Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Análisis del efecto de los errores en la Ecuación de Transporte de Irradiancia para ondas planas

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Rafael Cano Ordaz

Asesorado por

Dr. José Jacobo Oliveros Oliveros
Dr. Jesús Alonso Arriaga Hernández

Puebla Pue.
Octubre de 2023

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Análisis del efecto de los errores en la Ecuación de Transporte de Irradiancia para ondas planas

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Rafael Cano Ordaz

Asesorado por

Dr. José Jacobo Oliveros Oliveros
Dr. Jesús Alonso Arriaga Hernández

Puebla Pue.
Octubre de 2023

Título: Análisis del efecto de los errores en la Ecuación de Transporte de Irradiancia para ondas planas
Estudiante: RAFAEL CANO ORDAZ

COMITÉ

Dr. Wuiyebaldo Fermín Guerrero Sánchez
Presidente

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez
Secretario

Dr. José Julio Conde Mones
Vocal

Dr. Jesús Alonso Arriaga Hernández
Vocal

Dr. José Jacobo Oliveros Oliveros
Dr. Jesús Alonso Arriaga Hernández
Asesor

Índice general

Resumen

En el presente trabajo de tesis, se hace un estudio de la Ecuación de Transporte de Irradiancia (ETI) [1, 2], la cual relaciona la distribución de Irradiancia I con el la fase ϕ y el frente de onda W de sistemas ópticos sin excluir las aberraciones o errores [2, 3]. En particular enfocaremos nuestros análisis en los errores asociados a la ETI como prueba óptica como un factor heredado de la distribución de irradiancia en la resolución, de la misma ETI, para conocer la fase ϕ y el frente de onda sin usar métodos de interferómetros [2].

Entonces, para establecer nuestra metodología resolveremos la ETI como ecuación diferencial elíptica acoplada [2] reducida a una ecuacion de Poisson con condiciones de borde simples y conocidas de dos maneras: Considerando la irradiancia y para resolver simplemente el frente de onda; y posteriormente bajo la consideración de un ruido como una función conocida y de ajuste a las aberraciones determinadas [4]. En ambos casos consideramos la reduccion del termino de propagacion de irradiancia y la irradiancia en la pupila de salida como un dato conocido [5, 6] experimentalmente. Analizamos los resultados de la ETI con y sin error para comparar los efectos del error en las soluciones, es decir, se pretende ver si la solución exacta (para datos sin error o ideal) y la aproximada (para datos con error, real o experimental), están cercanas o no. El análisis matemático se hace agregando una función error en la ETI reducida a su forma Poissoniana considerando para ondas planas [2, 7, 8]. Dicha función error es muy cercana a la nula pero al estar involucrado el operador de diferenciación (respecto a la variable que representa el eje óptico), no se puede garantizar que la fuente con y sin error estén cercanas y, por lo tanto, tampoco que las soluciones de los problemas de contorno lo estén.

Los análisis antes mencionados, serán completados con ejemplos para mostrar de manera más directa los efectos del error, donde pequeños cambios en la distribución de irradiancia pueden producir cambios sustanciales en la fase y frente de onda obtenidos al resolver la ETI Poissoniana o reducida mediante estimaciones de irradiancia [1, 2, 9, 3, 7, 8]. Para los mencionados ejemplos se resuelve la ecuación de Poisson con condición de contorno de Dirichlet y además con condición de Neumann nula. Se resuelven estos problemas, con y sin error. Éste último se resuelve sin y con errores para analizar el efecto que estos tienen sobre la solución de esos problema en la ITE.

Finalmente, hacemos mención que un error que depende de una variable n al tender a infinito hará que las fuentes se acerquen, es decir, las fuentes serian casi iguales pero tendría un efecto contrario al aplicar la derivada respecto a z (el eje de propagación [5, 6]) pues la fuente exacta se separará de la fuente con error a razón de n, notando un efecto semejante en el frente de onda W resultante. Se mostrar que el frente de onda exacto dista mucho de el frente de onda con error a razón de n. Con este resultado, se concluirá que los errores pueden afectar enormemente a la solución de la ETI para ondas planas y se sugiere que deben tratarse los datos antes de aplicar métodos de solución.

Capítulo 1

Introducción

En la presente tesis no se tiene una fecha inicial en el uso de la óptica ya que podríamos remontarnos a los egipcios con sus rudimentarios espejos o mucho antes de ellos cuando el humano descubre el fuego y emplea para su beneficio la radiación solar. Pero si consideramos un uso científico, podríamos situarnos en la búsqueda de la naturaleza de la luz así como en el primer uso de lentes y espejos en la formación de imágenes. Con el fin de profundizar y determinar los orígenes de la luz (naturaleza, fuentes, como se propaga, etc.) surgió la corpuscular: Propuesta por Isaac Newton (1642-1727) que consideraba a la luz formada por partículas luminosas emitidas por los cuerpos [12]. Por otro lado, la teoría ondulatoria demostrada experimentalmente por Thomas Young (1773-1829) a principios del siglo XIX, con el experimento de la doble rendija mostrando la incapacidad de la teoría corpuscular para explicar dicho experimento. Pese a esto, la teoría corpuscular aún siguió vigente fundamentalmente por la autoridad de Newton, pero fue hasta los experimentos de Agustín Fresnel (1778-1827) con los llamados espejos de Fresnel, quien obtuvo franjas de interferencia, fenómeno que se explica con la teoría ondulatoria pero no con la corpuscular. Fresnel propuso también que las vibraciones de la luz son perpendiculares a la dirección de propagación [13], es decir, son ondas transversales. Como consecuencia de esta idea, se explicó el fenómeno de la polarización descubierta por Esteban Malus (1775-1812) donde al mirar en un espato, la luz proveniente de unos ventanales, hacía aparecer una imagen pero al girarlo la imagen desaparecía y aparecía otra [14]. Todos estos hechos, reafirmaron la teoría ondulatoria logrando su aceptación definitiva en 1819.

A consecuencia del fenomeno de interferencia se infiere la propagación y surge la pregunta sobre la velocidad con la que se propaga. Así el primero en medir la velocidad de la luz fue Armand Hippolyte Louis Fizeau(1819-1896) propone una rueda dentada que al girar y emitir un pulso de luz que salía de una abertura en la rueda, se reflejaba en un espejo distante. Por lo que, al conocer la velocidad angular de la rueda y con la libertad de ajuste sobre la rueda y sus aberturas, era posible conseguir que la luz reflejada atravesara o no una abertura de la rueda dentada. Lo cual les permitió obtener una aproximación de la velocidad de la luz muy cercana a la conocida actualmente. Posteriormente se analiza la velocidad de la luz en diversos medios notando que en el agua tenía una velocidad menor a la velocidad en el aire, contradiciendo la teoría corpuscular lo que terminó por convencer a los pocos defensores de Newton. Michael Faraday (1791-1867) mostró la relación que hay entre la luz y el electromagnetismo al controlar la polarización en presencia de un campo magnético; esto fue retomado por James Clerk Maxwell (1831-1879) quien resumió todo el conocimiento relacionado al electromagnetismo, e incluso logró concluir que la luz era una perturbación electromagnética en forma de ondas aunque esto último de manera teórica. Heinrich Hertz (1857-1894) fue quien demostró la existencia de las ondas electromagnéticas en 1888 probando así experimentalmente los resultados de teóricos de Maxwell y la velocidad de la luz en el vacio en terminos de la permeabilidad magnetica y permitividad electrica.

Respecto a la teoría ondulatoria, es necesario un medio por el cual se transmitiese y/o propagase la luz y su energía. Para dar respuesta a ello Se supone la existencia de dicho medio llamándolo éter. A pesar de los experimentos para probar la naturaleza del éter sin conseguir los resultados esperados, fue hasta el año 1900 que se empezó a cuestionar su existencia. Asi en 1905, Albert Einstein (1879-1955) presentó la teoría de la relatividad especial, rechazando definitivamente la existencia del éter, concordando con los experimentos de Albert Michelson (1852-1931) y Edward Morley (1838-1923) en 1887. Pese a la aceptación de la luz como onda electromagnética, en el año 1919 Max Planck (1858-1947) sentó las bases de la mecánica cuántica, de la que Einstein se inspiró para proponer una renovada teoría corpuscular, en la que enunciaba que la luz consistía en partículas de energía a las que llamo fotones, en su experimento del efecto fotoeléctrico. En la década de 1920, como resultado del trabajo individual que realizo principalmente Heisenberg, Dirac, Bohr, Schrödinger, De Broglie y Pauli (aunque muchos otros cientificos trabajaron y contribuyeron a dichos resultados), la mecánica cuántica quedó como una teoría formal bien establecida, y con ello las suposiciones de Einstein fueron aceptadas, por lo que la teoría ondulatoria y la corpuscular (en algunos conceptos) debían conjugarse para explicar el fenómeno de la luz.

Todo este conocimiento y el que se construiría en su futuro hasta llegar a nuestros días está impulsado por la necesidad de comprender la naturaleza de la luz. A lo largo de la historia se formularon diversas teorías y suposiciones, algunas con la posibilidad de comprobarse experimentalmente y otras se desecharon acompañadas de errores y malas interpretaciones de resultados. La forma en como la ciencia avanza, está relacionada directamente con la duda y la obtención de teorías que se verifican experimentalmente o analíticamente en ardua teoría bien fundamentada. Uno de los puntos básicos de la investigación consiste en encontrar métodos numéricos y analíticos que permitan resolver los problemas planteados de la forma más exacta o en su defecto con una solucion muy cercana a ala exacta. Sin embargo, los errores son inherentes de los diferentes procesos que se aplican para obtener los mencionados resultados acompañando siempre a la naturaleza humana. Esto ultimo es parte importante de este trabajo de tesis, la exactitud y las aproximaciones en datos y resultados ante la presencia de errores.

1.1. Antecedentes en el análisis y manejo de datos

Es posible creer que los errores en la ciencia no ocurren o son mínimos. Sin embargo, hoy en día podemos encontrar errores en los softwares mas empleados como Windows y iOS, y así mismo en cálculos numéricos, donde estos errores son tan variados y complejos. Cuya complejidad, en algunas ocasiones, no encuentra solución mostrando no existe la trivialidad al momento de trabajar con datos, ecuaciones y modelos. Veremos a continuación ejemplos prácticos en los que el tratamiento equivocado de los errores, resultó en consecuencias significativas por pequeño que sea o se considere dicho error.

El satélite del clima en Marte, el cual fue diseñado para ser el primer satélite meteorológico interplanetario, se acercó demasiado a dicho planeta cuando intentaba maniobrar alrededor de su órbita cayendo en la superficie marciana causando la perdida del satélite. Se estima que error se suscito al entrar en contacto con la atmósfera. Una investigación de la NASA [15], reveló que la causa de la pérdida de satélite fue un error en la conversión de unidades inglesas a MKS, en un programa que operaba desde la tierra. Pareciera increíble que un error de este tipo, hoy en día con la tecnología existente y desde la propia nasa, terminó con la pérdida total del satélite. Este hecho, prueba que se puede menospreciar ningún error pese a lo trivial que se perciba. Por otro lado, un cohete de refuerzo se desvió durante el lanzamiento, lo que resultó en la destrucción del NASA Mariner 1. Un programador transcribió incorrectamente una fórmula manuscrita en código, perdiendo una sola barra de información que correspondía a una función de suavizado. El software trató las variaciones normales de velocidad como si fueran graves, causando correcciones defectuosas que desviaron el cohete el 22 de julio de 1962 [16].

El profesor Thomas Nicely de la Universidad de Lynchburg descubrió un error en el procesador Intel Pentium en el año de 1994. El chip Pentium promocionado por Intel ocasionalmente cometió errores al dividir números de coma flotante dentro de un rango específico, con un estimado de 5 millones de chips defectuosos en circulación, Intel ofreció reemplazar los chips Pentium. La causa del error fue el divisor en la unidad de coma flotante Pentium tenía una tabla de división defectuosa, faltaba alrededor de cinco de mil entradas y resultaba en estos errores de redondeo. Por ejemplo, dividir 4195835,0/3145727,0 produjo 1,33374 en lugar de 1,33382, un error del 0,006 % [17]. Otro erro se dio en la Bolsa de Vancouver index, debido al redondeo repetido. En enero de 1982, el índice se inicializó en 1000 y posteriormente se actualizó y truncado a tres decimales en cada operación [18]. Esto se hizo unas 3000 veces al día. Los truncamientos acumulados llevaron a una pérdida errónea de alrededor de 25 puntos por mes. Este es un ejemplo de caso estándar, en donde se generan grandes errores derivados de cálculos de coma flotante, aparentemente sin importancia. Sorprendentemente, todavía son frecuentes los casos en los que diferentes tipos de dispositivos digitales se quedan sin recursos o fallan en los cálculos [19]. En varios de estos casos, los problemas son causados por un manejo inadecuado del mal condicionamiento de una transformación lineal, que puede llevar a grandes errores en la solución de los sistemas de ecuaciones algebraicas aún con pequeños errores en los datos de entrada. Esto es inherente de las propias matrices más que por aplicar mal un método de solución. Ejemplos de esto, pueden verse en el trabajo desarrollado por Algredo-Badillo et al. [19].

Estos ejemplos prueban que una gran cantidad de errores pueden pasar desapercibidos por la aparente insignificancia que representaban en los cálculos y también porque no se revisaron los datos y ecuaciones antes de la ejecución. De aquí, se llega a que deben de verificarse los resultados y considerar tratar cualquier error por insignificante que parezca.

1.2. Errores en la ITE

La ETI es una prueba óptica sujeta a múltiples condiciones experimentales, de modelo y numéricas; la cual puede transformarse en una ecuación de Poisson bajo las concisiones adecuadas; por ejemplo sujeta a iluminación con ondas planas implicando el caso de irradiancia constante para resolver u obtener el frente de onda plano. Experimentalmente, la ETI como prueba óptica para conocer el frente de onda, usa aproximaciones de la Irradiancia como datos de entrada cuyas alteraciones se reflejadas en las derivadas del lado derecho de la ecuación de Poisson. Se mostrará en el Capítulo 7 a través de un ejemplo que los valores de dicha derivada crecen a razón de un parámetro n, con lo que se ve que estos errores deben tomarse en cuenta a pesar de su cercanía a la función nula, ya que se pueden obtener resultados erróneos en el cálculo del frente de onda. Esto sugiere que los datos de la irradiancia se deben suavizar antes de aplicar la derivada. Este punto no se desarrolla en la tesis pero se considera para trabajo a futuro al igual que una comparación con algún experimento.

Partiendo de la ETI reducida a una ecuación de Poisson, se obtiene al resolverla el frente de onda a partir de la función de la fuente (en este caso la distribución plana o constante de la irradiancia) sujeta a condiciones de error. Dicho frente de onda, se va a comparar con el frente de onda exacto. Las soluciones de esos problemas serán únicas pues se usará una condición de frontera de tipo Neumann nula. Se probará también que de no considerar la condición de frontera, las funciones armónicas generan múltiples soluciones a la ecuación de Poisson. Las condiciones de frontera son las siguientes;

$$\text{Para el caso de Dirichlet}\begin{cases}\Delta u(x,y) = \alpha \cdot f(x), & \in \Omega \\ \\ u(x,y) = f(x), & \in \partial\Omega,\end{cases}.$$

$$\text{Para el caso de Neumann}\begin{cases}\Delta u(x,y) = f(x), & \in \Omega \\ \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = \phi(x,y), & \in \partial\Omega,\end{cases}.$$

La importancia del problema de valores en la frontera en esta tesis es, principalmente, la identificación de una única solución, es decir pueden existir diferentes configuraciones de fuentes que pueden producir la misma medición.

1.3. Objetivos de la tesis

Los errores pueden afectar significativamente los resultados de la ETI, por lo que se construirán diversos ejemplos para las condiciones de contorno y posteriormente se aplicaran en la ETI, donde las soluciones tienen la gentilesa de ser observadas en PDETOOL de Matlab por la elegancia de la ETI reducida a una ecuación de Poisson.

Los objetivos específicos en la realización de esta tesis son:

1. Analizar matemáticamente la ETI.
2. Construir ejemplos que muestren que el operador de diferenciación no es continuo.
3. Construir ejemplos que muestren que la solución de la ETI puede tener grandes cambios ante la presencia de pequeños errores.

1.4. Descripción del contenido de la tesis

En el presente trabajo de tesis, se demostrará por medio de análisis generales y ejemplos sintéticos como los errores, presentes en todos los experimentos que se pueden realizar en el área de la física, específicamente en este trabajo para la óptica, pueden afectan los resultados esperados cuando no cuenta con la presencia de errores. Errores que afectan los resultados al momento de analizar los datos. Se concluirá que deben verificarse y hacer pre-procesamiento de los datos para cualquier método de solución ya que al ser datos experimentales estos no son exactos, en realidad son aproximaciones.

A lo largo de los capítulos se explicarán diferentes tópicos que se requieren para comprender mejor el capítulo de Resultados. La estructura propuesta de la tesis es la siguiente: en el primer capítulo se describen conceptos básicos de ondas y su representación gráfica necesarios para explicar la ecuación de transporte de irradiancia (ITE) para ondas planas. En el Capítulo 3, se presenta una breve explicación para la obtención de la ecuación de Irradiancia también necesaria para la comprensión de la ITE. En el Capítulo 4, se describirán los errores que se pueden presentar en el análisis de datos, los cuales darán lugar a los ejemplos posteriores donde se probará su relación directa entre resultados exactos y aproximaciones. También se presentan algunos ejemplos, donde la acumulación de errores o el uso de aproximaciones pueden culminar en resultados diferentes. En el Capítulo 5, se expondrán métodos matemáticos necesarios para poder realizar cálculos con la ITE, lo que lleva a considerar las ecuaciones de Poisson y de Laplace. En el Capítulo 6 se consideran las condiciones de frontera de Dirichlet y Neumann que en capítulos siguientes serán necesarias para garantizar la unicidad de la solución de los problemas estudiados. Además, a través de un ejemplo, se ilustra la importancia de las funciones armónicas y como estas afectan en los resultados.

En el Capítulo 7, se proponen ejemplos y se realizan los cálculos para identificar los efectos de una función de error, que depende de una variable n, sobre la soluciones de los problemas estudiados con lo que se muestra que pequeños errores pueden producir cambios considerables entre la solución exacta y la solución obtenida para datos con error. Finalmente, en el Capítulo 8 se presentan las conclusiones generales de la tesis.

Capítulo 2

Ondas y su representación

2.1. La fase de las ondas

La fase indica la situación instantánea en el ciclo de una onda, ya que indica la variación de la magnitud periódica que determina la iniciación de cada período [13] y objetivamente es donde se encuentra la información del objeto y en especifico en pruebas ópticas, tenemos la información del frente de onda $W(x)$. Por ejemplo, si consideramos la siguiente función de onda armónica:

$$\psi(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t), \tag{2.1}$$

se tiene que el argumento de la función seno (elementos dentro del paréntesis) es la fase φ de la onda, es decir que:

$$\varphi = kx - \omega t. \tag{2.2}$$

Ahora bien, considerando como referencia la posición inicial de la onda al tiempo $t = 0$ y partiendo de la posición $x = 0$, se satisface que:

$$\psi(x,t)\Big|_{\substack{x=0\\ t=0}} = \psi(0,0) = 0, \tag{2.3}$$

la onda volverá a tomar este valor en distintas posiciones y tiempos siempre que la fase sea un múltiplo de π [13]. De manera más general, si se toma como referencia un punto arbitrario, la onda iniciará su periodo nuevamente cuando vuelva a la misma posición. Para la onda del ejemplo, esto es siempre que exista una diferencia de 2π en la fase, se puede escribir:

$$\psi(x,t) = Asen(kx - \omega t + \varphi_0), \tag{2.4}$$

donde el término sumado φ_0 es la diferencia 2π para el caso antes descrito.

2.2. Frente de onda

En la óptica es ampliamente analizado el frente de onda por ejemplo para describir la calidad de imagen que el ojo humano puede obtener al formar y resolver un objeto luminoso puntual [20], basándose en análisis de óptica geométrica y/o de la óptica física. En cualquiera de los dos casos, el frente de onda es una superficie, que se define en la forma siguiente:

"Las superficies que unen todos los puntos de igual fase se conocen como frente de onda"

El frente de onda se puede representar por una función de tres variables, que puede expresarse en diferentes sistemas de coordenadas.
Como ejemplo de ello tenemos un **Medio Homogéneo**, generalmente es constituido por elementos con características comunes referidas a su clase o naturaleza, lo que permite establecer entre ellos una relación de semejanza y uniformidad. Luego, sobre este medio consideramos el considerando el principio de Fermat (trayectoria de la luz de tiempo minimo entre dos puntos) [13], la longitud de camino óptico se define como:

$$\text{(índice de refracción)} \times \text{(distancia física)}, \tag{2.5}$$

donde la trayectoria que sigue la luz de un punto a otro se denomina rayo de luz. Ahora consideremos los siguientes casos:

1. En un medio isótropo (posee las mismas propiedades en todas las direcciones) y homogéneo, el índice de refracción es constante. Así, el camino que sigue la luz es una linea recta.

2. En un medio isótropo no homogéneo, el índice de refracción varía de un punto a otro. En este medio la luz seguirá una trayectoria diferente a la linea recta. La forma de la trayectoria está determinada por la manera en cómo cambia el índice de refracción.

Donde el índice de refracción es la razón entre la velocidad de la luz en distintos medios el cual determina cuánto se desvía o se refracta la trayectoria de la luz al salir de un material y entrar en otro (interfaz); lo que permite considerarle como el factor por el cual la velocidad y la longitud de onda respecto a sus valores entre distintos medios. Así entonces, si tenemos una fuente luminosa puntual S en un medio homogéneo de índice de refracción n; la luz emitida por la fuente seguirá trayectorias radiales en todas las direcciones, es decir, los rayos de luz en este caso son líneas rectas que salen de la fuente puntual. Consideremos un rayo y localicemos un punto sobre ese rayo, de modo que la distancia entre S y el punto sea d; así la distancia óptica entre S y el punto será nd. Si ahora tenemos en cuenta que de la fuente salen infinitos rayos radiales en todas las direcciones y localizamos sobre cada rayo un punto cuya distancia con respecto a S también sea d, podemos unir todos los puntos mediante una superficie. Esta superficie será una esfera y todos los rayos son perpendiculares a ella. A esta superficie que es ortogonal a los rayos de luz se le denomina frente de onda, y en especifico para este caso frente de onda esférico.

Como segundo ejemplo consideramos un **Medio no homogéneo** con una fuente luminosa donde el índice de refracción n ya no es una constante (por la naturaleza del medio), los rayos de luz emitidos por la fuente seguirán trayectorias curvas. En este caso, el frente de onda está caracterizado por la distancia óptica nd, como la superficie que une todos los puntos de los rayos que están a la misma distancia óptica nd de la fuente S, es decir, se buscan los puntos para los cuales $nd = constante$. En este caso, el frente de onda ya no será una esfera sino una superficie con irregular.

Recordemos la relación que existe entre la fase y la definición de frente de onda:

En un sentido bastante general, en cualquier instante un frente de onda en tres dimensiones es una superficie de fase constante, a veces denominada frente de fase

Tanto en el caso homogéneo como en el caso no-homogéneo, podemos definir infinitos frentes de onda, pues basta con cambiar la distancia nd (la constante que define el frente de onda) y obtendremos un nuevo frente de onda. En cualquier caso, un frente de onda es una superficie donde cualquiera de sus puntos tiene asociado el mismo valor de distancia óptica.

2.3. Ondas esféricas

Para dar una explicación simple con un ejemplo cotidiano sobre las ondas esféricas, podemos imaginar que arrojamos una piedra a un depósito de agua. Las ondas provocadas por el impacto que proceden del punto de impacto en la superficie del agua se esparcen hacia afuera en ondas circulares bidimensionales. Partiendo de este ejemplo, consideremos una esfera tridimensional que emite pulsos, rodeada de algún fluido [13]. La contracción y expansión de la esfera, que es la fuente, genera variaciones de presión que a su vez generan ondas esféricas hacia epor otro lado, si consideramos una fuente luminosa puntual, la radiación que emite es radialmente hacia afuera, de manera uniforme en todas direcciones.
Se dice que la fuente es isótropa y los frentes de onda resultantes son esferas concéntricas con diámetro creciente cuando se expanden en el espacio. Por simetría, es más conveniente representar el frente de onda esférico en coordenadas esféricas. Luego, el operador Laplaciano en coordenadas esféricas esta dado por:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, \tag{2.6}$$

donde $x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi$, $z = r\cos\theta$. Para adecuar nuestro desarrollo de ondas planas a esféricas cuya distribucion de rayos son radiales hacia afuera, tenemos que la Ec. 2.6 no depende de θ y ϕ, es decir

$$\psi(\vec{r}) = \psi(r,\theta,\phi) = \psi(r), \tag{2.7}$$

por ello el Laplaciano se reduce a:

$$\Delta\psi(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2\partial\psi}{\partial r}\right). \tag{2.8}$$

Si se observa sólo la dependencia de x tenemos que:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}, \tag{2.9}$$

Si utilizamos que:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \tag{2.10}$$

con la parcial siguiente:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}2x = \frac{x}{r}, \tag{2.11}$$

se halla:

$$\Delta\psi(r) = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \tag{2.12}$$

la ecuación diferencial de onda puede escribirse como:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \tag{2.13}$$

donde la solución a esta ecuación es:

$$\psi(r,t) = \frac{f(r-vt)}{r}, \tag{2.14}$$

o bien

$$\psi(r,t) = \frac{g(r+vt)}{r}. \tag{2.15}$$

La Ec. 2.15 representa una onda esférica que progresa radialmente hacia el exterior desde su origen, con una velocidad constante v, y que tiene una forma funcional arbitraria f, aunque esta expresión falla en $r = 0$ (origen de la fuente) tiene poca importancia practica [13]. La solución general puede escribirse como

$$\psi(r,t) = C_1 \frac{f(r - vt)}{r} + C_2 \frac{g(r + vt)}{r}, \tag{2.16}$$

un caso especial de la solución general, es la onda esférica armónica

$$\psi(r,t) = \left(\frac{\mathcal{A}}{r}\right) \cos(r \pm vt), \tag{2.17}$$

donde la constante $\mathcal{A}$ es la intensidad de la fuente.

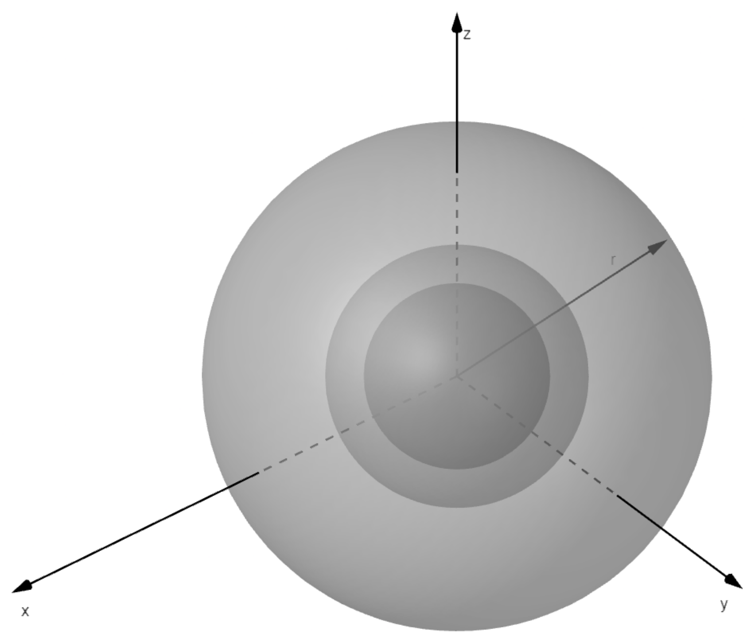

Figura 2.1:
Onda esférica que se desplaza de forma radial (puede verse el vector $\vec{r}$).

2.4. Ondas planas

La onda plana, es quizá el ejemplo más sencillo de onda tridimensional, es el paso de la onda unidimensional que se propagan en una linea recta (usualmente en el eje z) a la onda tridimensional [13, 21]. La onda plana tiene existencia un instante dado, sucede cuando todas las superficies sobre las cuales una perturbación tiene fase constante forman un conjunto de planos, estos planos son perpendiculares a la dirección de propagación. Muchas son las razones practicas para estudiar este tipo de perturbaciones, por ejemplo en los sistemas ópticos es fácil producir luz semejante a las ondas planas [13]. Así para determinar la expresión matemática para un plano perpendicular a un vector dado $\vec{k}$ y que pasa a través de algún punto (x_0, y_0, z_0), consideramos al vector de posición en coordenadas cartesianas o rectangulares de $\mathbb{R}^3$ en términos de los elementos de la base canónica $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$:

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}, \tag{2.18}$$

donde de manera general podemos suponer que comienza en algún origen arbitrario (x_0, y_0, z_0) y termina en el punto (x, y, z) de cualquier lugar en el espacio. De un modo similar:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) = (x - x_0)\hat{\imath} + (y - y_0)\hat{\jmath} + (z - z_0)\hat{k}. \tag{2.19}$$

Luego, al establecer que:

$$(\vec{r} - \vec{r_0}) \cdot \vec{k} = 0, \tag{2.20}$$

se obliga al vector $\vec{r} - \vec{r_0}$ a barrer un plano perpendicular a $\vec{k}$ y adquirir su punto extremo (x, y, z) con todos los valores permitidos. Entonces, si consideramos que

$$\vec{k} = k_x\hat{\imath} + k_y\hat{\jmath} + k_z\hat{k}, \tag{2.21}$$

donde $\vec{k}$ es llamado el vector de propagación de la onda o simplemente vector de onda, cuya magnitud es k y generalmente tiene dirección $\hat{k}$, es decir en notación vectorial, $\vec{k} \equiv k\hat{k}$ [21]. Y k es el número de onda (magnitud del vector de onda), el significado físico de k es el número de radianes de fase por unidad de desplazamiento a lo largo de la dirección de propagación $\hat{k}$ [21][13]. Por otro lado, si consideramos la Ec. (2.20), el plano puede expresarse de la siguiente forma:

$$k_x(x - x_0) + k_y(y - y_0) + k_z(z - z_0) = 0, \tag{2.22}$$

o bien en la forma:

$$k_x x + k_y y + k_z z = a \tag{2.23}$$

donde:

$$a = k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z_0. \tag{2.24}$$

El significado de k_x, k_y y k_z es el número de radianes de fase por unidad de desplazamiento a lo largo del eje $+x$, $+y$ o $+z$ para cada caso, o sea, a lo largo del eje $\hat{x}$ con significado similar para las demás direcciones [21]. La forma más concisa de la ecuación de un plano perpendicular a $\vec{k}$ (ver Fig. 2.2) es:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{constante} = a. \tag{2.25}$$

Geométricamente el plano es el lugar geométrico de todos los puntos cuyos vectores de posición tienen cada uno las misma proyección en la dirección de $\vec{k}$ [13]. Ahora podemos construir un conjunto de planos sobre los cuales $\psi(\vec{r})$ varia de manera sinusoidal en el espacio, es decir,

$$\psi(\vec{r}) = A\,\mathrm{sen}(\vec{k}\cdot\vec{r}) = A\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}) = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})}. \tag{2.26}$$

Para obtener la ultima expresión ecuación (2.26), es conocido que se puede representar cualquier número complejo como la suma de de una parte real $Re(\tilde{z})$ y una imaginaria $Im(\tilde{z})$:

$$\tilde{z} = Re(\tilde{z}) + iIm(\tilde{z}), \tag{2.27}$$

de tal forma que:

$$Re(\tilde{z}) = \frac{1}{2}(\tilde{z} + \tilde{z^*}) \qquad \text{e} \qquad Im(\tilde{z}) = \frac{1}{2i}(\tilde{z} - \tilde{z^*}), \tag{2.28}$$

donde $\tilde{z^*}$ es el complejo conjugado de $\tilde{z}$. Estas expresiones son consecuencia inmediata del diagrama de Argand utilizado para representar números complejos en términos de su componente real e imaginaria [13]. Por ejemplo $\tilde{z} + \tilde{z^*} = 2x$, porque la partes imaginarias se cancelan, así $Re(\tilde{z}) = x$. Y por la forma polar:

$$Re(\tilde{z}) = r\cos\theta \qquad \text{e} \qquad Im(\tilde{z^*}) = r\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{2.29}$$

Se puede escoger cualquier parte para describir a la onda armónica. Por regla general se elige siempre la parte real, para el caso de la ecuación (2.26) se escribe como:

$$\psi(\vec{r}) = Re[Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})}], \tag{2.30}$$

lo cual es naturalmente equivalente a:

$$\psi(\vec{r}) = A\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}). \tag{2.31}$$

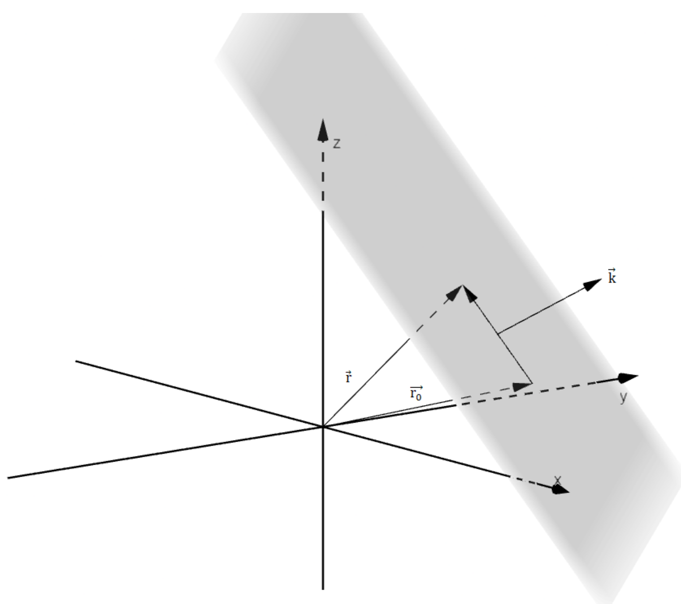

Figura 2.2:
Onda plana que se propaga a lo largo de la dirección del $\vec{k}$

Capítulo 3

Irradiancia

3.1. Campo eléctrico y magnético

Para explicar y contextualizar campo electromagnético, primero debemos retomar la fuerza de Coulomb sobre una carga q localizada en $\vec{r}$ debida a una carga q_1 en el origen. Dicho fenómeno eléctrico esta representado matemáticamente por

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \tag{3.1}$$

Luego, el campo eléctrico se define como el límite de la fuerza eléctrica sobre una carga de prueba colocada en un punto, dicho campo eléctrico se toma con respecto de la carga de prueba [22]. Tomándose el límite a medida que la magnitud de la carga de prueba tiende a e (considerando la carga mínima como e la carga del electrón). Así, vectorialmente el campo eléctrico $\vec{E}$ se denota por:

$$\vec{E} = \lim_{q\to e^-}\frac{\vec{F}_q}{q}. \tag{3.2}$$

Luego, sustituyendo la Ec. 3.1 en la Ec. 3.2 obtenemos la expresión que relaciona el campo eléctrico con la carga y la permisividad eléctrica:

$$\vec{E}_r = \lim_{q_i\to e^-}\frac{1}{q_i}q_i\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=0}^{N}\frac{q_j}{r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}. \tag{3.3}$$

La Ec. 3.3 se puede generalizar a cualquier numero N o distribución de cargas puntuales localizadas por sus respectivos vectores de posición $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N$ el campo eléctrico esta dado por:

$$\vec{E}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=0}^{N}q_j\frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}. \tag{3.4}$$

En la Ec. (3.1) se considera que las cargas están en reposo, pero si las cargas se movieran con velocidades constantes $\vec{v}$ y $\vec{v_1}$, se dice que existirá una fuerza magnética $\vec{F_m}$ ejercida sobre q por q_1 [22],

$$\vec{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qq_1}{r^2}\vec{v}\times\left(\vec{v_1}\times\frac{\vec{r}}{r}\right), \tag{3.5}$$

al igual que en electrostática usaremos las propiedades de la carga de prueba para definir al campo magnético, en este caso q y su velocidad de desplazamiento $\vec{v}$ (la cual esta obviamente relacionada con la corriente) deben aparecer como elementos en dicha expresión dada por

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}, \tag{3.6}$$

donde la inducción magnética $\vec{B}$ es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1}{r^2}\vec{v_1} \times \frac{\vec{r}}{r}. \tag{3.7}$$

3.2. El vector de Poynting

Se conoce como vector de Poynting, en honor a John Henry Poynting (1852-1914), al vector cuya amplitud o módulo representa la intensidad de energía electromagnética que atraviesa una unidad de área perpendicular a la dirección de propagación de dicha onda electromagnética, la importancia de este vector radica en la propagación, la intensidad de la radiación propagación, el poder conocer la energía electromagnética de radiación y la presión de radiación.

Partiendo del hecho que la energía que fluye en el espacio es compartida tanto por el campo magnético que por el eléctrico, tenemos que

$$u = u_E + u_B$$

$$u = \varepsilon_0 E^2$$

o bien

$$u = \frac{1}{\mu_0}B^2$$

donde u representa la energía radiante de la carga por unidad de volumen también conocida como densidad de carga. u_B es la densidad de energía del campo B en el vacío que puede definirse como $u_B = B^2/2\mu_0$ y la relación con u_E se deduce usando $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ llegando a $u_E = u_B$.
Para el siguiente paso, se debe hacer la suposición que S representa el transporte por unidad de tiempo a través de unidad de área. Si se considera un intervalo de tiempo muy pequeño Δt, sólo la energía contenida en un volumen muy reducido cruzará un área A. Por tanto:

$$S = \frac{uc\Delta tA}{\Delta tA} = uc = \frac{1}{\mu_0}EB, \tag{3.8}$$

partiendo de esta ecuación y suponiendo que si se trata de un medio isótropo la energía fluye o se propaga en la misma dirección de que la onda se propaga [13], el vector de Poynting $\vec{S}$ puede definirse como cociente $\frac{1}{\mu_0}$ multiplicado por el producto vectorial del campo eléctrico y el campo magnético $\vec{E} \times \vec{B}$, debido a que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son mutuamente perpendiculares por lo que el producto vectorial apunta en la dirección de propagación de la onda que es también la dirección del vector $\vec{S}$, paralelo al vector de onda $\vec{k}$ [23], de esta forma puede reemplazarse

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}, \tag{3.9}$$

donde:

- $\vec{E}$ representa el campo eléctrico,
- $\vec{H}$ la intensidad del campo magnético,
- $\vec{B}$ el campo de inducción magnética,
- μ_0 la permeabilidad magnética en el vacío.

La Ec. (3.9) es equivalente a:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{3.10}$$

debido a la relación que existe entre el campo de inducción magnética y el campo magnético:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \tag{3.11}$$

3.3. Irradiancia

La irradiancia es la magnitud utilizada para describir la potencia incidente por unidad de superficie de todo tipo de radiación electromagnética. La irradiancia es la cantidad promedio de energía que incide por unidad de área por unidad de tiempo sobre una superficie.

En la presente tesis consideraremos la irradiancia denotada por I y definida como **la energía por unidad de área y por unidad de tiempo** [13]. El valor promedio en un intervalo de tiempo ($\tau \ll T$) de la magnitud del vector de Poynting, simbolizado por $\langle S\rangle_T$, es una medición de I, es decir, $I = \langle S\rangle_T$ (con unidades W/m^2 por SI), donde

$$\langle S\rangle_T = c^2\epsilon_0|\vec{E}_0 \times \vec{B}_0|\langle cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\rangle_T, \tag{3.12}$$

- $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$
- $\vec{E}_0$ es el campo eléctrico
- $\vec{B}_0$ el campo magnético
- ϵ_0 es la permitividad en el vacío
- $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ se desplazan a través del espacio en la dirección de $\vec{k}$
- $\vec{k}\cdot\vec{r}$ denota un plano perpendicular a $\vec{k}$ (ver Fig. 2.2)

El valor promedio (en el tiempo) de f en el intervalo $\left[t - \frac{T}{2}, t + \frac{T}{2}\right]$, denotado por $\langle f\rangle_T$, se define como:

$$\langle f\rangle_T = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} f(t^{'})dt^{'}. \tag{3.13}$$

El valor de $\langle\rangle_T$ depende de T. Considerando por ejemplo a la función $cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$, tenemos que

$$I = \langle cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\rangle_T = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t')dt'. \tag{3.14}$$

Sea $\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t' = x$. Con este cambio de variable, calculemos una primitiva de $cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$ que vamos a denotar por $\langle cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\rangle &= \frac{1}{-\omega T}\int cos^2(x)dx \\
&= \frac{1}{-\omega T}\int \frac{1 + cos(2x)}{2}dx \\
&= \frac{1}{-\omega T}\left[\int \frac{1}{2}dx + \frac{cos(2x)}{2}dx\right]. \\
&= -\frac{1}{\omega T}\left[\frac{x}{2} + \frac{sen(2x)}{4} + c\right]
\end{aligned}$$

Aplicando los límites de integración al resultado,

$$= -\frac{1}{\omega T}\left[\frac{x}{2} + \frac{sen(2x)}{4}\right]_{\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega(t-T/2)}^{\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega(t+T/2)}. \tag{3.15}$$

se halla:

$$I=-\frac{1}{\omega T}\left[\frac{\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega(t+T/2)}{2}+\frac{sen(2\vec{k}\cdot\vec{r}-2\omega(t+T/2))}{4}\right.$$
$$\left.-\frac{\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega(t-T/2)}{2}-\frac{sen(2\vec{k}\cdot\vec{r}-2\omega(t-T/2)}{4}\right].$$

Usando identidades trigonométricas del seno y coseno tenemos

$$\begin{aligned}\langle cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\rangle=-\frac{1}{\omega T}\Bigg[-\frac{\omega T}{2}&+\frac{sen(2(\vec{k}\cdot\vec{r}))cos2\omega tcos\omega T}{4}-\frac{sen(2(\vec{k}\cdot\vec{r}))sen2\omega tsen\omega T}{4}\\&-\frac{cos(2(\vec{k}\cdot\vec{r}))sen2\omega tcos\omega T}{4}-\frac{cos(2(\vec{k}\cdot\vec{r}))sen\omega Tcos2\omega t}{4}\\&-\frac{sen(2(\vec{k}\cdot\vec{r}))cos2\omega tcos\omega T}{4}-\frac{sen(2(\vec{k}\cdot\vec{r}))sen2\omega tsen\omega T}{4}\\&+\frac{cos(2(\vec{k}\cdot\vec{r}))sen2\omega tcos\omega T}{4}-\frac{cos(2(\vec{k}\cdot\vec{r}))sen\omega Tcos2\omega t}{4}\Bigg].\end{aligned}$$

Eliminando términos iguales, se obtiene:

$$\begin{aligned}I_T&=\frac{1}{2}\left[1+\frac{sen(2(\vec{k}\cdot\vec{r}))sen(2\omega t)sen(\omega T)}{\omega T}+\frac{cos(2(\vec{k}\cdot\vec{r}))cos(2\omega t)sen(\omega T)}{\omega T}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[1+sen(2(\vec{k}\cdot\vec{r}))sen(2\omega t)senc(\omega T)+cos(2(\vec{k}\cdot\vec{r}))cos(2\omega t)senc(\omega T)\right].\end{aligned}$$

Otro ejemplo, para cualquier intervalo T es

$$\langle cos^2(\omega t)\rangle_T=\frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2}cos^2(\omega t)dt=\frac{1}{2T}\left[t+\frac{1}{2\omega}sen(2\omega t)\right]_{t-T/2}^{t+T/2}.$$

Aplicando los límites de integración se halla que:

$$=\frac{1}{2T}\left[(t+T/2)+\frac{1}{2\omega}sen(2\omega t+2\omega T/2)-(t-T/2)-\frac{1}{2\omega}sen(2\omega t-2\omega T/2)\right].$$

Usando la razón trigonométrica de la función *sen* de la suma de dos ángulos, tenemos:

$$=\frac{1}{2T}\left[T+\frac{1}{2\omega}[sen(2\omega t)cos(\omega T)+cos(2\omega t)sen(\omega T)-sen(2\omega t)cos(\omega T)+cos(2\omega t)sen(\omega T)]\right].$$

Eliminando los términos iguales y reorganizando, finalmente:

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{\omega T}cos(2\omega t)sen(\omega T)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[1+cos(2\omega T)senc(\omega T)\right]\end{aligned}\tag{3.16}$$

donde $senc(\omega T)$ es la función seno cardinal expresada como:

$$senc(\alpha)=\frac{sen\alpha}{\alpha}.\tag{3.17}$$

Considerando que la función $\langle cos^2(\omega t)\rangle_T = \frac{1}{2}\left[1 + cos(2\omega T)senc(\omega T)\right]$ oscila alrededor de $\frac{1}{2}$ con una frecuencia de 2ω y se acerca rápidamente a $\frac{1}{2}$ mientras T aumenta por encima de algunas docenas de periodos. En el caso de la luz, $\tau \approx 10^{15}s$ donde τ es el periodo temporal, que se define como la cantidad de tiempo que una onda completa tarda en superar a un observador estacionario [13]. De esto, el promedio hasta un microsegundo que equivale a $T = 10^9\tau$, lleva a la función *senc* a un valor despreciable, por lo que $\langle cos^2(\omega t)\rangle_T = \frac{1}{2}\left[1 + cos(2\omega T)\cdot 0\right] = \frac{1}{2}$.

Dado que la función $\langle cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\rangle$ tiene el mismo término $senc(\omega T)$ y un comportamiento similar a $\langle cos^2(\omega t)\rangle_T$, al igual que esta última función para el caso de $\tau \ll T$ lleva la función *senc* tome un valor cercano a cero. Así, $\langle cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\rangle = \frac{1}{2}$.

Sustituyendo el resultado anterior en la magnitud del vector de Poynting, tenemos:

$$\langle S\rangle_T = \frac{c^2\epsilon_0}{2}|\vec{E}_0 \times \vec{B}_0|. \tag{3.18}$$

Tenemos la medición de la irradiancia:

$$I = \langle S\rangle_T = \frac{c^2\epsilon_0}{2}|\vec{E}_0 \times \vec{B}_0|. \tag{3.19}$$

Además, la irradiancia es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo eléctrico, es decir,

$$I = \epsilon_0 c\langle E^2\rangle_T. \tag{3.20}$$

Por la relación entre campo eléctrico y magnético, la irradiancia se puede expresar en la forma:

$$I = \frac{c}{\mu_0}\langle B^2\rangle_T. \tag{3.21}$$

Ejemplo. Imagine una onda electromagnética plana armónica que se desplaza en dirección de z en el interior de un dieléctrico isótropo y homogéneo (por ejemplo, el aire). Si la onda cuya amplitud es E_0 tiene una magnitud igual a cero en todo $t = 0$ y $z = 0$, busque una expresión para la irradiancia de la onda.

Solución
La irradiancia se obtiene de las ecuaciones en la sección 3.3, es decir, de la relación $S = uv$ y de

$$S = \epsilon v E_0^2 sen^2 k(z - vt),$$

de donde:

$$I = \langle S\rangle_T = \frac{1}{2}\epsilon v E_0^2.$$

Capítulo 4

Errores e incertidumbre en el tratamiento de datos

4.1. Precisión y exactitud

Para comprender la relevancia de la precisión, ésta debe distinguirse de la exactitud. La primera se refiere a qué tan cerca está un valor medido de su valor real, mientras que la exactitud se refiere a la repetibilidad cuando se mide un valor (qué tan cerca estará un nuevo valor medido de un valor obtenido previamente) [19]. En la práctica, la precisión describe la variabilidad de las mediciones repetidas cuando se utiliza el mismo método de medición. En estas condiciones, aumentar la precisión es fundamental para dar consistencia cuando los valores se miden repetidamente. La baja precisión no solo reduce significativamente la cantidad de recursos necesarios, sino que también tiende a generar resultados inadecuados en ciertas aplicaciones.
En general, se piensa que, al aumentar la precisión de los cálculos, los resultados mejorarán automáticamente. Más adelante se presentará un ejemplo de error, donde cuestiones como la precisión de la medición dará lugar a una irradiancia aproximada $\hat{I}$ dadas las circunstancias de incertidumbre que incurren en los montajes experimentales, que está alejada de la irradiancia exacta I. También encontraremos errores que pueden ser generados durante la recopilación de los datos, así como en el proceso para hallar soluciones de un problema. A continuación, se describirán los errores más recurrentes.

4.2. Tipos de errores

En el momento de realizar mediciones de cualquier tipo de una magnitud física siempre obtendremos una diferencia respecto al valor real, esta diferencia es a lo que se llaman errores de medición, que se pueden clasificar en función de la fuente que produjo dicho error. En general, estos errores dependen del procedimiento y la tecnología empleada al momento de realizar la medición.

Error de truncamiento

Los errores de truncamiento hacen referencia a los errores producidos cuando a una ecuación o expresión complicada (con muchos términos) es remplazada por una fórmula más elemental [24]. Esta terminología se origina en la muy usada técnica de remplazar funciones complicadas con una función que se obtiene al truncar la serie de Taylor.
Por ejemplo la infinita serie de Taylor:

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots + \frac{x^2 n}{n!} \tag{4.1}$$

La serie se suele limitar a los primeros 5 términos o menos, dependiendo de la aplicación que se lleve a cabo. En nuestro ejemplo, el error de la aproximación, puede estimarse integrando.
Tomaremos como el valor exacto p a la integral obtenida numéricamente por la cuadratura de Lobatto la cual está implementada en MATLAB.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{x^2} dx \approx 0{,}544987104183622 = p \tag{4.2}$$

Para hallar $\hat{p}$, utilizamos los primeros cinco términos de la serie de Taylor:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} dx = 0{,}544986720817 = \hat{p} \tag{4.3}$$

Observemos que obtenemos exactitud en los primeros cinco términos.

Error de redondeo

La representación de un número real para la realización de cálculos, está limitada por la precisión de la mantisa. Algunos valores reales no pueden ser almacenados por una computadora o calculadora, debido especialmente cuando se utiliza un número finito de dígitos para representar números reales (que en teoría tienen un número infinito de dígitos) en la mantisa. A esta limitación tecnológica, se le llama error de redondeo [24]. Cuando se realiza una secuencia de cálculos sujetos a error de redondeo, los errores pueden acumularse, a veces dominando el cálculo, donde en la respuesta final se puede acumular un error significativo.
Éstos son algunos ejemplos de error de representación en representaciones decimales:

	Aproximación	Error al valor exacto
e	2,718 281 828 459 045	0,000 000 000 000 000 235 36...
π	3,141 592 653 589 793	0,000 000 000 000 000 238 46...
$\sqrt{2}$	1,41421	0,000 003 562 373 095 048 80...
1/7	0,142 857	0,000 000 142 857 142 857...

Pérdida de importancia

Para ejemplificar, tomemos dos números $p = 3{,}1415926563$ y $q = 3{,}1415957341$, los cuales están cercanos y ambos tienen 11 dígitos de precisión, además los primeros 5 dígitos de p y q son iguales y la diferencia $p - q = -0{,}0000030805$. Nótese que los primeros 5 dígitos son iguales, por tanto la diferencia $p - q$ contiene solo 5 dígitos de precisión, es decir, después del 6° dígito se ha perdido información, a estos casos se les denomina como pérdida de importancia o cancelación sustractiva, donde esta reducción en la precisión puede ser arrastrada hasta la respuesta final, en donde a veces no se esperan errores [24].

Como ejemplo tomemos el cálculo de $f(500)$ y $g(500)$ usando 6 dígitos y redondeando. La funciones son $f(x) = x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ y $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.
Para la primera función f tenemos:

$$\begin{aligned} f(500) &= 500(\sqrt{501} - \sqrt{500}) \\ &\approx 500(22{,}3830 - 22{,}3607) = 500(0{,}0223) = 11{,}1500, \end{aligned} \tag{4.4}$$

y para la segunda función g

$$\begin{aligned} g(500) &= \frac{500}{\sqrt{501}+\sqrt{500}} \\ &\approx \frac{500}{22{,}3830+22{,}3607} = \frac{500}{44{,}7437} = 11{,}1748. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Resulta que $f(x)$ es algebraicamente equivalente a $g(x)$, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x(\sqrt{x+1)}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1)}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1)}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{x\left((\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x})^2\right)}{\sqrt{x+1)}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x+1)}+\sqrt{x}}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Sin embargo, a respuesta $g(x)$ tiene menos error y es la misma que la obtenida al redondear el valor real 11,174755300747198 a seis dígitos.

4.3. Cuantificación del error

La cuantización nos sirve como unidad de medida, tamaño o proporción de cualquier medida esta expresada en números. Para la cuantificación de errores, necesitamos una medida promedio de aproximación al resultado acertado, para así medir o predecir un error.

Error absoluto

El error absoluto E_{abs} es la diferencia en valor absoluto entre el número exacto p y su aproximación $\hat{p}$. El error absoluto se define como

$$E_{abs} = |p-\hat{p}|. \tag{4.7}$$

Error relativo

El error relativo E_{rel} es la razón que hay entre el error absoluto y el número exacto

$$E_{rel} = \frac{|p-\hat{p}|}{|p|} \leq \frac{|p-\hat{p}|}{|\hat{p}-|p-\hat{p}||}. \tag{4.8}$$

siempre que $p \neq 0$.

El error absoluto es simplemente la diferencia entre el valor real y el valor aproximado. Mientras que el error relativo es la porción del valor real.

4.4. Incertidumbre

Incertidumbre, precisión y exactitud son ejemplos de términos que representan conceptos cualitativos, y por tanto, no deben expresarse numéricamente [25]. Anteriormente se definió el término error de medida como la diferencia entre un valor medido de una magnitud y un valor de referencia (valor convencional o valor exacto), mientras que define la incertidumbre de medida como un parámetro no negativo que caracteriza la dispersión de los valores atribuidos a un mensurando, a partir

de la información que se utiliza. Si bien el error es teóricamente desconocido, la incertidumbre sí que puede ser evaluada.
La definición de incertidumbre es más amplio que el de precisión, ya que incluye además de todas las fuentes provenientes de los efectos aleatorios, todas las fuentes de incertidumbre provenientes de las correcciones efectuadas a la medida por los errores sistemáticos [26].

Con su publicación en el año 2008, la "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement"[27] establece, en un método unificado y acordado internacionalmente, conceptos, recomendaciones y procedimientos para la evaluación y expresión de la incertidumbre de medida, el cual agrupa en dos categorías:

1. Tipo A, son aquellas que hacen uso de la estadística para ser medidas. Cada componente de incertidumbre que contribuye a la incertidumbre del resultado se representa en una desviación media típica cuyo símbolo es $u(x_i)$, de cada estimación de entrada x_i que es el a la raiz cuadrada de la varianza estimada $u(x_i)^2$.

2. Tipo B, no usan a la estadística para medirse, la evaluación de estas se basan en el juicio científico para lo cual se utiliza toda la información disponible, quedando a criterio del cientifico o ingeniero.

Capítulo 5

Ecuación de Laplace y Poisson

5.1. Ecuación de Laplace

La ecuación de Laplace es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, recibe ese nombre en honor al físico y matemático Pierre-Simon Laplace, es un caso particular de la ecuación de Poisson, cuando $f = 0$.
Sea Ω un subconjunto abierto de R^m. Se denotará por Δ, aunque también se suele escribir como ∇^2 al operador de Laplace (en esta tesis se optara por Δ), el cual está definido para funciones $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ como $\Delta = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$. La ecuación de Laplace consiste en hallar una función $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ que satisfaga

$$\Delta u = 0. \tag{5.1}$$

$u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ es llamada armónica en Ω, si satisface la ecuación de Laplace (5.1).
Si cualesquiera de dos funciones son soluciones a la ecuación de Laplace, (armónicas para Laplace o de cualquier ecuación diferencial homogénea), su suma (o cualquier combinación lineal) es también una solución.

5.2. Separación de variables en la ecuación de Laplace

La ecuación de Laplace puede resolverse utilizando método de separación de variables [11]. Este consiste en proponer que la solución de la ecuación de Laplace está dada por un producto de funciones donde cada una de ellas depende solo de una variable. Esto puede simplificar la búsqueda de la solución, ya que hallarla directamente puede, en términos generales, llevar a una mayor dificultad.

Tomando el laplaciano en coordenadas polares (r, θ), la ecuación (5.1) pasa a ser:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0. \tag{5.2}$$

Una solución a esta ecuación se busca en la forma

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta), \tag{5.3}$$

que se llama solución en variables separables de la ecuación de Laplace en coordenadas polares planas. Se deducen las ecuaciones que debe satisfacer R y Θ

$$r^2 R''\Theta + rR'\Theta + R\Theta'' = 0. \tag{5.4}$$

Esta ecuación se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta}, \tag{5.5}$$

donde:

$$R' = \frac{dR}{dr} \quad \text{y} \quad \Theta' = \frac{d\Theta}{d\theta}. \tag{5.6}$$

En la ecuación (5.5), el miembro izquierdo toma en cuenta sólo al término R, mientras el miembro derecho sólo considera al término Θ. De esta forma se han separado las variables. En la ecuación (5.5), se tiene una identidad en las variables independientes r y θ por lo que cada miembro de la ecuación es igual con una constante, es decir,

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda, \tag{5.7}$$

donde λ es llamada constante de separación. Ahora bien, si $u = R\Theta$ es una solución del Laplaciano en coordenadas polares, las funciones R y Θ deben satisfacer las ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0, \tag{5.8}$$

$$\Theta'' + \Theta\lambda = 0. \tag{5.9}$$

La primera ecuación cumple con la forma de las llamadas ecuaciones de Euler. Y para resolver una ecuación de Euler se asume una solución de la forma $R = r^{\alpha}$, donde α es una constante a determinarse. La solución general para R viene dada de la siguiente forma:

$$R = \begin{cases} C_0 + D_0 \log r & \text{si} \quad \lambda = 0 \\ C_1 + D_1 r^{-\mu} & \text{si} \quad \mu = \sqrt{\lambda} \neq 0. \end{cases} \tag{5.10}$$

Y la solución general para Θ viene dada de la siguiente forma:

$$\Theta = \begin{cases} A_0 + B_0\Theta & \text{si} \quad \lambda = 0 \\ A_\mu \cos \mu\theta + B_\mu \operatorname{sen} \mu\theta & \text{si} \quad \mu = \sqrt{\lambda} \neq 0. \end{cases} \tag{5.11}$$

Así, la solución para el Laplaciano (5.2) en consideración a las soluciones anteriores, toma la forma siguiente:

$$u = (C_0 + D_0 \log r)(A_0 + B_0\theta) + (C_\mu R^{\mu} + D_\mu R^{-\mu})(A_\mu \cos \mu\theta + B_\mu \operatorname{sen} \mu\theta), \tag{5.12}$$

donde A_0, B_0, C_0, D_0, A_μ, B_μ, C_μ y D_μ son constantes siendo u solución a la ecuación (5.2) en alguna región dada Ω.

5.2.1. Problemas de frontera o contorno

En la teoría y las aplicaciones de ecuaciones diferenciales parciales, la variable dependiente u, generalmente satisface algunas condiciones en la frontera de la región la que está definida la ecuación diferencial que se estudia. Las ecuaciones que representan esas condiciones de contorno o de frontera pueden implicar valores de u o sus derivadas. También pueden ser necesarias algunas condiciones sobre la continuidad de u y sus derivadas dentro del dominio y sobre la frontera. Tal conjunto de requisitos constituye un problema de valores en la frontera en la función u. Un problema de valores en la frontera se establece correctamente si tiene una y solo una solución dentro de una clase dada de funciones [28].

5.3. Solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en un círculo

La teoría de ecuaciones diferenciales parciales da resultados sobre la existencia y unicidad de soluciones de problemas de valores en la frontera. Pero tales resultados están necesariamente limitados por la gran variedad de tipos de ecuaciones diferenciales y dominios en los que se definen, así como por los tipos de condiciones de contorno.
Se resuelve ahora, el problema de Dirichlet para una circunferencia C de radio a centrado en el origen del plano x, y y se denota por Ω a la región contenida por C, es decir, $C = \partial\Omega$. Sea $f(\theta)$ una función continua definida sobre C y Ω es un círculo de radio a. El problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace, consiste en encontrar una solución u de la ecuación (5.2) que satisfaga la condición de contorno siguiente

$$u(a, \theta) = f(\theta) \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \tag{5.13}$$

tal que es u es uni-valuada y continua en $\Omega \cup C$. La periodicidad de la solución lleva a

$$u(r, \theta + 2\pi) = u(r, \theta) \qquad 0 \leq r \leq a; \quad -\infty < \theta < \infty. \tag{5.14}$$

Esta condición es satisfecha por la solución separable (5.12) siempre que Θ satisfaga

$$\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta) \qquad -\infty \leq \theta \leq \infty, \tag{5.15}$$

es decir, Θ es periódica, con un periodo de 2π. Lo anterior implica que:

$$\Theta(-\pi) - \Theta(\pi) = 0 \qquad \Theta'(-\pi) - \Theta'(\pi) = 0. \tag{5.16}$$

Estas ecuaciones llevan al problema auto-adjunto regular de Sturm-Liouville [11]. Los valores de λ están restringidos a

$$\lambda = \lambda_n = n^2 \qquad n = 0, 1, ... \tag{5.17}$$

De la periodicidad se llega a que $B_0 = 0$, $D_0 = 0$ en la ecuación (5.12). Las funciones

$$u_n(r, \theta) = (C_n r^n + D_n r^{-n})(A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta) \tag{5.18}$$

son llamadas armónicos circulares. La región que se desea estudiar incluye $r = 0$ por lo que la continuidad exige que el coeficiente $D_n = 0$. Los armónicos circulares

$$u_n(r, \theta) = r^n(A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta) \qquad n = 0, 1, ... \tag{5.19}$$

son apropiados para resolver el problema que estamos estudiando. La siguiente función u, hallada a través de la superposición de los armónicas circulares

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n(A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta), \tag{5.20}$$

será una solución del problema estudiado, siempre que la serie con que se define u sea convergente. Para satisfacer la condición de frontera (5.13), se requiere:

$$\sum_{n=0}^{\infty} R^n(A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta) = f(\theta) \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \tag{5.21}$$

Se asume que f es periódica, de periodo 2π y continua, además su primera derivada es continua a trozos para todo θ. De [28] los coeficientes de Fourier para f están dados por

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \cos ntdt \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen} ntdt \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{5.22}$$

Se halla que $A_0 = a_0/2$, $A_n = a_n/R^n$, $B_n = b_n/R^n$, $n = 0, 1, 2, ...$ De este modo, la solución en serie obtenida por separación de variables es

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta), \tag{5.23}$$

donde los coeficientes a_0, a_n, b_n son los coeficientes de Fourier para u. Nótese que

$$u(0,\theta) = \frac{a-0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta, \tag{5.24}$$

expresa la propiedad del valor medio de la función armónica u sobre el círculo C.

Con la ayuda del principio máximo-mínimo se puede probar que la solución formal de la serie (5.23) converge y realmente produce la solución al problema de Dirichlet para el círculo. Recuerde que f se asume continua, con una primera derivada continua a trozos y periódica, con periodo 2π. Por lo tanto, la serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) \tag{5.25}$$

converge uniformemente a f en $[0, 2\pi]$.

5.4. Ecuación de Poisson

La ecuación de Poisson tiene la forma $\Delta\varphi = f$ y siempre que f sea diferente de 0, se estará hablando de la ecuación de Poisson, siendo una ecuación no homogénea del Laplaciano [29]. Considérese $\Omega \subset R^N$ un dominio (una región sin huecos) y $\partial\Omega$ su frontera.

Supongamos que Ω es un dominio acotado. El problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson consiste en hallar una función v que satisfaga

$$\begin{cases} \Delta v(x) = F(x), & x \in \Omega \\ v(x) = f(x), & x \in \partial\Omega, \quad f \in \mathcal{C}(\partial\Omega) \end{cases}. \tag{5.26}$$

donde f es conocida. De [29] es posible calcular u_1 solución del problema

$$\begin{cases} \Delta \omega(x) = 0, & x \in \Omega \\ \omega(x) = f(x), & x \in \partial\Omega, \quad f \in \mathcal{C}(\partial\Omega) \end{cases}. \tag{5.27}$$

por lo tanto, basta resolver el problema:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = F(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad f \in \mathcal{C}(\partial\Omega) \end{cases}. \tag{5.28}$$

ya que por linealidad la solución a (5.26) será $u(x) = w(x) + u(x)$, es decir, la suma de las soluciones de (5.27) y (5.28).

La solución del problema (5.28) se expresa en la forma

$$u(x) = \int_\Omega F(y)G(x,y)dy, \tag{5.29}$$

donde $G(x,y)$ es llamada la función de Green del problema 5.28. Si F es de clase $C^1(\Omega)$, se verifica que:

$$\Delta u(x) = \Delta \int_{\Omega} F(y)G(x,y)dy \equiv F(x). \tag{5.30}$$

Nótese que $G(x,y) = u(|x-y|) + \Phi(x,y)$ donde Φ es una función armónica que se elige apropiadamente para que se satisfaga la condición de contorno del problema 5.28. De esto se cumple que:

$$\Delta_x \left(\int_{\Omega} F(y)u(|x-y|) + \Phi(x,y)dy \right) \equiv F(x). \tag{5.31}$$

Recordemos que u es una función armónica en Ω, si $\Delta u = 0$ en Ω, sección 5.1.

Condición de Hölder

Se dice que una función $F : \Omega \to R$ satisface una condición de Hölder local de orden $0 < \alpha < 1$ si para cada punto $x \in \Omega$ y cada bola $B_r(x) \subset \Omega$ existe $K > 0$ [29], tal que:

$$|F(x) - f(y)| \leq K|x-y|^{\alpha}. \tag{5.32}$$

A la clase de funciones que cumplen esta condición de Hölder en Ω se denotarán como $\mathcal{C}^{\alpha}(\Omega)$. Cuando $\alpha = 1$ la función F se dice que es **de Lipschitz**. Es claro que toda función que satisface la condición de Hölder es continua. Si se supone que $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ el teorema del valor medio implica que F es una función de Lipschitz.

Capítulo 6

Condiciones de frontera

Una ecuación diferencial junto con condiciones en la frontera se conoce como un problema de contorno. Una solución de un problema de contorno es una función que satisface la ecuación diferencial y la condición de frontera. Dada la linealidad de las soluciones puede ocurrir que al resolver la ecuación diferencial se encuentre una solución general, para obtener una solución particular sera necesario definir las condiciones de frontera o contorno. Una solución de un problema de condiciones de frontera es una solución de una ecuación diferencial que también satisface condiciones de frontera. Algunos ejemplos de problemas de contorno:

1. Problema del valor inicial
2. Dirichlet
3. Neumman
4. Cauchy
5. Robin
6. Mixta

En el caso de la ITE, será necesario definir condiciones de frontera precisamente para garantizar la unicidad de la solución del problema de contorno, para los ejemplos numéricos presentado en paginas posteriores se utilizara la condición de contorno de Neumman y Dirichlet. Si no se define una condición de frontera, ocurrirá un caso como el presentado en el ejemplo 6.1 que al añadirle a una solución particular cualquier función armónica, ésta también será una solución pues ocurre lo descrito en la sección5.1. Por tanto, no existe unicidad sin la condición de contorno o frontera.

6.1. Condición de frontera de Dirichlet

La condición de frontera de primer tipo o también llamada de Dirichlet (denominado así en honor a Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet), se presenta en un problema cuando en una ecuación diferencial (ordinaria o una en derivadas parciales), se especifican en la frontera los valores de solución buscada [30].

$$\Delta u(x,y) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \tag{6.1}$$

$$u(x,y) = f(x,y) \quad \text{en} \quad \partial\Omega \tag{6.2}$$

A continuación se mostrara por medio de un ejemplo como se trata en un problema las condiciones de frontera para el caso de Dirichlet.

Ejemplo 1

Sea Ω el círculo de radio R centrado en el origen. La función

$$u(x,y) = \frac{1}{12}(x^4 - y^4) - \frac{1}{6}(x^2 - y^2), \tag{6.3}$$

satisface el problema de contorno (o de valores en la frontera), puede encontrarse en los apéndices al final de esta tesis [Apéndice A] la prueba de este resultado, así:

$$\Delta u(x,y) = x^2 - y^2 \quad \text{en} \quad \Omega \tag{6.4}$$

$$u(x,y) = \left(\frac{R^2}{12} - \frac{1}{6}\right)(x^2 - y^2) \quad \text{en} \quad \partial\Omega, \tag{6.5}$$

donde Ω es el círculo de radio R centrado en el origen. Efectivamente, al calcular el Laplaciano de u hallamos

$$\begin{aligned}
\Delta u(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{12}(x^4 - y^4)\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{12}(x^4 - y^4)\right) - \frac{1}{6}\vec{\nabla}^2(x^2 - y^2) \\
&= \frac{1}{12}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^4 - y^4) + \frac{1}{12}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^4 - y^4) - \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2 - y^2) - \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2 - y^2) \\
&= \frac{1}{12}\frac{\partial}{\partial x}4x^3 - \frac{1}{12}\frac{\partial}{\partial y}4y^3 - \frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial x}2x + \frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial y}2y \\
&= x^2 - y^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Después de realizar los cálculos, se halla que:

$$\Delta u(x,y) = x^2 - y^2. \tag{6.7}$$

Y ahora para probar que satisface la condición de contorno, se cambia las variables a coordenadas polares:

$$\begin{aligned}
x &= rcos\theta \\
y &= rsen\theta \\
r &= \sqrt{x^2 + y^2}
\end{aligned} \tag{6.8}$$

De esta forma obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
u(x,y) = u(rcos\theta, rsen\theta) &= \frac{1}{12}\left(r^4cos^4\theta - r^4sen^4\theta\right) - \frac{1}{6}(r^2cos^2\theta - r^2sen^2\theta) \\
&= \frac{1}{12}\left[(r^2cos^2\theta)^2 - (r^2sen^2\theta)^2\right] - \frac{1}{6}r^2cos2\theta \\
&= \frac{1}{12}\left[(r^2cos^2\theta + r^2sen^2\theta)(r^2cos^2\theta - r^2sen^2\theta)\right] - \frac{1}{6}r^2cos2\theta \\
&= \frac{1}{12}\left[r^2(r^2cos2\theta)\right] - \frac{1}{6}r^2cos2\theta \\
&= \frac{1}{12}r^4\cos(2\theta) - \frac{1}{6}r^2\cos(2\theta) \\
&= r^2cos2\theta\left[\frac{r^2}{12} - \frac{1}{6}\right].
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Evaluando en $r = R$, hallamos

$$u\mid_{\partial\Omega} = u\mid_{r=R} = R^2 cos 2\theta \left[\frac{R^2}{12} - \frac{1}{6} \right]. \tag{6.10}$$

Regresando a coordenadas polares se halla se tiene que

$$u\mid_{\partial\Omega} = u\mid_{r=R} = (x^2 - y^2) \left[\frac{R^2}{12} - \frac{1}{6} \right]. \tag{6.11}$$

La gráfica de la función $u(x, y)$ se muestra en la Figura 6.1.

6.2. Condición de frontera de Neumann

La condición de Neumann o de segundo tipo, denominado así en honor a Carl Neumann, se presenta en un problema cuando en una ecuación diferencial ordinaria o en derivadas parciales definida sobre una región, se especifican los valores que debe cumplir la derivada de la solución sobre la frontera o contorno de la región [30].

De manera más precisa, sea Ω una región simplemente conexa de $\Re^n$ con $n = 2, 3$. Dadas $f \in C(\Omega)$ y $\phi \in C(\partial\Omega)$, el problema de valores en la frontera para ecuación de Poisson con la condición de contorno de Neumann, consiste en hallar una función

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}),$$

que satisfaga el problema

$$\Delta u(x, y) = f(x, y) \quad \text{en} \quad \Omega, \tag{6.12}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = \phi(x, y) \qquad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \tag{6.13}$$

en el sentido usual de la diferenciación. Dicha función u es llamada una solución clásica de dicho problema.

Una condición necesaria para la existencia de solución del problema de contorno (6.12)-(6.13) está dada por

$$\int_\Omega f(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} \phi(x, y) dx dy. \tag{6.14}$$

Esta condición es llamada de compatibilidad. Cuando tenemos una condición de contorno nula, es decir, $\phi = 0$, la condición de compatibilidad está dada por

$$\int_\Omega f(x, y) dx dy = 0. \tag{6.15}$$

A continuación se mostrara por medio de un ejemplo como se trata en un problema las condiciones de frontera para el caso de Neumann.

Ejemplo 2

Sea Ω el círculo de radio uno centrado en el origen. La función

$$u(x,y) = \frac{1}{12}(x^4 - y^4) - \frac{1}{6}(x^2 - y^2), \tag{6.16}$$

satisface el problema de contorno (o de valores en la frontera)

$$\Delta u(x,y) = x^2 - y^2 \quad \text{en} \quad \Omega, \tag{6.17}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = 0. \tag{6.18}$$

Aplicando la derivada respecto a r para la solución u Ec. (6.16), en su forma polar, por lo que es conveniente pasar coordenadas polares, utilizando las equivalencias definidas en (6.8):

$$\begin{array}{rcl} x & = & rcos\theta \\ y & = & rsen\theta \\ r & = & \sqrt{x^2+y^2}. \end{array} \tag{6.8}$$

Realizando el cambio de coordenadas obtenemos:

$$\begin{aligned} u(x,y) = u(rcos\theta, rsen\theta) &= \frac{1}{12}\left(r^4cos^4\theta - r^4sen^4\theta\right) - \frac{1}{6}(r^2cos^2\theta - r^2sen^2\theta) \\ &= \frac{1}{12}\left[(r^2cos^2\theta)^2 - (r^2sen^2\theta)^2\right] - \frac{1}{6}r^2cos2\theta \\ &= \frac{1}{12}\left[(r^2cos^2\theta + r^2sen^2\theta)(r^2cos^2\theta - r^2sen^2\theta)\right] - \frac{1}{6}r^2cos2\theta \\ &= \frac{1}{12}\left[r^2(r^2cos2\theta)\right] - \frac{1}{6}r^2cos2\theta \\ &= r^2cos2\theta\left[\frac{r^2}{12} - \frac{1}{6}\right]. \end{aligned} \tag{6.19}$$

En efecto, en coordenadas polares se tiene que:

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_{r=R} \frac{1}{12}(x^4 - y^4) - \frac{1}{6}(x^2 - y^2) = \left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_{r=R} r^2cos2\theta\left[\frac{r^2}{12} - \frac{1}{6}\right]. \tag{6.20}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = rcos2\theta\left[\frac{r^2}{3} - \frac{1}{3}\right]. \tag{6.21}$$

Evaluando en $r = R = 1$, hallamos

$$\frac{\partial u}{\partial r} = cos2\theta\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right] = 0. \tag{6.22}$$

La solución del problema de Neumann, puede buscarse usando los armónicos circulares y la técnica de la función de Green [11, 29].

La gráfica de la función $u(x,y)$ se muestra en la Figura 6.2.

6.3. Grafica de las soluciones

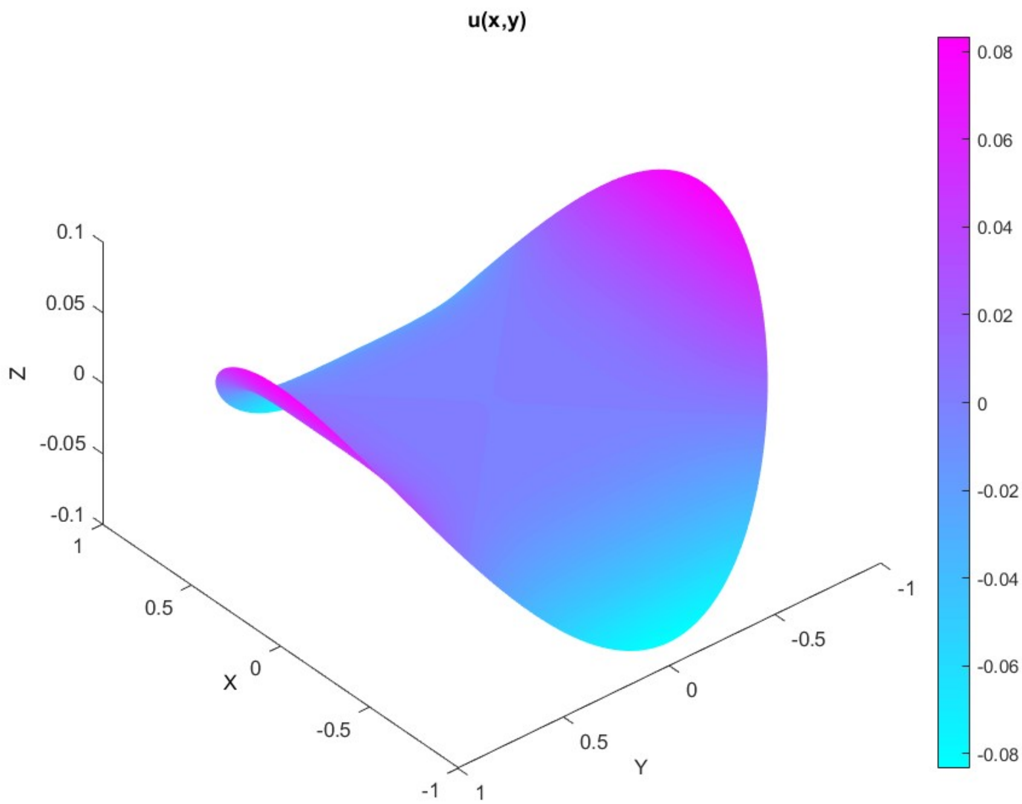

Figura 6.1: Gráfica de la función u dada en (6.5) considerando la condición de contorno de Dirichlet, generada por MATLAB usando la herramienta PDETOOL.

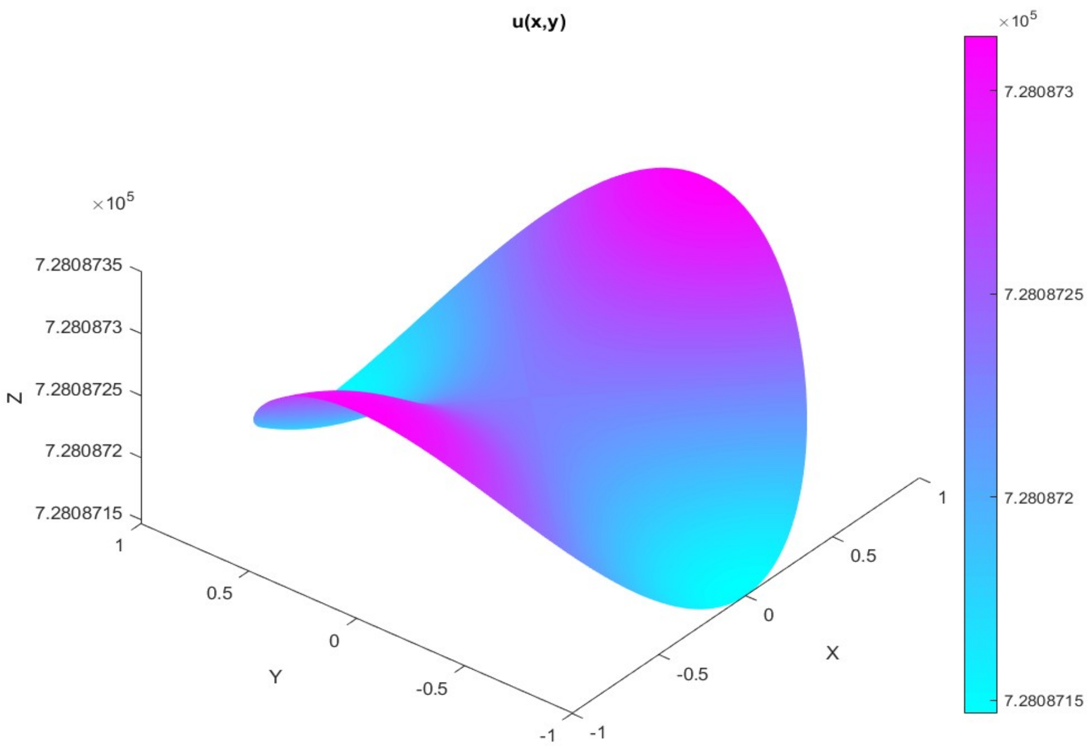

Figura 6.2: Gráfica de la función u dada en (6.16) considerando la condición de contorno de Neumann, generada por MATLAB usando la herramienta PDETOOL.

Capítulo 7

Resultados

7.1. La Ecuación de Transporte de Irradiancia

La Ecuación de Trasporte de Irradiancia (ETI) se puede obtener a partir de la óptica geométrica o la óptica física [1]. Dicha ecuación relaciona la distribución de irradiancia I con el frente de onda W en planos transversales al eje de propagación [2, 3, 1]. La ETI se utiliza en muchos esquemas para resolver la fase de las mediciones de irradiancia, sin utilizar métodos interferométricos [2].

La ETI fue obtenida por Michael Reed Teague en el año de 1983 basándose en la teoría de difracción de Fresnel en el artículo titulado "Deterministic phase retrieval: a Green's function solution"[1], suponiendo que la luz se propaga a lo largo del eje z en direccion positiva y definiendo la perturbacion ψ_T en el mismo plano transversal:

$$\psi_T = e^{-\imath \frac{2\pi}{\lambda} ct} u_z(\vec{r}), \tag{7.1}$$

donde la amplitud $u_z(\vec{r})$ satisface la aproximación parabólica de la ecuación de onda [1]

$$\left(\imath \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\Delta_T}{2k} + k \right) u_z(\vec{r}) = 0. \tag{7.2}$$

También se tiene que la intensidad de la perturbación cumple:

$$I = ||u_z||^2. \tag{7.3}$$

Esta última ecuación permite conocer la amplitud de u_z aplicando la teoría de difracción de Fresnel a la función ψ_T. Insistimos en que $u_z(\vec{r})$ debe satisfacer la aproximación parabólica de la ecuación de onda [4] por la relación que establece la ETI entre la fase y el plano ortogonal al eje óptico con la tasa de cambio de la intensidad del haz a lo largo de la dirección de propagación. Ahora, suponiendo que el haz paraxial que se describe mediante u_z implica que $\psi(x, y, z)$ satisfaga que [31]:

$$\psi(x, y, z) = u_z(x, y) = u_z(\vec{r}) = [I_z(x, y, z)]^{\frac{1}{2}} e^{\imath \phi(x,y)}, \tag{7.4}$$

donde $I(x, y, z)$ es la irradiancia, y $\phi(x, y)$ es la fase.
En términos del frente de onda $W(x, y, z)$ la fase está dada por la relación [31],

$$\phi(x, y, z) = (2\pi/\lambda)W(x, y, z) = kW(x, y, z). \tag{7.5}$$

Sustituyendo (7.4) en la aproximación parabólica de la ecuación de onda, Ec. (7.2), y multiplicando por el complejo conjugado de (7.4), se obtiene:

$$\left\{\left(\imath\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\Delta_T}{2k}+k\right)I_z(x,y,z)^{\frac{1}{2}}e^{\imath\phi(x,y)}\right\}I_z(x,y,z)^{\frac{1}{2}}e^{-\imath\phi(x,y)}=0. \tag{7.6}$$

Se tiene que esta es una ecuación compleja con una gran cantidad de términos cuya solución no es trivial. Tomando convenientemente la parte imaginaria [2], es decir solo la siguiente expresión:

$$-\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\partial I}{\partial z}=\vec{\nabla}_T I\cdot\vec{\nabla}_T\phi+I\Delta_T\phi=\vec{\nabla}_T\cdot(I\vec{\nabla}_T\phi). \tag{7.7}$$

la ETI, que relaciona la fase ϕ con la distribución de Irradiancia I. La información de la fuente luminosa queda expresada en términos de la longitud de onda λ, donde $\lambda = 2\pi/k$ y k es el número de onda.

Además, considerando la relación entre la fase $\phi = kW$ y el frente de onda W, se puede reescribir la ETI en términos del frente de onda [3], obteniendo la ETI en terminos del frente de onda por

$$I\Delta_T W+\vec{\nabla}_T I\cdot\vec{\nabla}_T W=-\frac{\partial I}{\partial z}, \tag{7.8}$$

donde:

$$\vec{\nabla}_T=\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath}, \tag{7.9}$$

es el operador nabla tranversal y

$$\Delta_T=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{7.10}$$

es el operador Laplaciano transversal.

Los 3 términos de la ETI fueron nombrados y descritos por K. Ichikawa et al. [10] que se dan a continuación:

1. El primer término de la ecuación $I\Delta_T W$ se interpreta como las variaciones de intensidad causadas por la convergencia o divergencia del haz y es llamado el término del lente.
2. El segundo término $\vec{\nabla}_T I\cdot\vec{\nabla}_T W$ representa las variaciones de intensidad causadas por la inclinación del frente de onda, y es llamado el término de prisma.
3. Finalmente, el tercer término $\partial I/\partial z$ se obtiene numéricamente a partir de dos medidas de irradiancia en dos planos diferentes, es decir, expresa la variación de la irradiancia del haz causada por los efectos de los términos del prisma y el lente a medida que se propaga a lo largo del eje z.

La ETI se transforma en una ecuación de Poisson en el caso de irradiancia constante (frente de onda plano) o sin cambios abruptos [8, 2]; de la forma:

$$\Delta\varphi=f, \tag{7.11}$$

Tanto φ como f pueden ser funciones reales o complejas. En un sistema de coordenadas cartesianas tridimensional, tomará la siguiente forma:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi(x,y,z)=f(x,y,z). \tag{7.12}$$

Si la irradiancia es constante (I_{co}), el término del prisma se puede calcular de la siguiente forma:

$$\vec{\nabla}_T I_{co} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath}\right) I_{co} = \frac{\partial}{\partial x} I_{co} + \frac{\partial}{\partial y} I_{co} = 0. \tag{7.13}$$

De esto,

$$\vec{\nabla}_T I_{co} \cdot \vec{\nabla}_T W = 0 \cdot \vec{\nabla}_T W = 0. \tag{7.14}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\triangle I_{co}}{\triangle z} = I_{co} \Delta W. \tag{7.15}$$

Donde $\triangle$ representa la diferencia entre $|z - z_0|$ e $|I - I_0|$. Finalmente, se obtiene la ETI explicita a una ecuación de Poisson:

$$\frac{1}{I}\frac{\triangle I}{\triangle z} = \Delta W, \tag{7.16}$$

donde $f(x, y)$ absorbe los siguientes términos denotados por $f = (\triangle I / \triangle z)(1/I)$, llegando a

$$f = \Delta W. \tag{7.17}$$

Así, la ETI se reduce a la ecuación de Poisson (7.17) [2].

7.2. Análisis de la ETI en presencia de errores

En la práctica, en vez de medir la irradiancia I se mide una aproximación $\hat{I}$ de forma que $\left|I - \hat{I}\right| < \delta$ donde δ es una valor determinado por el sistema de medición. De esta forma obtenemos

$$\hat{f} = \frac{1}{\hat{I}} \frac{\triangle \hat{I}}{\triangle z} = \Delta \hat{W}. \tag{7.18}$$

Hagamos $\varepsilon = \hat{I} - I$. Así, $\hat{I} = I + \varepsilon$. Sustituyendo $\hat{I}$ en (7.18), se tiene que:

$$\frac{1}{I+\varepsilon} \frac{\triangle(I+\varepsilon)}{\triangle z} = \Delta \hat{W},$$

que puede escribirse como

$$\frac{1}{I+\varepsilon} \frac{\triangle I}{\triangle z} + \frac{1}{I+\varepsilon} \frac{\triangle \varepsilon}{\triangle z} = \Delta \hat{W}. \tag{7.19}$$

Para observar la distancia entre la función $\hat{f}(x,y)$ definida en (7.17) con I sin error y la función $f(x,y)$ con la aproximación $\hat{I}$, se sustituyen los valores de I e $\hat{I}$, respectivamente:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{I+\varepsilon}\frac{\triangle \varepsilon}{\triangle z} + \frac{1}{I+\varepsilon}\frac{\triangle I}{\triangle Z} - \frac{1}{I}\frac{\triangle I}{\triangle Z}\right| &= \left|\frac{1}{I+\varepsilon}\frac{\triangle \varepsilon}{\triangle z}\right| + \left|\frac{\triangle I}{\triangle Z}\right|\left|\frac{1}{I+\varepsilon} - \frac{1}{I}\right| \\
&= \left|\frac{1}{I+\varepsilon}\frac{\triangle \varepsilon}{\triangle z}\right| + \left|\frac{\triangle I}{\triangle Z}\right|\left|\frac{I - I - \varepsilon}{(I+\varepsilon)I}\right|, \\
= \left|\frac{1}{I+\varepsilon}\frac{\triangle \varepsilon}{\triangle z}\right| + \left|\frac{\varepsilon}{(I+\varepsilon)I}\right|\left|\frac{\triangle I}{\triangle z}\right| \quad &< \quad \left|\frac{1}{I+\varepsilon}\frac{\triangle \varepsilon}{\triangle z}\right| + \frac{\varepsilon}{|(I+\varepsilon)I|}\left|\frac{\triangle I}{\triangle Z}\right|,
\end{aligned} \tag{7.20}$$

El primer término de la última desigualdad puede ser grande aunque ε sea pequeño. Esto es una consecuencia de que si dos funciones están cercanas, las derivadas no necesariamente tienen que estarlo. De este modo, antes de calcular la aproximación de la derivada, debemos suavizar $\hat{I}$, es decir, realizar un pre-procesamiento de datos.

Esto se refleja en el término asociado con ε y es importante, ya que f y $\hat{f}$ podrían no estar cercanos llevando a que los respectivos potenciales no lo estén. Recordemos que a través de los potenciales recuperamos la fase.
Veamos, a través de un ejemplo, el hecho de que la derivada no es continua y como ello puede llevar a errores en el cálculo de la fase. Observemos el comportamiento de la siguiente función, definida como:

$$\varepsilon(z) = \frac{\operatorname{sen}(n^2 z)}{n}, \tag{7.21}$$

aplicando la derivada respecto a z

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\varepsilon(z) &= \frac{d}{dz}\frac{\operatorname{sen}(n^2 z)}{n} \\
&= \frac{1}{n}\frac{d}{dz}\operatorname{sen}(n^2 z)\frac{d}{dz}n^2 z \\
&= \frac{1}{n}\cos(n^2 z)n^2 \\
&= n\cos(n^2 z).
\end{aligned} \tag{7.22}$$

A continuación se muestran gráficas de (7.21) y (7.22), para poder observar a detalle que ocurre al derivar, tomando a $n = 100$:

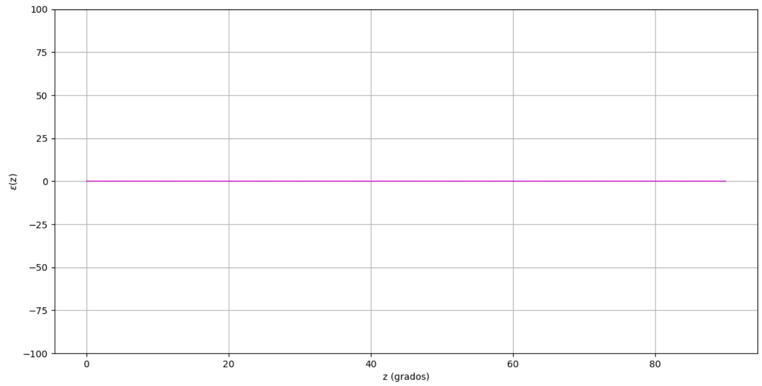

Figura 7.1: Gráfica de la función dada en la ecuación (7.21) donde se observa que los valores de la función están muy cercanos a cero. Por la escala, la gráfica luce como una línea recta.

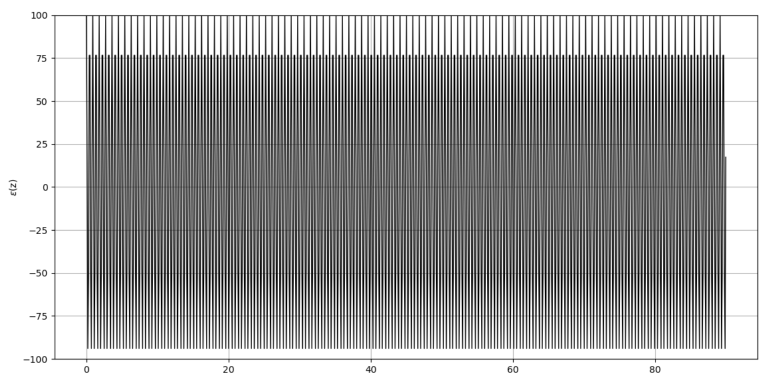

Figura 7.2: Gráfica de la derivada de $\varepsilon(z)$ dada en (7.22). Obsérvese que esta gráfica está muy alejada de la función cero.

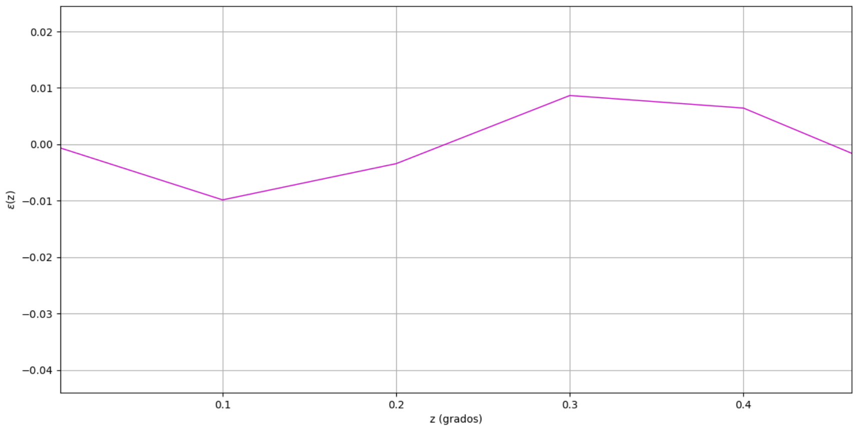

Figura 7.3: Fragmento a detalle de Figura 7.1. Nótese que al cambiar de escala, la Figura 7.1 no es una recta. Sin embargo, sus valores están cercanos a cero.

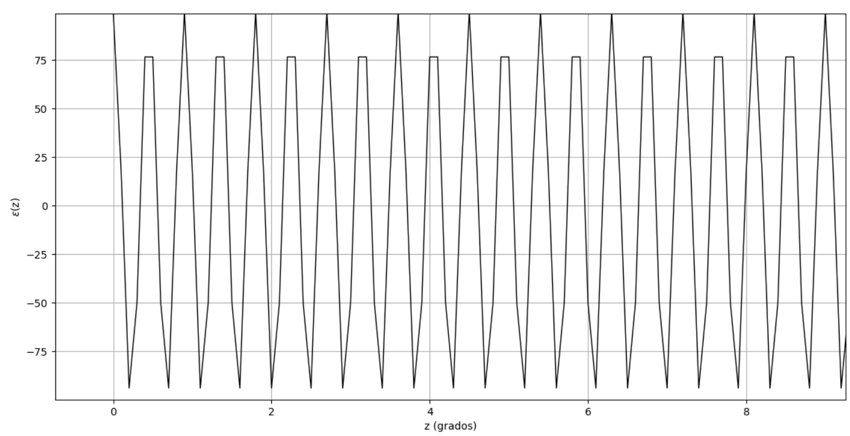

Figura 7.4: Fragmento a detalle de la Figura 7.2. En este caso se observa que la gráfica de la derivada está alejada de la gráfica de la derivada de la función nula.

De acuerdo con las Figuras mostradas (con $n = 100$), es fácil observar que aunque la ecuación (7.21) se aproxima oscilando a la función nula, la derivada obtenida en (7.22) lleva a oscilaciones que van desde -100 a 100, bastante alejadas de la derivada de la función nula.

Este ejemplo muestra que, aunque el distanciamiento entre una función y su aproximación sea pequeño, no es así cuando se involucra la derivada.

Observemos ahora un ejemplo para visualizar, utilizando un problema de contorno, cómo puede ocurrir un error considerable en el resultado al considerar un aparente error despreciable.

Ejemplo 3

Tomemos la ecuación (7.18) con un error ε, y además sustituyamos dicho error con la ecuación de ejemplo (7.21)

$$\begin{aligned} \Delta\hat{W} &= \frac{1}{I+\varepsilon}\frac{\triangle(I+\varepsilon)}{\triangle z} \\ &= \frac{1}{I+\frac{\operatorname{sen}(n^2 z)}{n}}\frac{\triangle\left(I+\frac{\operatorname{sen}(n^2 z)}{n}\right)}{\triangle z}. \end{aligned} \tag{7.23}$$

En el lado derecho de la ecuación (7.22), el término que corresponde a la perturbación tiende a 0 cuando $n \to \infty$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2 z)}{n} = 0, \tag{7.24}$$

pues la función $\operatorname{sen}(n^2 z)$ solo toma valores entre -1 y 1, y tomando el limite de $-1/n$ y $1/n$ cuando $n \to \infty$ este limite es 0, y por el teorema del emparedado [32], el limite para la función $\operatorname{sen}(n^2 z)/n$ es 0. Sustituyendo este resultado tenemos

$$\begin{aligned} \Delta\hat{W} &= \frac{1}{I+\frac{\operatorname{sen}(n^2 z)}{n}}\frac{\triangle\left(I+\frac{\operatorname{sen}(n^2 z)}{n}\right)}{\triangle z} = \frac{1}{I}\frac{\triangle I}{\triangle z} \\ \Rightarrow \Delta\hat{W} &= \frac{1}{I}\frac{\triangle I}{\triangle z} \end{aligned} \tag{7.25}$$

Este resultado lo usaremos más adelante.

Ahora tomando a la ecuación (7.19) y sustituyendo con (7.21) en el valor de ε:

$$\begin{aligned} \Delta\hat{W} &= \frac{1}{I+\varepsilon}\frac{\triangle I}{\triangle z} + \frac{1}{I+\varepsilon}\frac{\triangle\varepsilon}{\triangle z} \\ &= \frac{1}{I+\frac{\operatorname{sen}(n^2 z)}{n}}\frac{\triangle I}{\triangle z} + \frac{1}{I+\frac{\operatorname{sen}(n^2 z)}{n}}\frac{\triangle\frac{\operatorname{sen}(n^2 z)}{n}}{\triangle z} \end{aligned} \tag{7.26}$$

y con los resultados de (7.22), es decir, $\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta z} = \frac{d}{dz}\varepsilon(z)$

$$\Delta\hat{W} = \frac{1}{I+\frac{\operatorname{sen}(n^2 z)}{n}}\frac{\triangle I}{\triangle z} + \frac{1}{I+\frac{\operatorname{sen}(n^2 z)}{n}} n\cos(n^2 z). \tag{7.27}$$

Tomemos un n lo suficientemente grande como para despreciar el término $\frac{\operatorname{sen}(n^2 z)}{n}$. Así,

$$\frac{1}{I}\frac{\triangle I}{\triangle z}+\frac{1}{I}n\cos(n^2 z)=\Delta\hat{W}, \tag{7.28}$$

reorganizando términos obtenemos

$$\frac{1}{I}\left[\frac{\triangle I}{\triangle z}+n\cos(n^2 z)\right]=\Delta\hat{W}. \tag{7.29}$$

Comparando las ecuaciones (7.25) y la ecuación (7.29), que tienen un origen en común, es claro que los lados izquierdos tienen una marcada diferencia,. Más aún, podemos afirmar que la magnitud de (7.29) es mucho mayor a la magnitud de (7.25), es decir,

$$\left|\frac{1}{I}\left[\frac{\triangle I}{\triangle z}+n\cos(n^2 z)\right]\right|\gg\left|\frac{1}{I}\frac{\triangle I}{\triangle z}\right|, \tag{7.30}$$

Recordemos que se trata de la misma ecuación pero la diferencia está en en momento de despreciar el término ε pues como se vió en las gráficas, en presencia de una diferenciación a lo largo del eje z, los valores de dicha derivada crecen a razón de n, por lo que no puede despreciarse, pues el no considerarlo antes de la diferenciación, aunque parezca trivial dada su cercanía a la función nula, conducirá a un resultado erróneo del cálculo del frente de onda. Una propuesta consiste en suavizar $\hat{I}$ antes de aplicar la derivada, como fue mencionado al inicio de este capítulo.

7.3. Análisis de la ecuación de Posisson de la ITE con error; reconstrucción del frente de onda W y W_ε a partir de la fuente exacta y con error

Con la ecuación de Poisson, descrita en la ecuación (7.17), se obtendrá al frente de onda W a partir de la función de la fuente f, considerando que dicha fuente tiene un error. A la función con error la llamaremos f_e y a W lo denotaremos como u. De igual forma cuando se considere el frente de onda resultado de la función con error f_e, se denotara por u_e.

A partir de la ecuación (7.17) tenemos

$$\Delta u = f \qquad \Omega, \tag{7.31}$$

donde Ω es un círculo de radio uno centrado en el origen. Además, consideremos la siguiente condición de frontera de tipo Neumann nula

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \qquad \partial\Omega. \tag{7.32}$$

Daremos a la fuente exacta f y se le agregará un error denotado por $\varepsilon(x,y)$ para obtener una fuente con error f_ε. Tomemos a $f(x,y) = x^2 - y^2$. Así,

$$f_\varepsilon(x,y) = f(x,y) + \varepsilon(x,y) = x^2 - y^2 + \varepsilon(x,y), \tag{7.33}$$

donde el error (en coordenadas polares) se define como

$$\varepsilon(r,\theta) = \frac{r^{n^2}}{n}\cos(n^2\theta). \tag{7.34}$$

Cambiando a la función f a coordenadas polares, obtenemos

$$f_\varepsilon(r,\theta) = r^2\cos 2\theta + \frac{r^{n^2}}{n}\cos n^2\theta. \tag{7.35}$$

Por lo tanto, el Laplaciano de la función u_ε debe ser igual a $f_\varepsilon(r,\theta)$,

$$\Delta u_e = r^2\cos 2\theta + \frac{r^{n^2}}{n}\cos n^2\theta, \tag{7.36}$$

pero recordemos que f es una función que ya se estudió en la sección 6.1, por lo que su solución es conocida. Por tanto,

$$\Delta\left[\frac{1}{12}(x^4 - y^4) - \frac{1}{6}(x^2 - y^2)\right] = x^2 - y^2, \tag{7.37}$$

Con este resultado, obtenemos a un candidato para ser u_ε. Sin embargo, debemos encontrar un función complemento para u de forma tal que el Laplaciano de dicha función sea igual a $\varepsilon(x,y)$, esto es,

$$\Delta u_\varepsilon = \frac{r^{n^2}}{n}\cos n^2\theta, \tag{7.38}$$

donde u tiene la siguiente forma

$$u_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \cos k\theta + b_k r^k \operatorname{sen} k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^{k+2}\cos k\theta + d_k r^{k+2}\operatorname{sen} k\theta, \tag{7.39}$$

aplicando el Laplaciano a esta u_ε obtenemos

$$\Delta u_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta(a_k r^k \cos k\theta) + \Delta(b_k r^k \operatorname{sen} k\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta(c_k r^{k+2} \cos k\theta) + \Delta(d_k r^{k+2} \operatorname{sen} k\theta), \tag{7.40}$$

pero los términos que acompañan a_k y b_k son de la forma armónica, por lo que cumplen la ecuación de Laplace, es decir

$$\begin{aligned} \Delta(r^k \cos k\theta) &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^k \cos k\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^k \cos k\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(r^k \cos k\theta) \\ &= k(k-1)r^{k-2}\cos k\theta + kr^{k-2}\cos k\theta - r^{k-2}k^2 \cos k\theta \\ &= k^2 r^{k-2}\cos k\theta - kr^{k-2}\cos k\theta + kr^{k-2}\cos k\theta - k^2 r^{k-2}\cos\theta = 0. \end{aligned} \tag{7.41}$$

Este procedimiento es similar para b_k, por lo que a la sumatoria no contribuirán. El laplaciano de u pasa a ser

$$\Delta u_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Delta(r^{k+2}\cos k\theta) + d_k \Delta(r^{k+2} \operatorname{sen} k\theta), \tag{7.42}$$

donde el Laplciano para c_k se calcula de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Delta(r^{k+2}\cos k\theta) &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^{k+2}\cos k\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^{k+2}\cos k\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(r^{k+2}\cos k\theta) \\ &= (k+2)(k+1)r^k \cos k\theta + (k+2)r^k\cos k\theta - k^2 r^k \cos k\theta \\ &= (4k+4)r^k\cos k\theta. \end{aligned} \tag{7.43}$$

Cálculo del coeficiente c_k

Ahora calculando el coeficiente c_k en base a la sección 5.2

$$\begin{aligned} (4k+4)c_k &= f_k^1 \\ c_k &= \frac{f_k^1}{(4k+4)}, \end{aligned} \tag{7.44}$$

de donde f_k^1 se calcula por definición como

$$\begin{aligned} f_k^1 &= \langle f(r,\theta), r^k \cos k\theta \rangle \\ &= \int_\Omega f(r,\theta), r^k \cos(k\theta) d\Omega, \end{aligned} \tag{7.45}$$

que, al tratarse de un círculo, la integral se transforma en

$$\begin{aligned} &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{r^{n^2}}{n} \cos(n^2\theta) r^k \cos(k\theta) r dr d\theta \\ &= \frac{1}{n}\int_0^R r^{n^2+k+1} dr \int_0^{2\pi} \cos(n^2\theta)\cos(k\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{n(n^2+k+2)} R^{n^2+k+2} \int_0^{2\pi} \cos(n^2\theta)\cos(k\theta) d\theta. \end{aligned} \tag{7.46}$$

Para la integral de coseno usaremos la suma de las siguientes identidades

$$\left.\begin{aligned}\cos(a+b) = \cos a\cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b\\ \cos(a-b) = \cos a\cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b\end{aligned}\right\} = 2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b), \tag{7.47}$$

regresando a la integral, para $k \neq n^2$,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos(n^2\theta)\cos(k\theta)d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos((k+n^2)\theta) + \cos((k-n^2)\theta))d\theta\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k+n^2}\operatorname{sen}((k+n^2)\theta) + \frac{1}{k-n^2}\operatorname{sen}((k-n^2)\theta)\right]_0^{2\pi}\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k+n^2}\operatorname{sen}((k+n^2)2\pi) + \frac{1}{k-n^2}\operatorname{sen}((k-n^2)2\pi)\right]\\ &= 0.\end{aligned} \tag{7.48}$$

Esto debido a que $(k-n^2)$ y $(k+n^2)$ son múltiplos de π.

Para $k = n^2$,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos(n^2\theta)\cos(k\theta)d\theta &= \int_0^{2\pi}\cos^2(k\theta)d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2k\theta)}{2}d\theta\\ &= \frac{1}{2}\theta\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2k\theta)\Big|_0^{2\pi}\\ &= \pi.\end{aligned} \tag{7.49}$$

Obtenemos como resultado un múltiplo de π. Cuando $n^2 \neq k$ donde el valor de $f_k^1 = 0$, en consecuencia

$$c_k = \frac{f_k^1}{(4k+4)} = 0. \tag{7.50}$$

Cuando $k = n^2$ el valor de $f_k^1 = \frac{1}{n(2n^2+2)}R^{2n^2+2}\pi$ entonces tendremos

$$c_k = \frac{R^{2n^2+2}\pi}{(4n^2+4)n(2n^2+2)} \tag{7.51}$$

Cálculo del coeficiente d_k

Volviendo a la ecuación 7.42 de donde el Laplaciano para d_k se obtiene de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\Delta(r^{k+2}\operatorname{sen} k\theta) &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^{k+2}\operatorname{sen} k\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r}(r^{k+2}\operatorname{sen} k\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(r^{k+2}\operatorname{sen} k\theta)\\ &= (k+2)(k+1)r^k\operatorname{sen} k\theta + (k+2)r^k\operatorname{sen} k\theta - k^2r^k\operatorname{sen} k\theta\\ &= (4k+4)r^k\operatorname{sen} k\theta,\end{aligned} \tag{7.52}$$

por lo que el coeficiente d_k tiene una forma similar a c_k

$$d_k = \frac{f_k^2}{(4k+4)}, \tag{7.53}$$

de donde f_k^2 se calcula de manera similar a f_k^1 como

$$\begin{aligned} f_k^2 &= \langle f(r,\theta), r^k \operatorname{sen} k\theta \rangle \\ &= \int_\Omega f(r,\theta), r^k \operatorname{sen}(k\theta) d\Omega, \end{aligned} \tag{7.54}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{r^{n^2}}{n} \cos(n^2\theta) r^k \operatorname{sen}(k\theta) r dr d\theta \\ &= \frac{1}{n} \int_0^R r^{n^2+k+1} dr \int_0^{2\pi} \cos(n^2\theta) \operatorname{sen}(k\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{n(n^2+k+2)} R^{n^2+k+2} \int_0^{2\pi} \cos(n^2\theta) \operatorname{sen}(k\theta) d\theta. \end{aligned} \tag{7.55}$$

Para resolver la integral usaremos la suma de las siguientes identidades

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b \end{aligned}\right\} = 2 \operatorname{sen} a \cos b = \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b), \tag{7.56}$$

regresando a la integral, para $k \neq n^2$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(n^2\theta) \operatorname{sen}(k\theta) d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}((k+n^2)\theta) + \operatorname{sen}((k-n^2)\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{n_0} \left[\int_0^{n_0 2\pi} \operatorname{sen} u du + \int_0^{n_0 2\pi} \operatorname{sen} u du \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{n_0} \left[-\cos((k+n^2)\theta) - \cos((k-n^2)\theta) \right]_0^{2\pi n_0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{n_0} (0) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{7.57}$$

donde n_0 absorbe los términos de $k \pm n^2$ y $u = n_0\theta$. Para $k = n^2$,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(n^2\theta) \operatorname{sen}(k\theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos(k\theta) \operatorname{sen}(k\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} u du \\ &= \frac{1}{2k} \operatorname{sen}^2(k\theta) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{7.58}$$

Obtenemos como resultado tanto para $n^2 = k$ ó $n^2 \neq k$, que el valor de la integral es 0 entonces $f_k^2 = 0$ de donde

$$d_k = \frac{f_k^2}{(4k+4)} = 0. \tag{7.59}$$

Cálculo de los coeficientes a_k y b_k

Para encontrar los coeficientes a_k y b_k, usaremos la condición de frontera del problema que lleva a

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial}{\partial r}\left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \cos k\theta + b_k r^k \operatorname{sen} k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^{k+2}\cos k\theta + d_k r^{k+2}\operatorname{sen} k\theta\right] = 0\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k k r^{k-1}\cos k\theta + b_k k r^{k-1}\operatorname{sen} k\theta \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} c_k (k+2) r^{k+1}\cos k\theta + d_k (k+2) r^{k+1}\operatorname{sen} k\theta,\end{aligned} \tag{7.60}$$

factorizando los términos iguales y evaluando en $r = R$, se encuentra

$$\left.\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r}\right|_{r=R} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k R^{k-1} c_k (k+2) R^{k+1}\cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} b_k k R^{k-1} d_k (k+2) R^{k+1}\operatorname{sen} k\theta = 0, \tag{7.61}$$

lo que nos lleva a los siguientes sistemas, pues por separado el valor de las sumatorias es 0

$$a_k k R^{k-1} + c_k (k+2) R^{k+1} = 0, \tag{7.62}$$

$$b_k k R^{k-1} + d_k (k+2) R^{k+1} = 0. \tag{7.63}$$

Despejando a_k, obtenemos

$$a_k = -\frac{(k+2)R^{k+1}}{kR^{k-1}} c_k, \tag{7.64}$$

al sustituir c_k

$$a_k = -\frac{(k+2)R^2}{4k(k+1)} f_k^1. \tag{7.65}$$

De igual forma obtenemos b_k

$$b_k = -\frac{(k+2)R^{k+1}}{kR^{k-1}} d_k, \tag{7.66}$$

sustituyendo d_k

$$b_k = -\frac{(k+2)R^2}{4k(k+1)} f_k^2. \tag{7.67}$$

Fuente encontrada

De la u_ε que definimos al inicio sustituimos los coeficientes a_k, b_k, c_k y d_k

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \cos k\theta + b_k r^k \operatorname{sen} k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^{k+2}\cos k\theta + d_k r^{k+2}\operatorname{sen} k\theta \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{(k+2)R^2}{4k(k+1)} f_k^1 r^k \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k+4)} f_k^1 r^{k+2}\cos k\theta,\end{aligned} \tag{7.68}$$

todos los términos son 0 excepto en $n^2 = k$ y sustituyendo el resultado para f_k^1

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &= a_{n^2} r^{n^2} \cos n^2\theta + c_{n^2} r^{n^2+2} \cos n^2\theta \\ &= -\frac{(n^2+2)R^2}{4n^2(n^2+1)} \frac{R^{2n^2+2}\pi}{n(2n^2+2)} r^{n^2} \cos n^2\theta + \frac{R^{2n^2+2}\pi}{(4n^2+4)n(2n^2+2)} r^{n^2+2} \cos n^2\theta. \end{aligned} \tag{7.69}$$

Ya que estamos trabajando en un círculo de radio 1, las potencias de $r = R = 1$ no aparecen en la expresión anterior, por lo que

$$u_\epsilon = \frac{-\pi n^2 r^{n^2} \cos n^2\theta - 2\pi r^{n^2} \cos n^2\theta}{(4n^4+4n^2)(2n^3+2n)} + \frac{\pi r^{n^2+2} \cos n^2\theta}{(4n^2+4)(2n^3+2n)}. \tag{7.70}$$

En este resultado, puede verse un factor común $\pi r^{n^2} \cos n^2\theta$ que corresponde a función armónica. Así, u_ϵ puede escribirse en la forma

$$u_\epsilon = -\frac{\pi n^2 r^{n^2} \cos n^2\theta}{(4n^4+4n^2)(2n^3+2n)} - \frac{2\pi r^{n^2} \cos n^2\theta}{(4n^4+4n^2)(2n^3+2n)} + \frac{\pi r^{n^2+2} \cos n^2\theta}{(4n^2+4)(2n^3+2n)}, \tag{7.71}$$

al aplicar el Laplaciano a (7.71), los dos primeros términos se anulan ya que son funciones armónicas. El último término, dará a una función armónica, después de aplicar el laplaciano. Para la condición de frontera se necesitará la expresión completa (7.71)

$$u_\varepsilon = \frac{\pi r^{n^2+2} \cos n^2\theta}{8n(n^2+1)}. \tag{7.72}$$

En los Apéndices de esta tesis, se se pueden hallar a detalle los cálculos anteriores.

Finalmente, el frente de onda que es producido por la fuente con error es la suma de las dos soluciones u y u_ε

$$W_\varepsilon = \left[-\frac{1}{6} r^2 \cos 2\theta + \frac{1}{12} r^4 \cos 2\theta \right] + \left[-\frac{\pi r^{n^2} \cos n^2\theta}{8n(n^2+1)} - \frac{2\pi r^{n^2} \cos n^2\theta}{8n(n^2+1)n^2} + \frac{\pi r^{n^2+2} \cos n^2\theta}{8n(n^2+1)} \right]. \tag{7.73}$$

La reconstrucción correcta de W en presencia de algún error de la forma dada en el ejemplo 7.21, se aleja de la solución exacta para el caso sin error. Así, se probó con este ejemplo que considerar un error cercano a cero sin un pre-procesamiento de datos podría ser incorrecto pues aunque $\varepsilon(r, \theta) \to 0$ la diferencia entre el frente de onda exacto y su aproximación viene dada por:

$$W - W_\varepsilon = -\frac{\pi r^{n^2} \cos n^2\theta}{8n(n^2+1)} - \frac{2\pi r^{n^2} \cos n^2\theta}{8n(n^2+1)n^2} + \frac{\pi r^{n^2+2} \cos n^2\theta}{8n(n^2+1)}, \tag{7.74}$$

reorganizando términos y tomando la diferencia absoluta obtenemos

$$|W - W_\varepsilon| = \left| \frac{\pi r^{n2} \cos n^2\theta}{8n(n^2+1)} \left[-1 - \frac{2}{n^2} + r^2 \right] \right|, \tag{7.75}$$

que esta diferencia sea cercana a 0, dependerá de n, lo cual requiere un análisis antes de aplicar el método de solución. Para ilustrar, puede observarse en la Figura 7.6 que u_n presenta variaciones a medida que el valor de θ cambia, con $r = 1$ fijo (la gráfica conserva su forma al variar r, por lo que se eligió un radio arbitrarío). Atenuar a los términos que aparecen en(7.71) depende del propósito y exactitud que se requiera en los resultados.

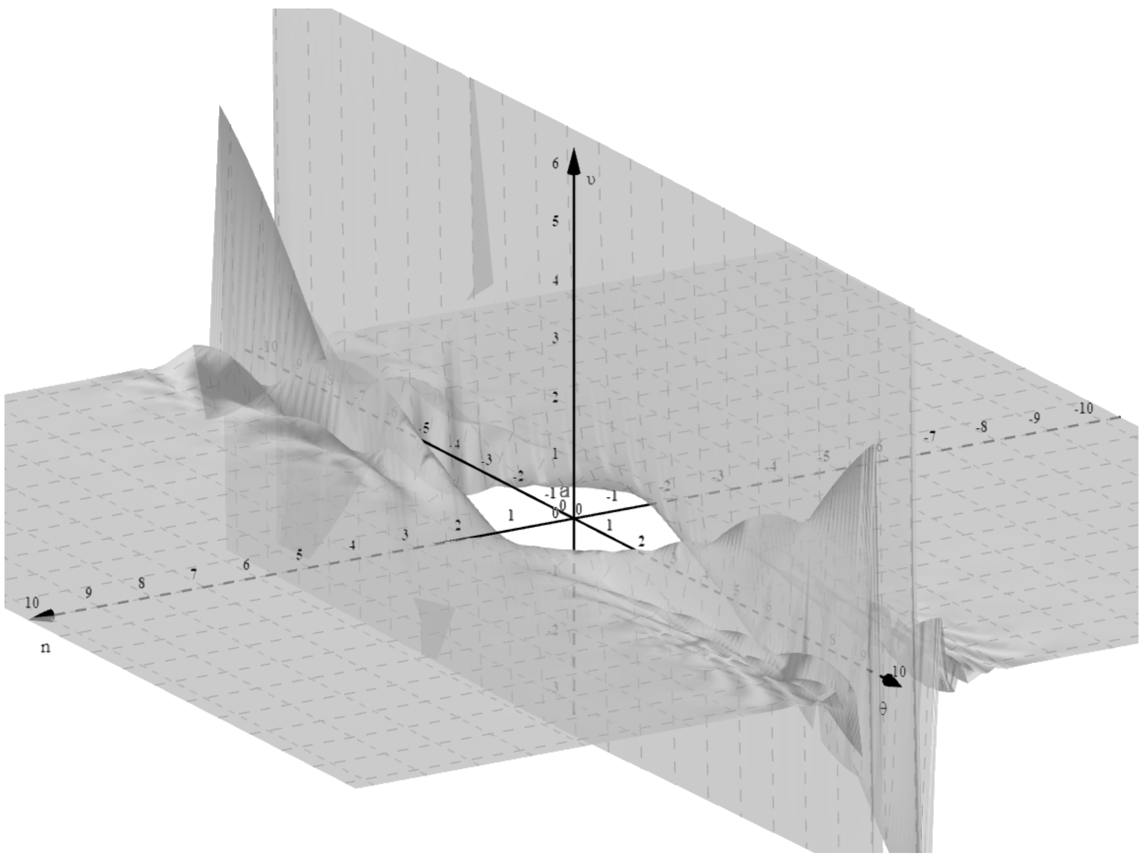

Figura 7.5: Gráfica de la ecuación (7.74), muestra la diferencia entre los frentes de onda W y W_ε con $r = 1$.

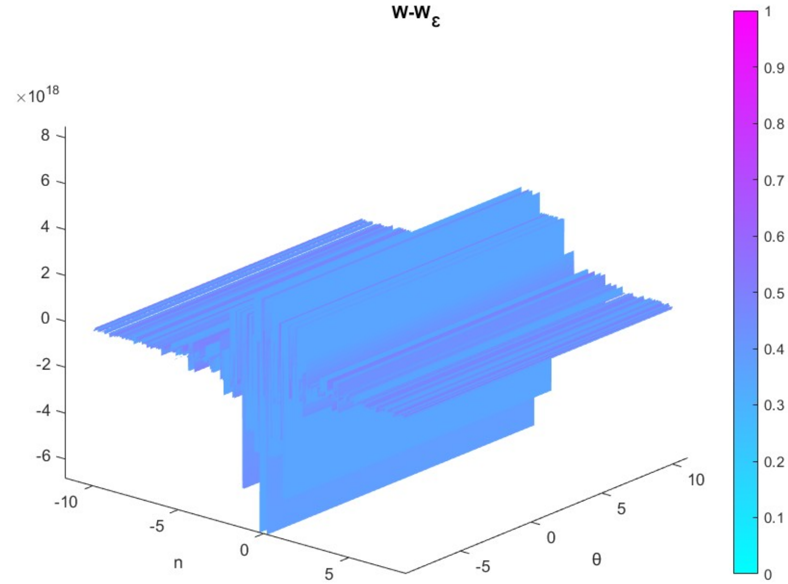

Figura 7.6: Otra vista de la gráfica de la ecuación (7.74) esta vez generada en MATLAB, muestra la diferencia entre los frentes de onda W y W_ε con $r = 1$.

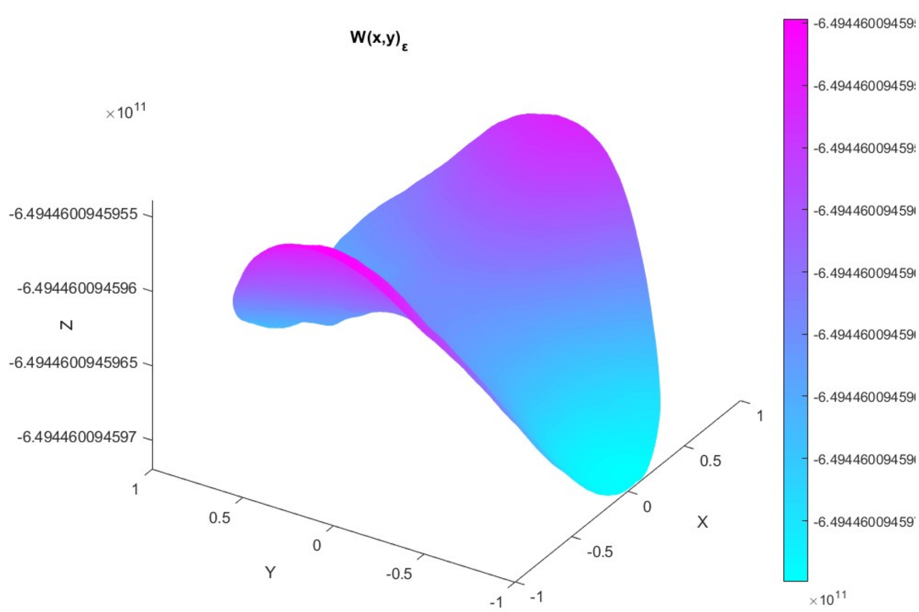

Figura 7.7: Gráfica del frente de onda con error W_ε Ec.(7.73) generada por MATLAB usando la herramienta PDETOOL, con n=3 puede observarse la deformación comparado con la Figura 6.2.

7.4. Generalización de resultados; análisis de una fuente exacta y una con error

Veamos ahora lo que ocurre entre la ecuación de Poisson de la ETI con una fuente exacta y una con error. Esto se podrá ver de manera directa utilizado la diferencia entre ambas fuentes y las correspondientes soluciones del problema de contorno. Tomemos entonces la ETI (en la forma de Poisson) exacta y su condición de frontera de Neumann nula:

$$\Delta u = f \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial n} = 0. \tag{7.76}$$

También tomemos una ETI (en la forma de Poisson) con un error que se comporta muy similar al del ejemplo descrito en la sección 7.3:

$$\Delta u_\varepsilon = f_\varepsilon \qquad\qquad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = 0, \tag{7.77}$$

donde $f_\varepsilon = f + \varepsilon$ ($\varepsilon = f_\varepsilon - f$). Al aproximar a 0 la diferencia entre f y f_ε, u también se aproximará a u_ε, esto es, si $\varepsilon \to 0$ entonces

$$u_\varepsilon \to u \tag{7.78}$$

de donde probaremos que

$$W_\varepsilon \to W. \tag{7.79}$$

La norma de ε está dada por

$$||\varepsilon||^2_{L_2(\Omega)} := \int_\Omega \varepsilon^2(x)dx, \qquad\qquad x \in \Omega. \tag{7.80}$$

Sustituyendo los resultados anteriores en (7.4), hallamos

$$\psi(x,y) = [I_z(x,y,z)]^{\frac{1}{2}} e^{\imath\phi(x,y)} = I^{\frac{1}{2}} exp(\imath kW), \tag{7.81}$$

para la fuente exacta y

$$\psi_\varepsilon(x,y) = (I+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} exp(\imath\phi_\varepsilon) = (I+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} exp(\imath kW_\varepsilon), \tag{7.82}$$

para la fuente con error.
Ambas ecuaciones se pueden expresar alternativamente como

$$I^{\frac{1}{2}} exp(\imath kW) = I^{\frac{1}{2}}[\cos kW + \imath \operatorname{sen} kW], \tag{7.83}$$

y

$$\begin{aligned}(I+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} exp(\imath kW_\varepsilon) = (I+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}&[\cos(kW+E) + \imath \operatorname{sen}(kW+E)] \\ (I+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\big[&\cos kW \cos E - \operatorname{sen} kW \operatorname{sen} E \\ &+ \imath \operatorname{sen} kW \cos E + \imath \cos kW \operatorname{sen} E\big]\end{aligned}, \tag{7.84}$$

donde E. Restando ambas ecuaciones hallamos

$$\begin{aligned}\psi - \psi_\varepsilon = {}& I^{\frac{1}{2}}[\cos kW + \imath \operatorname{sen} kW] \\ & - (I+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}[\cos kW \cos E - \operatorname{sen} kW \operatorname{sen} E + \imath \operatorname{sen} kW \cos E + \imath \cos kW \operatorname{sen} E]\end{aligned}. \tag{7.85}$$

Factorizando sen(kW) y cos(kW) se halla

$$\begin{aligned}\psi - \psi_\varepsilon = &\cos(kW)\left[I^{\frac{1}{2}} - (I+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\cos E - (I+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\imath\,\mathrm{sen}\,E\right]\\ &+\mathrm{sen}(kW)\left[\imath I^{\frac{1}{2}} + (I+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{sen}\,E - \imath(I+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\cos E\right],\end{aligned} \tag{7.86}$$

donde $E \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$. Se observa que, cuando $\epsilon \to 0$, se llega a que $\psi - \psi_\varepsilon \to 0$, de lo cual se concluye el resultado.

Veamos ahora que ocurre cuando tenemos errores en la intensidad y como estos se amplifican cuando se aplica el operador de diferenciación.

Ejemplo 4

De acuerdo a las ecuaciones planteadas en el ejemplo 1 ecuación (6.5), el lado derecho de la ecuación (fuente) está dado por

$$f(x,y,z) = (x^2 - y^2)z. \tag{7.87}$$

Consideremos un error sobre dicha fuente $f(x,y,z)$ dado en la forma:

$$f_n(x,y,z) = (x^2 - y^2)(z + \frac{1}{n}\cos(n^2 z)). \tag{7.88}$$

Podemos con estas ecuaciones analizar la diferencia que existe entre ellas para observar la cercanía o la lejanía entre las funciones

$$|f(x,y,z) - f_n(x,y,z)|. \tag{7.89}$$

Sustituyendo con las expresiones para las fuentes, y considerando que la función $\cos(n^2 z)$ solo puede tomar valores entre -1 y 1, la desigualdad se cumple

$$|(x^2-y^2)z - (x^2-y^2)(z + \frac{1}{n}\cos(n^2 z))| = |x^2 - y^2|\frac{1}{n}|\cos(n^2 z)| \leq |x^2-y^2|\frac{1}{n} \tag{7.90}$$

$$max_{(x,y)}|f(x,y,z) - f_n(x,y,z)| \leq max_{(x,y)}|x^2 - y^2|\frac{1}{n} = M\frac{1}{n}. \tag{7.91}$$

Así, cuando $n \to \infty$, $f_n \to f$. Ahora comparando la derivadas parciales de las fuentes respecto a z, se halla

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x^2 - y^2, \tag{7.92}$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial z}(x,y,z) = (x^2-y^2)n\,\mathrm{sen}(n^2 z). \tag{7.93}$$

Analizando la diferencia que existe entre ellas y considerando que la función sen$(n^2 z)$ solo toma valores entre -1 y 1, se obtiene,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f_n}{\partial z}\right| &= \left|x^2 - y^2 - (x^2-y^2)n\,\mathrm{sen}(n^2 z)\right|\\ &= (x^2-y^2)|1 - n\,\mathrm{sen}(n^2 z)|\\ &\leq (x^2-y^2)\left[|1| + |n\,\mathrm{sen}(n^2 z)|\right]\\ &\leq (x^2-y^2)[1+n]\end{aligned}. \tag{7.94}$$

A partir de los resultados obtenidos en las ecuaciones (7.91) y (7.94) se puede ver claramente que la diferencia entre las funciones depende directamente de n.

Para el caso de la ecuación (7.91) se puede establecer que la relación es inversamente proporcional a n porque a medida que n crece, las funciones se acercan, en otras palabras, para una n muy grande las funciones pueden considerarse iguales.

En el caso de la ecuación (7.94), se puede establecer una relación directamente proporcional entre el número n y el crecimiento en la diferencia entre las derivadas parciales de las funciones, es decir, que para una n muy grande comparada con $x^2 - y^2$ las funciones no estarán cercanas, por lo que $\frac{\partial f}{\partial z}$ distará mucho de $\frac{\partial f_n}{\partial z}$.

Vemos que si ponemos como lado derecho de la ecuación de Poisson a (7.92), obtenemos el ejemplo 6.1, es decir,

$$\Delta u(x, y) = x^2 - y^2, \tag{7.95}$$

por lo que $u(x, y)$, es el mismo que se halló en el ejemplo 6.1 (ecuación(6.3))

$$u(x, y) = \frac{1}{12}(x^4 - y^4) - \frac{1}{6}(x^2 - y^2). \tag{7.96}$$

De igual forma puede buscarse $u_n(x, y)$ que al aplicarle el Laplaciano transversal tenga como resultado a (7.93)

$$\Delta u_n(x, y) = (x^2 - y^2) n \operatorname{sen}(n^2 z). \tag{7.97}$$

Para ello, tomaremos como una constante $C = n \operatorname{sen}(n^2 z)$. De esta forma, al realizar los cálculos se puede ver que las parciales del laplaciano transversal no afectan a C ya que no tiene dependencia de ni de x ni de y. Además, tomaremos a (6.3) multiplicado por C y probaremos que es la solución $u_n(x, y)$ que buscamos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \cdot \left[n \operatorname{sen}(n^2 z) \left(\frac{1}{12}(x^4 - y^4) - \frac{1}{6}(x^2 - y^2)\right)\right] \tag{7.98}$$

$$\begin{aligned}
\Delta u_n(x, y) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \cdot \left[C \left(\frac{1}{12}(x^4 - y^4) - \frac{1}{6}(x^2 - y^2)\right)\right] \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{C}{12}(x^4 - y^4)\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{C}{12}(x^4 - y^4)\right) - \frac{C}{6}\vec{\nabla}^2(x^2 - y^2) \\
&= \frac{C}{12}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^4 - y^4) + \frac{C}{12}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^4 - y^4) - \frac{C}{6}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2 - y^2) - \frac{C}{6}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2 - y^2), \\
&= \frac{C}{12}\frac{\partial}{\partial x}4x^3 - \frac{C}{12}\frac{\partial}{\partial y}4y^3 - \frac{C}{6}\frac{\partial}{\partial x}2x + \frac{C}{6}\frac{\partial}{\partial y}2y \\
&= Cx^2 - Cy^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}
\end{aligned} \tag{7.99}$$

cambiando C por su valor original

$$\Delta u_n = (x^2 - y^2) n \operatorname{sen}(n^2 z), \tag{7.100}$$

que es exactamente la ecuación (7.93). Y la condición de frontera también se debe cumplir

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[n\,\text{sen}(n^2z)\left(\frac{1}{12}(x^4-y^4)-\frac{1}{6}(x^2-y^2)\right)\right], \tag{7.101}$$

sera conveniente cambiar a coordenadas polares

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[n\,\text{sen}(n^2z)\left(r^2\cos 2\theta\left(\frac{r^2}{12}-\frac{1}{6}\right)\right)\right]. \tag{7.102}$$

Y recordemos que la condición de frontera se establece en $r = R = 1$

$$\frac{\partial u_n}{\partial r} = n\,\text{sen}(n^2z)\left[r\cos 2\theta\left(\frac{r^2}{3}-\frac{1}{3}\right)\right] = 0. \tag{7.103}$$

De donde concluimos que

$$u_n(x,y) = n\,\text{sen}(n^2z)\left(\frac{1}{12}(x^4-y^4)-\frac{1}{6}(x^2-y^2)\right). \tag{7.104}$$

Para observar el efecto del error (que depende de n) sobre la solución del problema de valores en la frontera (7.104) y la cercanía (o no) a la función (7.96), que es la solución del problema de contorno para la fuente exacta, nuevamente tomamos la diferencia de las funciones

$$|u(x,y) - u_n(x,y)| = \tag{7.105}$$

$$= \left|\frac{1}{12}(x^4-y^4)-\frac{1}{6}(x^2-y^2) - n\,\text{sen}(n^2z)\left(\frac{1}{12}(x^4-y^4)-\frac{1}{6}(x^2-y^2)\right)\right| \tag{7.106}$$

$$= \left[\frac{1}{12}(x^4-y^4)-\frac{1}{6}(x^2-y^2)\right]\left|(1-n\,\text{sen}(n^2z)\right|. \tag{7.107}$$

Al igual que en los casos pasados, la función $\text{sen}(n^2z)$ solo puede tomar valores entre -1 y 1 por lo que

$$\left[\frac{1}{12}(x^4-y^4)-\frac{1}{6}(x^2-y^2)\right]\left|(1-n\,\text{sen}(n^2z)\right| \leq \left[\frac{1}{12}(x^4-y^4)-\frac{1}{6}(x^2-y^2)\right](1+n). \tag{7.108}$$

De la última desigualdad, se halla que cuando n crece, la solución u_n del problema para la fuente con error, se aleja de la solución u del problema para la fuente exacta. Esto es consecuencia de que si dos funciones están cercanas, las derivadas no necesariamente tienen que estarlo. De esto, se concluye que cuando $n \to \infty$ (muy grande) el error también tiende a ser muy grande, comparado con el resultado exacto ya que

$$\frac{1}{12}(x^4-y^4)-\frac{1}{6}(x^2-y^2) \ll n\,\text{sen}(n^2z)\left(\frac{1}{12}(x^4-y^4)-\frac{1}{6}(x^2-y^2)\right). \tag{7.109}$$

De aquí, se llega a que deben tratarse los datos antes de aplicar cualquier método de solución del problema de valores en la frontera, como ejemplo de este tratamiento de datos, se pueden desarrollar métodos, como el uso de diferencias centrales en la ETI [33].

Capítulo 8

Conclusiones

Como se vio en la introducción de esta tesis, los errores deben atenderse con cuidado ya que pueden llevar a encontrar resultados alejados de los que se deben obtener si no se tuvieran esos errores. Por ejemplo, la imprecisión de cálculos por redondeos o truncamientos de series, el error de la máquina, errores de medición pueden afectar los resultados esperados. Existen diferentes métodos para manejar los errores. La elección de estos para un problema específico, depende de la experiencia del investigador y este trabajo puede coadyuvar a clarificar los efectos de los errores para problemas similares a los presentados aquí, pues los métodos de solución y la exactitud esperada en los cálculos dependerá en gran medida del propósito de su investigación.

En este trabajo se comparó la solución exacta y las aproximaciones para la Ecuación de Transporte de Irradiancia (ITE por sus siglas en Inglés) cuando se tienen errores; esta comparación es apropiada para poder determinar si la mencionadas aproximaciones realmente están cercanas a la solución exacta y con ello, si son de utilidad o no. En el caso estudiado, se considero un frente de onda plano, lo que lleva a que la ETI se reduzca a la ecuación de Poisson. Es importante destacar que las condiciones de frontera para la ETI son fundamentales, pues si a una solución cualquiera se le agrega una función armónica, sigue siendo solución de la ecuación de Poisson de la ITE. Así, las condiciones de frontera permiten garantizar la unicidad. Esto es de gran interés cuando se intenta reconstruir la fase de las mediciones de Irradiancia pues como se vio en los ejemplos mencionados, funciones armónicas que en un principio parece que no aportan nada, pueden ayudar a cumplir la condición de frontera.
Es de gran ayuda representar funciones en una gráfica, pues algunos resultados, debido a la cantidad de términos que pueden llegar a tener, no son fáciles de visualizar. Los datos nos ayudan a entender mejor la naturaleza de un fenómeno. Por ello, se graficaron las expresiones más importantes, como las presentadas en las Figuras 7.1 y 7.2 de donde se observó que la derivada de una función no necesariamente debe estar cercana a su función, lo que permitió construir los ejemplos que ilustran como los errores pueden afectar a la solución si estos no son tratados adecuadamente.

En el Capítulo 7 de Resultados, se presentaron condiciones bajo las cuales un error puede ocasionar resultados inesperados. Para ello, se realizó el análisis matemático y se aplicaron métodos de solución a ITE. En los ejemplos 7.2 y 7.4, se mostró la relación directa entre los errores y los efectos en los resultados, pues al aplicar los métodos de solución nos permitió estimar la diferencia, en términos de un parámetro n, entre la solución para datos exactos y la solución para datos con error.

El análisis de la ETI para el caso con un error fue implementado a partir del caso para datos sin error. Se propuso una función error cercana a la función nula pero que su consiguiente derivada presenta fluctuaciones relacionadas directamente al parámetro n mencionado arriba. Esto generó dos frentes de onda diferentes. Más aún, se llegó a que esta diferencia en los frente de onda está en términos del parámetro n y por supuesto de θ, como se observa en la Figura 7.6. De esto, se ilustró que los errores pueden producir resultados muy alejados del exacto y en casos como el desarrollado aquí, se debe hacer pre-procesamiento de datos.

Apéndice A

Solución al problema propuesto para el ejemplo 1 y 2, Capitulo 6.1

Se resolverá el siguiente problema de valores en la frontera por el metodo de separación de variables, esta solución es valida para Dirichlet y para Neumann:

$$\Delta u(x,y) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \tag{A.1}$$

$$u(x,y) = f(x,y) \quad \text{en} \quad \partial\Omega. \tag{A.2}$$

Supongamos que u es armónica:

$$\Delta(\Delta u) = \Delta^2 u \Rightarrow \Delta f = 0. \tag{A.3}$$

Así u tiene la siguiente forma:

$$u_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \cos k\theta + b_k r^k \operatorname{sen} k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^{k+2} \cos k\theta + d_k r^{k+2} \operatorname{sen} k\theta, \tag{A.4}$$

aplicando el laplaciano e igualando a f por la Ec.(A.3):

$$\Delta u_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta(a_k r^k \cos k\theta) + \Delta(b_k r^k \operatorname{sen} k\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta(c_k r^{k+2} \cos k\theta) + \Delta(d_k r^{k+2} \operatorname{sen} k\theta) = f, \tag{A.5}$$

donde la primer sumatoria tiene forma armónica por lo que el laplaciano es 0 (probado en la Ec.(7.41)), y f tiene la siguiente forma:

$$\Delta u_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Delta(r^{k+2} \cos k\theta) + d_k \Delta(r^{k+2} \operatorname{sen} k\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^1 r^k \cos k\theta + f_k^2 r^k \operatorname{sen} k\theta = f, \tag{A.6}$$

y el laplaciano para los términos que acompañan a c_k y d_k se calcula como:

$$\begin{aligned}\Delta(r^{k+2} \cos k\theta) &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^{k+2} \cos k\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^{k+2} \cos k\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(r^{k+2} \cos k\theta) \\ &= (k+2)(k+1) r^k \cos k\theta + (k+2) r^k \cos k\theta - k^2 r^k \cos k\theta \\ &= (4k+4) r^k \cos k\theta,\end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}\Delta(r^{k+2} \operatorname{sen} k\theta) &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^{k+2} \operatorname{sen} k\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r}(r^{k+2} \operatorname{sen} k\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(r^{k+2} \operatorname{sen} k\theta) \\ &= (k+2)(k+1) r^k \operatorname{sen} k\theta + (k+2) r^k \operatorname{sen} k\theta - k^2 r^k \operatorname{sen} k\theta \\ &= (4k+4) r^k \operatorname{sen} k\theta,\end{aligned} \tag{A.8}$$

el calculo del coeficiente c_k se obtiene igualando las ecuaciones anteriores y agrupando por factor común a cos y sen:

$$\Delta u(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(4k+4)r^k \cos k\theta + d_k(4k+4)r^k \operatorname{sen} k\theta = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^1 r^k \cos k\theta + f_k^2 r^k \operatorname{sen} k\theta = f, \quad (A.9)$$

dado la igualdad de la ecuación anterior, los términos que acompañan a sen y cos deben ser iguales:

$$\begin{aligned} (4k+4)c_k &= f_k^1 \\ c_k &= \frac{f_k^1}{(4k+4)}, \end{aligned} \quad (A.10)$$

de manera similar para d_k:

$$d_k = \frac{f_k^2}{(4k+4)}. \quad (A.11)$$

Para encontrar los coeficientes a_k y b_k, usaremos la condición de frontera del problema, tomamos la derivada de u e igualamos a 0:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial}{\partial r}\left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \cos k\theta + b_k r^k \operatorname{sen} k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^{k+2} \cos k\theta + d_k r^{k+2} \operatorname{sen} k\theta\right] = 0 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k k r^{k-1} \cos k\theta + b_k k r^{k-1} \operatorname{sen} k\theta \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} c_k (k+2) r^{k+1} \cos k\theta + d_k (k+2) r^{k+1} \operatorname{sen} k\theta, \end{aligned} \quad (A.12)$$

factorizando los términos iguales y evaluando en $r = R$, se encuentra

$$\left.\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r}\right|_{r=R} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k R^{k-1} c_k (k+2) R^{k+1} \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} b_k k R^{k-1} d_k (k+2) R^{k+1} \operatorname{sen} k\theta = 0, \quad (A.13)$$

lo que nos lleva a los siguientes sistemas, pues por separado el valor de las sumatorias es 0

$$a_k k R^{k-1} + c_k(k+2)R^{k+1} = 0, \quad (A.14)$$

$$b_k k R^{k-1} + d_k(k+2)R^{k+1} = 0. \quad (A.15)$$

Despejando a_k, obtenemos:

$$a_k = -\frac{(k+2)R^{k+1}}{kR^{k-1}} c_k, \quad (A.16)$$

al sustituir c_k

$$a_k = -\frac{(k+2)R^2}{4k(k+1)} f_k^1. \quad (A.17)$$

De igual forma obtenemos b_k:

$$b_k = -\frac{(k+2)R^2}{4k(k+1)} f_k^2, \quad (A.18)$$

de donde f_k^1 se calcula por definición como:

$$\begin{aligned} f_k^1 &= \langle f(r,\theta), r^k \cos k\theta \rangle \\ &= \int_{\Omega} f(r,\theta), r^k \cos(k\theta) d\Omega, \end{aligned} \quad (A.19)$$

esto es:

$$\begin{aligned}
&= \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cos(2\theta) r^k \cos(k\theta) r dr d\theta \\
&= \int_0^R r^{k+3} dr \int_0^{2\pi} \cos(2\theta)\cos(k\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{k+4} R^{k+4} \int_0^{2\pi} \cos(2\theta)\cos(k\theta) d\theta,
\end{aligned} \tag{A.20}$$

y usando la Ec.(7.47), la integral se transforma para $k \neq 2$ en:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos(2\theta)\cos(k\theta) d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos((k+2)\theta) + \cos((k-2)\theta)) d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k+2}\operatorname{sen}((k+2)\theta) + \frac{1}{k-2}\operatorname{sen}((k-2)\theta)\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k+2}\operatorname{sen}((k+2)2\pi) + \frac{1}{k-2}\operatorname{sen}((k-2)2\pi)\right] \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{A.21}$$

y para $k = 2$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos(2\theta)\cos(2\theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos^2(2\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(4\theta)}{2} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\theta\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4\theta)\Big|_0^{2\pi} \\
&= \pi.
\end{aligned} \tag{A.22}$$

De aquí obtenemos dos valores:

$$f^1_{k\neq 2} = 0 \qquad \text{y} \qquad f^1_2 = 1 \tag{A.23}$$

de donde f^2_k se calcula de manera similar a f^1_k como

$$\begin{aligned}
f^2_k &= \langle f(r,\theta), r^k \operatorname{sen} k\theta \rangle \\
&= \int_\Omega f(r,\theta), r^k \operatorname{sen}(k\theta) d\Omega,
\end{aligned} \tag{A.24}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cos(2\theta) r^k \operatorname{sen}(k\theta) r dr d\theta \\
&= \int_0^R r^{3+k} dr \int_0^{2\pi} \cos(2\theta)\operatorname{sen}(k\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{k+4)} R^{k+4} \int_0^{2\pi} \cos(2\theta)\operatorname{sen}(k\theta) d\theta.
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Para resolver la integral usaremos la suma de identidades descrita en Ec.(7.56), para $k \neq 2$:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos(2\theta)\operatorname{sen}(k\theta)d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}((k+2)\theta) + \operatorname{sen}((k-2)\theta))d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{k+2}cos((k+2)\theta) - \frac{1}{k-2}cos((k-2)\theta)\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{k+2}cos((k+2)2\pi) - \frac{1}{k-2}cos((k-2)2\pi)\right] \\ &= 0.\end{aligned} \tag{A.26}$$

Para $k = 2$,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos(2\theta)\operatorname{sen}(2\theta)d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos(2\theta)\operatorname{sen}(2\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} udu \\ &= \frac{1}{2k}\operatorname{sen}^2(2\theta)\Big|_0^{2\pi} \\ &= 0.\end{aligned} \tag{A.27}$$

Por tanto:

$$f_k^2 = 0 \quad \forall k, \tag{A.28}$$

ahora usando los valores numéricos de f_k^n obtenemos el valor de c_k Ec.(A.10) para $k = 2$:

$$c_2 = \frac{1}{12}f_2^1 = \frac{1}{12}, \tag{A.29}$$

de igual forma para a_k Ec.(A.17) con $k = 2$:

$$a_2 = -\frac{1}{6}R^2 f_2^1 = -\frac{R^2}{6}, \tag{A.30}$$

mientras que para b_k y d_k, dado que $f_k^2 = 0$ para todo k y de la Ec.(A.11) y Ec. (A.18) tenemos que:

$$d_k = 0 \qquad b_k = 0, \tag{A.31}$$

así usando la Ec.(A.4) y sustituyendo los coeficientes obtenemos a u:

$$\begin{aligned}u(r,\theta) &= a_2 r^2\cos(2\theta) + c_2 r^4 cos(2\theta) \\ &= -\frac{1}{6}r^2\cos(2\theta) + \frac{1}{12}r^4 cos(2\theta).\end{aligned} \tag{A.32}$$

Y con el cambio de coordenadas a rectangulares (probado en las Ec. (6.9)) obtenemos la solución al problema de contorno:

$$u(x,y) = \frac{1}{12}(x^4 - y^4) - \frac{1}{6}(x^2 - y^2). \tag{A.33}$$

Apéndice B

Comprobación del resultado para el ejemplo 7.3

Aplicando el laplaciano al resultado en la ecuación (7.72), obtenemos

$$
\begin{aligned}
\Delta\left[\frac{\pi r^{n^2+2}\cos n^2\theta}{8n(n^2+1)}\right] &= \frac{(n^4+3n^2+2)[\pi r^{n^2}\cos(n^2\theta)]}{8n(n^2+1)} \\
&+ \frac{(n^2+2)[\pi r^{n^2}\cos(n^2\theta)]}{8n(n^2+1)} \\
&- \frac{n^4[\pi r^{n^2}\cos(n^2\theta)]}{8n(n^2+1)},
\end{aligned} \tag{B.1}
$$

factorizando las tres ecuaciones se tiene

$$
\begin{aligned}
&= \pi r^{n^2}\cos(n^2\theta)\frac{n^4+3n^2+2+n^2+2-n^4}{8n(n^2+1)} \\
&= \pi r^{n^2}\cos(n^2\theta)\frac{4(n^2+1)}{8n(n^2+1)} \\
&= \pi r^{n^2}\cos(n^2\theta)\frac{1}{2n},
\end{aligned} \tag{B.2}
$$

recordemos que el resultado que buscamos es cuando se tiene un n grande, por lo que podemos aproximar $\pi/2 \approx 1$, el resultado se transforma en la ecuación que buscamos

$$
\approx \frac{r^n}{n}\cos(n^2\theta). \tag{B.3}
$$

Y para la condición de frontera tenemos de (7.71) lo siguiente

$$
\frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{\pi n^2 r^{n^2}\cos n^2\theta}{(4n^4+4n^2)(2n^3+2n)} - \frac{2\pi r^{n^2}\cos n^2\theta}{(4n^4+4n^2)(2n^3+2n)} + \frac{\pi r^{n^2+2}\cos n^2\theta}{(4n^2+4)(2n^3+2n)}\right] \tag{B.4}
$$

$$
= -\frac{\pi n^2 r^{n^2-1}\cos n^2\theta}{8n(n^2+1)} - \frac{2\pi r^{n^2-1}\cos n^2\theta}{8n(n^2+1)} + \frac{\pi n^2 r^{n^2+1}\cos n^2\theta}{8n(n^2+1)} + \frac{2\pi r^{n^2+1}\cos n^2\theta}{8n(n^2+1)}, \tag{B.5}
$$

pero recordemos la condición de frontera esta definida en $r = R = 1$

$$
= -\frac{\pi n^2\cos n^2\theta}{8n(n^2+1)} - \frac{2\pi\cos n^2\theta}{8n(n^2+1)} + \frac{\pi n^2\cos n^2\theta}{8n(n^2+1)} + \frac{2\pi\cos n^2\theta}{8n(n^2+1)} = 0 \tag{B.6}
$$

Lo que concluye el resultado.

Bibliografía

[1] Michael Reed Teague. Deterministic phase retrieval: a green's function solution. *Journal of the Optical Society of America,*, 73(11):1434–1441, 1983.

[2] Jesús Alonso Arriaga Hernández. *Aplicaciones de la Ecuación de Transporte de Irradiancia (ETI), en Metrología Óptica*. PhD thesis, INAOE, Tonantzintla, Puebla, Septiembre 2017.

[3] Jesús Alonso Arriaga Hernández, F Granados-Agustín, and A Cornejo Rodríguez. Measurement of three-dimensional wavefronts using the ichikawa–lohmann–takeda solution to the irradiance transport equation. *Applied Optics*, 57(15):4316–4321, 2018.

[4] Daniel Malacara. *Optical shop testing*, volume 59. John Wiley & Sons, 2007.

[5] Francois Roddier. Wavefront sensing and the irradiance transport equation. *Applied optics*, 29(10):1402–1403, 1990.

[6] Claude Roddier and François Roddier. Wave-front reconstruction from defocused images and the testing of ground-based optical telescopes. *JOSA A*, 10(11):2277–2287, 1993.

[7] Ramin Shomali, Ahmad Darudi, and Sadollah Nasiri. Application of irradiance transport equation in aspheric surface testing. *Optik*, 123(14):1282–1286, 2012.

[8] Jesús Alonso Arriaga Hernandez, BT Otahola Cuevas, J Oliveros Oliveros, and M Castillo Morin. Tikhonov regularization method to analyze the aberrations in the wavefront determination using the irradiance transport equation. In *Imaging Systems and Applications*, pages JTh2A–38. Optica Publishing Group, 2020.

[9] James R Fienup. Phase retrieval algorithms: a comparison. *Applied optics*, 21(15):2758–2769, 1982.

[10] Kazuichi Ichikawa, Adolf W Lohmann, and Mitsuo Takeda. Phase retrieval based on the irradiance transport equation and the fourier transform method: experiments. *Applied optics*, 27(16):3433–3436, 1988.

[11] Dennemeyer Rene. *Introduction to Partial Differential Equations and Boundary Value Problems*. McGraw-Hill Book Company, inc., 1° edition, 1968.

[12] Augusto Beléndez et al. Óptica: Teorías sobre la luz, en el «año internacional de la luz 2015». https://blogs.ua.es/fisicateleco/2015/01/06/optica-teorias-sobre-la-luz/, 2015. Accedido en julio de 2023.

[13] Eugene Hecht. *Óptica*. Pearson Education S.A, 5° edition, 2015.

[14] Otto de Greiff. Diálogo sobre la historia de la física. *Revista de las Fuerzas Armadas*, (40-41):111–117, 1966.

[15] NASA. Mars polar lander/deep space 2. https://mars.nasa.gov/mars-exploration/missions/polar-lander/, 2000. Accedido en mayo de 2023.

[16] NASA. Mariner 1. https://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/spacecraft/display.action?id=MARIN1, Version 5.1.15, 28 October 2022. Accedido en mayo de 2023.

[17] Peter G Neumann. Risks to the public in computers and related systems. *ACM SIGSOFT Software Engineering Notes*, 20(2):7–13, 1995.

[18] David Cruise and Alison Griffiths. *Fleecing the Lamb: The Inside Story of the Vancouver Stock Exchange*. Penguin, 1991.

[19] Ignacio Algredo-Badillo, José Julio Conde-Mones, Carlos Arturo Hernández-Gracidas, María Monserrat Morín-Castillo, José Jacobo Oliveros-Oliveros, and Claudia Feregrino-Uribe. An fpga-based analysis of trade-offs in the presence of ill-conditioning and different precision levels in computations. *Plos one*, 15(6):1–26, 2020.

[20] Barbosa Y. Mejía. El frente de onda y su representación con polinomios de zernike. *Ciencia y Tecnología para la Salud Visual y Ocular*, 9:145–166, 2011.

[21] Jr Crawford et al. *Ondas (Berkeley Physics Course)*. Reverté, 3° edition, 2012.

[22] John R Reitz et al. *Fundamentos de la teoría electromagnética*. Addison-Wesley Iberoamericana, 4° edition, 1996.

[23] David Halliday et al. *Fundamentos de física*, volume 2. Grupo Editorial Patria S.A de C.V., 8° edition, 2008.

[24] John H Mathews, Kurtis D Fink, et al. *Numerical methods using MATLAB*. Pearson prentice hall Upper Saddle River, NJ, 3° edition, 1999.

[25] Barry N Taylor, Chris E Kuyatt, et al. *Guidelines for evaluating and expressing the uncertainty of NIST measurement results*, volume 1297. US Department of Commerce, Technology Administration, National Institute of ..., 1994.

[26] Antonio Miguel Ruiz Armenteros, José Luis García Balboa, and José Luis Mesa Mingorance. Error, incertidumbre, precisión y exactitud, términos asociados a la calidad espacial del dato geográfico. In *Catastro: formación, investigación y empresa: Selección de ponencias del I Congreso Internacional sobre catastro unificado y multipropósito*, pages 95–102, 2010.

[27] International Organization for Standardization/International Electrotechnical Commission et al. Guide 98-3: Uncertainty of measurement, part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement. *(No Title)*, 2008.

[28] Ruel Vance Churchill et al. *Fourier series and boundary value problems*. McGraw-Hill book company, inc., 8° edition, 1941.

[29] Alonso Ireneo Peral. *Primer curso de ecuaciones en derivadas parciales*. Universidad Autónoma de Madrid, Departamento de Matemáticas, 2° edition, 2004.

[30] Sergeui Lvovich Sobolev. *Partial differential equations of mathematical physics*, volume 56. Courier Corporation, 1964.

[31] M Campos-García and R Díaz-Uribe. Irradiance transport equation from geometrical optics considerations. *Revista mexicana de física*, 52(6):546–549, 2006.

[32] George Brinton Thomas and Maurice D Weir. *Cálculo: una variable*. Pearson Educación, 12° edition, 2010.

[33] Angel Eugenio Martinez Rodriguez, Manuel Campos García, FS Granados Agustín, and C Vargas-Alfredo. Aberration patterns in the optical testing surfaces using transport of intensity equation. *Revista Mexicana de Física*, 68(1 Jan-Feb):011301–1, 2022.