura 3.2 se observa el esquema para determinar la realción entre la fase y la altura del objeto, en donde se proyectan los patrones de franjas en el plano de apoyo ($z = 0$). Dichos patrones sufren deformaciones a causa del objeto de estudio, como se observa en el

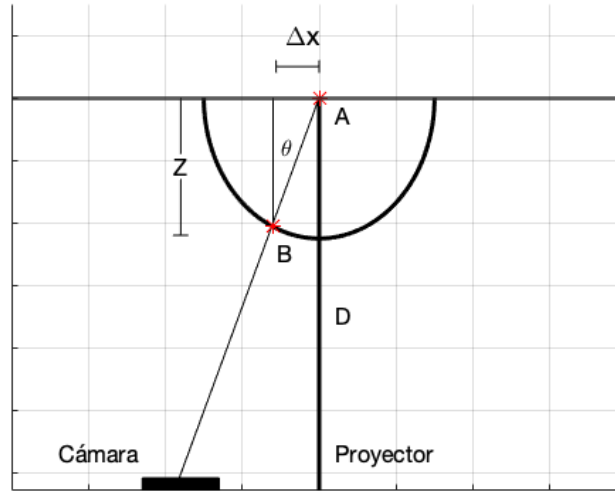


Figura 3.2: Relación entre fase y altura del objeto.

desplazamiento del punto “A” al punto “B” con la relación:

$$\tan \theta = \frac{\Delta x}{Z}, \quad (3.37)$$

donde “Z” es la altura del objeto en ese punto, “ θ ” es el ángulo entre la proyección y la dirección de observación, “ Δx ” es el desplazamiento que sufre el patrón de franjas a causa del objeto y “P” es el periodo. Al asociar las deformaciones que sufre el patrón de franjas a la fase de la ecuación 2.10 (argumento de la función coseno) se determina que existe una relación para calcular la distancia entre el plano de apoyo y el objeto (relación de altura). Dicha fase se puede calcular mediante la ecuación 2.40

$$\phi(x, y) = \frac{2\pi}{P} \Delta x \quad (3.38)$$

despejando “ Δx ” en las ecuaciones 3.37, 3.38 e igualando se obtiene:

$$Z \tan \theta = \frac{P}{2\pi} \phi(x, y),$$

despejando la altura deseada se obtiene la ecuación para calcular la altura del objeto en cada punto de la fase “ $\phi(x, y)$ ”

$$Z(x, y) = \frac{P}{2\pi \tan \theta} \phi(x, y). \quad (3.39)$$

Esto se cumple ya que el ángulo “ θ ” se considera el mismo para cada rayo proyectado (rayos paralelos). El periodo “P” se obtiene derivando la ecuación 2.40 respecto a “x” y aplicando el operador de envolvimiento de Itoh.

Capítulo 4

Resultados numéricos y experimentales

4.1. Resultados numéricos

Presentando la fase inicial con la forma:

$$\phi(x, y) = -(x^2 + y^2). \quad (4.1)$$

Junto con los patrones de franjas y el método PSI de 4 pasos se tienen: En las figu-

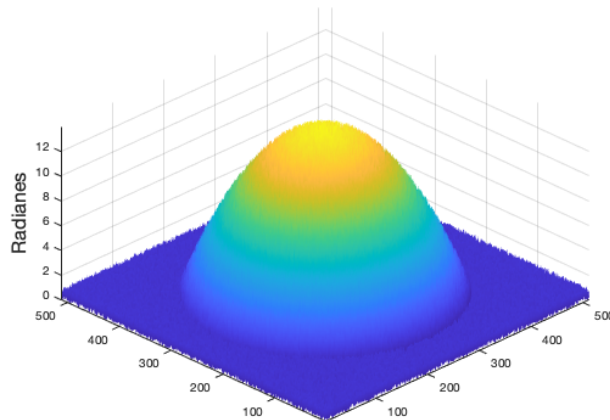


Figura 4.1: Fase inicial $\phi(x, y)$.

ras 4.2(a), 4.2(b), 4.2(c) y 4.2(d) se observan las imágenes correspondientes a las ecuaciones 3.4, 3.5, 3.6 y 3.7. Ahora, desplazando la fase en la dirección x se tienen los patrones de franjas correspondientes a las ecuaciones 3.8, 3.9, 3.10 y 3.11 como se observa en las figuras 4.3(a), 4.3(b), 4.3(c) y 4.3(d). De igual manera, se tiene la fase desplazada en dirección y con sus respectivos patrones de franjas.

Como se mostró en el capítulo 3, mediante los patrones capturados en cada posición se

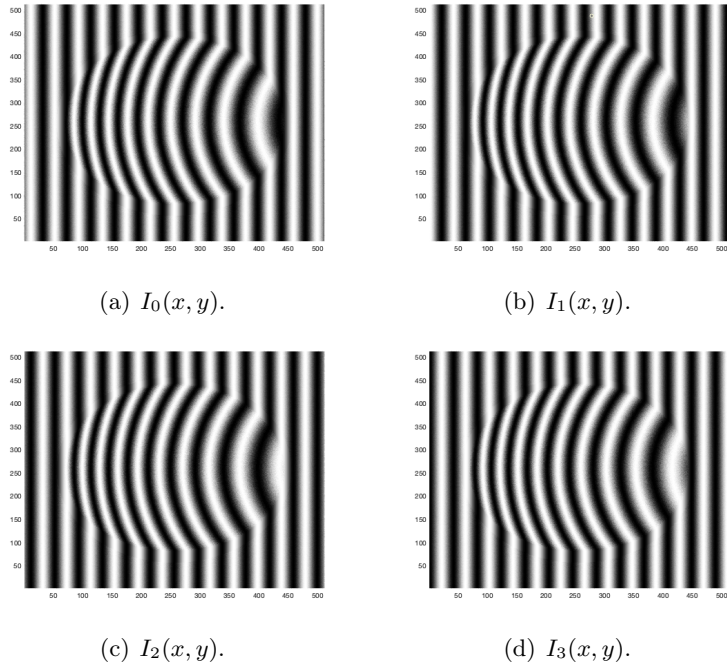


Figura 4.2: Patrones de franjas con objeto.

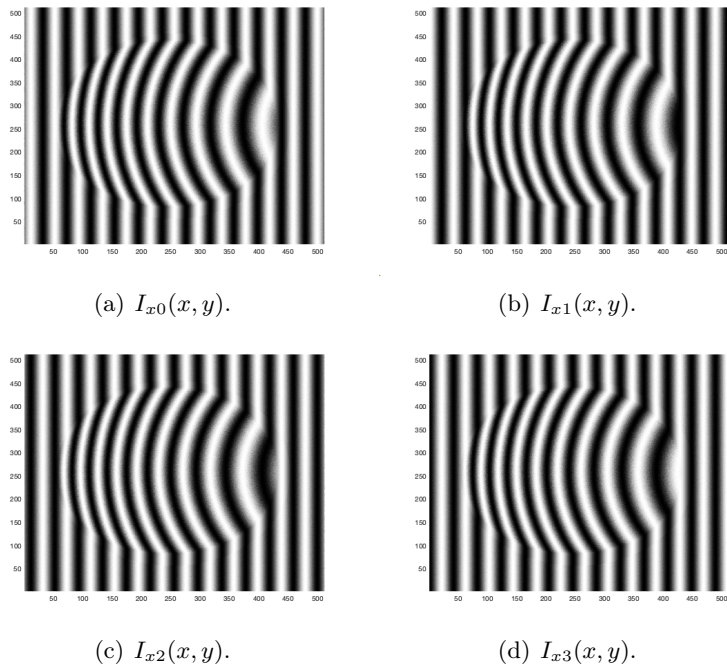


Figura 4.3: Patrones de franjas con objeto desplazado en dirección x

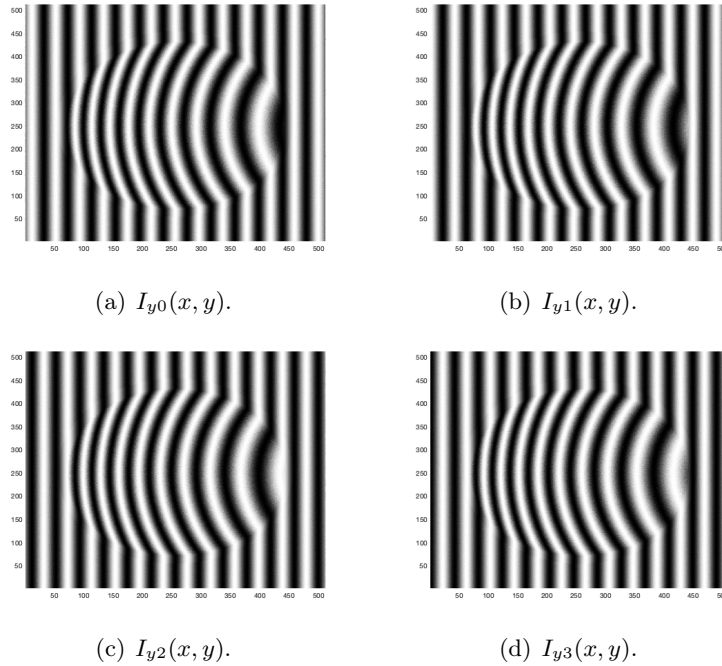


Figura 4.4: Patrones de franjas con objeto desplazado en dirección y .

obtienen las ecuaciones 3.22, 3.23, 3.24 y 3.25, con las cuales se puede calcular las fases de las figuras 4.5(a) y 4.5(b). Por ultimo para obtener la fase desenvuelta consiste solamente en aplicar la integral de línea mediante las ecuaciones 2.86 y en dirección y usar la ecuación 2.91 como se muestra en la figura 4.5(c).

Para otro objeto virtual aplicando el método propuesto (PDL), se obtienen las diferencias de fase (4.6(a), 4.6(b)) y por ultimo la fase (4.6(c)).

Resultados numéricos y experimentales
4.1 Resultados numéricos

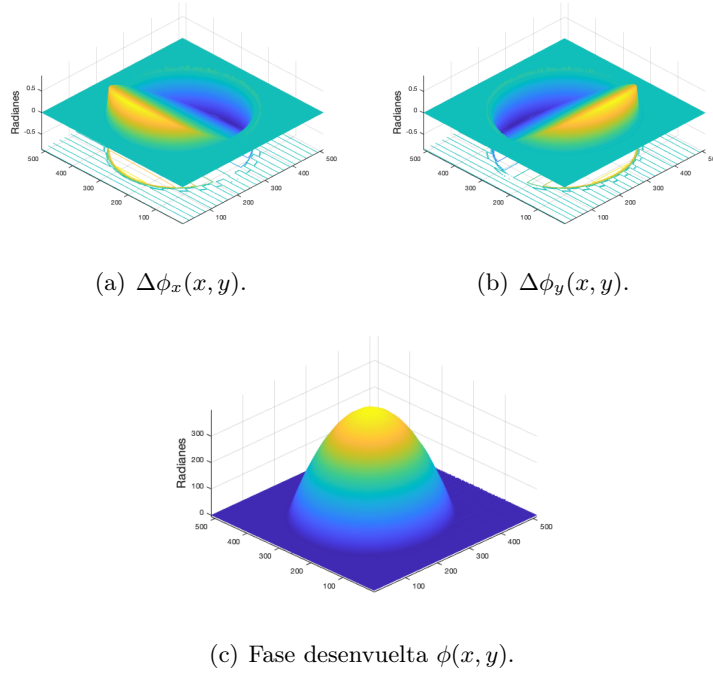


Figura 4.5: Recuperación de fase mediante el método PDL de una media esfera.

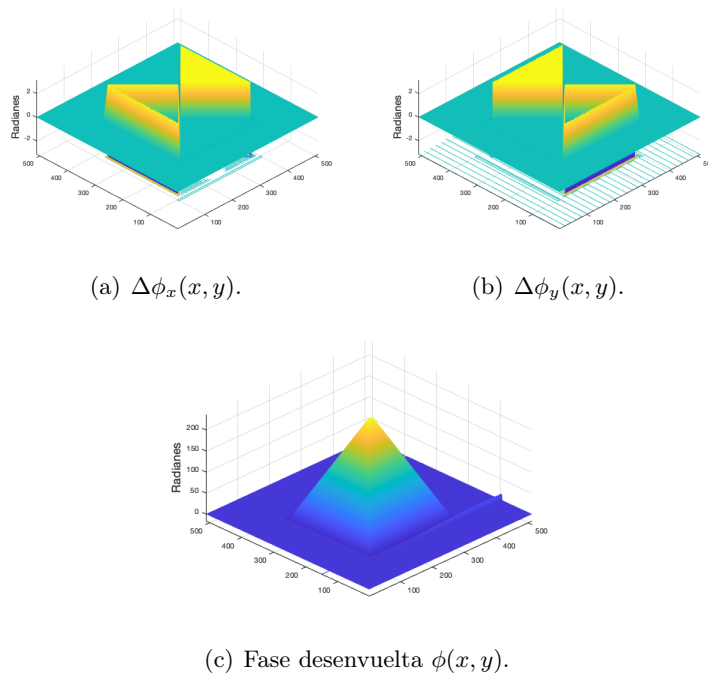


Figura 4.6: Recuperación de fase mediante el método PDL de una piramide.

4.2. Resultados experimentales

En este capítulo se explica el desarrollo experimental para la recuperación de la topografía de un objeto opaco mediante el método PDL. El esquema del sistema se muestra en la figura 4.7.

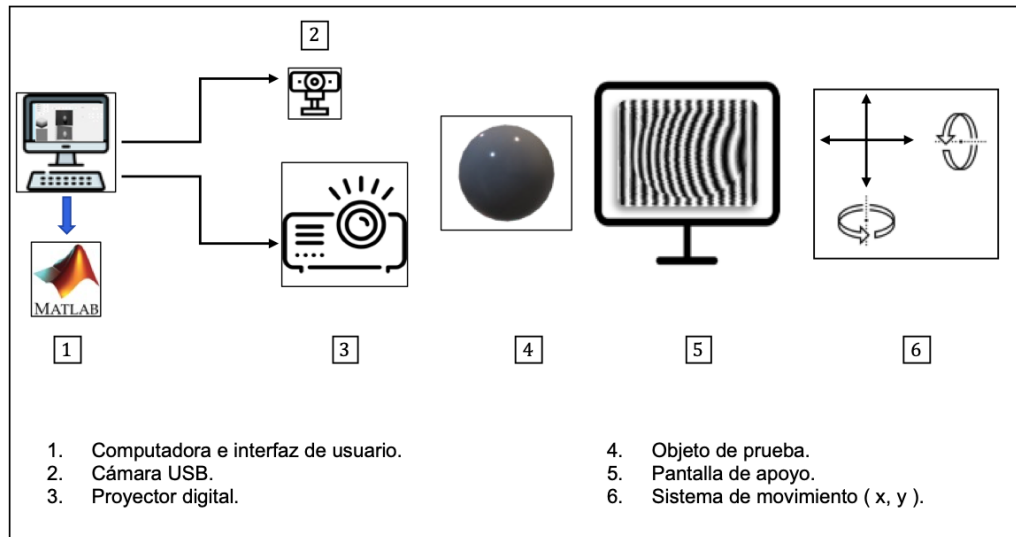


Figura 4.7: Esquema para PDL.

El arreglo experimental cuenta con los siguientes elementos:

- **Proyector digital.** Marca: Optoma, Modelo: UHD38, Resolución: 3840×2160 píxeles.



Figura 4.8: Proyector digital Optoma UHD38.

- **Cámara Web.** Marca: Logitech, modelo: Brio, resolución: 4K/30 fps (hasta 4096×2160 píxeles), 1080p/30 o 60 fps (hasta 1920 o 1080 píxeles), 720p/30, 60 o 90 fps (hasta 1280×720 píxeles), cámara mega pixel: 13.



Figura 4.9: Camara web Logitech BRIO.

- **Sistema de movimiento (x,y).** Cuenta con dos deslizadores de movimiento lineal con motores a pasos de 4 hilos, y 88 milímetros de desplazamiento lineal, voltaje de funcionamiento de (4 – 9) V en corriente directa (CD), corriente de alimentación de (100 – 500) mA y 18° por paso. Estos motores a pasos cuentan drivers de potencia “A4988”, los cuales operan con un voltaje de entrada (8 – 35) V y pueden suministrar hasta 2 A por fase, así como también salidas reguladas entre (3.3 – 5) V.
- **Computadora de escritorio.** Marca: Apple, modelo: iMac (2012), procesador: 3.4 GHz Quad-Core Intel Core i7, 16 GB de RAM a 1600 MHz DDR3, graficos NVIDIA GeForce GTX 680MX de 2 GB y sistema operativo macOS Catalina.



Figura 4.10: Computadora de escritorio iMac (2012).

- **Sistema de control y comunicación.** Este sistema está conformado por un microcontrolador “Raspberry Pi Pico W” el cual es el responsable de la lógica de comunicación y movimiento, éste a su vez tiene un chip “RP2040” dual-core Arm Cortex-M0+, un procesador con 264 kB RAM, cuenta con salidas y entradas digitales que operan a 3.3 V en CD, así como el soporte para comunicación serial con la computadora y la interfaz de usuario.
- **Interfaz de usuario.** Esta fue elaborada en el software “Matlab” versión 2023, en la cual se realiza la elaboración de los patrones de franjas, la comunicación con la cámara web y el proyector digital, la captura de las imágenes, la comunicación con el sistema de movimiento, el control de movimiento de los ejes “x,y” y la recuperación de la topografía del objeto deseado.

Como prueba experimental inicial se aplicó el método PDL en una pantalla plana, con las imágenes de los patrones de franjas en las 3 posiciones correspondientes, obteniendo como resultado su topografía la cual es posible observar en detalle las deformaciones propias de la pantalla en la figura 4.12.

De igual forma se realizó con una media esfera de unicel, mostrando los resultados en las figuras.

Agregando otro ejemplo con un objeto de mayor gradiente que la media esfera de unicel, se obtuvo la topografía de una pirámide triangular, mostrando los resultados en la figura. Por último, para mostrar la eficiencia del algoritmo de integración de fase de Itoh optimizado, se tiene la topografía de 2 objetos discontinuos (pirámides triangulares de papel) separados.

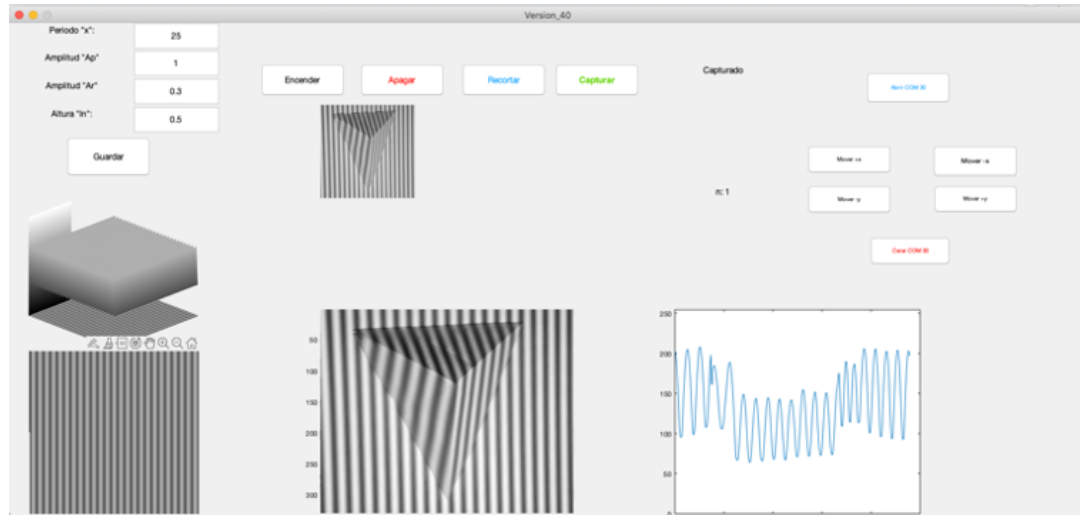
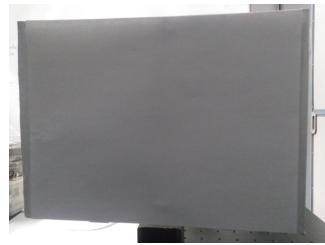
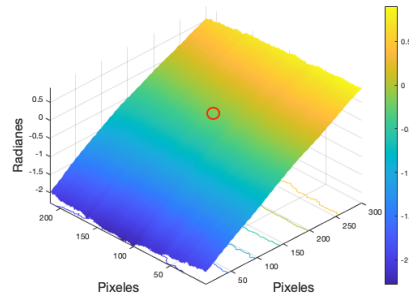


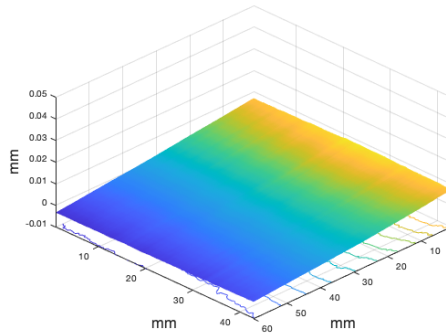
Figura 4.11: Interfaz de control desarrollado en Matlab.



(a) Fotografía de la pantalla plana.



(b) Fase de una pantalla plana.



(c) Topografía de una pantalla plana.

Figura 4.12: Pantalla plana (fotografía, fase y topografía calculada mediante el método PLD).

Resultados numéricos y experimentales
4.2 Resultados experimentales

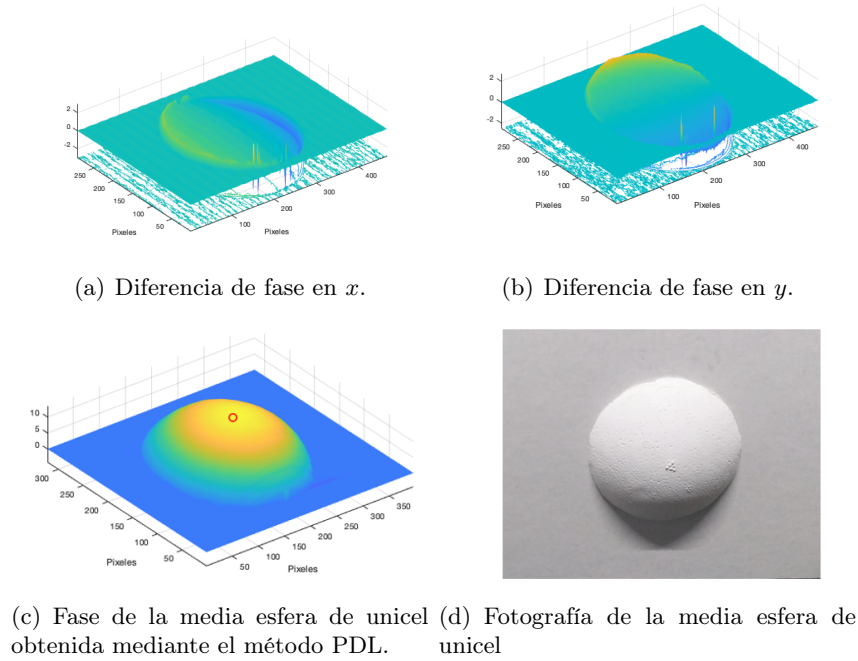


Figura 4.13: Implementación del método PDL en una media esfera de unicel.

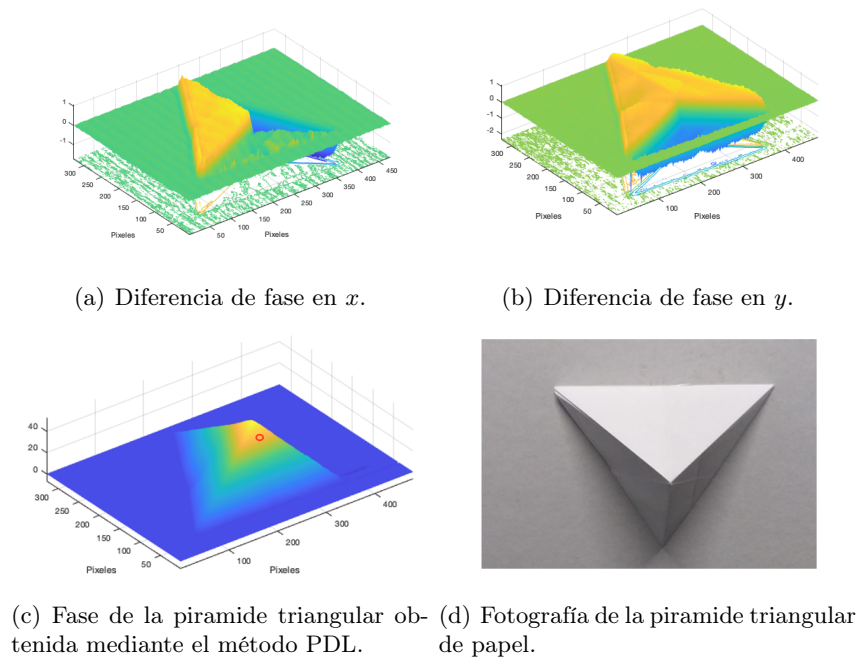
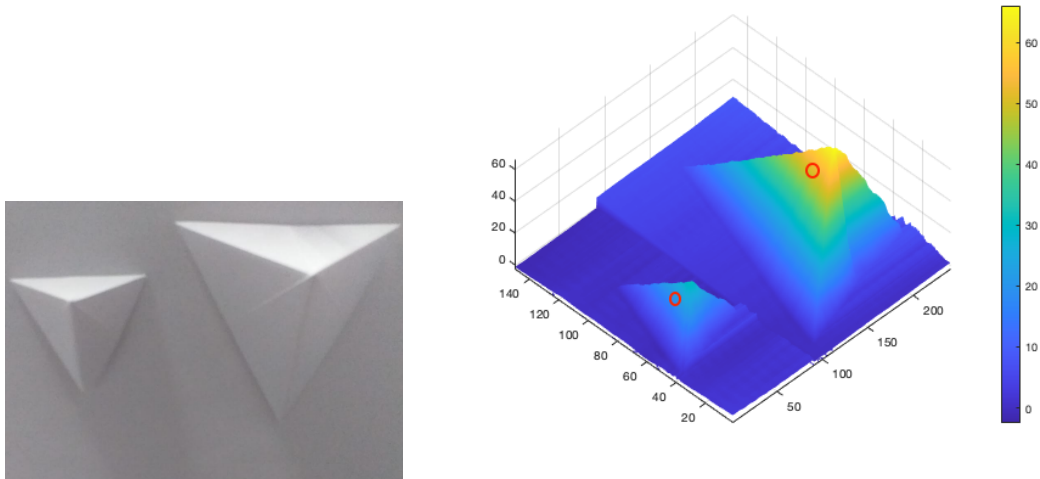


Figura 4.14: Implementación del método PDL en una piramide triangular de papel.



(a) Fotografía de 2 piramides de papel. (b) Topografía de 2 piramides de papel calculada mediante el método PDL.

Figura 4.15: Topografía de 2 piramides de papel de 3 y 6 centímetros aproximadamente.

Capítulo 5

Conclusiones

Se introdujo un nuevo y novedoso método de contorno 3D de objetos opacos mediante la proyección de luz estructurada nombrado "Perfilometría de desplazamiento lateral", el cual consiste en obtener experimentalmente el gradiente desplazando en 2 direcciones ortogonales, y posteriormente aplicar la integración numérica de trayectoria. Esto se realiza sin la necesidad de ocupar un plano de referencia así como tampoco requiere retirar el objeto como sucede en la perfilometría clásica. Para los resultados numéricos se realizaron programas en el entorno y lenguaje de programación Matlab, para la elaboración de la interfaz la cual muestra los patrones de franjas, el control de la cámara, y la comunicación con el sistema de movimiento, así como también los algoritmos para la integración de fase. El proceso realizado consistió en proyectar los patrones de franjas sobre el objeto, posteriormente la captura en las 3 posiciones designadas y por ultimo la obtención de la topografía del objeto mediante la integración del gradiente de la fase. Los experimentos se realizaron en objetos de diferente gradiente obteniendo resultados satisfactorios, teniendo en cuenta que las sombras en el objeto y la luz externa son factores que afectan al resultado negativamente. Se concluye que el método de perfilometría de desplazamiento lateral es un método alternativo para la recuperación de la topografía de objetos opacos.

5.0.1. Trabajos a futuro

Conforme los resultados y observaciones en las características del sistema, se tienen como trabajos a futuro las siguientes actividades:

- Determinar las dimensiones limites que puede procesar el sistema.
- Determinar y cuantificar la resolución mínima.
- Mejorar el algoritmo de integración de fase.
- Mejorar el sistema de movimiento para implementar una mejor aproximación de la derivada en diferencias centrales sin aumentar el tiempo de captura.
- Implementar un sistema de calibración para la conversión de fase a altura sin estar en el regimen paraxial.

Bibliografía

- [1] D. Malacara, *Optical Shop Testing*, Wiley, New York, 1992.
- [2] K. Creath, "Phase-measurement interferometry techniques, in *Progress in Optics XX-VI*, E. Wolf (Ed.), ELSEVIER Science Publishers, 1998, pp. 349-393.
- [3] J. H. Bruning, D.R. Herriott, J. E. Gallagher, D. P. Rosenfeld, A. D. White, and D. J. Brangaccio, "Digital Wavefront Measurement Interferometer for Testing Optical Surfaces and Lenses," *Appl. Opt.*, vol. 13, no. 11, pp. 2693-2703, 1974.
- [4] C. Meneses-Fabian, G. Rodriguez-Zurita, J. F. Vazquez-Castillo, C. Robledo Sanchez, and V. Arrizon, "Common-Path Phase-Shifting Interferometer with Binary Grating," *Opt. Commun.*, vol. 264, pp. 13-17, 2006.
- [5] C. Meneses-Fabian, G. Rodriguez-Zurita, and V. Arrizon, "Optical tomography of transparent objects with phase-shifting interferometry and stepwise-shifted Ronchi ruling," *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 23, no. 2, pp. 298-305, 2006.
- [6] G. Rodriguez-Zurita, C. Meneses-Fabian, N. -I. Toto-Arellano, J. F. Vázquez-Castillo, and C. Robledo-Sánchez, "One-shot phase-shifting phase-grating interferometry with modulation of polarization: case of four interferograms," *Opt. Express*, vol. 16, no. 11, pp. 7806-7817, 2008.
- [7] D. Malacara, M. Servín, and Z. Malacara, *Interferogram Analysis for Optical Testing*, Optical Engineering, Marcel Dekker, Inc., New York, 1998.
- [8] M. Takeda, H. Ina, and S. Kobayashi, "Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry," *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 72, no. 1, pp. 156-160, 1982.
- [9] D. M. Meadows, W. O. Johnson, and J. B. Allen, "Generation of Surface Contours by Moiré Patterns," *Appl. Opt.*, vol. 9, no. 4, pp. 942-947, 1970; H. Takasaki, "Moiré Topography," *Appl. Opt.*, vol. 9, no. 6, pp. 1467-1472, 1970.
- [10] M. Idesawa, T. Yatagai, and T. Soma, "Scanning moiré method and automatic measurement of 3-D shapes," *Appl. Opt.*, vol. 16, no. 8, pp. 2152-2162, 1977.
- [11] T. Yatagai and M. Idesawa, "Automatic fringe analysis for moiré topography," *Opt. Laser Eng.*, vol. 3, no. 1, pp. 73-83, 1982.
- [12] D. T. Moore and B. E. Truax, "Phase-locked moiré fringe analysis for automated contouring of diffuse surfaces," *Appl. Opt.*, vol. 18, no. 1, pp. 91-96, 1979.

- [13] M. Takeda and K. Mutoh, "Fourier Transform Profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes," *Appl. Opt.*, vol. 22, no. 24, pp. 3977-3982, 1983.
- [14] M. A. Canchola, "Medición de perfiles utilizando técnicas de proyección de franjas," *INAOE*, 2012.
- [15] Ignacio Martínez Rojas, "Reconstrucción tridimensional de objetos mediante el uso de luz estructurada," *ISSN 1870-4069*, pp. 91-103, 2019.
- [16] WU Lu-shen, "Research and development of fringe projection-based methods in 3D shape reconstruction," *2006*, vol. 7, no. 6, pp. 1026-1036.
- [17] J. Schwider, "Digital wave-front measuring interferometry: some systematic error sources," *APPLIED OPTICS*, vol. 22, no. 21, 1 November 1983, pp. 3887-3893.
- [18] Y. Hu, J. Xi, J. F. Chicharo and Z. Yang, "Improved Three-step Phase Shifting Profilometry Using Digital Fringe Pattern Projection," *2006*.
- [19] L.-C. Chen, S.-L. Yeh, A. M. Tapilouw and J.-C. Chang, "3-D surface profilometry using simultaneous phase-shifting interferometry," *Optics Communications*, vol. 283, pp. 3376-3382, 2010.
- [20] C.-Y. Liu, T.-P. Yen, "Digital multi-step phase-shifting profilometry for three-dimensional ballscrew surface imaging," *Optics & Laser Technology*, vol. 79, pp. 115-123, 2016.
- [21] L. Lu, J. Xi, Y. Yu, Q. Guo, Y. Yin, and L. Li, "Heterodyne grating interferometry with nanometer vertical resolution for profile measurement of structured surfaces," *Optics Express*, vol. 22, no. 2, pp. 1544-1554, 2014.
- [22] C. Robledo-Sánchez, G. Rodríguez-Zurita, N. -I. Toto-Arellano, J. F. Vázquez-Castillo and C. Meneses-Fabian, "Phase shifting algorithm by means of concentric circle gratings with radial intensity modulation," *Optics Express*, vol. 19, no. 2, pp. 1527-1534, 2011.
- [23] C. Robledo-Sánchez, G. Rodríguez-Zurita, N. -I. Toto-Arellano, J. F. Vázquez-Castillo and C. Meneses-Fabian, "Algorithm for the analysis of concentric-circle-grating interferograms," *Appl. Opt.*, vol. 50, no. 31, pp. 6068-6073, 2011.
- [24] C. Robledo-Sánchez, G. Rodríguez-Zurita, N. -I. Toto-Arellano, J. F. Vázquez-Castillo, and C. Meneses-Fabian, "Cylindrical-shaped lens screening by phase shifting of concentric-circle grating interferograms," *Appl. Opt.*, vol. 50, no. 28, pp. 5512-5520, 2011.
- [25] M. Servín, J. C. Estrada, and J. A. Quiroga, "Three-dimensional measurement of the shape of steep aspheric surfaces with high dynamic range," *Opt. Eng.*, vol. 37, no. 2, pp. 541-546, 1998.
- [26] A. Doblas, S. Royo, and M. Servín, "Phase recovery from a single interferogram with closed fringes by means of the continuous wavelet transform," *Opt. Lett.*, vol. 26, no. 9, pp. 575-577, 2001.

- [27] S. Royo, A. Doblaz, and M. Servín, "Unwrapping by means of the continuous wavelet transform," *Opt. Lett.*, vol. 27, no. 24, pp. 2157-2159, 2002.
- [28] J.J. Dirckx, J. A.N. Buytaert and S. A.M. Van der Jeught, "Implementation of phase-shifting moiré profilometry on a low-cost commercial data projector," *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 48, pp. 244-2500, 2010.
- [29] Antonio Viguera Campuzano, "Cálculo Numérico: Teoría, problemas y algunos programas con Maxima," *CRAI UPCT*, 2016.
- [30] Eugene Hetch, "Óptica," *Pearson*, Ed. 5, 2016.
- [31] Kazuyoshi Itoh, "Analysis of the phase unwrapping algorithm," *APPLIED OPTICS*, vol. 21, no. 14, p. 2470, 1982.