



**BENEMÉRITA
AUTÓNOMA**

**UNIVERSIDAD
DE PUEBLA**

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

**ESTUDIO DE LA DINÁMICA DE DOS
FAMILIAS DE FUNCIONES HOLOMORFAS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

MIGUEL ÁNGEL SALOMA MENESES

DIRECTORES DE TESIS:

**DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO
MC JULIO ERASTO POISOT MACÍAS**

PUEBLA, PUEBLA. DICIEMBRE 2021

*A mi gran amado, a mi amada familia,
a mi familia extendida y amigos.*

*La ciencia y el conocimiento son el legado
de la humanidad para las nuevas generaciones
a lo largo de la historia.*

*Es por eso que trabajo y lucho con tanto
empeño apoyado en el gran poder de Cristo
que actúa dentro de mí. **Colosenses 1:29 NTV***

AGRADECIMIENTOS

A mi autor y fuente de vida *Abba*, a mis hermanos Andrés, Tony y Erandi, a mis otros hermanos Alexa, Chrys y David, pero muy en especial a mis mamás admirables Lidia y Laura, en verdad no hubiese sido posible este logro sin todos ustedes.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por haberme otorgado una beca que me permitió continuar con mis estudios, pero muy en especial a cada contribuyente.

Agradezco mucho a mi Comité Sinodal: Al Dr. Raúl Escobedo Conde, por todas las observaciones que me hizo saber con la finalidad de enriquecer mi trabajo, al Dr. Agustín Contreras Carreto, por sus observaciones y por todo lo que me ha enseñado a lo largo de mi carrera al Dr. David Herrera Carrasco, por sus aportaciones para mejorar mi trabajo y todo lo que me enseñó en mi carrera y apoyarme en este nuevo paso, y finalmente agradezco a la Dra. Laura Angélica Cano Cordero, por su tiempo, dedicación y atención a este trabajo y por compartir su conocimiento conmigo y con todos los que formamos parte del grupo de sistemas dinámicos

Agradezco también a mis profesores de toda mi formación académica, que me han llevado hasta este momento, sin duda les tengo gran admiración personal.

A mi directora de tesis, Dra. Patricia Domínguez Soto, por su inmenso apoyo, por su paciencia y amistad pero sobre todo, por procurarme y darme ánimo para seguir. A mi director de tesis, M.C. Julio Erasto Poisot Macías por todo lo que ha hecho para ayudarme.

Finalmente agradezco a todas mis amistades, entre ellas: Ángeles, Daniela, Iván, Joel, Jorge, José, Karen, Luis, Max, Marisol, Marimar y Xochilt por mencionar algunas.

Índice general

Introducción	I
1. Preliminares	1
1.1. Sucesiones de funciones y el plano complejo extendido	1
1.2. Funciones holomorfas y analíticas	5
1.3. Familias normales	8
1.4. Clasificación de singularidades aisladas	11
1.5. Valores singulares de una función holomorfa	13
1.6. Teoremas de Picard y Montel	14
2. Elementos de la dinámica holomorfa	15
2.0.1. Puntos fijos y periódicos	16
2.0.2. Componentes de Fatou	19
3. La familia $\lambda \operatorname{sen}(z)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$	24
3.1. Valores singulares de $\lambda \operatorname{sen}(z)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$	26
3.2. Puntos fijos de la familia $\lambda \operatorname{sen}(z)$	26
3.3. El conjunto de Fatou para $\lambda \operatorname{sen}(z)$	35
4. La familia $\lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$	37
4.1. Puntos fijos de $g_{\lambda, \mu}$	37
4.2. Valores Singulares de $g_{\lambda, \mu}$	43
4.3. Otros aspectos de la dinámica de $g_{\lambda, \mu}$	46
Conclusiones y análisis	56
Bibliografía	57

Introducción

El estudio de iteración de funciones tuvo sus inicios en los tiempos de la antigua Grecia, porque los matemáticos de aquella época aplicaban procesos repetitivos para obtener sus cálculos. Sin embargo, uno de los trabajos más notorios en el proceso de iteración de funciones fue desarrollado por Newton en el siglo XVII, el cual es un método empleado para encontrar soluciones a ecuaciones. aproximando el valor de sus raíces.

En el marco teórico de funciones de variable compleja, el trabajo del matemático francés Paul Montel introdujo la teoría de familias normales en sus publicaciones de 1912 y 1916, considerando a la teoría de Picard de gran importancia para la aplicación a su estudio de familias normales.

El estudio del comportamiento dinámico de clases de funciones sobre la esfera de Riemann comenzó en el siglo XX véase [16] y [17], por los matemáticos franceses Pierre Fatou y Gaston Julia, los cuales definieron dos conjuntos que hoy llevan su nombre. El principal campo de estudio de estos dos matemáticos fue la iteración de funciones racionales sobre la esfera de Riemann. El trabajo de Montel les permitió dividir la esfera en dos conjuntos: el conjunto *estable*, que es el conjunto de puntos del plano complejo tales que su sucesión de iteraciones está bien definida y es normal en alguna vecindad de dicho punto, y el conjunto *inestable o caótico* que es el complemento del conjunto estable.

Fatou y Julia estudiaron las propiedades de los conjuntos estable y caótico par funciones racionales entre 1918-1920. Posteriormente en 1926. Fatou extiende los resultados obtenidos a

funciones enteras trascendentes dejando varias preguntas abiertas, algunas de las cuales fueron respondidas por el matemático I. Noel Baker, véase [6].

Por otra parte, la extensión de la teoría de Fatou-Julia para funciones meromorfas trascendentes fue estudiada por los matemáticos I. N. Baker, J. Kotus y Lü Yinian entre los años 1990 y 1992, quienes obtuvieron resultados importantes en [3], [4] y [6].

En los últimos 40 años se ha retomado el estudio de la iteración de funciones enteras trascendentes y funciones meromorfas trascendentes debido a las nuevas técnicas en la dinámica holomorfa y al importante desarrollo en la utilización de software para la graficación de planos de parámetros que han ayudado a entender a los sistemas dinámicos.

En la clase de funciones enteras trascendentes se encuentra la familia $f_\lambda(z) = \lambda \sin(z)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Anteriormente se pensaba que esta familia tenía una dinámica similar a la dinámica de la familia λe^z , $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, sin embargo, McMullen, véase [19], probó que la medida de Lebesgue del conjunto de Julia de la función exponencial es igual a cero, pero no lo es para la familia $f_\lambda(z)$ por lo que inducen dinámicas diferentes.

Algunos resultados de la dinámica de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \sin(z)$ fueron investigados por Domínguez y Sienra en [10].

Domínguez, Montes de Oca y Vázquez estudiaron en [11] una perturbación de la familia

$$f_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z + k\pi}, \quad (1)$$

donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Posteriormente, Domínguez y Vázquez en [13] generalizan resultados de (1) estudiando la familia

$$\lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z - z_0},$$

con $z_0 \neq 0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Descripción general del trabajo

En este trabajo de tesis se estudia el comportamiento dinámico de la familia

$$f_\lambda(z) = \lambda \sin(z), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (2)$$

y una perturbación de f_λ . La perturbación consiste en añadir un polo simple no omitido en cero y un nuevo parámetro $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, es decir,

$$g_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (3)$$

El objetivo de este trabajo de tesis es hacer un análisis entre los diferentes resultados obtenidos en [10] de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \sin(z)$ y la familia $g_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z}$ obtenidos en [12] y [13], las cuales poseen dinámicas diferentes como se verá a lo largo de este trabajo de tesis

La tesis esta estructurada como sigue: En el capítulo 2 se describen algunos conceptos básicos de la variable compleja, así como los teoremas de Picard y Montel. En el capítulo 3 se describen algunos conceptos y resultados de la dinámica holomorfa, se definen las clases de funciones enteras trascendentes denotadas por $\mathcal{E}$, y meromorfas trascendentes denotadas por $\mathcal{M}$. También se definen 2 subclases de funciones denotadas por $\mathcal{S}$ y $\mathcal{B}$.

En el capítulo 4 se describe de manera general la dinámica de la familia f_λ , $\lambda \in \mathbb{C}$. Finalmente, en el capítulo 5 se describe la dinámica de $g_{\lambda,\mu}$ (3) y algunas características de los conjuntos de Fatou y Julia para ciertos parámetros estudiados en el trabajo de Domínguez y Vázquez véase [12].

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se abordarán algunos conceptos básicos de la variable compleja, así como algunos resultados de conocimiento general, los cuales serán de gran utilidad para el desarrollo de los capítulos posteriores de esta tesis. Los resultados pueden ser consultados en [1] y [9].

1.1. Sucesiones de funciones y el plano complejo extendido

Una sucesión compleja es una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ donde $f(n) = z_n$. Al conjunto imagen se le denota por $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definición 1.1. *Una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, si para cada $\epsilon > 0$ existe un natural M tal que $|z_n - z_m| < \epsilon$ si $n, m \geq M$.*

Si (X, d) es un espacio métrico en donde toda sucesión de Cauchy tiene límite, entonces diremos que X es un espacio completo.

Proposición 1.2. *El campo de los números complejos $\mathbb{C}$ es un espacio completo con la métrica usual.*

Recordemos que una topología en un conjunto X es una familia τ de subconjuntos de X que satisface las siguientes condiciones: (A) X y $\emptyset$ pertenecen a τ . (B) Si $A, B \in \tau$, entonces

$A \cap B \in \tau$. (C) Si $\mathcal{A} \subset \tau$, $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$. El par (X, τ) es llamado espacio topológico.

A los elementos de τ se les conoce como abiertos. Si $x \in X$, se dice que A es una vecindad de x si existe un abierto $B \in \tau$ tal que $x \in B \subset A$. Diremos que X es compacto si a toda colección de abiertos que cubren a X se le puede extraer una subcubierta finita.

Un espacio topológico (X, τ) se dice Hausdorff o T_2 , si para cualesquiera $x, y \in X$ existen $A, B \in \tau$ con $A \cap B = \emptyset$ tal que $x \in A$ y $y \in B$.

Definición 1.3. *Un espacio topológico (X, τ) es localmente compacto si todo punto tiene una vecindad compacta.*

Teorema 1.4. *Un espacio Hausdorff es localmente compacto si, y sólo si, dados $x \in X$ y U un abierto de x , existe V vecindad de x tal que $\overline{V}$ es compacta y $\overline{V} \subset U$.*

Proposición 1.5. *El plano complejo es un espacio localmente compacto.*

Demostración. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y U un conjunto abierto que tiene a z_0 , entonces existe $r > 0$ tal que la bola abierta $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subset U$, por otra parte es claro que la bola cerrada $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ esta contenida en la bola abierta $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < 2r\}$. Por el teorema de Heine-Borel para el plano complejo, $\mathbb{C}$ tenemos que toda bola cerrada de radio finito es compacta y aplicando el teorema anterior concluimos que $\mathbb{C}$ es localmente compacto. $\square$

Proyección estereográfica

Los puntos del plano complejo junto con el ∞ forman al plano complejo extendido, el cual se denota por $\widehat{\mathbb{C}}$, es decir,

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Consideremos a la esfera unitaria

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\},$$

que es llamada la esfera de Riemann. La proyección estereográfica es la función que asigna a cada punto del plano complejo un punto de S^2 , siendo el polo norte el infinito. Para asociar cada punto del plano con uno de S^2 usamos la siguiente idea geométrica. Tomemos el hiperplano

$$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\},$$

como el plano complejo y consideremos la recta que pasa por el punto $e_3 = (0, 0, 1)$ y el punto $X = (x_1, x_2, x_3)$ de S^2 . Esta recta cruza al plano $\mathcal{H}$ en un único punto y de esta forma se asigna al punto X un punto del plano complejo. Para encontrar este punto se parametriza esta recta, es decir,

$$e_3 + t(X - e_3) \quad t \in \mathbb{R},$$

y se debe satisfacer

$$\begin{aligned} [e_3 + t(X - e_3)] \cdot e_3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 + t(X - e_3) \cdot e_3 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{1 - x_3}, \end{aligned}$$

sustituyendo este valor en la ecuación paramétrica de la recta obtenemos:

$$\begin{aligned} &e_3 + \left(\frac{1}{1 - x_3} \right) (X - e_3) \\ &= e_3 + \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, \frac{x_3 - 1}{1 - x_3} \right) \\ &= \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, 0 \right). \end{aligned}$$

Por semejanza de triángulos tenemos:

$$\frac{|z|}{1} = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{1 - x_3}.$$

Así, definimos la siguiente función:

$$\varphi : S^2 \setminus \{e_3\} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{dada por } (a, b, c) \longmapsto \frac{a + ib}{1 - c}.$$

Proposición 1.6. φ es una biyección.

Demostración. ■ φ tiene inversa por la izquierda. Tomemos $z = \varphi(a, b, c)$, es decir $z = \frac{a+ib}{1-c}$ y como $(a, b, c) \in S^2 \setminus \{e_3\}$ se tiene:

$$|z|^2 = \left| \frac{a+ib}{1-c} \right| = \left| \frac{a^2+b^2}{(1-c)^2} \right| = \frac{1-c^2}{(1-c)^2} = \frac{1+c}{1-c}.$$

Despejando a c

$$c = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Por otro lado, $z + \bar{z} = \frac{2a}{1-c}$ así,

$$\begin{aligned} a &= \frac{(z + \bar{z})(1-c)}{2} = \frac{z + \bar{z}}{2} \left(1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 2} \right) \\ &= \frac{z + \bar{z}}{2} \left(\frac{2}{|z|^2 + 1} \right), \end{aligned}$$

esto es,

$$a = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}.$$

También, $z - \bar{z} = \frac{2ib}{1-c}$, entonces

$$b = \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 - 1)}.$$

Si ponemos

$$\lambda(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 - 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right),$$

entonces $\lambda(\varphi((a, b, c))) = (a, b, c)$.

- $\lambda(z)$ definida como antes es la inversa por la derecha de φ y por lo tanto φ es sobreyectiva.

□

Definamos la proyección estereográfica como la función $\widehat{\varphi} : S^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ descrita por:

$$\widehat{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \neq e_3 \\ \infty & \text{si } x = e_3. \end{cases}$$

Hemos visto que existe una biyección entre el plano complejo extendido y la esfera de Riemann, por lo que es necesario encontrar una manera de medir la distancia de dos puntos en esfera. La métrica que permite medir esta distancia es conocida como la métrica cordal y se define como.

Definición 1.7. *La métrica en el cordal en el plano complejo extendido $\widehat{\mathbb{C}}$ se define como:*

$$d_C(z, w) = \begin{cases} \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}} & \text{si } z, w \neq \infty \\ \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}m & \text{si } w = \infty \\ 0 & \text{si } z = w = \infty. \end{cases}$$

A esta métrica se le da este nombre porque se mide la distancia de dos puntos geoméricamente por medio de cuerdas en la esfera, es decir,

$$d_C(z, w) = |\widehat{\varphi}(z) - \widehat{\varphi}(w)|.$$

Proposición 1.8. *La métrica d_C y la métrica euclidiana inducen la misma topología en $\mathbb{C}$. Además,*

$$d_C(z_n, \infty) \mapsto 0 \text{ si, y solo si } |z| \mapsto \infty.$$

1.2. Funciones holomorfas y analíticas

En esta sección se dan algunas definiciones básicas del análisis complejo referentes a la diferenciabilidad de funciones de variable compleja que son de vital importancia para el desarrollo de este trabajo, véase [1] y [7].

Definición 1.9. *Una función f con dominio $A \subset \mathbb{C}$ y codominio el plano complejo es llamada una función de variable compleja.*

Una función de variable compleja es de la siguiente forma:

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

donde $u(x, y)$ es la parte real de f y $v(x, y)$ es la parte imaginaria de f .

Observemos que el álgebra de estas funciones se define exactamente igual que el de las funciones de variable real.

Una sucesión de funciones con dominio $A \subset \mathbb{C}$ es una función $g : \mathbb{N} \rightarrow X$ definida por $g(n) = f_n$, donde X consiste en todas las funciones de variable compleja con dominio en A . Al conjunto imagen se le denota por $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definición 1.10. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones con dominio $A \subset \mathbb{C}$. Se dice que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en A si para todo $\epsilon > 0$, existe un natural N tal que si $m \geq n$, entonces

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \quad \text{para todo } z \in A.$$

Definición 1.11. Sea $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ un punto de acumulación de D . Se dice que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < |z - z_0| < \delta \text{ implica que } |f(z) - L| < \epsilon.$$

Además, diremos que la función f es continua en $z_0 \in D$ si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Recordemos el concepto de continuidad uniforme sobre un conjunto $D \subset \mathbb{C}$.

Definición 1.12. Se dice que f es uniformemente continua en D si $\forall \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $z, w \in D$ con $|z - w| < \delta$ implica $|f(z) - f(w)| < \epsilon$.

Definición 1.13. Sea $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, se dice que una función $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable en el sentido complejo en el punto $z_0 \in A$, si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existe. Este límite es llamado la derivada de f en z_0 y se denota por $f'(z_0)$. Además, diremos que f es holomorfa en $z_0 \in A$ si es diferenciable en el sentido complejo en z_0 .

Observe que una función se dice holomorfa en un conjunto A si es holomorfa en todo elemento de A .

Teorema 1.14. *Sea A un conjunto abierto del plano complejo y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en $z_0 \in A$ y sea $u(z) + iv(z) = f(z)$ para todo $z \in A$, entonces se cumplen:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0); \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0). \quad (1.2)$$

Observemos que el recíproco de este teorema es falso y para que sea verdadero es necesario agregar como hipótesis la existencia y continuidad de las derivadas parciales.

Las ecuaciones en (1.1) y (1.2) se conocen como las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Teorema 1.15. *Dadas $f, g : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ funciones holomorfas, entonces*

$f + g$, fg , $f \circ g$ y f/g , $g \neq 0$ son funciones holomorfas.

Teorema 1.16. *Si f es una función es holomorfa, entonces f es continua.*

Denotemos por $\Delta(z_0, r)$ al disco de radio r centrado en z_0 y sea f una función definida en $D \subset \mathbb{C}$. Diremos que f es analítica en D si para todo punto $z_0 \in D$, existe $r > 0$ tal que $\Delta(z_0, r) \subset D$ y una serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ convergente en $\Delta(z_0, r)$ tal que para todo $z \in \Delta(z_0, r)$, se cumple que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = f(z).$$

Teorema 1.17. [9] *Sea $V \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ una función, entonces f es analítica si, y sólo si es holomorfa.*

Con el teorema 1.17 podemos usar el término holomorfa y analítica indistintamente.

1.3. Familias normales

En esta sección se estudiará el concepto de familias normales, el cual es de vital importancia para de este trabajo. Para poder definir el concepto de familia normal, recordemos las siguientes definiciones Véase [7], [9] y [20] para consultar las demostraciones.

Definición 1.18. 1. Sea $D \subset C$, K un subconjunto compacto de D y $\mathcal{F}$ una familia de funciones definidas en D . Diremos que $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada si, existe una contante $m = m(K)$ tal que $|f(z)| \leq m$ para cada punto $z \in K$ y cada función $f \in \mathcal{F}$.

2. La familia de funciones $\mathcal{F}$ es localmente acotada en un dominio D si, para cada $z_0 \in D$ existe un número positivo $N = N(z_0)$ y una vecindad $V(z_0; r) \subset D$ tal que $|f(z)| \leq M$ y para todo $z \in V(z_0; r)$ y toda $f \in \mathcal{F}$.

Observación 1.19. Una familia $\mathcal{F}$ localmente acotada es uniformemente acotada sobre subconjuntos compactos de D .

Teorema 1.20. Si $\mathcal{F}$ es una familia de funciones analíticas localmente acotadas en un dominio D , entonces la familia de derivadas $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ es localmente acotada en D .

Teorema 1.21. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones analíticas en D tal que la familia de derivadas $\mathcal{F}'$ es localmente acotada y supongamos que existe algún $z_0 \in D$ con $|f(z_0)| < M < \infty$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{F}$ es localmente acotada.

Definición 1.22. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones definidas en un dominio D se dice equicontinua en un punto $z_0 \in D$ si, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon, z_0) > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon,$$

siempre que $|z - z_0| < \delta$ para cada $f \in \mathcal{F}$.

Proposición 1.23. Toda familia $\mathcal{F}$ de funciones analíticas localmente acotadas en un dominio D es equicontinua sobre subconjuntos compactos de D .

A continuación la definición de normalidad de una familia de funciones.

Definición 1.24. *Una familia $\mathcal{F}$ de funciones complejas se dice normal en un dominio $D \subset \mathbb{C}$, si cada sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ contiene una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge uniformemente a una función f , o bien contiene una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge uniformemente a ∞ en cada subconjunto compacto de D .*

Observemos que la definición anterior no requiere que las funciones límite de las subsucesiones convergentes pertenezcan a la familia $\mathcal{F}$.

Por ejemplo: Si $\mathcal{F}$ es el conjunto de composiciones consigo misma de $f(z) = z^2$ definidas sobre un abierto U contenido en S^1 , entonces $\mathcal{F}$ converge a la función cero, la cual no pertenece a $\mathcal{F}$ sin embargo es normal.

Los teoremas importantes que caracterizan a las familias normales es el Teorema de Arzelà Ascoli y el Teorema de Montel.

Teorema 1.25 (Arzelà-Ascoli). *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas con dominio $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ abierto, entonces $\mathcal{F}$ es normal si, y solo si es puntualmente acotada y puntualmente equicontinua.*

Demostración. Sea $K \subset D$ compacto. Es claro que toda sucesión f_n alcanza su máximo así, $\mathcal{F}$ es puntualmente acotada. Para probar la equicontinuidad puntual en $z_0 \in D$, sea $\epsilon > 0$ y supongamos que esta propiedad no se cumple. Entonces para cada $\delta_n = 1/n$ podemos elegir $f_n \in \mathcal{F}$ y una sucesión de puntos z_n tal que si $|z_n - z_0| < \delta_n$ y $|f_n(z_n) - f(z_0)| \geq \epsilon/3$. Por hipótesis la sucesión $\{f_n\}$ tiene una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge uniformemente en K a una función f , es decir, existe $\delta > 0$ tal que $|f_{n_k}(z) - f(z)| < \epsilon/3$ para todo $z \in K$. Como $\{z_n\} \subset K$, si $z_{n_k} \rightarrow z_0$ y f es una función continua, entonces

$$\epsilon \geq |f_{n_k}(z_{n_k}) - f_{n_k}(z_0)| \leq |f_{n_k}(z_{n_k}) - f(z_{n_k})| + |f(z_{n_k}) - f(z_0)| +$$

$$|(z_0) - f_{n_k}(z_0)| < \epsilon,$$

que es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es equicontinua puntualmente. Supongamos ahora que la familia $\mathcal{F}$ equicontinua y acotada puntualmente. Sea $(f_n) \subset \mathcal{F}$ una sucesión y consideremos el siguiente conjunto

$$R_D = \{z \in D : \operatorname{Im}(z), \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{Q}\}.$$

Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ se tiene que R_D es denso en D luego, por el axioma de elección es posible escoger un subconjunto numerable de R_D y construir con estos elementos una sucesión $\{z_n\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\{f_n(z_k)\}$, la cual es una sucesión contenida en $\mathcal{F}$ que tiene al menos un punto de acumulación, digamos w_k , entonces $\{f_n(z_k)\}$ posee una subsucesión convergente a w_k . Ahora, elijamos una sucesión de índices creciente j_i^k tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_{j_i^k} f(z_k) = w_k.$$

De esta manera obtenemos una sucesión de $\{f_n(z_k)\}$. Sea $n_k = j_i^k$, la subsucesión de f_n que converge uniformemente a la función construida puntualmente, por el límite anterior esta bien definida por ser f equicontinua de manera puntual. $\square$

Teorema 1.26 (Montel). *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones analíticas en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{C}$. Supongamos que $\mathcal{F}$ es localmente acotada en U . Entonces $\mathcal{F}$ es una familia normal en U .*

Demostración. Por ser localmente acotada $\mathcal{F}$ en U , entonces $\mathcal{F}$ es puntualmente acotada, por lo tanto por el Teorema de Arzelà-Ascoli, bastará demostrar que la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua en U . Sea $z_0 \in U$, existe $r > 0$ tal que el disco cerrado $\overline{D}(z_0, 2/r) \subset U$. Además, existe una constante $\nu = \nu(K) > 0$ tal que

$$|f(\varsigma)| \leq \nu$$

para $f \in \mathcal{F}$ y $\varsigma \in K$. Para $z \in D(z_0, r)$ y $f \in \mathcal{F}$, luego por la fórmula integral de Cauchy tenemos:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\varsigma - z_0|=2r} \frac{f(\varsigma) d\varsigma}{\varsigma - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\varsigma - z_0|} \frac{f(\varsigma) d\varsigma}{\varsigma - z_0} \right| \\ &\leq \frac{|z - z_0|}{|2\pi|} \int_{|\varsigma - z_0|} \frac{|f(\varsigma)| |d\varsigma|}{|z - \varsigma| |z_0 - \varsigma|} \leq \frac{|z - z_0|}{r}. \end{aligned}$$

Sea $\epsilon > 0$ y pongamos $\delta = \min\{r, rn/\epsilon\}$, si $|z - z_0| < \delta$, por el argumento anterior, se tiene que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$. $\square$

Una consecuencia del teorema de Montel es el siguiente resultado que puede ser consultado en [20].

Teorema 1.27. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones analíticas en un dominio $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$. Supongamos que $\mathcal{F}$ es localmente acotada (con respecto a la métrica cordal) en D . Entonces $\mathcal{F}$ es una familia normal en D .*

Enseguida nos enfocaremos en la teoría necesaria para el desarrollo de los teoremas de Picard, los cuáles son consecuencia del teorema de Montel y forman parte importante para el desarrollo de este trabajo.

1.4. Clasificación de singularidades aisladas

Un punto z_0 en donde la función f no es analítica se denomina punto singular. Las singularidades de una función se clasifican como sigue:

- (a) *Singularidades aisladas.* Si existe una vecindad U de z_0 que no contenga otro punto singular $z \neq z_0$.
- (b) *Singularidades no aisladas.* Si una función f contiene un conjunto de singularidades aisladas en cada vecindad de un punto z_0 , entonces decimos que z_0 es una singularidad no aislada.

Recordemos que una singularidad aislada tiene su naturaleza de acuerdo a la expansión de serie de Laurent correspondiente de la función, esto es;

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n(z - z_0)^n \quad (1.3)$$

en el disco perforado $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

Si z_0 es una singularidad aislada de f , entonces z_0 tiene la siguiente clasificación:

1. z_0 se dice evitable o removible si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0) = 0.$$

2. z_0 es un polo o polo simple si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty.$$

3. z_0 es un polo de orden $k \in \mathbb{N}$ si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k |f(z)| = c, \quad c \neq 0.$$

4. z_0 es singularidad esencial si no es polo ni singularidad removible.

Definición 1.28. Una función $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es meromorfa en U si f es holomorfa en U excepto por polos. Además, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se dice entera si f es holomorfa en todo el plano complejo $\mathbb{C}$.

Es común identificar a las singularidades esenciales por medio de su expansión en serie de Laurent porque los índices negativos en (1.3) de una singularidad z_0 de este tipo son infinitos. El siguiente teorema es una caracterización de los polos de una función holomorfa, su demostración puede ser consultada en [23].

Teorema 1.29. Sea f una función holomorfa en el disco perforado $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Entonces f tiene un polo en z_0 de orden k si, y sólo si

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k},$$

donde g es una función holomorfa en $B(z_0, r)$.

1.5. Valores singulares de una función holomorfa

Definición 1.30. Sea f una función analítica sobre un conjunto abierto A del plano complejo. Diremos que w es un valor crítico de f , si $w = f(z_0)$, donde z_0 satisface que $f'(z_0) = 0$. Al punto z_0 le llamamos punto crítico.

Definición 1.31. Sea f una función analítica. Un punto $z \in \mathbb{C}$ es un valor asintótico de f si existe una curva $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\gamma(t) \rightarrow \infty$ y $f(\gamma(t)) \rightarrow z$, cuando $t \rightarrow \infty$.

Observación 1.32. Si $f(z) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i z^i$ y $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva tal que $\gamma(t) \rightarrow \infty$, entonces f no tiene valores asintóticos.

Ejemplo 1.33. si $g(z) = \cos(z)$, entonces $g'(z) = -\sin(z)$ así, los puntos críticos de $g(z)$ son de la forma $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Luego, los valores críticos de la función $g(z)$ son los puntos $g(k\pi) = \{1, -1\}$ $k \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 1.34. Sea $f(z) = e^z$ y $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ una curva dada por $\gamma(t) = -t$. Cuando $t \rightarrow \infty$, $f(\gamma(t)) = e^{-t} \rightarrow 0$, por lo tanto 0 es un valor asintótico de la función exponencial.

Definición 1.35. El conjunto de valores singulares de una función f denotado por $VS(f)$ es la clausura de la unión del conjunto de valores asintóticos denotado por $VA(f)$ con el conjunto de los valores críticos denotado por $VC(f)$, es decir

$$VS(f) = \overline{VC(f) \cup VA(f)}$$

.

Definición 1.36. Decimos que w es un valor omitido de la función f , si $f(z) \neq w$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Por ejemplo, si $f(z) = \exp(z)$, entonces el punto 0 es un valor omitido de f .

1.6. Teoremas de Picard y Montel

Una consecuencia del teorema de Montel es el teorema de Picard que establecen lo siguiente:

Teorema 1.37. (*Pequeño de Picard*) [Conway] Si f es una función entera que omite dos valores, entonces f es constante.

Teorema 1.38. (*Grande de Picard*) [Conway] Toda función analítica f toma en un entorno arbitrario de un punto singular esencial z_0 cualquier valor finito, a excepción, posiblemente, de uno.

Definición 1.39. Una región o dominio es un subconjunto del plano complejo conexo y abierto.

Teorema 1.40 (Montel). Sea U un dominio, $\mathcal{F} : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una familia de funciones meromorfas y $a, b, c \in \mathbb{C}$ tres puntos omitidos de f distintos a pares para toda $f \in \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}$ es normal en U .

Una versión más débil de este teorema es conocido como el teorema de Montel-Caratheodory que establece lo siguiente

Teorema 1.41. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones meromorfas definidas sobre un dominio D y supongamos que la familia $\mathcal{F}$ omite los valores 0 y 1, entonces $\mathcal{F}$ es normal en D .

El siguiente corolario es consecuencia del teorema pequeño de Picard, la demostración puede ser consultada en [9] y [20].

Corolario 1.42. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones analíticas en un dominio $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ tal que para toda vecindad V de z_0 la familia no es normal, entonces $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(V)$ omite a lo más dos puntos en $\hat{\mathbb{C}}$.

Capítulo 2

Elementos de la dinámica holomorfa

En este capítulo se abordan los conceptos generales de iteración de funciones y los conjuntos de Fatou y Julia que son necesarios para el desarrollo de este trabajo.

Las funciones enteras trascendentes son funciones holomorfas en todo el plano complejo que no son polinomios, es decir, la representación en serie de Teylor de la función tiene una cantidad infinita de coeficientes diferentes de cero.

A la clase de todas las funciones enteras trascendentes las denotaremos como:

$$\mathcal{E} = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es entera trascendente}\}.$$

Algunos ejemplos de funciones en la clase $\mathcal{E}$ son los siguientes:

(a) $e^z + \sin(z)$.

(b) $e^z + z$.

(c) $\lambda \sin(z) \quad \lambda \in \mathbb{C}$.

Por otra, una función racional es el cociente de dos polinomios sin factores comunes es decir;

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad \text{donde } P(z) \text{ y } Q(z) \text{ son polinomios coprimos.}$$

Observemos que los ceros de f son los ceros del polinomio P y los polos de f son los ceros del polinomio Q .

Las funciones meromorfas trascendentes (m. t.) se caracterizan por tener una única singularidad esencial en ∞ . Estas funciones tienen por lo menos un polo que no es valor omitido. Esta clase de funciones se denota de la siguiente forma

$$\mathcal{M} = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \mid f \text{ es m.t. con al menos un polo que no es omitido}\}.$$

Ejemplos de funciones en la clase $\mathcal{M}$ son los siguientes:

(a) $\lambda \tan(z)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) $\lambda \sin(z) + \frac{1}{z}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Observación 2.1. Las clases $\mathcal{E}$ y $\mathcal{M}$ son disjuntas, es decir $\mathcal{E} \cap \mathcal{M} = \emptyset$.

2.0.1. Puntos fijos y periódicos

Dada una función f en la clase $\mathcal{E}$ o $\mathcal{M}$ y $n \in \mathbb{N}$ se define la n -ésima iteración de f como:

$$\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ veces}},$$

esto es, la función que resulta de componer n veces a f consigo misma y la denotaremos por f^n , para toda $z \in \mathbb{C}$ donde $f^0(z) = z$ y $f^1(z) = f$,

Observación 2.2. (a) Si $g \in \mathcal{E}$, entonces $g^n \in \mathcal{E}$,

(b) Si $g \in \mathcal{M} \nRightarrow g^n \in \mathcal{M}$

En las siguientes definiciones vamos a considerar a f como una función en las clases $\mathcal{E}$ o $\mathcal{M}$.

Definición 2.3. (a) Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, el conjunto $\{z_0, z_1, \dots, z_n, \dots\}$, donde $z_n = f^n(z_0)$, $n \in \mathbb{N}$ es la órbita hacia adelante de z_0 bajo f y se denotará por

$$\mathcal{O}^+(z_0).$$

(b) La órbita hacia atrás de z_0 bajo f es

$$\mathcal{O}^-(z_0) = \bigcup_{n \geq 0} (f^n)^{-1}(z_0),$$

donde $(f^n)^{-1}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : f^n(z) = z_0\}$.

(c) Finalmente, la órbita de z_0 bajo f es

$$\mathcal{O}^+(z_0) \cup \mathcal{O}^-(z_0).$$

Definición 2.4. Decimos que z_0 es un punto fijo de f si $f(z_0) = z_0$. Además, si existe $n \neq 0$ tal que $f^n(z_0) = z_0$ y n es el menor natural que satisface esta igualdad, entonces z_0 es un punto periódico de periodo n .

Definición 2.5. Sea f analítica y z_0 un punto fijo de f .

1. Si $|f'(z_0)| = 0$, entonces z_0 es un punto fijo superatractor.
2. Si $|f'(z_0)| < 1$, entonces z_0 es un punto fijo atractor.
3. Si $|f'(z_0)| > 1$, entonces z_0 es un punto fijo repulsor.
4. Si $|f'(z_0)| = 1$ y es raíz de la unidad, entonces z_0 es un punto fijo indiferente racional.
5. Si $|f'(z_0)| = 1$ pero $f'(z_0)$ no es raíz de la unidad, entonces z_0 es un punto fijo irracional indiferente.

Cuando $\mathcal{O}^-(z_0)$, $z_0 \in \mathbb{C}$ (o $\widehat{\mathbb{C}}$) es finita el punto es llamado excepcional. El conjunto de los puntos excepcionales de f se denota por $E(f)$.

Teorema 2.6. Si $f \in \mathcal{E}$, entonces $|E(f)| \leq 1$.

A las órbitas de los puntos fijos atractores repulsores e indiferentes también se les conoce como órbita atractora, órbita repulsora u órbita indiferente respectivamente.

Los puntos no periódicos para los que existe un natural n tal que su imagen bajo f^n es un punto periódico, se llaman preperiódicos o eventualmente periódicos.

La cuenca de atracción de un punto periódico atractor es el conjunto

$$\{z : f^{pn} \rightarrow z_0\}.$$

Observemos que un punto periódico de periodo n es un punto fijo de la n -ésima iteración f . Por otra parte, al valor de $(f^n)'(z_0)$ se le conoce como el multiplicador de z_0 . Si $z_0 = \infty$, entonces el multiplicador de z_0 está dado por $(g^n)'(0)$, donde $g(z) = f(1/z)$. Aplicando la regla de la cadena tenemos

$$(f^n)'(z_0) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(z_0)).$$

En lo que sigue describiremos algunas propiedades de los conjuntos de Fatou y de Julia que se definen a continuación.

Definición 2.7. Sea f una función que pertenece a la clase $\mathcal{E}$ o $\mathcal{M}$. El conjunto de Fatou de f (o conjunto estable) $F(f)$ es el conjunto formado por todos los puntos $z \in \mathbb{C}$ tales que la sucesión de iteraciones de f , está bien definida y forma una familia normal en una vecindad de z .

$$F(f) = \{z \in \mathbb{C} : \{f^n(z)\} \text{ está definida y es normal}\}.$$

El conjunto de Julia de f (o conjunto inestable) $J(f)$ es el complemento del conjunto de Fatou, esto es, $(F(f))^c$.

Los siguientes resultados pueden ser consultados en [7], [20] y [23].

Proposición 2.8. Sea $f \in \mathcal{E}$ o $\mathcal{M}$, entonces

$$F(f) = \bigcup_{z \in F(f)} V_z,$$

donde V_z es una vecindad de z tal que $\{f^n\}$ está bien definida y es normal.

Teorema 2.9. Sea $f \in \mathcal{E}$ o $\mathcal{M}$, entonces:

1. $F(f)$ es abierto y $J(f)$ es cerrado.

2. $J(f)$ es perfecto.
3. $F(f)$ y $J(f)$ son completamente invariantes.
4. $F(f^{\circ n}) = F(f)$ y $J(f^{\circ n}) = J(f)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
5. $J(f)$ es la clausura del conjunto de los puntos periódicos repulsores de f .

Las propiedades anteriores fueron demostradas para funciones enteras trascendentes por Fatou y Baker en [3] y [4] y para funciones trascendentes meromorfas por Baker, Kotus y Yiuan entre 1990 y 1991 en [5] y [6].

Recordemos que cuando $f(A) \subset A$ para algún subconjunto A del dominio de f decimos que A es un conjunto invariante hacia adelante. Si $f^{-1}(A) \subset A$ se dice que A es invariante hacia atrás. Si el conjunto A cumple con ambas condiciones diremos que A es completamente invariante.

Una familia de funciones $\mathcal{F}$ es normal si, y sólo si converge localmente uniformemente.

Teorema 2.10. [20]. *Sea f una función analítica. Si un punto fijo z_0 de f es atractor, entonces existe una vecindad V de z_0 tal que la sucesión $\{f^n|_V\}$ converge uniformemente.*

Es decir, si un punto z_0 de f es atractor, entonces existe una vecindad V de z_0 donde la familia de iteradas $\{f^n\}$ de f es normal. Similarmente se tiene la caracterización de los puntos repulsores.

Teorema 2.11. *Un punto fijo z_0 de una función analítica f es repulsor si existe una vecindad U de z_0 , tal que para cada $z \in U \setminus \{z_0\}$ existe $n \geq 1$ que cumple $f^n \notin U$.*

2.0.2. Componentes de Fatou

Observemos que por definición, el conjunto de Fatou es abierto, así podemos hablar de componentes. De aquí en adelante componente siempre significará componente conexa.

Si $f \in \mathcal{M}$ o $f \in \mathcal{E}$ y U es una componente del conjunto de Fatou $F(f)$, se tiene:

- (a) U es periódica, si existe $n > 0$ tal que $f^{on}(U) = U$.
- (b) U es eventualmente periódica o preperiódica, si existe n natural y $\Gamma \subset F(f)$ una componente periódica tal que $f^{on}(U) \subset \Gamma$.
- (c) U se dice errante si no es periódica ni preperiódica.

Las componentes periódicas para funciones meromorfas trascendentes y enteras trascendentes, que caracteriza la dinámica en el conjunto de Fatou se clasifican como sigue:

Sea U una componente periódica de $F(f)$ de periodo n . Entonces se tiene las siguientes 5 posibilidades:

- I. La componente U contiene un punto z_0 atractor de periodo n . Entonces $f^{onk}(z) \rightarrow z_0$ para toda z en U cuando $k \rightarrow \infty$. La componente U se llama componente de atracción de z_0 .
- II. Si la frontera de U contiene un punto periódico z_0 de periodo n , tal que $f^{onk}(z) \rightarrow z_0$ para todo $z \in U$ cuando $k \rightarrow \infty$ y $|(f^n)'(z_0)| = 1$, entonces U es una componente de Leau o componente parabólica.
- III. Si existe un homeomorfismo analítico $\phi : U \rightarrow D$ donde D es el disco unitario tal que ϕ conjugue a f^n con $e^{2\pi i\theta}$ para algún θ irracional, U es un disco de Siegel.
- IV. Si existe un homeomorfismo analítico $\phi : U \rightarrow A$ donde A es el anillo $\{z : 0 < |z| < r\}$ con $r > 1$, tal que ϕ conjugue a f^n con $e^{2\pi i\theta}$ para algún θ irracional, U es un anillo de Herman.
- V. Existe un punto z_0 en la frontera de U tal que $f^{nk}(z) \rightarrow z_0$ para toda z en U cuando $k \rightarrow \infty$, pero $f^n(z_0)$ no está definida, U se llama componente de Baker.

A continuación enunciamos algunos resultados de la clase $\mathcal{E}$ y de la clase $\mathcal{M}$ relacionados con los conjuntos de Fatou y Julia.

Definición 2.12. *El conjunto excepcional de Fatou, consta de todos los puntos cuya órbita hacia atrás es finita, es decir, si $f \in \mathcal{E}$*

$$E(f) = \{z : \mathcal{O}^-(z) \text{ es finito}\}.$$

Teorema 2.13. [8] Si $f \in \mathcal{M}$, $z_0 \in J(f)$ y $z_0 \notin E(f)$, entonces $J(f) = \overline{O^-(z_0)}$.

Demostración. El conjunto de Julia es cerrado y completamente invariante así, $\overline{O^-(z_0)} \subset J(f)$. Por otra parte, consideramos un punto $x \in J(f)$ y V una vecindad de x . Supongamos que $V \cap O^-(z_0)$ es vacío, como $z_0 \notin E(f)$, $|O^-(z_0)|$ es infinito, luego por el teorema de Montel $\{f^n(z_0)\}$ es normal en V , lo cual contradice que $x \in J(f)$. Por lo tanto $x \in \overline{O^-(z_0)}$. $\square$

Teorema 2.14. [8] Sea $f \in \mathcal{M}$ y U una componente del conjunto de Fatou.

1. Si U es una componente atractora o parabólica, entonces U contiene un valor singular de f .
2. Si U es un disco de Siegel o un anillo de Herman, entonces $\partial U \subset \overline{O^+(SV(f))}$, donde ∂U es la frontera de U .

Lema 2.15. Si U es un subconjunto abierto que intersecta a $J(f)$, entonces ninguna subsucesión de $\{f_n\}$ es normal en U .

Teorema 2.16. Si $f \in \mathcal{E}$, entonces no existen los anillos de Herman.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{E}$ y supongamos que existe H un anillo de Herman. Entonces los puntos de la componente interior de ∂H tienen que estar en $J(f)$. Por otro lado, sea γ una curva de Jordan invariante en H , observemos que todas las iteradas de f están uniformemente acotadas sobre la curva γ , luego por el Principio de Módulo Máximo, también lo están en la componente acotada del complemento de H , esto implica que las iteradas de f forman una familia uniformemente acotada, y por el teorema de Montel, es normal en la unión de H con la componente acotada del complemento de H . Por lo tanto este conjunto debe estar en $F(f)$ y no puede contener puntos de $J(f)$, pero esto es una contradicción con el hecho que ∂H contiene puntos de $J(f)$. $\square$

La demostración de los siguientes resultados puede consultarse en [6], [10] y [14].

Conjetura 2.17. *Una función entera trascendente no puede tener más de una componente completamente invariante en el conjunto de Fatou. Mas aún, dicha componente es simplemente conexa y no acotada.*

Definición 2.18. *Sea $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ un dominio.*

1. *D es simplemente conexo si toda curva cerrada simple puede ser deformada continuamente a un punto de D .*
2. *Diremos que D es múltiplemente conexo, si D es conexo pero no simplemente conexo.*

Para componentes múltiplemente conexas se tiene el siguiente teorema que puede consultarse en [6].

Teorema 2.19. *Si $f \in \mathcal{E}$ y U es una componente múltiplemente conexa de $F(f)$, entonces $f^n(U) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.*

Otra característica que nos ayudará en el desarrollo de este trabajo es el siguiente resultado hecho por el Baker.

Corolario 2.20. *Un ciclo de dominios atractores o dominios de Leau contiene al menos un valor singular.*

Definición 2.21. [14] *La subclase $\mathcal{S}$ de $\mathcal{E}$ es la clase de funciones f para las cuales $VS(f)$ es finito.*

Teorema 2.22. [13] *Si $f \in \mathcal{S}$, entonces $F(f)$ no contiene componentes errantes, es decir, $f^n(U) \nrightarrow \infty$ para toda componente U de $F(f)$.*

La demostración del teorema y el corolario siguiente pueden consultarse en [20].

Teorema 2.23. *Sea $f \in \mathcal{E}$ y supongamos el conjunto $SV(f)$ es acotado y $z \in F(f)$, entonces $\{f^n(z)\} \nrightarrow \infty$.*

Corolario 2.24. *Si f es entera trascendente y su conjunto de puntos singulares es acotado, entonces $F(f)$ no contiene dominios de Baker.*

En el caso de los ciclos de componentes de Baker, siempre existe una componente que tiene al punto $z_0 = \infty$. Más aún, si f es una función meromorfa trascendente pero no entera, cualquier componente de $F(f)$ cumple que el punto z_0 correspondiente es un pre-polo.

Teorema 2.25. *Si $f \in \mathcal{S}$, entonces cada órbita en el conjunto de Fatou $F(f)$ es absorbida por uno de los ciclos de los dominios atractores, dominios de Leau o discos de Siegel.*

Corolario 2.26. *Si las órbitas de todos los puntos básicos de una función $f \in \mathcal{S}$ son absorbidos por ciclos o tienden a ∞ , entonces $J(f) = \mathbb{C}$.*

Finalizamos esta sección de resultados con la siguiente definición.

Definición 2.27. *La subclase $\mathcal{B}$ es la clase de funciones en $\mathcal{M}$ tales que $SV(f)$ está contenido en un subconjunto acotado de $\hat{\mathbb{C}}$.*

Por ejemplo la función $h_\lambda(z) = \lambda \frac{\operatorname{sen}(z)}{z}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tiene un valor asintótico en $z = 0$ y sus puntos críticos se encuentran contenidos en el disco cerrado $\{w : |w| \leq 1\}$. Por lo tanto $h_\lambda(z)$ pertenece a la clase $\mathcal{B}$.

Capítulo 3

La familia

$$\lambda \operatorname{sen}(z), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

En este capítulo aportaremos algunos resultados generales de la familia $f(z) = \operatorname{sen}(z)$ y de la dinámica de la familia $\lambda \operatorname{sen}(z)$ y se investigarán algunas aproximaciones. Los resultados pueden consultarse en [10] y [24].

La función $f(z) = \operatorname{sen}(z)$

Se define la función $\operatorname{sen}(z)$, $z \in \mathbb{C}$ como sigue:

$$\operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-i}}{2i}.$$

De manera similar se define la función $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-i}}{2}$. Claramente esta función es una extensión de la correspondiente función de variable real. La función *seno* compleja también cumple las propiedades de las identidades más comunes que se enuncian a continuación.

1. $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$, $\cos(-z) = \cos(z)$.
2. $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen}(z)\cos(w) + \cos(z)\operatorname{sen}(w)$, para cuales quiera $z, w \in \mathbb{C}$.
3. $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(w)$.

Las funciones $\text{sen}(z)$ y $\text{cos}(z)$ son periódicas. Por otra parte,

$$\text{sen}(\pi/2 - z) = \text{sen}(\pi/2) \cos(-z) - \text{sen}(z) \cos(\pi/2) = \cos(z)$$

es decir, el coseno es la composición del seno con una rotación del origen π radianes, seguida de una traslación $\pi/2$. Para analizar la geometría de la función seno observemos lo siguiente. Sea $z = x + iy$,

$$\text{sen}(z) = \text{sen}(x + iy) = \text{sen}(x) \cos(iy) + \text{sen}(iy) \cos(x).$$

Considerando las propiedades del seno y coseno hiperbólico tenemos:

$$\text{sen}(z) = \text{sen}(x) \cosh(y) + i \sinh(y) \cos(x) = u + iv. \quad (3.1)$$

Por lo tanto, si tomamos puntos de la forma $Im(z) = y_0$, $y_0 \neq 0$ y aplicamos la identidad $\text{sen}^2 + \cos^2 = 1$ de donde se satisface la ecuación

$$\frac{u^2}{\cosh(y_0)} + \frac{v^2}{\sinh(y_0)} = 1.$$

De manera similar, tenemos que los puntos de la forma $Re(z) = x_0$ con $x_0 \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, satisfacen la ecuación:

$$\frac{u^2}{\cos(x_0)} - \frac{v^2}{\text{sen}(x_0)} = 1,$$

es decir, la función seno transforma las rectas horizontales en elipses y las rectas verticales en hipérbolas. Los casos especiales como el eje real se transforma en el intervalo $[-1, 1]$, que se puede pensar como una elipse degenerada. Por otra, parte el eje imaginario se transforma en sí mismo y se puede considerar como una hipérbola degenerada. Los casos especiales son las rectas $Re(z) = \pi/2 + k\pi$ y $Re(z) = -\pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, las cuales se transforman en los intervalos $[1, \infty)$ y $(-\infty, -1]$, respectivamente.

3.1. Valores singulares de $\lambda \operatorname{sen}(z)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Iniciamos el análisis dando algunos aspectos generales de la dinámica de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Observemos que los puntos críticos de $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, están dados por la siguiente ecuación:

$$\lambda \cos(z) = 0 \Leftrightarrow z = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

donde $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ son los puntos críticos de f_λ .

Para encontrar los valores críticos de f_λ tenemos:

$$f_\lambda\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \lambda, \quad \text{si } k > 0$$

y

$$f_\lambda\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = -\lambda, \quad \text{si } k < 0.$$

Así, $\{\lambda, -\lambda\}$ son los valores críticos de f_λ .

Observación 3.1. *La familia f_λ no tiene valores asintóticos*

Por la observación anterior, tenemos; $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$ pertenece a la clase $\mathcal{S}$ y por los teoremas 2.16, 2.22 y el corolario 2.24, no tiene anillos de Herman, componentes errantes ni dominios de Baker.

3.2. Puntos fijos de la familia $\lambda \operatorname{sen}(z)$

Los puntos fijos de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ proporcionan información de las posibles componentes Fatou, sin

embargo, calcular estos puntos no es una tarea fácil. Los puntos fijos de f_λ los proporciona la ecuación:

$$f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) = z$$

y los puntos fijos de f_λ de periodo k los proporciona la ecuación:

$$f_\lambda^k(z) = z.$$

Claramente 0 es un punto fijo de f_λ sin embargo, cuando variamos el parámetro con distintos valores complejos la pregunta obligada es: ¿qué ocurre con los puntos fijos?.

Observar que de la definición de la función seno se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lambda \operatorname{sen}(z) = z &\Leftrightarrow \lambda \left[\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right] = z \\ &\Leftrightarrow \lambda [e^{iz} - e^{-iz}] - 2iz = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda(e^{2iz} - 1) - 2ize^{iz} = 0 \\ &\Leftrightarrow z = -i \ln \left(\frac{\lambda iz \pm \sqrt{\lambda^2 - z^2}}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, encontrar puntos fijos de f_λ da como resultado una ecuación que no es fácil de resolver.

Alternativamente, podemos encontrar los puntos fijos de f_λ para un parámetro dado de la siguiente manera.

Tomemos $\lambda = a + ib$ y $z = x + iy$ con $a, b, x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y evaluemos λ y z en f_λ

$$\lambda \operatorname{sen}(z) = (au - bv + i(av + bu)), \quad (3.2)$$

donde u y v están descritas en la ecuación (3.1), es decir,

$$\operatorname{sen}(x) \cosh(y) = u \text{ y } \sinh(y) \cos(x) = v.$$

La ecuación (3.2) nos da el seno real cuando $\operatorname{Im}(\lambda) = 0$ y $\operatorname{Im}(z) = 0$.

Sea z es un punto fijo de f_λ , entonces se tiene

$$au - bv + i(av + bu) = x + iy.$$

Ahora, queremos encontrar puntos fijos de f_λ que pertenezcan a la gráfica de una función continua y para ciertos valores del parámetro λ .

Por simplicidad consideramos parámetros únicamente en la recta $\operatorname{Im}(\lambda) = b_0$, y evaluamos el seno en puntos del plano complejo que pertenezcan a la gráfica de una función continua $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, decir, en los puntos $z = (x, g(x)) = x + ig(x)$, entonces obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \lambda \operatorname{sen}(z) &= a \operatorname{sen}(x) \cosh(g(x)) - b_0 \sinh(g(x)) \cos(x) + \\ &\quad i(a \sinh(g(x)) \cos(x) + b_0 \operatorname{sen}(x) \cosh(g(x))). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ejemplo 3.2. (I) Si $g(x) \equiv 0$ y $\lambda = (a + i0)$, esto es, valores del parámetro tomados en la recta real, entonces de la ecuación (3.3) obtenemos que

$$f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(x + 0i) = a \operatorname{sen}(x) + i0.$$

Por lo tanto, si hay puntos fijos complejos de f_λ en la gráfica de la función cero, tienen que cumplir $a \operatorname{sen}(x) = x$ y $0 = g(x)$, los cuales son los puntos fijos para el caso real $\lambda \operatorname{sen}(x)$.

(II) Si $g(x) = 0$ y $\lambda = (a + ib_0)$ con $b_0 \neq 0$, nuevamente por la ecuación (3.3) tenemos:

$$f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) = a \operatorname{sen}(x) + ib_0 \operatorname{sen}(x).$$

Para encontrar puntos fijos que pertenezcan a la gráfica de g se resuelve el siguiente sistema.

$$\begin{aligned} a \operatorname{sen}(x) &= x; \\ b_0 \operatorname{sen}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Puntos fijos de $\lambda \operatorname{sen}(x)$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Por propiedades del seno real, es fácil ver que si $\lambda \in (0, 1]$, entonces el único punto fijo es el 0. Sin embargo, si $\lambda \in (1, \frac{\pi}{2}]$ tal como se muestra en la figura 3.1, el punto fijo pertenece al intervalo $(0, \frac{\pi}{2}]$ y su respectivo simétrico en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, 0)$. Por otro lado, si $\lambda \in (\frac{\pi}{2}, 7.7]$ el punto fijo positivo pertenece al intervalo $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. En esta sección se extenderán algunos cálculos obtenidos por L. Trujillo en [24].

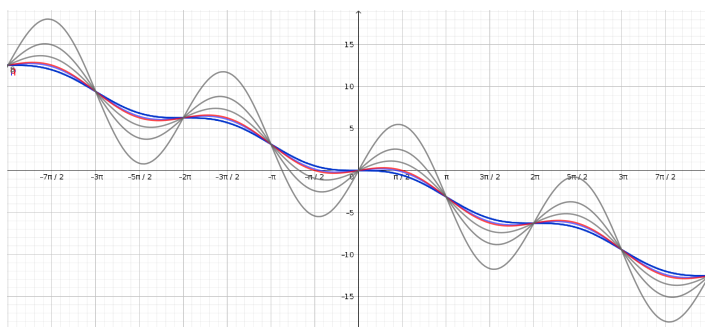


Figura 3.1: puntos fijos de $f_\lambda(x) = \lambda \operatorname{sen}(x)$ para $\lambda = 1.1, 1.3, 2.5, 4, 5, 7.7$.

Proposición 3.3. *Para $\lambda \in (1, 7.7]$ la familia real $f_\lambda(x) = \lambda \operatorname{sen}(x)$ tiene solo dos puntos fijos distintos de cero.*

Demostración. La prueba se divide en los siguientes dos casos, cuando (a) $\lambda \in (1, \pi/2)$ y (b) $\lambda \in [\frac{\pi}{2}, 7.7)$.

(a) Consideremos primero $\lambda \in (1, \pi/2]$ y definamos $g(x) = \lambda \operatorname{sen}(x) - x$. Es claro que $f_\lambda(x) = \lambda \operatorname{sen}(x)$ es creciente en el intervalo $[0, \pi/2]$ y que

$$x \leq \lambda \operatorname{sen}(\pi/2) = \lambda, \text{ para toda } x \in [0, \pi/2].$$

Tomemos $\lambda \in (1, \pi/2)$, entonces

$$\lambda \cos(0) = \lambda > 1$$

y como la función $\lambda \cos(x)$ es decreciente y continua en el intervalo $[0, \pi/2]$, existe $x_0 \in (0, \pi/2)$ tal que $\lambda \cos(x_0) = 1$. Así,

$$1 < \lambda \cos(y), \text{ para toda } y \in (0, x_0).$$

Si $y_0 \in (0, x_0)$, entonces

$$\lambda \cos(y) - 1 > 0, \text{ para toda } y \in [0, y_0],$$

así que

$$\int_0^{y_0} [\lambda \cos(y) - 1] dy > 0,$$

es decir,

$$\lambda \int_0^{y_0} \cos(y) dy > \int_0^{y_0} dy, \quad (3.4)$$

que implica que $\lambda \operatorname{sen}(y_0) > y_0$ y por lo tanto $g(y_0) > 0$.

Por otra parte,

$$f_\lambda(\pi/2) = \lambda < \pi/2,$$

es decir, $g(\pi/2) < 0$, luego por el teorema del valor intermedio existe $u \in (y_0, \pi/2)$ tal que $g(u) = 0$, esto es, u es un punto fijo de la familia f_λ . Observemos que $\lambda \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ si $\lambda = \frac{\pi}{2}$.

Ahora probemos la unicidad.

Supongamos que u y v son puntos fijos para la familia f_λ en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2}]$ con $u < v$, entonces $g(u) = g(v) = 0$ y por el teorema de Rolle, existe $c \in (u, v)$ tal que $g'(c) = 0$, por lo tanto $\lambda \cos(c) = 1$ y por la inyectividad del coseno en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ tenemos que $c = x_0$, luego por la ecuación (3.4) se concluye que $\lambda \operatorname{sen}(u) > u$ que es una contradicción.

(b) Sea $\lambda \in (\frac{\pi}{2}, 7.7]$. Observemos que si p es un punto fijo de $f_\lambda(x) = \lambda \operatorname{sen}(x)$, como $f_\lambda(\frac{\pi}{2}) = \lambda > \frac{\pi}{2} > 1$ y $f_\lambda(x)$ es continua y estrictamente creciente en $[0, \frac{\pi}{2}]$, entonces $p \notin (0, \frac{\pi}{2}]$ y $g(\frac{\pi}{2}) > 0$. Por otra parte $g(\pi) < 0$, nuevamente por el teorema de valor medio, existe $c \in (\pi/2, \pi)$ tal que $g(c) = 0$. Ahora, supongamos que $u < v$ son puntos fijos para f_λ en el intervalo $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, entonces

$g(u) = g(v) = 0$ y por el teorema de Rolle, existe $c \in (u, v)$ tal que $0 = g'(c) = \lambda \cos(c) - 1$, pero esto no puede ocurrir porque $\lambda \cos(x) < 0$ para toda $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Por otra parte, para $x > 0$, $f_\lambda(x)$ tiene máximos en los puntos $\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, si $\lambda \in (\pi/2, 7.7]$, se tiene que $f_\lambda(\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}\}) = \lambda \leq 7.7 < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}$.

Esto prueba que existe un único punto fijo en $x \in (0, \pi)$ para $\lambda \in (1, 7.7]$ y dado que la función seno es impar, si $x = \lambda \text{sen}(x)$, entonces $\lambda \text{sen}(-x) = -x$ de donde se concluye el resultado. $\square$

Proposición 3.4. Si $\lambda \in (1, \frac{\pi}{2}]$ y p un punto fijo de $f_\lambda(x) = \lambda \text{sen}(x)$ distinto de cero tal que $p \in (0, \frac{\pi}{2}]$, entonces $p > x_0$ donde x_0 cumple que $\lambda \cos(x_0) = 1$.

Demostración. Supongamos que $p < x_0$, por la ecuación (3.4), el punto p no es un punto fijo para f_λ lo cual no puede suceder. Si $p = x_0$, entonces se satisface que $\lambda \text{sen}(p) = p \neq 0$ y $\lambda \cos(p) = 1$ de donde tenemos que

$$\frac{\text{sen}(p)}{\cos(p)} = p,$$

lo cual no ocurre en $(0, \frac{\pi}{2}]$. Por lo tanto, $\lambda \cos(p) < 1$ y $\lambda \cos(-p) < 1$, es decir, p y $-p$ son atractores. $\square$

Usando el Método de Newton-Raphson, y $x_0 = \pi/2$ como punto inicial, podemos aproximar el valor del punto fijo positivo de f_λ y calcular el valor de la derivada del punto para determinar si se trata de un punto fijo atractor o repulsor. Los cálculos se registran en la siguiente tabla:

Parámetro	Aproximación del punto fijo	Derivada
7.7	2.773	-7.182
6.5	2.711	-5.906
5.3	2.624	-4.605
4.1	2.489	-2.257
2.9	2.252	-1.826
1.7	1.688	-0.198

De la tabla anterior podemos observar que:

(i) Si $\lambda \in (1.7, 2.9)$ el respectivo punto fijo puede ser atractor o repulsor.

(ii) Si $\lambda = 2.2$ el valor del punto fijo se aproxima a 2 y el valor de la derivada en este punto es -0.915 , por lo tanto este punto fijo es atractor.

(iii) Si $\lambda = 2.26$, el punto fijo es 2.028 y el valor de su derivada es -0.997 , por lo tanto el punto fijo es atractor. Sin embargo, si $\lambda = 2.27$ el punto fijo tiene un valor aproximado de 2.032 y cuyo valor de la derivada es -1.005 , entonces 2.032 es un punto fijo repulsor.

Conjetura 3.5. Si $\lambda \in (\frac{\pi}{2}, 2.26]$, entonces la familia $f_\lambda(x)$ tiene 2 puntos fijos atractores distintos de cero.

Por los cálculos anteriores, hemos visto que sí $\lambda = 2.27$ y p un punto fijo positivo, entonces p es un punto fijo repulsor. Además, el punto $\lambda \operatorname{sen}(\pi)$ es un punto fijo de f_λ .

Para las gráficas de la segunda iterada para $\lambda = 2.26$ y λ ligeramente mayor que 2.26 observamos que hay una órbita de periodo 2, véase las figuras 3.2 y 3.3. Las gráficas son parecidas, pero al hacer un acercamiento se observa que hay dos nuevos puntos fijos.

Conjetura 3.6. Si $\lambda \in (2.26, 2.6]$, entonces f_λ tiene una órbita atractora de periodo 2 en el intervalo $[0, \pi]$.

(iv) Si $\lambda = 2.6$, la cuarta iteración tiene 4 puntos fijos, 2 correspondientes a los puntos repulsores y 2 a la órbita atractora, véase figura 3.4.

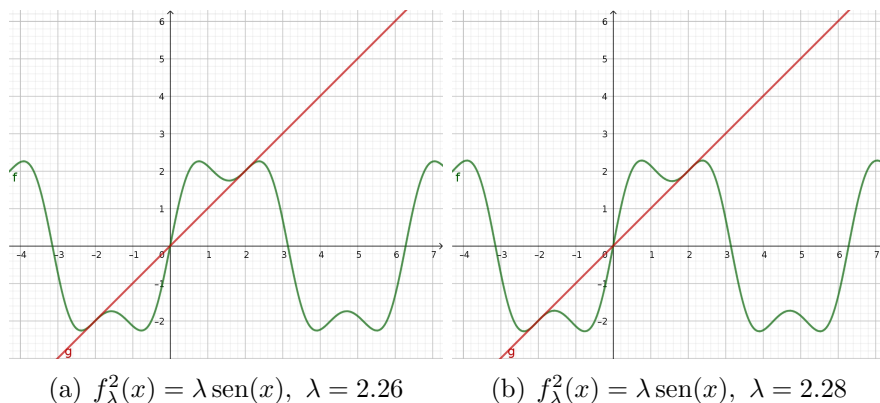


Figura 3.2: Gráficas de la segunda iteración de f_λ .

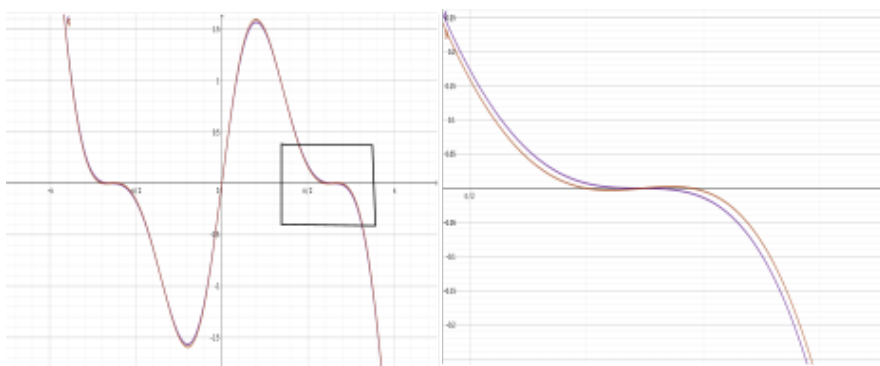


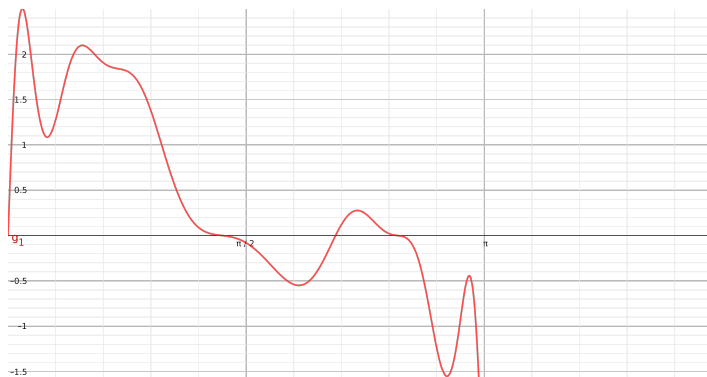
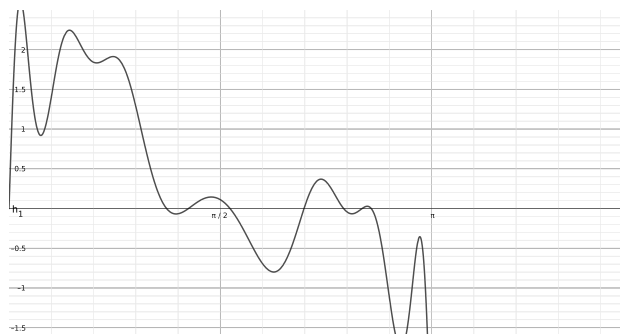
Figura 3.3: Gráficas de $f_{2.26}^2(x) - x$ y $f_{2.28}^2(x) - x$ en azul y rojo respectivamente.

(v) Para $\lambda = 2.7$ aparece una órbita atractora de periodo 8 como se muestra en la figura 3.5.

Conjetura 3.7. Existe λ_0 , tal que si $\lambda \in (2.6, \lambda_0]$, entonces $f_\lambda(x)$ tiene una órbita atractora de periodo 4 en $[0, \pi]$.

Proposición 3.8. Si $f_\lambda(x) = \lambda \sin(x)$ y $\lambda_n = \frac{\pi(4n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces función f_{λ_n} tiene $4n + 2$ puntos fijos distintos de cero.

Demostración. La proposición 3.3 prueba el caso cuando $n = 0$. Si $p > 0$ es un punto fijo, entonces $-p$ también lo es, por lo que

Figura 3.4: Gráfica de $f_{2.6}^4(x) - x$.Figura 3.5: Gráfica de $f_{2.7}^4(x) - x$.

basta contar los puntos fijos positivos. Notemos que cada máximo es un punto fijo, porque se satisface:

$$\lambda \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(4k+1)}{2}\right) = \frac{\pi(4k+1)}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\pi(4k+1)}{2}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (3.5)$$

Ahora sean $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, observemos que si $k < n$, entonces

$$f_{\lambda_n}\left(\frac{\pi(4k+1)}{2}\right) = \frac{\pi(4n+1)}{2} > \frac{\pi(4k+1)}{2} \text{ y}$$

$$f_{\lambda_n}((2k+1)\pi) = 0 < (2k+1)\pi.$$

El resultado se sigue de aplicar el teorema de valor medio a el intervalo $\left[2k\pi, \frac{\pi(4k+1)}{2}\right]$ si $k < n-1$ y al intervalo $\left[\frac{\pi(4k+1)}{2}, (2k+1)\pi\right]$

si $k < n$. La ecuación (3.5) asegura que el punto $\frac{\pi(4n+1)}{2}$ es fijo. El último punto fijo se encuentra en el intervalo $\left[2n\pi, \frac{\pi(4n+1)}{2}\right)$, para encontrarlo se sigue un razonamiento similar al que se ocupó en la desigualdad (3.4), es decir, como $\lambda_n \cos(x)$ es decreciente y continua en el intervalo $\left[2n\pi, \frac{\pi(4n+1)}{2}\right)$, entonces existe $x \in \left[2n\pi, \frac{\pi(4n+1)}{2}\right)$ tal que $\lambda_n \cos(x) = 1$, así, $\lambda_n \operatorname{sen}(x_0) > x_0$ y aplicando teorema de valor medio se obtiene el resultado. $\square$

3.3. El conjunto de Fatou para $\lambda \operatorname{sen}(z)$

En esta sección, se presentan los resultados obtenidos por Domínguez y Sienra en [10] para $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Se define el plano de parámetros de f_λ como:

$$\mathcal{M} = \{\lambda \in \mathbb{C} : f_\lambda^n(z_0) \text{ es acotado}\},$$

donde z_0 es un punto crítico de f_λ .

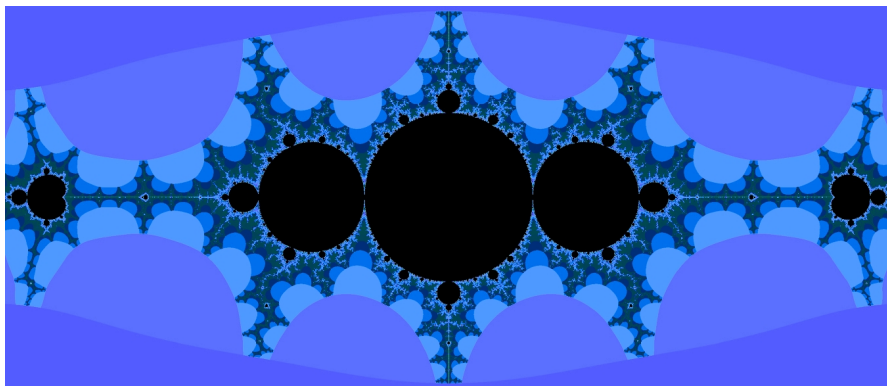


Figura 3.6: Plano de parámetros de la familia $\lambda \operatorname{sen}(z)$.

El plano de parámetros nos permite analizar el comportamiento dinámico de familias parametrizadas, dicho plano es de manera intuitiva un mapa para los distintos valores complejos del parámetro λ . Los siguientes resultados relacionados con los valores del parámetro λ en el plano de parámetros para el caso

(a) y (b) se pueden consultar en [10].

(a) Componente atractora

Teorema 3.9. *Sea $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$, donde $0 < |\lambda| < 1$. El conjunto de Fatou consiste de una componente U atractora completamente invariante y simplemente conexa.*

Cabe mencionar que Domínguez y Trujillo en [24] conjeturan que si $1 < \lambda < \frac{\pi}{2} + 0.57$, entonces el conjunto de Fatou tiene dos componentes simplemente conexas atractoras. Similar para el caso $-\frac{\pi}{2} + 0, 57 < \lambda < 1$. El análisis previo a la Conjetura 3.5 aproxima con mayor exactitud el caso de las componentes atractoras.

(b) Componente Parabólica

Teorema 3.10. *Sea $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$, $\lambda = e^{2\pi i \theta}$, $\theta = p/q$, con $(p, q) = 1$. Entonces si q es par, existe un ciclo con q componentes de Fatou atraídas a 0. Si q es impar, existen dos ciclos con q componentes de Fatou cada una. Estas son las únicas componentes periódicas de Fatou. Más aún, tales componentes son acotadas.*

(c) Disco de Siegel

En [25] Zhang demostró que para $\lambda = e^{2\pi i \theta}$ siendo θ un número irracional, de tipo acotado, la familia f_λ tiene un disco de Siegel que es invariante alrededor de $z = 0$ y todas las otras componentes de Fatou son sus preimágenes. El disco de Siegel es acotado, por lo tanto también todas sus preimágenes.

Capítulo 4

La familia

$$\lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

En este capítulo se estudiará la dinámica de la familia $g_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, la cual es una perturbación de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$ (añadiendo un polo en cero que no es omitido).

4.1. Puntos fijos de $g_{\lambda,\mu}$

La familia $g_{\lambda,\mu}$ pertenece a la clase $\mathcal{M}$. Obsérvese que $g_{\lambda,\mu}$ tiene puntos fijos dependiendo los valores de los parámetros λ y μ . Sabemos que z_0 es un punto fijo de $g_{\lambda,\mu}$ si se satisface la siguiente ecuación:

$$\lambda \operatorname{sen}(z_0) + \frac{\mu}{z_0} = z_0. \quad (4.1)$$

Observemos que

$$\begin{aligned} g_{\lambda,\mu}(-z_0) &= \lambda \operatorname{sen}(-z_0) + \frac{\mu}{-z_0} = -\lambda \operatorname{sen}(z_0) - \frac{\mu}{z_0} \\ &= -\left(\lambda \operatorname{sen}(z_0) + \frac{\mu}{z_0}\right) \\ &= -g_{\lambda,\mu}(z_0), \end{aligned}$$

es decir, si z_0 es un punto fijo de $g_{\lambda,\mu}$, entonces $-z_0$ también es un punto fijo de $g_{\lambda,\mu}$. Para asegurar la existencia de puntos fijos de

$g_{\lambda,\mu}(z)$ consideremos el caso real, es decir, cuando $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $z \in \mathbb{R}$.

Por ejemplo si $\mu = 0.1$, $\lambda = 1$ y $z \in \mathbb{R}$, observando la gráfica en la figura 4.1 vemos que hay dos puntos fijos .

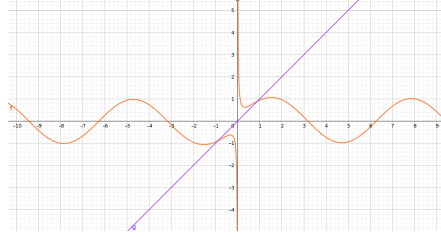


Figura 4.1: Gráfica de $g_{\lambda,\mu}$ cuando $\mu = 0.1$, $\lambda = 1$ y $z \in \mathbb{R}$.

Lema 4.1. Sea $g_{\lambda,\mu}(x) = \lambda \sin(x) + \frac{\mu}{x}$. Si $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $0 < \lambda < 7$ y $0 < \mu < \pi$, entonces $g_{\lambda,\mu}(x)$ tiene un punto fijo w . Más aun $-w$ es punto fijo.

Demostración. Sea $\lambda \in (0, 7)$ y $\mu \in (0, 2.41)$. Tomemos $H(x) = g_{\lambda,\mu}(x) - x$.

Observemos que $\lambda \sin(x) > 0$ sobre el intervalo $(0, \pi)$. Sea $\pi > x > 0$ tal que $x^2 < \mu$, esto implica que $x < \frac{\mu}{x}$, entonces $\frac{\mu}{x} - x > 0$ y por lo tanto $H(x) > 0$.

Ahora, notemos que $H(\pi) = \lambda \sin(\pi) + \frac{\mu}{\pi} - \pi < 1 - \pi < 0$. Aplicando el teorema de valor intermedio obtenemos que $g_{\lambda,\mu}$ tiene un punto fijo $w \in (0, \pi)$.

El caso del punto fijo negativo se sigue por la simetría de la función $g_{\lambda,\mu}(x)$.

□

Conjetura 4.2. Sea $g_{\lambda,\mu}(x) = \lambda \sin(x) + \frac{\mu}{x}$, $\mu \in (0, 1)$ y $-4 < \lambda < 0$, entonces $g_{\lambda,\mu}$ tiene un punto fijo w .

Conjetura 4.3. Sea $g_{\lambda,\mu}(x) = \lambda \sin(x) + \frac{\mu}{x}$, $\mu < -1(0, 1)$ y $-4.5 < \lambda < -0.5$, entonces $g_{\lambda,\mu}$ no tiene puntos fijos. Véase figura 4.2.

El objetivo ahora es analizar aproximaciones a puntos fijos de $g_{\lambda,\mu}$ para estudiar super componentes atractoras, componentes parabólicas, y discos de Siegel en el conjunto de Fatou.

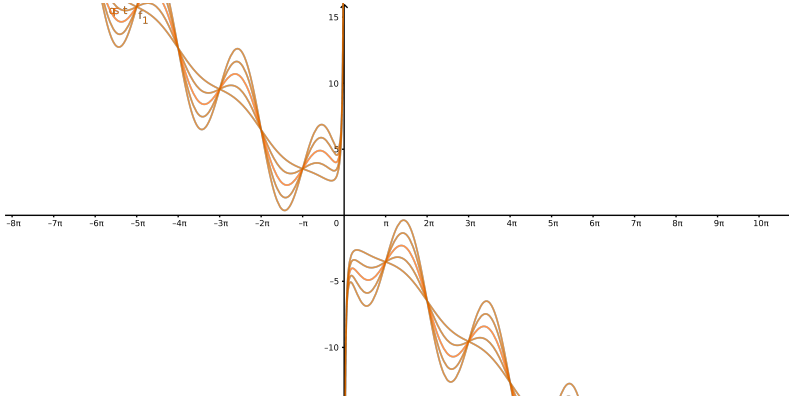


Figura 4.2: Gráfica de $g_{\lambda,\mu}$ cuando $\mu < -1$ y $\lambda = -4.5, -3.5, -2.5, -1.5, -.5$ y $.1$

Puntos fijos atractores de $g_{\lambda,\mu}$

Observemos que $\frac{\pi}{2}$ es un punto fijo para ciertos valores de parámetros λ y μ , entonces se satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned}\lambda \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\mu}{x} &= \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \lambda + \frac{2\mu}{\pi} &= \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \mu &= -\frac{\lambda\pi}{2} + \frac{\pi^4}{4}.\end{aligned}$$

Si $\lambda > 0$, tenemos $\frac{\pi^2}{4} - \frac{\lambda\pi}{2} < \frac{\pi^2}{4}$, es decir, $\mu < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$. Además, $\mu > 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda < \pi/2$, por lo tanto:

$$\left|g'_{\lambda,\mu}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|\lambda \cos(\pi/2) - \frac{\mu}{(\pi/2)^2}\right| = \left|-\frac{\mu}{(\pi/2)^2}\right| = \frac{\mu}{(\pi/2)^2} < 1,$$

donde $\mu = \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi^4}{4}$. Concluimos que $\frac{\pi}{2}$ es un punto fijo atractor, análogamente para el punto $\frac{-\pi}{2}$.

Observe que si μ es lo bastante pequeña, entonces $g_{\lambda,\mu}$ se parece a $\lambda \operatorname{sen}(x)$ y en virtud de la proposición 3.3 se enuncia la siguiente conjetura.

Conjetura 4.4. Si $\lambda \in (1, 2.1]$ y $\mu > 0$ suficientemente pequeña y w es un punto fijo de $g_{\lambda,\mu}(x) = \lambda \operatorname{sen}(x) + \frac{\mu}{x}$, entonces w es atractor.

Las gráficas en las figuras 5.3 y 5.4 muestran la existencia de puntos fijos para λ y μ como en la conjetura 4.4.

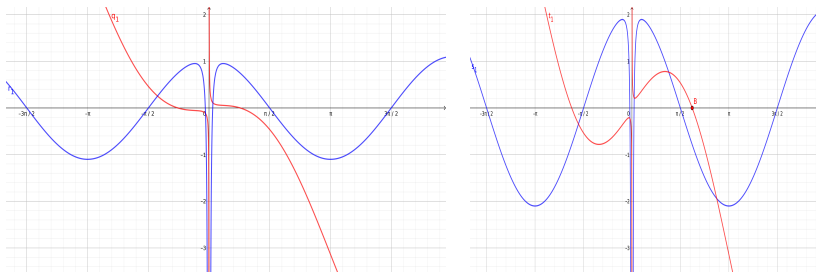


Figura 4.3: Gráfica de $f_{1.1,0.01} - x$ en rojo y la derivada de $f_{1.1,0.01}$ en azul. Figura 4.4: $f_{2.1,0.01} - x$ en rojo y la derivada su derivada en azul.

Observe por ejemplo que si $\lambda = 2.3$ y $\mu = 1$, entonces el valor aproximado del punto fijo positivo de $g_{\lambda,\mu}$ es 2.24 y el valor de la derivada en ese punto es -1.62 por tanto es un punto fijo repulsor.

Puntos fijos super atractores de $g_{\lambda,\mu}$

En este apartado se darán condiciones para tener puntos fijos super atractores de la familia $g_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z}$, $z, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sea w un punto que satisface la ecuación (4.1) y supongamos que w es un punto fijo super atractor, entonces w satisface que $|g'_{\lambda,\mu}(w)| = 0$, es decir,

$$\left| \lambda \cos(w) - \frac{\mu}{w^2} \right| = 0 \Leftrightarrow \lambda \cos(w) - \frac{\mu}{w^2} = 0. \quad (4.2)$$

De las ecuaciones en (4.1) y (4.2) obtenemos:

$$\begin{aligned} \lambda \sin(w) + w \left(\frac{\mu}{w^2} \right) &= w \\ \Leftrightarrow \lambda \sin(w) + \lambda w \cos(w) &= w \\ \Leftrightarrow \lambda &= \frac{w}{\sin(w) + w \cos(w)}, \end{aligned}$$

y

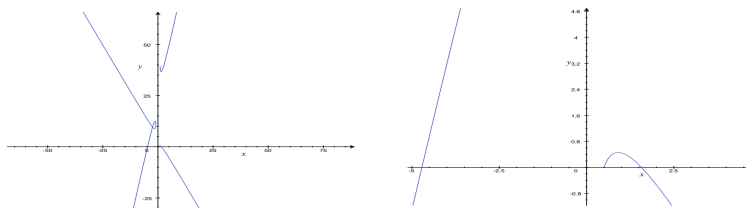
$$\begin{aligned} \left(\frac{w^2 - \mu}{w \sin(w)} \right) \cos(w) &= \frac{\mu}{w^2} \\ \Leftrightarrow w^2 \cos(w) &= \mu \cos(w) + \frac{\mu(w \sin(w))}{w^2} \\ \Leftrightarrow \mu &= \frac{w^3 \cos(w)}{w \cos(w) + \sin(w)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto si λ y μ son de la forma anterior, w es un punto fijo super atractor de $g_{\lambda,\mu}$.

Ahora, definamos la curva paramétrica

$$\mathcal{L}(w) = \left(\frac{w}{\sin(w) + w \cos(w)}, \frac{w^3 \cos(w)}{\sin(w) + w \cos(w)} \right),$$

La curva $\mathcal{L}(w)$ formada por puntos fijos super atractores de la familia $g_{\lambda,\mu}$ véase la figura 4.5.



(a) Gráfica de la curva $\mathcal{L}$ en el plano (λ, μ) (b) Acercamiento de la la curva $\mathcal{L}$

Figura 4.5: Curva paramétrica formada de puntos fijos super- atractores de $g_{\lambda,\mu}$.

Puntos fijos indiferentes de $g_{\lambda,\mu}$

Los puntos fijos indiferentes se clasifican en racionales indiferentes o irracionales indiferentes. En esta sección se presentan ejemplos de estos casos para la familia $g_{\lambda,\mu}$.

(a) Puntos fijos Racionales indiferentes

Para $\lambda = \frac{\pi}{2} - \frac{2\mu}{\pi}$ y $\mu = -\frac{r\pi^2}{4}$, donde r es una raíz de la unidad, afirmamos que $g_{\lambda,\mu}$ tiene dos puntos fijos en $\pm\frac{\pi}{2}$. En efecto, evaluando $g_{\lambda,\mu}$ en $\frac{\pi}{2}$ tenemos:

$$\begin{aligned} g_{\lambda,\mu}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\mu}{\pi/2} \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \left(-\frac{r\pi^2}{4}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{-\frac{r\pi^2}{4}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ahora, el multiplicador en $\pi/2$ es expresado por:

$$\begin{aligned} \left|g'_{\lambda,\mu}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| &= \left|\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\mu}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right| \\ &= \left|\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \left(-\frac{r\pi^2}{4}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{-\frac{r\pi^2}{4}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right| |r| = 1, \end{aligned}$$

donde r es una raíz de la unidad. Por lo tanto, $\frac{\pi}{2}$ es un punto fijo racional indiferente de $g_{\lambda,\mu}$. Análogamente para $-\frac{\pi}{2}$.

(b) Puntos fijos Irracionales indiferentes.

Si $g_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $\mu = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\lambda\pi}{2}$, entonces evaluando $g_{\lambda,\mu}$ en λ y μ tenemos:

$$g_{\lambda, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\lambda\pi}{2}}(z) = \lambda \sin(z) + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\lambda\pi}{2}}{z} = \lambda \sin(z) + \frac{\pi^2 - 2\lambda\pi}{4z}.$$

Afirmamos que $g_{\lambda, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\lambda\pi}{2}}$ tiene dos puntos fijos en $\pm\frac{\pi}{2}$. En efecto, si evaluamos $g_{\lambda, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\lambda\pi}{2}}$ en $\frac{\pi}{2}$ obtenemos:

$$g_{\lambda, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\lambda\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi^2 - 2\lambda\pi}{2\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Encontraremos un parámetro λ tal que $\pm\pi/2$ sea irracional indiferente. Evaluando la derivada de $g_{\lambda, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\lambda\pi}{2}}$ en $\frac{\pi}{2}$, tenemos:

$$\left| g'_{\lambda, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\lambda\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right| = \left| \lambda \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\lambda\pi}{2}}{(\pi/2)^2} \right| = \left| -1 + \frac{2\lambda}{\pi} \right|.$$

Por lo tanto, el punto fijo $\pi/2$ es irracional indiferente siempre que cumpla:

$$\left| g'_{\lambda, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\lambda\pi}{2}}(z_1) \right| = e^{i\theta},$$

para algún $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Así, λ satisface:

$$\left| g'_{\lambda, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\lambda\pi}{2}}(z_1) \right| = e^{i\theta} \Leftrightarrow \left| -1 + \frac{2\lambda}{\pi} \right| = e^{i\theta} \Leftrightarrow \lambda = (e^{i\theta} + 1) \left(\frac{\pi}{2} \right).$$

Similarmente para $-\pi/2$.

4.2. Valores Singulares de $g_{\lambda,\mu}$

En esta sección se analiza los valores asintóticos y los valores críticos de la familia $g_{\lambda,\mu}$, donde λ y μ son valores reales, para finalmente concluir que $g_{\lambda,\mu}$ pertenece a la clase $\mathcal{B}$.

Valores asintóticos

Observemos que $g_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z}$ tal que $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $\mu > 0$ no tiene valores asintóticos finitos. En efecto: Si $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es una curva tal que $\gamma(t) \rightarrow \infty$ y supongamos que $g_{\lambda,\mu}(\gamma(t)) = \lambda \operatorname{sen}(\gamma(t)) + \mu/\gamma(t) = w \in \mathbb{C}$. Sin embargo, $\mu/\gamma(t) \rightarrow 0$ cuando $|\gamma(t)| \rightarrow \infty$ y $\lambda \operatorname{sen}(\gamma(t)) \rightarrow \infty$ cuando $\gamma(t) \rightarrow \infty$, por lo tanto la familia $g_{\lambda,\mu}$ no tiene valores asintóticos $w \neq \infty$.

Valores críticos

Para encontrar los valores críticos de $g_{\lambda,\mu}$ se resuelve la siguiente ecuación:

$$\lambda \cos(z) = \frac{\mu}{z^2}. \quad (4.3)$$

Cuando z y los parámetros λ y μ son reales, los valores críticos son intersección de la función $\cos(x)$ con la función μ/x^2 , para distintos vales de los parámetros λ y μ (véase la figura 4.6 los cuales son número infinito de valores).

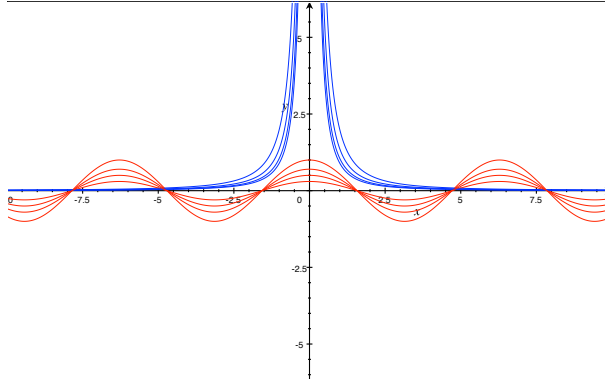


Figura 4.6: Gráficas de $\lambda \cos(x)$ en rojo y $\frac{\mu}{x^2}$ en azul cuando $\lambda = .3, .5, .7, 1$ y $\mu = \frac{\pi^2}{4} - \lambda \frac{\pi}{2}$.

Los valores críticos reales también quedan determinados por la siguiente ecuación:

$$\sqrt{\lambda^2 - \frac{\mu^2}{x^4}} + \mu/x,$$

donde $\lambda > 0$ y x es un punto crítico.

Observar en la gráfica 4.6 que para cada parámetro $\lambda = .3, .5, .7, 1$ y $\mu = \frac{\pi^2}{4} - \lambda \frac{\pi}{2}$ diferente, las gráficas siempre se interceptan en $\pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \pm 7\pi/2, \dots$, es decir, las soluciones de la ecuación (4.3) son aproximadamente $\frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\}$. Para $k = 0, -1$ la cota superior de $\lambda \cos x$, $0 < \lambda < \pi/2$, nunca alcanza el valor $\frac{\mu}{x^2}$.

Al evaluar la ecuación (4.3) en los valores $p_k = \frac{(2k+1)\pi}{2} + \epsilon_k$, donde $\epsilon_k = \frac{\mu}{\frac{(2k+1)\pi}{2}} \rightarrow 0$ cuando $\frac{(2k+1)\pi}{2} \rightarrow \infty$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\}$, $0 < \lambda < 1$ y $\mu > 0$ se concluye que $g_{\lambda,\mu}$ tiene puntos críticos reales en $p_k = \frac{(2k+1)\pi}{2} + \epsilon_k$. Por lo tanto, los valores críticos quedan determinados por $g_{\lambda,\mu}(p_k) = \pm \lambda \cos \epsilon_k + \frac{\mu}{\frac{(2k+1)\pi}{2} + \epsilon_k}$. Observemos que

$g_{\lambda,\mu}(p_k) \rightarrow \pm\lambda$ cuando $\frac{(2k+1)\pi}{2} \rightarrow \infty$, entonces λ y $-\lambda$ son los puntos de acumulación para $g_{\lambda,\mu}$.

Si consideramos $1 < \lambda < \pi/2$, la figura 4.7 muestra $\lambda \cos(x)$, en color rojo, y $\frac{\mu}{x^2}$, en color azul, para $\lambda = 1.4$, y $\mu = \frac{\pi^2}{4} - \lambda \frac{\pi}{2}$. Las gráficas se cruzan dos veces en $0 < x < \pi/2$ (análogo para $-\pi/2 < x < 0$) y también se cruzan aproximadamente en los puntos $\frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\}$.

Si los parámetros son $\lambda = 1.2, 1.3, 1.4, 1.5$ y $\mu = \frac{\pi^2}{4} - \lambda \frac{\pi}{2}$, la figura 4.8 muestra que las gráficas se cruzan cuatro veces en $\pm\pi/2$ y que se interceptan en puntos muy cercanos a $\frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\}$, dado que para $1 < \lambda < \pi/2$, y μ es muy pequeño, las funciones $\frac{\mu}{x^2}$ se aproximan asintóticamente a $x = 0$.

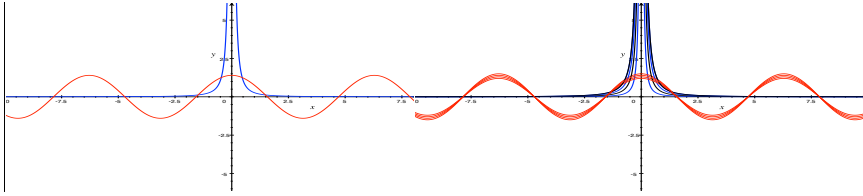


Figura 4.7: Gráfica de $\lambda \cos(x)$ en rojo y $\frac{\mu}{x^2}$ en azul para $\lambda = 1.4$.

Figura 4.8: Gráfica $\lambda \cos(x)$ en rojo y $\frac{\mu}{x^2}$ en azul para $\lambda = 1.2, 1.3, 1.4, 1.5$.

En resumen, si evaluamos la ecuación (4.3) en $p_k = \frac{(2k+1)\pi}{2} + \epsilon_k$, donde $\epsilon_k = \frac{\mu}{(2k+1)\pi} \rightarrow 0$ cuando $\frac{(2k+1)\pi}{2} \rightarrow \infty$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\}$, $0 < \lambda < 1$ y $\mu > 0$ se puede decir que $g_{\lambda,\mu}$ tiene un punto crítico en $p_k = \frac{(2k+1)\pi}{2} + \epsilon_k$. Entonces, $g_{\lambda,\mu}(p_k) \rightarrow \pm\lambda$ as $p_k \rightarrow \infty$ así λ y $-\lambda$ son puntos de acumulación de los valores críticos de $g_{\lambda,\mu}$.

Proposición 4.5. [12] $g_{\lambda,\mu}$ pertenece a la clase $\mathcal{B}$, para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\mu > 0$ suficientemente pequeño.

4.3. Otros aspectos de la dinámica de

$g_{\lambda,\mu}$

En esta sección se abordan más aspectos del conjunto de Julia de $g_{\lambda,\mu}$ y se darán ejemplos para ciertos valores de λ y μ que cumplen con los resultados obtenidos, véase [12].

Lema 4.6. *Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces el conjunto $\{iy : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ es invariante hacia adelante bajo $g_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z}$.*

Demostración. Se procede usando inducción matemática. Tomamos $n = 1$, sea $y \neq 0$. Evaluando iy en $g_{\lambda,\mu}$ tenemos que

$$\begin{aligned} g_{\lambda,\mu}(iy) &= \lambda \operatorname{sen}(iy) + \frac{\mu}{iy} \\ &= \lambda i \sinh(y) + \frac{\mu}{iy} = i \sinh(y) - \frac{i\mu}{y} \\ &= i \left(\lambda \sinh(y) - \frac{\mu}{y} \right) \in \{iy : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}. \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que $(g_{\lambda,\mu})^m(iy) = ik \in \{iy : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ $k \neq 0$, entonces $(g_{\lambda,\mu})^{m+1}(iy) = g_{\lambda,\mu}(g_{\lambda,\mu}^m(iy)) = g_{\lambda,\mu}(ik) \in \{iy : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. $\square$

Definición 4.7. *Sea $f \in \mathcal{M}$ se define el conjunto de escape de f como*

$$I(f) = \{z : f^n(z) \rightarrow \infty \text{ cuando } n \rightarrow \infty \text{ y } f^n(z) \neq 0\}.$$

Corolario 4.8. *Si $\lambda, \mu > 0$, entonces el conjunto de escape de $g_{\lambda,\mu}(z)$ contiene al eje imaginario.*

Demostración. Si $y_0 \neq 0$, entonces la función $g_{\lambda,\mu}$ hace la siguiente correspondencia

$$iy_0 \mapsto i \left(\lambda \sinh(y_0) - \frac{\mu}{y_0} \right).$$

Ahora, consideremos la función $h_{\lambda,\mu}(y) = \sinh(y) - \frac{\mu}{y}$, la cual tiene dos raíces simétricas con respecto del origen r y $-r$. Por las propiedades del seno hiperbólico obtenemos: $\lim_{y \rightarrow \infty} h_{\lambda,\mu}(y) = \infty$ y

$\lim_{y \rightarrow -\infty} h_{\lambda,\mu}(y) = -\infty$, de donde concluimos $g_{\lambda,\mu}^n(y_0) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ si $y_0 > r$ o bien $g_{\lambda,\mu}^n(y_0) \rightarrow -\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ si $y_0 < -r$. $\square$

Teorema 4.9. *Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ con $|\lambda| > 1$ y $\mu \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ pequeño, entonces el conjunto de Julia de $g_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z}$ contiene al eje imaginario.*

Demostración. Sea U una vecindad con centro $\zeta = iy_1$, $y_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y radio $r > 0$. Se quiere probar que la familia $g_{\lambda,\mu}$ no es puntualmente acotada en U .

Tenemos $w = iy_2$, con $y_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, de tal manera que $\zeta \neq w$ y $y_1 y_2 > 0$. Por el lema 4.6 las imágenes de los puntos ζ, w y sus iteraciones bajo $g_{\lambda,\mu}$ pertenecen al eje imaginario. Tomando la distancia entre $g_{\lambda,\mu}(\zeta)$ y $g_{\lambda,\mu}(w)$ tenemos:

$$\begin{aligned} |g_{\lambda,\mu}(\zeta) - g_{\lambda,\mu}(w)| &= \left| \lambda \operatorname{sen}(\zeta) + \frac{\mu}{\zeta} - \left(\lambda \operatorname{sen}(w) + \frac{\mu}{w} \right) \right| \\ &= \left| \lambda \operatorname{sen}(iy_1) + \frac{\mu}{iy_1} - \left(\lambda \operatorname{sen}(iy_2) + \frac{\mu}{iy_2} \right) \right| \\ &= \left| i\lambda \operatorname{senh}(y_1) - \frac{i\mu}{y_1} - i\lambda \operatorname{senh}(y_2) + \frac{i\mu}{y_2} \right| \\ &= \left| i \left| \lambda (\operatorname{senh}(y_1) - \operatorname{senh}(y_2)) + \mu \left(\frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_1} \right) \right| \right| \\ &> |\lambda| |\operatorname{senh}(y_2) - \operatorname{senh}(y_1)|. \end{aligned}$$

Ahora, como la función real $g(x) = \operatorname{senh}(x)$ es continua en $[y_1, y_2]$ y diferenciable en (y_1, y_2) , se sigue del teorema del Valor Medio que existe $y_3 \in (y_1, y_2)$, tal que

$$|\operatorname{senh}(y_2) - \operatorname{senh}(y_1)| = \cosh(y_3) |y_2 - y_1|.$$

Así,

$$|\lambda| |\operatorname{senh}(y_2) - \operatorname{senh}(y_1)| = |\lambda| \cosh(y_3) |y_2 - y_1| > |\lambda| |y_2 - y_1| > |y_2 - y_1|.$$

Por lo tanto, se concluye que la familia $g_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z}$ tiene un comportamiento repulsor en el eje imaginario, es decir, $g_{\lambda,\mu}$ toma valores arbitrariamente grandes sobre el eje imaginario, esto es, la familia $g_{\lambda,\mu}$ no es puntualmente acotada. Por lo

tanto, si tomamos una vecindad arbitraria U en el eje imaginario y consideramos los conjuntos U^+ como el eje imaginario positivo y U^- como el eje imaginario negativo, entonces obtenemos que cualquier punto $y \in U^+$ tiende a ∞ bajo iteración, y también $y \in U^-$. Por lo tanto $g_{\lambda,\mu}$ no es normal en el eje imaginario y por lo tanto el conjunto de Julia de la familia $g_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z}$ contiene al eje imaginario cuando $|\lambda| \geq 1$. $\square$

Teorema 4.10. *Si $g_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z}$, entonces existe un conjunto de parámetros (λ, μ) tal que el conjunto de Fatou de $g_{\lambda,\mu}$ contiene dos dominios super atractores invariantes.*

Demostración. Se debe identificar primero el conjunto de parámetros reales (λ, μ) , tales que $g_{\lambda,\mu}$ tiene dos puntos fijos super atractores. Recordemos que la curva

$$\mathcal{L}(w) = \left(\frac{w}{\operatorname{sen}(w) + w \cos(w)}, \frac{w^3 \cos(w)}{\sin(w) + w \cos(w)} \right)$$

contiene valores (λ, μ) tales que $g_{\lambda,\mu}$ tiene dos puntos fijos súper atractores. Tomando cualquier (λ_0, μ_0) en $\mathcal{L}$, entonces hay $\pm w$ puntos fijos atractores, donde $-w$ es el punto fijo simétrico de w con respecto del eje imaginario. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que w se encuentra en los positivos del eje imaginario. Por lo tanto, existe una vecindad U de w tal que $g_{\lambda_0, \mu_0}^n(z) \rightarrow w$ cuando $n \rightarrow \infty$, para todo $z \in U$. Probaremos que U tiene al menos un valor singular de $g_{\lambda,\mu}$.

Supongamos que p es un punto crítico de $g_{\lambda,\mu}$, entonces los valores críticos están determinados por $g_{\lambda,\mu}(p) = \lambda \operatorname{sen}(p) + \frac{\mu}{p}$. Ahora, sea $\epsilon > 0$ el radio de la vecindad U con centro en el punto w , debemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|w - p| < \delta$, entonces $|g_{\lambda,\mu}(w) - g_{\lambda,\mu}(p)| < \epsilon$. Luego,

$$\begin{aligned}
|g_{\lambda,\mu}(w) - g_{\lambda,\mu}(p)| &= \left| \lambda \operatorname{sen}(w) - \frac{\mu}{w} - \left(\lambda \operatorname{sen}(p) + \frac{\mu}{p} \right) \right| \\
&\leq \left| \lambda (\operatorname{sen}(w) - \operatorname{sen}(p)) + \left(\frac{\mu}{w} - \frac{\mu}{p} \right) \right| \\
&= |\lambda| |\operatorname{sen}(w) - \operatorname{sen}(p)| + \left| \left(\frac{\mu}{w} - \frac{\mu}{p} \right) \right| \\
&= |\lambda| |w - p| + \left| \frac{\mu(p - w)}{wp} \right| \\
&= |w - p| \left(|\lambda| + \frac{|\mu|}{|w||p|} \right) \\
&\leq \delta_2 \left(|\lambda| + \frac{|\mu|}{|w|^2 - |w|} \right) < \epsilon.
\end{aligned}$$

Si tomamos $\delta_1 = 1$ y $\delta_2 = \frac{\epsilon}{|\lambda| + \frac{|\mu|}{|w|^2 - |w|}}$, entonces δ es el máximo de $\{\delta_1, \delta_2\}$. Por lo tanto, el valor singular $g_{\lambda,\mu}(p)$ está en U . Así, concluimos que U es un dominio super atractor del conjunto de Fatou. De manera similar existe un dominio super atractor V que contiene al punto fijo $-w$. $\square$

Un ejemplo del teorema anterior es el siguiente.

Ejemplo 1. Sean $\lambda = (2\pi)/(3\sqrt{3} + \pi)$ y $\mu = \pi^3/(9(3\sqrt{3} + \pi))$ en la curva $\mathcal{L}$.

Entonces la función $\left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3} + \pi}\right) \operatorname{sen}(z) + \frac{\pi^3/(9(3\sqrt{3} + \pi))}{z}$ tiene dos puntos fijos en $\zeta = \pi/3$ y $-\zeta = -\pi/3$, es decir,

$$\begin{aligned}
g_{\lambda,\mu}\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3} + \pi}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi^3/(9(3\sqrt{3} + \pi))}{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}\pi}{3\sqrt{3} + \pi} + \frac{\pi^2}{3(3\sqrt{3} + \pi)} = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Similarmente obtenemos que $-\zeta = -\frac{\pi}{3}$ también es un punto fijo de $g_{\lambda,\mu}$. Los dos puntos fijos son super atractores dado que

$g'_{\lambda,\mu}$ evaluada en $\zeta = \frac{\pi}{3}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \left| g'_{\lambda,\mu} \left(\frac{\pi}{3} \right) \right| &= \left| \left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3} + \pi} \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) - \frac{\pi^3 / (9(3\sqrt{3} + \pi))}{\left(\frac{\pi}{3} \right)^2} \right| \\ &= \left| \frac{\pi}{3\sqrt{3} + \pi} - \frac{\pi}{3\sqrt{3} + \pi} \right| = 0. \end{aligned}$$

Por la simetría de $g_{\lambda,\mu}$, el punto $-\zeta = -\frac{\pi}{3}$ es un punto fijo atractor de $g_{\lambda,\mu}$.

Si $z = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces $g_{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}+\pi}, \frac{\pi^3}{9(3\sqrt{3}+\pi)}}$ tiene dos órbitas que convergen a los puntos $\pm \frac{\pi}{3}$ el que se muestran en la figura 4.9 en color rojo.

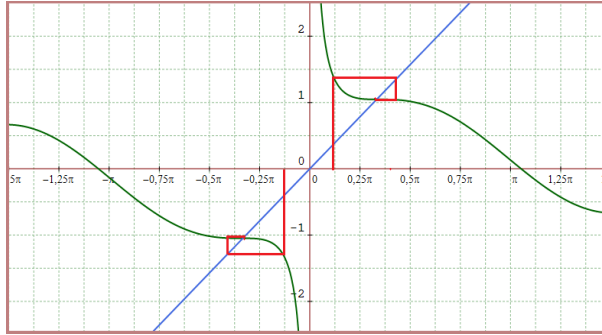


Figura 4.9: Dos órbitas que convergen a $\zeta_1 = \frac{\pi}{3}$ y $-\zeta_1 = -\frac{\pi}{3}$.

El plano dinámico de

$$g_{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}+\pi}, \frac{\pi^3}{9(3\sqrt{3}+\pi)}}(z) = \left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3} + \pi} \right) \operatorname{sen}(z) + \frac{\pi^3 / (9(3\sqrt{3} + \pi))}{z}$$

se muestra en la figura 4.10. Observe que hay dos dominios atractores en el conjunto de Fatou (en color negro), cada uno contiene un punto fijo atractor, que esta separado por eje imaginario, el cual esta representado en color amarillo.

(I) Componentes atractoras

En el siguiente lema se dan condiciones sobre los parámetros λ, μ para los cuales se tiene dos dominios atractores en el conjunto de

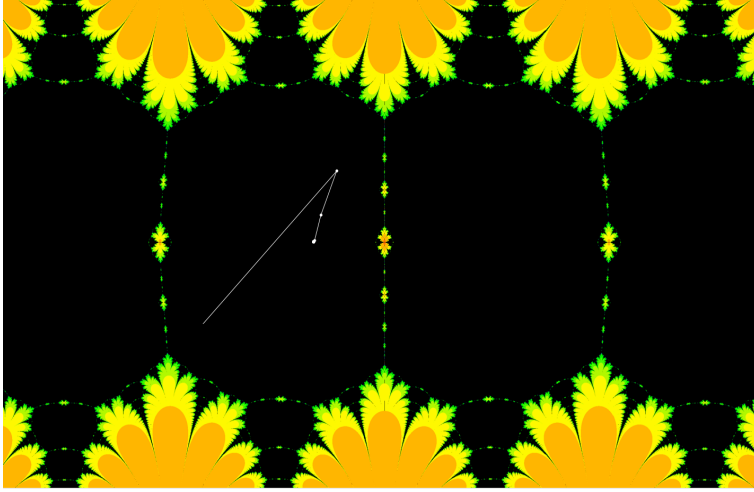


Figura 4.10: El conjunto de Fatou en negro, el conjunto de Julia en amarillo y la órbita de un punto en un dominio super atractor en blanco.

Fatou de $g_{\lambda,\mu}$.

Lema 4.11. *Sea $g_{\lambda,\mu}(x) = \lambda \sin(x) + \frac{\mu}{x}$, existen parámetros reales λ, μ no cero tales que $\pm\pi/2$ son puntos fijos y el conjunto de Fatou de $g_{\lambda,\mu}$ contiene dos componentes invariantes atractoras.*

Considerando los parámetros reales $0 < \lambda < \pi/2$ y $\mu = \frac{\pi^2}{4} - \lambda\frac{\pi}{2}$, sabemos por la parte **(b)** de la sección 4.1 que $g_{\lambda,\mu}$ tiene dos puntos fijos en $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Enseguida solo calculamos $|g'_{\lambda,\mu}(\frac{\pi}{2})|$, porque el cálculo para $-\pi/2$ es similar,

$$\left|g'_{\lambda,\mu}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|\lambda \cos(\pi/2) - \frac{\mu}{(\pi/2)^2}\right| = \left|-\frac{\mu}{(\pi/2)^2}\right| = \frac{\mu}{(\pi/2)^2} < 1.$$

Observe que $\frac{\mu}{(\pi/2)^2} < 1$ si $\mu < \frac{\pi^2}{4}$, donde $\mu = \frac{\pi^2}{4} - \lambda\frac{\pi}{2} < \frac{\pi^2}{4}$, entonces $-\lambda\frac{\pi}{2} < 0$ lo cual implica que $\lambda > 0$ (análogamente para el punto fijo $-\pi/2$). Por lo tanto, $\pm\frac{\pi}{2}$ son puntos fijos atrectores de $g_{\lambda,\mu}(x)$.

El polo $z = 0$ esta en el conjunto de Julia de $g_{\lambda,\mu}(x)$, por lo que podemos dividir la recta real en dos conjuntos B_1 (derecho) y B_2

(izquierda), los cuales deben contener a los punto fijos reales $\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}$, respectivamente. El conjunto de valores críticos de $g_{\lambda,\mu}$ esta sobre la recta real y sabemos que los valores críticos se acumulan en $\pm\lambda$.

Sea U_1 una vecindad del punto $\frac{\pi}{2}$. Sea $0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$ podemos suponer que λ esta muy cercano a $\frac{\pi}{2}$, por lo tanto hay un valor crítico v_1 que converge a λ , so $v_1 \in U_1$, por lo tanto U_1 pertenece a un dominio atractor, digamos D_1 del conjunto de Fatou de $g_{\lambda,\mu}(x)$ sobre el semiplanp derecho B_1 . Por argumentos similares se tiene el dominio atractor D_2 del conjunto de Fatou de $g_{\lambda,\mu}(x)$ sobre el semiplano izquierdo B_1 .

A continuación se da un ejemplo del lema 4.11.

Ejemplo 2. Tomemos $g_{\lambda,\mu}$ y $\lambda = \pi/4$ y $\mu = \frac{\pi^2}{4} - \lambda\frac{\pi}{2}$. La figura 4.11 muestra los dos dominios atractores del conjunto de Fatou y el eje imaginario que pertenece al conjunto de Julia.

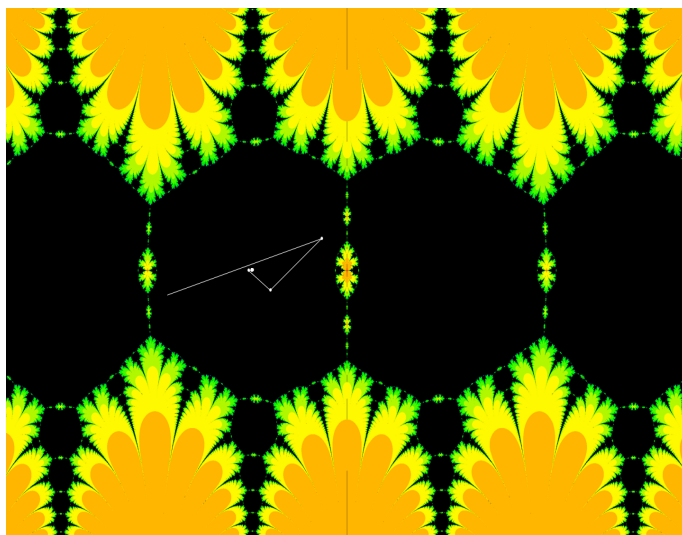


Figura 4.11: Los dominios atractores están en negro y el conjunto de Julia en amarillo y la órbita de un punto en un dominio atractor en color blanco.

(II) Componentes parabólicas

En esta sección se dan condiciones sobre los parámetros λ , μ tal que $g_{\lambda,\mu}$ tiene dos componentes parabólicas.

Lema 4.12. *Sea $g_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z}$, $\lambda = \frac{\pi}{2} - \frac{2\mu}{\pi}$ y $\mu = -\frac{r\pi^2}{4}$, donde r es una raíz de la unidad. Los puntos $\pm\pi/2$ son fijos y el conjunto de Fatou de $g_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z}$ contiene dos dominios parabólicos.*

La función $f_{\pi, -\frac{\pi^2}{4}}(z) = \pi \operatorname{sen}(z) - \frac{\pi^2}{4z}$ tiene dos puntos fijos racionales indiferentes $\zeta = \frac{\pi}{2}$ y $-\zeta = -\frac{\pi}{2}$, por los cálculos hechos en la sección 3.2 (c).

Ahora, definimos el polinomio real $P(x) = x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{4}$. Note que $P(x)$ tiene dos raíces de multiplicidad 2 en $x = \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, $P(x) > 0$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$.

Para $x > 0$, $\lambda = \pi$ y $\mu = -\frac{\pi^2}{4}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \lambda \operatorname{sen}(x) + \frac{\mu}{x} \leq x &\iff \lambda x \operatorname{sen}(x) + \mu < x^2 \\ &\iff \pi x + \frac{\pi^2}{4} \leq x^2 \\ &\iff 0 \leq x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{4} = P(x). \end{aligned}$$

Así, para $x > 0$ con $x \neq \frac{\pi}{2}$, $\lambda = \pi$ y $\mu = -\frac{\pi^2}{4}$, tenemos que $\lambda \operatorname{sen}(x) + \frac{\mu}{x} < x$. Entonces, $g_{\pi, -\frac{\pi^2}{4}}$ tiene un punto fijo $\zeta \in \mathbb{R}^+$ en $\zeta = \frac{\pi}{2}$. Por argumentos similares, obtenemos que $g_{\pi, -\frac{\pi^2}{4}}$ tiene un punto fijo $\zeta \in \mathbb{R}^-$ en $\zeta = -\frac{\pi}{2}$. Los puntos se muestran en la gráfica; véase la figura 4.12, de una variable real $g_{\pi, -\frac{\pi^2}{4}}$.

A continuación se da un ejemplo del lema 4.12.

Ejemplo 3. Para parámetros $\lambda = \pi$ y $\mu = -\frac{\pi^2}{4}$, el conjunto de Fatou de $f_{\pi, -\frac{\pi^2}{4}}(z) = \pi \operatorname{sen}(z) - \frac{\pi^2}{4z}$ contiene dos componentes parabólicas invariantes. La figura 4.13 muestra los dos dominios parabólicos del conjunto de Fatou, la órbita de uno de los puntos de la componente parabólica y el eje imaginario, el cual está contenido en el conjunto de Julia.

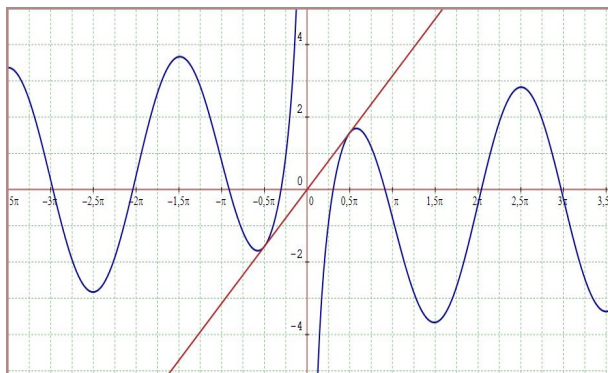


Figura 4.12: Gráfica de $g_{\pi, -\frac{\pi^2}{4}}$ muestra dos puntos fijos racionales indiferentes.

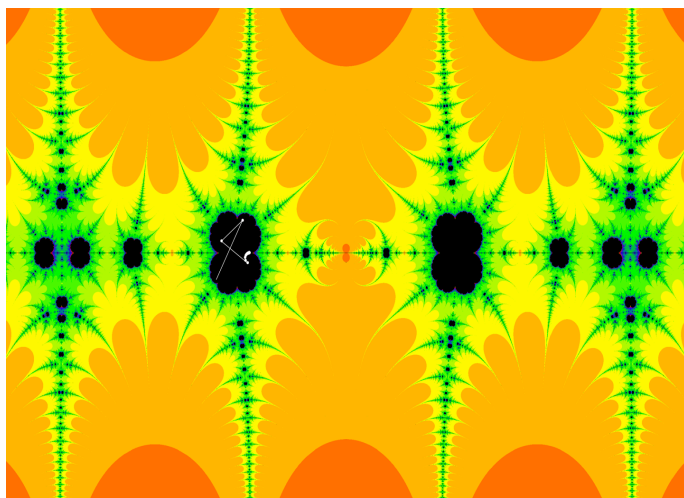


Figura 4.13: Los dominios parabólicos en el conjunto de Fatou en negro de $f_{\pi, -\frac{\pi^2}{4}} = \pi \operatorname{sen}(z) - \frac{\pi^2}{4z}$.

(III) Discos de Siegel

En esta sección mostraremos que el conjunto de Fatou de la familia $g_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z}$ tiene dos discos de Siegel para parámetros λ y μ dados. Esto se enuncia en el siguiente lema.

Lema 4.13. *Sea $g_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z}$. Si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es un número de Bruno y $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ son tales que $\lambda = (e^{i\theta} + 1)(\pi/2)$*

y $\mu = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\lambda\pi}{2}$, entonces $\pm\pi/2$ son puntos fijos y el conjunto de Fatou de $g_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z}$ contiene dos discos de Siegel.

Demostración. Por la sección 4.1 parte (c), los puntos $z_1 = \frac{\pi}{2}$ y $z_2 = -\frac{\pi}{2}$ son puntos fijos de $g_{\lambda, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\lambda\pi}{2}}$, donde el parámetro λ es de tal manera que los puntos fijos son irracionales indiferentes. Por lo tanto, el conjunto de Fatou de $g_{\lambda, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\lambda\pi}{2}}$ tiene un disco de Siegel con centro en el punto $z_1 = \frac{\pi}{2}$ (análogamente para el punto $z_2 = -\frac{\pi}{2}$). $\square$

Un ejemplo del lema 4.13 es el siguiente.

Ejemplo 4. Sea $g_{\lambda,\mu}(z)$. Tomando $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda = (e^{\frac{i(1+\sqrt{5})}{2}} + 1)\left(\frac{\pi}{2}\right)$ y $\mu = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\lambda\pi}{2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{(e^{\frac{i(1+\sqrt{5})}{2}} + 1)\left(\frac{\pi}{2}\right)\pi}{2}$, las hipótesis del Lema 4.13 se satisfacen para

$$g_{\lambda, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\lambda\pi}{2}}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\pi^2 - 2\lambda\pi}{4z}$$

Por lo tanto, el conjunto de Fatou tiene dos discos de Siegel, los cuales son simétricos con respecto del eje imaginario. La figura 4.14 muestra la órbita de los dos puntos, en color blanco, en negro los discos de Siegel perforados y el conjunto de Julia en escala de amarillos.

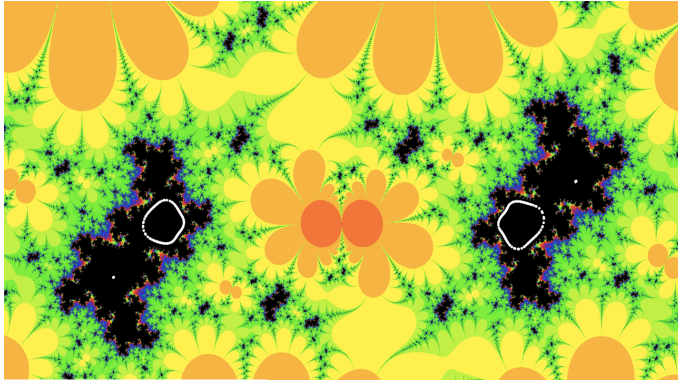


Figura 4.14: Discos de Siegel de $g_{\lambda, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\lambda\pi}{2}}$.

Conclusiones y análisis

En este trabajo se realizó un análisis de la dinámica de las familias $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$ y $g_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z}$, $\lambda, \mu, z, \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Se obtuvieron las siguientes conjeturas:

1. Si $\lambda \in (\frac{\pi}{2}, 2.26]$, la familia $f_\lambda(x)$ tiene 2 puntos fijos atractores distintos de cero.
2. Existe λ_0 , tal que si $\lambda \in (2.6, \lambda_0]$, entonces $f_\lambda(x) = \lambda \operatorname{sen}(x)$ tiene una órbita atractora de periodo 4 en $[0, \pi]$.
3. Si $\lambda \in (1, 2.1]$ y μ lo suficientemente pequeña, si w es un punto fijo de $g_{\lambda,\mu}(x) = \lambda \operatorname{sen}(x) + \frac{\mu}{x}$, entonces w es atractor. Así, los puntos de la curva $\mathcal{L}$ que cumplan con esta condición son atractores.
4. La conjetura 4.3 muestra que el conjunto de Julia de $g_{\lambda,\mu}$ es todo el plano complejo.

Análisis

Se realizó el análisis de algunos dominios que se encuentran en la siguiente tabla:

$f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$	$g_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
Pertenece a la clase $\mathcal{E}$.	Pertenece a la clase $\mathcal{M}$.
Está en clase $\mathcal{B}$.	Esta en la clase $\mathcal{B}$.
Si $1 < \lambda < 2.26$ el conjunto de Fatou tiene dos dominios simplemente conexos atractores.	Para parámetros reales λ, μ no cero tales que $\pm \frac{\pi}{2}$ son puntos fijos atractores, el conjunto de Fatou tiene dos dominios atractores.
Si $\lambda = e^{2\pi i \theta}$, $\theta = p/q$, con $(p, q) = 1$, el conjunto de Fatou contiene dominios parabólicos.	Si $\mu = -\frac{r\pi^2}{4}$, donde r es una raíz de la unidad. Los puntos $\pm \pi/2$ son fijos y el conjunto de Fatou de $g_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z}$ contiene dos dominios parabólicos.
Para $\lambda = e^{2\pi i \theta}$ siendo θ un número irracional, la familia f_λ tiene un disco de Siegel.	Si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es un número Brujno, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ son tales que $\lambda = (e^{i\theta} + 1)(\pi/2)$ y $\mu = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\lambda\pi}{2}$, entonces $\pm \pi/2$ son puntos fijos y el conjunto de Fatou de $g_{\lambda,\mu}$ contiene dos discos de Siegel.

Bibliografía

- [1] Ahlfors L. V. Complex Analysis. McGraw Hill., (1984).
- [2] Baker I. N., Repulsive fixpoints of entire functions, *Mathematische Zeitschrift*, 104 (1968), 252-256.
- [3] Baker I. N., Kotus J. and Lü Y., Iterates of meromorphic functions II: Examples of wandering domains, *J. London. Math. Soc.*, 42(2) (1990), 267-278.
- [4] Baker I. N., Kotus J. and Lü Y., Iterates of meromorphic functions I, *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 11 (1991), 241-248.
- [5] Baker I. N., Kotus J. and Lü, Y., Iterates of meromorphic functions III: Preperiodic domains, *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 11 (1991), 603-618.
- [6] Baker I. N., Kotus J. and Lü Y., Iterates of meromorphic functions IV: Critical finite functions, *Result in Math.*, 22 (1992), 651-656.
- [7] Beardon A.F.: Iteration of Rational Functions., Springer-Verlag, (2000).
- [8] Bergwaler W. *iteration of meromorphic functions*, American Mathematical Society 0273-0979 (1993).
- [9] Conway J. B. Functions one Complex Variable I. Springer Verlag.(1978).
- [10] Domínguez P. and Sienra G., A study of the dynamics of $\lambda \sin z$, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(12) (2002), 2869-2883.

- [11] Domínguez P. Montes M. y Vázquez J., A Study of the Dynamics of the Family $g_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \operatorname{sen} z + \frac{\mu}{z+k\pi}$ where $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ and $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*, 5(4) (2016), 407-414.
- [12] Domínguez P. and Vázquez J., *A study of a meromorphic perturbation of the sine family*, 2021.
- [13] Domínguez P., Vázquez J., Un estudio de la dinámica de la familia $F_{\lambda,\mu,z_0}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z-z_0}$ con $\lambda, \mu, z_0 \in \mathbb{C}$, Tesis de maestría, FCFM, BUAP, 2016.
- [14] Eremenko A. E., Lyubich M. Yu. The dynamics of analytic transformations . Leningrad Math. J., Vol. 1, No. 3, (1990).
- [15] Fatou P., Sur les Équations Fonctionnelles (Deuxième mémoire), *Bull. Sci. Math. France*, 47 (1919), 161-271 and 48 (1920), 208-314.
- [16] Fatou, P., Sur, Itération des fonctions transcendentes entières . Bulletin de la Société Mathématique de France. Vol. 47 (1926), 337-370.
- [17] Julia G., Sur l'itération des fonctions rationnelles, *J. Math. Pures Appl.* (7) 4 (1918), 47-245.
- [18] Keen, L. and Kotus, J. (1997). Dynamics of the family $? \tan z$, *Conform. Geom. Dyn.* 1 , 28-57.
- [19] McMullen C., *Complex Dynamics and Renormalization*, Princeton University Press, United States of America, 1994.
- [20] Milnor, J. Dynamics in One Complex Variable. (AM-160): Third Edition. (AM-160). Princeton University Press. (2006).
- [21] Montel, P., Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 29 (1912), 487-535.
- [22] Montel, P., Sur les familles normales de fonctions analytiques, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 33 (1916), 223-302.

-
- [23] Palka, B. P. An Introduction to Complex Theory. Springer Verlag. (2012).
 - [24] Trujillo S, Un estudio de la dinámica de la familia $\lambda \operatorname{sen}(z)$, Tesis Maestría, FCFM, BUAP, 2017.
 - [25] Zhang G., On the dynamics of $e^{2\pi i\theta} \operatorname{sen} z$, Illinois J. Math. 49 (2005), 1171-1179.