

CYNTHIA COTTO PARRAGUIRRE

INVARIANTES GRAVITACIONALES E
INVARIANTES DE CAMPO

AGUJERO NEGRO TIPO LIFSHITZ DE LA TEORÍA DE
EINSTEIN-MAXWELL-DILATON COMO CASO DE ESTUDIO



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

INVARIANTES GRAVITACIONALES E INVARIANTES DE CAMPO
AGUJERO NEGRO TIPO LIFSHITZ DE LA TEORÍA DE
EINSTEIN-MAXWELL-DILATON COMO CASO DE ESTUDIO

Tesis presentada al

COLEGIO DE FÍSICA

Como requisito para la obtención del grado de

LICENCIADA EN FÍSICA

por

CYNTHIA COTTO PARRAGUIRRE

Asesorada por

DR. DANIEL FERNANDO HIGUITA BORJA

PUEBLA DE ZARAGOZA, MÉXICO

JUNIO 2021

Cynthia Cotto Parraguirre : *Invariantes Gravitacionales e Invariantes de Campo* , agujero negro tipo Lifshitz de la teoría de Einstein-Maxwell-Dilaton como caso de estudio, © Junio 2021

Ohana means family.
jjjgjf

Dedicated to the loving memory
1939 – 2005

RESUMEN

En la presente tesis se realiza la variación de la acción de la teoría de Einstein-Maxwell-Dilaton con todo detalle, se calcula el tensor de Riemann para un ansatz tipo Lifshitz en cualquier dimensión y se procede a calcular los invariantes gravitacionales Kretschmann, cuadrado de Ricci y escalar de curvatura. Dichos invariantes se evalúan en los agujeros negros de Taylor que es soportados por un campo escalar y un campo de Maxwell. Además procedemos a calcular el invariante independiente del Electromagnetismo: $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

ÍNDICE GENERAL

1	INTRODUCCIÓN	1
2	VARIACIÓN	5
2.1	Presentación Solución de Marika Taylor	9
3	INVARIANTES DE CURVATURA	11
3.1	Tensor de Riemann	11
3.2	Tensor de Ricci	12
3.3	Cuadrado del Ricci	13
3.4	Escalar de Curvatura	14
3.5	Escalar de Kretschmann	15
4	INVARIANTES DE CAMPO	17
5	CONCLUSIONES	19
	BIBLIOGRAFÍA	21

INTRODUCCIÓN

Desde su presentación en 1915, la relatividad general ha constituido un cambio de paradigma en la manera como entendemos la gravedad en física clásica [3-7] y un desafío en sus intentos, aún inconclusos, de tener una gravedad cuántica. Descrita como la dinámica del espaciotiempo, se encarga de determinar la distancia entre puntos de una variedad diferenciable que se codifican en un objeto tensorial simétrico de rango 2 denominado métrica $g_{\mu\nu}$

*Acción de
Einstein-Hilbert*

$$S[g_{\mu\nu}] = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R - 2\lambda}{2\kappa} \right], \quad (1.1)$$

donde R representa el escalar de curvatura construido como la doble traza del tensor de curvatura del espaciotiempo, el Riemann $R^{\mu}_{\alpha\nu\beta}$, y λ representa la constante cosmológica. La variación de la acción (2.2) resulta en un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden para la métrica que, en general, es difícil de resolver

$$G_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad \text{con} \quad G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

En 1916 Karl Schwarzschild dió la primera solución al sistema de ecuaciones (1.2) –sin constante cosmológica– en el caso estático y esféricamente que, en honor al físico alemán, se conoce como la métrica de Schwarzschild [17]

*Métrica de
Schwarzschild*

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.3)$$

donde $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$ representa la 2-esfera. La métrica (1.3) tiene un horizonte de eventos en $r = 2M$ y una singularidad física en $r = 0$. Posteriores esfuerzos permitieron demostrar que *cualquier solución de vacío esféricamente simétrica debe ser estática y por tanto debe ser Schwarzschild*. Dicho resultado de unicidad se conoce como *Teorema de Birkhoff*, construido en 1921 por [Jebsen](#) [10] e independientemente por [Birkhoff y Langer](#) [1] en 1923.

La generalización rotante de la métrica de Schwarzschild tomó más de media década en construirse hasta que fue presentada por [Kerr](#) [12] en 1963

Métrica de Kerr

$$ds^2 = - \frac{\Delta}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} (adt - (r^2 + a^2)d\phi)^2 + \frac{\Sigma dr^2}{\Delta} + \Sigma d\theta^2, \quad (1.4)$$

donde $\Delta = r^2 + a^2 - 2rM$, $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, M representa la masa de la configuración y $J \equiv aM$ representa el momento angular. La métrica (1.4) tiene un horizonte de eventos en $r = M + \sqrt{M^2 - a^2}$ y la famosa *singularidad de anillo* $\Sigma = 0$. Posteriormente se intentó demostrar su *unicidad* llevando a lo que se conoce como el **Teorema de no pelo**: *Si (\mathcal{M}, g) representa un espaciotiempo asintóticamente plano, estacionario y axisimétrico que es solución de vacío de las ecuaciones de Einstein (1.2) –sin constante cosmológica– y que es regular fuera y sobre el horizonte de eventos, entonces (\mathcal{M}, g) debe corresponder a la familia de métricas de Kerr (1.4) caracterizadas sólo por la masa M y el momento angular J [2].*

Como destacamos, las configuraciones que hemos descrito se caracterizan por tener horizonte de eventos (*superficie atrapada*) y *singularidad*, una peculiaridad que plaga las teorías gravitacionales. Claro está que las singularidades físicas constituyen un impedimento para que las configuraciones se realicen en la naturaleza y en algún sentido indican que la descripción física del sistema debe cambiarse, por lo menos en ciertas regiones del espaciotiempo. Sin embargo cabe notar que para las métricas (1.3) y (1.4) las *singularidades* se ubican dentro del horizonte de eventos y en algún sentido *se encuentran “vestidas” por el horizonte de eventos*. Éstas observaciones fueron formalizadas por Penrose, Hawking y otros, basado en resultados anteriores [19], en los denominados **Teoremas de Singularidad** [16]: *Si un espaciotiempo (\mathcal{M}, g) satisface*

Teorema de
Singularidad de
Penrose

- i. *la condición débil de la energía (para la congruencia geodésica nula u^μ , $T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0$),*
- ii. *la existencia de una superficie de Cauchy Σ_t , no compacta [espaciotiempo globalmente hiperbólico no compacto],*
- iii. *la existencia de superficies cerrada atrapada [horizonte de eventos],*

entonces se tiene incompletitud geodésica nula (singularidad). Aunque a primera vista parecería que las condiciones del teorema son bastante exóticas y/o excesivas, en realidad son bastante estandar:

- i. *Materia razonable con densidad de energía positiva sobre los rayos de luz.*
- ii. *Espaciotiempos que resulta del desarrollo de las condiciones impuestas en Σ_t a través de ecuaciones hiperbólicas bien definidas, lo que nos permite tener *predictibilidad* .*
- iii. *Existencia de agujeros negros.*

Genéricamente se satisfacen las condiciones (i)-(iii) por lo que *las singularidades constituyen una realidad casi inevitable en configuraciones gravitacionales*. El comité nobel reconoce dicho teorema como fundamental para considerar a Sir. Roger Penrose parte de los ganadores del Premio Nobel de Física del año 2020 [18].

Surge la preocupación del significado físico de espaciotiempos que genéricamente tienen singularidades. Sin embargo llega al rescate, de la mano del mismo Penrose, **la conjetura de censura cósmica**[15]: *las singularidades siempre se ubican dentro de un horizonte de eventos y por tanto no pueden ser observadas desde infinito*. Es así que físicamente resulta relevante caracterizar si las singularidades físicas se encuentran dentro o fuera del horizonte de evento. Para evitar singularidades coordenadas y capturar esencialmente singularidades físicas trabajamos con invariantes, tanto geométricos como de campos, y verificamos que no sean irregulares tanto fuera como sobre el horizonte de eventos de modo que si resultan irregulares tenemos singularidades desnudas. Sin embargo debemos enfatizar que la regularidad de los invariantes no caracteriza la singularidad[19], definida como incompletitud geodésica[9].

Invariantes

Aunque se tiene un gran catálogo de soluciones exactas de vacío a la relatividad general[20], las cosas cambian drásticamente cuando consideramos campos de materia que viven en el espaciotiempo. Los teoremas de *unicidad* descritos anteriormente pierden validez y el catálogo de soluciones se enriquece aún más. La interacción entre la métrica y la materia definen la forma en que cada uno de ellos se comporta: como se mueve la materia y como se deforma el espaciotiempo, abriendo una ventana de posibilidades en que diferentes configuraciones de campos pueden coexistir. Existen diversas formas en que el espaciotiempo y la materia pueden interactuar, siendo de particular interés la teoría de Einstein-Maxwell-Dilaton porque puede obtenerse como un límite de bajas energías de la teoría de cuerdas en 4 dimensiones [8]

Acción de Einstein-Maxwell-Dilaton

$$S[g_{\mu\nu}, \Phi, A_\mu] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R - 2\lambda}{2\kappa} - \frac{1}{2} \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi - \frac{1}{4} e^{-b\Phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \quad (1.5)$$

donde Φ representa un campo escalar denominado Dilatón y $F_{\mu\nu} \equiv 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}$ representa el tensor de Faraday asociado al campo de Maxwell A_μ .

Diversas configuraciones de campos se han encontrado en dicha teoría y en años recientes se descubrió que soporta agujeros negros asintóticamente Lifshitz [21]

$$ds^2 = - \left(\frac{r}{l} \right)^{2z} f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(\frac{r}{l} \right)^2 f(r)} + \left(\frac{r}{l} \right)^2 d\vec{x}^2, \quad (1.6)$$

donde $f(r)$ representa el único potencial gravitacional despierto en el *ansatz*, sujeto a la condición de frontera $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 1$. Los espaciotiempos Lifshitz

$$ds^2 = - \left(\frac{r}{l}\right)^{2z} dt^2 + \frac{dr^2}{\left(\frac{r}{l}\right)^2} + \left(\frac{r}{l}\right)^2 d\vec{x}^2, \quad (1.7)$$

han despertado recientemente interés en el marco de la correspondencia Holográfica al entenderse como duales gravitacionales de teorías cuánticas de campos que no son invariantes de Lorentz[11]. La razón por la que se rompe la covarianza general es que resulta invariante ante el escalamiento anisotrópico D_z :

$$t \mapsto \lambda^z t, \quad r \mapsto \frac{r}{\lambda}, \quad x_k \mapsto \lambda x_k, \quad (1.8)$$

además de los corrimientos en las coordenada espaciales y la temporal y las rotaciones espaciales:

$$\begin{aligned} H : \quad t &\longrightarrow t' = t + a; \\ P^i : \quad x^i &\longrightarrow x'^i = x^i + a^i; \\ L^{ij} : \quad x^i &\longrightarrow x'^i = L_j^i x^j. \end{aligned} \quad (1.9)$$

La simetría entre tiempo y espacio se rompe a través del parámetro extra z , denominado exponente crítico dinámico.

El objetivo de la presente tesis es caracterizar si los agujeros negros asintóticamente Lifshitz reportados en [21] para la teoría de Einstein-Maxwell-Dilaton tienen singularidades desnudas “evidentes”. Ésto es, *singularidades identificables desde invariantes gravitacionales o de campo que se encuentren fuera o sobre el horizonte de eventos*. Para ello en el **capítulo 2** revisamos la teoría de Einstein-Maxwell-Dilaton, realizamos detalladamente la variación de la acción, obtenemos las ecuaciones de movimiento y describimos las configuraciones tipo agujero negro Lifshitz encontradas por Taylor en [21]. En el **capítulo 3**, para un *ansatz* métrico tipo Lifshitz, calculamos algunos invariantes geométricos relevantes: *Kretschmann*, *cuadrado del Ricci* y *escalar de curvatura*. Los evaluamos en la solución de Taylor y determinamos si son irregulares fuera ó sobre su horizonte de eventos. Finalmente, en el **capítulo 4**, hacemos algo parecido para los dos invariantes independientes del Electromagnetismo: $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

VARIACIÓN

Variamos la acción para obtener las ecuaciones de campo. La acción Einstein-Maxwell-Dilaton tiene soluciones a espacio-tiempo tipo Lifshitz.

Acción Einstein-Maxwell-Dilaton

$$S[g_{\mu\nu}, \Phi, A_\mu] = \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{R-2\lambda}{2\kappa} - \frac{1}{2} \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi - \frac{1}{4} e^{-b\Phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \quad (2.1)$$

donde ϕ es el campo escalar y definimos el campo de fuerza como $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Para facilitar los cálculos dividimos la acción en dos partes. La primera parte Einstein-Hilbert:

Einstein-Hilbert

$$S[g_{\mu\nu}] = \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{R-2\lambda}{2\kappa} \right] \quad (2.2)$$

Variando Einstein-Hilbert con respecto a g , δ_g tenemos:

Variación Einstein-Hilbert

$$\begin{aligned} \delta_g S_{EH} &= \int d^D x \left[\left(\frac{R-2\lambda}{2\kappa} \right) \delta_g \sqrt{-g} + \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \delta_g R \right] \\ &= \int d^D x \left[\left(\frac{R-2\lambda}{2\kappa} \right) \delta_g \sqrt{-g} + \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \delta_g (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \right] \\ &= \int d^D x \left[\left(\frac{R-2\lambda}{2\kappa} \right) \delta_g \sqrt{-g} + \sqrt{-g} \left(\frac{R_{\mu\nu}}{2\kappa} \right) \delta_g g^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} g^{\mu\nu} (\delta_g R_{\mu\nu}) \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Para el ultimo termino de la ecuación (2.3) necesitamos $\delta R_{\mu\nu}$, recordemos la definición del Tensor de Riemman y de Ricci.

Tensor Riemman

$$R^\mu{}_{\alpha\nu\beta} \equiv \partial_\nu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu{}_{\beta\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\alpha\nu} \quad (2.4)$$

Tensor Ricci

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda{}_{\lambda\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda} \quad (2.5)$$

Podemos obtener la variación de $\delta R_{\mu\nu}$ en dos pasos

1.- Tomamos la variación del tensor de Riemann (2.4) :

$$\begin{aligned} \delta R^\mu{}_{\alpha\nu\beta} &= \partial_\nu \delta \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \delta \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} \delta \Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta} + \Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta} \delta \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} \\ &\quad - \Gamma^\mu{}_{\beta\sigma} \delta \Gamma^\sigma{}_{\alpha\nu} - \Gamma^\sigma{}_{\alpha\nu} \delta \Gamma^\mu{}_{\beta\sigma} \end{aligned} \quad (2.6)$$

recordando que:

$$\nabla_\nu \delta \Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \partial_\nu \delta \Gamma^\mu_{\alpha\beta} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} - \Gamma^\lambda_{\nu\alpha} \delta \Gamma^\mu_{\lambda\beta} - \Gamma^\lambda_{\nu\beta} \delta \Gamma^\mu_{\lambda\alpha} \quad (2.7)$$

$$\nabla_\beta \delta \Gamma^\mu_{\alpha\nu} = \partial_\beta \delta \Gamma^\mu_{\alpha\nu} + \Gamma^\mu_{\beta\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} - \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} \delta \Gamma^\mu_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\beta\nu} \delta \Gamma^\mu_{\lambda\alpha} \quad (2.8)$$

nos damos cuenta que:

$$\delta R^\mu_{\alpha\nu\beta} = \nabla_\nu \delta \Gamma^\mu_{\alpha\beta} - \nabla_\beta \delta \Gamma^\mu_{\alpha\nu} \quad (2.9)$$

2.- Contraemos la variación del tensor de Riemann para obtener la variación del tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} \delta R^\mu_{\alpha\mu\beta} &= g^{\alpha\beta} \nabla_\mu \delta \Gamma^\mu_{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta} \nabla_\beta \delta \Gamma^\mu_{\alpha\mu} = \nabla_\mu (g^{\alpha\beta} \delta \Gamma^\mu_{\alpha\beta}) - \nabla_\beta (g^{\alpha\beta} \delta \Gamma^\mu_{\alpha\mu}) \\ &= \nabla_\mu \boxed{(g^{\alpha\beta} \delta \Gamma^\mu_{\alpha\beta} - g^{\alpha\mu} \delta \Gamma^\lambda_{\alpha\lambda})} \equiv \nabla_\mu V^\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} V^\mu) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Variación $\delta R_{\mu\nu}$

$$\Rightarrow \int d^D x \frac{\sqrt{-g}}{\kappa} g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) = \int d^D x \boxed{\frac{1}{\kappa} \partial_\mu (\sqrt{-g} V^\mu)} \quad (2.11)$$

donde el termino encerrado en (2.11) corresponde a un término de frontera.

Variación de $\sqrt{-g}$

Veamos que [13]:

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.12)$$

Variación Completa
 δ_g Einstein-Hilbert

Tomando en cuenta (2.12) y (2.11), la variación de (2.3) es

$$\begin{aligned} \delta_g S_{EH} &= \int d^D x \left(\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \left[R_{\mu\nu} - \frac{R g_{\mu\nu}}{2} + \lambda g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + \boxed{\frac{1}{\kappa} \partial_\mu (\sqrt{-g} V^\mu)} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

La parte de materia de la acción (2.1) es:

$$S_{\phi-A} = \int d^D x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi - \frac{1}{4} e^{-b\Phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \quad (2.14)$$

Ahora variamos $\phi - A$ con respecto de δ_g

$$\begin{aligned} \delta_g S_{\phi-A} &= \int d^D x \left[\left(-\frac{1}{2} \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi - \frac{1}{4} e^{-b\Phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \delta_g \sqrt{-g} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{4} e^{-b\Phi} \delta_g F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dividiremos la segunda parte de la ecuación anterior en dos secciones para realizar la variación con respecto a g .

$$i) \delta_g (\partial_\mu \phi g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \delta g^{\mu\nu} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} ii) \frac{1}{4} \delta_g (e^{-b\phi} F_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}) &= -\frac{e^{-b\phi}}{4} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \delta (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) \\ &= -\frac{e^{-b\phi}}{4} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} [g^{\mu\alpha} \delta g^{\nu\beta} + g^{\nu\beta} \delta g^{\mu\alpha}] \\ &= -\frac{e^{-b\phi}}{4} [F^\alpha{}_\nu F_{\alpha\beta} \delta g^{\nu\beta} - F_{\nu\mu} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \delta g^{\mu\alpha}] \\ &= -\frac{e^{-b\phi}}{4} [F^\alpha{}_\mu F_{\alpha\nu} \delta g^{\mu\nu} - F^\beta{}_\mu F_{\nu\beta} \delta g^{\mu\nu}] \\ &= -\frac{e^{-b\phi}}{2} (F^\alpha{}_\mu F_{\alpha\nu} \delta g^{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

La variación de $\phi - A$ con respecto de g la podemos reescribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \delta_g S_{\phi-A} &= \int d^D x \left[\left(-\frac{1}{2} \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi - \frac{1}{4} e^{-b\Phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \delta \sqrt{-g} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{-g}}{2} (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + e^{-b\phi} F^\alpha{}_\mu F_{\alpha\nu}) \delta g^{\mu\nu} \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

Utilizando el resultado en (2.12) una vez más

Variación δ_g
Maxwell

$$\begin{aligned} \delta_g S_{\phi-A} &= \int d^D x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi - \frac{1}{4} e^{-b\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + e^{-b\phi} F^\alpha{}_\mu F_{\alpha\nu}) \right] \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Juntamos las variaciones que obtuvimos en 2.13 y 2.19 para mostrar el resultado completo de la variación de la acción con respecto a la métrica.

Variación Completa
 δ_g

$$\begin{aligned} \delta_g S &= \int d^D x \left\{ \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa} \left[R_{\mu\nu} - \frac{R g_{\mu\nu}}{2} + \lambda g_{\mu\nu} \right] - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{4} e^{-b\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + e^{-b\phi} F^\alpha{}_\mu F_{\alpha\nu}) \right\} \delta g^{\mu\nu} + \boxed{\frac{1}{\kappa} \partial_\mu (\sqrt{-g} V^\mu)} \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde, como se menciono anteriormente, el termino encerrado corresponde a un término de frontera.

Ahora variamos $\phi - A$ con respecto de ϕ

$$\delta_\phi S_{\phi-A} = \int d^D x \sqrt{-g} \delta_\phi \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi - \frac{1}{4} e^{-b\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \quad (2.21)$$

Variemos la primera parte que depende de ϕ

$$\begin{aligned}
\delta_\phi \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right] &= -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} [\partial_\mu \phi \delta_\phi \partial_\nu \phi + \partial_\nu \phi \delta_\phi \partial_\mu \phi] \\
&= -\frac{1}{2} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \delta\phi + g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \partial_\mu \delta\phi] \\
&= -g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \delta\phi \\
&= -g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \delta\phi \\
&= \nabla_\mu (-g^{\mu\nu} \partial_\nu \delta\phi) - \nabla_\nu (-g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) \delta\phi \quad (2.22)
\end{aligned}$$

La variación completa de $\phi - A$ con respecto a ϕ queda de la siguiente forma

$$\delta_\phi S_{\phi-A} = \int d^D x \sqrt{-g} \left[\left\{ -\nabla_\nu (-g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) + \frac{1}{4} b \phi e^{-b\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\} \delta\phi + \boxed{\nabla_\mu (-g^{\mu\nu} \partial_\nu \delta\phi)} \right], \quad (2.23)$$

en donde el termino enmarcado dentro de la ecuación corresponde a un término de frontera.

Variamos con respecto a A

$$\begin{aligned}
\delta_A S_{\phi-A} &= \int d^D x \sqrt{-g} \delta_A \left[-\frac{1}{4} e^{-b\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \\
&= \int d^D x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} e^{-b\phi} \right) g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta_A (F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}) \\
&= \int d^D x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} e^{-b\phi} \right) g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \delta_A F_{\mu\nu} \\
&= \int d^D x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} e^{-b\phi} \right) F^{\mu\nu} (\delta_A \nabla_\mu A_\nu - \delta_A \nabla_\nu A_\mu) \\
&= \int d^D x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} e^{-b\phi} \right) (2F^{\mu\nu} \nabla_\mu \delta A_\nu) \\
&= \int d^D x \sqrt{-g} [-\nabla_\mu (-e^{-b\phi} F^{\mu\nu}) \delta A_\nu + \boxed{\nabla_\mu (-e^{-b\phi} F^{\mu\nu} \delta A_\nu)}], \quad (2.24)
\end{aligned}$$

en donde el termino enmarcado dentro de la ecuación corresponde a un término de frontera.

Una vez calculada la última variación procedemos a presentar el resultado de la variación completa de la acción, es decir, se suman los resultados obtenidos por separado de cada variación.

$$\delta S[g_{\mu\nu}, \phi, A_\mu] = \delta_g S + \delta_\phi S + \delta_A S \quad (2.25)$$

Variación Einstein-
Maxwell-Dilaton

A continuación se muestra la suma de las acciones calculadas.

$$\begin{aligned}
 \delta S[g_{\mu\nu}, \phi, A] = & \int d^D x \sqrt{-g} \left[\left\{ \frac{1}{2\kappa} \left[R_{\mu\nu} - \frac{Rg_{\mu\nu}}{2} + \lambda g_{\mu\nu} \right] - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + e^{-b\phi} F^\alpha{}_\mu F_{\alpha\nu}) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi - \frac{1}{4} e^{-b\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \right\} \delta g^{\mu\nu} \right. \\
 & \left. + (-\nabla_\nu (-g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi) + \frac{1}{4} b\phi e^{-b\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \delta \phi - \nabla_\mu (-e^{-b\phi} F^{\mu\nu}) \delta A_\nu \right] \\
 & + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left[\frac{1}{\kappa} (\sqrt{-g} V^\mu + (\sqrt{-g} V^\nu \delta \phi) + (-\sqrt{-g} e^{-b\phi} F^{\mu\nu} \delta A_\nu)) \right]
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

donde como se menciona antes los terminos encerrados son términos de frontera.

Fijando las condiciones para los términos de frontera, los términos de frontera no contribuyen en la dinámica local. Entonces, por variaciones arbitrarias independientes de la métrica, el dilatón y el campo de Maxwell, tenemos las siguientes ecuaciones de movimiento:

Métrica

$$R_{\mu\nu} - \frac{Rg_{\mu\nu}}{2} + \lambda g_{\mu\nu} = \kappa \underbrace{\left[\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + e^{-b\phi} F^\alpha{}_\mu F_{\alpha\nu} + g_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} \nabla_\rho \phi \nabla^\rho \phi - \frac{1}{4} e^{-b\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \right]}_{T_{\mu\nu} = \left(\frac{-2}{\sqrt{-g}} \right) \left(\frac{\delta[\sqrt{-g} L_{mat}]}{\delta g^{\mu\nu}} \right)}, \tag{2.27}$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el Tensor de Energía-momento.

Para ϕ :

ϕ

$$\square \phi + \frac{1}{4} b\phi e^{-b\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0, \tag{2.28}$$

para A

A

$$\nabla_\mu (e^{-b\phi} F^{\mu\nu}) = 0 \tag{2.29}$$

2.1 PRESENTACIÓN SOLUCIÓN DE MARIKA TAYLOR

La acción (2.1) tiene soluciones en espacio-tiempos tipo Lifshitz, y estamos interesados en *ansatz* métricos de la forma

Espacio-tiempo tipo Lifshitz

$$ds^2 = - \left(\frac{r}{l} \right)^{2z} f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(\frac{r}{l} \right)^2 f(r)} + \left(\frac{r}{l} \right)^2 d\vec{x}^2, \tag{2.30}$$

donde $f(r)$ representa el único potencial gravitacional despierto en el *ansatz*. Notando que si $r \rightarrow \infty$: $f(r) = 1$ obtenemos un espacio-tiempo tipo Lifshitz

$$ds^2 = - \left(\frac{r}{l} \right)^{2z} dt^2 + \frac{dr^2}{\left(\frac{r}{l} \right)^2} + \left(\frac{r}{l} \right)^2 d\vec{x}^2 \tag{2.31}$$

La solución que revisamos es la encontrada por Taylor en [21], construidas para de ahí nuestro interés en un ansatz métrico tipo Lifshitz.

Supongamos un ansatz para un campo de materia que respete las simetrías espaciotemporales:

$$\underbrace{\phi = \phi(r)}_{\text{Camposcalar}}, \quad \underbrace{A = A(r)dt}_{\text{Gaugefield}}$$

Una solución para las ecuaciones de movimiento (2.27), (2.28), (2.29), y para el espacio-tiempo (2.30) :

$$f(r) = 1 - \frac{M}{r^{z+D-2}} \quad (2.32)$$

$$F_{rt} \equiv A'(r) = \frac{(z-1)(z+D-2)}{\kappa Q l^2} \left(\frac{r}{l}\right)^{z+D-3} \quad (2.33)$$

$$e^{b\phi} = \frac{\kappa Q^2 l^2}{(z-1)(z+D-2)} \left(\frac{r}{l}\right)^{2(D-2)} \quad (2.34)$$

$$\lambda = -\frac{(z+D-2)(z+D-3)}{2l^2} \quad (2.35)$$

$$b = 2\sqrt{\frac{\kappa(D-2)}{z-1}} \quad (2.36)$$

Utilizaremos esta solución para evaluar en el horizonte de eventos y verificar si hay una singularidad desnuda o no.

INVARIANTES DE CURVATURA

Realizamos el calculo de invariantes de curvatura para verificar que nuestro espacio-tiempo es regular, lo cual significa que los invariantes de curvatura sean regulares y finitos en todos los puntos del espacio-tiempo.

Si los invariantes de curvatura contienen singularidades al menos una de estas debe ser infinita. Las singularidades son lugares donde la relatividad general no funciona.

3.1 TENSOR DE RIEMANN

Antes de realizar el calculo, de manera breve mostremos una interpretación del Tensor de Riemann.

Consideremos una familia de geodésicas de un parámetro $x^\mu(s, t)$ donde s es el parámetro y t el flujo geodésico. $S^\mu = dx^\mu/ds$ es el vector que describe el movimiento de una geodésica a otra y $T^\mu = dx^\mu/dt$ describe el flujo a través de la geodésica. Entonces encontramos que si S es transportado paralelamente a través del flujo geodésico, su segunda derivada covariante esta determinada por el Tensor de Riemann:

$$\frac{D^2 S^\mu}{dt^2} = -R^\mu{}_{\nu\alpha\rho} S^\sigma T^\nu T^\rho \quad (3.1)$$

En otras palabras la ecuación anterior describe una desviación geodésica, que se puede visualizar de manera más simple si imaginamos que S representa la separación entre dos objetos cercanos en el espacio y T representa su movimiento inicial. [14]

Definición del tensor de Riemann

$$R^\mu{}_{\alpha\nu\beta} = \partial_\nu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu} + \Gamma^\mu{}_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma{}_{\beta\alpha} - \Gamma^\mu{}_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma{}_{\nu\alpha} \quad (3.2)$$

donde los Símbolos de Christoffel están definidos como

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (3.3)$$

Estamos interesados en *ansatz* métricos de la forma

$$ds^2 = - \left(\frac{r}{l}\right)^{2z} f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(\frac{r}{l}\right)^2 f(r)} + \left(\frac{r}{l}\right)^2 d\vec{x}^2, \quad (3.4)$$

Símbolos de
Christoffel

donde $d\bar{x}^2 \equiv dx_1^2 + dx_2^2 + \dots dx_{D-2}^2$ representa la métrica de un sector plano $D - 2$ dimensional. Los símbolos de Christoffel (3.3) no triviales para la métrica (3.4) son

$$\begin{aligned}\Gamma^t_{tr} &= \frac{1}{2} \left[\frac{2z}{r} + (\ln f)' \right], & \Gamma^r_{tt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{r}{l} \right)^{2z+2} f^2 \left[\frac{2z}{r} + (\ln f)' \right], \\ \Gamma^r_{rr} &= -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{r} + (\ln f)' \right], & \Gamma^i_{rj} &= \frac{1}{r} \delta_{ij}, & \Gamma^r_{ij} &= -\frac{1}{l} \left(\frac{r}{l} \right)^3 f \delta_{ij}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Tensor de Riemann

Introduciendo los símbolos de Christoffel (3.5) en el tensor de Riemann (3.2) tiene la estructura

$$\begin{aligned}R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} &= -\frac{4}{l^2} \left\{ \frac{1}{2} [r^2 f'' + (1 + 3z)rf' + 2z^2 f] \delta_t^{[\mu} \delta_r^{\nu]} \delta_{[\alpha}^t \delta_{\beta]}^r \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} (rf' + 2zf) \delta_t^{[\mu} \delta_i^{\nu]} \delta_{[\alpha}^t \delta_{\beta]}^i + \frac{1}{2} (rf' + 2f) \delta_r^{[\mu} \delta_i^{\nu]} \delta_{[\alpha}^r \delta_{\beta]}^i \\ &\quad \left. + f \delta_i^{[\mu} \delta_j^{\nu]} \delta_{[\alpha}^i \delta_{\beta]}^j \right\},\end{aligned}\tag{3.6}$$

donde los corchetes cuadrados representan la antisimetrización de los índices, (i, j) repetidos no representan índices de suma y deben ser diferentes ($i \neq j$).

Una vez que se obtiene el Tensor de Riemann calculamos los invariantes que son de nuestro interés, posterior a calcularlos los evaluamos en la solución de Taylor y determinamos si son irregulares fuera o sobre su horizonte de eventos.

3.2 TENSOR DE RICCI

El tensor de Ricci es una contracción del tensor de Riemann y dada la forma en la que presentamos el tensor de Riemann, la definición que nos es útil para calcular el Tensor de Ricci es la siguiente

$$R^\mu{}_\nu \equiv R^{\alpha\mu}{}_{\alpha\nu}\tag{3.7}$$

Conociendo las componentes distintas de cero y la definición anterior, las componentes a calcular son las siguientes

$$R^\mu{}_\nu \equiv R^\mu{}_\nu R^\nu{}_\mu \equiv R^{t\mu}{}_{t\nu} + R^{r\mu}{}_{r\nu} + \sum_{i=1}^{D-2} R^{i\mu}{}_{i\nu}\tag{3.8}$$

Mostraremos como calcular la componente $R^r{}_t$, y para las demás se realiza lo mismo

$$\begin{aligned}
R^{t\mu}{}_{t\nu} & \\
R^{tr}{}_{tr}\delta_t^{[\mu}\delta^{\nu]}{}_r\delta^t_{[\alpha}\delta^r_{\beta]} &= R^{tr}{}_{tr}\frac{1}{4}(\delta^\alpha_t\delta^\nu_r - \delta^\nu_t\delta^\alpha_r)(\delta^t_\alpha\delta^r_\beta - \delta^t_\beta\delta^r_\alpha) \\
&= R^{tr}{}_{tr}(\delta^{\nu}_r\delta^r_\beta + \delta^{\nu}_t\delta^t_\beta) \\
R^{ti}{}_{ti}\delta_t^{[\mu}\delta^{\nu]}{}_i\delta^t_{[\alpha}\delta^i_{\beta]} &= \sum_{i=1}^{D-2} R^{ti}{}_{ti}((D-2)\delta^{\nu}_i\delta^i_\beta + \delta^{\nu}_t\delta^t_\beta) \\
R^{t\mu}{}_{t\nu} &= \left(-\left[\frac{f''}{2} \left(\frac{r}{l} \right)^2 + \frac{z^2 f}{l^2} + \frac{3zf r}{2l^2} + \frac{r f'}{2l^2} \right] \delta^{\nu}_r\delta^r_\beta \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{zf}{l^2} + \frac{r f'}{2l^2} \right] (D-2)\delta^{\nu}_i\delta^i_\beta \right) \delta^{\nu}_t\delta^t_\beta \\
\Rightarrow R^{t\mu}{}_{t\nu} &= -\left[\frac{r^2 f''}{2l^2} + \frac{[3z(D+1)]r f'}{2l^2} + \frac{2z^2 + 2(D-2)z}{2l^2} f \right] \delta^{\nu}_t\delta^t_\beta
\end{aligned}$$

Tras realizar el calculo para el resto de las componentes, se obtiene lo siguiente

Tensor de Ricci

$$\begin{aligned}
R^\mu{}_\nu &= -\frac{1}{2l^2} ([r^2 f'' + [3z + (D-1)]r f' + [2z^2 + 2(D-2)z]f] \delta^{\nu}_t\delta^t_\beta \\
&\quad + [r^2 f'' + [3z + (D-1)]r f' + [2z^2 + 2(D-2)]f] \delta^{\nu}_r\delta^r_\beta \\
&\quad + [2f' r + [z + (D-2)]f] \delta^{\nu}_i\delta^i_\beta) \quad (3.9)
\end{aligned}$$

3.3 CUADRADO DEL RICCI

Para el Cuadrado del Ricci utilizamos lo siguiente

$$R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} R_{\nu\mu} \equiv R^\mu{}_\nu R^\nu{}_\mu \quad (3.10)$$

Se consideran las componentes distintas de cero para facilitar el calculo, mostramos el procedimiento de una componente, para el resto se realizan los mismos pasos.

$$\begin{aligned}
R^r{}_r R^r{}_r &= \left[\frac{f''}{2} \left(\frac{r}{l} \right)^2 + \frac{[3z + (D-1)]r f'}{2l^2} + \frac{[z^2 + (D-2)]f}{l^2} \right] \left[\frac{f''}{2} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{[3z + (D-1)]r f'}{2l^2} + \frac{[z^2 + (D-2)]f}{l^2} \right] \\
&= \frac{r^4 [f'']^2}{4l^4} + \frac{[3z + (D-1)]r^3 f' f''}{2l^4} + \frac{r^2 f f'' [z^2 + (D-2)]}{l^4} \\
&\quad + \frac{[3z + (D-1)][z^2 + (D-2)]r f f'}{l^4} + \frac{[3z + (D-1)]^2 r^2 [f']^2}{4l^4} + \frac{[z^2 + (D-2)]^2 [f]^2}{l^4}
\end{aligned}$$

Cuadrado de Ricci

El resultado completo es el que se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
R^\mu{}_\nu R^\nu{}_\mu = & \frac{1}{l^4} \left[\frac{r^4 [f''']^2}{2} + [3z + (D-2)] r^3 f' f'' + r^2 f f'' [2z^2 + (D-2)z + (D-2)] \right. \\
& + r f f' [6z^3 + 3z^2(D-2) + 2z^2(D-1) + 3z(D-2) + z(D-1)(D-2) \\
& + (D-1)(D-2) + 2z(D-2) + 2(D-2)^2] + \frac{r^2 [f']^2}{2} [9z^2 + 6z(D-1) \\
& + (D-1)^2 + 2(D-2)] + f^2 [2z^4 + 2z^3(D-2) + z^2(D-2)^2 + 2z^2(D-2) \\
& \left. + 2z(D-2)^2 + (D-2)^2 + (D-2)^3 \right] \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Cuadrado de Ricci
Solución de Taylor

Sustituimos $f(r) = 1 - \frac{M}{r^{z+D-2}}$ y obtenemos

$$\begin{aligned}
R^\mu{}_\nu R^\nu{}_\mu = & \frac{1}{l^4} \left[\frac{r^4 M^2 (z^2 + 2zD - 3z + D^2 - 3D + 2)^2}{2 r^{2z+2D}} \right. \\
& + [3z + (D-2)] r^3 [-M^2 (z + D - 1)(z + D - 2)^2 r^{-2z-2D+1}] \\
& + r^2 [(-M(z + D - 1)(z + D - 2) r^{-z-D}) + M^2 (z + D - 1)(z + D - 2) r^{-2z-2D+2}] \\
& [2z^2 + (D-2)z + (D-2)] + r [M(z + D - 2) r^{-z-D+1} \\
& - M^2 (z + D - 2) r^{-2z-2D+1}] [6z^3 + 3z^2(D-2) + 2z^2(D-1) \\
& + 3z(D-2) + z(D-1)(D-2) + (D-1)(D-2) + 2z(D-2) + 2(D-2)^2] \\
& + \frac{r^2 M^2 (z + D - 2)^2}{2 r^{2z-2D-2}} [9z^2 + 6z(D-1) + (D-1)^2 + 2(D-2)] \\
& + [1 - 2M(r^{-z-D+2}) - M^2(r^{-z-D+2})^2] [2z^4 + 2z^3(D-2) + z^2(D-2)^2 \\
& \left. + 2z^2(D-2) + 2z(D-2)^2 + (D-2)^2 + (D-2)^3 \right] \quad (3.12)
\end{aligned}$$

3.4 ESCALAR DE CURVATURA

Calculamos ahora el Escalar de Curvatura, el cual es la contracción del Tensor de Ricci, y se utiliza lo siguiente:

$$R \equiv R^\mu{}_\mu \quad (3.13)$$

Escalar de Curvatura

De lo cual obtuvimos:

$$\begin{aligned}
R = & f'' \left(\frac{r}{l} \right)^2 + \frac{r f' [3z + (D-1) + (D-2)]}{l^2} \\
& + \frac{f [2z^2 + 2z(D-2) + (D-2) + (D-2)^2]}{l^2} \quad (3.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R = & \frac{1}{l^2} (r^2 f'' + r f' [3z + (D-1) + (D-2)] \\
& + f [2z^2 + 2z(D-2) + (D-2) + (D-2)^2]) \quad (3.15)
\end{aligned}$$

El escalar de curvatura nos dice como el área de la superficie de una esfera en un espacio curvo difiere de la superficie de una esfera en un espacio plano.

Evaluando en la solución de **Taylor**.

*Escalar de Curvatura
Sol. Taylor*

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{l^2} (r^2 [M^2 (z^2 + 2zD - 3z + D^2 - 3D + 2)^2 r^{2z+2D}] \\
&\quad + r [M(z + D - 2) r^{-z-D+1}] [3z + (D - 1) + (D - 2)] \\
&\quad + \left[1 - \frac{M}{r^{z+D-2}} \right] [2z^2 + 2z(D - 2) + (D - 2) + (D - 2)^2])
\end{aligned} \tag{3.16}$$

3.5 ESCALAR DE KRETSCHMANN

Dada la forma que mostramos del Tensor de Riemann la definición del Escalar de Kretschmann es la siguiente

$$R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} R_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} = R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} g^{\alpha\lambda} g^{\beta\gamma} R_{\mu\nu\lambda\gamma} \equiv R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \tag{3.17}$$

De lo cual se obtuvo

Escalar Kretschmann

$$\begin{aligned}
R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} &= [f'']^2 \left(\frac{r}{l}\right)^4 + \frac{f''}{l^4} [6zr^3 f' + 4r^2 z^2 f + 2r^3 f'] + \frac{f^2}{l^4} [2(D - 2)(D - 1) \\
&\quad + 4z^2 + 4(D - 2)z^2] + \frac{ff'}{l^4} [12z^3 r + 4z^2 r + 4(D - 2)zr + 4(D - 2)r] \\
&\quad + \frac{[f']^2}{l^4} [9z^2 r^2 + 6zr^2 + (2(D - 2) + 1)r^2]
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Evaluando en la solución de **Taylor**.

Sustituyendo $f(r) = 1 - \frac{M}{r^{z+D-2}}$ obtenemos

*Kretschmann
Solución Taylor*

$$\begin{aligned}
R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} &= \left[\frac{M^2 (z^2 + 2zD - 3z + D^2 - 3D + 2)^2}{r^{2z+2D}} \right] \left(\frac{r}{l}\right)^4 \\
&\quad + \frac{-M(z + D - 2)(z + D - 1)}{r^{z+D}} \left[\frac{6zr^3}{l^4} \left(\frac{M(z + D - 2)}{r^{z+D-1}}\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{4z^2 r^2}{l^4} \left(1 - \frac{M}{r^{z+D-2}}\right) + \frac{2r^3 M(z + D - 2)}{l^4 r^{z+D-1}} \right] \\
&\quad + \left(1 - \frac{2M}{r^{z+D-2}} + \frac{M^2}{r^{2z+2D-4}}\right) \left[\frac{2(D - 2)(D + 1)}{l^4} + \frac{4z^4}{l^4} + 4(D - 2) \frac{z^2}{l^4} \right] \\
&\quad + \left(\frac{M(z + D - 2)}{r^{z+D-1}} - \frac{M^2(z + D - 2)}{r^{2z+2D-3}} \right) \frac{r}{l^4} [12z^3 + 4z^2 + 4(D - 2)z \\
&\quad + 4(D - 2)] + \frac{M^2(z^2 + 2zD - 4z + D^2 - 4D + 4)}{r^{2z+2D-2}} \frac{r^2}{l^4} [9z^2 + 6z \\
&\quad + (z(D - 2) + 1)]
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Veamos que sucede cuando evaluamos en r_h , es decir en el punto donde r se encuentra sobre el Horizonte de Eventos.

$$r_h = M^{\frac{1}{z+D-2}} \quad (3.20)$$

Si sustituimos en $f(r)$ obtenemos lo siguiente:

$$f(r_h) = 1 - \frac{M}{r_h^{z+D-2}} = 1 - \frac{M}{M} = 1 - 1 \quad (3.21)$$

$$\Rightarrow f(r_h) = 0 \quad (3.22)$$

Lo cual nos indica que en el Horizonte de Eventos la métrica y el espacio-tiempo no están bien definidos.

INVARIANTES DE CAMPO

Se realizó el cálculo de

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (4.1)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.2)$$

Recordando el ansatz $A(r) = A(r)dt$ propuesto en el capítulo 2, tenemos que la componente distinta de cero es únicamente la siguiente:

$$F_{rt} = \partial_r A_t - \partial_t A_r \quad (4.3)$$

De lo cual queda lo siguiente:

$$F_{rt} \equiv A'(r) \quad (4.4)$$

Sustituyendo en $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ tenemos:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \equiv 2F_{rt}F^{rt} \quad (4.5)$$

Subimos los índices de F_{rt} para poder realizar el cálculo

$$F^{rt} = g^{rr}g^{tt}F_{rt} = \left[\left(\frac{r}{l} \right)^2 f(r) \right] \left[- \left(\frac{l}{r} \right)^{2z} \frac{1}{f(r)} \right] F_{rt} \quad (4.6)$$

$$F^{tr} = g^{tt}g^{rr}F_{tr} = \left[- \left(\frac{l}{r} \right)^{2z} \frac{1}{f(r)} \right] \left[\left(\frac{r}{l} \right)^2 f(r) \right] F_{tr} \quad (4.7)$$

Sustituyendo en $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} F_{rt}F^{rt} &= [A'(r)][g^{rr}g^{tt}F_{rt}] = [A'(r)] \left[\left(\frac{r}{l} \right)^2 f(r) \right] \left[- \left(\frac{l}{r} \right)^{2z} \frac{1}{f(r)} \right] [A'(r)] \\ &= - \left(\frac{l}{r} \right)^{2(z-1)} [A'(r)]^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Finalmente sustituyendo en $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \equiv 2F_{rt}F^{rt}$

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \equiv 2F_{rt}F^{rt} = -2 \left(\frac{l}{r} \right)^{2(z-1)} [A'(r)]^2 \quad (4.9)$$

CONCLUSIONES

Se presentaron las ecuaciones de campo de la acción de la teoría de Einstein-Maxwell-Dilaton.

A partir de los resultados vistos en el capítulo 3 y 4, podemos afirmar que la singularidad no es una singularidad desnuda, ya que los invariantes de campos se vuelven finitos en r_H , es decir sobre el horizonte de eventos y la singularidad esta contenida dentro de este.

El principal interés en espacios métricos tipo Lifzhits deriva de la importancia que han tomado en el marco de la correspondencia Holográfica al entenderse como duales gravitacionales de teorías cuánticas de campos que no son invariantes de Lorentz.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] George David Birkhoff y Rudolph Ernest Langer. *Relativity and Modern Physics*. 1.^a ed. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1923.
- [2] B. Carter. «Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom». En: *Phys. Rev. Lett.* 26 (6 1971), págs. 331-333. DOI: [10.1103/PhysRevLett.26.331](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.26.331). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.26.331>.
- [3] Albert Einstein. «Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie: Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity». En: *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* 1915 (1915), págs. 831-839.
- [4] Albert Einstein. «Feldgleichungen der Gravitation: The Field Equations of Gravitation». En: *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* 1915 (1915), págs. 844-847.
- [5] Albert Einstein. «Grundgedanken der allgemeinen Relativitätstheorie und Anwendung dieser Theorie in der Astronomie: Fundamental Ideas of the General Theory of Relativity and the Application of this Theory in Astronomy». En: *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* 1915 (1915), pág. 315.
- [6] Albert Einstein. «Zur Allgemeinen Relativitätstheorie: On the General Theory of Relativity». En: *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* 1915 (1915). [Addendum: *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* 1915, 799-801 (1915)], págs. 778-786.
- [7] Albert Einstein. «Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie: The Foundation of the General Theory of Relativity». En: *Annalen Phys.* 49.7 (1916). Ed. por Jong-Ping Hsu y D. Fine, págs. 769-822. DOI: [10.1002/andp.200590044](https://doi.org/10.1002/andp.200590044).
- [8] David Garfinkle, Gary T. Horowitz y Andrew Strominger. «Charged black holes in string theory». En: *Phys. Rev. D* 43 (1991). [Erratum: *Phys.Rev.D* 45, 3888 (1992)], pág. 3140. DOI: [10.1103/PhysRevD.43.3140](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.43.3140).
- [9] S. W. Hawking y G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, feb. de 2011. ISBN: 978-0-521-20016-5, 978-0-521-09906-6, 978-0-511-82630-6, 978-0-521-09906-6. DOI: [10.1017/CB09780511524646](https://doi.org/10.1017/CB09780511524646).

- [10] Jørg Tofte Jebsen. «Über die allgemeinen kugelsymmetrischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen im Vakuum». En: *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik* 15 (1921), págs. 1-9.
- [11] Shamit Kachru, Xiao Liu y Michael Mulligan. «Gravity duals of Lifshitz-like fixed points». En: *Phys. Rev. D* 78 (2008), pág. 106005. DOI: [10.1103/PhysRevD.78.106005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.106005). arXiv: [0808.1725 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/0808.1725).
- [12] Roy P. Kerr. «Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics». En: *Phys. Rev. Lett.* 11 (5 1963), págs. 237-238. DOI: [10.1103/PhysRevLett.11.237](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.11.237). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.11.237>.
- [13] L. D. Landau. *Teoría clásica de los campos*. Barcelona: Editorial Reverte, 1981. ISBN: 84-291-4082-4.
- [14] Lee C. Lovelock. «Physical and geometric interpretations of the Riemann tensor, Ricci tensor, and scalar curvature». En: (ene. de 2004). arXiv: [gr-qc/0401099](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0401099).
- [15] R. Penrose. «Gravitational collapse: The role of general relativity». En: *Riv. Nuovo Cim.* 1 (1969), págs. 252-276. DOI: [10.1023/A:1016578408204](https://doi.org/10.1023/A:1016578408204).
- [16] Roger Penrose. «Gravitational Collapse and Space-Time Singularities». En: *Phys. Rev. Lett.* 14 (3 1965), págs. 57-59. DOI: [10.1103/PhysRevLett.14.57](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.14.57). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.14.57>.
- [17] Karl Schwarzschild. «Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie». En: *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* 7 (1916), págs. 189-196.
- [18] Royal Swedish Academy of Sciences. *The Nobel Prize in Physics*. 2020. URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2020/summary/>.
- [19] José M. M. Senovilla y David Garfinkle. «The 1965 Penrose singularity theorem». En: *Class. Quant. Grav.* 32.12 (2015), pág. 124008. DOI: [10.1088/0264-9381/32/12/124008](https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/12/124008). arXiv: [1410.5226 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1410.5226).
- [20] Hans Stephani, D. Kramer, Malcolm A. H. MacCallum, Cornelius Hoenselaers y Eduard Herlt. *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003. ISBN: 978-0-521-46702-5, 978-0-511-05917-9. DOI: [10.1017/CB09780511535185](https://doi.org/10.1017/CB09780511535185).
- [21] Marika Taylor. «Non-relativistic holography». En: (dic. de 2008). arXiv: [0812.0530 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/0812.0530).