



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Compactaciones, continuos localmente conexos

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
Diana Cuaya Simbro

DIRECTORES DE TESIS
Dr. Fernando Macías Romero
Dr. David Herrera Carrasco

PUEBLA, PUE.

noviembre 2025.



BUAP

FCFM, 75 años de docencia e investigación

Of. No. FM-1139/2025

**OFICIO DE MODALIDAD DE TITULACIÓN POR
EXAMEN PROFESIONAL**

Mtro. Juan Manuel Rosas Tapia
Director de Administración Escolar
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
PRESENTE

At'n: Psic. Marcela Juárez Zenteno
Jefa del Depto. de Titulaciones

Por este medio, me permito hacer de su conocimiento que la estudiante:

Nombre de la estudiante: **DIANA CUAYA SIMBRO**
Matrícula: **201935664**
Sustentante de la Licenciatura en: **MATEMÁTICAS**

Presentará examen profesional **el 14 de noviembre de 2025, a las 10:00 horas**, con el título de tesis: COMPACTACIONES, CONTINUOS LOCALMENTE CONEXOS, bajo la asesoría del Dr. Fernando Macías Romero y del Dr. David Herrera Carrasco.

Siendo los miembros del jurado:

NOMBRE	CARGO
Dra. Patricia Dominguez Soto	Presidente
Dr. Agustín Contreras Carreto	Secretario
M.C. Leonardo Ramírez Aparicio	Vocal

NOTA: ESTE DOCUMENTO TIENE VIGENCIA POR 6 MESES A PARTIR DE LA FECHA DE SU EXPEDICIÓN.

Sin más por el momento y agradeciendo de antemano su atención y su apoyo me despido.

ATENTAMENTE

"Pensar bien, para vivir mejor"

Puebla, Pue., a 11 de noviembre de 2025

Dr. David Villa Hernández
Secretario Académico
GKM/DVH/pgs



Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edit. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
(222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

*Para los vivos:
A mi familia y amigos*

*A los muertos:
El homenaje de mi nostalgia al Maestro J. Eduardo Reynoso Lara*

Agradecimientos

Primeramente, agradezco a Dios por la vida que me ha concedido, y me agradezco a mi misma, por no sucumbir ante ella.

Agradezco a mis padres, María Luisa y Abertano, por todo su esfuerzo y dedicación que han tenido hacia mis hermanos y hacia mí, por brindarnos una vida llena de privilegios y oportunidades. Además, con mucho cariño agradezco a mi hermana Erika, quien paso noches de desvelo conmigo, eres una amiga para mi. Agradezco a mi hermano Ángel, por pensar siempre en mi y tenerme en consideración en cada una de tus decisiones. A mi familia, agradezco la confianza y el amor que me han brindado.

A mis amigos, gracias por ser una cálida compañía a lo largo de mi vida. En especial quiero agradecer a Felipe D. Jesús, por obsequiarme de su tiempo y brindarme de su ayuda en la elaboración de este trabajo, eres un amigo a quien admiro y estimo.

Deseo expresar mi más sincera gratitud a aquellas personas que, a lo largo de mi vida académica, me han inspirado. También, expreso mi gratitud a mis asesores, Dr. Herrera y Dr. Macias, por aceptar dirigir mi tesis, y por brindarme una cálida bienvenida a su espacio de trabajo.

Gracias a la Dra. Patricia Domínguez Soto, Dr. Agustín Contreras Carreto y M.C Leonardo Ramírez Aparicio, por aceptar ser parte de la culminación de esta etapa de mi vida, agradeciendo su tiempo y comentarios para la mejora de este trabajo.

Aprenderás que no importa en cuántos pedazos tu corazón se partió, el mundo no se detendrá para que los arregles.

William Shakespeare

Introducción

La conexidad y la compacidad son dos de los conceptos fundamentales en topología, y juegan un papel crucial en la comprensión de las propiedades geométricas y estructurales de los espacios topológicos. Ambos conceptos proporcionan herramientas para analizar cómo se comportan los conjuntos dentro de un espacio, y son de particular importancia en diversas áreas de las matemáticas. En este trabajo nos limitaremos a presentar algunos resultados en espacios topológicos acerca de *compactaciones* junto con algunos ejemplos, siguiendo lo publicado en el capítulo 3 sección 5 de [5]. Además estudiaremos los *continuos localmente conexos* cuyos resultados se extrajeron del capítulo VIII de [15]. El propósito de esta tesis es desarrollar de manera exhaustiva los resultados expuestos en los capítulos anteriormente mencionados, de tal manera que sean más amenas y accesibles para aquellos quienes quieran conocer o introducirse en estos temas. Para ese propósito, este documento se encuentra organizado de la siguiente manera.

En este **capítulo 1** se establecen las bases teóricas necesarias para el desarrollo del trabajo. Se introduce la notación que se empleará en los capítulos posteriores y se presentan los conceptos fundamentales de topología general, como conexidad, compacidad y continuo. Además, se enuncian algunos teoremas y resultados acerca de estos conceptos.

En el **capítulo 2** se estudiará el tema de *compactaciones*. Una compactación consiste en construir un espacio compacto a partir de otro que no lo es, mediante la adición de puntos. El propósito de una compactación es obtener un espacio más manejable que preserve las propiedades topológicas esenciales del espacio original y además que nos permita aprovechar características propias de la compacidad, como la existencia de extremos, la convergencia de redes y sucesiones, y la posibilidad de extender funciones continuas. Así, en este capítulo se demostrará la existencia de la compactación mínima (compactación de Alexandroff) y de la compactación máxima (compactación de Stone-Čech) con respecto a una relación de orden parcial definida en la familia de compactaciones de un espacio topológico. Además, se presentarán ejemplos que muestran casos en los cuales dos compactaciones de un mismo espacio no son comparables bajo dicha relación. Finalmente, se probará que todo continuo es el residuo de alguna compactación del rayo.

Finalmente, en el **capítulo 3** se estudiará los continuos localmente conexos. En el contexto de la Teoría de Continuos, los continuos localmente conexos son, en cierto sentido, la clase especial más fundamental de continuos para estudiar, ya que se definen simplemente haciendo de la conexidad una propiedad local. En este trabajo probaremos que los continuos localmente conexos son arco conexo y además se caracterizan por la propiedad de ser las imágenes métricas continuas del intervalo cerrado $[0, 1]$.

Introducción	I
1. Preliminares	1
1.1. Compacidad	6
1.2. Conexidad	11
1.3. Continuos	17
2. Compactaciones	21
2.1. Orden en la familia de compactaciones	24
2.2. Compactación de Alexandroff	30
2.3. Compactaciones del rayo $[0, \infty)$	36
3. Continuos localmente conexos	53
3.1. Espacios localmente conexos y la propiedad S	53
3.2. El teorema de Hahn-Mazurkiewicz	62
3.3. Arcos en continuos localmente conexos	74
Referencias	85
Índice Alfabético	87

CAPÍTULO 1

Preeliminares

Para comenzar, vamos a presentar la notación que utilizaremos en este trabajo. Los símbolos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}$ denotarán a los números reales y naturales, respectivamente. Además, se denotará por I al intervalo $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$ considerado con la métrica euclidiana. Sabemos que a cada conjunto X se le asigna un número cardinal, denominado cardinalidad de X y denotado por $|X|$; cabe señalar que para un conjunto finito X la cardinalidad de X es igual al número de elementos de X . El número cardinal asignado a $\mathbb{N}$ se denota con el símbolo $\aleph_0$ (*aleph zero*). Para cada número cardinal m , el número 2^m , se define como la cardinalidad de la familia de todos los subconjuntos de un conjunto X tal que $|X| = m$. Por otro lado, recordemos que dos cardinales siempre son comparables y la relación así definida $<$ resulta ser un buen orden. Es decir, toda colección de cardinales posee un primer elemento, al que llamaremos mínimo.

Por otro lado, dado un subconjunto A de un espacio topológico X , denotaremos por $\text{cl}_X(A)$ o $\overline{A}^X$ a la cerradura de A en X , si no hay lugar a confusiones omitiremos la referencia al espacio X y simplemente denotaremos la cerradura de A por $\overline{A}$. El interior de A será denotado por $\text{Int}(A)$. También, si X es un espacio métrico y $A \subset X$ es acotado, entonces denotaremos el diámetro de A por $\text{diám}(A)$.

Sean X es un espacio métrico, $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}$ con $r \geq 0$. Denotaremos por $B_X(x, r)$ a la bola abierta en X con centro en x y radio r , si no hay lugar a confusiones podemos omitir la referencia al espacio X y simplemente denotarla por $B(x, r)$.

Resulta pertinente recordar algunas definiciones básicas en topología.

Definición 1.1. Sean $(X, \mathcal{O})$ un espacio topológico y $x \in X$. Un subconjunto V de X es una **vecindad** de x en el espacio X si y solo si existe $U \in \mathcal{O}$ tal que $x \in U \subset V$.

Definición 1.2. Sean X un espacio topológico y $A, B \subset X$. Decimos que A y B están **separados** si $\overline{A}^X \cap B = \emptyset$ y $A \cap \overline{B}^X = \emptyset$.

Definición 1.3. Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. El conjunto A es llamado **denso** en X si $\overline{A}^X = X$.

Definición 1.4. Sean $(X, \mathcal{O}_1)$ y $(Y, \mathcal{O}_2)$ espacios topológicos. Una función $f : X \rightarrow Y$ es llamada **continua** si $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_1$ para cualquier $U \in \mathcal{O}_2$.

Sean X y Y espacios topológicos, y sea M un subespacio de X . Dada una función continua $f : X \rightarrow Y$, se denomina **restricción de f a M** a la función

$$f|_M : M \rightarrow Y \text{ tal que } f|_M(x) = f(x) \text{ para todo } x \in M.$$

Asimismo, denotaremos por

$$f|^M : M \rightarrow f(M),$$

a la función que asigna a cada $x \in M$ el punto $f(x)$ del subespacio $f(M) \subset Y$. Notemos que las funciones $f|_M$ y $f|^M$ son continuas.

Definición 1.5. Sean X y Y espacios topológicos. Una función continua $f : X \rightarrow Y$ es llamada un **homeomorfismo** si es biyectiva y su inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ es continua. Decimos que dos espacios topológicos son **homeomorfos** si existe un homeomorfismo de X sobre Y .

La siguiente definición enuncia los axiomas de separación, que se refieren a las maneras de separar puntos y conjuntos cerrados de un espacio topológico mediante conjuntos abiertos.

Definición 1.6. Sea X un espacio topológico.

1. Si para cada par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$ existe un conjunto abierto de X que contiene exactamente uno de esos puntos, entonces X es llamado un espacio **T_0** .
2. Si para cada par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$ existe un conjunto abierto U de X tal que $x_1 \in U$ y $x_2 \notin U$, entonces X es llamado un espacio **T_1** .
3. Si para cada par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$ existen conjuntos abiertos U_1, U_2 de X tales que $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, entonces X es llamado un espacio **T_2** , o **espacio de Hausdorff**.
4. Si X es un espacio T_1 , y para cada $x \in X$ y cada conjunto cerrado F de X tal que $x \notin F$ existen conjuntos abiertos U_1, U_2 de X tales que $x \in U_1, F \subset U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, entonces X es llamado un espacio **T_3** , o **espacio regular**.
5. Si X es un espacio T_1 y para cada $x \in X$ y cada conjunto cerrado F de X tal que $x \notin F$ existe una función continua $f : X \rightarrow I$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para cada $y \in F$, entonces X es llamado espacio **$T_{\frac{3}{2}}$** , o **espacio de Tychonoff** o **espacio completamente regular**.
6. Si X es T_1 y para cada par de conjuntos A, B ajenos y cerrado de X existen subconjuntos abiertos U, V de X tales que $A \subset U, B \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$, entonces X es llamado espacio **T_4** , o **espacio normal**.

Enseguida, presentamos algunos resultados relacionados con funciones continuas.

Teorema 1.7. *Sean X un espacio topológico y Y un espacio de Hausdorff. Si $f : X \rightarrow Y$ y $g : X \rightarrow Y$ son funciones continuas entonces el conjunto $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado de X .*

Demostración. Veamos que $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ es abierto de X . Para cada $x \in A$ tenemos que $f(x) \neq g(x)$, luego existen subconjuntos abiertos de Y digamos U_1, U_2 tales que $f(x) \in U_1, g(x) \in U_2$ y además $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Así, el conjunto $f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2)$ es un abierto de X contenido en A . $\square$

Teorema 1.8. [[11], Teorema de Extensión de Tietze (pág. 127)] *Sean X un espacio normal y F un conjunto cerrado de X . Si la función $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ es continua entonces existe una función continua $f^* : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f^*(x) = f(x)$ para cada $x \in F$.*

A continuación se introducen algunas definiciones las cuales serán de ayuda en la demostración del teorema 1.11.

Definición 1.9. *Un conjunto Λ es un **conjunto dirigido** si y solo si existe una relación $\leq$ en Λ que satisface las siguientes proposiciones:*

1. $\lambda \leq \lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$;
2. Si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3$, entonces $\lambda_1 \leq \lambda_3$;
3. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, entonces existe un $\lambda_3 \in \Lambda$ tal que $\lambda_1 \leq \lambda_3$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3$.

El concepto de una red generaliza la noción de sucesión, a continuación nosotros introducimos esta definición haciendo uso de un conjunto dirigido arbitrario.

Definición 1.10. *Una **red** en un conjunto X es una función $P : \Lambda \rightarrow X$, donde Λ es algún conjunto dirigido. El punto $P(\lambda)$ es usualmente denotado por x_λ , y a menudo nosotros hablamos de la red $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ o si no causa confusión simplemente nos referiremos a la red (x_λ) .*

Teorema 1.11. *Sean X un espacio de Hausdorff, A un subespacio denso de X y $f : X \rightarrow Y$ una función continua de X a un espacio topológico arbitrario Y . Si $f|_A : A \rightarrow f(A) \subset Y$ es un homeomorfismo, entonces $f(X \setminus A) \cap f(A) = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que existe $y \in f(X \setminus A) \cap f(A)$. Por ende, existen $x \in X \setminus A$ y $a \in A$ tales que $f(x) = y = f(a)$. Como X es Hausdorff y A es denso en X , entonces $x \in \text{cl}_X(A)$. Por [17, Teorema 11.7] existe una red $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset A$ tal que $x_\lambda \rightarrow x$. Luego, como f es continua, por [17, Teorema 11.8], se cumple que $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$. Note que $(f(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ es una red que converge a $f(a)$ en $f(A)$. Dado que $f|_A$ es un homeomorfismo, se cumple que $(f|_A)^{-1}$ es una función continua. Así, por [17, Teorema 11.8] se cumple que $(f|_A)^{-1}(f(x_\lambda)) \rightarrow (f|_A)^{-1}(f(a))$, esto implica que $x_\lambda \rightarrow a$. Finalmente, del hecho que X es Hausdorff, por [17, Teorema 13.7] se cumple que $x = a$, lo cual es una contradicción. Por ende, $f(X \setminus A) \cap f(A) = \emptyset$. $\square$

Algunos cardinales asociados a un espacio topológico permiten cuantificar y describir aspectos importantes de su estructura. A continuación se presentan algunos de estos cardinales.

Definición 1.12. Sea X un espacio topológico y sea

$$w(X) = \min\{\alpha : \text{existe una base } \beta \text{ de } X \text{ tal que } |\beta| = \alpha\}.$$

El cardinal $w(X)$ es llamado el **peso** del espacio topológico X .

Teorema 1.13. Si X es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces $w(A) \leq w(X)$.

Demostración. Sea $w(X) = \alpha$, por lo que existe una base β de X tal que $|\beta| = \alpha$. Sea $\gamma = \{B \cap A : B \in \beta\}$. Veamos que γ es una base para A . Sea V un abierto de A distinto del vacío, por lo que existe un conjunto U abierto de X tal que $V = U \cap A$. Dado que β es base de X entonces existe una subfamilia β' de β tal que $\bigcup_{B \in \beta'} B = U$. Observemos que

$$V = U \cap A = \left[\bigcup_{B \in \beta'} B \right] \cap A = \bigcup_{B \in \beta'} (B \cap A), \text{ y además } \{B \cap A : B \in \gamma\} \subset \gamma, \text{ de ahí que } V$$

puede ser representado como la unión de una subfamilia de γ . Por lo tanto γ es una base para A . Por lo anterior $w(A) \leq |\gamma| \leq |\beta| = \alpha = w(X)$, i. e., $w(A) \leq w(X)$. $\square$

Teorema 1.14. Sean X y Y espacios topológicos. Si X y Y son homeomorfos entonces $w(X) = w(Y)$.

Demostración. Dado que X y Y son homeomorfos entonces existe un homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$. Sea β_X una base de X , veamos que $\{f(B)\}_{B \in \beta_X}$ es una base para Y . Dado que f^{-1} es continua, para cualquier $B \in \beta_X$, se tiene que $f(B)$ es abierto de Y . Luego, sea U un abierto de Y , entonces $f^{-1}(U)$ es abierto de X , de manera que existe $\beta_1^X \subset \beta_X$ tal

$$\text{que } \bigcup_{B \in \beta_1^X} B = f^{-1}(U), \text{ de ahí que } \bigcup_{B \in \beta_1^X} f(B) = f\left(\bigcup_{B \in \beta_1^X} B\right) = f(f^{-1}(U)) = U. \text{ Por lo}$$

tanto $\{f(B)\}_{B \in \beta_X}$ es una base de Y . De manera análoga se demuestra que si β_Y es base de Y entonces $\{f^{-1}(B)\}_{B \in \beta_Y}$ es una base de X . Ahora, sea β_X^w una base de X tal que $|\beta_X^w| = w(X)$, así $w(X) = |\beta_X^w| = |\{f(B)\}_{B \in \beta_X^w}| \geq w(Y)$. De manera análoga se prueba que $w(X) \leq w(Y)$. Por lo tanto, concluimos que $w(X) = w(Y)$. $\square$

Teorema 1.15. [[5], teorema 1.5.1] Para cada espacio T_0 se cumple que $|X| \leq 2^{w(X)}$.

Definición 1.16. Sea X un espacio topológico, se define

$$d(X) = \min\{\beta : \text{existe un subconjunto denso } A \text{ de } X \text{ tal que } |A| = \beta\}.$$

El cardinal $d(X)$ es llamado la **densidad** de X .

Teorema 1.17. Sean X y Y espacios topológicos. Si existe una función $f : X \rightarrow Y$ continua y suprayectiva entonces $d(Y) \leq d(X)$.

Demostración. Sea A un conjunto denso en X tal que $|A| = d(X)$. Luego dado que f es continua y suprayectiva, $Y = f(X) = f(\text{cl}_X(A)) \subset \text{cl}_Y(f(A))$. De lo anterior, $f(A)$ es un subconjunto denso de Y , así $d(Y) \leq |f(A)| \leq |A| = d(X)$, es decir, $d(Y) \leq d(X)$. $\square$

Teorema 1.18. [[5], teorema 1.5.3] *Para cada espacio de Hausdorff X se cumple que $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$.*

Teorema 1.19. [[5], teorema 1.5.7] *Para cada espacio regular X tenemos que $w(X) \leq 2^{d(X)}$.*

Los encajes constituyen una subfamilia particular de las funciones continuas y representan una herramienta fundamental en el estudio de las compactaciones. A continuación vamos a definir el concepto de encaje y a enunciar resultados que nos ayudarán en el desarrollo del Capítulo 2.

Definición 1.20. Sean X un espacio topológico y M un subespacio de X . Un **encaje** de M en X es una función $i_M : M \rightarrow X$ tal que $i_M(x) = x$ para todo $x \in M$.

Definición 1.21. Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f : X \rightarrow Y$ es llamado un **encaje homeomorfo** si es la composición de un homeomorfismo y un encaje, es decir, si existe $L \subset Y$ y un homomorfismo $g : X \rightarrow L$ tal que $f = i_L \circ g$; observemos que $L = f(X)$ y $g = f|_X$. Si existe un encaje homeomorfo de X sobre Y , entonces se dice que X está **encajado** en Y .

Observación 1.22. En términos simples, un espacio X está encajado o es encajable en un espacio Y , si existen $M \subset Y$ tal que M y X son homeomorfos.

Definición 1.23. Sea X un espacio topológico. Decimos que el espacio X es **universal** para todos los espacios que tienen una propiedad topológica $\mathcal{P}$, si X tiene la propiedad $\mathcal{P}$ y todo espacio que tiene la propiedad $\mathcal{P}$ está encajado en X .

La existencia de espacios universales son interesantes y útiles, permite reducir el estudio de una clase de espacios con la propiedad $\mathcal{P}$ al estudio de los subespacios de un espacio topológico fijo, esto se debe al hecho de que no distinguimos entre espacios homomorfos.

Sean X un espacio topológico, una familia de espacios topológicos $\{Y_s\}_{s \in S}$ y una familia de funciones continuas $\{f_s\}_{s \in S}$, donde $f_s : X \rightarrow Y_s$. Por [5, propocisión 2.3.6], la función que asigna a cada $x \in X$ el punto $\{f_s(x)\} \subset \prod_{s \in S} Y_s$ es continua; esto es llamado **diagonal de las funciones** $\{f_s(x)\}$ y es denotada por $\triangle_{s \in S} f_s$.

Teorema 1.24. [[5], teorema 2.3.20] Sean X un espacio topológico, $\{Y_s\}_{s \in S}$ una familia de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s \in S}$ una familia de funciones continuas donde $f_s : X \rightarrow Y_s$. Consideremos la diagonal de las funciones $\{f_s\}_{s \in S}$, $f = \triangle_{s \in S} f_s : X \rightarrow \prod_{s \in S} Y_s$. Si existe un $s_0 \in S$ tal que f_{s_0} es un encaje homeomorfo, entonces f es un encaje homeomorfo.

Definición 1.25. Sea m un cardinal. El **cubo de Tychonoff** de peso $m \geq \aleph_0$ es el producto cartesiano $I^m = \prod_{s \in S} I_s$, donde $I_s = I$ para cada $s \in S$ y $|S| = m$. El cubo de Tychonoff $I^{\aleph_0}$ es llamado el **cubo de Hilbert**, y lo denotamos por $\mathbf{Q}$.

Observemos que si $n \leq m$ entonces el cubo I^n está encajado en I^m . Además, por [5, corolario 4.2.3], se tiene que $\mathbf{Q}$ es metrizable, más aún puede ser metrizado con la siguiente métrica:

$$d_Q((x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}.$$

Observación 1.26. Sea m un cardinal con $m \geq \aleph_0$. Dado que $w(I) = \aleph_0$, entonces aplicando el teorema [5, teorema 2.3.13], tenemos que $w(I^m) \leq m$.

Teorema 1.27. [[5], teorema 2.3.23] El cubo de Tychonoff I^m es universal para todos los espacios de Tychonoff de peso $m \geq \aleph_0$.

1.1. Compacidad

A diferencia de otros conceptos matemáticos, la noción de compacidad no es tan natural ni intuitiva. Aquí, abordaremos la definición de compacidad en términos de cubiertas de conjuntos abiertos del espacio topológico.

Recordemos que una cubierta de un conjunto X es una familia $\{A_s\}_{s \in S}$ de subconjuntos de X tal que $\bigcup_{s \in S} A_s = X$ y que, si X es un espacio topológico, $\{A_s\}_{s \in S}$ es una cubierta abierta (cerrada) de X si todos los conjuntos A_s son abiertos (cerrados) de X .

Definición 1.28. Un espacio topológico X es llamado **espacio compacto** si X es un espacio de Hausdorff y cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita, es decir, si para cada cubierta abierta $\{U_s\}_{s \in S}$ del espacio X existe un conjunto finito $\{s_1, s_2, \dots, s_k\} \subset S$ tal que $X = U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \dots \cup U_{s_k}$.

Definición 1.29. Sea X un espacio topológico y M un subconjunto de X . Decimos que M es un **subespacio compacto** si al ser considerado con la topología inducida, es un espacio compacto.

Los siguientes teoremas son resultados clásicos en espacios compactos.

Teorema 1.30. [[5], teorema 3.1.2] Sea X un espacio compacto. Si M es un subespacio cerrado de X entonces es compacto.

Teorema 1.31. Sean X un espacio de Hausdorff y A un subespacio de X . Si A es compacto entonces A es un subespacio cerrado de X .

Demostración. Sea A un subespacio compacto de X . Sabemos que para cada $x \in X \setminus A$ el conjunto $\{x\}$ es compacto así, por [5, teorema 3.1.6], existe un conjunto abierto U_x de X

tal que $x \in U_x$ y $A \cap U_x = \emptyset$. Es claro que $X \setminus A \subset \bigcup_{x \in X \setminus A} U_x$, además $\bigcup_{x \in X \setminus A} U_x \cap A = \emptyset$, de ahí que $\bigcup_{x \in X \setminus A} U_x \subset X \setminus A$, por consiguiente $\bigcup_{x \in X \setminus A} U_x = X \setminus A$. Como $\bigcup_{x \in X \setminus A} U_x$ es abierto de X entonces $X \setminus A$ es abierto de X , por lo tanto A es un subconjunto cerrado de X . $\square$

Teorema 1.32. *Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ compacto. Para cada familia $\{U_s\}_{s \in S}$ de subconjuntos abiertos de X tales que $A \subset \bigcup_{s \in S} U_s$, existe un conjunto finito*

$$\{s_1, s_2, \dots, s_k\} \subset S \text{ tal que } A \subset \bigcup_{i=1}^k U_{s_i}.$$

Demostración. Sea $\{U_s\}_{s \in S}$ una familia de subconjuntos abiertos de X tales que $A \subset \bigcup_{s \in S} U_s$. Consideremos a los conjuntos $V_s = U_s \cap A$, los cuales claramente son abiertos en A ; luego

$$\bigcup_{s \in S} V_s = \bigcup_{s \in S} (U_s \cap A) = \left(\bigcup_{s \in S} U_s \right) \cap A = X \cap A = A,$$

por consiguiente $\{V_s\}_{s \in S}$ es cubierta abierta de A . Por hipótesis, A es compacto, entonces $\{V_s\}_{s \in S}$ tiene una subcubierta finita, i.e., existe $\{s_1, \dots, s_k\} \subset S$ tal que $A = \bigcup_{i=1}^k V_{s_i}$. Así

$$A = \bigcup_{i=1}^k V_{s_i} = \left(\bigcup_{i=1}^k U_{s_i} \right) \cap A \subset \bigcup_{i=1}^k U_{s_i}$$

Por lo tanto, existe un conjunto finito $\{s_1, \dots, s_k\} \subset S$ tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^k U_{s_i}$. $\square$

Corolario 1.33. *Sea X un espacio de Hausdorff y $\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ una familia de subconjuntos cerrados de X . El subespacio $\bigcup_{i=1}^k F_i$ de X es compacto si y solo si todos los subespacios F_i son compactos.*

Demostración. $[\Rightarrow]$ Sea $F = \bigcup_{i=1}^k F_i$, veamos que F es compacto. Notemos que F es cerrado de X así, por [5, proposición 2.1.1], F_i es cerrado de F para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Así, de acuerdo con 1.30, se concluye que cada F_i es compacto.

$[\Leftarrow]$ Sea $F = \bigcup_{i=1}^k F_i$. Supongamos que todos los subespacios F_i son compactos, veamos que F es compacto. Sea $\{U_s\}_{s \in S}$ una cubierta abierta de F , por lo tanto para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, tenemos que $F_i \subset \bigcup_{s \in S} U_i$. Por 1.32 y dado que cada F_i es compacto entonces

existe un conjunto finito $T_i \subset S$ tal que $F_i \subset \bigcup_{t \in T_i} U_t$. Es claro que $T = \bigcup_{i=1}^k T_i \subset S$ es finito.

Luego

$$F = \bigcup_{i=1}^k F_i \subset \bigcup_{i \in T} U_i \subset \bigcup_{i \in S} U_i = F,$$

así $\{U_i\}_{i \in T}$ es una subcubierta finita de $\{U_s\}_{s \in S}$. En conclusión para cada cubierta abierta de F existe una subcubierta finita y evidentemente F es de Hausdorff, por lo tanto F es compacto. $\square$

Teorema 1.34. *Cada espacio compacto es normal.*

Demostración. Sea X un espacio compacto, por definición de compacidad, X es de Hausdorff y por consiguiente es T_1 . Ahora bien, si $A, B \subset X$ son cerrados de X y ajenos, por el teorema 1.30, A y B son compactos; luego por [5, teorema 3.1.6], existen $U, V \subset X$ abiertos tales que $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. De acuerdo con la definición 1.6, X es normal. $\square$

Corolario 1.35. *Sean X un espacio compacto, Y un espacio de Hausdorff y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Así, para cada $A \subset X$ se cumple que $f(A) = \overline{f(A)}$.*

Demostración. Sea $A \subset X$, por [5, Proposición 1.4.1] sabemos que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Por otro lado, dado que $\overline{A}$ es cerrado de X , por el teorema 1.30, $\overline{A}$ es compacto. Consideremos la función f restringida al subespacio $\overline{A}$, la cual es una función suprayectiva y continua así, tenemos que $f(\overline{A})$ es compacto, aplicando el teorema 1.31, obtenemos que $f(\overline{A})$ es cerrado de Y . Como $A \subset \overline{A}$ entonces $f(A) \subset f(\overline{A})$ pero, por la definición de cerradura, $\overline{f(A)}$ es el cerrado más pequeño que contiene a $f(A)$ en consecuencia $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$. En conclusión, $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$. $\square$

Teorema 1.36. *Cada función continua de un espacio compacto a un espacio de Hausdorff es cerrada.*

Demostración. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua de un espacio compacto X a un espacio de Hausdorff Y . Si B es cerrado de X , entonces $B = \overline{B}$, además por el corolario previo, sabemos que $\overline{f(B)} = f(\overline{B})$ de ahí que $\overline{f(B)} = f(B)$, de manera que $f(B)$ es cerrado de Y . Por lo tanto f es cerrada. $\square$

El siguiente teorema es inmediato por el teorema 1.36 y [5, Proposición 1.4.18]

Teorema 1.37. *Sea X un espacio compacto y Y un espacio de Hausdorff. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y biyectiva entonces f es un homeomorfismo.*

Definición 1.38. *Sean X, Y y Z espacios topológicos. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y $h : X \rightarrow Z$ un encaje homeomorfo. Decimos que f **se puede extender continuamente** a Z , si existe una función continua $F : Z \rightarrow Y$ tal que $(F \circ h)(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.*

Teorema 1.39. [[5], teorema 3.2.1] *Sean A un subespacio denso de un espacio topológico X , Y un espacio compacto y $f : A \rightarrow Y$ una función continua. La función f tiene una extensión continua sobre X si y solo si para todo B_1, B_2 subconjuntos cerrados y ajenos de Y se cumple que $\text{cl}_X(f^{-1}(B_1)) \cap \text{cl}_X(f^{-1}(B_2)) = \emptyset$.*

Teorema 1.40. [[5], teorema 3.2.4] *Sean $\{X_s\}_{s \in S}$ una familia de espacios topológicos. El producto cartesiano $\prod_{s \in S} X_s$, donde $X_s \neq \emptyset$ para cada $s \in S$, es compacto si y solo si todos los espacios X_s son compactos.*

Teorema 1.41. [\[\[5\]](#), teorema 3.2.5] *El cubo de Tychonoff I^m es universal para todos los espacios compactos de peso $m \geq \aleph_0$.*

Teorema 1.42. [\[\[9\]](#), teorema 3.2.5] *Si X un espacio métrico compacto, entonces X esta encajado en el cubo de Hilbert $\mathbf{Q}$.*

Teorema 1.43. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es un espacio de Tychonoff si y solo si está encajado en un espacio compacto.*

Demostración. $[\Rightarrow]$ Sea X un espacio topológico de Tychonoff, veamos que X esta encajado en un espacio compacto. Consideremos los siguientes casos:

1. Si $w(X) < \aleph_0$, por el teorema [1.15](#), tenemos que X es finito por lo que X es compacto.
2. Si $w(X) \geq \aleph_0$, por el teorema [1.27](#), se tiene que el cubo de Tychonoff $I^{w(X)}$ es universal para todos los espacios de Tychonoff y, por el teorema [1.40](#), tenemos que el cubo de Tychonoff $I^{w(X)}$ es un espacio compacto.

$[\Leftarrow]$ Sea X un espacio topológico y supongamos que X esta encajado en un espacio compacto Y , por lo que existe un homeomorfismo $f : X \rightarrow M$ tal que $f(X) = M \subset Y$. Dado que Y es compacto entonces es un espacio normal, de ahí se sigue que Y es un espacio de Tychonoff, de manera que M es de Tychonoff. Además ser de Tychonoff es invariante bajo funciones continuas por lo que X es de Tychonoff. $\square$

Teorema 1.44. [\[\[15\]](#), teorema 3.2] *Si un espacio de Hausdorff es una imagen continua de un espacio métrico compacto, entonces es metrizable.*

Ahora estudiaremos el concepto de compacidad local.

Definición 1.45. *Un espacio topológico X es llamado un **espacio localmente compacto en x** , si existe un abierto U de X tal que $x \in U$ y $\bar{U}$ es un subespacio compacto de X . Además, decimos que X es un **espacio localmente compacto** si es localmente compacto en cada $x \in X$.*

Claramente todo espacio compacto es localmente compacto, ya que todo espacio topológico es vecindad de cada uno de sus puntos.

Lema 1.46. *Cada espacio localmente compacto es un espacio T_1 .*

Demostración. Sea X un espacio localmente compacto, por la definición anterior, sabemos que para cada $x \in X$ existe una vecindad U_x de x tal que $\bar{U}_x$ es un subespacio compacto de X . Sea $x \in X$ fijo pero arbitrario, como $\bar{U}_x$ es compacto, por la definición [1.28](#), $\bar{U}_x$ es un espacio de Hausdorff y por consiguiente es T_1 , así por [\[4\]](#), teorema 5.6], el conjunto $\{x\}$ es un subespacio cerrado de $\bar{U}_x$, de ahí que $\{x\}$ es cerrado de X . Por lo tanto para cada $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es cerrado de X , por [\[4\]](#), teorema 5.6] concluimos que cada espacio localmente compacto es un espacio T_1 . $\square$

Teorema 1.47. *Cada espacio localmente compacto es un espacio de Tychonoff.*

Demostración. Sean X un espacio localmente compacto y $x \in X$, por el lema 1.46, existe F un subconjunto cerrado de X tal que $x \notin F$. Además dado que X es localmente compacto, entonces existe un abierto U de X tal que $x \in U$ y $\bar{U}^X$ es compacto. Sea $F_0 = (\bar{U}^X \setminus U) \cup (\bar{U}^X \cap F)$, dado que $\bar{U}^X \cap (X \setminus U) = \bar{U}^X \setminus U$ entonces $\bar{U}^X \setminus U$ es cerrado de X , por lo tanto F_0 es cerrado de X y además $F_0 \subset \bar{U}^X$, de ahí que F_0 es cerrado de $\bar{U}^X$. Luego,

$$\bar{U}^X \setminus F_0 = (\bar{U}^X \setminus (\bar{U}^X \setminus U)) \cap (\bar{U}^X \setminus (\bar{U}^X \cap F)) = U \cap ((\bar{U}^X \setminus \bar{U}^X) \cup (\bar{U}^X \setminus F)) = \bar{U}^X \cap F,$$

de ahí que $x \in \bar{U}^X \setminus F_0$. Dado que $\bar{U}^X$ es compacto, por el teorema 1.34, $\bar{U}^X$ de Tychonoff, además $\{x\}$ es cerrado de $\bar{U}^X$ y F_0 es compacto, así haciendo uso del [5, teorema 3.1.7], existe una función continua $f_1 : \bar{U}^X \rightarrow I$ tal que $f_1(x) = 0$ y $f_1(F_0) \subset \{1\}$. Por lo tanto para todo $x \in X$ y cada subconjunto cerrado F de X tal que $x \notin F$, existe una función continua $f : X \rightarrow I$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para cada $y \in F$, así concluimos que X es un espacio de Tychonoff. $\square$

Teorema 1.48. *Sea X un espacio de Hausdorff. Si M es un subespacio localmente compacto de X entonces M es abierto de $\bar{M}^X$, es decir, $M = F \cap V$ donde F y V es cerrado y abierto de X , respectivamente.*

Demostración. Sea $Y = \bar{M}^X$. Dado que M es localmente compacto, entonces para cada $x \in M$ existe un abierto U de M tal que $x \in U$ y $\bar{U}^M$ es compacto y por lo tanto cerrado de Y . Notemos que $U \subset \bar{U}^M \subset M$, de ahí que $\bar{U}^Y \subset \bar{\bar{U}^M}^Y = \bar{U}^M$, por lo que $\bar{U}^Y \subset \bar{U}^M \subset M$. Dado que U es abierto de M entonces existe W abierto de Y tal que $M \cap W = U$; luego usando el [5, teorema 1.3.6] se tiene que

$$x \in W \subset \bar{W}^Y = \overline{M \cap W}^Y = \bar{U}^Y \subset M,$$

lo cual muestra que cada punto $x \in M$ existe un abierto W de $\bar{M}^X$ tal que $x \in W$. $\square$

Teorema 1.49. [[5], corolario 3.3.10] *Sea X un espacio topológico. Entonces X es localmente compacto si y solo si existe un espacio compacto Y tal que X es homeomorfo a un subespacio abierto A de Y .*

Teorema 1.50. *Sean X un espacio topológico y Y un espacio de Hausdorff. Si existe una función $f : X \rightarrow Y$ suprayectiva y abierta, entonces Y es localmente compacto.*

Demostración. Sea $y \in Y$. Consideremos $x \in f^{-1}(y)$ y un conjunto abierto U de X tal que $x \in U$ y $\bar{U}^X$ es un subespacio compacto. Notemos que $f(U)$ es un abierto de Y tal que $y \in Y$, además $f(\bar{U}^X)$ es compacto y por lo tanto cerrado de Y . Luego, como $\overline{f(U)}^Y$ es cerrado de Y y también $\overline{f(U)}^Y \subset f(\bar{U}^X)$, entonces $\overline{f(U)}^Y$ es compacto. $\square$

1.2. Conexidad

La conexidad es un concepto importante en la topología, intuitivamente al hablar de conjuntos conexos nos referimos a conjuntos que consisten de una sola pieza (ver figura 1.1). A continuación definimos la noción de conexidad en términos matemáticos.

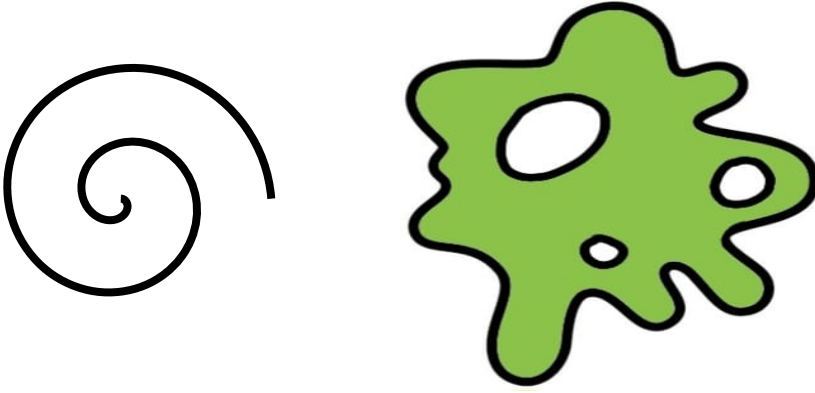


Figura 1.1: Ejemplos de conjuntos conexos

Definición 1.51. Un espacio topológico X es **conexo** si no puede ser representado como la unión de dos subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos.

Es claro que en la definición anterior podemos remplazar subconjuntos cerrados por abiertos, es decir, un espacio topológico es conexo si no puede ser representado como la unión de dos subconjuntos abiertos ajenos y no vacíos. Por otro lado, diremos que un espacio topológico es **disconexo** si no es conexo.

Definición 1.52. Sean X un espacio topológico y C un subconjunto de X . Decimos que C es un **subespacio conexo** si al ser considerado con la topología inducida, es un espacio conexo.

Teorema 1.53. Sea X un espacio topológico. Si $C \subset X$ es conexo entonces para cada par X_1, X_2 de subconjuntos separados de X tales que $C \subset X_1 \cup X_2$ tenemos $C \subset X_1$ o $C \subset X_2$.

Demostración. Sean X_1 y X_2 subconjuntos separados de X tales que $C \subset X_1 \cup X_2$. Veamos que los conjuntos $X_1 \cap C$ y $X_2 \cap C$ son separados. Dado que

$$\overline{X_1 \cap C} \cap (X_2 \cap C) \subset (\overline{X_1} \cap \overline{C}) \cap (X_2 \cap C) = \emptyset,$$

i.e., $\overline{X_1 \cap C} \cap (X_2 \cap C) = \emptyset$ y además

$$\overline{X_2 \cap C} \cap (X_1 \cap C) \subset (\overline{X_2} \cap \overline{C}) \cap (X_1 \cap C) = \emptyset,$$

i.e., $\overline{X_2 \cap C} \cap (X_1 \cap C) = \emptyset$. Por lo anterior $X_1 \cap C$ y $X_2 \cap C$ son separados y notemos que $C = (X_1 \cap C) \cup (X_2 \cap C)$, empleando [5, teorema 6.1.7], tenemos que $X_1 \cap C = \emptyset$ o $X_2 \cap C = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $X_1 \cap C = \emptyset$, luego $C = X_2 \cap C \subset X_2$. $\square$

A continuación presentamos algunos resultados los cuales nos permiten obtener conjuntos conexos a partir de conjuntos conexos dados.

Teorema 1.54. *Sea $\{C_s\}_{s \in S}$ es una familia de subespacios conexos de un espacio topológico X . Si existe un $s_0 \in S$ tal que el conjunto C_{s_0} no está separado a ninguno de los conjuntos C_s , entonces la unión $\bigcup_{s \in S} C_s$ es conexo.*

Demostración. Sea $s_0 \in S$ tal que el conjunto C_{s_0} no está separado a ninguno de los conjuntos C_s y supongamos que $\bigcup_{s \in S} C_s$ es disconexo, i.e., existen $X_1, X_2 \subset X$ cerrados,

ajenos y no vacíos tales que $\bigcup_{s \in S} C_s = X_1 \cup X_2$. Por el teorema 1.53, $C_{s_0} \subset X_1$ o $C_{s_0} \subset X_2$,

sin pérdida de generalidad supongamos que $C_{s_0} \subset X_1$. Veamos que para todo $s \in S$, se cumple que $C_s \subset X_1$. Sea $s \in S$, teorema 1.53, $C_s \subset X_1$ o $C_s \subset X_2$, supongamos que $C_s \subset X_2$, dado que C_{s_0} y C_s no están separados entonces $\overline{C_{s_0}} \cap C_s \neq \emptyset$ o $\overline{C_s} \cap C_{s_0} \neq \emptyset$. Si $\overline{C_{s_0}} \cap C_s \neq \emptyset$ y como

$$\overline{C_{s_0}} \cap C_s \subset \overline{X_1} \cap X_2 = X_1 \cap X_2,$$

entonces $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción ya que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Por otro lado, si $\overline{C_s} \cap C_{s_0} \neq \emptyset$ y como

$$\overline{C_s} \cap C_{s_0} \subset \overline{X_2} \cap X_1 = X_2 \cap X_1,$$

entonces $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción ya que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Por lo tanto para todo $s \in S$, se cumple que $C_s \subset X_1$ de manera que $X_2 = \emptyset$ pero $X_2 \neq \emptyset$, por lo tanto hemos generado una contradicción. Así concluimos que $\bigcup_{s \in S} C_s$ es conexo. $\square$

Los siguientes corolarios son inmediatos del teorema 1.54.

Corolario 1.55. *Sean X un espacio topológico y $\{C_s\}_{s \in S}$ una familia de subespacios conexos de X . Si $\bigcap_{s \in S} C_s \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{s \in S} C_s$ es conexo.*

Corolario 1.56. *Sea X un espacio topológico. Si un subespacio C de X es conexo, entonces cada subespacio A de X que satisface $C \subset A \subset \overline{C}^X$ también es conexo.*

Teorema 1.57. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Entonces X es conexo si y solo si para cada $p, q \in X$ y cada $\epsilon > 0$, existen $x_0, x_1, \dots, x_m \in X$ tal que $x_0 = p$, $x_m = q$ y $d(x_{i-1}, x_i) < \epsilon$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.*

Demostración. $[\Rightarrow]$ Supongamos que X es conexo y sean $p, q \in X$ y $\epsilon > 0$. Dado que X es compacto entonces existen $x_0, x_1, \dots, x_s \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^s B\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right)$. Sean $\mathcal{B} = \{B(x_i, \frac{\epsilon}{2}) : i \in \{1, \dots, s\}\}$ y

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{x \in X : \text{existe } B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\} \subset \mathcal{B} \text{ no vacío, finito e indexado tal que} \\ &\quad p \in B_1, x \in B_n \text{ y } B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset \text{ para cualquier } i = 1, \dots, n-1\}. \end{aligned}$$

Veamos que $\mathcal{C}$ es abierto de X . Si $x \in \mathcal{C}$ entonces existe $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\} \subset \mathcal{B}$ no vacío, finito e indexado tal que $x \in B_n$. Como $B_n \in \mathcal{B}$, entonces existe $k \in \{1, \dots, s\}$ tal que $B_n = B(x_k, \frac{\epsilon}{2})$, de ahí que B_n es abierto de X . Además, notemos que para todo $z \in B_1$, se tiene que $z \in \mathcal{C}$, por lo tanto $x \in B_1 \subset \mathcal{C}$. De manera que $\mathcal{C}$ es abierto.

Ahora, veamos que $X \setminus \mathcal{C}$ es abierto de X . Sea $x \in X \setminus \mathcal{C}$, entonces existe $j \in \{1, \dots, s\}$ tal que $x \in B(x_j, \frac{\epsilon}{2})$, luego observemos que para todo $w \in B(x_j, \frac{\epsilon}{2})$, se tiene que $w \in X \setminus \mathcal{C}$ (ya que en caso contrario, implicaría que $x \in \mathcal{C}$, lo cual es una contradicción). Por lo tanto $x \in B(x_j, \frac{\epsilon}{2}) \subset X \setminus \mathcal{C}$, de donde se sigue que $X \setminus \mathcal{C}$ es abierto de X . En conclusión, $\mathcal{C}$ es abierto y cerrado de X , además $p \in \mathcal{C}$ por lo que $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Por lo tanto, dado que X es conexo, se tiene que $\mathcal{C} = X$.

Como $q \in X = \mathcal{C}$ entonces existe $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\} \subset \mathcal{B}$ no vacío, finito e indexado tal que $p \in B_1$, $q \in B_n$ y $B_i \cap B_{i+1}$ para cualquier $k = 1, \dots, n-1$. Sea $t = 1, \dots, n$, como $B_t \in \mathcal{B}$ entonces existe $k \in \{1, \dots, s\}$ tal que $B_t = B(x_k, \frac{\epsilon}{2})$, denotemos por $y_t = x_k$. Evidentemente, $d(p, y_1) < \epsilon$ y $d(y_n, q) < \epsilon$. Sea $j \in \{2, \dots, n\}$, como $B_{j-1} \cap B_j \neq \emptyset$ entonces existe $x_j \in B_{j-1} \cap B_j$, luego $d(y_{j-1}, y_j) = d(y_{j-1}, x_j) + d(x_j, y_j) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Por lo tanto los puntos $y_0 = p, y_1, \dots, y_n, y_{n+1} = q$ cumplen que $d(y_{j-1}, y_j) < \epsilon$ para cada $j \in \{1, \dots, n+1\}$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que X es desconexo. Entonces existen A y B cerrados de X y distintos del vacío tales que $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$. Luego, por [8, lema 5.3.1], se tiene que $d(A, B) > 0$. Sean $\epsilon = \frac{d(A, B)}{2}$, $p \in A$ y $q \in B$, por hipótesis, existen $x_0, x_1, \dots, x_m \in X$ tal que $x_0 = p$, $x_m = q$ y $d(x_{i-1}, x_i) < \epsilon$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Sea $k = \min\{i \in \{1, \dots, m\} : x_i \in B\}$, luego $d(x_{k-1}, x_k) < \epsilon$ (contradicción, ya que $\epsilon < d(A, B)$). Por lo tanto X es conexo. $\square$

La conexidad local desempeña un papel fundamental en el desarrollo del Capítulo 3. A continuación, definiremos conceptos relacionados con esta noción, demostraremos algunas de sus propiedades y analizaremos ejemplos que nos ayudarán a comprender y visualizar mejor los resultados.

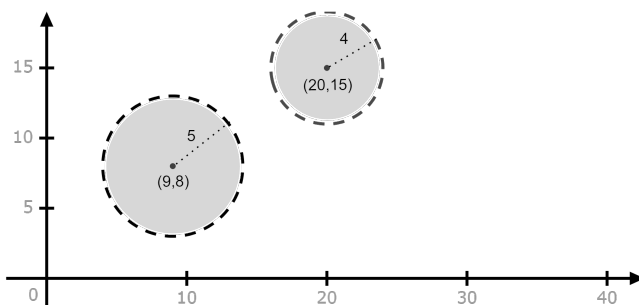
Definición 1.58. Sean X un espacio topológico y $p \in X$. Decimos que X es **localmente conexo en p** si para cada vecindad U de p existe un subconjunto abierto y conexo V de X tal que $p \in V \subset U$. Un espacio topológico X es **localmente conexo** si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

Es importante mencionar que la conexidad no implica, ni es consecuencia de la conexidad local. A continuación, en los ejemplos 1.59 y 1.60, mostramos algunos casos que ilustran esta afirmación.

Ejemplo 1.59. Sea $W = B((9, 8), 5) \cup B((20, 15), 5) \subset \mathbb{R}^2$. Observemos que W es un conjunto desconexo de $\mathbb{R}^2$ (ver figura 1.2). Sin embargo para cada $p \in W$ y cada vecindad V de p podemos encontrar un abierto U de W tal que U es conexo y $U \subset V$. Por lo tanto W es desconexo y localmente conexo.

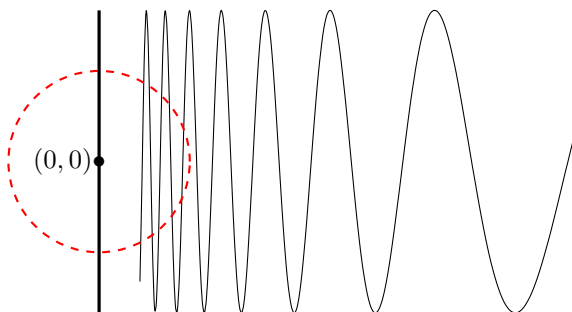
Ejemplo 1.60. La función $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = (x, \sin(\frac{1}{x}))$ para todo $x \in X$, es continua y $(0, 1]$ es un subespacio conexo de $\mathbb{R}$, de ahí que

$$Y = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \right\},$$

Figura 1.2: Gráfica de W en $\mathbb{R}^2$

es un subespacio conexo de $\mathbb{R}^2$. Luego, por el corolario 1.56, tenemos que $\text{cl}_{\mathbb{R}^2}(Y)$ es conexo. Observemos que $\text{cl}_{\mathbb{R}^2}(Y) = Y \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\}$.

Por otro lado, veamos que Y no es localmente conexo en el punto $(0, 0)$. En efecto, consideremos $B((0, 0), \frac{1}{4})$ y notemos que para cualquier abierto de $(0, 0)$ en $\text{cl}_{\mathbb{R}^2}(Y)$ contenida en la vecindad $\text{cl}_{\mathbb{R}^2}(Y) \cap B((0, 0), \frac{1}{4})$ contiene piezas separadas de la gráfica $\text{cl}_{\mathbb{R}^2}(Y)$, como se puede apreciar en la figura 1.3. Por lo tanto $\text{cl}_{\mathbb{R}^2}(Y)$ es conexo pero no localmente conexo.

Figura 1.3: Gráfica de $\text{cl}_{\mathbb{R}^2}(Y)$ y $B((0, 0), \frac{1}{4})$

En el ejemplo anterior, el espacio $\text{cl}_{\mathbb{R}^2}(Y)$ se conoce como la **curva del topólogo** y la denotaremos por S_T .

Teorema 1.61. *Un espacio topológico X es localmente conexo si y solo si cada componente de cada subconjunto abierto de X es abierto de X .*

Demostración. $[\Rightarrow]$ Supongamos que X es localmente conexo y sean A un subconjunto abierto de X y C una componente de A . Para cada $c \in C$, A es una vecindad de c y sabemos, por hipótesis, que X es localmente conexo, entonces existe una vecindad V_c de c

abierta y conexa tal que $V_c \subset A$. Como C es una componente de A y V_c es conexo, $V_c \subset C$ para cada $c \in C$, luego $\bigcup_{c \in C} V_c = C$. Dado que C es la unión de conjuntos abiertos entonces concluimos que C es abierto.

[$\Leftarrow$] Supongamos que cada componente de cada subconjunto abierto de X es abierto de X . Sean $x \in X$ y V una vecindad de x , por la definición 1.1, existe un abierto U de X tal que $x \in U \subset V$, dado que U es abierto de X entonces sus componentes son abiertas y conexas. Sea C la componente de U tal que $x \in C$, por lo que C es abierta y conexa. Además, evidentemente $C \subset V$. $\square$

En general la conexidad local no es una propiedad hereditaria, sin embargo, sí se preserva cuando consideramos subespacios abiertos.

Corolario 1.62. *Sea X un espacio localmente conexo. Si A es abierto de X entonces A es localmente conexo.*

Demostración. Sea M un subconjunto abierto de A , $\{M_i\}_{i \in S}$ la familia de componentes de M y $\{A_i\}_{i \in T}$ la familia de componentes de A . Sea $M_j \in \{M_i\}_{i \in S}$, veamos que M_j es abierto de A . Dado que M_j es conexo y además $M_j \subset A$, entonces existe $A_k \in \{A_i\}_{i \in T}$ tal que $M_j \subset A_k$. Luego, dado que X es localmente conexo y A es abierto de X , por el teorema 1.61, tenemos que A_k es abierto de X , de ahí que $A_k \cap A$ es abierto de A . Por lo tanto, $M = (A_k \cap A) \cap M$ es abierto de A . En conclusión, hemos demostrado que cada componente de cada conjunto abierto de A es abierto de A , entonces por el teorema 1.61, tenemos que A es localmente conexo. $\square$

Otra noción importante relacionado con el concepto de conexidad local, es la conexidad en pequeño.

Definición 1.63. *Sea X un espacio topológico y sea $p \in X$. Decimos que X es **conexo en pequeño en p** si para cada vecindad U de p existe una vecindad conexa V de p tal que $V \subset U$. Además, X es **conexo en pequeño** si es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.*

Teorema 1.64. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es conexo en pequeño si y solo si X es localmente conexo.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Supongamos que X es conexo en pequeño y sean U un abierto de X y C una componente de U . Dado que para cada $c \in C$ existe una vecindad conexa V_c de c tal que $V_c \subset U$ más aún $V_c \subset C$, luego por la definición de vecindad existe un abierto $U_c \subset V_c$ que contiene a c . De manera que $\bigcup_{c \in C} U_c = C$ y por ende C es abierto de X . Por lo

tanto hemos probado que cada componente de cada subconjunto abierto de X es abierta en X , así por el teorema 1.61, X es localmente conexo.

[$\Leftarrow$] supongamos que X es localmente conexo y sea $p \in X$. Notemos que cualquier subconjunto abierto de un punto $p \in X$ es también una vecindad de p , de ahí que si X es localmente conexo en p entonces también es conexo en pequeño en p . $\square$

Al probar la necesidad en el teorema anterior, se puede notar que puntualmente la conexidad local implica la conexidad en pequeño, sin embargo el recíproco es falso como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.65. Sea X una sucesión de abanicos armónicos convergentes al punto p (ver figura 1.4). Notemos que X es conexo en pequeño en p pero no es localmente conexo en tal punto.

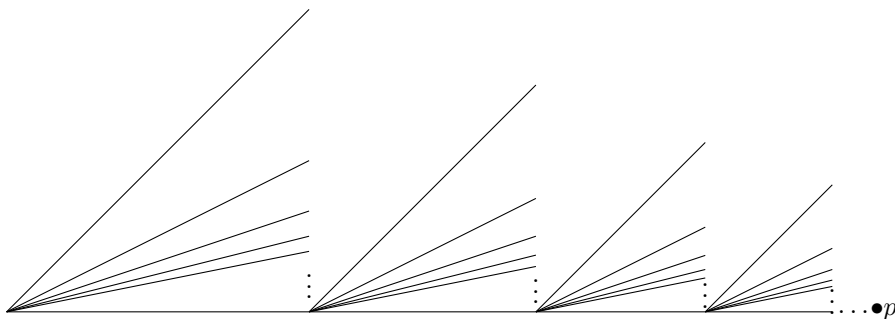


Figura 1.4: Sucesión de abanicos armónicos convergentes a p

Por lo anterior, concluimos que la conexidad local y la conexidad en pequeño son equivalentes globalmente pero no puntualmente.

Finalmente, los siguientes conceptos que estaremos definiendo son fundamentales para comprender el teorema de arco conexidad (teorema 3.25).

Definición 1.66. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un **arco** si existe un homeomorfismo $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$, donde $[0, 1]$ está dotado con la topología euclidiana. A los puntos $\alpha(1)$ y $\alpha(0)$ se les llama punto inicial y final del arco, respectivamente; además se dice que α une o conecta a los puntos $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$.

Definición 1.67. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es **arco conexo** si para cada par de puntos $p, q \in X$ existe un arco que los une.

Definición 1.68. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es **conexo por caminos** si para cada par de puntos $p, q \in X$, existe una función $f : [0, 1] \rightarrow X$ continua tal que $g(0) = p$ y $g(1) = q$.

Teorema 1.69. Sea X un espacio topológico. Si X es arco conexo entonces es conexo.

Demostración. Sea $x_0 \in X$ fijo pero arbitrario. Dado que X es arco conexo entonces para cada $x \in X$ existe un homeomorfismo $f_x : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $f_x(0) = x_0$ y $f_x(1) = x$, luego por [5, teorema 6.1.3], tenemos que $f_x([0, 1])$ es conexo y además $x_0, x \in f_x([0, 1])$. Como $x \in f_x([0, 1])$ para toda $x \in X$, por el corolario 1.55, se tiene que $\bigcup_{x \in X} f_x([0, 1])$ es conexo

pero notemos que $\bigcup_{x \in X} f_x([0, 1]) = X$, así concluimos que X es conexo. $\square$

Observemos que el recíproco del teorema 1.69 no se cumple, para ello basta ver que la curva del topólogo S_T es conexa (ver ejemplo 1.60), pero S_T no es arco conexa, hecho que se demostrará en el teorema 2.30. Además, cabe aclarar que la arco conexidad y la conexidad local son nociones independientes; con el ejemplo 1.59, mostramos la existencia de espacios topológicos que son localmente conexos pero no arco conexos y el siguiente ejemplo muestra a un espacio arco conexo pero no localmente conexo.

Ejemplo 1.70. *El peine del topólogo es el subconjunto*

$$P_T := ([0, 1] \times 0) \cup (0 \times [0, 1]) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0, 1] \right)$$

de $\mathbb{R}^2$ con su métrica inducida. El conjunto P_T es un conjunto arco conexo y no localmente conexo.

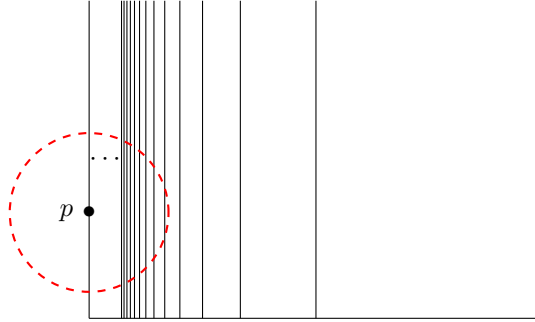


Figura 1.5: Peine del topólogo

1.3. Continuos

El concepto de continuo fue introducido por G. Cantor en 1883. Enseguida, presentamos la definición de este concepto.

Definición 1.71. Un **continuo** es un espacio métrico con más de un punto, conexo y compacto.

A continuación presentamos ejemplos de continuos. Entre los ejemplos que podemos encontrar de un continuo, se encuentran las gráficas finitas, que en palabras simples se definen como la unión finita de arcos

Definición 1.72. Un **subcontinuo** de un continuo X es un subconjunto cerrado, conexo y no vacío de X .

El primer método que abordaremos para construir continuos a partir de una familia de continuos dada, consiste en aplicar el siguiente resultado.

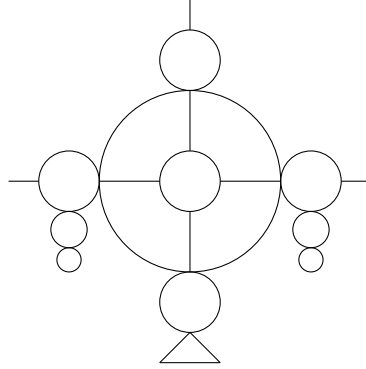


Figura 1.6: Gráfica finita.

Teorema 1.73. [[5], corolario 6.1.19] *La intersección $\bigcap_{i=0}^{\infty} X_i$ de una sucesión decreciente $X_1 \supset X_2 \supset \dots$ de continuos es un continuo.*

En el teorema 1.73 mostramos un método para construir continuos; sin embargo, este no es único. De hecho, es posible obtener continuos de distintas maneras a partir de una familia de continuos previamente dada. Otro método para construir continuos es mediante descomposiciones semicontinuas superiores.

Definición 1.74. *Sea $(X, \mathcal{O})$ un espacio topológico no vacío. Sea $\mathcal{D}$ una colección de subconjuntos de X no vacíos y ajenos por pares tales que $\bigcup \mathcal{D} = X$ ($\mathcal{D}$ es llamada una **partición** de X). Sea*

$$\mathcal{O}(\mathcal{D}) = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{D} : \bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{O}\}.$$

*El conjunto $\mathcal{O}(\mathcal{D})$ es una topología para $\mathcal{D}$. El espacio $(\mathcal{D}, \mathcal{O}(\mathcal{D}))$ es llamado un **espacio de descomposición** de X o simplemente una **descomposición** de X . La topología $\mathcal{O}(\mathcal{D})$ es llamada la **topología de descomposición**. Enfatizamos que el término descomposición significa una partición con la topología de descomposición.*

Definición 1.75. *Sea $(X, \mathcal{O})$ un espacio topológico. Una partición $\mathcal{D}$ de X es llamada **semicontinua superior** siempre que para cualquier $D \in \mathcal{D}$, $U \in \mathcal{O}$ y $D \subset U$, existe $V \in \mathcal{O}$ con $D \subset V$ tal que si $A \in \mathcal{D}$ y $A \cap V \neq \emptyset$ entonces $A \subset U$.*

Teorema 1.76. [[15], Teorema 3.9] *Cualquier descomposición semicontinua superior de un espacio métrico es metrizable.*

Teorema 1.77. [[15], Teorema 3.10] *Cualquier descomposición semicontinua superior de un continuo es un continuo.*

Teorema 1.78. [[15], Teorema 3.21] *Sea X un espacio métrico compacto y Y un espacio métrico. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces Y es compacto y además*

$$\mathcal{D}_f = \{f^{-1}(y) : y \in Y\},$$

resulta ser una descomposición semicontinua superior de X y homeomorfo a Y . Inversamente, cualquier descomposición semicontinua superior de X es un espacio métrico compacto la cual es una imagen continua de X .

Para la demostración del siguiente resultado, es conveniente recordar la definición de punto de no corte.

Definición 1.79. Sean X un espacio topológico conexo y $p \in X$. Si $X \setminus \{p\}$ es conexo entonces p es llamado **punto de no corte**.

Teorema 1.80. Sean $I = [0, 1]$ y $\mathcal{D}$ una descomposición semicontinua superior de I . Si todos los miembros de $\mathcal{D}$ son subcontinuos propios de I , entonces $\mathcal{D}$ es un arco.

Demostración. Como I es un continuo, por el teorema 1.77, $\mathcal{D}$ es continuo. Por otro lado, denotemos por D_0 y D_1 los elementos de $\mathcal{D}$ que contienen a 0 y 1, respectivamente. Dado que D_0 y D_1 son conexos que contienen puntos de no corte de I entonces $I \setminus D_0$ e $I \setminus D_1$ son conexos, de ahí que D_0 y D_1 son puntos de no corte de $\mathcal{D}$ ([15, ejercicio 6.24 (b)]). Luego, supongamos que existe $T \in \mathcal{D} \setminus \{D_0, D_1\}$ tal que es punto de no corte de $\mathcal{D}$, por [15, ejercicio 6.24 (b)], $I \setminus T$ es conexo. Sea $t \in T$, definamos los siguientes conjuntos:

$$A = \{D \in \mathcal{D} \setminus \{T\} : d < t \text{ para todo } d \in D\}$$

y

$$B = \{D \in \mathcal{D} \setminus \{T\} : d > t \text{ para todo } d \in D\}.$$

Observemos que $I \setminus T = \bigcup A \cup \bigcup B$ pero $\bigcup A \cup \bigcup B = \emptyset$ de ahí que $\bigcup A \cup \bigcup B$ es desconexo, i. e., $I \setminus T$ es desconexo, lo cual es una contradicción ya que $I \setminus T$ es conexo. Por lo tanto $\mathcal{D}$ tiene exactamente dos puntos de no corte así, por [15, teorema 6.17], $\mathcal{D}$ es un arco. $\square$

En topología, una idea fundamental consiste en estudiar no solo los puntos de un espacio, sino también los conjuntos compactos que contiene. Esta perspectiva da origen a los llamados **hiperespacios**, que son espacios cuyos puntos representan subconjuntos del espacio original.

Para un espacio topológico X definimos

$$2^X = \{A : A \text{ es un subconjunto cerrado y no vacío de } X\}$$

y

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}.$$

Definición 1.81. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Para cada $\epsilon > 0$ y cada $A \in 2^X$, definimos

$$N_d(\epsilon, A) = \{x \in X : d(x, a) < \epsilon \text{ para algún } a \in A\}.$$

Dados $A, B \in 2^X$, definimos

$$H_d(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset N_d(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\epsilon, A)\}$$

A la métrica H_d en 2^X se conoce como la **métrica de Hausdorff** inducida por d (ver [9, teorema 9.1]) y la topología para 2^X obtenida a partir de ella es un invariante de métricas

equivalentes para X (i.e., si β_1 y β_2 son métricas para X , cada una de las cuales da la topología $\mathcal{O}$ de X , entonces la topología para 2^X obtenida de H_{β_1} y la obtenida por H_{β_2} son idénticas); los espacios 2^X y $C(X)$ con la topología obtenida a partir de H_d son llamados **hiperespacios** de X .

Teorema 1.82. [[15], ejercicio 4.27] Sean X y Y espacios métricos compactos. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua entonces la función $f^* : 2^X \rightarrow 2^Y$ tal que

$$f^*(A) = f(A) \quad \text{para cada } A \in 2^X,$$

es continua.

Definición 1.83. Sea $\mathfrak{C}$ una colección de conjuntos. Un **elemento maximal** de $\mathfrak{C}$ es un $F \in \mathfrak{C}$ tal que ningún otro miembro de $\mathfrak{C}$ contiene propiamente a F . Por otro lado, un **elemento minimal** de $\mathfrak{C}$ es un $E \in \mathfrak{C}$ tal que ningún otro miembro de $\mathfrak{C}$ esta contenido propiamente en E .

Teorema 1.84. [[15], ejercicio 4.34] Sea X un espacio métrico compacto. Si $\mathfrak{C}$ es un subconjunto cerrado y no vacío de 2^X , entonces existe un elemento maximal de $\mathfrak{C}$ y un elemento minimal de $\mathfrak{C}$.

Sean X un espacio métrico compacto y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos compactos no vacíos de X . Decimos que $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ **converge** a A (escribimos $A_i \rightarrow A$) si $\lim A_i = A$ o $\lim_{i \rightarrow \infty} H_d(A_i, A) = 0$ donde H_d es la métrica de Hausdorff para 2^X . Si debemos pensar que la convergencia tiene lugar en 2^X o en X depende en general de la situación, y el contexto indicará cual es el apropiado.

Teorema 1.85. [[15], ejercicio 4.38] Sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^I tal que $\lim A_i = A$ donde $A \neq I$ y $A_i \neq I$ para cualquier i . Sea J una componente de $I \setminus A$. Entonces existe una sucesión $\{J_i\}_{i=1}^{\infty}$ de componentes de J_i de $I \setminus A_i$ tal que $\lim \overline{J_i} = \overline{J}$.

Definición 1.86. Sean $(X, \mathcal{O}_1)$ y $(Y, \mathcal{O}_2)$ espacios topológicos. Una función $F : X \rightarrow 2^Y$ se dice que es **semi continua superior en un punto** $p \in X$, siempre que si $U \in \mathcal{O}_2$ tal que $F(p) \subset U$, existe $V \in \mathcal{O}_1$ tal que $p \in V$ y $F(x) \subset U$ para todo $x \in V$. Una función $F : X \rightarrow 2^Y$ es llamada **semicontinua superior** siempre que F sea semicontinua superior en cada punto de X .

Teorema 1.87. [[15], teorema 7.4] Sean X y Y espacios métricos, compactos y no vacíos. Supongamos que a) – d) se cumplen:

- a) $F_n : X \rightarrow 2^Y$ es semicontinua superior para cada $n = 1, 2, \dots$;
- b) $F_n(x) \supset F_{n+1}(x)$ para cada $x \in X$ y cada $n = 1, 2, \dots$;
- c) $Y = \bigcup_{x \in X} F_n(x)$ para cada $n = 1, 2, \dots$;
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}[F_n(x)] = 0$ para cada $x \in X$.

Así, existe una función continua f de X sobre Y . De hecho, tal f puede definirse como

$$f(x) = \text{el único punto en } \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(x)$$

para cada $x \in X$.

CAPÍTULO 2

Compactaciones

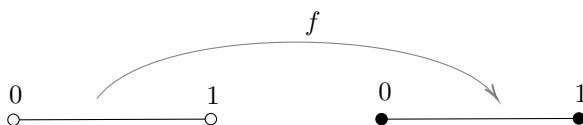
Un problema fundamental en topología consiste en extender un espacio topológico dado a uno que posea propiedades deseables, como la compacidad. En este capítulo, exploraremos la teoría general de las compactaciones y presentaremos la compactación de Alexandroff, una técnica que permite transformar un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff en un espacio compacto añadiendo un único punto, denominado “punto del infinito”.

En esta sección se introduce la definición de compactación de un espacio topológico, junto con algunos ejemplos ilustrativos. Posteriormente, se presentan propiedades generales de las compactaciones y se establecen las condiciones bajo las cuales un espacio topológico admite una compactación.

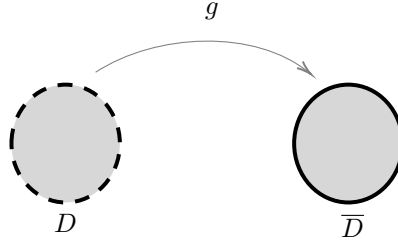
Definición 2.1. Una **compactación** de un espacio topológico X es un par (Y, c) , donde Y es un espacio compacto y $c : X \rightarrow Y$ es un encaje homeomorfo tal que $\text{cl}_Y(c(X)) = Y$.

A continuación, se muestran algunos ejemplos sencillos que facilitan la comprensión del concepto previamente definido.

Ejemplo 2.2. Consideremos el intervalo abierto $(0, 1)$ en $\mathbb{R}^2$, con la topología euclidiana inducida. Como es bien conocido, este conjunto no es compacto. Sea $f : (0, 1) \rightarrow [0, 1]$ la función definida por $f(x) = x$. Evidentemente el par $(f, [0, 1])$ constituye una compactación de $(0, 1)$.



Ejemplo 2.3. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Consideramos a D con la topología inducida por la métrica euclidiana de $\mathbb{R}^2$. Este conjunto no es compacto, ya que no es un cerrado de $\mathbb{R}^2$. El par $(g, \overline{D})$, donde $g : D \rightarrow \overline{D}$ es la función definida por $g(x, y) = (x, y)$, constituye una compactación de D .



Observación 2.4. En adelante, por compactación de X nos referiremos no solo a un par (Y, c) , sino también al espacio compacto Y en el que X puede estar encajado como un subespacio denso. Las compactaciones de un espacio X se denotarán habitualmente por los símbolos cX , c_iX , αX , etc., donde c , c_i y α son los símbolos para los encajes homeomorfos de X en la compactación correspondiente. Por lo tanto, al considerar una compactación como un espacio siempre sabremos qué encaje homeomorfo se está utilizando. Así para una compactación cX de un espacio X tenemos

$$c : X \rightarrow cX, c|_X : X \rightarrow c(X) \text{ es un homeomorfismo, y } \overline{c(X)} = cX.$$

Definición 2.5. Sea cX una compactación de un espacio X . El conjunto

$$cX \setminus c(X) = \{x \in cX : x \notin c(X)\}$$

es llamado el **residuo** de la compactación cX .

Proposición 2.6. Sean X_1, X_2 espacios topológicos y (Y, c) una compactación de X_1 . Si $f : X_2 \rightarrow X_1$ es un homeomorfismo entonces $(Y, c \circ f)$ es una compactación de X_2 . Además, $Y \setminus c(X_1) = Y \setminus (c \circ f)(X_2)$.

Demostración. Dado que $c : X_1 \rightarrow Y$ es un encaje homeomorfo entonces $c = i_L \circ h$ donde $L \subset Y$ y h es un homeomorfismo entre X_1 y L . Luego $h \circ f$ es un homeomorfismo entre X_2 y L , de manera que $c \circ f : X_2 \rightarrow Y$ es un encaje homeomorfo. Además $\text{cl}_Y(c \circ f(X_2)) = \text{cl}_Y(c(X_1)) = Y$. Por lo tanto $(Y, c \circ f)$ es una compactación de X_2 . Finalmente, observemos que $Y \setminus (c \circ f)(X_2) = Y \setminus (c(f(X_2))) = Y \setminus c(X_1)$. $\square$

A continuación, demostramos algunas propiedades que poseen las compactaciones.

Proposición 2.7. Sean X un espacio topológico y cX una compactación de X . Las siguientes propiedades se cumplen:

- a) $|Y| \leq 2^{2^{d(X)}}$;
- b) $w(Y) \leq 2^{d(X)}$;

c) Si X es conexo entonces cX es un continuo.

Demostración. a) Como c es una función continua, por el teorema 1.17, tenemos que $d(Y) \leq d(X)$. Así, por lo anterior y el teorema 1.18, tenemos que

$$|Y| \leq 2^{2^{d(Y)}} \leq 2^{2^{d(X)}}.$$

b) Dado que $d(Y) \leq d(X)$, entonces por el teorema 1.19, se cumple que

$$w(Y) \leq 2^{d(Y)} \leq 2^{d(X)}.$$

c) Dado que c es una función continua y X es conexo entonces $c(X)$ es conexo. Luego, tenemos que $cX = \overline{c(X)}$, y la cerradura de un conjunto conexo es conexa, de ahí que cX es conexo. Además, por definición, cX es compacto, de manera que cX es un continuo. □

A partir del teorema anterior y del teorema 1.41, podemos deducir que todas las compactaciones de un espacio X son subespacios del cubo de Tychonoff $I^{2^{d(X)}}$.

Por otra parte, no siempre es posible hallar una compactación para todo espacio no compacto. El teorema 2.9 proporciona una condición necesaria y suficiente para que un espacio admita una compactación.

Lema 2.8. *Si un espacio topológico X está encajado en un espacio compacto Y , entonces X tiene una compactación.*

Demostración. Sea X un espacio topológico encajado en un espacio compacto Y , por la observación 1.22, existe un homeomorfismo $f : X \rightarrow f(X)$ donde $f(X) \subset Y$. Observemos que el par $(\text{cl}_Y(f(X)), i \circ f)$ donde i denota el encaje de $f(X)$ en $\text{cl}_Y(f(X))$, es una compactación del espacio X . □

Teorema 2.9. *Un espacio topológico X tiene una compactación si y solo si X es un espacio de Tychonoff.*

Demostración. $[\Rightarrow]$ Supongamos que X tiene una compactación (Y, c) . Luego, por la definición 2.1, c es un encaje homeomorfo de X en Y donde Y es un espacio compacto i.e., X está encajado en un espacio compacto. Así, por el teorema 1.43, X es un espacio de Tychonoff.

$[\Leftarrow]$ Supongamos que X es un espacio de Tychonoff, por el teorema 1.43, X está encajado en un espacio compacto así, por el lema 2.8, X tiene una compactación. □

Teorema 2.10. *Si X es un espacio de Tychonoff entonces tiene una compactación (Y, c) tal que $w(Y) = w(X)$.*

Demostración. Sea X un espacio de Tychonoff, veamos los siguientes casos:

1. Si $w(X) < \aleph_0$, por el teorema 1.15, X es finito y por lo tanto compacto. Por otro lado, dado que X es un espacio de Tychonoff, por el teorema 2.9, X tiene una compactación (Y, c) donde Y es un espacio compacto, luego, por el teorema 1.34, se deduce que Y es un espacio de Hausdorff. Por lo tanto, por el teorema 1.31, $c(X)$ es cerrado de Y de manera que $c(X) = \text{cl}_Y(c(X)) = Y$, así $w(X) = w(c(X)) = w(Y)$.
2. Si $w(X) \geq \aleph_0$, por el teorema 1.27, X está encajado en $I^{w(X)}$, de ahí que existe un homeomorfismo $f : X \rightarrow K$ donde $K \subset I^{w(X)}$. Sea $Y = \text{cl}_{I^{w(X)}}(K)$, como Y es cerrado de $I^{w(X)}$ y sabemos, por el teorema 1.40, que $I^{w(X)}$ es un espacio compacto, entonces Y es compacto. Por otro lado, por los teoremas 1.13 y 1.14 y por la observación 1.26, tenemos que

$$w(X) = w(K) \leq w(Y) \leq w(I^{w(X)}) \leq w(X),$$

por lo tanto $w(Y) = w(X)$. Si $c = i \circ f$ donde i denota el encaje de K en $I^{w(X)}$ entonces la pareja (Y, c) es una compactación de X tal que $w(Y) = w(X)$.

□

Teorema 2.11. *Sea X un espacio de Tychonoff. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- a) *El espacio X es localmente compacto;*
- b) *Para cada compactación cX del espacio X el residuo $cX \setminus c(X)$ es un cerrado de cX ;*
- c) *Existe una compactación cX del espacio X tal que el residuo $cX \setminus c(X)$ es un cerrado de cX .*

Demostración. $[a] \Rightarrow [b]$ Sean X un espacio localmente compacto y cX una compactación del espacio X . Dado que $c|_X$ es un homeomorfismo, por el teorema 1.50, $c(X)$ es un espacio localmente compacto, luego por el teorema 1.48, $c(X)$ es abierto de $\text{cl}_Y(c(X)) = cX$, es decir $cX \setminus c(X)$ es cerrado de cX .

$[b] \Rightarrow [c]$ Esta implicación es inmediata.

$[c] \Rightarrow [d]$ Supongamos que existe una compactación cX del espacio X tal que el residuo $cX \setminus c(X)$ es cerrado de cX , de manera que $c(X)$ es abierto de cX . Además, dado que cX es una compactación entonces $c|_X$ es un homeomorfismo, de ahí que X es homeomorfo a $c(X)$. Debido a lo anterior y por el teorema 1.49, X es localmente compacto. □

2.1. Orden en la familia de compactaciones

En esta sección se define cuando dos compactaciones de un mismo espacio topológico son equivalentes (definición 2.12) y se demuestra que esta relación define una relación de equivalencia sobre la familia de todas las compactaciones de un espacio topológico dado (teorema 2.13). Luego, en el teorema 2.17 se establece que el conjunto de clases de equivalencia inducido por esta relación admite una estructura de orden parcial. El objetivo principal de esta sección es sentar las bases necesarias para definir la compactación de Stone-Čech y probar su existencia.

Dado X un espacio topológico, denotaremos por $\mathbf{C}(X)$ a la familia de todas las compactaciones de X .

Definición 2.12. Sean X un espacio topológico y $c_1X, c_2X \in \mathbf{C}(X)$. Las compactaciones c_1X y c_2X son **equivalentes** si existe un homeomorfismo $f : c_1X \rightarrow c_2X$ tal que $f \circ c_1(x) = c_2(x)$ para todo $x \in X$. Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{c_2} & c_2X \\ c_1 \downarrow & \nearrow f & \\ c_1X & & \end{array}$$

Por lo tanto, dos compactaciones son equivalentes si son homeomorfas y si el espacio X está encajado en ambas de la misma manera. Cuando c_1X y c_2X sean dos compactaciones equivalentes del espacio X , lo denotaremos por $c_1X \cong c_2X$.

Proposición 2.13. Sea X un espacio topológico. La relación $\cong$ es de equivalencia en $\mathbf{C}(X)$.

Demostración. Sea X un espacio topológico.

REFLEXIVA Sea $cX \in \mathbf{C}(X)$ y consideramos el homeomorfismo Id_{cX} entonces

$$\text{Id}_{cX} \circ c(x) = c(x) \text{ para todo } x \in X,$$

de ahí que $cX \cong cX$.

SIMÉTRICA Sean $c_1X, c_2X \in \mathbf{C}(X)$ tales que $c_1X \cong c_2X$, entonces existe un homeomorfismo $f : c_1X \rightarrow c_2X$ tal que

$$f \circ c_1(x) = c_2(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Es claro que $f^{-1} : c_2X \rightarrow c_1X$ es un homeomorfismo y además

$$c_1(x) = f^{-1} \circ f \circ c_1(x) = f^{-1} \circ c_2(x) \text{ para todo } x \in X,$$

por lo tanto $c_2X \cong c_1X$.

TRANSITIVA Sean $c_1X, c_2X, c_3X \in \mathbf{C}(X)$ tales que $c_1X \cong c_2X$ y $c_2X \cong c_3X$, entonces existen homeomorfismos $f : c_1X \rightarrow c_2X$ y $g : c_2X \rightarrow c_3X$ tales que

$$f \circ c_1(x) = c_2(x) \text{ para todo } x \in X$$

y

$$g \circ c_2(x) = c_3(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Evidentemente $g \circ f : c_1X \rightarrow c_3X$ es un homeomorfismo y además

$$g \circ (f \circ c_1)(x) = g \circ c_2(x) = c_3(x) \text{ para todo } x \in X,$$

por lo tanto $c_1X \cong c_3X$. □

Por la proposición 2.13, para cada uno de los elementos de la familia de compactaciones de X , podemos definir su clase de equivalencia. En adelante cada una de las clases de equivalencia se considerarán como una única compactación de X que se denotará como cX , donde cX es un representante de la clase de equivalencia a la cual pertenece cX . Denotaremos por $\mathcal{C}(X)$ a la familia de todas las clases de equivalencia de $\mathbf{C}(X)$.

Observación 2.14. Si cX es una compactación de un espacio compacto X , evidentemente, $c(X) = cX$ y por ende c es un homeomorfismo. Así, para cualesquiera dos compactaciones c_1X, c_2X de un espacio compacto X , la función $f = c_2 \circ c_1^{-1} : c_1X \rightarrow c_2X$ es un homeomorfismo tal que $f \circ c_1(x) = c_2(x)$ para cada $x \in X$, de manera que cualesquiera dos compactaciones de un espacio compacto son equivalentes. En particular, cualquier compactación de un espacio compacto X es equivalente a la compactación (X, Id_X) .

A continuación, se introduce una relación en la familia $\mathcal{C}(X)$, y se demostrará en la proposición 2.17 que constituye una relación de orden en dicho conjunto.

Definición 2.15. Sea X un espacio topológico. Se define la relación $\preceq$ en la familia $\mathcal{C}(X)$ del siguiente modo: dado $c_1X, c_2X \in \mathcal{C}(X)$, se dice que $c_2X \preceq c_1X$ si y solo si existe una función continua $f : c_1X \rightarrow c_2X$ tal que $(f \circ c_1)(x) = c_2(x)$ para todo $x \in X$, es decir, $f(c_1(X)) = c_2(X)$.

En el siguiente resultado se estudian propiedades de la función f introducida en 2.15, en particular mostraremos que f es una función suprayectiva.

Teorema 2.16. Sean X un espacio topológico y $c_1X, c_2X \in \mathcal{C}(X)$. Si $f : c_1X \rightarrow c_2X$ es una función continua tal que $(f \circ c_1)(x) = c_2(x)$ para todo $x \in X$, entonces

$$f(c_1(X)) = c_2(X) \text{ y } f(c_1X \setminus c_1(X)) = c_2X \setminus c_2(X).$$

Demostración. Dado que $f : c_1X \rightarrow c_2X$ es una función continua tal que $f(c_1(X)) = c_2(X)$. Luego $\overline{f(c_1(X))} = c_2(X)$, pero por el corolario 1.35, tenemos que $f(c_1(X)) = \overline{f(c_1(X))}$, así

$$f(c_1X) = f(\overline{c_1(X)}) = \overline{f(c_1(X))} = \overline{c_2(X)} = c_2X,$$

i. e., $f(c_1X) = c_2X$.

Afirmación. La función $f|^{c_1(X)}$ es un homeomorfismo.

Demostración. Veamos que $f|^{c_1(X)} = c_2|^{c_1(X)} \circ (c_1|^{c_1(X)})^{-1}$. Sea $y \in c_1(X)$, dado que $c_1|^{c_1(X)}$ es un homeomorfismo entonces existe un único $x \in X$ tal que $c_1|^{c_1(X)}(x) = y$, luego

$$x = (c_1|^{c_1(X)})^{-1}(c_1|^{c_1(X)}(x)) = (c_1|^{c_1(X)})^{-1}(y),$$

de manera que

$$f(y) = f(c_1|^{c_1(X)}(x)) = c_2|^{c_1(X)}(x) = c_2|^{c_1(X)}[(c_1|^{c_1(X)})^{-1}(y)] = c_2|^{c_1(X)} \circ (c_1|^{c_1(X)})^{-1}(y),$$

por lo tanto, $f|^{c_1(X)} = c_2|^{c_1(X)} \circ (c_1|^{c_1(X)})^{-1}$. Como $f|^{c_1(X)}$ es la composición de homeomorfismos entonces concluimos que $f|^{c_1(X)}$ es homeomorfismo.

Sabemos que $c_1(X)$ es un subespacio denso de c_1X y debido a la afirmación anterior, sabemos que $f|_{c_1(X)}$ es homeomorfismo, así por el lema 1.11, $f(c_1X \setminus c_1(X)) \cap f(c_1(X)) = \emptyset$ y como $f(c_1(X)) \cup f(c_1X \setminus c_1(X)) = f(c_1X)$, entonces

$$f(c_1X \setminus c_1(X)) = f(c_1X) \setminus f(c_1(X)) = c_2X \setminus c_2(X),$$

i. e., $f(c_1X \setminus c_1(X)) = c_2X \setminus c_2(X)$. □

Proposición 2.17. *Sea X un espacio topológico. La relación $\preccurlyeq$ es una relación de orden en $\mathcal{C}(X)$.*

Demostración. REFLEXIVA Si $cX \in \mathcal{C}(X)$ y consideramos la función continua Id_{cX} , entonces

$$\text{Id}_{cX} \circ c(x) = c(x) \text{ para todo } x \in X,$$

de ahí que $cX \preccurlyeq cX$.

TRANSITIVA Sean $c_1X, c_2X \in \mathcal{C}(X)$ tales que $c_1X \preccurlyeq c_2X$ y $c_2X \preccurlyeq c_3X$, entonces existen funciones continuas $f : c_1X \rightarrow c_2X$ y $g : c_2X \rightarrow c_3X$ tales que

$$f \circ c_1(x) = c_2(x) \text{ para todo } x \in X$$

y

$$g \circ c_2(x) = c_3(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Evidentemente $g \circ f : c_1X \rightarrow c_3X$ es una función continua y además

$$g \circ (f \circ c_1)(x) = g \circ c_2(x) = c_3(x) \text{ para todo } x \in X,$$

por lo tanto $c_1X \preccurlyeq c_3X$.

ANTISIMÉTRICA Sean $c_1X, c_2X \in \mathcal{C}(X)$, veamos que $c_1X \cong c_2X$ si y solo si $c_1X \preccurlyeq c_2X$ y $c_2X \preccurlyeq c_1X$. Supongamos que $c_1X \cong c_2X$, entonces existe un homeomorfismo $f : c_1X \rightarrow c_2X$ tal que $f \circ c_1 = c_2$, de ahí que $c_2X \preccurlyeq c_1X$. Dado que $\cong$ es una relación de equivalencia entonces $c_2X \cong c_1X$ por lo que existe un homeomorfismo $g : c_2X \rightarrow c_1X$ tal que $g \circ c_2 = c_1$, de ahí que $c_1X \preccurlyeq c_2X$.

Por otro lado, supongamos que $c_1X \preccurlyeq c_2X$ y $c_2X \preccurlyeq c_1X$, por la definición 2.12, existen funciones continuas $f_1 : c_1X \rightarrow c_2X$ y $f_2 : c_2X \rightarrow c_1X$ tales que $f_1 \circ c_1 = c_2$ y $f_2 \circ c_2 = c_1$. Observemos que $f_2 \circ f_1 \circ c_1 = f_2 \circ c_2 = c_1$, luego sea $y \in c_1(X)$ por lo que existe un único $x \in X$ tal que $c_1(x) = y$ así

$$f_2 \circ f_1(y) = f_2 \circ f_1(c_1(x)) = f_2 \circ c_2(x) = c_1(x) = y,$$

de manera que $f_2 \circ f_1|_{c_1(X)} = \text{Id}_{c_1X}|_{c_1(X)}$. Sea

$$\mathcal{B} = \{x \in c_1X : f_2 \circ f_1(x) = \text{Id}_{c_1X}(x)\}.$$

Observemos que $c_1(X) \subset \mathcal{B}$, de ahí que

$$c_1X = \text{cl}_{c_1X}(c_1(X)) \subset \text{cl}_{c_1X}(\mathcal{B}) \subset c_1X,$$

i. e., $\text{cl}_{c_1 X}(\mathcal{B}) = c_1 X$ pero, por el teorema 1.7, tenemos que $\mathcal{B}$ es cerrado de $c_1 X$, por lo tanto $\mathcal{B} = c_1 X$, así $f_2 \circ f_1 = \text{id}_{c_1 X}$. De manera similar, obtenemos que $f_1 \circ f_2 = \text{Id}_{c_2 X}$. Observemos que f_2 actúa como función inversa de f_1 , por lo que f_1 es biyectiva y además sabemos que f_2 es continua, por lo tanto f_1 es un homeomorfismo tal que $f_1 \circ c_1 = c_2$, de ahí que $c_1 X \cong c_2 X$. □

Al demostrar la antisimetría de la relación $\preceq$, obtenemos un criterio que permite caracterizar cuándo dos compactaciones son equivalentes. Esta caracterización se enuncia en el corolario 2.18. Más adelante, se presentan otras condiciones necesarias y suficientes para establecer la equivalencia entre dos compactaciones de un mismo espacio.

Corolario 2.18. *Dos compactaciones $c_1 X$ y $c_2 X$ de un espacio X son equivalentes si y solo si $c_1 X \preceq c_2 X$ y $c_2 X \preceq c_1 X$.*

Teorema 2.19. *Las compactaciones $c_1 X$ y $c_2 X$ de un espacio X son equivalentes si y solo si para cada par A, B de subconjuntos cerrados de X , se tiene que*

$$\overline{c_1(A)} \cap \overline{c_1(B)} = \emptyset \text{ si y solo si } \overline{c_2(A)} \cap \overline{c_2(B)} = \emptyset.$$

Demostración. $[\Rightarrow]$ Supongamos que $c_1 X \cong c_2 X$, por lo que existe un homeomorfismo $f : c_1 X \rightarrow c_2 X$ tal que $f \circ c_1 = c_2$. Sean A y B subconjuntos cerrados de X , veamos que si $\overline{c_1(A)} \cap \overline{c_1(B)} = \emptyset$ entonces $\overline{c_2(A)} \cap \overline{c_2(B)} = \emptyset$. Dado que f es un homeomorfismo entonces existe su inversa, f^{-1} , tal que $c_1 = f^{-1} \circ c_2$; así por lo anterior y haciendo uso del teorema 1.35, tenemos que

$$\begin{aligned} f^{-1}(\overline{c_2(A)} \cap \overline{c_2(B)}) &\subset f^{-1}(\overline{c_2(A)}) \cap f^{-1}(\overline{c_2(B)}) \\ &= \overline{f^{-1}(c_2(A))} \cap \overline{f^{-1}(c_2(B))} \\ &= \overline{c_1(A)} \cap \overline{c_1(B)} \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

De ahí que $f^{-1}(\overline{c_2(A)} \cap \overline{c_2(B)}) = \emptyset$, por lo tanto

$$\overline{c_2(A)} \cap \overline{c_2(B)} = f \left[f^{-1}(\overline{c_2(A)} \cap \overline{c_2(B)}) \right] = f(\emptyset) = \emptyset.$$

De forma similar se demuestra que si A y B son subconjuntos cerrados de X tales que $\overline{c_2(A)} \cap \overline{c_2(B)} = \emptyset$, entonces $\overline{c_1(A)} \cap \overline{c_1(B)} = \emptyset$.

$[\Leftarrow]$ Ahora supongamos que para cada par A, B de subconjuntos cerrados en X se cumple que

$$\overline{c_1(A)} \cap \overline{c_1(B)} = \emptyset \text{ si y solo si } \overline{c_2(A)} \cap \overline{c_2(B)} = \emptyset.$$

Consideremos las siguientes funciones

$$f_1 := c_1 \circ h_2 : c_2(X) \rightarrow c_1 X \quad \text{y} \quad f_2 := c_2 \circ h_1 : c_1(X) \rightarrow c_2 X,$$

donde $h_i : c_i(X) \rightarrow X$ es la inversa del homeomorfismo $c_i|_X$ para $i = 1, 2$. Dado que f_1 y f_2 son composiciones de funciones continuas entonces f_1 y f_2 son funciones continuas.

Afirmación. Para cada par B_1^i, B_2^i de subconjuntos cerrados en $c_i X$ tales que $B_1^i \cap B_2^i = \emptyset$, se tiene que $\overline{f_i^{-1}(B_1^i)} \cap \overline{f_i^{-1}(B_2^i)} = \emptyset$, para $i = 1, 2$.

Demostración Sean B_1^1, B_2^1 subconjuntos cerrados en $c_1 X$ tales que $B_1^1 \cap B_2^1 = \emptyset$. Dado que h_1 es un homeomorfismo entonces $h_1(B_1^1)$ y $h_1(B_2^1)$ son subconjuntos cerrados de X . Además

$$\overline{c_1[h_1(B_1^1)]} \cap \overline{c_1[h_1(B_2^1)]} \subset B_1^1 \cap B_2^1 = \emptyset,$$

luego haciendo uso de la hipótesis, tenemos que $\overline{c_2[h_1(B_1^1)]} \cap \overline{c_2[h_1(B_2^1)]} = \emptyset$. Notemos que

$$(f_1)^{-1} = (c_1 \circ h_2)^{-1} = (h_2)^{-1} \circ (c_1)^{-1} = c_2 \circ h_1,$$

por lo tanto $\overline{f_1^{-1}(B_1^1)} \cap \overline{f_1^{-1}(B_2^1)} = \emptyset$.

De manera similar, se prueba que para cada par B_1^2, B_2^2 de subconjuntos cerrados en $c_2 X$ tales que $B_1^2 \cap B_2^2 = \emptyset$, se tiene que $\overline{f_2^{-1}(B_1^2)} \cap \overline{f_2^{-1}(B_2^2)} = \emptyset$.

De la afirmación anterior, f_1 y f_2 cumplen las hipótesis del teorema 1.39, así f_1 y f_2 se pueden extender a las siguientes funciones continuas

$$C_2 : c_2 X \rightarrow c_1 X \quad \text{y} \quad C_1 : c_1 X \rightarrow c_2 X,$$

respectivamente. Sea $x \in X$, luego $c_2(x) \in c_2(X)$ por lo que

$$C_2(c_2(x)) = (c_1 \circ h_2)(c_2|_X(x)) = [(c_1 \circ h_2) \circ c_2|_X](x) = [c_1 \circ (h_2 \circ c_2|_X)](x) = c_1(x),$$

de ahí que $C_2 \circ c_2 = c_1$, por lo tanto $c_1 X \preceq c_2 X$. De manera análoga se prueba que $c_2 X \preceq c_1 X$. Finalmente, dado que $\preceq$ es antisimétrica, entonces $c_1 X \cong c_2 X$. $\square$

Dado que estamos induciendo una relación de orden parcial y no total en $\mathcal{C}(X)$, entonces existen dos compactaciones de un mismo espacio topológico no compacto que no son comparables entre sí respecto a la relación $\preceq$. En la siguiente sección hallaremos ejemplos que ilustran esta afirmación.

El siguiente teorema establece una propiedad importante de la familia $\mathcal{C}(X)$.

Teorema 2.20. Toda subfamilia no vacía $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}(X)$ tiene una mínima cota superior, con respecto al orden $\preceq$ en $\mathcal{C}(X)$.

Demostración. Sea $\mathcal{C}_0 = \{c_s X\}_{s \in S}$ y $c_0 = \triangle_{s \in S} c_s : X \rightarrow \prod_{s \in S} c_s X$ la diagonal de $\mathcal{C}_0$.

Por el teorema 1.24, c_0 es un encaje homeomorfo. Sea $c_0 X$ la cerradura de $c_0(X)$ en $\prod_{s \in S} c_s X$. El teorema 1.30 y 1.40, implican que $c_0 X$ es un espacio compacto. Por lo que

$c_0 X \in \mathcal{C}(X)$. Veamos que $c_0 X$ es la mínima cota superior de la familia $\mathcal{C}_0$. Sea $s \in S$ y $p_s : \prod_{s \in S} c_s X \rightarrow c_s X$ la función proyección. Sea $x \in X$, entonces $(p_s|_{c_0 X} \circ c_0)(x) = p_s|_{c_0 X}(c_0(x)) = p_s|_{c_0 X}(\{c_s(x)\}_{s \in S}) = c_s(x)$. Dado que la restricción $p_s|_{c_0 X}$ es una función continua, tenemos que $c_s X \preceq c_0 X$ para cada $s \in S$.

Supongamos que existe $cX \in \mathcal{C}(X)$ tal que $c_s X \preccurlyeq cX$ para cada $s \in S$. Luego, para cada $s \in S$ existe una función continua $f_s : cX \rightarrow c_s X$ tal que $(f_s \circ c)(x) = c_s(x)$, para cada $x \in X$. Sea $F = \Delta_{s \in S} f_s$ la diagonal de la familia $\{f_s\}_{s \in S}$, note que F es una función continua. Sea $x \in X$, entonces $(F \circ c)(x) = F(c(x)) = \{f_s(c(x))\}_{s \in S} = \{c_s(x)\}_{s \in S} = c_0(x)$. Por lo tanto, $F(c(X)) = c_0(X)$, del corolario 1.35, se tiene que $F(cX) = c_0X$. Por ende, $F : cX \rightarrow c_0X$ es una función continua tal que $(F \circ c)(x) = c_0(x)$ para todo $x \in X$, por lo que $c_0X \preccurlyeq cX$. Así, concluimos que c_0X es la mínima cota superior de la subfamilia $\mathcal{C}_0$. $\square$

El siguiente resultado es una consecuencia directa de los Teoremas 2.9 y 2.20.

Corolario 2.21. *Para cada espacio X de Tychonoff existe en $\mathcal{C}(X)$ un elemento maximal con respecto al orden $\preccurlyeq$.*

El elemento máximo en $\mathcal{C}(X)$ es llamada la **compactación de Stone-Čech** de X .

2.2. Compactación de Alexandroff

Los objetivos principales de esta sección son, en primer lugar, construir la compactación cuyo residuo consta de un solo punto y, en segundo lugar, establecer las condiciones que debe cumplir un espacio topológico X para que la familia $\mathcal{C}(X)$ posea un elemento minimal. En lo que sigue, si $(X, \mathcal{O})$ es un espacio topológico y $\Omega \notin X$, utilizaremos la notación $\mathcal{O}_\Omega$ para referirnos a la colección:

$$\mathcal{O}_\Omega = \mathcal{O} \cup \{\{\Omega\} \cup (X \setminus F) : F \text{ es un subespacio compacto de } X\}.$$

Lema 2.22. *Sean $(X, \mathcal{O})$ un espacio de Hausdorff y $\Omega \notin X$. Entonces $(X \cup \{\Omega\}, \mathcal{O}_\Omega)$ es un espacio topológico. Más aún, si X es localmente compacto, entonces $(X \cup \{\Omega\}, \mathcal{O}_\Omega)$ es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. Para probar que $\mathcal{O}_\Omega$ es una topología en $X \cup \{\Omega\}$, verificaremos que cumple las siguientes propiedades:

1. $\emptyset, X \cup \{\Omega\} \in \mathcal{O}_\Omega$
2. Si $U_1, U_2 \in \mathcal{O}_\Omega$ entonces $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}_\Omega$.
3. Si $\{U_s\}_{s \in S} \subset \mathcal{O}_\Omega$ entonces $\bigcup_{s \in S} U_s \in \mathcal{O}_\Omega$.

A continuación demostraremos que $\mathcal{O}_\Omega$, en efecto, cumple con estas propiedades.

1. Por vacuidad el conjunto $\emptyset$ es subespacio compacto de X entonces

$$\{\Omega\} \cup X = \{\Omega\} \cup (X \setminus \emptyset) \in \mathcal{O}_\Omega.$$

Por otro lado, para probar que $\emptyset \in \mathcal{O}_\Omega$, basta notar que $\emptyset \in \mathcal{O}$.

2. Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{O}_\Omega$. Tenemos los siguientes casos:

2.1 Si $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ y dado que $\mathcal{O}$ es una topología, se tiene que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$, de ahí que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}_\Omega$.

2.2 Si $U_1, U_2 \notin \mathcal{O}$ entonces existen subespacios compactos F_1, F_2 de X tales que

$$U_1 = \{\Omega\} \cup (X \setminus F_1) \quad \text{y} \quad U_2 = \{\Omega\} \cup (X \setminus F_2).$$

Así

$$\begin{aligned} U_1 \cap U_2 &= [\{\Omega\} \cup (X \setminus F_1)] \cap [\{\Omega\} \cup (X \setminus F_2)] \\ &= \{\Omega\} \cup [(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2)] \\ &= \{\Omega\} \cup [X \setminus (F_1 \cup F_2)]. \end{aligned}$$

Luego, por el corolario 1.33, se tiene que $F_1 \cup F_2$ es un subespacio compacto de X , de ahí que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}_\Omega$.

2.3 Sin pérdida de generalidad, si $U_1 \in \mathcal{O}$ y $U_2 \notin \mathcal{O}$. Existe F subespacio compacto de X tal que $U_2 = \{\Omega\} \cup (X \setminus F)$. Así

$$U_1 \cap U_2 = U_1 \cap [\{\Omega\} \cup (X \setminus F)] = U_1 \cap (X \setminus F).$$

Por el teorema 1.31, F es un subconjunto cerrado de X , de manera que $X \setminus F \in \mathcal{O}$, por lo tanto $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O} \subset \mathcal{O}_\Omega$.

3. Sea $\{U_s\}_{s \in S} \subset \mathcal{O}_\Omega$. Definamos los siguientes conjuntos:

$$S_1 = \{s \in S : U_s \in \mathcal{O}\} \text{ y } S_2 = \{s \in S : U_s \notin \mathcal{O}\}.$$

Tenemos los siguientes dos casos:

3.1 Si $S_2 = \emptyset$, entonces $S_1 = S$ y recordemos que $\mathcal{O}$ es una topología en X , por lo tanto $\bigcup_{s \in S} U_s = \bigcup_{s \in S_1} U_s \in \mathcal{O} \subset \mathcal{O}_\Omega$.

3.2 Si $S_2 \neq \emptyset$ entonces para cada $j \in S_2$ existe un subespacio compacto F_j de X tal

que $U_j = \{\Omega\} \cup (X \setminus F_j)$. Luego

$$\begin{aligned}
 \bigcup_{s \in S} U_s &= \bigcup_{i \in S_1} U_i \cup \bigcup_{j \in S_2} U_j \\
 &= \bigcup_{i \in S_1} U_i \cup \left[\{\Omega\} \cup \bigcup_{j \in S_2} (X \setminus F_j) \right] \\
 &= \{\Omega\} \cup \left[\bigcup_{i \in S_1} U_i \cup \bigcup_{j \in S_2} (X \setminus F_j) \right] \\
 &= \{\Omega\} \cup \left[\bigcup_{i \in S_1} U_i \cup \left(X \setminus \bigcap_{j \in S_2} F_j \right) \right] \\
 &= \{\Omega\} \cup \left[X \setminus \left(X \setminus \bigcup_{i \in S_1} U_i \cap \bigcap_{j \in S_2} F_j \right) \right] \\
 &= \{\Omega\} \cup \left[X \setminus \left(\bigcap_{i \in S_1} (X \setminus U_i) \cap \bigcap_{j \in S_2} F_j \right) \right]
 \end{aligned}$$

Sea $s_0 \in S_2$ fijo pero arbitrario y observemos que $\bigcap_{i \in S_1} (X \setminus U_i) \cap \bigcap_{j \in S_2} F_j$ es cerrado de F_{s_0} y además sabemos que F_{s_0} es compacto, de ahí que $\bigcap_{i \in S_1} (X \setminus U_i) \cap \bigcap_{j \in S_2} F_j$ es compacto en F_{s_0} y por ende compacto en X . Por lo anterior $\bigcup_{s \in S} U_s \in \mathcal{O}_\Omega$.

Para la segunda parte del enunciado, supongamos que X es un espacio localmente compacto y sean $x, y \in X \cup \{\Omega\}$. Si $x, y \in X$, dado que X es de Hausdorff, entonces existen $U, V \in \mathcal{O}$ tales que $x \in U, y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$, pero evidentemente $U, V \in \mathcal{O}_\Omega$. Por otro lado, si $x \in X$ y $y = \Omega$. Dado que X es localmente compacto entonces existe una vecindad T de x tal que $\bar{T}$ es compacto. Como T es vecindad de x entonces existe U abierto de X , y por ende abierto de $X \cup \{\Omega\}$, tal que $x \in U \subset T$. Por otro lado, sea $V = (X \cup \{\Omega\}) \setminus \bar{T}$, veamos que V es abierto de $X \cup \{\Omega\}$. En efecto, como

$$V = (X \cup \{\Omega\}) \setminus \bar{T} = (X \setminus \bar{T}) \cup (\{\Omega\} \setminus \bar{T}) = \{\Omega\} \cup (X \setminus \bar{T}),$$

por como definimos a $\mathcal{O}_\Omega$, $V \in \mathcal{O}_\Omega$. Por lo tanto, existen $U, V \in \mathcal{O}_\Omega$, $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. En conclusión $X \cup \{\Omega\}$ es un espacio de Hausdorff. $\square$

Teorema 2.23. Sean $(X, \mathcal{O})$ un espacio topológico localmente compacto pero no compacto, y $\Omega \notin X$. El par $((X \cup \{\Omega\}, \mathcal{O}_\Omega), \omega)$ donde ω es el encaje de X en $X \cup \{\Omega\}$, es una compactación de X con residuo un solo punto. Esta compactación de X se denomina la **compactación de Alexandroff** de X , y la denotaremos por ωX .

Demostración. Por el lema 2.22, sabemos que $(X \cup \{\Omega\}, \mathcal{O}_\Omega)$ es un espacio topológico de Hausdorff, por lo que resta probar que es compacto. sea $\{U_s\}_{s \in S}$ una cubierta abierta de $X \cup \{\Omega\}$, por lo que existe $s_0 \in S$ tal que $\Omega \in U_{s_0}$. Como U_{s_0} es abierto de $X \cup \{\Omega\}$ y $\Omega \in U_{s_0}$ entonces existe un subconjunto compacto F de X tal que $U_{s_0} = \{\Omega\} \cup (X \setminus F)$. Así

$$X \setminus U_{s_0} = X \setminus [\{\Omega\} \cup (X \setminus F)] = (X \setminus \{\Omega\}) \cap F = F,$$

por lo que $X \setminus U_{s_0}$ es un subconjunto compacto de X . Por el teorema 1.32, existe un conjunto finito $\{s_1, \dots, s_k\} \subset S$ tal que $X \setminus U_{s_0} \subset \bigcup_{i=1}^k U_{s_i}$. De modo que

$$\bigcup_{i=0}^k U_{s_i} \subset \bigcup_{i \in S} U_{s_i} = X \cup \{\Omega\} = (X \setminus U_{s_0}) \cup U_{s_0} \subset \bigcup_{i=1}^k U_{s_i} \cup U_{s_0} = \bigcup_{i=0}^k U_{s_i},$$

i. e., $X \cup \{\Omega\} = \bigcup_{i=0}^k U_{s_i}$. Por lo tanto ωX es compacto.

Por otro lado, es claro que la función ω es un encaje homeomorfo. Ahora veamos que $w(X)$ es denso en $X \cup \{\Omega\}$. Para ello, supongamos que $\{\Omega\}$ es abierto, como $\{\Omega\} \notin \mathcal{O}$, entonces existe T compacto de X tal que $\{\Omega\} = \{\Omega\} \cup X \setminus T$, de manera que $X \setminus T = \emptyset$ por lo que se deduce que $T = X$, lo cual es una contradicción (ya que por hipótesis X no es compacto). De manera que $\{\Omega\}$ no es abierto de $X \cup \{\Omega\}$, por lo tanto cualquier conjunto abierto no vacío de $X \cup \{\Omega\}$ intersección con X es distinto del vacío. Por lo anterior, X es denso en $X \cup \{\Omega\}$. $\square$

En el teorema 2.23 se establece que, para cualquier espacio topológico que sea localmente compacto pero no compacto, existe su compactación de Alexandroff. En los siguientes resultados se exponen algunas de las propiedades que posee dicha compactación.

Teorema 2.24. *Sea X un espacio localmente compacto pero no compacto. La compactación de Alexandroff ωX de X tiene las siguientes propiedades:*

- a) $w(X) = w(\omega X)$
- b) ωX es el elemento mínimo de $\mathcal{C}(X)$ con respecto al orden $\preceq$;
- c) Toda compactación de X con residuo un solo punto es equivalente a la compactación de Alexandroff ωX ;

Demostración. a) Veamos que $w(X) = w(\omega X)$. Observemos que $w(X) \geq \aleph_0$ ya que en caso contrario, i. e., si $w(X) \leq \aleph_0$ entonces X sería compacto pero por hipótesis sabemos que X no es compacto. Sea F un espacio compacto fijo pero arbitrario de X , y sean

$$A_1 = X \quad \text{y} \quad A_2 = \{\Omega\} \cup (X \setminus F).$$

Considerando $m = w(X)$ y $\{A_i\}_{i=1,2}$ cubierta de ωX , aplicando el [5, corolario 3.1.20], tenemos que $w(\omega X) \leq w(X)$. Además, dado que $X \subset \omega X$ entonces $w(X) \leq w(\omega X)$. Por lo tanto, $w(X) = w(\omega X)$.

b) Sea $cX \in \mathcal{C}(X)$ y definamos la función $f : cX \rightarrow \omega X$ por

$$f(z) = \begin{cases} \omega(c^{-1}(x)) & \text{si } z \in c(X) \\ \Omega & \text{si } z \in cX \setminus c(X) \end{cases}$$

Veamos que $f \circ c = \omega$. En efecto, sea $x \in X$ luego

$$f \circ c(x) = f(c(x)) = \omega(c^{-1}(c(x))) = \omega(x),$$

de manera que $f \circ c = \omega$.

Ahora veamos que f es continua. Sea U un abierto de ωX , por como definimos $\mathcal{O}_\omega$, tenemos los siguientes casos:

1. Si U es abierto de X entonces

$$f^{-1}(U) = (\omega \circ c^{-1})^{-1}(U) = (c \circ \omega)(U).$$

Como ω es una función continua entonces $\omega^{-1}(U)$ es abierto de X , luego $c|_X$ es un homeomorfismo, por lo que $c(\omega^{-1}(U))$ es abierto de $c(X)$. Así, por el teorema 2.11, $c(X)$ es abierto de cX , de ahí que $c(\omega^{-1}(U))$ es abierto de cX .

2. Si $U = \{\Omega\} \cup (X \setminus F)$ donde F es un subespacio compacto de X , entonces

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= f^{-1}(\{\Omega\}) \cup f^{-1}(X \setminus F) \\ &= [cX \setminus c(X)] \cup [c \circ \omega^{-1}(X \setminus F)] \\ &= [cX \setminus c(X)] \cup c(X \setminus F) \\ &= [cX \setminus c(X)] \cup [c(X) \setminus c(F)]. \end{aligned}$$

Dado que $c(F) \subset c(X)$, entonces $[cX \setminus c(X)] \cup [c(X) \setminus c(F)] = cX \setminus c(F)$. Es decir, $f^{-1}(U) = cX \setminus c(F)$. Dado que c es una función continua y F es un subespacio compacto de X , entonces $c(F)$ es compacto en cX , de ahí que $c(F)$ es cerrado de X . Por lo tanto, $cX \setminus c(F)$ es abierto de cX , i. e., $f^{-1}(U)$ es abierto de cX .

De los anteriores casos concluimos que f es una función continua tal que $f \circ c = \omega$, así $\omega X \preceq cX$.

c) Sea cX una compactación de X con residuo un solo punto. Consideremos la función f definida como en b). Anteriormente probamos que f es continua, resta probar que f es biyectiva. Veamos que

$$f(cX) = f(c(X)) \cup f(cX \setminus c(X)) = \omega(X) \cup \{\Omega\} = \omega X,$$

por lo que f es suprayectiva. Dado que $\omega \circ c^{-1}$ es inyectiva, $c(X) \cap [cX \setminus c(X)] = \emptyset$ y $f(z) = \Omega$ ssi $z \in cX \setminus c(X)$, entonces la función f es inyectiva. Por lo anterior y haciendo uso del teorema 1.37, se tiene que f es un homeomorfismo y además cumple que $f \circ c = \omega$, por lo que cX y ωX son equivalentes.

□

El siguiente resultado es una consecuencia directa de la proposición 2.6 y del inciso c) del teorema 2.24.

Corolario 2.25. *Sean X_1, X_2 espacios localmente compactos y (A, ω) la compactación de Alexandroff de X_1 . Si $f : X_2 \rightarrow X_1$ es un homeomorfismo entonces $(A, \omega \circ f)$ es la compactación de Alexandroff de X_2 .*

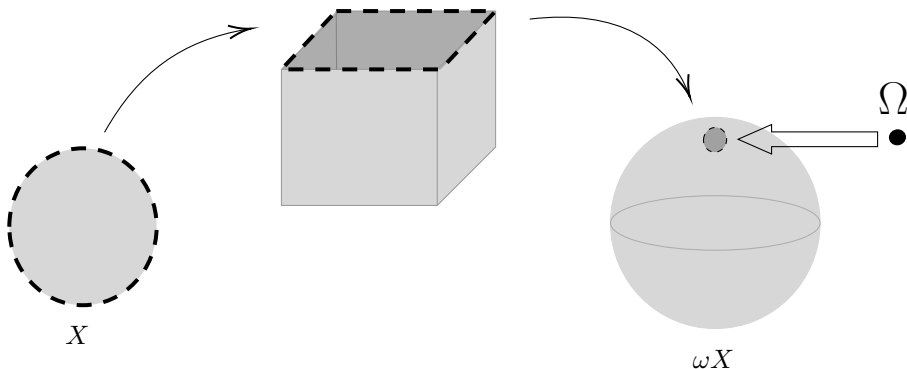
A continuación mostraremos un ejemplo ilustrativo para comprender mejor la compactación de Alexandroff. Recordemos que la n -esfera centrada en $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ y con radio $r > 0$, es el espacio

$$\mathbb{S}^n(c, r) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x - c\| = r\},$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma euclidiana usual. Si c es igual al origen y $r = 1$, entonces

$$\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^n(0, 1) = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2} = 1\right\}.$$

Ejemplo 2.26. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathbb{S}^n$ es la compactación de Alexandroff de $\mathbb{R}^n$.*



Sabemos, por el teorema 2.9, que todo espacio de Tychonoff tiene al menos una compactación. Sin embargo, la existencia de la compactación de Alexandroff requiere que el espacio sea localmente compacto, condición que no todo espacio de Tychonoff cumple.

Teorema 2.27. *Sea X un espacio de Tychonoff no compacto. Si en la familia $\mathcal{C}(X)$ existe un elemento cX el cual es el más pequeño con respecto al orden $\preceq$, entonces X es localmente compacto y cX es equivalente a la compactación de Alexandroff ωX de X .*

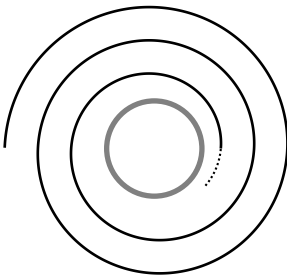
Demostración. Veamos que X es localmente compacto, para ello, por el teorema 2.11, basta demostrar que el residuo de cX es unipuntual. Supongamos que existen $x_1, x_2 \in cX \setminus c(X)$ tales que $x_1 \neq x_2$. Sea $A = cX \setminus \{x_1, x_2\}$, observemos que A es abierto de cX , así por el teorema 1.49, tenemos que A es localmente conexo. Además, si suponemos que A es compacto, entonces es A es cerrado de cX , luego dado que $c(X) \subset A$, se tiene que $\overline{c(X)}^{cX} \subset \overline{A}^{cX}$ de manera que $cX \subset A$, lo cual es una contradicción. Por ende, A no es compacto. Por lo anterior, existe la compactación de Alexandroff ωA de A .

Veamos que ωA es compactación de X . Como $\omega : A \rightarrow \omega(A)$ es un homeomorfismo y $cX \subset A$, entonces $\omega|^{c(X)}$ es un homeomorfismo. De manera que, $c_1 = \omega \circ c : X \rightarrow \omega A$ es un encaje homeomorfo. Sea U un abierto de ωA . Como ω es una función continua entonces $\omega^{-1}(U)$ es abierto de A , pero A abierto de cX , entonces $\omega^{-1}(U)$ es abierto de cX , por lo que $\omega^{-1}(U) \cap c(X) \neq \emptyset$. Así, existe $x \in X$ tal que $c(x) \in \omega^{-1}(U)$, es decir, $\omega(c(x)) \in U$. Por ende, $U \cap c_1(X) \neq \emptyset$, de manera que $\omega A = \text{cl}_{\omega A}(c_1(X))$. Por lo tanto $(\omega A, c_1)$ es una compactación de X , y la denominaremos $c_1 X$. Por otro lado, dado que cX es la compactación más pequeña de X entonces $cX \leq c_1 X$ por lo que existe una función continua $f : c_1 X \rightarrow cX$ tal que $f(c_1(X)) = c(X)$, luego $f|^{c(X)} = \text{Id}_{c(X)}$. Por el 1.7, tenemos que $f|_A = \text{Id}_A$, así, aplicando el teorema 2.16 a las compactaciones cX y $c_1 X$, se tiene que $f(\{\Omega\}) = \{x_1, x_2\}$ (contradicción). Por lo tanto, $cX \setminus c(X)$ es de un solo punto. $\square$

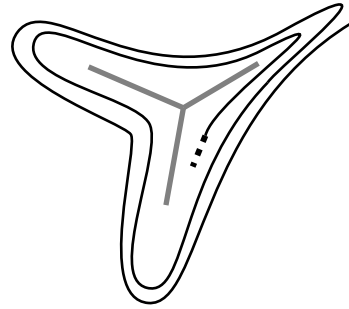
Teorema 2.28. [[5], teorema 1.5.13] Sean X un espacio localmente compacto, Y un espacio compacto y $cX \in \mathcal{C}(X)$. Si existe una función $f : cX \setminus c(X) \rightarrow Y$ continua y suprayectiva, entonces existe $c'x \in \mathcal{C}(X)$ tal que $c'X \leq cX$ y $c'X \setminus c'(X)$ es homeomorfo a Y .

2.3. Compactaciones del rayo $[0, \infty)$

En esta sección consideraremos las siguientes convenciones. Primero, el espacio $[0, \infty)$ es considerado con la métrica euclidiana inducida por $\mathbb{R}$, segundo, una compactación además de poseer las características definidas en 2.1, también es un espacio métrico, y por último un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y con más de un punto. Para comenzar, presentamos algunos ejemplos visuales de compactaciones del rayo $[0, \infty)$.



((a)) Compactación del rayo con residuo una circunferencia.



((b)) Compactación del rayo con residuo un triodo simple.

El teorema 2.30 describe propiedades acerca de las compactaciones de rayos. Antes de abordar este resultado es necesario demostrar el siguiente lema.

Lema 2.29. Sean Y un espacio topológico y $f : [0, \infty) \rightarrow Y$ una función inyectiva. Sean $x, y \in [0, \infty)$, entonces $x < y$ si y solo si $f([y, \infty)) \subsetneq f([x, \infty))$.

Demostración. Sean $x, y \in [0, \infty)$. Supongamos que $x < y$, esto sucede si y solo si $[y, \infty) \subsetneq [x, \infty)$, luego dado que f es inyectiva, entonces $[y, \infty) \subsetneq [x, \infty)$ si y solo si $f([y, \infty)) \subsetneq f([x, \infty))$. $\square$

Teorema 2.30. Sean $X = [0, \infty)$ y cX una compactación de X con residuo R . Las siguientes proposiciones se cumplen:

- a) Si $0 \leq a < b$ entonces $c([0, b))$ y $c((a, b))$ son abiertos en cX ;
- b) Si $0 < a$ entonces $cX \setminus \{c(a)\}$ es desconexo y $c([a, \infty)) \cup R$ es homeomorfo a cX ;
- c) Si A es un subcontinuo de cX con $A \cap R \neq \emptyset$, entonces $A \subset R$ o $R \subset A$;
- d) Si A es un subcontinuo de cX entonces A tiene una de las siguientes formas:
 - i) A es un subcontinuo de R ,
 - ii) $A = c([a, b])$ para algunos $0 \leq a \leq b$,
 - iii) $A = c([a, \infty)) \cup R$ para algún $a \in [0, \infty)$;
- e) Existe una función $f : cX \rightarrow [0, 1]$ continua y suprayectiva tal que $f^{-1}(t)$ es un subcontinuo de cX , para cada $t \in [0, 1]$;
- f) Si R es un conjunto de un solo punto entonces cX es un arco;
- g) Si R tiene más de un punto entonces cX no es conexo por caminos.

Demostración. a) Sean $a, b \in X$ tales que $0 \leq a < b$. Sabemos que los conjuntos (a, b) y $[0, b)$ son abiertos en X , y dado que $c|_X : X \rightarrow c(X)$ es un homeomorfismo, entonces $c((a, b))$ y $c([0, b))$ son abiertos en $c(X)$. Luego, existen A_1, A_2 abierto de cX tales que

$$A_1 \cap c(X) = c((a, b)),$$

$$A_2 \cap c(X) = c([0, b)).$$

Veamos que $A_1 = c((a, b))$, para ello basta probar que $A_1 \subset c((a, b))$. En efecto, como $[a, b]$ es compacto en X entonces $c([a, b])$ es compacto en cX , de ahí que $c([a, b])$ es cerrado de cX . Además, como $(a, b) \subset [a, b]$ entonces $c((a, b)) \subset c([a, b])$ así $\overline{c((a, b))}^{cX} \subset \overline{c([a, b])}^{cX} = c([a, b])$. Finalmente, por [5, teorema 1.3.6], tenemos que

$$A_1 \subset \overline{A_1}^{cX} \subset \overline{A_1 \cap c(X)}^{cX} = \overline{c((a, b))}^{cX} \subset c([a, b]),$$

pero $c([a, b]) \subset c(X)$, por ende

$$A_1 = A_1 \cap c([a, b]) \subset A_1 \cap c(X) = c((a, b)),$$

i. e., $A_1 \subset c((a, b))$. De manera análoga se prueba que $A_2 = c([0, b))$. Por lo tanto hemos demostrado que $c((a, b))$ y $c([0, b))$ son abiertos en cX .

b) Sea $a \in X$ con $a > 0$. Por a) sabemos que $c([0, a))$ es abierto de cX , por ende $c([0, a)) = c([0, a)) \cap (cX \setminus \{c(a)\})$ es abierto de $cX \setminus \{c(a)\}$. Además, sabemos que $c([0, a])$ es cerrado de cX , de manera que $c([0, a)) = c([0, a]) \cap (cX \setminus \{c(a)\})$ es cerrado de $cX \setminus \{c(a)\}$. Así, el conjunto $c([0, a))$ es cerrado y abierto de $cX \setminus \{c(a)\}$. Por lo tanto, se deduce que $c([0, a))$ y $c((a, \infty)) \cup R$ desconectan a $cX \setminus \{c(a)\}$.

Ahora demostraremos la segunda parte del enunciado. Sean $d > a$, $A = cX \setminus c([0, d])$ y $B = c([0, d])$. Por a), sabemos que A y B son cerrados en cX y además $cX = A \cup B$. Sean

$$h_1 : A \rightarrow c([a, \infty)) \cup R \text{ tal que } h_1(x) = x \text{ para todo } x \in A$$

y

$$h_2 := c|^{[a, d]} \circ g \circ (c|^{[0, d]})^{-1} : B \rightarrow c([a, \infty)) \cup R$$

donde $g : [0, d] \rightarrow [a, d]$ tal que $g(z) = \frac{z(d-a)}{d} + a$. Observemos que, la función h_1 es continua y por construcción la función h_2 también es continua, además $A \cap B = \{c(d)\}$ y veamos que

$$\begin{aligned} h_2(c(d)) &= (c|^{[a, d]} \circ g \circ (c|^{[0, d]})^{-1})(c(d)) \\ &= c|^{[a, d]}(g(d)) \\ &= c|^{[a, d]}\left(\frac{d(d-a)}{d} + a\right) \\ &= c(d) \\ &= h_1(c(d)). \end{aligned}$$

Aplicando el Lema del pegamiento (ver [14, teorema 18.3]) para las funciones h_1 y h_2 , se tiene que la función $f : cX \rightarrow c([a, \infty)) \cup R$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in cX \setminus c([0, d]); \\ c\left(\frac{c^{-1}(x)(d-a)}{d} + a\right) & \text{si } x \in c([0, d]), \end{cases}$$

es continua. Resta probar que f es biyectiva. Para ello, primero veamos que $f(A) = f_1(A) = c(X) \setminus c([0, d])$, además

$$f(B) = f_2(B) = (c \circ g)(c^{-1}(B)) = (c \circ g)([0, d]) = c(g([0, d])) = c([a, d]),$$

de manera que

$$f(cX) = f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) = A \cup c([a, d]) = c([a, \infty)) \cup R,$$

por lo cual f es suprayectiva. Por otro lado, para demostrar la inyectividad de f y dado que h_1 y h_2 son inyectivas, resta probar que si $f(x) = f(y)$ donde $x \in A$, $y \in B$ entonces $x = y$. Observemos que

$$f(A) \cap f(B) = (c([d, \infty) \cup R)) \cap c([a, d]) = \{c(d)\},$$

luego $f(x) = f(y) = c(d)$. Dado que $x \in A$ entonces $f(x) = x$ de ahí que $x = c(d)$. Por otro lado, dado que $y \in B$, tenemos que

$$c(d) = f(y) = h_2(y) = c\left(\frac{c^{-1}(y)(d-a)}{d} + a\right)$$

de ahí que

$$\begin{aligned} c(d) = c\left(\frac{c^{-1}(y)(d-a)}{d} + a\right) &\implies d = \frac{c^{-1}(y)(d-a)}{d} + a \\ &\implies d - a = \frac{c^{-1}(y)(d-a)}{d} \\ &\implies d = c^{-1}(y) \\ &\implies c(d) = y. \end{aligned}$$

Por lo tanto $y = c(d) = x$, concluyendo que $x = y$. De esta manera, hemos probado que f es una función biyectiva. Finalmente, por el teorema 1.37, tenemos que f es un homeomorfismo entre $c([a, \infty)) \cup R$ y cX .

- c) Sea A un subcontinuo de cX con $A \cap R \neq \emptyset$. Si $A \not\subseteq R$, entonces existe $a \geq 0$ tal que $c(a) \in A$. Veamos que $c([a, \infty)) \subset A$. Supongamos que existe $b > a$ tal que $c(b) \notin A$. Dado que $b > 0$, por b , tenemos que $cX \setminus \{c(b)\}$ es desconexo, más aún, sabemos que $c([0, b))$ y $c((b, \infty)) \cup R$ desconectan a $cX \setminus \{c(b)\}$. Luego, tenemos que f (definido como en b) con $d = b$ es un homeomorfismo, de manera que $f(c([0, b)))$ y $f(c((b, \infty)) \cup R)$ desconectan a $f(cX \setminus \{c(b)\})$, pero

$$f(c([0, b))) = c([a, b)),$$

$$f(c((b, \infty)) \cup R) = c((b, \infty)) \cup R,$$

$$f(cX \setminus \{c(b)\}) = (c([a, \infty)) \cup R) \setminus f(c(b)) = (c([a, \infty)) \cup R) \setminus \{c(b)\}.$$

Luego, $(c([a, b))) \cap A$ y $(c((b, \infty)) \cup R) \cap A$ desconectan a A (lo cual es una contradicción, ya que A es conexo). Por lo tanto $c([a, \infty)) \subset A$.

Por otro lado, notemos que $f(c([0, \infty))) = c([a, \infty))$ entonces

$$\overline{f(c([0, \infty)))} = \overline{c([a, \infty))} \subset \bar{A} = A$$

pero

$$\overline{f(c([0, \infty)))} = f(\overline{c([0, \infty))}) = f(cX) \supset R,$$

de manera que $R \subset A$.

d) Sea A un subcontinuo de cX . Consideramos los siguientes casos:

1. Si $A \cap R \neq \emptyset$, por c), tenemos que $A \subset R$ o $R \subset A$. Si $A \subset R$ entonces A es un subcontinuo de R . Si $R \subsetneq A$, entonces $B = A \cap c(X)$ es distinto del vacío, luego $c^{-1}(B)$ es cerrado de X y acotado inferiormente, por lo tanto tiene mínimo. Sea $a = \min(c^{-1}(B))$ y notemos que $c([a, \infty)) = B$ (ver la demostración del inciso c)). Por lo tanto, $A = B \cup R = c([a, \infty)) \cup R$.
2. Si $A \cap R = \emptyset$ entonces $A \subset c(X)$. Dado que A es cerrado de cX entonces A es compacto, de ahí que $c^{-1}(A)$ es compacto, así, por el [8, lema 5.28], tenemos que $c^{-1}(A)$ tiene mínimo y máximo, *i.e.*, existen $0 \leq a \leq b$ tales que $a \leq x \leq b$ para todo $x \in c^{-1}(A)$. Finalmente, dado que A es conexo entonces $c^{-1}(A) = [a, b]$ de ahí que $A = c([a, b])$.

e) Sabemos que $(c|^{[0,1]})^{-1}$ es un homeomorfismo, y además notemos que la función $g : c([1, \infty)) \cup R \rightarrow [0, 1]$ tal que $g(z) = 1$ para todo $z \in c([1, \infty)) \cup R$, es continua. Sean $A = c([0, 1])$ y $B = c([1, \infty)) \cup R$, observemos que A y B son cerrados en cX y además $A \cap B = \{c(1)\}$ luego $(c|^{[0,1]})^{-1}(c(1)) = 1 = g(c(1))$. Aplicando el Lema del pegamiento (ver [14, teorema 18.3]) para las funciones $(c|^{[0,1]})^{-1}$ y g , se tiene que la función $f : cX \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} c^{-1}(x) & \text{si } x \in c([0, 1]); \\ 1 & \text{si } x \in c([1, \infty)) \cup R, \end{cases}$$

es continua. Dado que $(c|^{[0,1]})^{-1}$ es un homeomorfismo, entonces f es suprayectiva. Finalmente, sea $t \in [0, 1]$ y recordemos que $f^{-1}(t) = \{x \in cX : f(x) = t\}$. Si $t \in [0, 1)$ y dado que $(c|^{[0,1]})^{-1}$ es inyectiva, entonces $f^{-1}(t) = \{c(t)\}$, dado que $f^{-1}(t)$ es un conjunto singular, entonces es cerrado de cX y evidentemente es conexo, por lo tanto $f^{-1}(t)$ es un subcontinuo de cX . Si $t = 1$ entonces $f^{-1}(t) = c([1, \infty)) \cup R$, por a) tenemos que $f^{-1}(t)$ es cerrado de cX y por b), se tiene que $f^{-1}(t)$ es conexo, por lo tanto $f^{-1}(t)$ es un subcontinuo de cX . En conclusión, para cada $t \in [0, 1]$, se tiene que $f^{-1}(t)$ es un subcontinuo de cX .

f) Sabemos que existe $f : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ homeomorfismo. Además observemos que $([0, 1], h)$ donde $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $h(x) = x$ para toda $x \in [0, 1]$, es la compactación de Alexandroff de $[0, 1]$, luego por el corolario 2.25, $([0, 1], h \circ f)$ es la compactación de Alexandroff de $[0, \infty)$. Por el teorema 2.24 inciso c), tenemos que $([0, 1], h \circ f)$ y cX son equivalentes, de manera que existe un homeomorfismo $T : [0, 1] \rightarrow cX$. Así concluimos que cX es un arco.

g) Sean $p, q \in R$ tal que $p \neq q$. Supongamos que cX es conexo por caminos, por lo que existe una función continua $f : [0, 1] \rightarrow cX$ tal que $f(0) = c(0)$ y $f(1) = p$. Notemos que $f([0, 1])$ es compacto y conexo, por lo que es un subcontinuo en cX , así por d) y dado que $f([0, 1]) \subsetneq c(X)$ y $f([0, 1]) \subsetneq R$, tenemos que $R \subset f([0, 1])$. Luego, existe $0 < r_1 < 1$ tal que $f(r_1) = q$. Ahora, observemos que $[0, r_1]$ es cerrado y conexo, de manera análoga al razonamiento previo, se tiene que $R \subset f([0, r_1])$, por lo que existe $0 < r_2 < r_1$ tal que $f(r_2) = p$. Continuando de esta manera podemos crear la

sucesión $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ donde $f(r_i) = p$ si i es par y $f(r_i) = q$ si i es impar. Luego, dado que la sucesión $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente y acotada inferiormente entonces es convergente, por lo que existe $r \in [0, 1]$ tal que $r_n \rightarrow r$, pero f es una función continua por lo que $f(r_n) \rightarrow f(r)$. Dado que $\{f(r_{2n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{f(r_{2n-1})\}_{n \in \mathbb{N}}$ son subsucesiones de $\{f(r_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ entonces $f(r_{2n-1}) \rightarrow f(r)$ y $f(r_{2n-1}) \rightarrow f(r)$, de ahí que $p = f(r) = q$ (contradicción ya que por hipótesis $p \neq q$). Por lo tanto cX no es conexo por caminos. $\square$

Corolario 2.31. Si $X = [0, \infty)$ y cX es una compactación de X con residuo R , entonces R es un subcontinuo de cX .

Demostración. Por el inciso a) y b) del teorema 2.30, tenemos que $c([n, \infty)) \cup R$ es un subcontinuo de cX , para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} c([n, \infty)) = \emptyset$. Supongamos que

existe $t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} c([n, \infty))$, luego $c^{-1}(t) \in X$ así, por la propiedad arquimediana, existe $m \in \mathbb{N}$

tal que $m > t$, de manera que $t \notin ([m, \infty))$ (contradicción, ya que $\bigcap_{n=1}^{\infty} [n, \infty) \subset [m, \infty)$).

Finalmente, por el teorema 1.73, tenemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} (c([n, \infty)) \cup R)$ es un continuo, pero

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (c([n, \infty)) \cup R) = R \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} c([n, \infty)) = R \cup \emptyset = R,$$

i. e., R es un subcontinuo de cX . $\square$

En relación con la conexión entre continuos y compactaciones, el siguiente resultado muestra un caso particularmente interesante e ilustrativo en el que el residuo de una compactación del rayo $[0, \infty)$, es un continuo bien conocido.

Teorema 2.32. Existe una compactación de $[0, \infty)$ con residuo $[0, 1]^2$.

Demostración. Sea $I = [0, 1]$ y consideremos a $J = I^2 \times \{0\}$ como subespacio de $I^3 = [0, 1]^3$. Sea $P = \{(x_i, y_i, 0) : i \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso y numerable de J .

Para cada $i, j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$ y $t \in (0, 1]$, fijemos $\alpha_{i,j}^t$ un arco contenido en $I^2 \times \{t\}$ con puntos extremos (x_i, y_i, t) y (x_j, y_j, t) . A su vez, para cada $s, t \in (0, 1]$ con $s < t$ y $i \in \mathbb{N}$, fijemos $\beta_i^{t,s} = \{(x_i, y_i, r) : r \in [s, t]\}$ el arco en I^3 con puntos extremos (x_i, y_i, t) , (x_i, y_i, s) .

Sea

$$A_1 = \alpha_{1,2}^1 \cup \beta_2^{1, \frac{1}{2}} \cup \alpha_{1,2}^{\frac{1}{2}}.$$

A continuación, dividimos el intervalo $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ en tres partes iguales, y sean $d_1^2, d_2^2 \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ con $\frac{1}{3} < d_1^2 < d_2^2 < \frac{1}{2}$ los puntos que determinan dicha división. Sea

$$A_2 = \beta_1^{\frac{1}{2}, d_2^2} \cup \alpha_{1,3}^{d_2^2} \cup \beta_3^{d_2^2, d_1^2} \cup \alpha_{2,3}^{d_1^2} \cup \beta_2^{d_1^2, \frac{1}{3}} \cup \alpha_{1,2}^{\frac{1}{3}}.$$

Luego, dividimos el intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ en cuatro partes iguales, y sean $d_1^3, d_2^3, d_3^3 \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ con $\frac{1}{4} < d_1^3 < d_2^3 < d_3^3 < \frac{1}{3}$ los puntos que determinan dicha división. Sea

$$A_3 = \beta_1^{\frac{1}{3}, d_3^3} \cup \alpha_{1,4}^{d_3^3} \cup \beta_4^{d_3^3, d_2^3} \cup \alpha_{3,4}^{d_2^3} \cup \beta_3^{d_2^3, d_1^3} \cup \alpha_{2,3}^{d_1^3} \cup \beta_2^{d_1^3, \frac{1}{4}} \cup \alpha_{1,2}^{\frac{1}{4}}.$$

En general, sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. La construcción de A_n es de la siguiente forma, dividimos el intervalo $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ en $n+1$ partes iguales, sean $d_1^n, \dots, d_n^n \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ con $\frac{1}{n+1} < d_1^n < \dots < d_n^n < \frac{1}{n}$ los puntos que determinan dicha división. Sea

$$A_n = \beta_1^{\frac{1}{n}, d_n^n} \cup \alpha_{1,n+1}^{d_n^n} \cup \left(\bigcup_{m=2}^n \beta_{m+1}^{d_m^n, d_{m-1}^n} \right) \cup \left(\bigcup_{m=2}^n \alpha_{m,m+1}^{d_{m-1}^n} \right) \cup \beta_2^{d_1^n, \frac{1}{n+1}} \cup \alpha_{1,2}^{\frac{1}{n+1}}.$$

Observación. A partir de la construcción de A_n se observa que:

1. A_n es un arco contenido en $I^2 \times [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ cuyos puntos extremos son $(x_1, y_1, \frac{1}{n})$ y $(x_1, y_1, \frac{1}{n+1})$;
2. para cada $j \in \{1, \dots, n+1\}$ existe $s_n^j \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ tal que A_n contiene al punto (x_j, y_j, s_n^j) ;
3. $A_n \cap J = \emptyset$;
4. $A_n \cap A_m \neq \emptyset$ sii $|n-m| \leq 1$. Además, si $n > 1$ entonces

$$A_n \cap \left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \setminus A_n \right) = \left\{ \left(x_1, y_1, \frac{1}{n} \right), \left(x_1, y_1, \frac{1}{n+1} \right) \right\}.$$

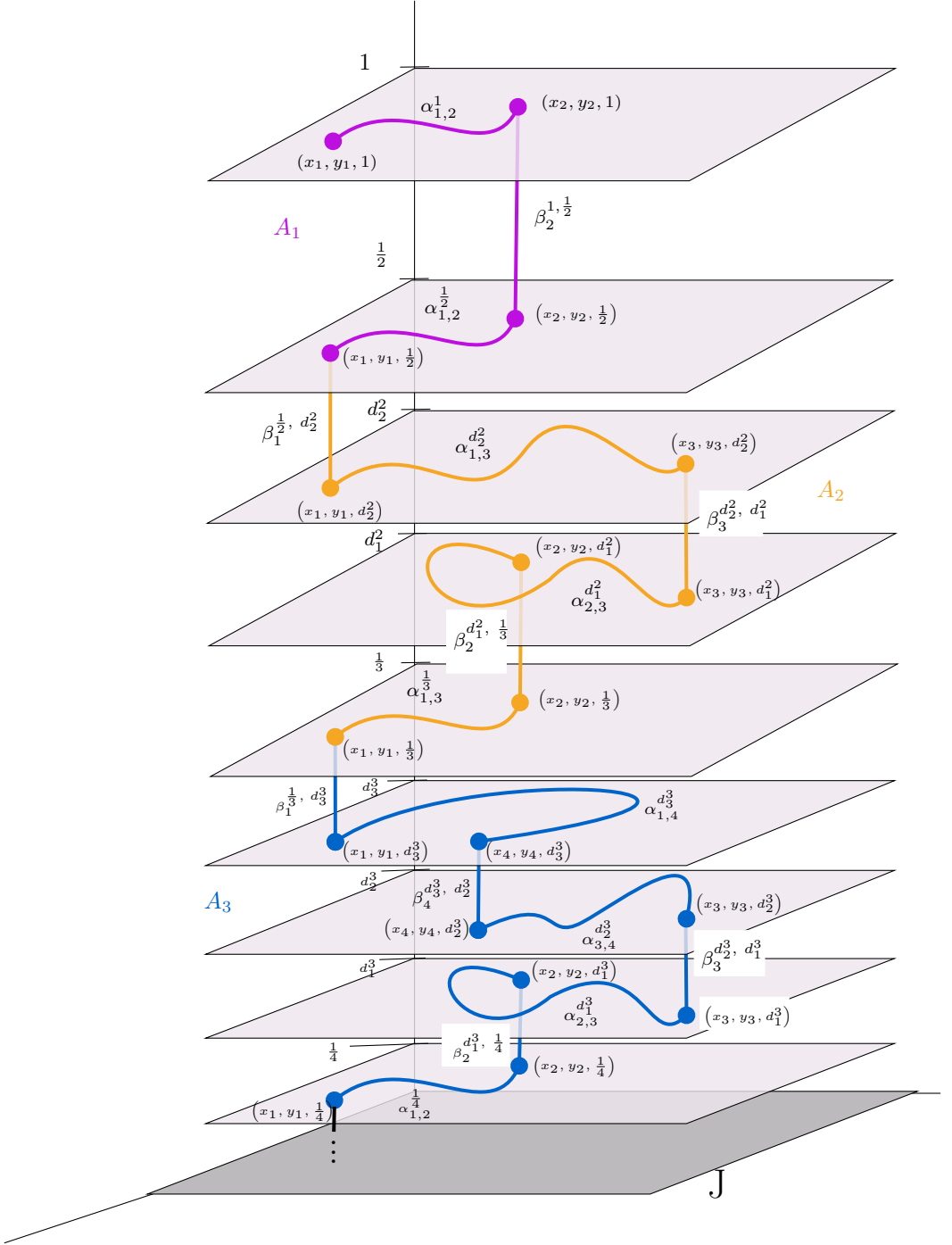
$$\text{Sea } X = \text{cl}_{I^3} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right).$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, como A_n es un arco, podemos definir un homeomorfismo

$$h_n : [n-1, n] \rightarrow A_n \text{ tal que } h_n(n-1) = \left(x_1, y_1, \frac{1}{n} \right) \text{ y } h_n(n) = \left(x_1, y_1, \frac{1}{n+1} \right).$$

Sea $H : [0, \infty) \rightarrow X$ definida por $H(t) = h_n(t)$ cuando $t \in [n-1, n]$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por el inciso (4) de la observación, se cumple que H es una función inyectiva, además por el Lema del pegamiento ([14, teorema 18.3]), H es una función continua. Observemos que cada h_i es un homeomorfismo, por lo que $(H|^{[0, \infty)})^{-1}$ es un homeomorfismo, por ende H es un encaje homeomorfo de $[0, \infty)$ sobre X . Además, notemos que $H([0, \infty)) = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_n$ y por ende $\text{cl}_{I^3}(H([0, \infty))) = X$. Por lo tanto, (H, X) es una compactación de $[0, \infty)$.

Afirmación. $J = X \setminus H([0, \infty))$



Demostración de la afirmación. $[\subset]$ Por el inciso (2) de la observación, se cumple que $P \subset X$, de esto que $\text{cl}_{I^3}(P) \subset X$, es decir, $J \subset X$. Luego, por el inciso (3) de la observación concluimos que $J \subset X \setminus H([0, \infty))$.

$[\supset]$ Sea $(x, y, z) \in X \setminus H([0, \infty))$. Dado que $X \subset I^3$ entonces $x, y, z \in [0, 1]$. A su vez, existe una sucesión $\{(x_j, y_j, z_j)\}_{j=1}^\infty$ de elementos de $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ tal que $\lim(x_j, y_j, z_j) = (x, y, z)$, esto define una sucesión $\{t_j\}_{j=1}^\infty$ en $[0, \infty)$ tal que $H(t_j) = (x_j, y_j, z_j)$. Note que la sucesión $\{t_j\}_{j=1}^\infty$ diverge a infinito, ya que en caso contrario sería acotada, lo que daría una subsucesión convergente en algún intervalo cerrado de la forma $[0, k]$ para algún $k \in \mathbb{N}$, esto implica que $(x, y, z) \in H([0, \infty))$, lo cual es una contradicción. Así, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $j_m \in \mathbb{N}$ tal que $(x_{j_m}, y_{j_m}, z_{j_m}) \notin \bigcup_{n=1}^m A_n$ (donde $(x_{j_m}, y_{j_m}, z_{j_m})$ es un elemento de la sucesión $\{(x_j, y_j, z_j)\}_{j=1}^\infty$ esto implica que $z_{j_m} < \frac{1}{m+1}$. Luego $\{z_{j_m}\}_{m=1}^\infty$ es una subsucesión de $\{z_j\}_{j=1}^\infty$ tal que $\lim z_{j_m} = 0 = \lim z_j$. Por lo tanto, $z = 0$. Por ende, $(x, y, z) \in J$.

Por la afirmación anterior, podemos concluir que (H, X) es una compactación de $[0, \infty)$, cuyo residuo es J . □

Con el propósito de generalizar el resultado anterior, para cualquier continuo se cumple el teorema 2.34

Lema 2.33. *Sean X un continuo y $r > 0$. La nube $N_{d_Q}(X, r)$ es un subconjunto arco conexo de $\mathbf{Q}$.*

Demostración. Por el teorema 1.42, podemos considerar a X como un subespacio de $\mathbf{Q}$. Sean $r > 0$ y $\bar{p}', \bar{q}' \in N_{d_Q}(X, r)$. Observemos que $N_{d_Q}(X, r) = \bigcup_{\bar{x} \in X} B_Q(\bar{x}, r)$, de ahí que existen $\bar{p}, \bar{q} \in X$ tales que $\bar{p}' \in B_Q(\bar{p}, r)$ y $\bar{q}' \in B_Q(\bar{q}, r)$. Luego, por el teorema 1.57, existen $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in X$ tales que $\bar{x}_1 = \bar{p}$, $\bar{x}_n = \bar{q}$ y $d_Q(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}) < r$ para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Definamos $\bar{x}_0 = \bar{p}'$ y $\bar{x}_{n+1} = \bar{q}'$, entonces $d_Q(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}) < r$ para cada $i \in \{0, \dots, n\}$.

Sea $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, definimos $\alpha_i : [i, i+1] \rightarrow \mathbf{Q}$ tal que $\alpha_i(t) = (1-(t-i))\bar{x}_i + (t-i)\bar{x}_{i+1}$ para todo $t \in [i, i+1]$. Donde si $\bar{x}_i = (x_j^i)_{j=1}^\infty$ y $\bar{x}_{i+1} = (x_j^{i+1})_{j=1}^\infty$, entonces $\alpha_i(t) = ((1-(t-i))x_j^i + (t-i)x_j^{i+1})_{j=1}^\infty$. Note que α_i es una función continua, $\alpha_i(i) = \bar{x}_i$ y $\alpha_i(i+1) = \bar{x}_{i+1}$.

Sean $i \in \{1, \dots, n\}$ y $t \in [i, i+1]$, entonces

$$\begin{aligned} d_Q(\alpha_i(t), \bar{x}_i) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left| \left((1-(t-i))x_j^i + (t-i)x_j^{i+1} \right) - x_j^i \right|}{2^j} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|(t-i)x_j^{i+1} - (t-i)x_j^i|}{2^j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(t-i) |x_j^{i+1} - x_j^i|}{2^j} \\
&= (t-i) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|x_j^{i+1} - x_j^i|}{2^j} \\
&= (t-i) d_Q(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}) \\
&< r.
\end{aligned}$$

Esto implica que $\alpha_i([i, i+1]) \subset B_Q(\bar{x}_i, r) \subset N_{d_Q}(X, r)$. Además, similarmente obtenemos que $\alpha_0([0, 1]) \subset B_Q(\bar{x}_1, r) \subset N_{d_Q}(X, r)$. Definimos $\alpha : [0, n+1] \rightarrow \mathbf{Q}$ por $\alpha(t) = \alpha_i(t)$ cuando $t \in [i, i+1]$. Por el Lema del pegamiento ([14, teorema 18.3]), tenemos que α es una función continua. Además $\alpha(0) = \bar{p}'$, $\alpha(n+1) = \bar{q}'$ y $\alpha([0, n+1]) \subset N_{d_Q}(X, r)$. Por el teorema 3.20, tenemos que $\alpha([0, n+1])$ es un continuo localmente conexo, luego por el teorema 3.25, se cumple que $\alpha([0, n+1])$ es arco conexo. Por lo tanto, existe γ un arco con puntos extremos $\bar{p}'$, $\bar{q}'$, tal que $\gamma \subset \alpha([0, n+1]) \subset N_{d_Q}(X, r)$. Concluimos así, que $N_{d_Q}(X, r)$ es un subconjunto arco conexo de $\mathbf{Q}$. $\square$

Teorema 2.34. *Si X es un continuo, entonces existe una compactación del rayo $[0, \infty)$ con residuo X .*

Demostración. Por el teorema 1.42, podemos considerar a X como un subespacio de $\mathbf{Q}$. El espacio en el cual definiremos nuestra compactación será en $\mathbf{Q} \times [0, 1]$, usando ideas similares a las del teorema 2.32

Por [5, teorema 4.1.18], existe $P = \{\bar{p}_i : i \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso y numerable de X . Para cada $t \in [0, 1]$ consideramos X_t una copia homeomorfa de X , contenida en $\mathbf{Q} \times \{t\} \subset \mathbf{Q} \times [0, 1]$. A su vez, sea $N_{d_Q}(X, t) \times \{t\}$ una copia homeomorfa de $N_{d_Q}(X, t)$ contenida en $\mathbf{Q} \times \{t\}$.

Por el 2.33, $N_{d_Q}(X, t) \times \{t\}$ es un subconjunto arco conexo de $\mathbf{Q} \times \{t\}$, para cada $t \in [0, 1]$. Para cada $i, j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$ y $t \in (0, 1]$, fijemos $\alpha_{i,j}^t$ como el arco contenido en $N_{d_Q}(X, t) \times \{t\}$ cuyos extremos son $(\bar{p}_i, t)$ y $(\bar{p}_j, t)$. A su vez, para cada $s, t \in (0, 1]$ con $s < t$ y $i \in \mathbb{N}$, fijemos $\beta_i^{t,s} = \{(\bar{p}_i, r) : r \in [s, t]\}$ el arco en $\mathbf{Q} \times [0, 1]$ con extremos $(\bar{p}_i, t)$, $(\bar{p}_i, s)$.

Sea

$$A_1 = \alpha_{1,2}^1 \cup \beta_2^{1, \frac{1}{2}} \cup \alpha_{1,2}^{\frac{1}{2}}.$$

A continuación, dividimos el intervalo $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ en tres partes iguales, y sean $d_1^2, d_2^2 \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ con $\frac{1}{3} < d_1^2 < d_2^2 < \frac{1}{2}$ los puntos que determinan dicha división. Sea

$$A_2 = \beta_1^{\frac{1}{2}, d_2^2} \cup \alpha_{1,3}^{d_2^2} \cup \beta_3^{d_2^2, d_1^2} \cup \alpha_{2,3}^{d_1^2} \cup \beta_2^{d_1^2, \frac{1}{3}} \cup \alpha_{1,2}^{\frac{1}{3}}.$$

Dividimos el intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ en cuatro partes iguales, y sean $d_1^3, d_2^3, d_3^3 \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ con $\frac{1}{4} < d_1^3 < d_2^3 < d_3^3 < \frac{1}{3}$ los puntos que determinan dicha división. Sea

$$A_3 = \beta_1^{\frac{1}{3}, d_3^3} \cup \alpha_{1,4}^{d_3^3} \cup \beta_4^{d_3^3, d_2^3} \cup \alpha_{3,4}^{d_2^3} \cup \beta_3^{d_2^3, d_1^3} \cup \alpha_{2,3}^{d_1^3} \cup \beta_2^{d_1^3, \frac{1}{4}} \cup \alpha_{1,2}^{\frac{1}{4}}.$$

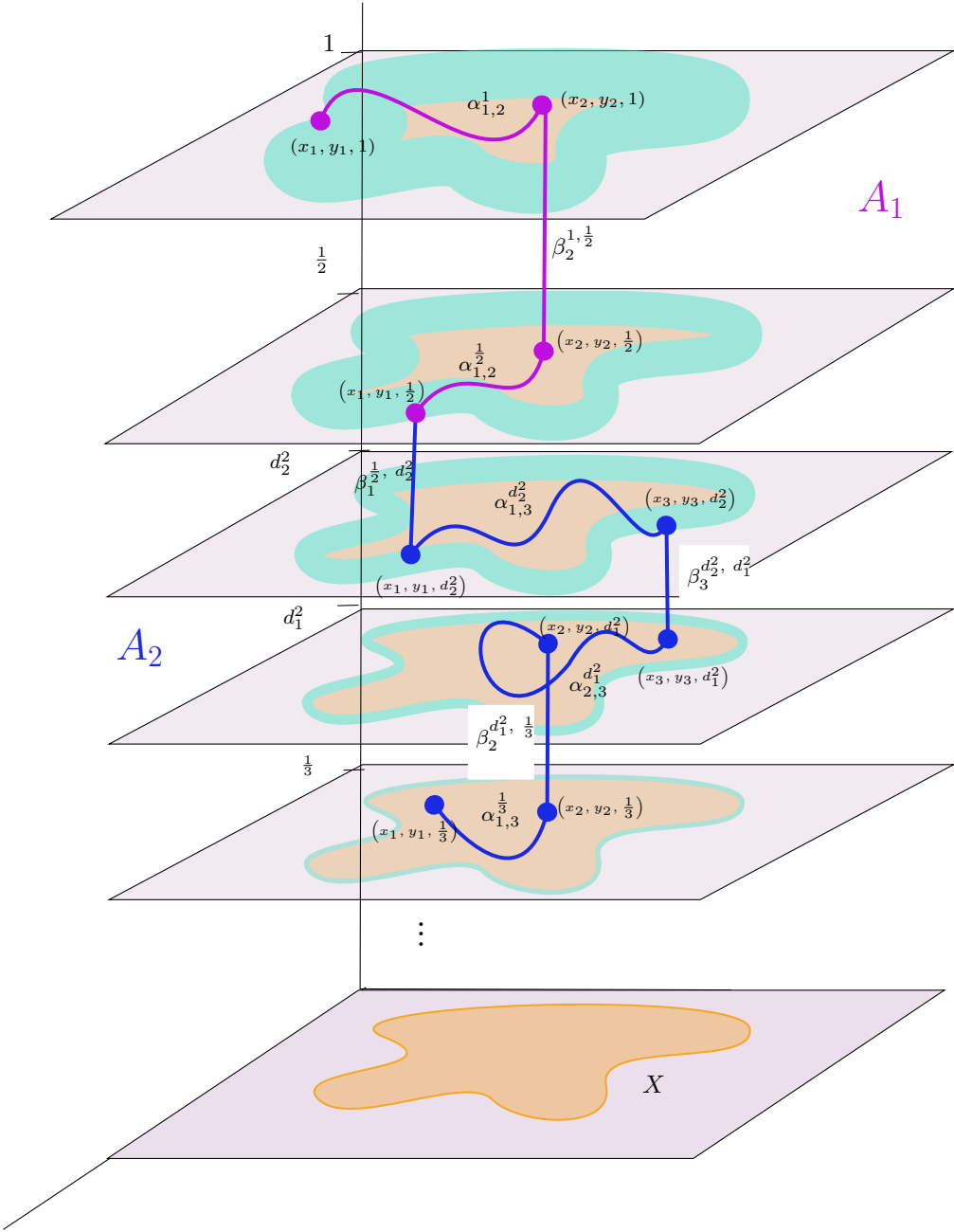


Figura 2.3: Caption

En general, sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. La construcción de A_n es de la siguiente manera, dividimos el intervalo $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ en $n+1$ partes iguales y sean $d_1^n, \dots, d_n^n \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ con $\frac{1}{n+1} < d_1^n < \dots < d_n^n < \frac{1}{n}$ los puntos que determinan dicha división. Sea

$$A_n = \beta_1^{\frac{1}{n}, d_1^n} \cup \alpha_{1, n+1}^{d_n^n} \cup \left(\bigcup_{m=2}^n \beta_{m+1}^{d_m^n, d_{m-1}^n} \right) \cup \left(\bigcup_{m=2}^n \alpha_{m, m+1}^{d_{m-1}^n} \right) \cup \beta_2^{d_1^n, \frac{1}{n+1}} \cup \alpha_{1, 2}^{\frac{1}{n+1}}.$$

Observación. A partir de la construcción de A_n se observa que:

1. A_n es un arco contenido en $N_{dQ}(X, \frac{1}{n}) \times [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ cuyos extremos son $(\bar{p}_1, \frac{1}{n})$ y $(\bar{p}_1, \frac{1}{n+1})$;
2. para cada $j \in \{1, \dots, n+1\}$ existe $s_n^j \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ tal que A_n contiene al elemento $(\bar{p}_j, s_n^j)$;
3. $A_n \cap X_0 = \emptyset$;
4. $A_n \cap A_m \neq \emptyset$ sii $|n - m| \leq 1$. Además, si $n > 1$ entonces

$$A_n \cap \left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \setminus A_n \right) = \left\{ \left(\bar{p}_i, \frac{1}{n} \right), \left(\bar{p}_i, \frac{1}{n+1} \right) \right\}.$$

$$\text{Sea } \bar{X} = \text{cl}_{\mathbf{Q} \times [0, 1]} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right).$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, como A_n es un arco, podemos definir un homomorfismo $c_n : [n-1, n] \rightarrow A_n$ tal que $c_n(n-1) = (\bar{p}_1, \frac{1}{n})$ y $c_n(n) = (\bar{p}_1, \frac{1}{n+1})$. Sea $c : [0, \infty) \rightarrow \bar{X}$ definida por $c(t) = c_n(t)$ cuando $t \in [n-1, n]$ para algún $n \in \mathbb{N}$. De (4) de la observación se cumple que c es una función inyectiva y por el Lema del pegamiento ([14, teorema 18.3]), se tiene que c es una función continua, por ende c es un encaje de $[0, \infty)$ sobre $\bar{X}$. Además, $c([0, \infty)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y por ende $\text{cl}_{\mathbf{Q} \times [0, 1]}(c([0, \infty))) = \bar{X}$. Por lo tanto, $(c, \bar{X})$ es una compactación de $[0, \infty)$.

Afirmación. $X_0 = \bar{X} \setminus c([0, \infty))$

Demostración de la afirmación. $[\subset]$ De (2) de la observación se cumple que $P \times \{0\} \subset \bar{X}$, de esto que $\text{cl}_{\mathbf{Q} \times [0, 1]}(P \times \{0\}) \subset \bar{X}$, es decir, $X_0 \subset \bar{X}$. Por lo anterior y por (3) de la Observación, concluimos que $X_0 \subset \bar{X} \setminus c([0, \infty))$.

$[\supset]$ Sea $(\bar{x}, z) \in \bar{X} \setminus c([0, \infty))$, donde $\bar{x} \in \mathbf{Q}$ y $z \in [0, 1]$. Luego, existe una sucesión $\{(\bar{x}_j, z_j)\}_{j=1}^{\infty}$ de elementos de $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ tal que $\lim(\bar{x}_j, z_j) = (\bar{x}, z)$; note que $\{\bar{x}_j\}_{j=1}^{\infty}$ es

una sucesión en $\mathbf{Q}$ que converge a $\bar{x}$ y $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión en $[0, 1]$ que converge a z . A su vez, existe una sucesión $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ en $[0, \infty)$ tal que $c(t_j) = (\bar{x}_j, z_j)$. Observemos que la sucesión $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ diverge a infinito, ya que en caso contrario sería acotada, lo que daría una subsucesión convergente en algún intervalo cerrado de la forma $[0, k]$ para algún $k \in \mathbb{N}$, esto implica que $(\bar{x}, z) \in c([0, \infty))$, lo cual es una contradicción.

Así, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $j_m \in \mathbb{N}$ tal que $(\bar{x}_{j_m}, z_{j_m}) \notin \bigcup_{n=1}^m A_n$ (donde $(\bar{x}_{j_m}, z_{j_m})$ es un elemento de la sucesión $\{(\bar{x}_j, z_j)\}_{j=1}^\infty$) esto implica que $z_{j_m} < \frac{1}{m+1}$. Luego $\{z_{j_m}\}_{m=1}^\infty$ es una subsucesión de $\{z_j\}_{j=1}^\infty$ tal que $\lim z_{j_m} = 0 = \lim z_j$. Por lo tanto, $z = 0$.

Supongamos que $\bar{x} \notin X$, dado que X es compacto, existe $r > 0$ tal que $B_Q(\bar{x}, r) \cap X = \emptyset$. Por otro lado, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geq N_1$ se cumple que $d_Q(\bar{x}, \bar{x}_j) < \frac{r}{2}$. Por la propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \frac{r}{2}$. Dado que $\lim z_j = 0$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geq N_2$ se cumple que $0 < |z_j| < \frac{1}{N+1}$. Sea

$m_0 = \max\{N_1, N_2\}$. Note que $(\bar{x}_{m_0}, z_{m_0}) \notin \bigcup_{n=1}^N A_n$, por lo que existe $N' > N$ tal que $(\bar{x}_{m_0}, z_{m_0}) \in A_{N'}$. De (1) de la observación se cumple que $(\bar{x}_{m_0}, z_{m_0}) \in N_{d_Q}(X, \frac{1}{N'}) \times [\frac{1}{N'+1}, \frac{1}{N'}]$. Esto implica que existe $\bar{a} \in X$ tal que $d_Q(\bar{a}, \bar{x}_{m_0}) < \frac{1}{N'} < \frac{1}{N} < \frac{r}{2}$. Así,

$$d_Q(\bar{x}, \bar{a}) \leq d_Q(\bar{x}, \bar{x}_{m_0}) + d_Q(\bar{a}, \bar{x}_{m_0}) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\bar{x} \in X$, es decir, $(\bar{x}, z) \in X_0$. Luego, $X_0 = \overline{X} \setminus c([0, \infty))$.

Por la afirmación anterior, podemos concluir que $(c, \overline{X})$ es una compactación de $[0, \infty)$, cuyo residuo es X_0 . □

Por el teorema 2.7, sabemos que toda compactación de $[0, \infty)$ es un continuo. Entre la familia de continuos que resultan ser compactación del rayo $[0, \infty)$, se distingue una subfamilia cuyos elementos se definen a continuación.

Definición 2.35. Un **continuo de Elsa** es un continuo que es compactación del rayo $[0, \infty)$ con residuo un arco; lo denotaremos por *E-continuo*.

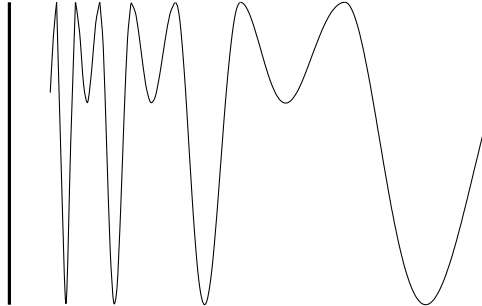


Figura 2.4: Ejemplo de un *E-continuo*

Teorema 2.36. *Existen dos E -continuos no homeomorfos.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos

$$L_n^+ = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{2n+1}{2n(n+1)} \right], y = 2n(n+1)x - 2n \right\}$$

y

$$L_n^- = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[\frac{2n+1}{2n(n+1)}, \frac{1}{n} \right], y = -2n(n+1)x + 2(n+1) \right\}.$$

Sea $A_n = L_n^+ \cup L_n^-$, observemos que A_n es un arco (ver figura 2.5). Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos considerar un homeomorfismo $c_n : [n-1, n] \rightarrow A_n$ tal que $c_n(n-1) = (\frac{1}{n}, 0)$ y $c_n(n) = (\frac{1}{n+1}, 0)$. Sea $cX = \text{cl}_{\mathbb{R}^2} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)$.

Sea $c : [0, \infty) \rightarrow cX$ definida por $c(t) = c_n(t)$ cuando $t \in [n-1, n]$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por construcción y por el Lema del pegamiento ([14, teorema 18.3]), se cumple que (c, cX) es una compactación de $[0, \infty)$ cuyo residuo es el arco $I = \{0\} \times [0, 1]$, i. e., cX es un E -continuo.

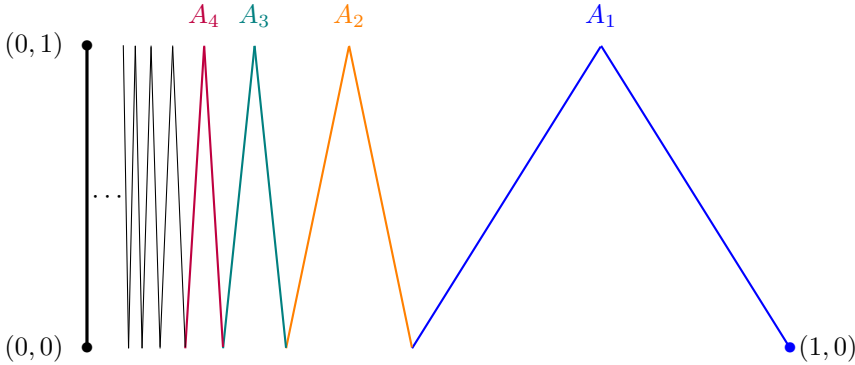


Figura 2.5: Compactación (c, cX) de $[0, \infty)$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean

$$J_n^+ = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{4n+1}{4n(n+1)} \right], y = 4n(n+1)x - 4n \right\},$$

$$l_n^- = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[\frac{4n+1}{4n(n+1)}, \frac{2n+1}{2n(n+1)} \right], y = -2n(n+1)x + \frac{4n+3}{2} \right\},$$

$$l_n^+ = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[\frac{2n+1}{2n(n+1)}, \frac{4n+3}{4n(n+1)} \right], y = 2n(n+1)x - \frac{4n+1}{2} \right\}$$

y

$$J_n^- = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[\frac{4n+3}{4n(n+1)}, \frac{1}{n} \right], y = -4n(n+1)x + 4(n+1) \right\}.$$

Sea $B_n = J_n^+ \cup l_n^- \cup l_n^+ \cup J_n^-$. Observemos que B_n es un arco (ver figura 2.6). Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos considerar un homeomorfismo $s_n : [n-1, n] \rightarrow B_n$ tal que $s_n(n-1) = (\frac{1}{n}, 0)$ y $s_n(n) = (\frac{1}{n+1}, 0)$. Sea $sX = \text{cl}_{\mathbb{R}^2} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right)$.

Sea $s : [0, \infty) \rightarrow cX$ definida por $s(t) = s_n(t)$ cuando $t \in [n-1, n]$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por construcción y por el Lema del pegamiento ([14, teorema 18.3]), se cumple que (s, sX) es una compactación de $[0, \infty)$ cuyo residuo es el arco $I = \{0\} \times [0, 1]$, i. e., sX es un E -continuo.

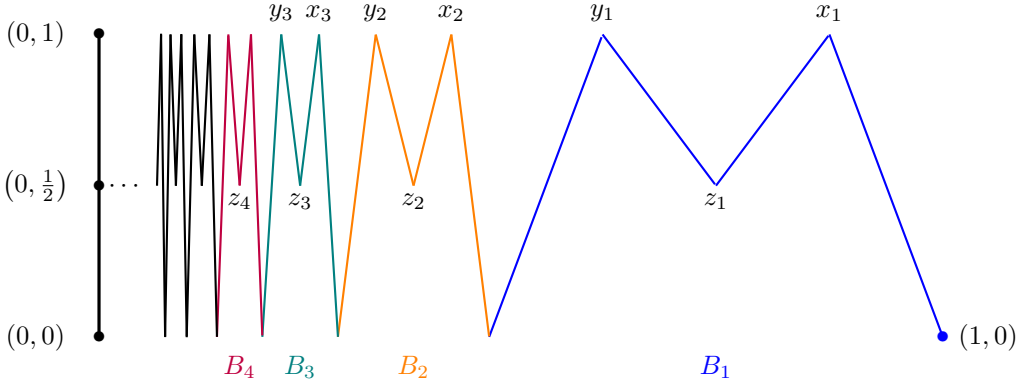


Figura 2.6: Compactación (s, sX) de $[0, \infty)$

Veamos que cX no es homeomorfo sX . Para ello supongamos que existe $h : sX \rightarrow cX$ un homeomorfismo. Dado que la propiedad de ser localmente conexo en un punto se conserva bajo homeomorfismo entonces se cumple que $h(s([0, \infty))) = c([0, \infty))$ y $h(I) = I$. Por ende $h(\{(0, 1), (0, 0)\}) = \{(0, 1), (0, 0)\}$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $h((0, 1)) = (0, 1)$ y $h((0, 0)) = (0, 0)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $y_n = (\frac{4n+1}{4n(n+1)}, 1)$, $z_n = (\frac{2n+1}{2n(n+1)}, \frac{1}{2})$ y $x_n = (\frac{4n+3}{4n(n+1)}, 1)$ (ver figura 2.6).

Note que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones en $s([0, \infty))$ tales que $\lim z_n = (0, \frac{1}{2})$ y $\lim y_n = (0, 1) = \lim x_n$. De la continuidad de h se cumple que $\lim h(z_n) = h((0, \frac{1}{2}))$ y $\lim x_n = \lim h(y_n) = h((0, 1)) = (0, 1)$.

Como $h((0, \frac{1}{2})) \notin \{h((1, 0)), h((0, 0))\}$, entonces $h((0, \frac{1}{2})) \in \{0\} \times (0, 1)$. Para $\varepsilon = \frac{\|h((0, \frac{1}{2})) - (0, 1)\|}{4}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $h(x_n), h(y_n) \in B((0, 1), \varepsilon)$ y $h(z_n) \in B(h((0, \frac{1}{2})), \varepsilon)$, para todo $n \geq N$. Como $h((0, \frac{1}{2})) \in \{0\} \times (0, 1)$, podemos suponer que $h((0, \frac{1}{2})) = (0, w)$ para algún $w \in (0, 1)$. Definimos $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < w + 2\varepsilon\}$ y $H' = \mathbb{R}^2 \setminus H$. Note que $B(h((0, \frac{1}{2})), \varepsilon) \subset H$ y $B((0, 1), \varepsilon) \subset H'$. Sea V_n al arco en $s([0, \infty))$ con puntos extremos x_n y y_n , observemos que $V_n = l_n^- \cup l_n^+$.

Afirmación. Para cada $t_1, t_2 \in [0, \infty)$ tales que $t_1 < t_2$, existen únicos $r_1, r_2 \in [0, \infty)$ tales que $r_1 < r_2$, $h(s(t_1)) = c(r_1)$ y $h(s(t_2)) = c(r_2)$.

Demostración de la afirmación. Primero, veamos que $h(s(0)) = c(0)$. En efecto, dado que $h(sX \setminus \{s(0)\}) = cX \setminus \{h(s(0))\}$, como $sX \setminus \{s(0)\}$ es conexo y h es un homeomorfismo, se debe cumplir que $cX \setminus \{h(s(0))\}$ es conexo, la única opción para que esto sea posible es que $h(s(0)) = c(0)$. Sean $t_1, t_2 \in [0, \infty)$ tales que $t_1 < t_2$, de la inyectividad de h, s y c existen únicos $r_1, r_2 \in [0, \infty)$ tales que $h(s(t_1)) = c(r_1)$ y $h(s(t_2)) = c(r_2)$. Supongamos que $r_1 \geq r_2$. Dado que $t_1 \neq t_2$ nuevamente de la inyectividad de h, s y c tenemos que $r_1 \neq r_2$. Por otro lado, si $r_1 > r_2$, dado que $h(s(0)) = c(0)$ entonces $h(s([0, t_1])) = c([0, r_1])$ y como $r_1 > r_2$ entonces $h(s([0, t_1])) = c([0, r_1]) = c([0, r_2]) \cup c([r_2, r_1])$, es decir, $c(r_2) \in h(s([0, t_1]))$. Además, dado que $s([0, t_1]) \cap s((t_1, t_2]) = \emptyset$ entonces $h(s([0, t_1])) \cap h(s((t_1, t_2])) = \emptyset$ (contradicción ya que $c(r_2) \in h(s([0, t_1])) \cap h(s((t_1, t_2]))$ debido a que $h(s(t_2)) = c(r_2)$). Por lo tanto $r_1 < r_2$.

Existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $h(x_n) \in A_{m_n}$. Veamos que $A_{m_n} \cap A_{m_n+1} \subset h(V_n)$. Supongamos lo contrario, por la afirmación anterior tenemos que $h(V_n) \subset A_{m_n}$. Note que $h(x_n) \in L_{m_n}^- \cap H'$ o $h(x_n) \in L_{m_n}^+ \cap H'$, en cualquier caso la afirmación anterior implica que $h(z_n) \in L_{m_n}^+ \cap H$. Como $h(y_n) \in h(V_n)$, la afirmación anterior implica que $h(y_n) \in L_{m_n}^+ \cap H$ lo cual es una contradicción, ya que $h(y_n) \in H'$. Por lo tanto $(\frac{1}{m_n+1}, 0) \in A_{m_n} \cap A_{m_n+1} \subset h(V_n)$.

Así, tenemos una sucesión $\{m_n\}_{n=N}^\infty$ estrictamente creciente, tal que $(\frac{1}{m_n+1}, 0) \in h(V_n)$ para cada $n \geq N$. Es inmediato que la sucesión $(\frac{1}{m_n+1}, 0)$ converge a $(0, 0)$. De la continuidad de h^{-1} , se tiene que $\lim h^{-1}((\frac{1}{m_n+1}, 0)) = h^{-1}((0, 0)) = (0, 0)$. Pero, dado que $h^{-1}(\frac{1}{m_n}, 0) \in V_n$ para toda $n \geq N$, se tiene que $\lim h^{-1}((\frac{1}{m_n}, 0)) \in \lim V_n = \{0\} \times [\frac{1}{2}, 1]$, lo cual es una contradicción, esto de suponer que sX es homeomorfo a cX . Por lo tanto cX no es homeomorfo a sX . $\square$

En el resultado previo, mostramos que existen dos E -continuos que no son homeomorfos entre sí. Sin embargo, Marwan M. Awartani en el artículo titulado “An Uncountable Collection of Mutually Incomparable Chainable Continua” [3], demuestra el siguiente resultado.

Dos continuos se dicen **incomparables** si no existen funciones continuas y suprayectivas en ninguna dirección; es decir, X y Y son incomparables si no existe $f : X \rightarrow Y$ continua y suprayectiva, ni tampoco $g : Y \rightarrow X$ continua y suprayectiva.

Teorema 2.37. [[3], teorema 4.7] *Existe una colección no numerable de compactaciones del rayo con residuo un arco tal que sus elementos son incomparables por pares.*

En resumen, en este artículo Awartani trabaja con el conjunto de Cantor, donde cada punto de este conjunto es visto como una sucesión de ceros y unos (ver sección 3.2 “El conjunto de Cantor” en [6]). Primero define dos relaciones en el espacio de Cantor: la relación dominar y dominar verticalmente. Luego demuestra que con respecto a estas relaciones existe una colección no numerable de sucesiones mutuamente incomparables. Finalmente, asocia cada elemento de dicha colección con un E -continuo y se demuestra que no existe una función continua y suprayectiva entre cualquier par de tales compactaciones resultantes. La compactación del rayo que se construye a partir de algún punto de Cantor, es de la siguiente forma.

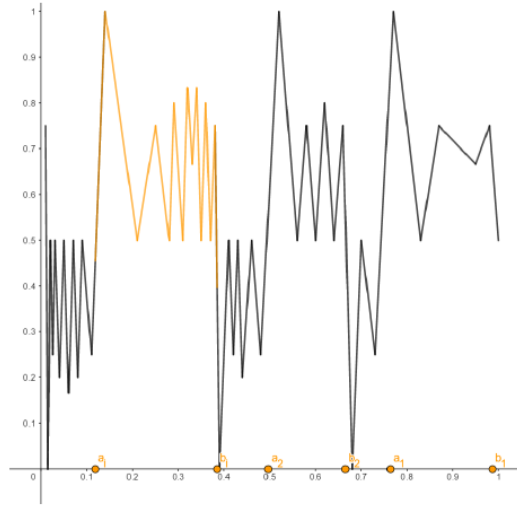


Figura 2.7: Compactación de $[0, \infty)$ a partir de un elemento del conjunto de Cantor.

Si es del interés del público estudiar la construcción de estas compactaciones, recomendamos ver [1]. En este trabajo, se hace la construcción de estas compactaciones y se desarrollan los resultados, exhaustivamente, del artículo [3].

Finalmente, mencionamos que en 2014, Verónica Martínez-de-la-Vega y Piotr Minc demuestran en el artículo titulado “Uncountable families of metric compactifications of the ray”, el siguiente resultado interesante.

Teorema 2.38. [[13], teorema 1] *Todo continuo no degenerado X tiene una cantidad no numerable de compactaciones del rayo no homeomorfas entre sí y con residuo X .*

Continuos localmente conexos

En el contexto de la Teoría de Continuos, los continuos localmente conexos son, en cierto sentido, la clase especial más fundamental de continuos para estudiar, ya que se definen simplemente haciendo de la conexidad una propiedad local. Veremos que los continuos localmente conexos son arco conexos y además se caracterizan por la propiedad de ser las imágenes métricas continuas del intervalo cerrado $[0, 1]$.

Es importante hacer la siguiente aclaración. En lo que sigue, entenderemos por un continuo localmente conexo a un espacio métrico que es localmente conexo y continuo.

3.1. Espacios localmente conexos y la propiedad S

La propiedad S y los espacios localmente conexos son conceptos importantes que describen la conexidad local de un espacio topológico. A lo largo de esta sección demostraremos que la propiedad S es relevante para caracterizar la estructura de los espacios localmente conexos.

Definición 3.1. *Sea X un espacio métrico. Un subconjunto Y no vacío de X tiene la **propiedad S** si para cada $\epsilon > 0$ hay un número finito de subconjuntos conexos $A_1, A_2, \dots, A_n$ de Y tales que:*

$$Y = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad \text{diám}(A_i) < \epsilon \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}.$$

A continuación demostraremos en el teorema 3.2 que la propiedad S es una condición suficiente para que un espacio sea localmente conexo, pero no es una condición necesaria. Sin embargo, en el teorema 3.5, veremos que para que estas dos definiciones sean equivalentes basta que el espacio métrico sea compacto.

Teorema 3.2. *Sea X un espacio métrico. Si X tiene la propiedad S entonces es un espacio localmente conexo.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico con la propiedad S . Veamos que X es un espacio localmente conexo, para ello es suficiente mostrar, por el teorema 1.64, que X es conexo en pequeño. Sean $p \in X$ y U una vecindad de p , de ahí que existe $V \subset U$ abierto de X tal que $p \in V$, luego dado que V es abierto de X , existe $\epsilon > 0$ tal que $B(p, \epsilon) \subset V$. Como X tiene la propiedad S entonces existen subconjuntos conexos $A_1, A_2, \dots, A_n$ de X tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad \text{diám}(A_i) < \frac{\epsilon}{2} \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}.$$

$$\text{Sean } M = \{i \in \{1, \dots, n\} : p \in \text{cl}_X(A_i)\} \text{ y } G = \bigcup_{i \in M} A_i.$$

Afirmación 1. $\text{diam}(G) < \epsilon$.

Demostración de la afirmación 1. Sean $x, y \in G$, como $G = \bigcup_{i \in M} A_i$ entonces existen $i, j \in M$ tales que $x \in A_i$ y $y \in A_j$. Tenemos los siguientes casos:

1.1 Si $j = i$ entonces

$$d(x, y) \leq \text{diám}(A_i) < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

es decir, $d(x, y) < \epsilon$.

1.2 Si $i \neq j$ entonces

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, p) + d(y, p) \\ &\leq \text{diám}(\text{cl}_X(A_i)) + \text{diám}(\text{cl}_X(A_j)) \\ &= \text{diám}(A_i) + \text{diám}(A_j) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

por lo tanto $d(x, y) < \epsilon$.

De los casos anteriores concluimos que para cualesquiera $x, y \in G$, se tiene que $d(x, y) < \epsilon$, por lo tanto $\text{diám}(G) < \epsilon$.

Afirmación 2. $p \in \text{Int}(G)$.

Demostración de la afirmación 2. Supongamos que $p \in \text{cl}_X(X \setminus G)$. Dado que

$$\text{cl}_X(X \setminus G) \subset \text{cl}_X \left(\bigcup_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus M} A_j \right) = \bigcup_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus M} \text{cl}_X(A_j),$$

de manera que $p \in \text{cl}_X(A_k)$ para algún $k \in \{1, \dots, n\} \setminus M$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $p \notin \text{cl}_X(X \setminus G)$ y recordemos que

$$\text{cl}_X(X \setminus G) = X \setminus \text{Int}(A),$$

de ahí que $p \in \text{Int}(G)$.

Afirmación 3. G es conexo.

Demostración de la afirmación 3. Observe que para cada $i \in M$, el conjunto $\{p\}$ no está separado de ningún A_i , por el teorema 1.54, se tiene que $\bigcup \mathcal{A} \cup \{p\}$ es conexo. Por otro lado, por la afirmación 2, sabemos que $p \in \text{Int}(G) \subset G$, así $\bigcup \mathcal{A} \cup \{p\} = G$. Por lo tanto, concluimos que G es conexo.

Veamos que $G \subset B(p, \epsilon)$. En efecto, sabemos por la afirmación 2 que $p \in G$, entonces para cualquier $g \in G$ tenemos que $d(g, p) \leq \text{diám}(G)$, pero por la afirmación 1 tenemos que $\text{diám}(G) < \epsilon$, por ende $d(g, p) < \epsilon$ de ahí que $g \in B(p, \epsilon)$. Por lo anterior y por las afirmaciones 2 y 3, concluimos que G es una vecindad conexa de p tal que $G \subset V$. De manera que para cada $p \in X$ y cada vecindad U de p existe una vecindad conexa G de p tal que $G \subset U$, por lo tanto X es conexo en pequeño en cada punto. $\square$

Recordemos que un espacio métrico X es **precompacto** si para cada $\epsilon > 0$, existen $a_1, \dots, a_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \epsilon)$. Observemos que en $\mathbb{R}$, las definiciones de ser precompacto y tener la propiedad S son equivalentes. El siguiente ejemplo ilustra que el recíproco del teorema anterior no es verdadero.

Ejemplo 3.3. *El conjunto de los números reales con la topología euclidiana es localmente conexo, pero no tiene la propiedad S . En efecto, por [2, teorema 3.11], sabemos que cada conjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}$ es la unión de una colección numerable de intervalos abiertos ajenos por pares de $\mathbb{R}$ luego, por el teorema 1.61, se tiene que $\mathbb{R}$ es localmente conexo. Por otro lado, dado que $\mathbb{R}$ no es acotado, por [8, teorema 3.17], no es precompacto, de manera que $\mathbb{R}$ no tiene la propiedad S .*

Cuando estudiamos una propiedad en espacios métricos, suele interesarnos saber si esta se conserva bajo homeomorfismos. La siguiente proposición muestra que la propiedad S cumple con esta propiedad.

Proposición 3.4. *La propiedad S no se conserva bajo homeomorfismos.*

Demostración. Veamos que $I = (0, 1)$ con la topología euclidiana inducida de $\mathbb{R}$ es localmente conexo y tiene la propiedad S . Dado que I es abierto de $\mathbb{R}$ y del ejemplo 3.3, sabemos que I es localmente conexo, por el teorema 1.61, se tiene que I es localmente conexo. Además, por [8, proposición 3.16 (4)], tenemos que I es precompacto por lo que tiene la propiedad S . Sabemos que I y $\mathbb{R}$ son espacios homeomorfos, sin embargo I tiene la propiedad S y, por el ejemplo 3.3, sabemos que $\mathbb{R}$ no posee dicha propiedad. $\square$

Teorema 3.5. *Sea X un espacio métrico, compacto y no vacío. Entonces X tiene la propiedad S si y solo si es un espacio localmente conexo.*

Demostración. $[\Rightarrow]$ Es inmediato por el teorema 3.2.

$[\Leftarrow]$ Sea $\epsilon > 0$ y supongamos que X es un espacio localmente conexo, por la definición 1.58, para cada $p \in X$ existe un subconjunto abierto y conexo U_p de X tal que $p \in U_p \subset B\left(p, \frac{\epsilon}{3}\right)$. Como X es compacto y observe que $\bigcup_{p \in X} U_p = X$, entonces existe un conjunto

finito $\{p_1, \dots, p_n\} \subset X$ tal que $\bigcup_{i=1}^n U_{p_i} = X$ donde para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que U_{p_i} es conexo y además

$$\text{diám}(U_i) \leq \text{diám}\left(B\left(p, \frac{\epsilon}{3}\right)\right) \leq \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon,$$

i. e., $\text{diám}(U_{p_i}) < \epsilon$. Por lo anterior, concluimos que X tiene la propiedad S . □

Corolario 3.6. *Sea X un espacio métrico, compacto y no vacío. Entonces X es un continuo localmente conexo si y solo si para cada $\epsilon > 0$, X es la unión de un número finito de subcontinuos, donde cada uno de ellos tiene un diámetro menor que ϵ .*

Demostración. $[\Rightarrow]$ Supongamos que X es un continuo localmente conexo así, por el teorema 3.5, tenemos que X posee la propiedad S . Sea $\epsilon > 0$, existen una cantidad finita de subconjuntos conexos $A_1, A_2, \dots, A_n$ de X tal que $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$ con $\text{diám}(A_i) < \epsilon$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Recordemos que $\text{diám}(\text{cl}_X(A_i)) = \text{diám}(A_i) < \epsilon$ para cada $i = 1, \dots, n$ y además por el teorema 1.30 y el corolario 1.56, se tiene que $\text{cl}_X(A_i)$ es compacto y conexo para cada $i = 1, \dots, n$. Finalmente observemos que

$$X = \text{cl}_X(X) = \text{cl}_X\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \bigcup_{i=1}^n \text{cl}_X(A_i),$$

i. e., $X = \bigcup_{i=1}^n \text{cl}_X(A_i)$. En conclusión, X es la unión de un número finito de subcontinuos con diámetro menor que ϵ .

$[\Leftarrow]$ Por otra parte, sea $\epsilon > 0$ y supongamos que X es la unión de una cantidad finita de subcontinuos cada uno con diámetro menor que ϵ , en particular cada subcontinuo es conexo, de manera que X tiene la propiedad S y como por hipótesis X es compacto, por el teorema 3.5, se tiene que X es localmente conexo. □

Por el teorema 1.62, sabemos que la propiedad de ser localmente conexo no es hereditaria, por lo que los subcontinuos en el corolario anterior pueden no ser localmente conexos. Sin embargo, en el teorema 3.12, demostraremos que es posible elegir estos subcontinuos de manera que sean localmente conexos.

Proposición 3.7. *Sean X un espacio métrico y Y un subconjunto de X con la propiedad S . Si Z es un subconjunto de X tal que*

$$Y \subset Z \subset \text{cl}_X(Y),$$

entonces Z tiene la propiedad S y además, Z es un espacio localmente conexo.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Dado que Y tiene la propiedad S , por la definición 3.1, sabemos que existe un número finito de conexos $A_1, \dots, A_n$ subconjuntos de Y tales que

$$Y = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad \text{diám}(A_i) < \epsilon \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Para cada $i = 1, \dots, n$, consideremos al conjunto $B_i = \text{cl}_Z(A_i)$.

Afirmación. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se cumple que $A_i \subset B_i \subset \text{cl}_X(A_i)$.

Demostración de la afirmación. Sea $i \in \{1, \dots, n\}$ fijo pero arbitrario. Dado que $B_i = \text{cl}_Z(A_i) = \text{cl}_X(A_i) \cap Z \subset \text{cl}_X(A_i)$, es decir, $B_i \subset \text{cl}_X(A_i)$. Por otro lado, como $A_i \subset Y \subset Z$ y además $A_i \subset \text{cl}_X(A_i)$, entonces

$$A_i \subset \text{cl}_X(A_i) \cap Z = \text{cl}_Z(A_i) = B_i,$$

así $A_i \subset B_i$. Por lo tanto, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se cumple que $A_i \subset B_i \subset \text{cl}_X(A_i)$.

Dado que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, A_i es conexo y por la afirmación anterior sabemos que $A_i \subset B_i \subset \text{cl}_X(A_i)$, por el corolario 1.56, se tiene que B_i es conexo para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Por otro lado, como $B_i \subset \text{cl}_X(A_i)$ entonces

$$\text{diám}(B_i) \leq \text{diám}(\text{cl}_X(A_i)) = \text{diám}(A_i) < \epsilon,$$

por consiguiente $\text{diám}(B_i) < \epsilon$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Finalmente, dado que $\text{cl}_X(Y) = \text{cl}_X\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \bigcup_{i=1}^n \text{cl}_X(A_i)$ entonces

$$Z = \text{cl}_X(Y) \cap Z = \left(\bigcup_{i=1}^n \text{cl}_X(A_i)\right) \cap Z = \bigcup_{i=1}^n (\text{cl}_X(A_i) \cap Z) = \bigcup_{i=1}^n \text{cl}_Z(A_i) = \bigcup_{i=1}^n B_i$$

es decir, $Z = \bigcup_{i=1}^n B_i$.

En conclusión, existe un número finito de conexos $B_1, \dots, B_n$ subconjuntos de Z tales que

$$Z = \bigcup_{i=1}^n B_i, \quad \text{diám}(B_i) < \epsilon \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\},$$

por lo tanto Z tiene la propiedad S más aún, por el teorema 3.2, se tiene que Z es un espacio localmente conexo. $\square$

Introduzcamos la siguiente definición.

Definición 3.8. Sean X un espacio métrico y $\epsilon > 0$. Una $\mathbf{S}(\epsilon)$ -cadena es una colección no vacía, finita e indexada $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$ de subconjuntos de X que satisface las siguientes condiciones:

- a) $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i = 1, \dots, n-1$;
- b) L_i es conexo para cada $i = 1, \dots, n$;
- c) $\text{diam}(L_i) < 2^{-i}\epsilon$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Si $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$ es una $S(\epsilon)$ -cadena entonces cada L_i es llamado un **eslabón** de $\mathcal{L}$; si $x \in L_1$ y $y \in L_n$ decimos que $\mathcal{L}$ es una $S(\epsilon)$ -**cadena de x a y** . Si $A \subset X$, entonces se define $S(A, \epsilon)$ como sigue:

$$S(A, \epsilon) = \{y \in X : \text{existe una } S(\epsilon) - \text{cadena de algún punto de } A \text{ a } y\}.$$

En la proposición 3.9 y el lema 3.10, veremos que los conjuntos $S(A, \epsilon)$ nos proporcionan una manera de obtener subconjuntos abiertos, conexos y pequeños que tienen la propiedad S en cualquier espacio métrico con la propiedad S .

Proposición 3.9. Sean X un espacio métrico, A un subconjunto no vacío de X y $\epsilon > 0$. Si X tiene la propiedad S entonces $S(A, \epsilon)$ tiene la propiedad S .

Demostración. Sean (X, d) un espacio métrico con la propiedad S , $A \subset X$ distinto del vacío y $\epsilon > 0$, veamos que $S(A, \epsilon)$ tiene la propiedad S es decir, probaremos que para cada $\delta > 0$ existe una colección finita de subconjuntos conexos $B_1, \dots, B_n$ donde cada B_i tiene diám(B_i) $< \delta$ y además

$$S(A, \epsilon) = \bigcup_{i=1}^n B_i. \quad (3.1)$$

Sea $\delta > 0$ fijo pero arbitrario. Elegimos un entero positivo k tal que

$$\sum_{i=k}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} < \frac{\delta}{4}. \quad (3.2)$$

Luego, sea

$$K = \{y \in S(A, \epsilon) : \text{existe una } S(\epsilon) - \text{cadena con a lo más } k \text{ eslabones de algún punto de } A \text{ a } y\}.$$

Dado que X tiene la propiedad S , por la definición 3.1, sabemos que existe una cubierta finita de conjuntos conexos con diámetro menor que $\epsilon \cdot 2^{-(k+1)}$. Sean $E_1, \dots, E_n$ los elementos de esta colección que intersectan a K (notemos que existe al menos un elemento que cumple esta característica ya que si ningún miembro de la cubierta de X intersecta a K , se sigue que $K = \emptyset$ y dado que $A \subset K$, se tiene que $A = \emptyset$, lo cual es una contradicción). Observemos que, por la manera en que se definieron los E_i , las siguientes condiciones se cumplen:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n E_i \quad (3.3)$$

$$E_i \cap K \neq \emptyset \text{ para cada } i \quad (3.4)$$

$$E_i \text{ es conexo para cada } i \quad (3.5)$$

$$\text{diám}(E_i) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}} \text{ para cada } i \quad (3.6)$$

Veamos que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se cumple que $E_i \subset S(A, \epsilon)$. Sea $i \in \{1, \dots, n\}$, por (3.4) existe una $S(\epsilon)$ -cadena $L_1, \dots, L_t$ con $t \leq k$ de algún punto de A a un punto de $E_i \cap K$. Luego, por (3.5), (3.6) y la definición 3.8, se tiene que $\{L_1, \dots, L_t, L_{t+1} = E_i\}$ es una $S(\epsilon)$ -cadena de algún punto de A a cualquier punto de E_i . Por lo tanto, hemos demostrado que

$$E_i \subset S(A, \epsilon) \text{ para cada } i = 1, \dots, n. \quad (3.7)$$

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, sea $\mathcal{B}_i$ la colección de los conjuntos M que satisfacen las siguientes condiciones:

$$M \subset S(A, \epsilon) \quad (3.8)$$

$$M \cap E_i \neq \emptyset \quad (3.9)$$

$$M \text{ es conexo} \quad (3.10)$$

$$\text{diám}(M) < \frac{\delta}{4} \quad (3.11)$$

Sea

$$B_i = \bigcup \mathcal{B}_i \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Probemos que cualquier conjunto E_i satisface las condiciones (3.8), (3.9), (3.10) y (3.11). La condición (3.8) se obtiene de (3.7); (3.9) se cumple ya que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que $E_i \neq \emptyset$; la condición (3.10) se cumple por (3.5). Finalmente veamos que los E_i cumplen la condición (3.11). Por (3.6), se cumple que $\text{diám}(E_i) < \epsilon \cdot 2^{-(k+1)}$ y notemos que $\epsilon \cdot 2^{-(k+1)} < \sum_{i=k}^{\infty} \epsilon \cdot 2^{-i}$ pero, por (3.1), sabemos que $\sum_{i=k}^{\infty} \epsilon \cdot 2^{-i} < \frac{\delta}{4}$, de manera que

$$\text{diám}(E_i) < \frac{\delta}{4}.$$

Por lo tanto,

$$E_i \subset B_i \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\} \quad (3.12)$$

y por ende, $B_i \neq \emptyset$.

Hasta este punto hemos realizado una construcción de los conjuntos B_i , ahora probaremos que cumplen las propiedades indicadas al principio de la demostración. Primero, veamos que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, B_i es conexo. Sea $i \in \{1, \dots, n\}$ fijo pero arbitrario. Dado que $E_i \in \mathcal{B}_i$ y E_i es conexo (3.5), entonces podemos aplicar el corolario 1.55 a la colección de conjuntos $\mathcal{B}_i$, ya que sabemos, por (3.10), que cada $M \in \mathcal{B}$ es conexo y además $M \cap E_i \neq \emptyset$

(3.9), concluyendo que B_i es conexo.

En segundo lugar, veamos que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se cumple que

$$\text{diám}(B_i) < \delta.$$

Sea $i \in \{1, \dots, n\}$ fijo pero arbitrario y sean $b_1, b_2 \in B_i$, por lo que existen $M_1, M_2 \in \mathcal{B}_i$ tales que $b_1 \in M_1$ y $b_2 \in M_2$. Por (3.9), existen $m_1 \in M_1 \cap E_i$ y $m_2 \in M_2 \cap E_i$, luego por (3.11) y (3.6), tenemos que

$$d(b_1, b_2) \leq d(b_1, m_1) + d(m_1, m_2) + d(m_2, b_2) < \frac{\delta}{4} + \frac{\epsilon}{2^{k+1}} + \frac{\delta}{4} < \frac{2\delta}{4} + \frac{\epsilon}{2^{k+1}},$$

pero, por (3.2), tenemos que $\frac{\epsilon}{2^{k+1}} < \frac{\delta}{4}$, por lo tanto $d(b_1, b_2) < \frac{3\delta}{4} < \delta$. De esta manera concluimos que $\text{diám}(B_i) < \delta$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Finalmente veamos que se cumple (3.1). Por (3.8), sabemos que $B_i \subset S(A, \epsilon)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, por lo tanto $\bigcup_{i=1}^n B_i \subset S(A, \epsilon)$. Resta probar que

$$S(A, \epsilon) \subset \bigcup_{i=1}^n B_i \quad (3.13)$$

Sea $y \in S(A, \epsilon)$, consideremos los siguientes dos casos:

1. Si $y \in K$. Observemos que, por (3.3) y (3.12), se tiene que $K \subset \bigcup_{i=1}^n E_i \subset \bigcup_{i=1}^n B_i$, de manera que si $y \in K$ entonces $y \in \bigcup_{i=1}^n B_i$.
2. Si $y \notin K$. Como $y \in S(A, \epsilon)$, existe una $S(\epsilon)$ -cadena $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_m\}$ de algún punto de A a y , y dado que $y \notin K$ entonces $k < m$. Sea

$$H = \bigcup_{i=k}^m L_i.$$

Observemos que, por la definición de K , $L_k \subset K$. Luego, por (3.3), existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $L_k \cap E_j \neq \emptyset$. Veamos que $H \subset B_j$, para esto tenemos que probar que H satisface las condiciones (3.8), (3.9), (3.10) y (3.11).

Por la definición 3.8 de $S(A, \epsilon)$ se cumple que

$$\bigcup_{i=1}^m L_i \subset S(A, \epsilon),$$

pero notemos que $H \subset \bigcup \mathcal{L}$, de manera que H satisface la condición (3.8). Por otro lado, como $L_k \cap E_j \neq \emptyset$ entonces H satisface (3.9). Además, por las condiciones

a) y b) de la definición 3.8, se deduce que H satisface (3.10). Finalmente, por las condiciones a) y c) de la definición 3.8 y por (3.2), se tiene que

$$\text{diám}(H) \leq \sum_{i=k}^m \text{diám}(L_i) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} < \frac{\delta}{4}.$$

Por lo tanto, H cumple la condición (3.11).

Así, hemos demostrado que H satisface las condiciones (3.8), (3.9), (3.10) y (3.11), por ende $H \subset B_j$. Dado que $y \in L_m$, se tiene que $y \in B_j$, de modo que se satisface la condición (3.13).

De los casos analizados anteriormente, concluimos que se satisface (3.1), y por lo tanto los conjuntos $B_1, \dots, B_n$ tienen todas las propiedades deseadas. En conclusión, hemos demostrado que $S(A, \epsilon)$ tiene la propiedad S . $\square$

Lema 3.10. Sean X un espacio métrico, A un subconjunto no vacío de X y $\epsilon > 0$. Las siguientes condiciones se satisfacen:

- a) $\text{diám}[S(A, \epsilon)] \leq \text{diám}(A) + 2\epsilon$;
- b) Si A es conexo entonces $S(A, \epsilon)$ es conexo;
- c) Si X tiene la propiedad S entonces $S(A, \epsilon)$ es un subconjunto abierto de X .

Demostración. a) Sean $x, y \in S(A, \epsilon)$, por lo que existen $S(\epsilon)$ -cadenas $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$ desde a_x hasta x con $a_x \in A$ y $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ desde a_y hasta y con $a_y \in A$. Luego,

$$d(x, a_x) \leq \text{diám}\left(\bigcup_{i=1}^n L_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{2^i} < \epsilon,$$

i. e., $d(x, a_x) < \epsilon$. De manera análoga, se prueba que $d(y, a_y) < \epsilon$. Por consiguiente

$$d(x, y) \leq d(x, a_x) + d(a_x, a_y) + d(a_y, y) < 2\epsilon + \text{diám}(A).$$

Por lo tanto, $\text{diám}(S(A, \epsilon)) \leq \text{diám}(A) + 2\epsilon$.

- b) Por la definición 3.8 y aplicando recursivamente el teorema 1.55, tenemos que cada $S(\epsilon)$ -cadena es conexa. Si A es conexo, y dado que toda $S(\epsilon)$ -cadena intersecta a A , por el corolario 1.55, concluimos que $S(A, \epsilon)$ es conexo.
- c) Supongamos que X tiene la propiedad S , veamos que $S(A, \epsilon)$ es abierto de X . Sea $y \in S(A, \epsilon)$, por la definición 3.8 existe una $S(\epsilon)$ -cadena $L_1, \dots, L_n$ de algún punto $p \in A$ a y y además $p \in L_1$ y $y \in L_n$. Como X tiene la propiedad S , por el teorema 3.2, existe un subconjunto abierto y conexo U de X tal que $y \in U$ y $\text{diám}(U) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$. Observemos que $U \subset S(A, \epsilon)$ ya que si $t \in U$, entonces $\{L_1, \dots, L_n, L_{n+1} = U\}$ es una $S(\epsilon)$ -cadena de $p \in A$ a t , de ahí que $t \in S(A, \epsilon)$. Por lo tanto, $S(A, \epsilon)$ es abierto de X . $\square$

Teorema 3.11. *Sea X un espacio métrico y $\epsilon > 0$. Si X tiene la propiedad S , entonces X es la unión de una cantidad finita de conjuntos conexos cada uno de los cuales tiene la propiedad S y diámetro menor que ϵ ; además, estos conjuntos pueden elegirse como abiertos en X o cerrados en X .*

Demostración. Sea X un espacio métrico con la propiedad S y $\epsilon > 0$. Por la definición 3.1, sabemos que $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$, para algún $n \in \mathbb{N}$, donde cada A_i es conexo y $\text{diám}(A_i) < \frac{\epsilon}{3}$.

Luego, por b) y c) del lema 3.10, tenemos que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ los conjuntos $S\left(A_i, \frac{\epsilon}{3}\right)$ son abiertos de X y conexos, más aún, por el teorema 3.9, se tiene que $S\left(A_i, \frac{\epsilon}{3}\right)$ posee la propiedad S . Finalmente, por a) del lema 3.10, se tiene que

$$\text{diám}\left(S\left(A_i, \frac{\epsilon}{3}\right)\right) \leq \text{diám}(A_i) + \frac{2\epsilon}{3} < \frac{\epsilon}{3} + 2\frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

es decir, $\text{diám}\left(S\left(A_i, \frac{\epsilon}{3}\right)\right) < \epsilon$. Por lo tanto, los conjuntos abiertos $S\left(A_i, \frac{\epsilon}{3}\right)$ con $i = 1, \dots, n$, satisfacen las condiciones deseadas.

Por otro lado, por la proposición 3.7, se tiene que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ los conjuntos cerrados $\text{cl}_X\left(S\left(A_i, \frac{\epsilon}{3}\right)\right)$ tienen la propiedad S , además

$$\text{diám}\left(\text{cl}_X\left(S\left(A_i, \frac{\epsilon}{3}\right)\right)\right) = \text{diám}\left(S\left(A_i, \frac{\epsilon}{3}\right)\right) < \epsilon$$

y también, por el corolario 1.56 y dado que $S\left(A_i, \frac{\epsilon}{3}\right)$ es conexo, $\text{cl}_X\left(S\left(A_i, \frac{\epsilon}{3}\right)\right)$ es conexa. $\square$

Teorema 3.12. *Si X es un continuo localmente conexo entonces para cualquier $\epsilon > 0$, X es la unión de una cantidad finita de continuos localmente conexos, cada uno de los cuales es de diámetro menor que ϵ .*

Demostración. Sean X un continuo localmente conexo y $\epsilon > 0$. Por el teorema 3.5, se tiene que X tiene la propiedad S . Luego, por el teorema 3.11, sabemos que X es la unión de conjuntos conexos y cerrados $A_1, \dots, A_n$ con diámetro menor que ϵ , cada uno de los cuales tiene la propiedad S . Por el teorema 1.30, cada A_i es compacto y por consiguiente, aplicando el teorema 3.5, cada A_i es un espacio localmente conexo. Por lo tanto, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, A_i es un subcontinuo localmente conexo $\square$

3.2. El teorema de Hahn-Mazurkiewicz

El resultado más relevante que se presentará en esta sección es el teorema de Hahn-Mazurkiewicz (ver teorema 3.16), en el cual se prueba que todo continuo localmente conexo es imagen continua del intervalo $[0,1]$ (teorema 3.16). Posteriormente, presentaremos algunas construcciones no triviales que ilustran dicho teorema y además mostraremos resultados derivados del mismo.

Para comenzar la sección, se define el siguiente concepto el cual ya ha sido introducido como parte de la definición 3.8.

Definición 3.13. Una **cadena débil** es una colección no vacía, finita e indexada $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$ de conjuntos tales que

$$L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset \text{ para cada } i = 1, \dots, n-1.$$

Sea $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$ una cadena débil, entonces decimos que $\mathcal{L}$ es una **cadena débil de L_1 a L_n** . Además, si $x \in L_1$ y $y \in L_n$, decimos que $\mathcal{L}$ es una **cadena débil de x a y** . Cada L_i es llamado un **eslabón** de $\mathcal{L}$.

El siguiente lema es usado en la demostración del lema 3.15.

Lema 3.14. Si $\mathfrak{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$ y $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$ son cadenas débiles con $C_1 = L_1$, entonces existe una cadena débil $\mathcal{P}$ de C_1 a L_n tal que $\mathcal{P} = \mathfrak{C} \cup \mathcal{L}$.

Demostración. Sea $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_{2m+n}\}$ donde

$$\begin{aligned} P_i &= C_i \text{ para cada } 1 \leq i \leq m; \\ P_{m+i} &= C_{m-i+1} \text{ para cada } 1 \leq i \leq m; \\ P_{2m+i} &= L_i \text{ para cada } 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Como $\mathfrak{C}$ es una cadena débil, por la definición 3.13, sabemos que $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i = 1, \dots, m-1$, pero $P_i = C_i$ para cada $i = 1, \dots, m$, por lo tanto $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i = 1, \dots, m-1$.

También $P_m = C_m = P_{m+1}$, por consiguiente $P_m \cap P_{m+1} \neq \emptyset$.

Por otra parte, veamos que $P_{m+i} \cap P_{(m+i)+1} \neq \emptyset$ para cualquier $i = 1, \dots, m-1$. Sea $i \in \{1, \dots, m-1\}$, de ahí que

$$\begin{aligned} 1 \leq i \leq m-1 &\Leftrightarrow 1-m \leq -i \leq -1 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq m-i \leq m-1 \\ &\Leftrightarrow 2 \leq m-i+1 \leq m. \end{aligned}$$

Por hipótesis, $\mathfrak{C}$ es cadena débil entonces $C_{j-1} \cap C_j \neq \emptyset$, para todo $j = 2, \dots, m$, de ahí que $C_{m-i} \cap C_{m-i+1} \neq \emptyset$ ya que $m-i+1 \in \{2, \dots, m\}$, pero $C_{m-i} = P_{(m+i)+1}$ y $C_{m-i+1} = P_{m+i}$ por lo tanto $P_{m+i} \cap P_{(m+i)+1} \neq \emptyset$ para cualquier $i = 1, \dots, m-1$.

Por otro lado, $P_{2m} \cap P_{2m+1} \neq \emptyset$ ya que $P_{2m} = C_1 = F_1 = P_{2m+1}$.

Finalmente, dado que $P_{2m+i} = L_i$ para cada $1 \leq i \leq n$ y por hipótesis $\mathcal{L}$ es cadena débil, entonces $P_{2m+i} \cap P_{2m+(i+1)} \neq \emptyset$ para cada $i = 1, \dots, n-1$.

Concluimos que $P_j \cap P_{j+1} \neq \emptyset$ para cada $j = 1, \dots, 2m+n$, por lo tanto $\mathcal{P}$ es una cadena débil de C_1 a L_n y, en efecto, $\mathcal{P} = \mathfrak{C} \cup \mathcal{L}$. $\square$

Lema 3.15. Sea S un espacio topológico conexo y sean $p, q \in S$. Si $\mathcal{C}$ es una colección finita de subconjuntos cerrados no vacíos de S tales que cubren a S , entonces toda la colección $\mathcal{C}$ se puede indexar para formar una cadena débil de p a q .

Demostración. Por hipótesis $p \in S$ y $S = \bigcup \mathcal{C}$, de ahí que existe un conjunto $C_p \in \mathcal{C}$ tal que $p \in C_p$. Sea

$$\mathcal{C}_0 = \{C \in \mathcal{C} : \text{existe una cadena débil de } C_p \text{ a } C \text{ cuyos eslabones son miembros de } \mathcal{C}\}$$

Veamos que $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$. Es claro que $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$, resta probar que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_0$, para ello primero demostraremos las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1. Cualquier elemento de $\mathcal{C}$ que intersekte a un elemento de $\mathcal{C}_0$, es un miembro de $\mathcal{C}_0$

Demostración de la afirmación 1. Sea $C \in \mathcal{C}$ tal que $C \cap C_0 \neq \emptyset$ para algún $C_0 \in \mathcal{C}_0$, veamos que $C \in \mathcal{C}_0$, i. e., existe una cadena débil de C_p a C cuyos eslabones son miembros de $\mathcal{C}$. Como $C_0 \in \mathcal{C}_0$ entonces existe una cadena débil $\mathcal{L} = \{C_p = L_1, \dots, L_n = C_0\}$ donde $L_i \in \mathcal{C}$ para todo $i = 1, \dots, n$. Sea $\mathcal{L}' = \{L_1, \dots, L_n, L_{n+1} = C\}$, como $C \cap C_0 \neq \emptyset$ concluimos que $\mathcal{L}'$ es una cadena débil de C_p a C . Por lo tanto $C \in \mathcal{C}_0$.

Sean $A = \bigcup \mathcal{C}_0$ y $B = \bigcup (\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0)$.

Afirmación 2. Las siguientes proposiciones se cumple:

- a) $A \cap B = \emptyset$
- b) A y B son conjuntos cerrados
- c) $A \cup B = S$
- d) $A \neq \emptyset$

Demostración de la afirmación 2.

- a) Supongamos que $A \cap B \neq \emptyset$. Sea $x \in A \cap B$, por tanto existen $D_0 \in \mathcal{C}_0$ y $D \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0$ tales que $x \in D_0$ y $x \in D$, i. e., $D_0 \cap D \neq \emptyset$ luego por la afirmación 1, $D \in \mathcal{C}_0$ (contradicción). Por lo tanto $A \cap B = \emptyset$.
- b) Como A y B son la unión finita de conjuntos cerrados, entonces A y B son cerrados en S .
- c) Dado que

$$A \cup B = \left[\bigcup \mathcal{C}_0 \right] \cup \left[\bigcup (\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0) \right] = \bigcup \mathcal{C}$$

y por hipótesis $\bigcup \mathcal{C} = S$, por consiguiente $A \cup B = S$.

- d) Notemos que $C_p \in \mathcal{C}_0$ y como $p \in C_p$ entonces $p \in \bigcup \mathcal{C}_0 = A$, i. e., $p \in A$, por lo tanto $A \neq \emptyset$.

Por la afirmación 2, se deduce que $B = \emptyset$, en caso contrario A y B formarían una desconexión de S y esto generaría una contradicción ya que S es conexo. Luego, sea $T \in \mathcal{C}$, por hipótesis $T \neq \emptyset$, por lo tanto $T \not\subset B$ de ahí que $T \in \mathcal{C}_0$, así concluimos que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_0$. Hemos mostrado que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$.

Como $\mathcal{C}$ es una colección finita, para $n \in \mathbb{N}$, podemos denotar a

$\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ donde $C_1 = C_p$. Sabemos que $C_i \in \mathcal{C} = \mathcal{C}_0$ para todo $i = 1, \dots, n$, de ahí que para cada C_i existe una cadena débil $\mathcal{L}_i$ de C_p a C_i cuyos eslabones son miembros de $\mathcal{C}$. Notemos que $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_3$ son tales que su primer elemento es C_p , por el lema 3.14, existe una cadena débil $\mathcal{T}_3$ de C_p a C_3 y además $C_j \in \mathcal{T}_3$ donde $1 \leq j \leq 3$; luego, notemos que $\mathcal{T}_3$ y $\mathcal{L}_4$ son tales que su primer elemento es C_p , nuevamente, por el lema 3.14, existe una

cadena débil $\mathcal{T}_4$ de C_p a C_4 y además $C_j \in \mathcal{T}_4$ donde $1 \leq j \leq 4$; continuando de esta manera, obtendremos una cadena débil $\mathcal{T}_n$ de C_p a C_n y además $C_j \in \mathcal{T}_3$ donde $1 \leq j \leq n$. Finalmente, por hipótesis $p \in S$ por lo que existe un conjunto $C_q \in \mathcal{C}$ tal que $q \in C_q$, pero $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$, de manera que existe una cadena débil $\mathcal{Q}$ de C_p a C_q cuyos eslabones son miembros de $\mathcal{C}$. Notemos que $\mathcal{T}_n$ y $\mathcal{Q}$ son tales que su primer elemento es C_p , por el lema 3.14, existe una cadena débil $\mathcal{F}$ de C_p a C_q cuyos eslabones son todos los miembros de $\mathcal{C}$. Por la definición 3.13, concluimos que $\mathcal{F}$ es una cadena débil de p a q . $\square$

Teorema 3.16. TEOREMA DE HAHN-MAZURKIEWICZ. *Si X es un continuo localmente conexo entonces existe una función $f : [0, 1] \rightarrow X$ continua y suprayectiva.*

Demostración. Sean (X, d) un continuo localmente conexo y $\epsilon_1 = 1$, por el teorema 3.12, se tiene que $X = \bigcup \mathcal{A}_1$ donde $\mathcal{A}_1$ es una colección finita de continuos localmente conexos tales que para cada $A \in \mathcal{A}_1$ se cumple que $\text{diám}(A) < 1$. Dado que cada $A \in \mathcal{A}$ es un continuo, en particular, cada $A \in \mathcal{A}$ es compacto, por consiguiente cada $A \in \mathcal{A}$ es cerrado de X (teorema 1.31), por lo tanto $\mathcal{A}$ es una colección finita de subconjuntos cerrados en X que cubre a X . Sean $p, q \in X$ distintos, aplicando el lema 3.15 a estos puntos y a la colección $\mathcal{A}$, tenemos que $\mathcal{A}$ se puede indexar para formar una cadena débil $\{A_1, \dots, A_n\}$ de p a q .

A continuación, escribiremos al intervalo cerrado $[0, 1]$ como la unión de n intervalos cerrados no degenerados $I_1, \dots, I_n$ de la forma

$$I_i = [t_{i-1}, t_i], \quad 1 \leq i \leq n, \quad \text{donde } t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1.$$

Definimos $F_1 : [0, 1] \rightarrow C(X)$ por

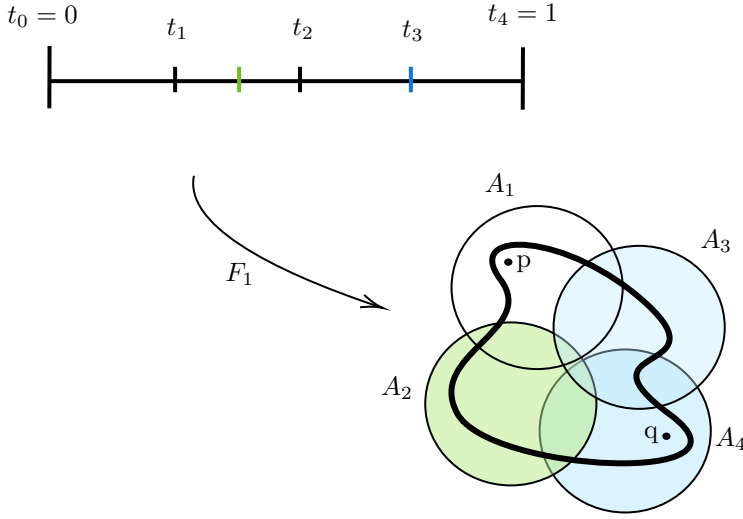
$$F_1(t) = \begin{cases} A_i & \text{si } t \in I_i \setminus \{t_0, \dots, t_n\} \\ A_i \cup A_{i+1} & \text{si } t = t_i \text{ y } 1 \leq i \leq n-1 \\ A_1 & \text{si } t = 0 \\ A_n & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Afirmación 1. La función F_1 satisface las siguientes propiedades:

1. F_1 es USC.
2. $X = \bigcup_{t \in [0, 1]} F_1(t)$

Demostración de la afirmación 1.

1. Sea $l \in [0, 1]$, veamos que si $F_1(l) \subset U$ donde U es un abierto de X entonces existe V abierto de $[0, 1]$ tal que $l \in V$ y $F_1(x) \subset U$ para todo $x \in V$.
Sea U un abierto de X tal que $F_1(l) \subset U$, como $l \in [0, 1]$ entonces $l \in [t_{i-1}, t_i]$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$.
1.1 Si $l \in I_i \setminus \{t_0, \dots, t_n\}$ entonces $F_1(l) = A_i$. Sea $V := (t_{i-1}, t_i)$, notemos que es un conjunto abierto de $[0, 1]$, veamos que V cumple las propiedades

Figura 3.1: Construcción de F_1

deseadas. Como $t_i \neq l \neq t_{i-1}$ y $l \in I_i$ entonces $l \in (t_{i-1}, t_i)$ además, sea $x \in V$ luego

$$F_1(x) = A_i = F_1(l) \subset U,$$

por lo tanto $F_1(x) \subset U$ para todo $x \in V$.

- 1.2 Si $l = t_i$ con $1 \leq i \leq n-1$ entonces $F_1(l) = A_i \cup A_{i+1}$. Sean $z_1, z_2 \in [0, 1]$ tales que $t_{i-1} < z_1 < t_i$ y $t_i < z_2 < t_{i+1}$. Sea $V := (z_1, z_2)$, notemos que $z_1 < t_i < z_2$ por consiguiente $l = t_i \in V$. Por otro lado, sea $x \in V$.

1.2.1 Si $z_i < x < t_i$ entonces $F_1(x) = A_i \subset F_1(l) \subset U$,

1.2.2 Si $x = t_i$ entonces $F_1(x) = F_1(l) \subset U$,

1.2.3 Si $t_i < x < z_2$ entonces $F_1(x) = A_{i+1} \subset F_1(l) \subset U$.

Por lo tanto $F_1(x) \subset U$ para todo $x \in V$.

- 1.3 Si $l = 0$ entonces $F_1(l) = A_1$. Sea $V := [0, t_1)$, el cual es un conjunto abierto de $[0, 1]$ y evidentemente $l \in V$. Sea $x \in V$.

1.3.1 Si $x = 0$ entonces $F_1(x) = F_1(l) \subset U$

1.3.2 Si $0 < x < t_1$ entonces $F_1(x) = A_i = F_1(l) \subset U$

de manera que $F_1(x) \subset U$ para todo $x \in V$.

- 1.4 Si $l = 1$ entonces $F_1(l) = A_n$. Definimos al conjunto abierto $V := (t_{n-1}, 1]$ donde claramente $l \in V$. Sea $x \in V$.

1.4.1 Si $x = 1$ entonces $F_1(x) = F_1(l) \subset U$

1.4.2 Si $t_{n-1} < x < 1$ entonces $F_1(x) = A_n = F_1(l) \subset U$

por lo tanto $F_1(x) \subset U$ para todo $x \in V$.

Por los casos anteriores, se concluye que para todo $l \in [0, 1]$ y U abierto de $C(X)$ tal que $F_2(l) \subset U$, existe V abierto de $[0, 1]$ tal que $l \in V$ y $F_2(x) \subset U$ para todo $x \in V$. Por lo tanto, de acuerdo a la definición 1.86, se tiene que F_1 es USC.

2. Es claro que $\bigcup_{t \in [0,1]} F_1(t) \subset X$, resta demostrar que $X \subset \bigcup_{t \in [0,1]} F_1(t)$. Sea $x \in X$, por lo tanto existe $A_i \in \{A_1, \dots, A_n\}$ tal que $x \in A_i$. Consideremos a $s = \frac{t_i - t_{i-1}}{2}$, como $s \in [0, 1]$ por consiguiente $F_1(s) \subset \bigcup_{t \in [0,1]} F_1(t)$ pero $F_1(s) = A_i$, por lo tanto $x \in \bigcup_{t \in [0,1]} F_1(t)$. En conclusión $X = \bigcup_{t \in [0,1]} F_1(t)$.

Sean $p_1 \in A_1$, $p_i \in A_i \cap A_{i-1}$ para $2 \leq i \leq n$ y $p_{n+1} \in A_n$ y sea $\epsilon_2 = \frac{1}{2}$. Sabemos que cada A_i es un continuo localmente conexo, luego aplicando el teorema 3.12 y el lema 3.15 a cada A_i con un procedimiento análogo al que realizamos al inicio para X , obtenemos que existe, para cada A_i , $1 \leq i \leq n$, una cadena débil $\{A_1^i, \dots, A_{m(i)}^i\}$ de p_i a p_{i+1} tal que cubre a A_i y además todo elemento de la cadena es un subcontinuo localmente conexo de A_i con diámetro menor que ϵ_2 , es decir, $\text{diám}(A_j^i) < \epsilon_2$ para cada $1 \leq j \leq m(i)$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, escribiremos a I_i como la unión de $m(i)$ subintervalos cerrados no degenerados $I_1^i, \dots, I_{m(i)}^i$ de la forma

$$I_j^i = [t_{j-1}^i, t_j^i], \quad 1 \leq j \leq m(i), \quad \text{donde } t_0^i = t_{i-1} < t_1^i < t_2^i < \dots < t_{m(i)}^i = t_i.$$

Definimos $F_2 : [0, 1] \rightarrow C(X)$ por

$$F_2(t) = \begin{cases} A_j^i & \text{si } t \in I_j^i \setminus \{t_0^i, \dots, t_{m(i)}^i\} \\ A_j^i \cup A_{j+1}^i & \text{si } t = t_j^i \text{ y } 0 < j < m(i) \\ A_{m(i)-1}^i \cup A_1^i & \text{si } t = t_0^i \text{ y } 2 \leq i \leq n \\ A_1^1 & \text{si } t = 0 \\ A_{m(n)}^n & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Afirmación 2. La función F_2 satisface las siguientes propiedades:

1. F_2 es USC.

2. $X = \bigcup_{t \in [0,1]} F_2(t)$

Demostración de la afirmación 2.

1. Sean $l \in [0, 1]$ y U abierto de $C(X)$ tal que $F_2(l) \subset U$. Veamos que existe V abierto de $[0, 1]$ tal que $l \in V$ y $F_2(x) \subset U$ para todo $x \in V$.

Sea U un abierto de X tal que $F_2(l) \subset U$, como $l \in [0, 1]$ entonces $l \in I_k$ para algún $k \in \{1, \dots, n\}$, luego $l \in [t_{j-1}^k, t_j^k] = I_j^k$ para algún $j \in \{1, \dots, m(k)\}$.

- 1.1 Si $l \in I_j^k \setminus \{t_0^k, \dots, t_{m(k)}^k\}$ entonces $F_2(l) = A_j^k$. Definimos al conjunto abierto $V := (t_{j-1}^k, t_j^k)$, veamos que cumple las condiciones deseadas. Evidentemente $l \in V$; por otro lado, sea $x \in V$, luego

$$F_2(x) = A_j^k = F_2(l) \subset U$$

por lo tanto $F_2(x) \subset U$ para todo $x \in V$.

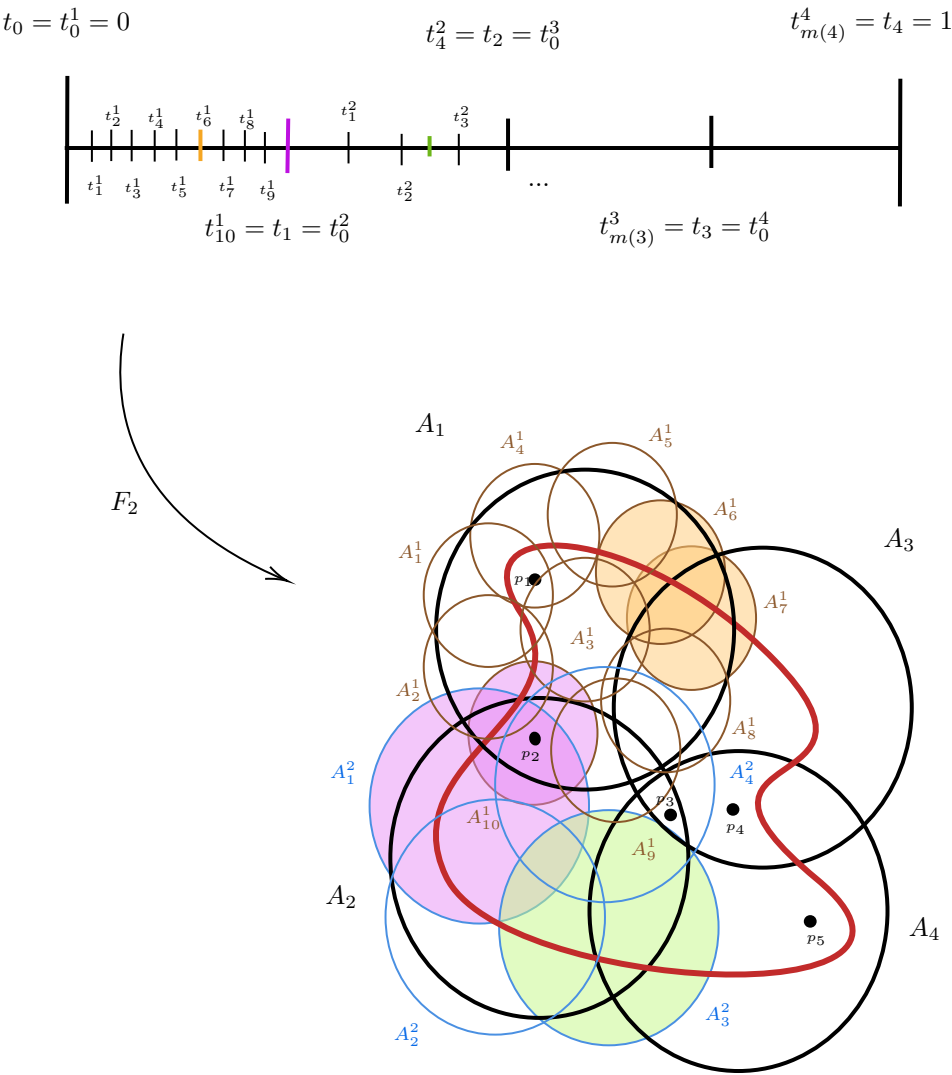


Figura 3.2: Construcción de F_2

1.2 Si $l = t_j^k$ y $0 < j < m(k)$ entonces $F_2(l) = A_j^k \cup A_{j+1}^k$. Sean $z_1, z_2 \in [0, 1]$ tales que $t_{j-1}^k < z_1 < t_j^k$ y $t_j^k < z_2 < t_{j+1}^k$, definimos a $V := (z_1, z_2)$, veamos que cumple las condiciones deseadas. Como $z_1 < l < z_2$ entonces $l \in V$, sea $x \in V$.

1.2.1 Si $z_1 < x < t_j^k$ entonces $F_2(x) = A_j^k \subset U$.

1.2.2 Si $x = t_j^k$ entonces $F_2(x) = F_2(l) \subset U$.

1.2.3 Si $t_j^k < x < z_2$ entonces $F_2(x) = A_{j+1}^k \subset U$.

Por lo tanto $F_2(x) \subset U$ para todo $x \in V$.

1.3 Si $l = t_0^k$ y $2 \leq k \leq n$ entonces $F_2(l) = A_{m(k-1)}^{k-1} \cup A_1^k$. Sean $z_1, z_2 \in [0, 1]$ tales que $t_{m(n)}^{k-1} < z_1 < t_0^k$ y $t_0^k < z_2 < t_1^k$, definimos a $V := (z_1, z_2)$, veamos que cumple las condiciones deseadas. Como $z_1 < l < z_2$ entonces $l \in V$, sea $x \in V$.

1.3.1 Si $z_1 < x < t_0^k$ entonces $F_2(x) = A_{m(k-1)}^{k-1} \subset U$.

1.3.2 Si $x = t_0^k$ entonces $F_2(x) = F_2(l) \subset U$.

1.3.3 Si $t_0^k < x < z_2$ entonces $F_2(x) = A_1^k \subset U$.

Por lo tanto $F_2(x) \subset U$ para todo $x \in V$.

1.4 Sea $l = 0$, entonces $F_2(l) = A_1^1$. Sea $V := [0, t_1^1)$, donde evidentemente $l \in V$, además sea $x \in V$.

1.4.1 Si $x = 0$ entonces $F_2(x) = F_2(l) \subset U$.

1.4.2 Si $0 < x < t_1^1$ entonces $F_2(x) = A_1^1 = F_2(l) \subset U$.

Por lo tanto $F_2(x) \subset U$ para todo $x \in V$.

1.5 Sea $l = 1$, entonces $F_2(l) = A_{m(n)}^n$. Sea $V := (t_{m(n)-1}^n, 1]$, donde evidentemente $l \in V$, además sea $x \in V$.

1.5.1 Si $t_{m(n)-1}^n < x < 1$ entonces $F_2(x) = A_{m(n)}^n = F_2(l) \subset U$.

1.5.2 Si $x = 1$ entonces $F_2(x) = F_2(l) \subset U$.

Por lo tanto $F_2(x) \subset U$ para todo $x \in V$.

Por los casos anteriores, se concluye que para todo $l \in [0, 1]$ y U abierto de $C(X)$ tal que $F_2(l) \subset U$, existe V abierto de $[0, 1]$ tal que $l \in V$ y $F_2(x) \subset U$ para todo $x \in V$. Por lo tanto, de acuerdo a la definición 1.86, se tiene que F_2 es USC.

2. Es claro que $\bigcup_{t \in [0,1]} F_2(t) \subset X$, resta demostrar que $X \subset \bigcup_{t \in [0,1]} F_2(t)$. Sea $x \in X$,

por lo tanto existe $A_i \in \{A_1, \dots, A_n\}$ tal que $x \in A_i$, por consiguiente existe A_j^i para algún $j \in \{1, \dots, m(i)\}$, tal que $x \in A_j^i$. Sea $s = \frac{t_j^i - t_{j-1}^i}{2}$, como $s \in [0, 1]$ entonces $F_1(s) \subset \bigcup_{t \in [0,1]} F_1(t)$, notemos que $s \in (t_{j-1}^i, t_j^i)$ por consiguiente

$F_1(s) = A_i^j$, así

$$A_i^j = F_1(s) \subset \bigcup_{t \in [0,1]} F_1(t),$$

y como $x \in A_j^i$, por ende $x \in \bigcup_{t \in [0,1]} F_1(t)$, de modo que $X \subset \bigcup_{t \in [0,1]} F_1(t)$. En

conclusión, $X = \bigcup_{t \in [0,1]} F_1(t)$.

Afirmación 3. Para cada $s \in [0, 1]$ se cumple que $F_2(s) \subset F_1(s)$

Demostración de la afirmación 3. Sea $s \in [0, 1]$ entonces existe I_k tal que $s \in I_k$, luego $s \in I_j^k$ para algún $1 \leq j \leq m(k)$.

1. Si $s \in I_j^k \setminus \{t_0^k, \dots, t_{m(k)}^k\}$ entonces $F_2(s) = A_j^k$ y $F_1(s) = A_k$. Notemos que $A_j^k \subset A_k$ por consiguiente $F_2(s) \subset F_1(s)$.
2. Si $s = t_j^k$ y $0 < j < m(k)$ entonces $F_2(s) = A_j^k \cup A_{j+1}^k$ y $F_1(s) = A_k$. De manera que $F_2(s) = A_j^k \cup A_{j+1}^k \subset A_k = F_1(s)$, es decir, $F_2(s) \subset F_1(s)$.
3. Si $s = t_0^k$ y $2 \leq k \leq n$ entonces $F_2(s) = A_{m(k-1)}^{k-1} \cup A_1^k$ y $F_1(s) = A_{k-1} \cup A_k$. Notemos que $A_{m(k-1)}^{k-1} \subset A_{k-1}$ y $A_1^k \subset A_k$ por lo tanto $A_{m(k-1)}^{k-1} \cup A_1^k \subset A_{k-1} \cup A_k$, así $F_2(s) \subset F_1(s)$.
4. Sea $s = 0$ entonces $F_2(s) = A_1^1$ y $F_1(s) = A_1$, por lo tanto $F_2(s) \subset F_1(s)$.
5. Sea $s = 1$ entonces $F_2(s) = A_{m(n)}^n$ y $F_1(s) = A_n$ por consiguiente $F_2(s) \subset F_1(s)$.

Por los casos anteriores, se concluye que para cada $s \in [0, 1]$, $F_2(s) \subset F_1(s)$.

En la afirmación 1 demostramos que F_1 satisface a) y c) del teorema 1.87, de la misma manera, en la afirmación 2 se demuestran las mismas propiedades pero para F_2 . Luego en la afirmación 3, vemos que F_1 y F_2 satisfacen b) del teorema 1.87.

Continuando de esta manera, es fácil ver como definir F_n para cada $n \in \mathbb{N}$, de modo que se satisfagan a) – c) del teorema 1.87. Sea $x \in X$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diám}(F_n(x)) < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0,$$

es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diám}(F_n(x)) = 0$ para todo $x \in X$, con lo cual demostramos d) del teorema 1.87.

En conclusión hemos demostrado que se cumple a) – d) del teorema 1.87, de manera que existe una función continua y suprayectiva de $[0, 1]$ a X , por consiguiente X es una imagen continua del intervalo cerrado $[0, 1]$. $\square$

Por el teorema 3.16, tenemos la certeza de asegurar que existe una función continua y suprayectiva del intervalo cerrado I sobre I^2 , es decir, podemos garantizar la existencia de las curvas que llenan el espacio. En otras palabras podemos ver el interior del cuadrado como una curva.

Aunque fue G. Peano quien descubrió la primera curva que llena el espacio, fue D. Hilbert quien logró que este fenómeno adquiriera una mayor claridad y despertara el interés de la imaginación geométrica. A continuación, se presenta el proceso de construcción de la curva de Hilbert.

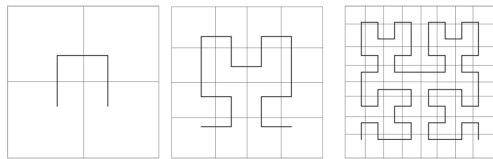


Figura 3.3: Primeros tres pasos de la construcción de la curva de Hilbert

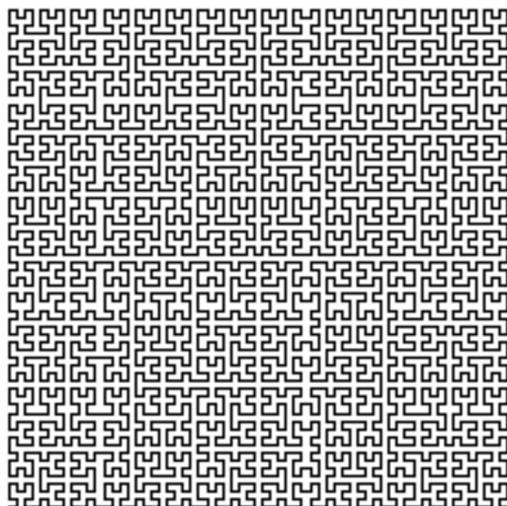


Figura 3.4: Curva de Hilbert

Además, dado que I^3 es un espacio localmente conexo, entonces también se puede crear la curva de Hilbert tridimensional. Si es de nuestro interés conocer la función suprayectiva de estas construcciones, recomendamos ver [16].

A continuación, estudiaremos resultados que nos permiten determinar si la propiedad de ser localmente conexo se preserva bajo funciones continuas. Además, el teorema 3.20 caracteriza a los continuos localmente conexos.

Lema 3.17. Sean S_1 y S_2 espacios topológicos, y sea $f : S_1 \rightarrow S_2$ una función continua y suprayectiva. Si C es una componente de S_2 entonces $f^{-1}(C)$ es la unión de algunas componentes de S_1 .

Demostración. Sean C una componente de S_2 y

$$\mathcal{C} = \bigcup \{K \subset S_1 : K \text{ es una componente de } S_1 \text{ y } K \cap f^{-1}(C) \neq \emptyset\}.$$

Veamos que $f^{-1}(C) = \mathcal{C}$

- ($\subset$) Sea $x \in f^{-1}(C)$ de ahí que $x \in S_1$; recordemos que S_1 es igual a la unión de sus componentes, por lo que existe una componente K de S_1 tal que $x \in K$, por consiguiente $K \cap f^{-1}(C) \neq \emptyset$. Así $x \in \mathcal{C}$.

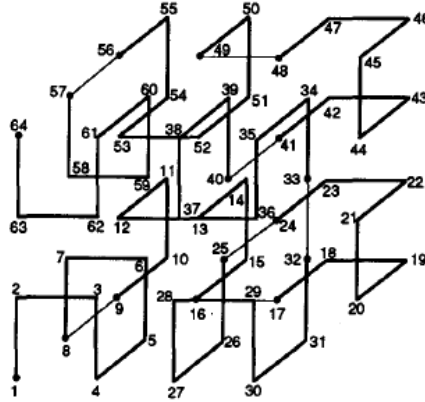


Figura 3.5: Curva de Hilbert tridimensional

($\supset$) Sea $x \in \mathcal{C}$, por consiguiente existe K componente de S_1 tal que $x \in K$ y $K \cap f^{-1}(C) \neq \emptyset$, es decir, existe $y \in K \cap f^{-1}(C)$, luego $f(y) \in C \cap f(K)$. Consideremos a la función $f|_K : K \rightarrow f(K)$, la cual es una función continua ([5], pág 67), recordemos que la conexidad es invariante bajo funciones continuas y K es conexo, por consiguiente $f(K)$ es conexo. Debido a la afirmación anterior y dado que por hipótesis, C es una componente, i. e., C es conexo y $C \cap f(K) \neq \emptyset$, entonces $f(K) \cup C$ es conexo. De manera que C es una componente tal que $C \subset f(K) \cup C$, por lo tanto $f(K) \cup C = C$. Finalmente, como $x \in K$ entonces $f(x) \in f(K) \cup C = C$ por consiguiente $x \in f^{-1}(C)$.

Así, $f^{-1}(C) = \mathcal{C}$, es decir, $f^{-1}(C)$ es la unión de algunas componentes de S_1 . $\square$

Proposición 3.18. Sean X y Y espacios métricos, y $f : X \rightarrow Y$ una función continua, cerrada y suprayectiva. Si X es localmente conexo entonces Y es localmente conexo.

Demostración. Por el teorema 1.61, es suficiente probar que toda componente de cualquier subconjunto abierto de Y , es también abierto de Y .

Sea C una componente de un subconjunto abierto U de Y . Consideremos la función $f|_{f^{-1}(U)}$, la cual es una función continua y suprayectiva, luego por el lema 3.17, se tiene que $(f|_{f^{-1}(U)})^{-1}(C)$ es la unión de algunos componentes de $f^{-1}(U)$. Como f es una función continua y U es abierto de Y entonces $f^{-1}(U)$ es abierto de X pero X es localmente conexo, por el teorema 1.61, las componentes de $f^{-1}(U)$ son abiertos en X , de ahí que $f_U^{-1}(C)$ es abierto de X . Luego, como f es una función cerrada y dado que $f[X \setminus f^{-1}(C)] = Y \setminus C$, entonces $Y \setminus C$ es cerrado de Y , de ahí que C es abierto de Y . De esta manera hemos probado que Y es localmente conexo. $\square$

Corolario 3.19. Sean X un espacio métrico, Y un espacio topológico de Hausdorff y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Si X es un continuo localmente conexo entonces Y es un continuo localmente conexo.

Demostración. Dado que f es una función continua de un continuo localmente conexo X sobre un espacio Hausdorff Y , por el teorema 1.44, se tiene que Y es metrizable. Por otro lado, por el teorema 1.36, la función f es cerrada. Así, haciendo uso del teorema 3.18 y recordando que la imagen continua de un continuo es un continuo, concluimos que Y es un continuo localmente conexo. $\square$

Teorema 3.20. *Sea X un continuo. Si X es un continuo localmente conexo si y solo si X es una imagen continua de $[0, 1]$*

Demostración. La suficiencia es inmediata debido al teorema 3.16. Ahora probaremos la necesidad. Supongamos que X es una imagen continua de $[0, 1]$ y observemos que $[0, 1]$ es un continuo localmente conexo, entonces por el corolario 3.19, X es un continuo localmente conexo. $\square$

Teorema 3.21. *Cualesquiera dos continuos localmente conexos con más de un punto son imágenes continuas uno del otro. De hecho, si X y Y son continuos localmente conexos con más de un punto, entonces para cualesquiera n puntos distintos ($n < \infty$)*

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in X \quad y \quad y_1, y_2, \dots, y_n \in Y,$$

existe una función $f : X \rightarrow Y$ continua y suprayectiva tal que $f(x_i) = y_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demostración. Es suficiente probar la segunda parte de este teorema. Por el teorema 3.16, existe una función α continua y suprayectiva de $[0, 1]$ a Y . Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, sea $t_i \in [0, 1]$ tal que $\alpha(t_i) = y_i$. Luego, sean $p, q \in X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ con $p \neq q$. Definimos la siguiente función

$$\beta : \{p, q, x_1, \dots, x_n\} \rightarrow [0, 1],$$

donde $\beta(p) = 0$, $\beta(q) = 1$ y para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $\beta(x_i) = t_i$. Veamos que β es una función continua, en efecto, si C es un conjunto cerrado de $[0, 1]$ entonces $f^{-1}(C) \subset \{p, q, x_1, \dots, x_n\}$, i. e., $f^{-1}(C)$ es un conjunto finito del espacio métrico X , de ahí que $f^{-1}(C)$ es cerrado de X , así concluimos que β es una función continua. Luego, por el teorema 1.8, podemos extender a β a una función continua $\gamma : X \rightarrow [0, 1]$. Observemos que γ es suprayectiva ya que X es conexo y $0, 1 \in \gamma(X)$.

Ahora, sea $f = \alpha \circ \gamma$, observemos que es continua ya que es la composición de funciones continuas. Además, sea $i \in \{1, \dots, n\}$ veamos que

$$f(x_i) = \alpha \circ \gamma(x_i) = \alpha(\gamma(x_i)) = \alpha(\beta(x_i)) = \alpha(t_i) = y_i,$$

es decir, $f(x_i) = y_i$. Por lo tanto, hemos hallado una función f que tiene las propiedades deseadas. $\square$

Corolario 3.22. *Sean X un continuo localmente conexo con más de un punto y Y un espacio topológico. El espacio Y es una descomposición USC de X si y solo si Y es un continuo localmente conexo.*

Demostración. $[\Rightarrow]$ Supongamos que Y es una descomposición USC de X . Por el teorema 1.78, Y es una imagen continua de X y además por el teorema 1.76, se tiene que Y es metrizable. Luego, como Y es continuo (teorema 1.77), entonces haciendo uso del corolario 3.19, se tiene que Y es un continuo localmente conexo.

$[\Leftarrow]$ Supongamos que Y es un continuo localmente conexo. Por el teorema 3.21, los espacios X y Y son imágenes continuas uno de otro, es decir, existe una función continua f de X en Y tal que $f(X) = Y$. Sea

$$D_f = \{f^{-1}(y) : y \in Y\},$$

por el teorema 1.78, D_f es una descomposición USC de X y es homeomorfa a Y . De ahí que Y es una descomposición USC de X . $\square$

3.3. Arcos en continuos localmente conexos

En la siguiente sección, se usa el teorema de Hahn-Mazurkiewicz (3.16) para demostrar el teorema de arco conexidad (3.25), el cual dice que si un continuo es localmente conexo entonces es arco conexo.

La siguiente definición es la generalización topológica de la noción de funciones monótonas con valores reales de una variable real.

Definición 3.23. Sean S_1 y S_2 espacios topológicos. Se dice que una función $f : S_1 \rightarrow S_2$ es **monótona** siempre que f sea continua y $f^{-1}(y)$ es conexo para cada $y \in S_2$.

Proposición 3.24. Si Y es un espacio de Hausdorff no degenerado y $f : [0, 1] \rightarrow Y$ es una función monótona suprayectiva, entonces Y es un arco.

Demostración. Recordemos que el intervalo cerrado $[0, 1]$ es un espacio métrico compacto, además, dado que f es una función monótona, por la definición 3.23, tenemos que f es continua y por hipótesis f es suprayectiva, así por el teorema 1.44, Y es un espacio métrico. Por otro lado, la compacidad es invariante bajo funciones continuas, por consiguiente Y es compacto. En resumen, $[0, 1]$ y Y son espacios métricos compactos.

Sea $\mathcal{D}_f = \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$, por lo anterior y dado que f es una función continua y suprayectiva, entonces $\mathcal{D}_f$ es una descomposición USC de $[0, 1]$ y es homeomorfo a Y (teorema 1.78).

Afirmación. Para todo $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es un subcontinuo propio de $[0, 1]$.

Demostración de la afirmación. Sea $y \in Y$. Por hipótesis general sabemos que Y es no degenerado y además f es suprayectiva, de ahí que $f^{-1}(y) \subsetneq [0, 1]$. Por otro lado, dado que f es una función monótona entonces $f^{-1}(y)$ es conexo. Finalmente, hemos visto que Y es un espacio métrico, por ello $\{y\}$ es cerrado de Y y sabemos que f es continua, por lo tanto $f^{-1}(y)$ es cerrado de $[0, 1]$ pero $[0, 1]$ es compacto, por consiguiente $f^{-1}(y)$ es compacto. En resumen $f^{-1}(y)$ es compacto y conexo, i. e., $f^{-1}(y)$ es un subcontinuo propio de $[0, 1]$.

Como $[0, 1]$ es un continuo y por la afirmación anterior sabemos que todos los elementos de $\mathcal{D}_f$ son subcontinuos propios de $[0, 1]$, entonces por el teorema 1.80, $\mathcal{D}_f$ es un arco, es

decir, $\mathcal{D}_f$ es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$ pero anteriormente también se dedujo que $\mathcal{D}_f$ es homeomorfo a Y por lo tanto, como la relación de homeomorfismo es de equivalencia, Y es homeomorfo a $[0, 1]$, por consiguiente Y es un arco. $\square$

Alrededor de 1913, H. Hahn y S. Mazurkiewicz demostraron que la propiedad de “ser una imagen continua de $[0, 1]$ ” en realidad caracteriza a los continuos localmente conexos.

Teorema 3.25. TEOREMA DE ARCO CONEXIDAD

Cada continuo localmente conexo con más de un punto es arco conexo.

Demostración. Sea (X, d) un continuo localmente conexo no degenerado, y sean $p, q \in X$ con $p \neq q$. Como $[0, 1]$ es un continuo localmente conexos no degenerado, por la segunda parte del teorema 3.21, existe una función $f : [0, 1] \rightarrow X$ continua y suprayectiva tal que $f(0) = p$ y $f(1) = q$.

Sea

$$\mathcal{C} = \{A \in 2^I : p, q \in f(A) \text{ y si } s \text{ y } t \text{ son los puntos extremos de la clausura de una componente } J \text{ de } I \setminus A, \text{ entonces } f(s) = f(t)\}.$$

Haremos uso del teorema Máximo-Mínimo 1.84, para ello, primero demostraremos la siguiente afirmación.

Afirmación 1. Las siguientes proposiciones son verdaderas.

1.1 $\mathcal{C} \neq \emptyset$

1.2 $\mathcal{C}$ es cerrado de 2^I

Demostración de la afirmación 1.

1.1 Veamos que $I \in \mathcal{C}$. Notemos que $I \in 2^I$, además $f(I) = X$ ya que f es suprayectiva, por lo tanto, dado que $p, q \in X$ entonces $p, q \in f(I)$. Finalmente, como $I \setminus I = \emptyset$ entonces la segunda condición se cumple por vacuidad. Por lo tanto $I \in \mathcal{C}$, de manera que $\mathcal{C} \neq \emptyset$.

1.2 Para demostrar que $\mathcal{C}$ es cerrado de 2^I , basta probar que $\overline{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}$. Sea $A \in \overline{\mathcal{C}}$, por consiguiente, existe una sucesión $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ tal que $A_i \rightarrow A$ ([10], corolario 2' pág. 107).

Veamos que $p, q \in f(A)$, para ello definamos la función $f^* : 2^I \rightarrow 2^X$ tal que

$$f^*(A) = f(A) \text{ para todo } A \in 2^I.$$

Por el teorema 1.82, f^* es continua y además $A_i \rightarrow A$, entonces $f^*(A_i) \rightarrow f^*(A)$ pero $f^*(A_i) = f(A_i)$ y $f^*(A) = f(A)$ de manera que $f(A_i) \rightarrow f(A)$. Ahora, supongamos que $p \notin f(A)$ por lo que $d(p, f(A)) > 0$. Sea $\epsilon = d(p, f(A))$, como $f(A_i) \rightarrow f(A)$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $H_d(f(A_n), f(A)) < \frac{\epsilon}{2}$, de ahí que $f(A_{n_0}) \subset N_d\left(\frac{\epsilon}{2}, f(A)\right)$ para algún $n_0 \geq N$, de manera que $p \notin f(A_{n_0})$ lo cual es una contradicción, ya que $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$, por lo tanto $p \in f(A)$. De manera análoga se prueba que $q \in f(A)$.

Ahora probaremos la segunda condición para que $A \in \mathcal{C}$. Como $I \in \mathcal{C}$, podemos suponer para el resto de la demostración que $A \neq I$ y, por lo tanto, también podemos suponer que $A_i \neq I$ para cualquier i . Sea J una componente de $I \setminus A$ y sean $s < t$ los puntos finales de $\bar{J}$. Por el teorema 1.85, existe una sucesión $\{J_i\}_{i=1}^{\infty}$ de componentes de J_i de $I \setminus A$ tal que $\bar{J}_i \rightarrow \bar{J}$ y cada $\bar{J}_i = [s_i, t_i]$ donde $s_i, t_i \in I$. Veamos que $s_i \rightarrow s$.

Sea $\epsilon > 0$, como $\bar{J}_i \rightarrow \bar{J}$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple que $H_{||}(\bar{J}_n, \bar{J}) < \frac{\epsilon}{2}$, i. e.,

$$\bar{J}_n \subset N_{||}\left(\frac{\epsilon}{2}, \bar{J}\right) \text{ y } \bar{J} \subset N_{||}\left(\frac{\epsilon}{2}, \bar{J}_n\right) \text{ para cada } n \geq N. \quad (3.14)$$

Sea $n_0 \geq N$ fijo pero arbitrario y supongamos que $|s - s_{n_0}| \geq \epsilon$, de ahí que $s - s_{n_0} \leq -\epsilon$ o $s - s_{n_0} \geq \epsilon$. Si $s - s_{n_0} \geq \epsilon$ entonces $s_{n_0} + \epsilon \leq s$, pero por (3.14) y dado que $s_{n_0} \in \bar{J}_{n_0}$, existe $j \in \bar{J}$ tal que $|j - s_{n_0}| \leq \frac{\epsilon}{2}$, de ahí que

$$-\frac{\epsilon}{2} < j - s_{n_0} < \frac{\epsilon}{2} \Leftrightarrow -\frac{\epsilon}{2} + s_{n_0} < j < \frac{\epsilon}{2} + s_{n_0},$$

por consiguiente $j < \frac{\epsilon}{2} + s_{n_0} < s_{n_0} + \epsilon \leq s$, por lo tanto $j < s$ lo cual es una contradicción ya que para todo $j \in \bar{J}$, se tiene que $s \leq j$. Por otro lado, si $s - s_{n_0} \leq -\epsilon$ entonces $s + \epsilon \leq s_{n_0}$, pero por (3.14) y dado que $s \in \bar{J}$, existe $j_{n_0} \in \bar{J}_{n_0}$ tal que $|j_{n_0} - s| \leq \frac{\epsilon}{2}$, de ahí que

$$-\frac{\epsilon}{2} < j_{n_0} - s < \frac{\epsilon}{2} \Leftrightarrow -\frac{\epsilon}{2} + s < j_{n_0} < \frac{\epsilon}{2} + s,$$

por consiguiente $j_{n_0} < \frac{\epsilon}{2} + s < s + \epsilon \leq s_{n_0}$, por lo tanto $j_{n_0} < s_{n_0}$ lo cual es una contradicción ya que para todo $j_{n_0} \in \bar{J}$, se tiene que $s_{n_0} \leq j_{n_0}$. Por lo tanto, $|s - s_n| < \epsilon$ para todo $n \geq N$, de ahí concluimos que $s_i \rightarrow s$. De manera análoga se demuestra que $t_i \rightarrow t$. En conclusión, dado que f es continua, $f(s_i) \rightarrow f(s)$ y $f(t_i) \rightarrow f(t)$, pero recordemos que $A_i \in \mathcal{C}$ para cada i , entonces $f(s_i) = f(t_i)$, así por la unicidad de la convergencia, $f(s) = f(t)$.

Hasta este punto, hemos verificado todas las propiedades necesarias para concluir que $A \in \mathcal{C}$. Así hemos demostrado que $\bar{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}$, por consiguiente $\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$, concluyendo que $\mathcal{C}$ es cerrado de 2^I .

Debido a la afirmación 1 y por el teorema 1.84, se tiene que $\mathcal{C}$ tiene un elemento minimal, al cual lo denotaremos por M . Luego, por la definición de elemento minimal, sabemos que $M \in \mathcal{C}$, por consiguiente $p, q \in f(M)$. Sean $u = \min M$ y $v = \max M$. Las siguientes afirmaciones nos ayudarán a probar que $f(M)$ es un arco.

Afirmación 2. Se cumple que $f(u) = p$ y $f(v) = q$.

Demostración de la afirmación 2. Tenemos los siguientes casos:

2.1 Si $u = 0$, $f(u) = f(0) = p$, i. e., $f(u) = p$.

2.2 Si $u > 0$, $[0, u)$ es una componente de $I \setminus M$ y dado que $M \in \mathcal{C}$, por lo tanto $f(u) = f(0)$ pero $f(0) = p$ de manera que $f(u) = p$.

2.3 Si $v = 1$, $f(v) = f(1) = q$, i. e., $f(v) = q$.

2.4 Si $v < 1$, $(v, 1]$ es una componente de $I \setminus M$ y dado que $M \in \mathcal{C}$, por lo tanto $f(v) = f(1)$ pero $f(1) = q$ de manera que $f(v) = q$.

Por lo tanto, $f(u) = p$ y $f(v) = q$.

Afirmación 3. Si $s, t \in M$ tales que $s < t$ y $f(s) = f(t)$ entonces $M \cap [s, t] = \{s, t\}$

Demostración de la afirmación 3. Sean $s, t \in M$ tales que $s < t$ y $f(s) = f(t)$. Sea $D = M \setminus (s, t)$ y veamos que $D \in \mathcal{C}$. Notemos que $D \in 2^I$ [[10], corolario 4', pág 49]. Observemos que $u, v \notin (s, t)$, ya que si $u, v \in (s, t)$ entonces $s < u$ y $v < t$ lo cual es una contradicción, ya que $u \leq s$ y $t \leq v$. Así, $u, v \in D$, por ende $f(u), f(v) \in f(D)$, luego por la afirmación 2 sabemos que $f(u) = p$ y $f(v) = q$, así $p, q \in f(D)$.

Por otro lado, sea J componente de $I \setminus D$ tal que $J = [s_0, t_0]$. Consideremos los siguientes dos casos:

3.1 Si J es una componente de $I \setminus M$ entonces $f(s_0) = f(t_0)$.

3.2 Si J no es una componente de $I \setminus M$, veamos que $(s, t) = J$. En efecto, dado que

$$\begin{aligned}
 I \setminus D &= D^C \\
 &= (M \cap (s, t))^C \\
 &= (M^C) \cup (s, t) \\
 &= (I \setminus M) \cup (s, t) \\
 &= ((I \setminus M) \cup (s, t)) \cap (I \setminus \{s, t\}) \\
 &= ((I \setminus M) \cup (s, t)) \cap ((s, t) \cup I \setminus [s, t]) \\
 &= (s, t) \cup (I \setminus M \cap I \setminus [s, t]),
 \end{aligned}$$

de manera que $I \setminus D = (s, t) \cup (I \setminus M \cap I \setminus [s, t])$ y notemos que (s, t) y $(I \setminus M) \cap (I \setminus [s, t])$ son conjuntos separados, así por el teorema 1.53, $J \subset (s, t)$ o $J \subset I \setminus M \cap I \setminus [s, t]$. Supongamos que $J \subset I \setminus M \cap I \setminus [s, t]$, de ahí que $J \subset I \setminus M$, por lo tanto existe una componente J' de $I \setminus M$ tal que $J \subset J'$, pero dado que $I \setminus M \subset I \setminus D$ entonces existe J'' componente de $I \setminus D$ tal que $J' \subset J''$ pero J es componente de $I \setminus D$ de manera que $J = J''$, y por lo tanto $J = J'$, i. e. J es una componente de $I \setminus M$, lo cual es una contradicción a la hipótesis de nuestro caso. Por lo anterior, concluimos que $J \subset (s, t)$ y dado que J es un conjunto conexo máximo de $I \setminus D$ y $(s, t) \subset I \setminus D$ entonces $J = (s, t)$, de manera que $f(s_0) = f(s) = f(t) = f(t_0)$

Debido a los casos anteriores podemos concluir que si s_0 y t_0 son los puntos de clausura de una componente J de $I \setminus D$ entonces $f(s_0) = f(t_0)$. Por lo tanto, $D \in \mathcal{C}$ pero M es el miembro minimal de $\mathcal{C}$ por ello $M \cap (s, t) = \emptyset$, así $M \cap [s, t] = \{s, t\}$, lo cual queríamos demostrar.

Definamos la siguiente regla de correspondencia $g : I \rightarrow f(M)$ tal que

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in M; \\ f(s) & \text{si } x \in \bar{J} = [s, t] \text{ donde } J \text{ es alguna componente de } I \setminus M. \end{cases}$$

Veamos que g esta bien definida. En efecto, sean $s, r \in I$ tales que $s = r$ luego

- Si $r, s \in M$, dado que f es continua, $g(r) = f(r) = f(s) = g(s)$.
- Si $r, s \in I \setminus M$ por consiguiente, dado que $M \in \mathcal{C}$ y las componentes de un conjunto son disjuntas, $f(s) = f(r)$.

Por otro lado, si $y \in f(M)$ entonces existe $x \in M$ tal que $f(x) = y$ pero $f(x) = g(x)$ por lo que $g(x) = y$, así tenemos que $f(M) \subset g(I)$ y evidentemente $g(I) \subset f(M)$ por lo tanto g es suprayectiva.

Afirmación 4. La función g , es continua.

Demostración de la afirmación 4. Sean $a \in I$ y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ una sucesión tal que $\lim x_n = a$, veamos que $\lim g(x_n) = g(a)$.

- 4.1 Si $a \in I \setminus M$ entonces existe J componente de $I \setminus M$ tal que $a \in J$. Observemos que J es abierto por lo que existe $\epsilon > 0$ tal que $B(a, \epsilon) \subset J$, luego dado que $\lim x_n = a$ entonces existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(a, \epsilon)$ para todo $n \geq N_\epsilon$, de ahí tenemos que

$$|\{n \in \mathbb{N} : g(a) \neq g(x_n)\}| < N_\epsilon,$$

por consiguiente $\lim g(x_n) = g(a)$.

- 4.2 Si $a \in M$, consideremos los siguientes conjuntos:

$$\{y_k\}_{k \in K} = \{x_m : x_m \in M\} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

y

$$\{z_j\}_{j \in J} = \{x_m : x_m \in I \setminus M\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Abordaremos los siguientes casos:

- 4.2.1 Si K es finito entonces $\{z_j\}_{j \in J}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de ahí que $\lim z_j = a$. Para cada $j \in J$, existe una componente J_j de $I \setminus M$ tal que $z_j \in J_j$; denotaremos $\bar{J}_j = [a_j, b_j]$. Sea

$$d_j = \begin{cases} a_j & \text{si } |a_j - a| < |b_j - a|; \\ b_j & \text{si } |a_j - a| > |b_j - a|, \end{cases}$$

así $\{d_j\}_{j \in J}$ es una sucesión, veamos que $\lim d_j = a$. Sea $\epsilon > 0$, como $\lim z_j = a$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple que $|z_j - a| < \epsilon$ pero observemos que $|d_j - a| < |z_j - a| < \epsilon$, i.e., $|d_j - a| < \epsilon$ para todo $n \geq N$. Por lo anterior concluimos que $\lim d_j = a$, luego dado que f

es continua entonces $\lim f(d_j) = f(a)$ pero notemos que $\{d_j\}_{j \in J} \subset M$ y además $g(d_j) = g(z_j)$, así

$$\lim g(z_j) = \lim g(d_j) = \lim f(d_j) = f(a) = g(a).$$

Por lo tanto $\lim g(z_j) = g(a)$ y las sucesiones $\{z_j\}_{j \in J}$ y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ solo difieren en una cantidad finita de términos por lo que convergen al mismo límite, de manera que $\lim g(x_n) = g(a)$.

- 4.2.2 Si J es finito entonces $\{y_k\}_{k \in K}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, de ahí que $\lim y_k = a$. Luego, dado que f es una función continua y además $f(y_k) = g(y_k)$ para todo $k \in K$, así

$$\lim g(y_k) = \lim f(y_k) = f(a) = g(a).$$

Por lo tanto $\lim g(y_k) = g(a)$, pero las sucesiones $\{y_k\}_{k \in K}$ y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ solo difieren en una cantidad finita de términos por lo que convergen al mismo límite, de manera que $\lim g(x_n) = g(a)$.

- 4.2.3 Si I y J son infinitos entonces $\{y_k\}_{k \in K}$ y $\{z_j\}_{j \in J}$ son sucesiones parciales de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Recordemos que en los casos (A1) y (A2) demostramos que $\lim g(z_j) = g(a)$ y $\lim g(y_k) = g(a)$, veamos que $\lim g(x_n) = g(a)$. Sea $\epsilon > 0$ entonces existen

$$N_z \in \mathbb{N} \text{ tal que para todo } j \geq N_z \text{ se cumple } d(z_j, a) < \epsilon,$$

y

$$N_y \in \mathbb{N} \text{ tal que para todo } k \geq N_y \text{ se cumple } d(y_k, a) < \epsilon.$$

Sea $N = \max\{N_z, N_y\}$, luego existen $M_1, M_2 \in \mathbb{N}$ tales que $x_{M_1} = y_N$ y $x_{M_2} = z_N$. Denotemos $M = \max\{M_1, M_2\}$ y sea $m \geq M$. Si $x_m \in M$ entonces existe $M_k \in K$ tal que $y_{M_k} = x_m$ luego $M_k \geq N > N_y$, así

$$d(x_m, a) = d(y_{M_k}, a) < \epsilon.$$

Por otro lado, si $x_m \in I \setminus M$ entonces existe $M_j \in J$ tal que $z_{M_j} = x_m$ luego $M_j \geq N > N_z$, así

$$d(x_m, a) = d(z_{M_j}, a) < \epsilon.$$

Por lo tanto $\lim g(x_n) = g(a)$.

Por lo anterior, concluimos que g es continua es I .

Afirmación 5. La función g es monótona

Demostración de la afirmación 5. Veamos que si $z \in f(M)$ entonces $g^{-1}(z)$ es conexo. Sea $z \in f(M)$ entonces existe $t \in M$ tal que $f(t) = z$ además, por como esta definido g , $g(t) = f(t)$, por consiguiente $g(t) = z$ por lo tanto $t \in M \cap g^{-1}(z)$. Así $M \cap g^{-1}(z) \neq \emptyset$. Ahora supongamos que $M \cap g^{-1}(z) = \{r, s, t\}$ donde, sin perdida de generalidad, $r < s < t$; como $r, t \in g^{-1}(z)$ entonces $g(r) = z = g(t)$ pero $g|_M = f|_M$ por lo tanto $f(r) = g(r)$ y $f(t) = g(t)$ de manera que $f(r) = f(t)$, por la afirmación 3, $M \cap [r, t] = \{r, t\}$ lo cual es una contradicción ya que $s \in M \cap [r, t]$. Por lo tanto $M \cap g^{-1}(z)$ es distinto del vacío y tiene a lo mas dos elementos.

5.1 Si $M \cap g^{-1}(z)$ consta de un solo punto, digamos $M \cap g^{-1}(z) = \{s\}$ entonces tenemos los siguientes casos:

5.1.1 Si $g^{-1}(z)$ fuera un conjunto singular entonces $g^{-1}(z) = \{s\}$ y claramente es conexo.

5.1.2 Si $g^{-1}(z)$ tiene más de un punto

◊ Si $k \in g^{-1}(z)$ tal que $k < s$. Notemos que $k \notin M$ ya que $M \cap g^{-1}(z) = \{s\}$, así $k \in I \setminus M$, de ahí que existe una J componente de $I \setminus M$ tal que $k \in J$. Dado que $s \in M$ entonces $\bar{J} \subset [0, s]$. Sea $\bar{J} = [a_1, a_2]$ tal que $0 \leq a_1 < k < a_2 \leq s$. Observemos que $z = g(k) = f(a_1) = f(a_2)$. Notemos que $a_2 \in M$ así $f(a_2) = g(a_2)$ por lo tanto $a_2 \in g^{-1}(z) \cap M$, por consiguiente $a_2 = s$. Por otro lado, dado que $0 \leq a_1 < k$, supongamos que $0 < a_1 < k$, por lo tanto $a_1 \in M$, luego como $M \cap g^{-1}(z) = \{s\}$ entonces $a_1 = s$, por lo tanto $a_1 = a_2$ (contradicción). De manera que $a_1 = 0$.

Por consiguiente $\bar{J} = [0, s]$ y para todo $l \in [0, s]$, $g(l) = f(s) = g(s) = z$, así $[0, s] \subset g^{-1}(z)$.

◊ Si $k \in g^{-1}(z)$ tal que $s < k$. Por un razonamiento similar al anterior caso, se deduce que $[s, 1] \subset g^{-1}(z)$.

Notemos que solo puede suceder exactamente uno de los dos casos anteriormente expuestos, ya que si sucedieran los dos entonces $[0, 1] \subset g^{-1}(z)$ así $M \cap g^{-1}(z) = M$ (contradicción ya que $M \cap g^{-1}(z) = \{s\}$ y $M \neq \{s\}$). Por lo tanto, si sucede (C1) entonces $g^{-1}(z) = [0, s]$; si sucede (C2) entonces $g^{-1}(z) = [s, 1]$, en ambos casos $g^{-1}(z)$ es conexo.

5.2 Si $M \cap g^{-1}(z) = \{s, t\}$, sin pérdida de generalidad supongamos que $s < t$. Primero, notemos que no puede suceder que $s = u \geq 0$ y $t = v \leq 1$ ya que si esto ocurriera entonces $p = f(u) = f(s) = f(t) = f(v) = q$, i.e. $p = q$, lo cual es una contradicción ya que $p \neq q$. Por lo anterior, $s > u$ o $t < v$.

Veamos que $g^{-1}(z) = [s, t]$. Por la afirmación 3, tenemos que $M \cap [s, t] = \{s, t\}$, de ahí que (s, t) es una componente de $I \setminus M$, luego $f(k) = z$ para toda $k \in [s, t]$, por lo tanto $[s, t] \subset g^{-1}(z)$. Por otro lado, supongamos que $g^{-1}(z) \not\subset [s, t]$, i.e. existe $m \in g^{-1}(z)$ tal que $m < s$ o $m > t$. Supongamos que $m < s$, luego existe T componente de $I \setminus M$ tal que $m \in T$.

5.2.1 Si $u < s$ entonces existen $m_1, m_2 \in M$ tal que $\bar{T} = [m_1, m_2]$, de ahí que $u \leq m_1 < m < m_2 \leq s$, así $m_1 \in M \cap g^{-1}(z)$ y además $s \neq m \neq t$ lo cual genera una contradicción ya que $M \cap g^{-1}(z) = \{s, t\}$.

5.2.2 Si $u = s$ entonces $t < v$, luego notemos que $M \setminus \{s\} \in \mathcal{C}$ lo cual es una contradicción ya que M es el elemento minimal de $\mathcal{C}$.

El caso donde $m > t$, es análogo al caso anterior. De todos los casos expuestos anteriormente podemos concluir que $g^{-1}(z) \subset [s, t]$. Por lo tanto $g^{-1}(z) = [s, t]$, así $g^{-1}(z)$ es conexo.

Por los casos anteriores, concluimos que $g^{-1}(z)$ es conexo para todo $z \in f(M)$. Por lo tanto g es monótona.

Dado que I es un espacio de Hausdorff, por las afirmaciones 4 y 5 sabemos que $g : I \rightarrow f(M)$ es una función monótona y suprayectiva, entonces por la proposición 3.24, se tiene que $f(M)$ es un arco. Por lo tanto, X es arco conexo. $\square$

Definición 3.26. Sean S un espacio topológico y $p \in S$. Diremos que S es **localmente arco conexo en p** , si para cada vecindad U de p existe una vecindad arco conexa V de p tal que $V \subset U$. El espacio S es llamado **localmente arco conexo** si es localmente arco conexo en cada punto.

Teorema 3.27. Sea X un continuo localmente conexo. Si A es abierto de X , entonces es localmente arco conexo. En particular, cada continuo localmente conexo es localmente arco conexo.

Demostración. Sea A un subconjunto abierto y no vacío de un continuo X localmente conexo, y sean $p \in A$ y U una vecindad de p en A , por lo que existe $\epsilon > 0$ tal que $B(p, \epsilon) \subset U$. Dado que X es localmente conexo, por el teorema 3.5, X tiene la propiedad S luego, por el teorema 3.11, existe un conjunto V abierto de X , conexo y con la propiedad S tal que $p \in V$ y $\text{diám}(V) < \frac{\epsilon}{2}$. Por lo anterior y por el lema 3.7, $\text{cl}_X(V)$ es localmente conexo, además observemos que $\text{cl}_X(V)$ es conexo y también, por el teorema 1.30, $\text{cl}_X(V)$ es compacto. Por lo tanto $\text{cl}_X(V)$ es un continuo localmente conexo así, por el teorema 3.25, se sigue que $\text{cl}_X(V)$ es arco conexo, pero observemos que $\text{cl}_X(V) \subset B(p, \epsilon) \subset U$, por ende $\text{cl}_X(V)$ es una vecindad arco conexa de p tal que $\text{cl}_X(V) \subset U$. En conclusión, U es localmente arco conexo en p . $\square$

Teorema 3.28. Sea X un continuo localmente conexo. Si $U \subset X$ es abierto y conexo entonces es arco conexo.

Demostración. Sea U un subconjunto abierto, conexo y no vacío de un continuo X localmente conexo. Dado que U es abierto de X , por el teorema 3.27, U es localmente arco conexo. Ahora, consideremos a $p \in U$ fijo pero arbitrario y definamos el conjunto E como sigue:

$$E = \{p\} \cup \{x \in U : \text{existe un arco en } U \text{ de } p \text{ a } x\}.$$

Observemos que como $p \in E$ entonces $E \neq \emptyset$.

Afirmación. Los conjuntos E y $U \setminus E$ son abiertos en U .

Demostración de la afirmación. Primero demostraremos que E es abierto. Sea $e \in E$, como $E \subset U$ y U es un espacio localmente arco conexo, por la definición 3.26, existe una vecindad V arco conexa de e tal que $V \subset U$. Veamos que $V \subset E$; en efecto sea $v \in V \setminus \{e\}$ y consideremos los siguientes casos

- Si $v = p$ entonces es claro que $v \in E$.
- Si $v \neq p$, tenemos los siguientes casos:
 - Si $e \neq p$, entonces como $e, v \in V$, existe un arco A_1 de v a e y además, dado que $e \in E \setminus \{p\}$, existe un arco A_2 de e a p . Por consiguiente, con ayuda de A_1 y A_2 nosotros podemos construir un arco de v a p , por lo que $v \in E$.

- Si $e = p$ y dado que $e, v \in V$, existe un arco de v a p . Por consiguiente $v \in E$.

Por los casos anteriores, concluimos que $V \subset E$ pero recordemos que V es vecindad de U , por lo que existe un abierto $A \subset V$ tal que $e \in A$, i. e. $A \subset E$ es un abierto que contiene a e . Por lo tanto E es abierto.

Ahora demosremos que $U \setminus E$ es abierto. Sea $u \in U \setminus E$ luego, como $u \in U$ y U es localmente arco conexo, entonces existe una vecindad $W \subset U$ de u arco conexa. Veamos que $W \subset U \setminus E$. Supongamos que $W \not\subset U \setminus E$ de manera que existe $w \in W$ tal que $w \notin U \setminus E$ por lo que $w \in E$, teniendo así los siguientes casos:

- Si $w = p$ y dado que $w, u \in W$ y W es arco conexo, existe un arco de w a u , por lo que $u \in E$ lo cual es una contradicción ya que $u \in U \setminus E$.
- Si $w \neq p$ entonces existe un arco A_1 en U de p a w y además, como $w, u \in W$, entonces existe un arco A_2 de w a u . Por consiguiente, con ayuda de A_1 y A_2 nosotros podemos construir un arco de u a p , por lo que $u \in E$ lo cual es una contradicción ya que $u \in U \setminus E$.

Debido a los casos anteriores, concluimos que $W \subset U \setminus E$ y dado que W es vecindad entonces existe un abierto $A \subset W$ tal que $u \in A$, i. e., $A \subset U \setminus E$ es un abierto que contiene a u . Por lo anterior concluimos que $U \setminus E$ es abierto.

Dado que U es conexo entonces los únicos subconjuntos abiertos y cerrados son U y $\emptyset$, así por la afirmación anterior y dado que $E \neq \emptyset$, se sigue que $U = E$, de manera que para cualesquiera $s, t \in U$ podemos encontrar un arco que los una, concluyendo así que U es arco conexo. $\square$

Corolario 3.29. *Si Z es un espacio métrico localmente conexo, separable, localmente compacto y conexo, entonces es arco conexo.*

Demostración. Si Z es compacto entonces es un continuo localmente conexo, luego, aplicando el teorema 3.25, el espacio Z es arco conexo.

Ahora, supongamos que Z no es compacto y por hipótesis sabemos que Z es un espacio localmente compacto, por el teorema 2.24, podemos considerar la compactación de Alexandroff ωZ de Z . Sea $\omega Z = Z \cup \{\infty\}$ donde $\infty \notin X$. Por 2.7, el espacio ωZ es un continuo.

Afirmación. El espacio ωZ es conexo en pequeño en cada $p \in Z$.

Demostración de la afirmación. Sean $p \in Z$ y V una vecindad de ωZ tal que $p \in V$. Luego, existe U abierto de ωZ tal que $p \in U \subset V$. Tenemos los siguientes casos:

- Si U es abierto de Z . Como Z es un continuo localmente conexo, por el teorema 1.64, Z es conexo en pequeño en p . Por lo tanto existe una vecindad conexa W_1 de p tal que $W_1 \subset U_1$.
- Si $U = \{\infty\} \cup (Z \setminus F)$, donde F es compacto en Z así $Z \setminus F$ es abierto de Z . Dado que Z es abierto de ωZ , se tiene que $Z \setminus F$ es abierto de ωZ y además $p \in Z \setminus F$. Como Z es conexo en pequeño en p , existe una vecindad conexa W_2 de p tal que $W_2 \subset Z \setminus F \subset U_1$.

Así, en ambos casos ωZ es conexo en pequeño en p . Por lo tanto, por el teorema, el espacio ωZ es conexo en pequeño en todo punto de ωZ .

Así, por el teorema 1.64 tenemos que ωZ es un continuo localmente conexo. Dado que Z es un subconjunto abierto y conexo de ωZ , por el teorema 3.28, el espacio Z es arco conexo. $\square$

Referencias

- [1] Edwin René Araque Alarcón. «Continuos de Awartani». Tesis de Licenciatura. Universidad Industrial de Santander, 2021.
- [2] T. M. Apostol. *Análisis matemático*. 2nd ed. España: Editorial Reverté, 1976. ISBN: 84-291-5004-8.
- [3] Marwan M. Awartani. «An uncountable collection of mutually incomparable chainable continua». En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 118 (May 1993), págs. 239-245.
- [4] Fidel Casarrubias Segura y Ángel Tamariz Mascarúa. *Elementos de topología general*. Spanish. Vol. 37. Aportaciones Mat., Textos. México: Sociedad Matemática Mexicana; México: Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012. ISBN: 978-607-02-3000-4.
- [5] Ryszard Engelking. *General topology*. English. Rev. and compl. ed. Vol. 6. Sigma Ser. Pure Math. Berlin: Heldermann Verlag, 1989. ISBN: 3-88538-006-4.
- [6] Joel Pérez Guerrero y Patricia Pellicer Covarrubias. «EL SOLENOIDE DIADICO». En: *Publicaciones Electrónicas, Sociedad Matemática Mexicana* 3 (2010).
- [7] Fernando Hernández Hernández. *Teoría de conjuntos: una introducción*. 2a. Edición. Aportaciones matemáticas. Textos. Nivel medio; 13. Ciudad de México: Universidad Nacional Autónoma de México, 2019. ISBN: 9789703213924.
- [8] David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero y Luis Alberto Guerrero Méndez. *La magia de los Espacios Métricos*. Puebla: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2025. ISBN: 978-607-2637-10-8.
- [9] Alejandro Illanes. *Continuum Theory*. Springer Cham, 2025. ISBN: 978-3-031-91010-4.
- [10] Ignacio L. Iribarren. *Topología de espacios métricos*. México: Limusa, 2008.
- [11] K. Kuratowski. *Topology*. Vol. I. New York, N. Y: Academic Press, 1966.
- [12] K. Kuratowski. *Topology*. Vol. II. New York, N. Y: Academic Press, 1968.

- [13] Verónica Martínez-de-la-Vega y Piotr Minc. «Uncountable families of metric compactifications of the ray». En: *Topology and its Applications* 173 (2014), págs. 28-31. ISSN: 0166-8641. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2014.04.018>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166864114001990>.
- [14] James R. Munkres. *Topology*. English. 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000. ISBN: 0-13-181629-2.
- [15] Sam B. Nadler, Jr. *Continuum Theory: An Introduction*. Vol. 158: Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. New York, N. Y: Marcel Dekker, Inc, 1992.
- [16] Hans Sagan. *Space-Filling Curves*. New York, NY: Springer New York, 1994. DOI: [10.1007/978-1-4612-0871-6_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0871-6_2). URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0871-6_2.
- [17] S. Willard. *General Topology*. Addison-Wesley, 1970.

Índice Alfabético

Symbols			espacio	
$S(\epsilon)$ – cadena	57		T_4	2
			$T_{3/2}$	2
A			T_0	2
arco	16		T_1	2
			T_2	2
C			T_3	2
cadena débil	63		completamente regular	2
compactación	21		conexo	11
equivalente	25		de Hausdorff	2
conjunto			de Tychonoff	2
denso	2		normal	2
dirigido	3		regular	2
disconexo	11		arco conexo	16
conjuntos			compacto	6
separados	1		conexo en pequeño	15
continuo	17		conexo por caminos	16
cubierta	6		localmente arco conexo	81
abierta	6		localmente compacto	9
cerrada	6		localmente conexo	13
cubo				
de Hilbert	6		F	
de Tychonoff	6		función	
curva del topólogo	14		continua	2
			monótona	74
E			semicontinua superior	20
encaje	5			
homeomorfo	5		H	
eslabón	58, 63		homeomorfismo	2

P		S	
partición	18	semicontinua superior	18
peso	4	subcontinuo	17
precompacto	55	subespacio	
propiedad		compacto	6
S	53	conexo	11
punto de no corte	19		
		U	
		universal	5
		V	
red	3	vecindad	1