



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

LÓGICA POSIBILISTA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

Felipe Mazón Cambrón

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. José Ramón Enrique Arrazola Ramírez

PUEBLA, MÉXICO, ENERO 2017.

Dedicatoria

A mi madre

e

Hija.

Agradecimientos

Ha sido muy importante el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), cuya beca permitió la realización de este trabajo.

G R A C I A S .

Índice general

Introducción	vii
1. Lógica Posibilista	1
1.1. Lógica Posibilista Estándar	1
1.1.1. Teoría de la Posibilidad	1
1.1.2. Lógica Posibilista Estándar. Fórmulas con Valua- ción de Necesidad	5
1.1.3. Lenguaje	7
1.1.4. Inconsistencia Parcial	12
1.1.5. Aspectos No-monótonos de la Lógica Posibilista Estándar	22
1.2. Generalización de la Lógica Posibilista	28
1.2.1. Lógica Posibilista. Fórmulas con Valuación de Ne- cesidad y de Posibilidad	29
1.2.2. Semántica	31
1.2.3. Axiomatización	37
2. Programación Lógica	41
2.1. Conceptos Básicos de Programación Lógica	42
2.2. Answer Set Programming	44
2.3. Semántica de Modelos Estables	46
2.4. Programas Lógicos Posibilistas	50
2.5. Programas Lógicos Definite Posibilistas	51

2.5.1. Teoría de Modelos para Programas Lógicos Defi- nitive Posibilistas	53
2.6. Programas Lógicos Normales Posibilistas	61
2.6.1. Programa Lógico Normal Posibilista Inconsistente	64
Conclusiones	69

Introducción

La incertidumbre es un atributo de la información. El trabajo pionero de Claude Shannon [3] en Teoría de la Información condujo al consenso universal de que la información por naturaleza es estadística; como consecuencia, el tratamiento de la incertidumbre se relegó a la Teoría de la Probabilidad.

Tversky y Kahneman hicieron notar en [1], que muchas de las decisiones que tomamos en nuestra vida cotidiana están basadas en creencias que involucran la probabilidad de ciertos eventos. De hecho, de manera común usamos oraciones del tipo “creo que...”, “es probable que ...”, “es posible que ...”, etc., para sustentar nuestras decisiones. En este tipo de oraciones, usualmente nos valemos de nuestra experiencia o sentido común. No es sorprendente pensar que el razonamiento basado en este tipo de oraciones pueda alcanzar conclusiones sesgadas. Sin embargo, estas conclusiones pueden reflejar la experiencia o el sentido común de un experto.

Pelletier y Elio señalaron en [18] que las personas simplemente tienen tendencia a ignorar cierta información debido a la necesidad (evolutiva) de tomar decisiones rápidamente. Esto da origen a sesgos en los juicios que involucran lo que “realmente” quieren hacer. En vista del hecho de que sabemos que el razonamiento basado en oraciones que están cuantifi-

cadadas con probabilidades relativas podrían capturar nuestra experiencia o sentido común, la pregunta es, ¿cómo podrían estas oraciones ser capturadas por sistemas reales de aplicación, como los sistemas multiagentes?

El presente trabajo está fuertemente apoyado en [10]. En ese trabajo, la Lógica Posibilista fué creada por Didier Dubois y Henri Prade [10], la cual emerge de la Teoría de la Posibilidad de Zadeh [22]. En [10] se incluye una axiomatización para la Lógica Posibilista y un método extendido basado en resolución, el cual es viable de ser implementado computacionalmente. También ofrece un marco para representar el estado parcial de ignorancia, debido al uso de un par de funciones, una denominada medida de necesidad y la otra medida de posibilidad.

De acuerdo con Nicolas et al. [24], la Lógica Posibilista provee una maquinaria completa y robusta para manejar incertidumbre cualitativa con respeto a una semántica expresada por medio de distribuciones de posibilidad, las cuales ordenan en una escala las posibles interpretaciones. Nicolas menciona que en la Lógica Posibilista se maneja la incertidumbre por medio de interpretaciones clásicas bivaluadas (falso o verdadero) que pueden ser en mayor o en menor grado certeras o posibles. En Lógica Posibilista no interesa representar la vaguedad en un contexto multivaluado, en cambio; se permanece en el contexto de la Lógica Clásica a la cual se le agrega una forma de graduar la confianza que se tiene en cada uno de los fragmentos de información [24].

Además, en [24], se propuso una combinación entre Answer Set Programming (ASP) [2] y Lógica Posibilista [10]. En el sistema propuesto se puede manejar la incertidumbre. El enfoque de Nicolas se basa en el concepto de modelo estable possibilista para definir una semántica para programas lógicos normales possibilistas. Un punto débil de este enfoque es que descansa en la expresividad de los programas lógicos normales.

La Lógica Posibilista es una lógica que utiliza medidas de incertidumbre para razonar con evidencia incompleta y conocimiento parcialmente inconsistente. En un nivel sintáctico se trabaja con fórmulas de lógica proposicional o de una lógica de primer orden, a las que se les asigna un número en el intervalo $[0, 1]$, aunque en general podría asignarse cualquier elemento de un conjunto totalmente ordenado. Estas cotas inferiores son llamadas grados de necesidad o grados de posibilidad de las fórmulas correspondientes. En [22] Zadeh introduce la medida de posibilidad como un índice escalar que evalúa la consistencia de una proposición difusa respecto al estado de conocimiento expresado por medio de una restricción difusa. Una restricción difusa es un conjunto difuso de valores *posibles* y su función membresía es llamada una distribución de posibilidad. Después, la noción dual de certeza [21] o de necesidad [6] fué introducida como una evaluación escalar de la fuerza de restricción de una proposición difusa a través de una restricción dada.

El trabajo de tesis está distribuido de la siguiente manera: en el Capítulo 1 son presentadas las relaciones de posibilidad que son la base para las medidas de posibilidad y de necesidad. Se incluyen los aspectos formales que constituyen la Lógica Posibilista, donde las fórmulas son valuadas por una cota inferior en su grado de necesidad. Después, se considera una Lógica Posibilista general en el sentido de que sus fórmulas pueden tener pesos sobre una cota inferior, denominados grado de necesidad y grado de posibilidad. También se introduce un teorema de robustez y completitud. Posteriormente, en el Capítulo 2 se presentan las definiciones básicas de la programación lógica, así como la teoría de Answer Set Programming. Finalmente, presentamos la programación lógica possibilista, cuyas cláusulas presentan un peso de necesidad permitiendo la presencia de inconsistencia en los conjuntos de fórmulas.

Capítulo 1

Lógica Posibilista

1.1. Lógica Posibilista Estándar

1.1.1. Teoría de la Posibilidad

El objeto básico de la teoría de la posibilidad es la *distribución de posibilidad*, la cual es una función π que le asigna a cada elemento de un conjunto U , de *alternativas*, un grado de posibilidad, $\pi(u) \in [0, 1]$, de ser el estado actual de las cosas, es decir, la realidad. La función de posibilidad es la representación numérica de lo que se sabe acerca del valor de alguna cantidad x que toma valores en el conjunto U . La función π_x representa los valores más o menos plausibles para la cantidad desconocida x . Se asume que x puede tomar un sólo valor.

Adoptamos las siguientes convenciones

$\pi_x(u) = 0$, para algún $u \in U$, significa que $x = u$ es imposible.

$\pi_x(u) = 1$, significa que $x = u$ está completamente posible.

$\pi_x(u) > \pi_x(u')$, significa que $x = u$ es preferible a $x = u'$.

Además, asumiremos que las π_x están normalizadas, esto es, $\pi_x(u) = 1$ para algún $x \in U$, lo cual significa que en U , existe al menos un valor de x que es completamente posible.

EJEMPLO 1.1.1. La distribución de posibilidad más simple es la función característica de un subconjunto E de U . Considere la función $\pi_x : U \rightarrow [0, 1]$, definida por

$$\pi_x(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in E \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta distribución representa la situación de que todo lo que se sabe sobre el valor de la variable x es que no puede pertenecer al complemento de E . Este tipo de distribución surge de manera natural cuando se quiere representar, por ejemplo, que “estamos en el mes de Febrero”. En este caso se tiene que $U = \{ 1 \text{ de Enero}, 2 \text{ de Enero}, \dots, 31 \text{ de Diciembre} \}$, x es la variable que representa el día actual y $E = \{ 1 \text{ de Febrero}, 2 \text{ de Febrero}, \dots, 28 \text{ de Febrero} \}$ ¹.

EJEMPLO 1.1.2. Considere los conjuntos $U = \{(a, b), [a, b), (a, b], [a, b] \mid a < b \text{ y } a, b \in \mathbb{R}\}$, $E = \{(a, b) \mid a < b \text{ y } a, b \in \mathbb{R}\}$ y la afirmación “el conjunto A no es intervalo abierto”. Esta afirmación se puede representar mediante la función característica $\pi_A : U \rightarrow [0, 1]$, dada por:

$$\pi_A(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in E \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta forma de representar el conocimiento es más natural que simplemente asignar un valor a la variable x , ya que permite introducir la incertidumbre.

DEFINICIÓN 1.1.3. [26] Sean π_x y π'_x dos distribuciones de posibilidad. Se dice que π_x es más específica que π'_x si y sólo si $\pi_x < \pi'_x$, es decir, si y sólo si $\forall u \in U, \pi_x(u) < \pi'_x(u)$.

La especificidad se refiere al nivel de precisión de una distribución de posibilidad. Si existe $u_0 \in U$ tal que $\pi_x(u_0) = 1$ mientras que $\pi_x(u) = 0$

¹No se están considerando años bisiestos.

para $u \neq u_0$, entonces decimos que el *estado de conocimiento* es completo (sabemos que $x = u_0$). Similarmente, se tiene un estado de total ignorancia cuando $\pi_x(u) = 1$ para todo $u \in U$.

DEFINICIÓN 1.1.4. (Principio de Mínima Especificidad) [10] Dado un conjunto de restricciones que acotan el valor de x , se debería escoger π_x de tal forma que le asigne a cada $u \in U$ el máximo grado de posibilidad acorde con las restricciones.

DEFINICIÓN 1.1.5. Dado $U \neq \emptyset$, una medida de posibilidad en U es una función Π que asocia a cada subconjunto $A \subseteq U$ un número $\Pi(A) \in [0, 1]$, satisfaciendo:

$$\begin{aligned}\Pi(\emptyset) &= 0 \\ \Pi(U) &= 1 \\ \Pi\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) &= \sup_{i \in I} \Pi(A_i)\end{aligned}$$

para un conjunto de índices I .

Una medida de posibilidad se puede obtener de una distribución de posibilidad π_x , definiendo $\forall u \in U, \pi_x(u) = \Pi(\{u\})$. En particular, tenemos

$$\Pi(A) = \sup_{u \in A} \pi_x(u)$$

$\Pi(A)$ expresa en qué medida existe un valor $u \in A$ que pueda presentarse como valor de x . La función dual de la función Π es llamada una medida de necesidad, denotada por N y se define como [6]:

$$N(A) = 1 - \Pi(\bar{A}) = \inf_{u \notin A} \{1 - \pi_x(u)\}$$

donde \bar{A} es el complemento de A . $N(A)$ evalúa en qué medida todos los posibles valores de x pertenecen a A , es decir, en qué medida uno está seguro de que x pertenece a A .

LEMA 1.1.6. Sean A y B conjuntos, se tiene que

$$\sup \{A \cup B\} = \max \{\sup A, \sup B\}$$

PROPOSICIÓN 1.1.7. Sean $A, B \subseteq U$, entonces tenemos que:

1. $\Pi(A \cup B) = \max \{\Pi(A), \Pi(B)\}$
2. $N(A \cap B) = \min \{N(A), N(B)\}$
3. $\Pi(A \cap B) \leq \min \{\Pi(A), \Pi(B)\}$
4. $N(A \cup B) \geq \max \{N(A), N(B)\}$
5. $\min \{N(A), N(\bar{A})\} = 0$
6. $\max \{\Pi(A), \Pi(\bar{A})\} = 1$

Demostración: Sean $A, B \subset U$

$$\begin{aligned}
 1) \quad \Pi(A \cup B) &= \sup_{u \in A \cup B} \pi_x(u) \\
 &= \sup \{\pi_x(u) \mid u \in A \cup B\} \\
 &= \sup \{\pi_x(u) \mid u \in A \text{ ó } B\} \\
 &= \sup \{\{\pi_x(u) \mid u \in A\} \cup \{\pi_x(u) \mid u \in B\}\} \text{ por Lema [?]} \\
 &= \max \{\sup \{\pi_x(u) \mid u \in A\}, \sup \{\pi_x(u) \mid u \in B\}\} \\
 &= \max \{\Pi(A), \Pi(B)\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad N(A \cap B) &= 1 - \Pi(\bar{A} \cup \bar{B}) \\
 &= 1 - \max \{\Pi(\bar{A}), \Pi(\bar{B})\} \\
 &= \min \{1 - \Pi(\bar{A}), 1 - \Pi(\bar{B})\} \\
 &= \min \{N(A), N(B)\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \text{Por definición, } \Pi(A \cap B) &= \sup_{u \in A \cap B} \pi_x(u). \text{ Ahora, supongamos que} \\
 &\text{el supremo se alcanza en } u^*, \text{ es decir, } \Pi(A \cap B) = \pi_x(u^*). \text{ Además,} \\
 \Pi(A) = \sup_{u \in A} \pi_x(u) &\geq \pi_x(u^*) \text{ y } \Pi(B) = \sup_{u \in B} \pi_x(u) \geq \pi_x(u^*), \text{ lo cual} \\
 &\text{implica que } \min \{\Pi(A), \Pi(B)\} \geq \pi_x(u^*) = \Pi(A \cap B).
 \end{aligned}$$

- 4) $N(A \cup B) = 1 - \Pi(\overline{A \cup B})$
 $= 1 - \Pi(\overline{A} \cap \overline{B}) \geq 1 - \min \{ \Pi(\overline{A}), \Pi(\overline{B}) \}$
 $= \max \{ 1 - \Pi(\overline{A}), 1 - \Pi(\overline{B}) \}$
 $= \max \{ N(A), N(B) \}.$
- 5) $\min \{ N(A), N(\overline{A}) \} = \min \{ 1 - \Pi(\overline{A}), 1 - \Pi(A) \}$
 $= 1 - \max \{ \Pi(\overline{A}), \Pi(A) \} = 1 - \Pi(A \cup \overline{A}) = 1 - \Pi(U) = 0.$
- 6) $\max \{ \Pi(A), \Pi(\overline{A}) \} = \Pi(A \cup \overline{A}) = \Pi(U) = 1.$

□

1.1.2. Lógica Posibilista Estándar. Fórmulas con Valuación de Necesidad

En [10] se introduce una axiomatización y un método de refutación basado en *resolución extendida*, que es viable de ser implementado en una computadora y que soporta inconsistencia parcial, para la Lógica Posibilista.

Entre las aplicaciones de la Lógica Posibilista se encuentran:

1. Razonamiento No-Monótono [7, 9], razonamiento con *reglas default* [27].
2. Revisión de creencias [4].
3. Se puede usar la programación lógica para crear la *Programación Lógica Posibilista*, la cual es particularmente útil cuando se trata con incertidumbre o con optimización min-max. Los detalles formales sobre la semántica declarativa y de procedimientos de los programas lógicos posibilistas se pueden encontrar en [11]. Algunas extensiones que incorporan la negación por falla se pueden encontrar en los trabajos de Wagner [15].

En [15] se demuestra que los programas lógicos normales, bajo la semántica de modelos estables de Gelfond y Lifschitz, se pueden *sumergir* en programas lógicos difusos bajo su semántica estable y que los programas lógicos extendidos, bajo la semántica de Answer Set de Gelfond y Lifschitz, se pueden sumergir en programas lógicos posibilistas bajo su semántica estable.

En [14] se muestra que los conceptos de Answer Set Programming y Lógica Difusa se pueden combinar en un solo esquema llamado *Fuzzy Answer Set Programming (FASP)*. Ahí, también se muestra que este enfoque es una extensión de Answer Set Programming tradicional, a diferencia de otros enfoques.

En las fórmulas de la Lógica Posibilista Completa, los pesos son cotas de una medida de necesidad o de posibilidad a diferencia de la Lógica Posibilista Estándar cuyos pesos sólo son de necesidad. En la Lógica Posibilista Completa, el conocimiento incierto se expresa en términos de proposiciones *calificadas de certeza* o *calificadas de posibilidad*. La Lógica Posibilista Estándar trata con objetos sintácticos que expresan desigualdades que resultan de este tipo de proposiciones. En lo que sigue hablaremos sobre la llamada Lógica Posibilista Estándar, la cual es un fragmento de la Lógica Posibilista Completa, que trata sólo con proposiciones *calificadas de certeza*.

En la Lógica Posibilista Estándar los conceptos de *satisfacción* y *consecuencia lógica* están definidos en términos de distribuciones de posibilidad sobre el conjunto de “mundos clásicos”. Una distribución de posibilidad π es una función de Ω (el conjunto de todos los mundos posibles) a $[0, 1]$, $\pi(\omega)$ refleja cuan posible es que ω sea el “mundo real”. Cuando $\pi(\omega) = 1$ (resp., $\pi(\omega) = 0$) entonces es completamente posible (resp., imposible) que ω sea el mundo real. Una distribución de posibilidad está *normalizada* si y sólo si $\exists \omega$ tal que $\pi(\omega) = 1$.

1.1.3. Lenguaje

La *medida de posibilidad* Π inducida por π es una función de \mathcal{L} (un lenguaje lógico proposicional) a $[0, 1]$ definida por

$$\Pi(\varphi) = \sup \{ \pi(\omega) : \omega \models \varphi \}$$

La *medida de necesidad* (dual) N inducida por π se define como:

$$N(\varphi) = 1 - \Pi(\neg\varphi) = \inf \{ 1 - \pi(\omega) : \omega \models \neg\varphi \}$$

PROPOSICIÓN 1.1.8. Si N es una medida de necesidad inducida por π , se cumplen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} N(\top) &= 1, \text{ donde } \top \text{ es la constante lógica "top"} \\ N(\varphi \wedge \psi) &= \min \{ N(\varphi), N(\psi) \} \\ N(\varphi \vee \psi) &\geq \max \{ N(\varphi), N(\psi) \} \\ \text{Si } \varphi \models \psi &\text{ entonces } N(\psi) \geq N(\varphi). \end{aligned}$$

Demostración:

- 1) $N(\top) = 1 - \Pi(\neg\top) = 1 - \Pi(\perp)$
 $= 1 - \sup \{ \pi(\omega) : \omega \models \perp \}$
 $= \inf \{ 1 - \pi(\omega) : \omega \models \perp \}$
 $= \inf \emptyset = 1.$

- 2) Para esta parte de la prueba utilizaremos la siguiente propiedad $\sup(A \cup B) = \sup(\{\sup(A), \sup(B)\})$. Así,
 $N(\varphi \wedge \psi) = 1 - \Pi(\neg(\varphi \wedge \psi))$
 $= 1 - \Pi(\neg\varphi \vee \neg\psi)$
 $= 1 - \sup \{ \pi(\omega) : \omega \models \neg\varphi \vee \neg\psi \}$
 $= 1 - \sup \{ \{ \pi(\omega) : \omega \models \neg\varphi \} \cup \{ \pi(\omega) : \omega \models \neg\psi \} \}$
 $= 1 - \sup \{ \sup \{ \pi(\omega) : \omega \models \neg\varphi \}, \sup \{ \pi(\omega) : \omega \models \neg\psi \} \}$
 $= \inf \{ 1 - \sup \{ \pi(\omega) : \omega \models \neg\varphi \}, 1 - \sup \{ \pi(\omega) : \omega \models \neg\psi \} \}$

$$= \inf \{N(\varphi), N(\psi)\} = \min \{N(\varphi), N(\psi)\}.$$

- 3) En esta parte de la prueba utilizaremos la siguiente propiedad $\sup(A \cap B) \leq \min(\{\sup A, \sup B\})$, lo cual implica que $1 - \sup(A \cap B) \geq 1 - \min(\{\sup A, \sup B\})$. Así,

$$\begin{aligned} N(\varphi \vee \psi) &= 1 - \Pi(\neg(\varphi \vee \psi)) \\ &= 1 - \sup \{\pi(\omega) : \omega \models \neg\varphi \wedge \neg\psi\} \\ &= 1 - \sup \{\{\pi(\omega) : \omega \models \neg\varphi\} \cap \{\pi(\omega) : \omega \models \neg\psi\}\} \\ &\geq 1 - \min \{\sup \{\pi(\omega) : \omega \models \neg\varphi\}, \sup \{\pi(\omega) : \omega \models \neg\psi\}\} \\ &= \max \{1 - \sup \{\pi(\omega) : \omega \models \neg\varphi\}, 1 - \sup \{\pi(\omega) : \omega \models \neg\psi\}\} \\ &= \max \{N(\varphi), N(\psi)\}. \end{aligned}$$

- 4) Por hipótesis tenemos que $\varphi \models \psi$, entonces toda ω tal que $\omega \models \varphi$, satisface que $\omega \models \psi$. Así, tenemos que, $\omega \not\models \psi$ implica $\omega \not\models \varphi$, es decir, que $\omega \models \neg\psi$ implica $\omega \models \neg\varphi$. Por lo tanto $\{\omega : \omega \models \neg\psi\} \subseteq \{\omega : \omega \models \neg\varphi\}$. Así, $\{\pi(\omega) : \omega \models \neg\psi\} \subseteq \{\pi(\omega) : \omega \models \neg\varphi\}$. Por ende, $\sup \{\pi(\omega) : \omega \models \neg\psi\} \leq \sup \{\pi(\omega) : \omega \models \neg\varphi\}$. Así,

$$1 - \sup \{\pi(\omega) : \omega \models \neg\psi\} \geq 1 - \sup \{\pi(\omega) : \omega \models \neg\varphi\},$$

y

$$N(\psi) \geq N(\varphi).$$

□

DEFINICIÓN 1.1.9. Una fórmula *con valuación de necesidad* (también llamada fórmula posibilista estándar) es un par $(\varphi \alpha)$, donde φ es una fórmula proposicional clásica y $\alpha \in (0, 1]$. El par $(\varphi \alpha)$ expresa que φ es cierta al menos desde un grado α , esto es, $N(\varphi) \geq \alpha$, donde N es una *medida de necesidad* que modela el estado de conocimiento [10]. A la constante α se le conoce como la *valuación* (o peso) de la fórmula y se denota como $val(\varphi)$.

Una base de conocimiento con *valuación de necesidad* (o también llamada base de conocimiento posibilista estándar) \mathcal{F} se define como un conjunto finito de fórmulas con valuación de necesidad. Denotamos por \mathcal{F}^* al conjunto de fórmulas clásicas que se obtiene de \mathcal{F} de la siguiente manera: si $\mathcal{F} = \{(\varphi_i \alpha_i) \mid i = 1, \dots, n\}$ entonces, $\mathcal{F}^* = \{\varphi_i \mid i = 1, \dots, n\}$. A \mathcal{F}^* se le llama la *proyección clásica* de \mathcal{F} .

Una base de conocimiento posibilista estándar también puede ser vista como una colección anidada de fórmulas clásicas: si α es cualquier valuación entre $[0,1]$, definimos el α -corte \mathcal{F}_α y el α -corte estricto $\mathcal{F}_{\bar{\alpha}}$ como:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\alpha &= \{(\varphi \beta) \in \mathcal{F} \mid \beta \geq \alpha\} \\ \mathcal{F}_{\bar{\alpha}} &= \{(\varphi \beta) \in \mathcal{F} \mid \beta > \alpha\}\end{aligned}$$

y sus proyecciones clásicas son \mathcal{F}_α^* y $\mathcal{F}_{\bar{\alpha}}^*$, es decir,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\alpha^* &= \{\varphi \mid (\varphi \beta) \in \mathcal{F}, \beta \geq \alpha\} \\ \mathcal{F}_{\bar{\alpha}}^* &= \{\varphi \mid (\varphi \beta) \in \mathcal{F}, \beta > \alpha\}\end{aligned}$$

Decimos que una distribución de posibilidad π satisface a la fórmula posibilista estándar $(\varphi \alpha)$, si y sólo si $N(\varphi) \geq \alpha$, donde N es la medida de necesidad inducida por π . Usaremos la notación $\pi \models (\varphi \alpha)$. Una distribución de posibilidad π satisface una base de conocimiento posibilista estándar $\mathcal{F} = \{(\varphi_i \alpha_i) \mid i = 1, \dots, n\}$ si y sólo si $\forall_i \pi \models (\varphi_i \alpha_i)$. Esto lo denotaremos por $\pi \models \mathcal{F}$. Si $\pi \models (\varphi \alpha)$ es verdadera para toda π , lo denotaremos por $\models (\varphi \alpha)$ y diremos que $(\varphi \alpha)$ es válida.

DEFINICIÓN 1.1.10. Una fórmula posibilista estándar ϕ es una *consecuencia lógica* de una base de conocimiento posibilista estándar \mathcal{F} , si y sólo si para cualquier π que satisfaga a \mathcal{F} , se tiene que también π satisface a ϕ , esto es, para todo π se tiene que si $\pi \models \mathcal{F}$ entonces $\pi \models \phi$. Esto se denota como $\mathcal{F} \models \phi$.

Supongamos que tenemos el siguiente problema [10]. Sea \mathcal{F} una base de conocimiento posibilista estándar y sea φ una fórmula clásica que

deseamos deducir de \mathcal{F} hasta cierto grado; tenemos que calcular la valuación más alta α (esto es, la mejor cota inferior de una medida de necesidad) de manera que $(\varphi \alpha)$ sea una consecuencia lógica de \mathcal{F} , esto es, calcular

$$Val(\varphi, \mathcal{F}) = \sup \{ \alpha \in (0, 1] : \mathcal{F} \models (\varphi \alpha) \}.$$

Un resultado fundamental de la deducción a partir de bases de conocimiento posibilistas estándar es que siempre existe una distribución de posibilidad menos *específica* que satisfaga una base de conocimiento posibilista estándar \mathcal{F} . A saber, si $\mathcal{F} = \{(\varphi_i \alpha_i) : i = 1, \dots, n\}$ entonces la distribución de posibilidad menos específica $\pi_{\mathcal{F}}$ que satisface \mathcal{F} se define como

$$\pi_{\mathcal{F}}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n \\ 1 - \max \{ \alpha_i \mid \omega \models \neg \varphi_i, i = 1, \dots, n \} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Presentamos el siguiente ejemplo [10].

EJEMPLO 1.1.11. Dada la siguiente base de conocimiento

$$\mathcal{F} = \{(\varphi \ 0.7), (\neg\varphi \vee \psi \ 0.4)\}$$

se calculará la distribución de posibilidad menos específica:

Primero, $\Omega = \{\emptyset, \{\varphi\}, \{\psi\}, \{\varphi, \psi\}\}$. Así, se tiene:

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{F}}(\{\varphi, \psi\}) &= 1 - \max \{ \alpha_i \mid \{\varphi, \psi\} \not\models \varphi_i, (\varphi_i \alpha_i) \in \mathcal{F} \} \\ &= 1 - \max \{ \emptyset \} = 1 \\ \pi_{\mathcal{F}}(\emptyset) &= 1 - \max \{ \alpha_i \mid \emptyset \not\models \varphi_i, (\varphi_i \alpha_i) \in \mathcal{F} \} \\ &= 1 - \max \{ 0.7 \} = 0.3 \\ \pi_{\mathcal{F}}(\{\varphi\}) &= 1 - \max \{ \alpha_i \mid \{\varphi\} \not\models \varphi_i, (\varphi_i \alpha_i) \in \mathcal{F} \} \\ &= 1 - \max \{ 0.4 \} = 0.6 \\ \pi_{\mathcal{F}}(\{\psi\}) &= 1 - \max \{ \alpha_i \mid \{\psi\} \not\models \varphi_i, (\varphi_i \alpha_i) \in \mathcal{F} \} \\ &= 1 - \max \{ 0.7 \} = 0.3 \end{aligned}$$

Así, la distribución menos específica que satisface a \mathcal{F} es $\pi_{\mathcal{F}}(\{\varphi, \psi\}) = 1$, $\pi_{\mathcal{F}}(\emptyset) = 0.3$, $\pi_{\mathcal{F}}(\{\varphi\}) = 0.6$, $\pi_{\mathcal{F}}(\{\psi\}) = 0.3$.

PROPOSICIÓN 1.1.12. Sean $(\varphi \alpha)$ y $(\varphi \beta)$ fórmulas con valuación de necesidad, entonces:

1. $(\varphi \alpha) \models (\varphi \beta)$, para todo $\alpha \geq \beta$.
2. $\forall \alpha > 0, \models (\varphi \alpha)$, si y sólo si φ es una tautología.

Demostración: En [10] se presenta este resultado sin demostración, a continuación damos la siguiente prueba:

1. Sea π una distribución de posibilidad tal que $\pi \models (\varphi \alpha)$. Por lo tanto, por definición, $N(\varphi) \geq \alpha$. Si $\alpha \geq \beta$, entonces $N(\varphi) \geq \beta$, así $\pi \models (\varphi \beta)$. Luego $(\varphi \alpha) \models (\varphi \beta)$.
2. (\implies) Supongamos que $\models (\varphi \alpha)$. Por lo tanto, para toda π y para toda α , se tiene $\pi \models (\varphi \alpha)$, es decir, $N(\varphi) \geq \alpha$. Así, en particular, si $\alpha = 1$ se tiene que para todo π se cumple $N(\varphi) = 1$. De aquí que para todo π se cumple $\max \{\pi(\omega) \mid \omega \models \neg\varphi\} = 0$. Esto implica que es imposible que alguna interpretación cumpla con $\omega \models \neg\varphi$, entonces para toda $\omega \in \Omega$ se tiene que $\omega \models \varphi$. Por lo tanto φ es una tautología.
- (\impliedby) Supongamos que φ es una tautología. Así, para toda interpretación $\omega \in \Omega$ se tiene $\omega \models \varphi$ y como el cálculo proposicional clásico es consistente, se tiene que para ningún $\omega \in \Omega$ se cumple $\omega \models \neg\varphi$. Así, para toda π , el conjunto $\{\pi(\omega) \mid \omega \models \neg\varphi\}$ es el conjunto vacío. Luego, se tiene que $\max \{\pi(\omega) \mid \omega \models \neg\varphi\} = 0$ y por lo tanto $N(\varphi) = 1 - \max \{\pi(\omega) \mid \omega \models \neg\varphi\} = 1 \geq \alpha$ para toda $\alpha \in [0, 1]$.

□

Directamente de las definiciones tenemos las siguientes propiedades:

PROPOSICIÓN 1.1.13. [10] Para cualquier distribución de posibilidad π , π satisface a \mathcal{F} si y sólo si $\pi \leq \pi_{\mathcal{F}}$.

inconsistente. La cantidad

$$\text{Cons}(\mathcal{F}) = \sup_{\pi \models \mathcal{F}} \left\{ \sup_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \right\} = \sup_{\omega \in \Omega} \pi_{\mathcal{F}}(\omega)$$

se llamará *grado de consistencia* de \mathcal{F} y la cantidad $\text{Incons}(\mathcal{F}) = 1 - \text{Cons}(\mathcal{F})$ se llamará *grado de inconsistencia* de \mathcal{F} .

La inconsistencia parcial extiende la inconsistencia clásica en la siguiente forma: sea $F = \{\varphi_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ un conjunto de fórmulas proposicionales y asociemos con F el conjunto de fórmulas con valuación de necesidad totalmente certeras

$$\mathcal{F} = \{(\varphi_i \ 1) \mid i = 1, 2, \dots, n\},$$

se puede demostrar que si F es consistente entonces, $\text{Incons}(\mathcal{F}) = 0$, y si F es inconsistente entonces, $\text{Incons}(\mathcal{F}) = 1$.

Se tienen las siguientes proposiciones:

PROPOSICIÓN 1.1.16. Sea $\mathcal{F} = \{(\varphi_1 \ \alpha_1), (\varphi_2 \ \alpha_2), \dots, (\varphi_n \ \alpha_n)\}$ una base de conocimiento. Entonces, $\text{Incons}(\mathcal{F}) = 0$ si y sólo si la proyección clásica \mathcal{F}^* es consistente en el sentido clásico.

Demostración: Damos la siguiente demostración:

$$\begin{aligned} \text{Incons}(\mathcal{F}) = 0 & \quad \text{si y sólo si} \quad 1 - \sup_{\omega \in \Omega} \pi_{\mathcal{F}}(\omega) = 0 \\ & \quad \text{si y sólo si} \quad 1 = \sup_{\omega \in \Omega} \pi_{\mathcal{F}}(\omega) \\ & \quad \text{si y sólo si} \quad \exists \omega_0 \in \Omega, \pi_{\mathcal{F}}(\omega_0) = 1 \\ & \quad \text{si y sólo si} \quad \exists \omega_0 \in \Omega, \omega_0 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n \\ & \quad \text{si y sólo si} \quad \exists \omega_0 \in \Omega, \omega_0 \text{ es un modelo clásico de } \mathcal{F}^* \\ & \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{F}^* \text{ es consistente} \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 1.1.17. Sea \mathcal{F} una base de conocimiento, se cumple que:

$$\begin{aligned} \text{Incons}(\mathcal{F}) &= \inf \{N(\perp) \mid \pi \models \mathcal{F}\} \\ &= N_{\mathcal{F}}(\perp) \\ &= \sup \{\alpha \mid \mathcal{F} \models (\perp \ \alpha)\} \end{aligned}$$

donde N es la distribución de necesidad inducida por π .

Demostración:

$$(1) \text{ Incons}(\mathcal{F}) = \inf_{\omega \in \Omega} \{1 - \pi_{\mathcal{F}}(\omega)\} = \inf_{\pi \leq \pi_{\mathcal{F}}} \left\{ \inf_{\omega \in \Omega} \{1 - \pi(\omega)\} \right\} \\ = \inf_{\pi \leq \pi_{\mathcal{F}}} N(\perp) = \inf \{N(\perp), \pi \models \mathcal{F}\}.$$

$$(2) \sup \{\alpha, \mathcal{F} \models (\perp \alpha)\} = \sup \{\alpha, (\forall \pi, \pi \models \mathcal{F}, N(\perp) \geq \alpha)\} \\ = \inf \{N(\perp), \pi \models \mathcal{F}\}.$$

□

Sea \mathcal{F} una base de conocimiento con valuación de necesidad parcialmente inconsistente, esto es, $\mathcal{F} \models (\perp \text{Incons}(\mathcal{F}))$ con $\text{Incons}(\mathcal{F}) > 0$. Así, puesto que para cualquier fórmula φ tenemos que $N(\varphi) \geq N(\perp)$, entonces cualquier fórmula φ es deducible a partir de \mathcal{F} con una valuación mayor o igual a $\text{Incons}(\mathcal{F})$. Esto significa que cualquier deducción tal que $\mathcal{F} \models (\varphi \alpha)$ con $\alpha = \text{Incons}(\mathcal{F})$ puede deberse sólo a la inconsistencia parcial de \mathcal{F} y no tiene nada que ver con φ . Esas deducciones son llamadas *deducciones triviales*. Por lo tanto, las deducciones de fórmulas con valuación de necesidad $\mathcal{F} \models (\varphi \alpha)$, con $\alpha > \text{Incons}(\mathcal{F})$, que no son causadas por la inconsistencia parcial, son llamadas *deducciones no triviales*.

Para la siguiente proposición necesitamos definir el concepto de:

DEFINICIÓN 1.1.18. Sea $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ tal que $\text{Incons}(\mathcal{F}') = \text{Incons}(\mathcal{F})$ y $\forall \phi \in \mathcal{F}', \text{Incons}(\mathcal{F} - \{\phi\}) < \text{Incons}(\mathcal{F}')$. Entonces \mathcal{F}' es llamada un *subconjunto fuertemente minimal inconsistente* de \mathcal{F} .

PROPOSICIÓN 1.1.19. ([10]). El grado de inconsistencia de una base de conocimiento posibilista \mathcal{F} parcialmente inconsistente es el *peso* más pequeño de las fórmulas posibilistas en cualquier subconjunto inconsistente \mathcal{F}' de \mathcal{F} . Más precisamente, si $\text{Incons}(\mathcal{F}) = \alpha > 0$ entonces existe al menos una fórmula $(\varphi \alpha) \in \mathcal{F}'$ tal que para toda $(\varphi' \beta) \in \mathcal{F}', \beta \geq \alpha$.

Demostración: Sea $\mathcal{F}' = \{(\varphi_i \mid \alpha_i) \mid i = 1, \dots, m\}$ un subconjunto fuertemente minimal inconsistente de \mathcal{F} . Por definición de \mathcal{F}' tenemos que

$$\text{Incons}(\mathcal{F}') = \text{Incons}(\mathcal{F}) = \alpha = 1 - \sup_{\omega \in \Omega} \pi_{\mathcal{F}}(\omega)$$

Supongamos que $\alpha_1 = \min\{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq m\}$. Probaremos que $\alpha_1 = \alpha$. Sea π , tal que π satisface \mathcal{F}' si y sólo si para todo i , $\forall \omega, \omega \models \neg \varphi_i$, $\pi(\omega) \leq 1 - \alpha_i$; en otras palabras, para todo π , $\pi \models \mathcal{F}'$ implica que $\forall \omega, \omega \models \neg \varphi_1 \vee \neg \varphi_2 \vee \dots \vee \neg \varphi_m$, $\pi(\omega) \leq \max_i \{1 - \alpha_i\} = 1 - \alpha_1$. Por lo tanto, ya que $\neg \varphi_1 \vee \neg \varphi_2 \vee \dots \vee \neg \varphi_m$ es una tautología (de otro modo \mathcal{F}' no sería inconsistente), $\pi(\omega) \leq 1 - \alpha_1$ es una consecuencia de $\pi \models \mathcal{F}'$, para toda $\omega \in \Omega$. Así, $\alpha \geq \alpha_1$. Sea π definida de la siguiente manera $\pi(\omega) = 1 - \alpha_1$ si $\omega \models \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \dots \wedge \varphi_m$ y $\pi(\omega) \leq 1 - \alpha_i$, si $\omega \models \neg \varphi_i$. Ahora, $\varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \dots \wedge \varphi_m \neq \perp$ debido a la minimalidad de \mathcal{F}' , así que existe ω tal que $\pi(\omega) = 1 - \alpha_1$, y $\pi \models \mathcal{F}'$. Por lo tanto $\alpha = \alpha_1$. \square

PROPOSICIÓN 1.1.20. [10] Sea \mathcal{F} un conjunto de fórmulas posibilistas y sea $\text{Incons}(\mathcal{F}) = inc$, entonces

1. \mathcal{F} es semánticamente equivalente a \mathcal{F}_{inc} y a $\mathcal{F}_{\overline{inc}} \cup \{(\perp \text{ inc})\}$
2. $\mathcal{F}_{\overline{inc}}$ es consistente
3. Si $\mathcal{F} \models (\psi \alpha)$ no trivialmente (*i.e.*, con $\alpha > inc$) entonces $\mathcal{F}_{\overline{inc}} \models (\psi \alpha)$

Demostración:

- 1) Mostremos que $\mathcal{F} \models \mathcal{F}_{inc}$, también que $\mathcal{F}_{inc} \models \mathcal{F}_{\overline{inc}} \cup \{(\perp \text{ inc})\}$, además $\mathcal{F}_{\overline{inc}} \models \mathcal{F}$.
 - $\mathcal{F} \models \mathcal{F}_{inc}$, dado que \mathcal{F} contiene a \mathcal{F}_{inc} .
 - $\mathcal{F}_{inc} \models \mathcal{F}_{\overline{inc}} \cup \{(\perp \text{ inc})\}$, dado que \mathcal{F}_{inc} contiene a $\mathcal{F}_{\overline{inc}}$; $\mathcal{F}_{inc} \models \{(\perp \text{ inc})\}$ es una consecuencia inmediata de la Proposición 1.1.19. Por lo tanto, $\mathcal{F}_{inc} \models \mathcal{F}_{\overline{inc}} \cup \{(\perp \text{ inc})\}$.

- Para ver que $\mathcal{F}_{\overline{inc}} \cup \{(\perp \text{ inc})\} \models \mathcal{F}$:

Sea π una distribución de posibilidad que satisface $(\perp \text{ inc}) \wedge \mathcal{F}_{\overline{inc}}$; demosntremos que π satisface a \mathcal{F} . Para cualquier fórmula de necesidad valuada $(\varphi_i \alpha_i)$ de \mathcal{F} : si $\alpha_i > \text{inc}$ entonces $\pi \models (\varphi_i \alpha_i)$, ya que π satisface a $\mathcal{F}_{\overline{inc}}$; y si $\alpha_i \leq \text{inc}$ entonces $N(\varphi_i) \geq N(\perp) \geq \text{inc} \geq \alpha_i$ (ya que π satisface a $(\perp \text{ inc})$), por lo tanto $\pi \models (\varphi_i \alpha_i)$. Así, hemos demostrado que π satisface a \mathcal{F} y por tanto se tiene el resultado.

- 2) Supongamos que $\mathcal{F}_{\overline{inc}}$ es inconsistente, entonces por la Proposición 1.1.19 $\text{Incons}(\mathcal{F}_{\overline{inc}})$ es igual a la valuación de una fórmula de $\mathcal{F}_{\overline{inc}}$, i.e., $\text{Incons}(\mathcal{F}_{\overline{inc}}) > \text{inc}$. Entonces, como \mathcal{F} contiene a $\mathcal{F}_{\overline{inc}}$, tenemos que $\text{inc} = \text{Incons}(\mathcal{F}) \geq \text{Incons}(\mathcal{F}_{\overline{inc}}) > \text{inc}$, lo cual es contradictorio. Luego, $\mathcal{F}_{\overline{inc}}$ es consistente.

- 3) $\mathcal{F} \models (\psi \alpha)$ no trivialmente, significa que $\mathcal{F} \models (\psi \alpha)$ con $\alpha > \text{inc}$. Sea $\mathcal{F} = \{(\varphi_i \alpha_i) \mid i = 1, \dots, n\}$, usando la definición de *medida de necesidad* inducida por una distribución de posibilidad, $\mathcal{F} \models (\psi \alpha)$ no trivialmente, es equivalente a

$$\forall \omega, \omega \models \neg \psi, \text{ existe } i \text{ tal que, } \omega \models \neg \varphi_i \text{ y } 1 - \alpha_i \leq 1 - \alpha (< 1 - \text{inc}).$$

Esto implica que $\forall \omega, \omega \models \neg \psi$, existe i tal que, $\omega \models \neg \varphi_i$ y $\alpha_i > \text{inc}$. Por lo tanto,

$$\forall \omega, \omega \models \neg \psi, \min \{1 - \alpha_i \mid \omega \models \neg \varphi_i, \alpha_i > \text{inc}\} \leq 1 - \alpha,$$

$$\text{es decir, } \mathcal{F}_{\overline{inc}} \models (\psi \alpha).$$

□

El resultado anterior muestra que solamente la parte consistente de \mathcal{F} , la cual consta de aquellas fórmulas que tienen un grado estrictamente mayor a inc , es útil en el proceso de deducción [10].

PROPOSICIÓN 1.1.21 (Inconsistencia parcial y α -corte). [10] Sea \mathcal{F} un conjunto de fórmulas con valuación de necesidad, entonces

1. $\text{Incons}(\mathcal{F}) = 0$ si y sólo si \mathcal{F}^* es consistente en el sentido clásico.
2. $\text{Incons}(\mathcal{F}) = \sup \{\alpha \mid \mathcal{F}_\alpha^* \text{ es inconsistente}\} = \inf \{\alpha \mid \mathcal{F}_{\bar{\alpha}}^* \text{ es consistente}\}$
y estas cotas se alcanzan.

Demostración:

1. \Rightarrow) Sea $\mathcal{F} = \{(\varphi_i \ \alpha_i) \mid i = 1, \dots, n\}$, de acuerdo con la definición, $\text{Incons}(\mathcal{F}) = 0$ si y sólo si $\pi_{\mathcal{F}}$ es normalizada, es decir, si y sólo si $\exists \omega^* \in \Omega$ tal que $\pi_{\mathcal{F}}(\omega^*) = 1$. Esto implica que $\omega^* \models \varphi_i$, para todo i . Por lo tanto, \mathcal{F}^* es consistente.
- \Leftarrow) Si \mathcal{F}^* es consistente, entonces tiene un modelo $\bar{\omega}$; así,

$$\pi_{\mathcal{F}}(\bar{\omega}) = \inf \{1 - \alpha_i \mid \bar{\omega} \models \neg \varphi_i\} = 1$$

ya que, para todo i , $\bar{\omega} \models \varphi_i$. Así, $\pi_{\mathcal{F}}$ es normalizada e $\text{Incons}(\mathcal{F}) = 0$.

2. Se sigue del inciso anterior y de los puntos 1) y 2) de la Proposición 1.1.20. □

Los siguientes resultados [10], generalizan las versiones semánticas de los teoremas clásicos de la Deducción y de Refutación:

PROPOSICIÓN 1.1.22 ([10] Teorema de la Deducción).

$$\mathcal{F} \cup \{(\varphi \ 1)\} \models (\psi \ \alpha) \text{ si y sólo si } \mathcal{F} \models (\varphi \rightarrow \psi \ \alpha).$$

Demostración:

\Rightarrow) $\mathcal{F} \cup \{(\varphi \ 1)\} \models (\psi \ \alpha)$ implica que $N_{\mathcal{F} \cup \{(\varphi \ 1)\}}(\psi) \geq \alpha$, por el Corolario 1.1.14, se tiene que $\inf \{1 - \pi_{\mathcal{F} \cup \{(\varphi \ 1)\}}(\omega) \mid \omega \models \neg \psi\} \geq \alpha$. para todo ω tal que $\omega \models \varphi \wedge \neg \psi$, $\pi_{\mathcal{F}}(\omega) \leq 1 - \alpha$, ya que $\pi_{\mathcal{F} \cup \{(\varphi \ 1)\}}(\omega) =$

$\pi_{\mathcal{F}}(\omega)$ para cualquier $\omega \models \varphi$. Además, $N_{\mathcal{F}}(\varphi \rightarrow \psi) \geq \alpha$, ya que $\varphi \rightarrow \psi$ es equivalente a $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$. Por lo tanto, $\mathcal{F} \models (\varphi \rightarrow \psi \ \alpha)$, nuevamente, por el Corolario 1.1.14.

\Leftarrow) $\mathcal{F} \models (\varphi \rightarrow \psi \ \alpha)$ implica que $\forall \pi, \pi \models \mathcal{F}, N(\varphi \rightarrow \psi) \geq \alpha$. Luego, $\forall \pi, \pi \models \mathcal{F}, N(\varphi) = 1$ implica $N(\psi) \geq \alpha$, dado que $N(\psi) \geq \min\{N(\varphi), N(\varphi \rightarrow \psi)\}$. Así, $\forall \pi, \pi \models \mathcal{F} \cup \{(\varphi \ 1)\}, N(\psi) \geq \alpha$. Por lo tanto, $\mathcal{F} \cup \{(\varphi \ 1)\} \models (\psi \ \alpha)$.

□

PROPOSICIÓN 1.1.23 ([10] Teorema de Refutación).

$$\mathcal{F} \models (\varphi \ \alpha) \text{ si, y sólo si } \mathcal{F} \cup \{(\neg\varphi \ 1)\} \models (\perp \ \alpha)$$

o, equivalentemente,

$$Val(\varphi, \mathcal{F}) = Incons(\mathcal{F} \cup \{(\neg\varphi \ 1)\}).$$

Demostración: Apliquemos el Teorema de la Deducción, reemplazando φ por $\neg\varphi$ y ψ por \perp , tenemos que $\mathcal{F} \cup \{(\neg\varphi \ 1)\} \models (\perp \ \alpha)$ si y sólo si $\mathcal{F} \models (\neg\varphi \rightarrow \perp \ \alpha)$; es decir, $\mathcal{F} \cup \{(\neg\varphi \ 1)\} \models (\perp \ \alpha)$ si y sólo si $\mathcal{F} \models (\varphi \ \alpha)$. □

La equivalencia se debe al hecho de que

$$\begin{aligned} Val(\varphi, \mathcal{F}) &= \sup \{\alpha \in (0, 1] \mid \mathcal{F} \models (\varphi \ \alpha)\}, \text{ por el teorema de Refutación} \\ &= \sup \{\alpha \in (0, 1] \mid \mathcal{F} \cup \{(\neg\varphi \ 1)\} \models (\perp \ \alpha)\} \\ &= Incons(\mathcal{F} \cup \{(\neg\varphi \ 1)\}) \end{aligned}$$

Como complemento a uno de los teoremas anteriores, tenemos el siguiente resultado, el cual establece que en el proceso de deducción de una fórmula posibilista $(\varphi \ \alpha)$, sólo son “útiles” las fórmulas que tienen un grado mayor o igual que α .

PROPOSICIÓN 1.1.24. Sean \mathcal{F} una base de conocimiento posibilista y $(\varphi \ \alpha)$ una fórmula con valuación de necesidad. Entonces

$$\mathcal{F} \models (\varphi \ \alpha) \text{ si y sólo si } \mathcal{F}_{\alpha} \models (\varphi \ \alpha).$$

Demostración: Por el Teorema de Refutación, $\mathcal{F} \models (\varphi \alpha)$ es equivalente a $\text{Incons}(\mathcal{F} \cup \{(\neg\varphi 1)\}) \geq \alpha$; entonces, por la proposición 1.1.20, tenemos que $\text{Incons}(\mathcal{F}_\alpha \cup \{(\neg\varphi 1)\}) \geq \alpha$, es decir, $\mathcal{F}_\alpha \models (\varphi \alpha)$ por otra aplicación del Teorema de Refutación. El inverso se obtiene debido a que, $\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}$. \square

En [10] se presenta un sistema axiomático para la Lógica Posibilista. En analogía con la construcción de la lógica clásica, se proponen los siguientes tres axiomas,

$$(A1) \ (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) 1)$$

$$(A2) \ ((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \xi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \xi)) 1)$$

$$(A3) \ ((\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) 1)$$

junto con las reglas de inferencia

$$(GMP) \ (\varphi \alpha), (\varphi \rightarrow \psi \beta) \vdash (\psi \min \{\alpha, \beta\})$$

$$(S) \ (\varphi \alpha) \vdash (\varphi \beta) \text{ si } \alpha \geq \beta$$

Como puede observarse, estos axiomas son los bien conocidos para la lógica clásica ponderados con 1. Obsérvese, además que la regla de inferencia (GMP) conserva fórmulas válidas (tautologías), donde la regla GMP es llamado Modus Ponens Generalizado. Este sistema formal hace a la lógica posibilista *robusta* y *completa* con respecto a la semántica tolerante de inconsistencia. Se tiene el siguiente resultado [10], pero antes un lema que se necesitará para su demostración.

LEMA 1.1.25. Sean \mathcal{F} un conjunto de fórmulas con valuación de necesidad y $(\varphi \alpha)$ una fórmula de necesidad valuada. Entonces

$$\mathcal{F} \models (\varphi \alpha) \text{ si y sólo si } \mathcal{F}_\alpha^* \models \varphi \text{ en el sentido clásico.}$$

Demostración:

$\mathcal{F} \models (\varphi \ \alpha)$ si y sólo si $\mathcal{F}_\alpha \models (\varphi \ \alpha)$ (Proposición 1.1.24)
 si y sólo si $\text{Incons}(\mathcal{F}_\alpha \cup \{(\neg\varphi \ 1)\}) \geq \alpha$ (Teorema de Refutación)
 si y sólo si $\mathcal{F}_\alpha^* \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente en el sentido clásico
 (Proposición 1.1.21 (1))
 si y sólo si $\mathcal{F}_\alpha^* \models \varphi$ (propiedad de deducción clásica)

□

Ahora si, tenemos el teorema de Completitud y Robustez.

TEOREMA 1.1.26 (Robustez y Completitud). Para cualquier conjunto de fórmulas posibilistas \mathcal{F} tenemos

$$\mathcal{F} \models (\varphi \ \alpha) \text{ si y sólo si } \mathcal{F} \vdash (\varphi \ \alpha),$$

Demostración:

\Rightarrow) Usando el Lema 1.1.25, $\mathcal{F} \models (\psi \ \alpha)$ es equivalente a $\mathcal{F}_\alpha^* \models \psi$. Como el sistema formal constituido por la parte sin peso del esquema axiomático y de las reglas de inferencia (excepto (S) cuya parte no valuada es trivial), por ser un sistema formal tipo Hilbert completo y robusto para lógica clásica proposicional, existe una prueba de ψ a partir de \mathcal{F}_α^* en este sistema formal clásico. Luego, agregando valuaciones γ a la prueba anterior obtenemos una prueba de $(\psi \ \gamma)$ a partir de \mathcal{F}_α por el sistema formal dado, con $\gamma \geq \alpha$. Por último, usando (S) obtenemos una prueba de $(\psi \ \alpha)$ a partir de \mathcal{F}_α y *a fortiori* de \mathcal{F} .

\Leftarrow) Por inducción sobre la longitud de la deducción.

Caso base: Si \mathcal{F} deduce a $(\varphi \ \alpha)$ en un sólo paso, tenemos que es un axioma, es decir, $(\varphi \ 1)$ o que, $(\varphi \ \alpha) \in \mathcal{F}$.

Para toda π , $\pi \models (\varphi \ 1)$, en particular para toda π' tal que $\pi' \models \mathcal{F}'$ implica que $\pi' \models (\varphi \ 1)$. Ahora, si $(\varphi \ \alpha) \in \mathcal{F}$, para toda π , $\pi \models \mathcal{F}$ implica que $\pi \models (\varphi \ \alpha)$.

Supongamos que $\mathcal{F} \vdash (\psi \beta)$ y que la prueba requirió n pasos, entonces $\mathcal{F} \models (\psi \beta)$.

Supongamos que $\mathcal{F} \vdash (\varphi \alpha)$ se probó en $n + 1$ pasos. Analicemos el último paso de la prueba de $(\varphi \alpha)$, supuesto \mathcal{F} .

Supongamos que $(\varphi \alpha)$ se obtuvo por GMP, es decir, que existen $(\psi \rightarrow \varphi \beta)$ y $(\psi \gamma)$ tal que $\mathcal{F} \vdash (\psi \rightarrow \varphi \beta)$ y $\mathcal{F} \vdash (\psi \gamma)$ donde $\alpha \leq \min\{\beta, \gamma\}$. Por hipótesis inductiva, se tiene que $\mathcal{F} \models (\psi \rightarrow \varphi \beta)$ y $\mathcal{F} \models (\psi \gamma)$. Por el Lema anterior tenemos que $\mathcal{F}_\beta^* \models \psi \rightarrow \varphi$ y $\mathcal{F}_\gamma^* \models \psi$ en el sentido clásico. Así, obtenemos por Modus Ponens que $\mathcal{F}_\alpha^* \models \varphi$ si y sólo si $\mathcal{F} \models (\varphi \alpha)$.

Ahora, supongamos que $(\varphi \alpha)$ es aplicación de la regla (S) y sea $\mathcal{F} \vdash (\varphi \beta)$ con $\beta > \alpha$. Por hipótesis inductiva $\mathcal{F} \models (\varphi \beta)$, además, sabemos que $(\varphi \beta) \models (\varphi \alpha)$, es decir, para todo π , $\pi \models \mathcal{F}$ implica que $\pi \models (\varphi \beta)$ y para todo π , $\pi \models (\varphi \beta)$ implica que $\pi \models (\varphi \alpha)$. Así, $\forall \pi$, $\pi \models \mathcal{F}$ implica que $\pi \models (\varphi \alpha)$ y por lo tanto $\mathcal{F} \models (\varphi \alpha)$. \square

Así, la Lógica Posibilista es *axiomatizable*.

Las demostraciones en la lógica posibilista se pueden realizar de manera equivalente a lo hecho en cálculo proposicional clásico.

EJEMPLO 1.1.27. Demostrar que $(\varphi \rightarrow 0,7), (\psi \rightarrow \omega 0,5) \vdash (\varphi \rightarrow \omega 0,5)$.

- | | | |
|----|--|--------------------|
| 1. | $(\varphi \rightarrow \psi 0,7)$ | Hipótesis |
| 2. | $(\psi \rightarrow \omega 0,5)$ | Hipótesis |
| 3. | $((\psi \rightarrow \omega) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \omega))) \quad 1)$ | Inst. de Axioma A1 |
| 4. | $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \omega)) \quad 0,5)$ | GMP 2 y 3 |
| 5. | $((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \omega)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \omega))) \quad 1)$ | Axioma A2 |
| 6. | $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \omega)) \quad 0,5)$ | GMP 4 y 5 |
| 7. | $((\varphi \rightarrow \omega) \quad 0,5)$ | GMP 1 y 6 |

1.1.5. Aspectos No-monótonos de la Lógica Posibilista Estándar

Es posible definir [10] un operador deductivo no-monótono como sigue: definimos el operador de deducción no trivial² \approx como

$$\mathcal{F} \approx (\varphi \ \alpha) \text{ si y sólo si } \mathcal{F} \models (\varphi \ \alpha) \text{ y } \alpha > \text{Incons}(\mathcal{F})$$

Con este operador puede suceder que $\mathcal{F} \approx (\varphi \ \alpha)$ y $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}' \not\approx (\varphi \ \alpha)$.

EJEMPLO 1.1.28. Considerar la siguiente teoría $\mathcal{F} = \{(\neg\varphi \vee \varphi \ 1), (\varphi \rightarrow \phi \ 0,7), (\neg\phi \rightarrow \phi \ 0,3), (\neg\neg\varphi \ 1)\}$, con la cual, deduzca la fórmula $\{(\phi \ 0,7)\}$.

- | | | |
|----|--|-----------------|
| 1. | $(\neg\neg\varphi \ 1)$ | Hipótesis |
| 2. | $(\varphi \rightarrow \phi \ 0,7)$ | Hipótesis |
| 3. | $((\varphi \rightarrow \phi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi) \ 1)$ | Teo. de clásica |
| 4. | $((\neg\varphi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi \ 0,7)$ | GMP 2y3 |
| 5. | $(\neg\neg\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \phi) \ 1)$ | Teo. de clásica |
| 6. | $(\neg\varphi \rightarrow \phi \ 1)$ | GMP 1y5 |
| 7. | $(\phi \ 0,7)$ | GMP 6y3 |

EJEMPLO 1.1.29. [10] Consideremos la siguiente base de conocimiento posibilista $\mathcal{F} = \{\phi_1, \dots, \phi_6\}$, en relación a una elección cuyos candidatos son Mary y Pedro, donde

$$\begin{aligned} \phi_1 &:= ((\text{Electo}(\text{Pedro}) \vee \text{Electo}(\text{Mary})) \wedge (\neg\text{Electo}(\text{Pedro}) \vee \neg\text{Electo}(\text{Mary}))) \ 1) \\ \phi_2 &:= (\forall x \neg\text{Presidente-actual}(x) \vee \text{Electo}(x) \ 0.5) \\ \phi_3 &:= (\text{Presidente-actual}(\text{Mary}) \ 1) \\ \phi_4 &:= (\forall x \neg\text{Apoya}(\text{Juan}, x) \vee \text{Electo}(x) \ 0.6) \\ \phi_5 &:= (\text{Apoya}(\text{Juan}, \text{Mary}) \ 0.2) \\ \phi_6 &:= (\forall x \text{Víctima-de-un-incidente}(x) \vee \neg\text{Electo}(x) \ 0.7) \end{aligned}$$

Se puede interpretar la fórmula ϕ_5 como “Mary tiene poco apoyo de Juan”, o la fórmula ϕ_4 se puede interpretar como “lo mas probable

²Recordemos que la deducción $\mathcal{F} \models (\varphi \ \alpha)$ es *no trivial* si y sólo si $\alpha > \text{Incons}(\mathcal{F})$.

es es que si Juan apoya a un candidato entonces ese candidato será electo”. observe que para esta interpretación se utilizo la equivalencia “ $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$ ”, la cual es valida ya que las fórmulas pertenecen a la lógica clásica.

Se puede establecer que $\text{Incon}(\mathcal{F}) = 0$, es decir, que \mathcal{F} es consistente. Estamos interesados en saber quién será electo y con qué grado máximo de certeza. Aplicando GMP a las reglas ϕ_2 y ϕ_3 tenemos que:

$$\mathcal{F} \models (\text{Electo}(\text{Mary}) \ 0.5)$$

Además, se puede probarse que:

$$\mathcal{F} \models (\neg\text{Electo}(\text{Mary}) \ 0)$$

$$\mathcal{F} \models (\text{Electo}(\text{Pedro}) \ 0)$$

$$\mathcal{F} \models (\neg\text{Electo}(\text{Pedro}) \ 0.5)$$

es decir, es moderadamente cierto que Mary sea electa (o equivalentemente, que Pedro no lo sea); el grado 0.5 es maximal, es decir, $\text{Val}(\mathcal{F}, \text{Electo}(\text{Mary})) = 0.5$. Ya que $\text{Incons}(\mathcal{F}) = 0$, tenemos que:

$$\mathcal{F} \approx (\text{Electo}(\text{Mary}) \ 0.5)$$

$$\mathcal{F} \approx (\neg\text{Electo}(\text{Pedro}) \ 0.5)$$

Entonces nos enteramos de que Mary es víctima de un incidente (lo cual es información completamente cierta). Esto nos lleva a actualizar la base de conocimiento, adicionándole a \mathcal{F} la fórmula posibilista

$$\phi_7 := (\text{Víctima-de-un-incidente}(\text{Mary}) \ 1)$$

Sea \mathcal{F}_1 la nueva base de conocimiento tal que $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} \cup \{\phi_7\}$. Se puede probar que \mathcal{F}_1 es parcialmente inconsistente con $\text{Incons}(\mathcal{F}_1) = 0.5$. En efecto, la nueva información nos permite inferir que Mary no será electa. Usando el operador de deducción no trivial, la deducción no trivial previa $\mathcal{F} \approx (\text{Electo}(\text{Mary}) \ 0.5)$ y $\mathcal{F} \approx (\neg\text{Electo}(\text{Pedro}) \ 0.5)$ ya no puede

hacerse con \mathcal{F}_1 . En este caso vemos un comportamiento no-monótono. Además, tenemos que

$$\mathcal{F}_1 \models (\neg \text{Electo}(\text{Mary}) \ 0.7)$$

$$\mathcal{F}_1 \models (\text{Electo}(\text{Pedro}) \ 0.7)$$

y estas deducciones son no triviales ya que $0.7 > \text{Incons}(\mathcal{F}_1)$, es decir,

$$\mathcal{F}_1 \approx (\neg \text{Electo}(\text{Mary}) \ 0.7)$$

$$\mathcal{F}_1 \approx (\text{Electo}(\text{Pedro}) \ 0.7)$$

lo cual significa ahora que Mary no es electa y Pedro sí. Por lo tanto, el actualizar la base de conocimiento nos lleva a una conclusión opuesta.

La conexión entre el razonamiento no-monótono y la Lógica Posibilista (como se señaló en [9]), se investigará a continuación. Sea \mathcal{F} una base de conocimiento posibilista que contiene fórmulas con valuación de necesidad y $\pi_{\mathcal{F}}$ es la distribución de posibilidad menos específica correspondiente, a saber, si $\mathcal{F} = \{(\varphi_i \ \alpha_i) \mid i = 1, \dots, n\}$ entonces

$$\pi_{\mathcal{F}} = \min \{1 - \alpha_i \mid \omega \models \neg \varphi_i, i = 1, \dots, n\}$$

Considere la relación de preferencia, denotada por \sqsubset , en el conjunto de interpretaciones Ω , definida por

$$\omega \sqsubset \omega' \Leftrightarrow \pi_{\mathcal{F}}(\omega) < \pi_{\mathcal{F}}(\omega')$$

Esta relación equipa a Ω con un orden parcial estricto, conforme a lo solicitado en [29]. Shoham define un modelo con preferencia de una fórmula φ como una interpretación ω tal que $\omega \models \varphi$ y $\nexists \omega' \neq \omega$, tal que $\omega' \models \varphi$ y $\omega \sqsubset \omega'$. Este modelo es un elemento maximal en $\{\omega' \mid \omega' \models \varphi\}$ en el sentido de \sqsubset y es denotado por $\omega \models_{\sqsubset} \varphi$. Más aún, se dice que φ implica *preferencialmente* a ψ , denotado por $\varphi \models_{\sqsubset} \psi$, si y sólo si todo modelo con preferencia de φ satisface a ψ , precisando,

$$\varphi \models_{\sqsubset} \psi \text{ si y sólo si } \forall \omega, \omega \models_{\sqsubset} \varphi \text{ implica } \omega \models \psi$$

Si \sqsubset es inducida por una distribución de posibilidad $\pi_{\mathcal{F}}$, es fácil verificar que $\omega \models_{\sqsubset} \varphi$ si y sólo si $\pi_{\mathcal{F}}(\omega) = \Pi_{\mathcal{F}}(\varphi)$, esto es, ω es el mejor modelo de $\mathcal{F} \cup \{(\varphi \ 1)\}$. Sin embargo, cuando $\pi_{\mathcal{F}}(\omega) = 0$, el concepto de modelo con preferencia es debatible, ya que $\pi_{\mathcal{F}}(\omega) = 0$ significa que ω es imposible. En lo que sigue, vamos a restringir la definición de Shoham al caso donde $\pi_{\mathcal{F}}(\omega) > 0$ y sea

$$\omega \models_{\sqsubset} \varphi \text{ si y sólo si } \pi_{\mathcal{F}}(\omega) = \Pi_{\mathcal{F}}(\varphi) > 0$$

Por lo tanto, queda definida la deducción preferencial para la Lógica Posibilista, además:

$$\exists \alpha > 0, \mathcal{F} \cup \{(\varphi \ 1)\} \approx (\psi \ \alpha) \text{ si y sólo si } \varphi \models_{\sqsubset} \psi,$$

donde \approx denota al operador no trivial.

En otras palabras, ψ es una deducción no trivial de \mathcal{F} , aumentado con φ , si φ implica preferencialmente a ψ en el sentido del orden de los modelos inducidos por \mathcal{F} . Este resultado se prueba formalmente en [7] y puede explicarse como sigue: la distribución de posibilidad $\pi_{\mathcal{F}}^*$ asociada a $\mathcal{F} \cup \{(\varphi \ 1)\}$ es

$$\pi_{\mathcal{F}}^* = \begin{cases} \pi_{\mathcal{F}}(\omega) & \text{si } \omega \models \varphi \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es claro que

$$\max_{\omega \in \Omega} \pi_{\mathcal{F}}^*(\omega) = \Pi_{\mathcal{F}}(\varphi) \text{ e } \text{Incons}(\mathcal{F} \cup \{(\varphi \ 1)\}) = 1 - \Pi_{\mathcal{F}}(\varphi).$$

Aquí, $\mathcal{F} \cup \{(\varphi \ 1)\} \approx (\psi \ \alpha)$ significa que $N_{\mathcal{F} \cup \{(\varphi \ 1)\}}(\psi) = \alpha > \text{Incons}(\mathcal{F} \cup \{(\varphi \ 1)\})$. Ahora, si ω es un modelo con preferencia de φ tenemos $\pi_{\mathcal{F}}(\omega) = \Pi_{\mathcal{F}}(\varphi)$. Entonces la interpretación ω debería de satisfacer a ψ , porque si no

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{F} \cup \{(\varphi \ 1)\}}(\psi) &= \min_{\omega' \models \neg \psi} \{1 - \pi_{\mathcal{F}}^*(\omega')\} \leq 1 - \pi_{\mathcal{F}}(\omega) \\ &= \text{Incons}(\mathcal{F} \cup \{(\varphi \ 1)\}) < \alpha. \end{aligned}$$

Por lo tanto, φ deduce preferencialmente a ψ . El inverso también se establece fácilmente. De nuevo, el operador de deducción no trivial \approx no es una generalización de la deducción semántica clásica, \models , ya que si \mathcal{F} es una base de conocimiento inconsistente en el sentido clásico entonces, para toda φ $\mathcal{F} \models \varphi$, mientras que $\mathcal{F} \approx \varphi$ nunca se cumple, porque todas las deducciones son triviales.

Un vínculo entre la implicación preferencial y la medida de posibilidad condicional ha sido establecido. Esto es, sea $\Pi(\psi \mid \varphi)$ la posibilidad de ψ condicionada a φ , se define por la ecuación implícita [16]

$$\Pi(\varphi \wedge \psi) = \min \{ \Pi(\psi \mid \varphi), \Pi(\varphi) \},$$

de los cuales tenemos que tomar la mayor solución cuando $\psi \neq \perp$. La posibilidad condicional se define entonces como

$$\forall \varphi, \forall \psi, \Pi(\psi \mid \varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Pi(\varphi \wedge \psi) = \Pi(\varphi) \\ \Pi(\varphi \wedge \psi) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La distribución de posibilidad correspondiente es $\pi(\cdot \mid \varphi)$, tal que

$$\pi(\omega \mid \varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi(\omega) = \Pi(\varphi) > 0 \text{ y } \omega \models \varphi \\ \pi(\omega) & \text{si } \pi(\omega) < \Pi(\varphi) \text{ y } \omega \models \varphi \\ 0 & \text{si } \Pi(\varphi) > 0 \text{ y } \omega \models \neg\varphi \\ 1 & \text{si } \Pi(\varphi) = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, cuando $\Pi(\varphi) > 0$, $\pi(\omega \mid \varphi) = 1$ si y sólo si ω es un modelo con preferencia de φ . La necesidad condicional se define por $N(\psi \mid \varphi) = 1 - \Pi(\neg\psi \mid \varphi)$. Note que $\Pi(\varphi) = \max \{ \Pi(\psi \wedge \varphi), \Pi(\neg\psi \wedge \varphi) \}$, así que la definición de la medida de posibilidad condicional se expresa por:

$$\Pi(\psi \mid \varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Pi(\varphi \wedge \psi) \geq \Pi(\varphi \wedge \neg\psi) \\ \Pi(\varphi \wedge \psi) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y la medida de necesidad condicional por

$$N(\psi \mid \varphi) = \begin{cases} N(\neg\varphi \vee \psi) & \text{si } N(\neg\varphi \vee \psi) > N(\neg\varphi \vee \neg\psi) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$\Pi(\psi \mid \varphi)$ y $N(\psi \mid \varphi)$ son homólogos numéricos del “podría” condicional (si se tuviera φ podría ser que ψ) y del “sería” condicional (si se tuviera φ sería que ψ), respectivamente [12].

La deducción preferencial modificada $\varphi \models_{\square} \psi$ puede entonces ser expresada en términos de la condicional de necesidad o de posibilidad $\Pi_{\mathcal{F}}(\psi \mid \varphi)$ y $N_{\mathcal{F}}(\psi \mid \varphi)$ como sigue [7]

$$\begin{aligned} \varphi \models_{\square} \psi & \quad \text{si y sólo si } \Pi_{\mathcal{F}}(\psi \mid \varphi) > \Pi_{\mathcal{F}}(\neg\psi \mid \varphi) \\ & \quad \text{si y sólo si } N_{\mathcal{F}}(\psi \mid \varphi) > 0 \\ & \quad \text{si y sólo si } \Pi_{\mathcal{F}}(\psi \wedge \varphi) > \Pi_{\mathcal{F}}(\neg\psi \wedge \varphi) \\ & \quad \text{si y sólo si } N_{\mathcal{F}}(\neg\varphi \vee \psi) > N_{\mathcal{F}}(\neg\varphi \vee \neg\psi). \end{aligned}$$

En efecto, si $\{\omega \mid \pi_{\mathcal{F}}(\omega) = \Pi_{\mathcal{F}}(\varphi) > 0\} \subseteq \{\omega \mid \omega \models \psi\}$, significa que

$$\Pi_{\mathcal{F}}(\varphi \wedge \psi) = \max_{\omega \models \varphi \wedge \psi} \pi_{\mathcal{F}}(\omega) = \Pi_{\mathcal{F}}(\varphi),$$

mientras que

$$\Pi_{\mathcal{F}}(\varphi \wedge \neg\psi) = \max_{\omega \models \varphi \wedge \neg\psi} \pi_{\mathcal{F}}(\omega) < \Pi_{\mathcal{F}}(\varphi)$$

ya que ningún modelo con preferencia de φ satisface a $\neg\psi$. Por otra parte, contrario a lo que se establece en [23] no se necesita agregar la condición suplementaria $\varphi \models \psi$ para $N_{\mathcal{F}}(\psi \mid \varphi) > 0$, porque no permitimos que $\perp \models_{\square} \varphi$. Por lo tanto, ψ es una consecuencia no trivial de $\mathcal{F} \cup \{(\varphi \ 1)\}$ siempre que $N(\psi \mid \varphi) > 0$. También significa que la condición de consecuencia no trivial \approx puede ser caracterizada en un nivel semántico por medio de la distribución de posibilidad condicional $\pi_{\mathcal{F}}(\cdot \mid \varphi)$, ya que la única parte útil de $\pi_{\mathcal{F}}$ cuando calculamos la consecuencia no trivial de $\mathcal{F} \cup \{(\varphi \ 1)\}$ es su restricción al conjunto $\{\omega \mid \omega \models \varphi \text{ y } \pi(\omega) < \Pi(\varphi)\}$ como se puntualizó en [7]. En efecto, $N_{\mathcal{F}}(\psi \mid \varphi) > 0$ si y sólo si $N_{\mathcal{F}}(\psi \mid \varphi) = N_{\mathcal{F}}(\neg\varphi \vee \psi) = 1 - \sup_{\omega \models \varphi \wedge \neg\psi} \pi_{\mathcal{F}}(\omega) > 1 - \Pi_{\mathcal{F}}(\varphi) = \text{Incons}(\mathcal{F} \cup \{(\varphi \ 1)\})$, es decir, podemos sólo normalizar la restricción de $\pi_{\mathcal{F}}$ a los modelos de φ asignándole un grado de posibilidad

igual a 1 a su maximal, y trabajar con esta distribución de posibilidad normalizada. Note que, $\forall \omega \in \Omega \pi_{\mathcal{F}}(\omega \mid \perp) = 1$, es decir, condicionar con la contradicción lleva a la total ignorancia.

La relación de consecuencia no trivial satisface las reglas de una relación de consecuencia no-monótona *bien portada* como se introdujo en [13]

$$\begin{aligned} \varphi \models_{\square} \varphi \text{ cuando } \varphi \neq \perp & \quad (\text{reflexividad, excluyendo la contradicción}) \\ \varphi \models_{\square} \psi, \varphi \wedge \psi \models_{\square} \xi \Rightarrow \varphi \models_{\square} \xi & \quad (\text{corte}) \\ \varphi \models_{\square} \psi, \varphi \models_{\square} \xi \Rightarrow \varphi \wedge \psi \models_{\square} \xi & \quad (\text{monotonía restringida}) \\ \varphi \models_{\square} \xi, \psi \models_{\square} \xi \Rightarrow \varphi \vee \psi \models_{\square} \xi & \quad (\text{OR}) \end{aligned}$$

En términos de la medida de necesidad condicional, estas propiedades pueden leerse [5]

$$\begin{aligned} N(\varphi \mid \varphi) &= 1 \text{ para } \varphi \neq \perp, \\ N(\psi \mid \varphi) > 0, N(\xi \mid \varphi \wedge \psi) > 0, \text{ luego } N(\xi \mid \varphi) &\geq \min(N(\psi \mid \varphi), N(\xi \mid \varphi \wedge \psi)), \\ N(\psi \mid \varphi) > 0, N(\xi \mid \varphi) > 0, \text{ así } N(\xi \mid \varphi \wedge \psi) &\geq \min(N(\psi \mid \varphi), N(\xi \mid \varphi)), \\ N(\xi \mid \varphi) > 0, N(\xi \mid \psi) > 0, \text{ entonces } N(\xi \mid \varphi \vee \psi) &\geq \min(N(\xi \mid \varphi), N(\xi \mid \psi)). \end{aligned}$$

La monotonía racional: si $\varphi \not\models_{\square} \neg\psi$ y $\varphi \models_{\square} \xi$ entonces $\varphi \wedge \psi \models_{\square} \xi$, es también satisfecha en la Lógica Posibilista [28] bajo la forma:

$$\text{si } N(\neg\psi \mid \varphi) = 0 \text{ y } N(\xi \mid \varphi) > 0 \text{ entonces } N(\xi \mid \varphi \wedge \psi) > 0.$$

Consecuentemente, la Lógica Posibilista pertenece a la familia de las lógicas no-monótonas basadas en modelos con preferencia.

1.2. Generalización de la Lógica Posibilista

La versión de la Lógica Posibilista que hemos discutido hasta ahora puede ser insuficiente para modelar algunos tipos de información incompleta, tal como

- Proposiciones calificadas de posibilidad, por ejemplo,
“es posible que Juan venga”
- Proposiciones condicionales, cuya condición depende de un predicado difuso,
“entre más tarde llegue Juan, lo más seguro, es que la reunión no sea amena”
- Proposiciones que involucran predicados vagos, por ejemplo,
“si la temperatura es alta, entonces sólo habrá pocos participantes”

1.2.1. Lógica Posibilista. Fórmulas con Valuación de Necesidad y de Posibilidad

Con el fin de manejar las sentencias calificadas de posibilidad y de necesidad, el lenguaje debería ser capaz de modelar restricciones, de manera sintáctica, en términos de cotas inferiores de una medida de posibilidad o de necesidad. Todo esto se reduce a considerar dos tipos de fórmulas: las fórmulas con valuación de necesidad, expresadas por $N(\varphi) \geq \alpha$ y las fórmulas con valor de posibilidad, expresadas por $\Pi(\varphi) \geq \alpha$. Las valuaciones serán denotadas por w y representarán a $(\Pi\alpha)$ o $(N\alpha)$ de acuerdo a si α es una cota inferior de una medida de posibilidad o de necesidad, respectivamente.

DEFINICIÓN 1.2.1. Una fórmula posibilista es un par $(\varphi (N\alpha))$, donde φ es una fórmula cerrada clásica de primer orden y $\alpha \in (0, 1]$, o un par $(\varphi (\Pi\beta))$ donde $\beta \in [0, 1]$.

$(\varphi (N\alpha))$ significa que φ es cierta al menos con el grado α , es decir, $N(\varphi) \geq \alpha$ y $(\varphi (\Pi\beta))$ significa que φ es posible en algún mundo al menos con el grado β , es decir, $\Pi(\varphi) \geq \beta$, donde Π y N son medidas duales ($\Pi(\varphi) = 1 - N(\neg\varphi)$) de posibilidad y de necesidad que modelan nuestro estado de conocimiento incompleto. $\Pi(\varphi) \geq \beta$ expresa hasta qué punto consideramos que φ puede ser refutado. Más específicamente, $\Pi(\varphi) \geq \beta$ significa que φ es consistente con el resto de la base de conocimiento al cual pertenece φ al menos a nivel β . Particularmente, $(\varphi (\Pi 1))$ y

$(\neg\varphi \text{ (II1)})$ significa que ni φ y ni $\neg\varphi$ son consecuencia del resto de la base de conocimiento. Así, el uso de sentencias calificadas posibilistas nos permite afirmar que algunas proposiciones no pueden ser establecidas o refutadas.

La parte derecha de una fórmula posibilista, es decir $(N\alpha)$ o $(\Pi\beta)$, es llamada la valuación de la fórmula y la denotaremos por $val(\varphi)$. \mathcal{V} denotará al conjunto de todas las valuaciones posibles w , es decir,

$$\mathcal{V} = \{(N\alpha) \mid 0 < \alpha \leq 1\} \cup \{(\Pi\alpha) \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}.$$

Como $N(\varphi) > 0$ implica $\Pi(\varphi) = 1$, $(\varphi \text{ (} N\alpha))$ es más fuerte que $(\varphi \text{ (} \Pi\beta))$ para cualquier $\alpha > 0$ y $\beta \geq 0$.

Definimos el siguiente orden entre valuaciones como sigue

$$\begin{aligned} (N\alpha) \leq (N\beta) & \quad \text{si y sólo si} \quad \alpha \leq \beta \\ (\Pi\alpha) \leq (\Pi\beta) & \quad \text{si y sólo si} \quad \alpha \leq \beta \\ (\Pi\alpha) \leq (N\beta) & \quad \forall \alpha, \forall \beta > 0 \end{aligned}$$

Así, los elementos maximal y minimal de \mathcal{V} son $(N1)$ y $(\Pi0)$, respectivamente. $(N1)$ significa que la fórmula es completamente cierta y $(\Pi0)$ significa que no se sabe nada de la verdad, falsedad o consistencia de la fórmula.

La diferencia entre $(\varphi \text{ (} \Pi1))$ y $(\varphi \text{ (} \Pi0))$ es que al declarar $(\varphi \text{ (} \Pi1))$ se afirma que $\neg\varphi$ ciertamente no puede ser probada, mientras que $(\varphi \text{ (} \Pi0))$ expresa nuestra ignorancia sobre: si $\neg\varphi$ puede ser probada o no.

Definimos una base de conocimiento posibilista como un conjunto (es decir, una conjunción) finito de fórmulas posibilistas. Una fórmula posibilista cuya valuación es de la forma $(N\alpha)$ (resp. $(\Pi\alpha)$) será llamada una fórmula de necesidad valuada (resp. de posibilidad valuada).

Denotaremos por PL2 al lenguaje que consiste de fórmulas posibilistas (las fórmulas de necesidad valudas, así como las fórmulas de posibilidad valudas) y por PL1 al lenguaje que consiste sólo de las fórmulas con valuación de necesidad. En la siguiente sección se extenderá gran parte de la semántica de PL1 a PL2.

La proyección clásica \mathcal{F}^* de \mathcal{F} denota al conjunto de fórmulas clásicas obtenido de un conjunto de fórmulas posibilistas \mathcal{F} ignorando los pesos, así,

$$\text{si } \mathcal{F} = \{(\varphi_i w_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\} \text{ entonces } \mathcal{F}^* = \{\varphi_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Una base de conocimiento posibilista puede ser vista como una colección de conjuntos anidados de fórmulas: w es una valuación de \mathcal{V} , el w -corte y el estricto w -corte de \mathcal{F} denotados respectivamente por \mathcal{F}_w y $\mathcal{F}_{\bar{w}}$, se definen como

$$\mathcal{F}_w = \{(\varphi v) \in \mathcal{F} \mid v \geq w\}$$

$$\mathcal{F}_{\bar{w}} = \{(\varphi v) \in \mathcal{F} \mid v > w\}$$

1.2.2. Semántica

En primer lugar, asociamos con un conjunto de fórmulas posibilistas el conjunto de distribuciones posibilistas normalizadas sobre Ω que lo satisface.

DEFINICIÓN 1.2.2. Sea $\mathcal{F} = \{(\varphi_i w_i) \mid i = 1, \dots, n\}$ una base de conocimiento posibilista. Para la distribución de posibilidad π , que induce la medida de posibilidad Π , y la medida de necesidad N , definimos la satisfacción como

$$\pi \models (\varphi (N\alpha)) \text{ si y sólo si } N(\varphi) \geq \alpha$$

$$\pi \models (\varphi (\Pi\alpha)) \text{ si y sólo si } \Pi(\varphi) \geq \alpha$$

$$\pi \models \mathcal{F} \text{ si y sólo si } \forall_{i=1, \dots, n}, \pi \models (\varphi_i w_i)$$

y consecuencia lógica como:

$$\mathcal{F} \models \phi \text{ si y sólo si, para todo } \pi, (\pi \models \mathcal{F}) \Rightarrow (\pi \models \phi).$$

La función Val es extendida naturalmente por:

$$Val(\varphi, \mathcal{F}) = \sup \{\omega \mid \mathcal{F} \models (\varphi \omega)\}$$

Las siguientes propiedades son inmediatas

1. $(\varphi w) \models (\varphi w')$ si $w \geq w'$
2. Para todo $w > (\Pi 0)$, $\models (\varphi w)$ si y sólo si φ es una tautología.

Existen dos clases de inconsistencias en una base de conocimiento posibilista \mathcal{F} :

- Inconsistencias generadas (solamente) por fórmulas con valuación de necesidad contradictorias; pueden ser resueltas permitiendo un valor distinto de cero para $N(\perp)$.
- Inconsistencias donde participan las fórmulas valuadas de posibilidad y de necesidad.

Con el fin de equipar una base de conocimiento posibilista inconsistente con una semántica, un método consiste en añadir al conjunto de interpretaciones Ω un elemento extra, digamos w_\perp con el cual toda fórmula es verdadera, es decir, $\forall \varphi \in \mathcal{L}', w_\perp \models \varphi$ lo que corresponde a la idea de una interpretación trivial, discutida en [25].

Sea $\Omega_\perp = \Omega \cup \{w_\perp\}$, una distribución de posibilidad en Ω_\perp es un mapeo $\hat{\pi}$ de Ω_\perp a $[0, 1]$ tal que $\exists w \in \Omega_\perp, \hat{\pi}(w) = 1$ (normalización sobre Ω_\perp). Definimos dos funciones de \mathcal{L}' a $[0, 1]$ inducidas por $\hat{\pi}$:

$$\hat{\Pi}(\varphi) = \sup \{ \hat{\pi}(w) \mid w \in \Omega_\perp, w \models \varphi \},$$

$$\hat{N}(\varphi) = \inf \{ 1 - \hat{\pi}(w) \mid w \in \Omega_\perp, w \not\models \varphi \}.$$

Note que $\hat{N}(\varphi)$ no toma en cuenta a $\hat{\pi}(w_\perp)$, mientras que $\hat{\Pi}(\varphi)$ sí. Note también que $w \not\models \varphi$ ya no es equivalente a $w \models \neg\varphi$ pues $w_\perp \models \varphi$ y $w_\perp \models \neg\varphi$.

La idea de adicionar un elemento extra a la referencia de una distribución de posibilidad ya se ha utilizado para tratar el caso de un atributo que no se aplica a un elemento de una base de datos. Sin embargo, las extensiones de las medidas de posibilidad y de necesidad, que son usadas

para la evaluación de consultas en una base de datos incompleta, difieren de $\hat{\Pi}$ y \hat{N} definidos en [8].

Las medidas de posibilidad $\Pi(\varphi) = \sup \{\hat{\pi}(w) \mid w \in \Omega, w \models \varphi\}$ y de necesidad clásicas $N(\varphi) = \inf \{1 - \hat{\pi}(w) \mid w \in \Omega, w \models \neg\varphi\}$ derivados de la restricción (posiblemente no normalizada) de $\hat{\pi}$ a Ω están relacionados con $\hat{\Pi}$ y \hat{N} como sigue:

$$\hat{\Pi}(\varphi) = \max \{\Pi(\varphi), \hat{\pi}(w_{\perp})\},$$

$$\hat{N}(\varphi) = N(\varphi) = 1 - \Pi(\neg\varphi).$$

$\hat{\Pi} = \Pi$ si y sólo si $\hat{\pi}(w_{\perp}) = 0$, en este caso $\hat{\pi}$ es normalizado sobre Ω . Note que $\hat{\Pi}$ no es una medida de posibilidad con respecto a Ω , pero sí con respecto a Ω_{\perp} . Llamaremos a $\hat{\Pi}$ y a \hat{N} medidas de posibilidad (resp. de necesidad) tolerantes a la inconsistencia.

Cada fórmula posibilista (φ ($\Pi\alpha$)) o (φ ($N\alpha$)) es ahora interpretada como $\hat{\Pi}(\varphi) \geq \alpha$ (respectivamente $\hat{N}(\varphi) \geq \alpha$), es decir, tomamos en cuenta la interpretación absurda en nuestra comprensión de sentencias calificadas de incertidumbre. Por ejemplo, (φ ($\Pi\alpha$)) significa que: es posible, al menos con grado α , que φ sea verdadera o que estamos en una situación absurda. Esto nos lleva a las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 1.2.3.

- Satisfacción: $\hat{\pi} \models (\varphi$ ($\Pi\alpha$)) si y sólo si $\hat{\Pi}(\varphi) \geq \alpha$, $\hat{\pi} \models (\varphi$ ($N\alpha$)) si y sólo si $\hat{N}(\varphi) \geq \alpha$, donde $\hat{\Pi}$ y \hat{N} son las medidas de posibilidad y de necesidad tolerantes a la inconsistencia inducidas por $\hat{\pi}$, $\hat{\pi} \models \mathcal{F}$ si y sólo si $\hat{\pi}$ satisface todas las fórmulas de \mathcal{F} .
- Consecuencia lógica: $\mathcal{F} \hat{\models} \phi$ si y sólo si $\forall \hat{\pi}, \hat{\pi} \models \mathcal{F}$ implica $\hat{\pi} \models \phi$.

El resultado sobre la caracterización del conjunto de distribuciones posibilistas que satisfacen una base de conocimiento de necesidad valuada, vía una distribución de posibilidad $\pi_{\mathcal{F}}$, no puede ser generalizado a la Lógica Posibilista con fórmulas calificadas de posibilidad, pues este conjunto generalmente ya no tiene una cota superior de Ω_{\perp} .

Como se señaló anteriormente, podemos distinguir entre dos diferentes tipos de inconsistencias. Sea \mathcal{F} un conjunto de fórmulas posibilistas considerando una distribución posibilista sobre Ω_{\perp} que satisface \mathcal{F} . Pueden ocurrir tres situaciones:

1. Existe $\hat{\pi}$ tal que $\hat{\pi} \models \mathcal{F}$ y $\hat{\pi}(w_{\perp}) = 0$: en este caso, \mathcal{F} es consistente en ambas semánticas; así \mathcal{F} se dice que es *completamente consistente*.
2. Para toda $\hat{\pi}$, se cumple que $\hat{\pi} \models \mathcal{F}$, con $\hat{\pi}(w_{\perp}) > 0$ pero $\exists \hat{\pi}$, tal que $\hat{\pi} \models \mathcal{F}$ y $\sup \{\hat{\pi}(w) \mid w \neq w_{\perp}\} = 1$, entonces para todo $\hat{\pi}$ que satisface \mathcal{F} , tenemos que $\hat{\Pi}(\perp) = \hat{\pi}(w_{\perp}) > 0$ y $\hat{N}(\perp) = 1 - \sup \{\hat{\pi}(w) \mid w \neq w_{\perp}\} = 0$. Así, \mathcal{F} induce sólo una “inconsistencia posible”. El valor mínimo de $\hat{\pi}(w_{\perp})$ entre las distribuciones de posibilidad $\hat{\pi}$ en w_{\perp} que satisface a \mathcal{F} da el grado de inconsistencia de \mathcal{F} . Sea $\alpha = \inf \{\hat{\pi}(w_{\perp}) \mid \hat{\pi} \models \mathcal{F}\}$ entonces $\text{Incons}(\mathcal{F}) = (\text{II}\alpha)$.
3. Para toda $\hat{\pi}$, $\hat{\pi} \models \mathcal{F}$, $\sup \{\hat{\pi}(w) \mid w \neq w_{\perp}\} < 1$ (lo cual implica que $\forall \hat{\pi}$, $\hat{\pi} \models \mathcal{F}$, $\hat{\pi}(w_{\perp}) = 1$). En este caso, para todo $\hat{\pi}$ que satisface \mathcal{F} tenemos que $\hat{\pi}(w_{\perp}) = 1$ y $\hat{N}(\perp) = 1 - \sup \{\hat{\pi}(w) \mid w \neq w_{\perp}\} > 0$. Así recuperamos la noción de inconsistencia parcial introducida en PL1.

Se define el grado de inconsistencia de \mathcal{F} , el cual es una valuación de la forma $(\text{II}\alpha)$ o $(\text{N}\alpha)$, como

$$\text{Incons}(\mathcal{F}) = \sup \left\{ \omega \in \mathcal{V} \mid \mathcal{F} \models (\perp \omega) \right\}$$

y decimos que \mathcal{F} es *completamente consistente* si y sólo si $\text{Incons}(\mathcal{F}) = (\text{II}0)$. Si $\forall \hat{\pi}$, $\hat{\pi} \models \mathcal{F}$, $\sup \{\hat{\pi}(w) \mid w \neq w_{\perp}\} = 0$, entonces $\text{Incons}(\mathcal{F}) = (\text{N}1)$ y \mathcal{F} se dice *completamente inconsistente*. \mathcal{F} es *débilmente inconsistente* si $\text{Incons}(\mathcal{F}) = (\text{II}\alpha)$ con $\alpha > 0$. Además \mathcal{F} es *parcialmente inconsistente* si $\text{Incons}(\mathcal{F}) = (\text{N}\beta)$ con $\beta < 1$. La Figura 1 muestra la jerarquía de inconsistencias:

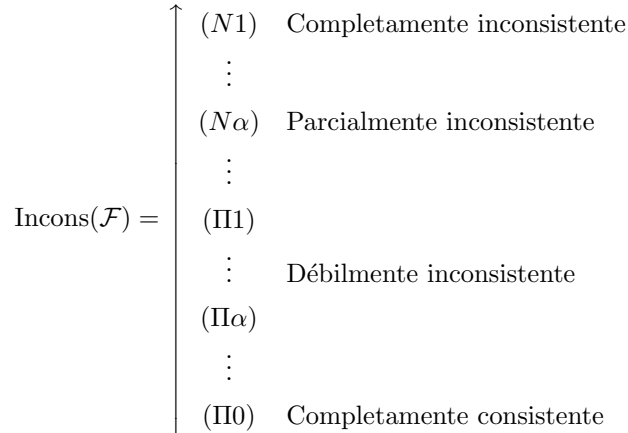


Figura 1. Jerarquía de inconsistencias

Es claro que cuando \mathcal{F} es consistente o parcialmente inconsistente, entonces las dos implicaciones semánticas \models y $\hat{\models}$ son equivalentes.

PROPOSICIÓN 1.2.4. [19] El grado de inconsistencia de una base de conocimiento posibilista inconsistente \mathcal{F} es el peso más pequeño de fórmulas posibilistas en cualquier subconjunto inconsistente fuertemente minimal \mathcal{F}' de \mathcal{F} . Específicamente, si

$$\text{Incons}(\mathcal{F}) = (\Pi\beta)(\beta > 0)$$

entonces existe una única fórmula de posibilidad valuada en \mathcal{F}' de la forma $(\varphi (\Pi\beta))$.

Demostración: Consideremos el caso en que $\text{Incons}(\mathcal{F}) = (\Pi\beta)$. Es obvio que cualquier subconjunto inconsistente fuertemente minimal \mathcal{F}' contiene al menos una fórmula de posibilidad valuada. Mostremos que está fórmula es única.

Sea $\mathcal{F}' = \{(\varphi_i (N\alpha_i)), i = 1, \dots, m\} \cup \{(\varphi_j (\Pi\beta_j)), j = m+1, \dots, n\}$. El grado de inconsistencia es ahora de la forma:

$$\beta = \inf \hat{\pi}(\omega_{\perp})$$

bajo las restricciones

$$\begin{cases} N(\varphi_i) \geq \alpha_i, i = 1, \dots, m \\ \text{máx}\{\hat{\pi}(\omega_{\perp}), \Pi(\varphi_j)\} \geq \beta_j, j = m + 1, \dots, n. \end{cases}$$

Como $\beta > 0$, $\forall \hat{\pi} \models \mathcal{F}'$, existe k tal que $\Pi(\varphi_k) < \beta_k$ (de otra forma, no debería ser inconsistente), e $\text{Incons}(\mathcal{F}') = \beta_k$ para algún β_k . Con el fin de minimizar el valor, vamos a maximizar $\hat{\pi}$ sobre Ω , con la finalidad de que el conjunto $\{j : \Pi(\varphi_j) < \beta_j\}$ sea lo más pequeño posible. Sea $\hat{\pi}_0$ definido como $\hat{\pi}_0(\omega) = \min\{1 - \alpha_i, \omega \models \neg\varphi_i\}$, para $\omega \neq \omega_{\perp}$. Se observa que, $\hat{\pi}_0 \models (\varphi_i (N\alpha_i))$, $i = 1, \dots, m$ y que existe $\omega \in \Omega$ tal que $\hat{\pi}_0(\omega) = 1$ ya que no existe inconsistencia entre la fórmula N-valuada, y $\forall \pi', \hat{\pi}' \models \{(\varphi_i (N\alpha_i)), i = 1, \dots, m\}$ implica que para todo $\omega \in \Omega$, $\hat{\pi}(\omega) \leq \hat{\pi}'(\omega)$. El único parámetro que queda es $\hat{\pi}_0(\omega_{\perp})$. Sea $\beta_k = \text{máx}\{\beta_j : \Pi_0(\varphi_j) < \beta_j\}$ donde Π_0 se basa en $\hat{\pi}_0$. Note, que la maxibilidad de $\hat{\pi}_0$ sobre Ω minimaliza el número de $(\varphi_j (\Pi\beta_j))$ con $\Pi_0(\varphi_j) < \beta_j$.

Para facilitar el trabajo, supondremos que $\beta_k = \beta_{m+1}$. Sea $\hat{\pi}_0(\omega_{\perp}) = \beta_{m+1}$. Entonces, $\hat{\pi}_0 \models \mathcal{F}'$, ya que, para toda j , $\text{máx}\{\beta_{m+1}, \Pi_0(\varphi_j)\} \geq \beta_j$ por construcción. Así, $\text{Incons}(\mathcal{F}') \leq \beta_{m+1}$. Ahora, para toda φ_j tal que $\Pi_0(\varphi_j) \geq \beta_j$, $\text{Incons}(\mathcal{F}' - \{(\varphi_j (\Pi\beta_j))\}) = \text{Incons}(\mathcal{F}')$, de igual forma se cumple para toda φ_j tal que $\Pi_0(\varphi_j) < \beta_j < \beta_{m+1}$.

Si existiese otra fórmula $(\varphi_i (\Pi\beta_i))$ tal que $\beta_i = \beta_{m+1}$, despreciando alguna de estas fórmulas aún requerimos que $\hat{\pi}_0(\omega_{\perp}) = \beta_{m+1}$, para garantizar que $\hat{\pi}_0 \models \mathcal{F}'$. Por lo tanto, \mathcal{F}' es realmente mínima que contiene una sola fórmula de posibilidad valuada, es decir, $(\varphi_{m+1} (\Pi\beta_{m+1}))$ e $\text{Incons}(\mathcal{F}') = (\Pi\beta_{m+1})$.

□

La unicidad de $(\varphi (\Pi\alpha))$ se debe al hecho de que: para cualesquiera dos fórmulas Π -valuadas, digamos $(\varphi (\Pi\alpha))$ y $(\neg\varphi (\Pi\beta))$ nunca se contradicen entre sí.

Sea $\mathcal{F} = \mathcal{F}_N \cup \mathcal{F}_\Pi$ donde \mathcal{F}_N contiene sólo a las fórmulas con valuación de necesidad de \mathcal{F} y \mathcal{F}_Π contiene a las fórmulas de posibilidad valuadas, entonces tenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.2.5. $\text{Incons}(\mathcal{F}) = (\Pi\alpha)$ si y sólo si \mathcal{F}_N^* es consistente y

$$\alpha = \max \{ \beta \mid \exists (\varphi (\Pi\beta)) \in \mathcal{F}_\Pi, \mathcal{F}_N^* \cup \{ \varphi \} \text{ es inconsistente} \}$$

Demostración: Primero, $\text{Incons}(\mathcal{F}) = (\Pi\alpha)$ significa que no existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathcal{F} \hat{=} (\perp (N\epsilon))$ y por lo tanto la parte de necesidad valuada \mathcal{F}_N de \mathcal{F} es consistente, lo cual implica (por la Proposición 1.1.21) la consistencia de \mathcal{F}_N^* . Después, de acuerdo a la Proposición 1.2.7 de la siguiente sección, $\text{Incons}(\mathcal{F}) = (\Pi\alpha)$ implica que existe una deducción formal de $(\perp (\Pi\alpha))$ en el sistema formal dado. Como puede verse en la demostración de la Proposición 1.2.7 [10], sólo un paso de deducción utiliza una cláusula de posibilidad valuada (en otro caso, el peso de la fórmula de deducción sería $(\Pi 0)$), cuyo peso es igual al peso adjunto a \perp (es decir, $(\Pi\alpha)$) en el último paso de la deducción. Entonces, ésta es también una deducción de $(\perp (\Pi\alpha))$ a partir de $\mathcal{F}_N \cup \{ (\varphi (\Pi\alpha)) \}$, donde $(\varphi (\Pi\alpha))$ es la fórmula de posibilidad valuada. Entonces, considerando la deducción (clásica), obtenida a partir de ésta al ignorar las valuaciones, obtenemos una deducción de \perp a partir de $\mathcal{F}_N^* \cup \{ \varphi \}$; por tanto, $\mathcal{F}_N^* \cup \{ \varphi \}$ es inconsistente. Ahora, supongamos que existe una fórmula $(\psi (\Pi\gamma))$ con $\gamma > \alpha$ tal que $\mathcal{F}_N^* \cup \{ \psi \}$ es inconsistente. Entonces, se daría el caso de que $\mathcal{F}_N \cup \{ (\psi (\Pi\gamma)) \} \vdash (\perp (\Pi\gamma))$, es decir, $\mathcal{F}_N \cup \{ (\psi (\Pi\gamma)) \} \hat{=} (\perp (\Pi\gamma))$ (por la Proposición 1.2.7), la cual contradice al hecho de que $\text{Incons}(\mathcal{F}) = (\Pi\alpha)$. Así, $\alpha = \max \{ \beta \mid \exists (\varphi (\Pi\beta)) \in \mathcal{F}_\Pi, \mathcal{F}_N^* \cup \{ \varphi \} \text{ es inconsistente} \}$.

□

1.2.3. Axiomatización

El sistema formal para la lógica posibilista con valuación de necesidad puede ser extendido con el fin de manejar las fórmulas de posibilidad

valuada. Básicamente, esto consiste en extender Modus Ponens Generalizado sobre $\omega \in \Omega$ para poder permitir la derivación de una fórmula de posibilidad valuada a partir de una fórmula con valuación de necesidad y de una fórmula con valuación de posibilidad.

El sistema formal extendido para completar la Lógica Posibilista PL2 usa el mismo esquema de axiomas que para PL1, donde cada axioma es de necesidad valuado por (N1) y las siguientes reglas de inferencia

$$\begin{aligned} \text{(GMP)} \quad & (\varphi w_1), (\varphi \rightarrow \psi w_2) \vdash (\psi w_1 * w_2) \\ \text{(S)} \quad & (\varphi w) \vdash (\varphi w') \text{ si } w \geq w' \end{aligned}$$

donde definimos la operación $*$ de la siguiente forma

$$w_1 * w_2 = \begin{cases} (N \min \{\alpha, \beta\}) & \text{si } w_1 = (N\alpha) \text{ y } w_2 = (N\beta) \\ (\Pi 0) & \text{si } w_1 = (\Pi\alpha) \text{ y } w_2 = (\Pi\beta) \\ (\Pi\beta) & \text{si } w_1 = (N\alpha) \text{ y } w_2 = (\Pi\beta) \text{ y } \alpha + \beta > 1 \\ (\Pi 0) & \text{si } w_1 = (N\alpha) \text{ y } w_2 = (\Pi\beta) \text{ y } \alpha + \beta \leq 1 \end{cases}$$

LEMA 1.2.6. Sea \mathcal{F} un conjunto de fórmulas posibilistas y $(\psi (\Pi\alpha))$ con $\alpha > 0$ una fórmula con valuación de posibilidad, tal que $\mathcal{F} \hat{=} (\psi (\Pi\alpha))$ con α maximal, es decir, para todo $\omega > (\Pi\alpha)$, no tenemos que $\mathcal{F} \hat{=} (\psi \omega)$. Entonces existe una fórmula con valuación de posibilidad $(\varphi_k (\Pi\alpha))$ en \mathcal{F}' tal que

1. $\mathcal{F}_N \cup \{(\varphi_k (\Pi\alpha))\} \hat{=} (\psi (\Pi\alpha))$,
2. $\mathcal{F}_N \hat{=} (\neg\varphi_k \vee \psi (N\alpha))$ con $\beta > 1 - \alpha$.

Demostración: Sea $G = \mathcal{F} \cup \{(\neg\psi (N1))\}$. Entonces, conforme a la generalización del teorema de Refutación a PL2 y a la maximidad de α , obtenemos que $\text{Incons}(G) = (\Pi\alpha)$. Entonces, usando la proposición 1.2.4, siendo G' un subconjunto de $\mathcal{F}_N \cup \{(\neg\psi (N1))\} \cup \{(\varphi_k (\Pi\alpha))\}$, tenemos $(\Pi\alpha) = \text{Incons}(G') \leq \text{Incons}(\mathcal{F}_N \cup \{(\neg\psi (N1))\} \cup \{(\varphi_k (\Pi\alpha))\}) \leq \text{Incons}(\mathcal{F} \cup \{(\neg\psi (N1))\}) = (\Pi\alpha)$, es decir, $\text{Incons}(\mathcal{F}_N \cup \{(\neg\psi (N1))\}) \cup$

$\{(\varphi_k (\Pi\alpha))\} = (\Pi\alpha)$. Usando, de nuevo la proposición 1.2.4, tenemos que $\mathcal{F}_N \cup \{(\varphi_k (\Pi\alpha))\} \hat{=} (\psi \Pi\alpha)$, lo cual prueba a (1).

Para demostrar (2) tenemos lo siguiente. La afirmación (1) es equivalente a $\text{Incons}(\mathcal{F}_N \cup \{(\neg\psi (N1))\} \cup \{(\varphi_k (\Pi\alpha))\}) = (\Pi\alpha)$. Primero probaremos que para cualquier distribución de posibilidad $\hat{\pi}$ sobre Ω satisface $\mathcal{F}_N \cup \{(\neg\psi (N1))\}$ tenemos que $\Pi(\varphi_k) < \alpha$; en sí, estamos suponiendo que existe una distribución de posibilidad $\hat{\pi}_0$ que satisface $\mathcal{F}_N \cup \{(\neg\psi (N1))\}$ tal que $\Pi_0(\varphi_k) \geq \alpha$. Si $\mathcal{F}_N \cup \{(\neg\psi (N1))\}$ fuera inconsistente, entonces, por la proposición 1.2.4, este debería ser el caso en que $\mathcal{F} \hat{=} (\psi (N\gamma))$ con $\gamma > 0$, lo cual contradice la suposición de que $\mathcal{F} \hat{=} (\psi (\Pi\alpha))$ siendo α máximo.

Así, $\mathcal{F}_N \cup \{(\neg\psi (N1))\}$ es consistente, es decir, la distribución de posibilidad menos específica π^* sobre Ω relacionado con $\mathcal{F}_N \cup \{(\neg\psi (N1))\}$ de acuerdo la corolario 1.1.14, es normalizada. Por la proposición 1.1.13, el hecho de que π_0 satisfaga a $\mathcal{F}_N \cup \{(\neg\psi (N1))\}$ es equivalente a $\pi_0 \leq \pi^*$ (donde π_0 es la restricción de $\hat{\pi}_0$ en Ω). Así, $\Pi^*(\varphi_k) \geq \Pi_0(\varphi_k) \geq \alpha$, es decir, si extendemos π_0 a Ω_\perp por $\hat{\pi}_0(\omega_\perp) = 0$, entonces $\hat{\pi}_0 \hat{=} \mathcal{F}_N \cup \{(\neg\psi (N1))\} \cup \{(\varphi_k (\Pi\alpha))\}$ y así, $\text{Incons}(\mathcal{F}_N \cup \{(\neg\psi (N1))\} \cup \{(\varphi_k (\Pi\alpha))\}) < (\Pi\alpha)$, lo cual contradice el hecho de que $\text{Incons}(\mathcal{F}_N \cup \{(\neg\psi (N1))\} \cup \{(\varphi_k (\Pi\alpha))\}) = (\Pi\alpha)$.

Por lo tanto, cada distribución de posibilidad $\hat{\pi}$ sobre Ω_\perp satisface $\mathcal{F}_N \cup \{(\neg\psi (N1))\}$ con $\Pi(\varphi_k) < \alpha$, es decir, $N(\neg\varphi_k) > 1 - \alpha$, lo cual significa que $\mathcal{F}_N \cup \{(\neg\psi (N1))\} \hat{=} (\neg\varphi_k (N\beta))$ con $\beta > 1 - \alpha$. Por el Teorema de Refutación, esto equivale a que la $\text{Incons}(\mathcal{F}_N \cup \{(\neg\psi (N1))\} \cup \{(\varphi_k (\Pi\alpha))\}) \geq (N\beta)$, es decir, equivalente a $\text{Incons}(\mathcal{F}_N \cup \{(\neg\psi \wedge \varphi_k (N1))\}) \geq (N\beta)$; por tanto aplicando el Teorema de Refutación, obtenemos que $\mathcal{F}_N \hat{=} (\psi \vee \neg\varphi_k (N\beta))$ con $\beta > 1 - \alpha$, con lo cual probamos el segundo inciso de la prueba. \square

PROPOSICIÓN 1.2.7. El sistema formal propuesto es robusto y completo con respecto a la semántica adecuada a la inconsistencia de la Lógica Posibilista, es decir, para todo conjunto de fórmulas posibilistas \mathcal{F} tenemos

que:

$$\mathcal{F} \hat{=} (\psi \ w) \text{ si y sólo si } \mathcal{F} \vdash (\psi \ w)$$

donde $\mathcal{F} \vdash (\psi \ w)$ significa: “ $(\psi \ w)$ puede ser derivado de \mathcal{F} en el anterior sistema formal”.

Demostración: De acuerdo al lema anterior, $\mathcal{F}_N \hat{=} (\neg \varphi_k \vee \psi \ (N\beta))$ con $\beta > 1 - \alpha$ y usando la proposición ??, existe una deducción de $(\neg \varphi_k \vee \psi \ (N\beta))$ a partir de \mathcal{F}_N (*a fortiori* de \mathcal{F} usando la parte de necesidad valuada del sistema formal propuesto. Por último, usando GMP en la fórmulas $(\psi \vee \neg \varphi_k \ (N\beta))$ y $(\varphi_k \ (\Pi\alpha))$, inferimos $(\psi \ (\Pi\alpha))$). Por lo tanto hemos encontrado una deducción de $(\psi \ (\Pi\alpha))$ a partir de \mathcal{F} usando el sistema formal propuesto. Así, se obtiene la completitud y la robustez. \square

Hasta ahora se ha presentado un teorema de Completitud y Robustez para la Lógica Posibilista Estándar. Además de introducir una semántica adecuada para la Lógica Posibilista completa. En lo subsecuente hablaremos de los programas lógicos, y de una combinación entre los Answer Set Programming y la Lógica Posibilista Completa.

Capítulo 2

Programación Lógica

La Programación Lógica surgió a principios de los 70's teniendo como primeros objetivos la demostración automática de teoremas y la inteligencia artificial. Los créditos para la introducción de la programación lógica se deben principalmente a Kowalski y Colmerauer, aunque Green y Hayes también deberían de ser considerados pioneros de la programación lógica. En 1972, Kowalski y Colmerauer llegaron a la idea fundamental de que la Lógica puede ser usada como un lenguaje de programación.

Un de las ideas principales de la programación lógica, la cual se debe a Kowalski, es que un algoritmo consiste de dos componentes disjuntos, la lógica y el control. La lógica es la sentencia de lo que es el problema y de que puede ser solucionado. En cambio el control se debe al hecho de como resolver el problema. Generalmente, un sistema de programación lógica debería de proporcionar herramientas para el programador, especificando cada una de esas componentes. [20]

En lo que a nosotros concierne trataremos la vertiente de como resolver el problema, en este caso con la Programación Lógica Posibilista.

2.1. Conceptos Básicos de Programación Lógica

El lenguaje de una lógica proposicional tiene un alfabeto que consiste de

- i) Símbolos proposicionales: $\perp, \top, p_0, p_1, \dots$
- ii) Conectivos: $\vee, \wedge, \leftarrow, \neg, \text{not}, \dots$
- iii) Símbolos auxiliares: $(,), \dots$

donde \vee, \wedge y \leftarrow son conectivos binarios, \neg y not son conectivos unarios y \top y \perp son constantes lógicas. El símbolo proposicional \perp y los símbolos proposicionales de la forma $p_i (i \geq 0)$ representan a las proposiciones indescomponibles, las cuales son llamadas átomos o proposiciones atómicas. átomos negados por \neg serán llamados átomos extendidos. Usaremos el concepto de átomo sin prestar atención si es un átomo extendido o no. El signo de negación \neg es considerado y llamado negación fuerte en la literatura de Answer Set Programming y la negación not es la negación por falla.

DEFINICIÓN 2.1.1. Una literal a es un átomo (llamado literal positivo), o la negación not de un átomo a , llamado literal negativo.

Dado un conjunto de átomos $\{a_1, \dots, a_n\}$, escribiremos $\text{not } \{a_1, \dots, a_n\}$ para denotar al conjunto de literales $\{\text{not } a_1, \dots, \text{not } a_n\}$.

DEFINICIÓN 2.1.2. Una *cláusula* es una fórmula de la forma $\mathcal{H} \leftarrow \mathcal{B}$, donde la implicación es el conectivo principal y \mathcal{H}, \mathcal{B} representan subfórmulas que tienen solamente los conectivos \neg, \wedge, \vee y not . A la subfórmula \mathcal{H} se le llama *cabeza* del programa y a la subfórmula \mathcal{B} se le llama el *cuerpo* del programa.

El significado intuitivo, por ejemplo de la regla,

$$c \leftarrow a_1, \dots, a_n, \text{not } b_1, \dots, \text{not } b_n$$

es que teniendo todos los a_i 's y todos los *not* b_i 's se puede deducir a c .

En la literatura referente a la programación lógica podemos encontrar diferentes tipos de cláusulas:

1. Una cláusula de *restricción o constraint* es una fórmula del tipo $\perp \leftarrow \mathcal{B}$, y se dice que la *cabeza* está vacía.
2. Una cláusula es un *hecho*, si tiene la forma $\mathcal{H} \leftarrow \top$. Por simplicidad se escribirá \mathcal{H} .
3. Una fórmula es una *cláusula defínite*, si $\mathcal{H} = \{a\}$ y $\mathcal{B} = \mathcal{B}^+ = \bigwedge_{i=1}^n b_i$, donde a, b_i son átomos, es decir, no hay literales negadas.
4. Una fórmula es una *cláusula normal*, si $\mathcal{H} = \{a\}$ y $\mathcal{B} = \mathcal{B}^+ \wedge \mathcal{B}^-$, donde $\mathcal{B}^+ = \bigwedge_{i=1}^n b_i$ y $\mathcal{B}^- = \bigwedge_{k=1}^n \neg d_k$, con a, b_i, d_k átomos.
5. Una *cláusula* es *disyuntiva*, si $\mathcal{H} = \bigvee_{j=1}^m c_j$ y $\mathcal{B} = \mathcal{B}^+ \wedge \mathcal{B}^-$, donde $\mathcal{B}^+ = \bigwedge_{i=1}^n b_i$ y $\mathcal{B}^- = \bigwedge_{k=1}^n \neg d_k$, con a, b_i, d_k átomos.

Un programa es un conjunto de fórmulas de alguno de los tipos anteriores. Así, un programa normal es un conjunto de cláusulas normales; un programa defínite es un conjunto de cláusulas defínite y un programa disyuntivo es un conjunto de cláusulas disyuntivas. Denotaremos por \mathcal{L}_P al conjunto de átomos que aparecen en las cláusulas del programa P.

DEFINICIÓN 2.1.3. Un *modelo* M de un programa normal P es un subconjunto de \mathcal{L}_P tal que, considerando a sus elementos como verdaderos y como falsos a los elementos de $\overline{M} = \mathcal{L}_P - M$, se tiene que cada cláusula del programa P es verdadera.

EJEMPLO 2.1.4. Considere el siguiente programa normal

$$\begin{array}{l}
 P : \\
 a \leftarrow \\
 c \leftarrow a \wedge \neg b \\
 d \leftarrow \neg c \wedge \neg f
 \end{array}$$

un modelo es $M = \{a, c\}$. Otro modelo es, $M' = \{a, c, d\}$.

EJEMPLO 2.1.5. Consideremos el siguiente programa normal:

$$\begin{array}{l}
 P : \\
 a \leftarrow \neg b \\
 b \leftarrow \neg c \\
 c \leftarrow \neg a \\
 c \leftarrow \neg b
 \end{array}$$

Se puede ver que, un modelo para P es $M = \{a, c\}$. Observemos que otros modelos para P son $M' = \{a, b\}$ y $M'' = \{a, b, c\}$.

La observacion anterior nos puede sugerir dos preguntas:

1. ¿Todo programa normal tiene algún modelo?
2. ¿Si tiene modelo, entonces tiene un modelo mínimo (en el sentido de la contención)?

La respuesta a la primer pregunta es afirmativa, ya que en el peor de los casos, el modelo para un programa normal son todos los átomos que aparecen en la cabeza de cada cláusula. La respuesta a la segunda pregunta es negativa, como lo muestra el ejemplo anterior en donde los modelos M y M' no son comparables. Lloyd [20], da una respuesta afirmativa para programas definite.

2.2. Answer Set Programming

Answer Set Programming (ASP) es un modelo apropiado para representar varios problemas emergentes de la Inteligencia Artificial, que surgen cuando la información es incompleta como en el razonamiento no-monótono, planificación, diagnóstico, etc. Es también un marco conveniente para codificar y resolver problemas de combinatoria, hoy en día

algunos sistemas operacionales eficientes están disponibles para hacer frente con ASP. Desde un punto de vista global, ASP es un paradigma general cubriendo diferentes semánticas declarativas para diferentes tipos de programas lógicos. Cualquiera que sea el marco, la información es codificada por reglas lógicas y las soluciones se obtienen por conjuntos de modelos. Cada modelo es un conjunto minimal de átomos (o literales) conteniendo información segura (algunos datos) y deducciones obtenidas aplicando algunas reglas con negación por falla. Por lo cual, las conclusiones se basan en los datos presentes y ausentes, ellos forman un conjunto coherente de hipótesis y representan un punto de vista racional en el mundo descrito por las reglas. Así, en general, no existe un conjunto único de conclusiones pero tal vez varios, y cada conclusión ya no es absolutamente segura, sólo es plausible y más o menos cierta.

El objetivo es estudiar un único modelo por falta del razonamiento y el razonamiento bajo incertidumbre. Es por eso que se introducirán conceptos de la teoría de la posibilidad dentro de la semántica de los modelos estables.

Para ilustrar esta idea, tomemos un ejemplo de un programa lógico normal que no representa ninguna noción de incertidumbre.

EJEMPLO 2.2.1. Si codificamos el tratamiento médico en el que un paciente sufre de dos enfermedades. En el cual, cada enfermedad puede ser curada por una droga pero, dichas drogas son incompatibles. El programa

$$P_{med} = \left\{ \begin{array}{ll} m1 \leftarrow e1, not\ m2 & m2 \leftarrow e2, not\ m1 \\ c1 \leftarrow m1, e1 & c2 \leftarrow m2, e2 \\ e1 \leftarrow & e2 \leftarrow \\ \perp \leftarrow m1, m2 & \end{array} \right\}$$

significa que el medicamento $m1$ (resp. $m2$) es dado al paciente si padece de la enfermedad $e1$ (resp. $e2$), excepto si toma el medicamento $m2$ (resp. $m1$); si un paciente sufre la enfermedad $e1$ (resp. $e2$) y toma medicamento

$m1$ (resp. $m2$) entonces se cura $c1$ (resp. $c2$) de esta enfermedad; el paciente sufre de las enfermedades $e1$ y $e2$; los medicamentos $m1$ y $m2$ no son compatibles.

Sin embargo, puede parecer interesante para un médico poder evaluar que elección hacer entre esos dos tratamientos que son incompatibles. Uno de los criterios para esta elección puede ser la eficiencia de cada tratamiento médico: ¿Las reglas $c1 \leftarrow m1, e1$ y $c2 \leftarrow m2, e2$, son absolutamente ciertas? Otro punto puede ser la confianza del médico en su diagnóstico: ¿Están $e1$ y $e2$ bien establecidas? Es por eso que proponemos para hacer frente a este problema asignar grados de certeza a estas reglas. Estos grados deberían ser tomados en cuenta durante el mecanismo inferencial con el fin de determinar el nivel de certeza de cada conclusión y permitir al médico compararlos entre sí. En este trabajo se muestra como lograr tal objetivo con la ayuda de la Lógica Posibilista.

2.3. Semántica de Modelos Estables

El interés de Answer Set Programming es por diferentes tipos de programas lógicos y diferentes semánticas. En este capítulo trabajaremos con programas lógicos definite y normales, con la semántica de modelos estables.

DEFINICIÓN 2.3.1. Sea $r = c \leftarrow a_1, a_2, \dots, a_n, \text{not } b_1, \dots, \text{not } b_n$ una cláusula de un Programa Lógico Normal P, definimos lo siguiente:

1. El cuerpo positivo de r como: $body^+(r) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.
2. El cuerpo negativo de r como: $body^-(r) = \{\text{not } b_1, \dots, \text{not } b_n\}$.
3. La conclusión de r como: $head(r) = c$.
4. La proyección positiva de r como $r^+ = head(r) \leftarrow body^+(r)$.

LEMA 2.3.2. Sea P un programa P que no contiene ninguna negación por falla (i.e., $body^-(P) = \emptyset$), entonces P es un programa lógico definite, y este tiene un modelo de Herbrand minimal denotado por $C_n(P)$ [20].

El reducto P^A de un programa P respecto a un conjunto de átomos A es el programa lógico definite definido por:

$$P^A = \{r^+ : r \in P, body^-(r) \cap A = \emptyset\}$$

y este es el núcleo de la definición de un modelo estable.

DEFINICIÓN 2.3.3. Sea P un programa lógico normal y S un conjunto de átomos. Decimos que S es un modelo estable de P si y sólo si $S = C_n(P^S)$.

Como ya se menciona, un programa puede tener uno o más modelos estables o ninguno. En este último caso decimos que el programa es *inconsistente*, de otro modo decimos que es *consistente*. Cuando un átomo pertenece al menos a un modelo estable de P este es llamado una consecuencia **crédula** de P y cuando este pertenece a cada modelo estable de P , este es llamado consecuencia **esceptica** de P . Este vocabulario, proviene de una de las lógicas por falla y este es natural. La semántica de los modelos estables puede ser vista como un subcaso de la lógica por falla.

Del programa del ejemplo 2.2.1 obtenemos dos modelos estables $M = \{e1, e2, m1, c1\}$ y $M' = \{e1, e2, m2, c2\}$. Esto significa que el paciente puede ser curado de una de estas dos enfermedades pero no de ambas.

DEFINICIÓN 2.3.4. Sean A un conjunto de átomos, r una regla y P un programa (normal o definite). Decimos que:

1. r es aplicable en A si $body^+(r) \subseteq A$.
2. $App(P,A)$ es el subconjunto de P de las reglas aplicables en A .

3. A satisface a r (o r es satisfecha por A), denotado por $A \models r$, si cuando r es aplicable en A , entonces $head(r) \in A$.
4. A es cerrado bajo P si, para toda $r \in P$, $A \models r$.
5. P es *grounded* si este puede ser ordenado como una sucesión $\langle r_1, \dots, r_n \rangle$ tal que

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, r_i \in App(P, head(\{r_1, \dots, r_{i-1}\})).$$

6. r es *blocked* por A si $body^-(r) \cap A \neq \emptyset$.
7. $C_n(P)$ es calculado como el mínimo punto fijo del siguiente operador consecuencia

$$\begin{aligned} T_P : 2^{\mathcal{L}^P} &\longrightarrow 2^{\mathcal{L}^P} \\ T_P(A) &= head(App(P, A)) \end{aligned}$$

El siguiente resultado muestra la relación que existe entre el menor modelo de A de un programa P y las reglas que lo producen.

PROPOSICIÓN 2.3.5. Sea P un programa lógico definite y sea A un conjunto de átomos. A es el menor modelo de Herbrand de P , si y sólo si $A = head(App(P, A))$ y $App(P, A)$ es *grounded*.

Demostración: \Rightarrow] Como A es un modelo de P entonces, $A = C_n(P)$, ya que este es el menor modelo de T_P , así, $A = head(App(P, A))$. Ahora, el cálculo iterativo del menor modelo de T_P , produce una sucesión del conjunto de reglas:

$$\begin{array}{ll} A_0 = \emptyset & R_0 = \emptyset \\ A_1 = T_P(A_0) & R_1 = App(P, A_0) \\ A_2 = T_P(A_1) & R_2 = App(P, A_1) \\ \dots & \dots \\ A_k = (T_P(A_{(k-1)})) & R_k = App(P, A_{(k-1)}) = R_k \\ A_k = A & R_k = App(A, A) \\ \text{(menor modelo)} & \end{array}$$

Así, podemos ordenar el último conjunto R_k como:

$$R_K = \langle r_1^1, \dots, r_{(n_1)}^1, r_1^2, \dots, r_{(n_2)}^2, \dots, r_1^k, \dots, r_{(n_k)}^k \rangle$$

$$\forall i = 1, \dots, k, \forall j = 1, \dots, n_i, r_j^i \in R_i \setminus \cup_{(l < i)} R_l.$$

De esta forma, tenemos que $App(P, A)$ es grounded.

\Leftarrow] Como $A = head(App(P, A))$ entonces, $A = T_P(A)$, por definición de T_P . Así, A es el menor modelo de T_P . Ahora, como $App(P, A)$ es grounded, el menor modelo de T_P es $B \supseteq A$ y así A es el menor modelo de T_P y por lo tanto el menor modelo de Herbrand de P . \square

Ahora, podemos ya deducir el por qué M y M' modelos del ejemplo 2.2.1 son modelos estables.

EJEMPLO 2.3.6. $S_1 = \{e1, e2, m1, c1\}$ es un modelo estable del programa lógico normal

$$P_{med} = \left\{ \begin{array}{ll} m1 \leftarrow e1, not\ m2 & m2 \leftarrow e2, not\ m1 \\ c1 \leftarrow m1, e1 & c2 \leftarrow m2, e2 \\ e1 \leftarrow & e2 \leftarrow \\ \perp \leftarrow dr1, dr2 & \end{array} \right\}$$

por que,

$$P_{med}^{S_1} = \left\{ \begin{array}{ll} m1 \leftarrow e1 & \\ c1 \leftarrow m1, e1 & c2 \leftarrow m2, e2 \\ e1 \leftarrow & e2 \leftarrow \\ \perp \leftarrow m1, m2 & \end{array} \right\}$$

y

$$\begin{aligned} T_{P_{med}}^{S_1}(\{\emptyset\}) &= \{m1, m2\} \\ T_{P_{med}}^{S_1}(\{e1, e2\}) &= \{e1, e2, m1\} \\ T_{P_{med}}^{S_1}(\{e1, e2, m1\}) &= \{e1, e2, m1, c1\} \\ T_{P_{med}}^{S_1}(\{e1, e2, m1, c1\}) &= \{e1, e2, m1, c1\} \text{ es el punto fijo.} \end{aligned}$$

Con lo que se verifica que:

$$C_n(P_{med}^{S_1}) = \{e1, e2, m1, c1\} = S_1$$

es un modelo estable de P_{med} . Del mismo modo se encuentra la estabilidad del segundo modelo $S_2 = \{e1, e2, m2, c2\}$ y ningún otro conjunto satisface esta propiedad.

2.4. Programas Lógicos Posibilistas

En esta sección, se combinará la teoría de Answer Set Programming y la Lógica Posibilista. Este marco es capaz de tratar con el razonamiento que es al mismo tiempo no monótono e incierto.

DEFINICIÓN 2.4.1. Un átomo posibilista es un par $p = (a, q) \in \mathcal{A} \times Q$, donde \mathcal{A} es un conjunto finito de átomos y (Q, \leq) es una lattice. Aplicamos la proyección $*$ bajo p como sigue: $p^* = a$.

DEFINICIÓN 2.4.2. Dado un conjunto de átomos posibilistas S , definimos la generalización de $*$ bajo S como sigue: $S^* = \{p^* | p \in S\}$.

DEFINICIÓN 2.4.3. Definimos la sintaxis de un programa normal lógico posibilista extendido válido de la siguiente manera: sea (Q, \leq) una lattice. Una cláusula normal posibilista extendida r es de la forma:

$$r := (\alpha : a \leftarrow \mathcal{B}^+, \text{not } \mathcal{B}^-)$$

donde $\alpha \in Q$. La proyección $*$ bajo la cláusula posibilista r es: $r^* = a \leftarrow \mathcal{B}^+, \text{not } \mathcal{B}^-$. $N(r) = \alpha$. Es un grado de necesidad que representa el nivel de certeza de la información descrita por r .

DEFINICIÓN 2.4.4. Un programa lógico normal posibilista extendido P es una tupla de la forma $\langle (Q, \leq), N \rangle$, donde (Q, \leq) es una lattice y N es un conjunto finito de cláusulas normales posibilistas extendidas.

2.5. Programas Lógicos Definite Posibilistas

En esta sección trataremos con programas lógicos definite posibilistas. Introducimos el marco en el que la incertidumbre es tomada en cuenta usando la teoría de la posibilidad: los programas lógicos definite posibilistas. Al igual que en el marco de la lógica posibilista, estudiamos el comportamiento de este tipo de programas tanto en el sentido semántico como sintáctico. La parte semántica se refiere al tratamiento de programas en el sentido de una distribución posibilista definida en el conjunto de átomos. La parte sintáctica se ocupa de un cálculo en sus propias reglas. El punto crucial es que las dos formas de tratamiento son equivalentes y nos llevan al mismo resultado.

Enunciamos algunos resultados y definiciones.

DEFINICIÓN 2.5.1. Un programa lógico definite posibilista es un conjunto de reglas posibilistas de la forma

$$r = (c \leftarrow a_1, \dots, a_n \ \alpha) \text{ con } n \geq 0, \{a_1, \dots, a_n, c\} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \alpha \in N$$

Denotamos

1. $r^* = c \leftarrow a_1, \dots, a_n$ la proyección clásica de la regla posibilista.
2. $N(r) = \alpha$ representa a los grados de necesidad a nivel de certeza de la información descrita por la regla r .

Como en la Lógica Posibilista, el grado α es evaluado por una medida de necesidad y no por una medida de probabilidad. Así, los valores numéricos no son una evaluación absoluta (como en la teoría de la probabilidad) pero induce una escala de certeza (o confianza) que permite ordenar las reglas. Si R es un conjunto de reglas posibilistas, entonces $R^* = \{r^* : r \in R\}$ es el programa lógico definite obtenido de R al quitar todos los pesos de necesidad. Para un programa lógico definite posibilista dado P y un átomo x , definimos $H(P, x) = \{r \in P : head(r^*) = x$

como el conjunto de todas las reglas en P que tienen el mismo head x .

Recordemos que una base lógica posibilista es una representación compacta de la distribución de posibilidad definida sobre interpretaciones en representación de la información. De hecho, el tratamiento de la base en el sentido sintáctico (en términos de fórmulas y grados de necesidad) nos lleva a los mismos resultados que el tratamiento hecho en el sentido semántico (en términos de interpretaciones y distribuciones de posibilidad).

A continuación, damos la definición de inferencia que no es más que los grados de evaluación de los grados de necesidad y de posibilidad de cada átomo del universo.

DEFINICIÓN 2.5.2. Sea P un programa lógico definite posibilista y π_P la distribución de posibilidad menor específica compatible con P , definimos dos medidas de necesidad duales:

$$\begin{aligned}\Pi_P(x) &= \max_{A \in \mathcal{L}_P} \{\pi_P(A) : x \in A\} \\ N_P(x) &= 1 - \max_{A \in \mathcal{L}_P} \{\pi_P(A) : x \notin A\}\end{aligned}$$

$\Pi_P(x)$ da el grado de consistencia de x con respecto al programa lógico definite posibilista P , y $N_P(x)$ evalúa el grado al que x se deduce del programa lógico definite posibilista P .

Por ejemplo, cuando un átomo pertenece a un modelo de la programación clásica su posibilidad es igual a 1.

DEFINICIÓN 2.5.3. Sea P un programa lógico definite posibilista y X un conjunto de átomos, entonces el conjunto

$$\Pi M(P) = \{(x, N_P(x)) \mid x \in X, N_P(x) > 0\}$$

es su *modelo posibilista*.

2.5.1. Teoría de Modelos para Programas Lógicos Definite Posibilistas

De un programa lógico definite posibilista P podemos determinar, como se hacen en Lógica Posibilista, algunas distribuciones de posibilidad definidas en todos los conjuntos de 2^X y que sean compatibles con P . Al igual que en programación lógica, el grado de posibilidad de un conjunto de átomos es determinado por los grados de necesidad de las reglas del programa que no está satisfecho por este conjunto. Conociendo el marco de un programa lógico definite, se puede ver que la satisfactibilidad de una regla r se basa en su aplicabilidad con respecto a un conjunto de átomos A , entonces $A \not\models r$ si y sólo si $body^+(r) \subseteq A \wedge head(r) \not\subseteq A$. Pero tenemos que notar que la contradicción de una regla no es suficiente para determinar el grado de posibilidad de un conjunto, ya que en ASP es importante tomar en cuenta las nociones de groundness y estabilidad.

En primer lugar, el conjunto $A = \{a, b\}$ satisface cada regla en $R' = \{a \leftarrow , b \leftarrow a.\}$, pero no es un modelo de R ya que el groundness no se satisface. En segundo lugar el conjunto $A' = \{a, b, d\}$ satisface cada regla en $R' = \{a \leftarrow , b \leftarrow a , d \leftarrow c\}$, pero no es un modelo de R porque d puede no ser producido por alguna regla de R' aplicable en A' . En estos dos casos, la posibilidad de A y A' debe ser 0 ya que no puede ser un modelo absoluto, incluso si satisface cada regla en su respectivo programa asociado.

DEFINICIÓN 2.5.4. Sea P un programa lógico definite posibilista y sea $\pi_P : 2^{\mathcal{L}^P} \rightarrow [0, 1]$ una distribución de posibilidad. Decimos que π es compatible con P si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $A \not\subseteq head(App(P^*, A)) \Rightarrow \pi(A) = 0$.
2. $App(P^*, A)$ no es grounded $\Rightarrow \pi(A) = 0$.
3. A es el modelo de $P^* \Rightarrow \pi(A) = 1$.

4. Otro caso $\pi_P(A) \leq 1 - \max_{r \in P} \{N(r) \mid A \not\models r^*\}$.

PROPOSICIÓN 2.5.5. Sea P un programa lógico definite posibilista, entonces la función

$$\pi_P : 2^{\mathcal{L}_P} \rightarrow [0, 1]$$

definida por:

1. Si $A \not\subseteq \text{head}(\text{App}(P^*, A))$ entonces $\pi_P(A) = 0$.
2. Si $\text{App}(P^*, A)$ no es *grounded* entonces $\pi_P(A) = 0$.
3. Si para cada $r \in P$, $A \models r^*$ entonces $\pi_P(A) = 1$.
4. En cualquier otro caso, $0 \leq \pi_P(A) < 1$ y $\pi_P(A) = 1 - \max_{r \in P} \{N(r) \mid A \not\models r^*\}$.

es la *distribución de posibilidad menor específica*.

Demostración: Ver [24]

□

Por este medio, es posible clasificar cada conjunto de átomos con respecto a su capacidad para ser un modelo de P . Si un conjunto de átomos satisface la condición en una de los dos puntos de la proposición, entonces no es absolutamente posible para que sea un modelo de P , de otra forma, su posibilidad de ser un modelo se relaciona al grado de certeza de las reglas que la falsifican.

La siguiente proposición muestra el lazo que existe entre la distribución de posibilidad menor específica y el menor modelo de la proyección clásica de un modelo. En particular, sólo el modelo P^* tiene una posibilidad igual a 1.

PROPOSICIÓN 2.5.6. Sea P un programa lógico definite posibilista y $A \subseteq \mathcal{L}_P$ un conjunto de átomos entonces

1. $\pi_P(A) = 1$ si y sólo si $A = Cn(P^*)$.
2. $A \supset Cn(P^*)$ entonces $\pi_P(A) = 0$.

3. $C_n(P^*) \neq \emptyset$ entonces $\pi_P(\emptyset) = 1 - \max_{r \in P} \{N(r) \mid \text{body}^+(r^*) = \emptyset\}$.

Demostración:

1. \Rightarrow] Si $\pi_P(A) = 1$ entonces $A \subseteq \text{head}(\text{App}(P^*, A))$ y $\text{head}(\text{App}(P^*, A)) \subseteq A$, entonces para toda $r \in P$, $A \models r^*$. Además, como $\pi_P(A) > 0$ tenemos que $\text{App}(P^*, A)$ es grounded. Por lo tanto, por proposición 2.3.5 tenemos que $A = C_n(P^*)$.

\Leftarrow] Como $A = C_n(P^*)$ entonces tenemos que $A \subseteq \text{head}(\text{App}(P^*, A))$ y $\text{App}(P^*, A)$ es grounded. Como $\text{App}(P^*, A)$ es grounded, entonces $\pi_P(A) > 0$. Además, tenemos que $A = \text{head}(\text{App}(P^*, A))$, así que para todo $r \in P$, $A \not\models r^*$, por lo tanto $\pi_P(A) = 1$.

2. Como $C_n(P) \subset A$ significa que $\text{head}(\text{App}(P^*, A)) \subset A$, además tenemos que $\text{App}(P^*, A)$ no es grounded, entonces por proposición 2.5.5 $\pi_P(A) = 0$.

3. $\emptyset \subseteq \text{head}\{\text{App}(P^*, \emptyset)\}$ y $\text{App}(P^*, \emptyset)$ es grounded. Así, $\pi_P(\emptyset)$ está bien definida, ahora, como $C_n(P^*) \neq \emptyset$ tenemos que $\pi_P(\emptyset) = 1 - \max_{r \in P} \{N(r) : \emptyset \not\models r^*\} = 1 - \max_{r \in P} \{N(r) : \text{body}^+(r^*) = \emptyset\}$.

□

PROPOSICIÓN 2.5.7. Sea P un programa lógico definite posibilista y $C_n(P^*)$ el menor modelo de P^* . Entonces para todo $x \in X$ tenemos que

1. $x \in C_n(P^*)$ implica que $\Pi(x) = 1$ y $x \notin C_n(P^*)$ implica que $\Pi(x) = 0$.
2. $x \notin C_n(P^*)$ si y sólo si $N_P(x) = 0$.
3. $x \in C_n(P^*)$ implica que $N_P(x) = \min_{A \subset C_n(P^*)} \{\max_{r \in P} \{N(r) \mid A \not\models r^*\} \mid x \notin A\}$.
4. Sea P' un programa lógico definite posibilista, $P \subseteq P'$ implica que $N_P(x) \leq N_{P'}(x)$.

Demostración:

1. Como $C_n(P^*)$ es un modelo de P , tenemos por definición que $\pi_P(C_n(P^*)) = 1$. Por lo tanto como $x \in C_n(P^*)$, tenemos que $\pi_P(x) = 1$. Por otro lado, si $x \notin C_n(P^*)$ podemos suponer que $\pi_P(x) > 0$. Entonces, existe $A \subset X$ y $x \in A$ tal que, $\pi_P(A) > 0$ y además, $A \neq C_n(P^*)$ ya que $x \notin C_n(P^*)$. Por tal motivo, debemos de considerar los dos siguientes casos:

i) Si $A \neq \text{head}(\text{App}(p^*, A))$, $A \not\subseteq \text{head}(\text{App}(P^*, A))$, así $\pi_P(A) = 0$ lo cual es una contradicción.

ii) Si $\text{App}(P^*, A)$ no es un grounded, entonces $\pi_P(A) = 0$, lo cual es una contradicción.

2. Como $\pi(C_n(P^*)) = 1$, entonces $N_P(x) = 0$ cuando $x \notin C_n(P^*)$. Ahora, si $N_P(x) = 0$, entonces existe un $A \subset X$ tal que $x \notin A$ y $\pi(A) = 1$. Así, por el inciso anterior de esta proposición tenemos que $A = C_n(P^*)$ y este es su único subconjunto que tiene una posibilidad de 1. Por lo tanto, $x \notin C_n(P^*)$.

3.

$$\begin{aligned} N_P(x) &= 1 - \text{máx}_{A \in 2^X} \{ \pi_P(A) : x \notin A \} \\ &= 1 - \text{máx}_{A \supseteq C_n(P^*)} \{ \pi_P(A) : x \notin A \} \\ &= 1 - \text{máx}_{A \subset C_n(P^*)} \{ \pi_P(A) : x \notin A \}, \text{ ya que } x \notin C_n(P^*) \end{aligned}$$

Ahora, sea $x \in C_n(P^*)$, ya que $C_n(P^*)$ no es vacío. Por la parte 3 de la proposición 2.5.6, tenemos que existe por lo menos un conjunto, a saber $A = \emptyset$, en el cual se cumple que

$$\pi_P(A) = 1 - \text{máx}_{r \in P} \{ N(r) : A \not\models r^* \}.$$

Así,

$$\begin{aligned} N_P(x) &= 1 - \text{máx}_{A \subset C_n(P^*)} \{ 1 - \text{máx}_{r \in P} \{ N(r) : A \models r^* \} : x \notin A \} \\ &= \min_{A \subset C_n(P^*)} \{ 1 - \text{máx}_{r \in P} \{ N(r) : A \not\models r^* \} : x \notin A \}. \end{aligned}$$

4. Si $x \notin C_n(P^*)$ entonces $N_P(x) = 0$, esto es por el inciso 2 de esta proposición, y así $N_P(x) \leq N_{P'}(x)$. Ahora, sea $x \in C_n(P^*)$ entonces tenemos que $x \in C_n(P^*)$. Y como $P \subset P'$ implica que para todo $A \in 2^X$:

$$\begin{aligned} \max_{r \in P} \{N(r) : A \not\models r^*\} &\leq \max_{r \in P'} \{N(r) : A \not\models r^*\} \\ \min_{A \in 2^X} \{\max_{r \in P} \{N(r) : A \not\models r^*\}\} &\leq \min_{A \in 2^X} \{\max_{r \in P'} \{N(r) : A \not\models r^*\}\} \\ N_P(x) &\leq N_{P'}(x) \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 2.5.8. Sea P un programa lógico definite posibilista, entonces $(\Pi M(P))^*$ es el menor modelo de P^* .

Demostración: Supongamos que $(\Pi M(P))^*$ no es el menor modelo de P^* , entonces por la proposición 2.5.7 inciso 2, existe un $x \in (\Pi M(P))^*$ tal que $N_p(x) = 0$ lo cual es una contradicción, ya que $(x, N_p(x)) \notin \Pi M(P)$. □

EJEMPLO 2.5.9. Sea $X = \{a, b, c\}$ y el siguiente programa posibilista

$$P = \{(a \leftarrow 0,9), (b \leftarrow 0,6), (c \leftarrow a, b 0,8)\}$$

La distribución de posibilidad menos específica en 2^X , que es inducida por P , es la siguiente

$$\begin{aligned} \pi_P(\emptyset) &= 1 - \max\{0,9, 0,6\} = 0,1 & \pi_P(\{a\}) &= 1 - \max\{0,6\} = 0,4 \\ \pi_P(\{b\}) &= 1 - \max\{0,9\} = 0,1 & \pi_P(\{a, b\}) &= 1 - \max\{0,8\} = 0,2 \\ \pi_P(\{c\}) &= 0 \text{ (no inclusion)} & \pi_P(\{a, c\}) &= 0 \text{ (no inclusion)} \\ \pi_P(\{b, c\}) &= 0 \text{ (no inclusion)} & \pi_P(\{a, b, c\}) &= 1 \text{ (el modelo)} \end{aligned}$$

La definición de π_P asegura que es compatible y ninguna distribución de posibilidad menos específica es compatible.

DEFINICIÓN 2.5.10. Sea \mathcal{A} el conjunto finito de todos los conjuntos de átomos posibilistas inducidos por X y por la necesidad N , para todo,

$A, B \in \mathcal{A}$, se define:

$$\begin{aligned} A \sqcap B &= \{(x, \min\{\alpha, \beta\}) : (x, \alpha) \in A, (x, \beta) \in B\} \\ A \sqcup B &= \{(x, \alpha) : (x, \alpha) \in A, x \notin B^*\} \cup \{(x, \beta) : x \notin A^*, (x, \beta) \in B\} \cup \{(x, \max\{\alpha, \beta\}) : (x, \alpha) \in A, (x, \beta) \in B\} \\ A \sqsubseteq B &\Leftrightarrow \begin{cases} A^* \subseteq B^*, y \\ \text{para toda } x, \alpha, \beta, (x, \alpha) \in A \wedge (x, \beta) \in B \text{ implica que } \alpha \leq \beta \end{cases} \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 2.5.11. Sea \mathcal{A} el conjunto finito de todos los conjuntos de átomos posibilistas inducidos por X y por la necesidad N , para todo, $A, B \in \mathcal{A}$, tenemos lo siguiente:

1. $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $A \sqcap B$ es el $\sup\{A, B\}$.
2. $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $A \sqcup B$ es el $\inf\{A, B\}$.
3. $\perp = \emptyset$ es el elemento minimal de \mathcal{A} .
4. $\top = \{(x, \max\{\alpha : \alpha \in N\}) : x \in X\}$ es el elemento máximo de \mathcal{A} .

y así, $\langle \mathcal{A}, \sqsubseteq \rangle$ es una lattice completa.

Demostración: [24]

□

DEFINICIÓN 2.5.12. Sea $r = (c \leftarrow a_1, \dots, a_n, \alpha)$ una regla posibilista y sea A un conjunto de átomos posibilistas, decimos que:

1. r es β -aplicable en A con $\beta = \min\{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ si $\{(a, \alpha_1), \dots, (a_n, \alpha_n)\} \subseteq A$.
2. r es 0-aplicable de otra forma.

Y así, para todo x definimos:

$$App(P, A, x) = \{r \in H(P, x), r \text{ es } \beta\text{-aplicable en } A \text{ y } \beta > 0\}$$

DEFINICIÓN 2.5.13. Sea P un programa lógico definite posibilista y A un conjunto de átomos posibilistas. El *Operador consecuencia inmediata posibilista*, denotado por ΠT_P , mapea un conjunto A , de átomos posibilistas, mediante la siguiente regla:

$$\Pi T_P(A) = \begin{cases} (x, \delta) & : x \in \text{head}(P^*), \text{App}(P, A, x) \neq \emptyset \\ & \delta = \max_{r \in \text{App}(P, A, x)} \{ \beta : r \text{ es } \beta - \text{aplicable en } A \} \end{cases}$$

Así, el operador iterado ΠT_P^* está definido por

$$\Pi T_P^0 = \emptyset \text{ y } \Pi T_P^{n+1} = \Pi T_P(\Pi T_P^n), \forall n \geq 0$$

PROPOSICIÓN 2.5.14. El operador ΠT_P es monótono, es decir, si $A \sqsubseteq B$ implica que

$$\Pi T_P(A) \sqsubseteq \Pi T_P(B)$$

Demostración: □

PROPOSICIÓN 2.5.15. Sea P un programa lógico definite posibilista, entonces ΠT_P tiene un punto fijo $\sqcup_{n \geq 0} \Pi T_P^n$ al cual llamaremos el conjunto de las consecuencias posibilistas de P y lo denotaremos por $\Pi C_n(P)$.

Demostración: [24] □

EJEMPLO 2.5.16. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y considere el siguiente programa posibilista P

$$P = \{(a \leftarrow 0,8), (b \leftarrow a \ 0,6), (d \leftarrow a \ 0,5), (d \leftarrow c \ 0,9)\}$$

$$\Pi C_n(P) = \{(a \ 0,9), (b \ 0,6), (c \ 0,6)\}$$

TEOREMA 2.5.17. Sea P un programa lógico definite posibilista entonces, $\Pi C_n(P) = \Pi M(P)$.

Demostración:

\subseteq] Sea P un programa lógico definite posibilista y sea N_P su medida de posibilidad asociada, probaremos que $\Pi C_n(P) \subseteq \Pi M(P)$. Por definición de $\Pi C_n(P)$ tenemos que este es el menor punto fijo de ΠT_P así, para toda $x \in X$ y $(x \ \alpha) \in \Pi C_n(P)$ con $\alpha \in N$ implica que $\alpha > 0$.

Supongamos que $N_P(x) = \alpha' > \alpha$. Como $x \in C_n(P)$ tenemos que

$$N_P(x) = \min_{A \in 2^X} \{ \max_{r \in P} \{ N(r) : A \not\subseteq r^*, x \notin A \} \} = \alpha'$$

entonces para toda $A \in 2^X$ con $x \notin A$, $\max_{r \in P} \{ N(r) : A \not\subseteq r^* \} \geq \alpha'$. Lo cual implica que para todo conjunto $A \in 2^X$, con $x \notin A$ existe, un $r \in P$ tal que $A \not\subseteq r^*$ y $N(r) \geq \alpha'$.

Por lo tanto, usando esta última regla para cada paso i , podemos construir dos sucesiones maximal $\langle A_i \rangle$ y $\langle r_i \rangle$, tal que para todo i con $0 \leq i \leq k$, $x \notin A_i^*$ y $\text{head}(r_i^*) \neq x$.

Si $A_0 = \emptyset$, existe $r_0 \in P$ tal que $A_0^* \not\subseteq r_0^*$ y $n(r_0) \geq \alpha'$

$A_1 = \{(\text{head}(r_0^*) \ n(r_0))\} \implies$ existe $r_1 \in P$ tal que $A_1^* \not\subseteq r_1^*$ y $n(r_1) \geq \alpha'$

...

$A_k = \{(\text{head}(r_0^*) \ n(r_0)), \dots, (\text{head}(r_{k-1}^*) \ n(r_{k-1}))\}$

entonces existe $r_k \in P$ tal que $A_k^* \not\subseteq r_k^*$ y $n(r_k) \geq \alpha'$

$A_{k+1} = \{(\text{head}(r_0^*) \ n(r_0)), \dots, (\text{head}(r_k^*) \ n(r_k))\}$

$\langle r_0, \dots, r_k \rangle$ es maximal, es decir, no existe $r \in P$ tal que $\text{head}(r^*) \neq x$ y $A_{k+1}^* \not\subseteq r$. Pero como

$$x \notin A_{k+1}^*, A_{k+1} \subseteq \Pi C_n(P) \text{ y } x \in \Pi C_n(P)^*$$

tenemos que, para todo $r \in P$

$$A_{k+1}^* \not\subseteq r \text{ implica que } \text{head}(r^*) = x$$

y en particular, tenemos que

existe $\rho \in P$ tal que $A_{k+1}^* \not\subseteq \rho^*$ con $n(\rho^*) \geq \alpha'$ y $\text{head}(\rho^*) = x$.

Así, para todo $(y \ \beta) \in A_{k+1}$ con $\beta \geq \alpha'$ y como $n(\rho^*) \geq \alpha'$ tenemos que $(\text{head}(\rho^*) \ \gamma) = (x \ \gamma) \in \Pi C_n(P)$ con $\gamma \geq \alpha' \geq \alpha$. Lo cual contradice el hecho de que $(x \ \alpha) \in \Pi C_n(P)$, ya que

$\Pi C_n(P) = \sqcup_{n \geq 0} \Pi T_P^n(\emptyset)$. Por lo tanto nuestra primera suposición de que $N_P(x) = \alpha' > \alpha$, es falsa y por lo tanto $N_P(x) \leq \alpha$.

Además, tenemos que $(x \alpha) \in \Pi C_n(P)$ implica que existe $P' \subseteq P$, tal que $(x \alpha) \in \Pi C_n(P')$ con P' mínimo, es decir, que para todo $P'' \subseteq P'$, $(x \alpha) \notin \Pi C_n(P)$. Entonces, para toda $r \in P'$, $N(r) \geq \alpha$, así $N_{P'}(x) \geq \alpha$ y por lo tanto $N_P(x) \geq \alpha$.

Por lo tanto, $N_P(x) = \alpha$ y $(x \alpha) \in \Pi M(P)$, y finalmente $\Pi C_n(P) \subseteq \Pi M(P)$.

\supseteq] Ahora, probaremos que $\Pi C_n(P) \supseteq \Pi M(P)$. Por el inciso 2 de la proposición 2.5.7 tenemos que $x \notin C_n(P^*)$, si y sólo si, $N_P(x) = 0$, y $x \notin C_n(P^*)$ si y sólo si, no existe un $\beta > 0$ tal que $(x \beta) \in \Pi C_n(P)$. Por otro lado $N_P(x) = 0$, si y sólo si, no existe $\beta > 0$ tal que $(x \beta) \in \Pi M(P)$.

Con lo anterior, tenemos que, para cualquier $x \in X$, existe $\beta > 0$ tal que $(x \beta) \in \Pi C_n(P)$, si y sólo si, existe $\beta > 0$ tal que $(x \beta) \in \Pi M(P)$. Así, si para todo $x \in X$, $(x \alpha) \in \Pi M(P)$ con $\alpha > 0$ entonces, existe $\beta > 0$ tal que $(x \beta) \in \Pi C_n(P)$, lo cual implica que, existe $\beta > 0$ tal que $(x \beta) \in \Pi M(P)$. Entonces, $\beta = \alpha$ ya que $\Pi M(P) = \{(x N_P(x))\}$ implica que $(x \alpha) \in \Pi C_n(P)$. Por lo tanto, $\Pi C_n(P) \supseteq \Pi M(P)$.

□

2.6. Programas Lógicos Normales Posibilistas

DEFINICIÓN 2.6.1. Sea P un programa lógico normal posibilista y A un conjunto de átomos. El *reducto posibilista* de P , con respecto a A , es el programa lógico definite posibilista

$$P^A = \{(r^{*+}, N(r)) : r \in P, r \text{ no es blocked por } A\}$$

Por este camino, la definición de un modelo estable posibilista es natural.

DEFINICIÓN 2.6.2. Sea P un programa lógico normal posibilista y S un conjunto de átomos posibilistas. S es un *modelo estable posibilista* de P si y sólo si $S = \Pi C_n(P^{S^*})$.

EJEMPLO 2.6.3. Sea el ejemplo 2.2.1. Consideremos la siguiente escala de certeza: 1 como absolutamente cierto; 0,9 como casi cierto; 0,7 como menos cierto y 0,3 como poco cierto. Aplicando esta información a de los niveles de certeza al programa P obtenemos un programa lógico normal posibilista

$$P'_{med} = \left\{ \begin{array}{ll} (m1 \leftarrow e1, not\ m2\ 1) & (m2 \leftarrow e2, not\ m1\ 1) \\ (c1 \leftarrow m1, e1\ 0,7) & (c2 \leftarrow m2, e2\ 0,3) \\ (e1 \leftarrow 0,9) & (e2 \leftarrow 0,7) \\ (\perp \leftarrow m1, m2\ 1) & \end{array} \right\}$$

Las dos primeras reglas (adecuación e incompatibilidad de los medicamentos) son consideradas absolutamente ciertas. La tercera (resp. cuarta) regla expresa que estamos casi (resp. poco) ciertos de la eficacia del fármaco "m1" (resp. fármaco 2 "m2"). Las dos últimas reglas indican que el diagnóstico de la enfermedad ".e1" (resp. enfermedad 2 ".e2") es casi (resp. casi menos) cierta. Así, P'_{med} tiene dos modelos estables posibilistas:

$$S_1 = \{(e1\ 0,9), (e2\ 0,7), (m1\ 0,9), (c1\ 0,7)\}$$

$$S_2 = \{(e1\ 0,9), (e2\ 0,7), (m1\ 0,7), (c2\ 0,3)\}$$

Por lo tanto, el médico puede observar que tiene una alternativa. Por un lado, puede casi sin duda dar el medicamento m1 y estar casi menos seguro de que el paciente se va a curar de la enfermedad e1. Por otro lado, puede dar el medicamento m2 de una manera casi menos segura

y el paciente se curará de la enfermedad .e2”, pero el médico está poco cierto de que esto suceda. Sin embargo, si el médico considera que la enfermedad e2 es muy grave, tal vez va a elegir el medicamento m2 incluso si el grado de certeza es menor. Por esto es interesante para obtener y mantener los dos modelos estables en el cual cada conclusión se pondera con un grado de certeza.

PROPOSICIÓN 2.6.4. Sea P un programa lógico normal posibilista, tenemos las siguientes afirmaciones

1. Sea A un modelo estable posibilista de P y sea $\alpha \in N$, entonces $(x \alpha) \in A$ si y sólo si $\alpha = N_{PA^*}(x)$.
2. Sea A un modelo estable de P^* , entonces $\{(x N_{PA}(x)) : x \in X, N_{PA}(x) > 0\}$ es un modelo estable posibilista de P.
3. Sea A un modelo estable posibilista de P, entonces A^* es un modelo estable de P^* .

Demostración:

1. Por definición 2.6.2 A es el conjunto de consecuencias posibilistas de P^{A^*} .
2. Primero, notemos que $(P^A)^* = (P^*)^A$ y que P^A es un programa lógico definite posibilista, por lo cual tenemos lo siguiente:
 - i) para toda $x \in X$, $N_{PA} > 0$ implica que $x \in C_n((P^A)^*)$ por la proposición 2.5.7 y así $x \in C_n((P^*)^A)$. Por lo tanto, $x \in A$ ya que $A = C_n((P^*)^A)$ (A es un modelo estable de P^*).
 - ii) para toda $x \in X$, $x \in A$ implica que $x \in C_n((P^*)^A)$ pues A es un modelo estable de P^* , y así $x \in C_n((P^A)^*)$. Así, por la proposición 2.5.7 $N_{PA}(x) > 0$.

Por lo tanto, $\{x \in X, N_{PA} > 0\} = A$ y entonces

$$\{(x N_{PA}(x)) : x \in X, N_{PA} > 0\}^* = A$$

Denotemos por $S = \{(x \ N_{PA}(x)) : x \in X, N_{PA} > 0\}$ y como P^A es un programa lógico definite posibilista, tenemos que:

$$S = \Pi M(P^A), \text{ si y sólo si } S = \Pi C_n(P^A), \text{ si y sólo si } S = \Pi C_n(P^{S^*})$$

Por lo tanto, $S = \{(x \ N_{PA}) : x \in X, N_{PA} > 0\}$ es un modelo estable de P.

3. Si A es un modelo estable posibilista de P, así lo es también un modelo posibilista de P^{A^*} . Así, A^* es el modelo de $(P^{A^*})^*$, por lo tanto A^* es un modelo estable de P^* .

□

Esta proposición muestra que existe un mapeo uno a uno entre los modelos estables posibilistas de un programa lógico normal P y los modelos estables de su proyección clásica P^* .

2.6.1. Programa Lógico Normal Posibilista Inconsistente

Una característica de la Lógica Posibilista es su capacidad para manejar la inconsistencia de un conjunto de fórmulas. Eso propone una manera de restaurar la consistencia de un conjunto de fórmulas suprimiendo las fórmulas menos certeras (o preferidas), aquellas que tienen un grado de certeza mayor. Presentamos aquí una idea análoga para hacer frente con programas lógicos normales inconsistentes. La idea básica es considerar que cada regla en el programa dado tiene un grado de certeza.

DEFINICIÓN 2.6.5. Sea P un programa lógico normal posibilista

- el α -corte estricto de P es el subprograma $P_{>\alpha} = \{r \in P \mid N(r) > \alpha\}$
- el grado de corte consistente de P es

$$ConsCutDeg(P) = \begin{cases} 0 & \text{si } P \text{ es consistente} \\ \min_{\alpha \in N} \{\alpha \mid P_{>\alpha} \text{ es consistente}\} & \text{otro caso} \end{cases}$$

El grado de corte consistente de un programa lógico normal posibilista P define el mínimo nivel de certeza para el cual un α -corte estricto es consistente.

EJEMPLO 2.6.6. Sea P el siguiente programa lógico normal posibilista

$$\begin{array}{l}
 (c \leftarrow 1) \qquad (f \leftarrow \text{not } e, \text{not } f \ 0,8) \\
 P: (e \leftarrow \text{not } b \ 0,8) \quad (a \leftarrow \text{not } a, \text{not } b \ 0,7) \\
 (d \leftarrow c, \text{not } d \ 0,6) \quad (b \leftarrow c \ 0,5)
 \end{array}$$

Entonces $ConsCutDeg(P) = 0,7$ ya que $P_{>0} = P$, $P_{>0,5}$ y $P_{0,6}$ son inconsistentes y $P_{>0,7}$ es consistente. Remarquemos que $P_{>0,8}$ es inconsistente. Este último punto ilustra una notable diferencia entre la lógica clásica y la semántica de los modelos estables. En la lógica clásica cada subconjunto de un conjunto consistente de fórmulas es consistente. Pero, un subconjunto de un programa normal consistente no necesariamente es consistente y esto se debe a la naturaleza no monótona del formalismo.

DEFINICIÓN 2.6.7. Sea P un programa lógico normal posibilista, su grado de inconsistencia es

$$InconsDeg(P) = 1 - \max_{A \in 2^X} \{\pi_P(A)\}$$

Este grado de inconsistencia puede ser usado para caracterizar un programa lógico normal posibilista inconsistente y para definir un *corte* de un programa lógico normal posibilista inconsistente que aún es un super conjunto del subprograma consistente que deseamos obtener.

PROPOSICIÓN 2.6.8. Sea P un programa lógico normal posibilista, entonces

1. P es inconsistente si y sólo si $InconsDeg(P) > 0$.
2. $InconsDeg(P) \leq ConsCutDeg(P)$.

Demostración:

1. Si $InconsDeg(P) = 0$, entonces $\max_{A \in 2^X} \{\pi_P(A)\} = 1$. luego $C_n(P)$ es un modelo.
2. Si P es consistente, entonces por el primer inciso de esta proposición tenemos que $InconsDeg(P) = 0$. Ahora, sea P un programa lógico normal posibilista inconsistente. Como \mathcal{N} es un conjunto finito, podemos considerar a $\mathcal{N} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ tal que para toda i , $1 \leq i < n$ y $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, denotando $P_i = P_{>\alpha_i}$ para toda i , $1 \leq i < n$.

Sea $a_k = ConsCutDeg(P)$, así P_k es consistente y por lo cual existe $A \in 2^X$ donde A es un modelo estable de $(P_k)^*$. Tenemos que $P^A = (P_k)^A \cup P'^A$ y mostraremos que $P'^A \neq \emptyset$. Supongamos que $P'^A = \emptyset$, entonces $C_n(P^A) = C_n((P_k)^A) = A$, de donde A es un modelo estable de $P_k(A)$. Así, A es un modelo estable de P, lo cual es una contradicción ya que P es inconsistente y por tanto $P'^A \neq \emptyset$.

Como A es un modelo estable de $(P_k)^A$, entonces para toda $r \in (P_k)^A$, $A \models r^*$ y para toda $r \in P'^A$, $N(r) \leq \alpha_k$, todo esto implica que $\max_{r \in (P_k)^A \cup P'^A} \{N(r) : A \not\models r^*\} \leq a_k$. Entonces, $\pi_{(P_k)^A \cup P'^A}(A) = 1 - \max_{r \in (P_k)^A \cup P'^A} \{N(r) : A \not\models r^*\} \geq 1 - \alpha_k$. Así, $\hat{\pi}_P(A) = \pi_{P^A}(A) = \pi_{(P_k)^A \cup P'^A} \geq 1 - \alpha_k$. Por lo cual, $\max_{A \in 2^X} \hat{\pi}_P(A) \geq 1 - \alpha_k$. Por lo tanto

$$InconsDeg(P) = 1 - \max_{A \in 2^X} \{\hat{\pi}_P(A)\} \leq \alpha_k = ConsCutDeg(P).$$

□

DEFINICIÓN 2.6.9. Sea P un programa lógico normal posibilista, definimos la función $cut(P)$ como:

$$cut(P) = \begin{cases} P & \text{si } InconsDeg(P) = 0 \\ cut(P_{>InconsDeg(P)}) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

PROPOSICIÓN 2.6.10. Sea P un programa lógico normal posibilista, entonces $cut(P) = P_{>ConsCutDeg(P)}$.

Demostración: Sea P un programa lógico normal posibilista. Si P es inconsistente, entonces $P_{>ConsCutDeg(P)} = P$ y $InconsDeg(P) = 0$, por lo tanto, por la definición anterior tenemos que $cut(P) = P_{>ConsCutDeg(P)}$.

Ahora, sea P un programa lógico normal posibilista, entonces $0 < InconsDeg(P) \leq ConsCutDeg(P)$ lo cual implica que:

$$P_{>ConsCutDeg(P)} \subseteq P_{>ConsCutDeg(P)} \subset P$$

Así, cada vez que aplicamos cut , reducimos el número de reglas en el programa dado eliminando las reglas menos ciertas. Además, el resultado es siempre un super conjunto de $P_{>ConsCutDeg(P)}$. Donde el número de reglas en P es finito y todos los super conjuntos de $P_{>ConsCutDeg(P)}$ son inconsistentes, entonces cut para y regresa $P_{>ConsCutDeg(P)}$ después de un número finito de aplicaciones. \square

Cuando P es inconsistente $P_{>ConsCutDeg(P)}$ es el subprograma consistente de P que queremos calcular.

EJEMPLO 2.6.11. Continuando con el programa P del ejemplo 2.6.6, tenemos que $InconsDeg(P) = 0,7$. La primera aplicación de la función cut es suficiente para calcular el submodelo maximal consistente de P : Así,

$$cut(P) = \{(c \ 1); (f \leftarrow \text{not } e, \text{not } f \ 0,9); (e \leftarrow \text{not } b \ 0,8)\}$$

Y por tanto, $cut(P)^*$ tiene un modelo que es $\{c, e\}$.

Así, con lo anterior se muestra la relación existente entre la Lógica Posibilista y los programas Lógicos.

Conclusiones

Se presentó una descripción detallada de la teoría de la posibilidad Estándar y Generalizada. Además, de un teorema que hace a la Lógica Posibilista Estándar Robusta y Completa. Generalizando este resultado en una semántica adecuada a la inconsistencia de la Lógica Posibilista.

El desarrollo de la Programación Lógica en los últimos 40 años ha sido relevante permitiendo el desarrollo de Answer Set Programing y los Programas Lógico Posibilistas, en diferentes áreas de estudio como es el caso de la medicina.

Además, se da una breve reseña acerca de la caracterización de los programas lógicos. Así como la definición de modelos estables para posteriormente ver su comportamiento ponderandole a cada cláusula del programa un grado de posibilidad y así obtener los programas lógicos posibilistas.

Se muestra la característica de la Lógica Posibilista para manejar la inconsistencia de un conjunto de fórmulas, restaurando la consistencia de un conjunto de fórmulas supliendo las menos certeras por aquellas de mayor certeza.

Bibliografía

- [1] A. Tversky and D. Kahneman. Judgment under uncertainty: Heuristics and biases, *Science, New Series*, Vol. 185, No. 4157 (1974), pp. 1124-1131.
- [2] C. Baral, *Knowledge Representation, Reasoning and Declarative Problem Solving*. Cambridge University Press, Cambridge (2003).
- [3] C. Shannon, *A mathematical theory of communication*, *Bell System Technical Journal* **27** (1948), 379 – 426 & 623 – 656
- [4] D. Dubois and H. Prade, *Belief Change and Possibility Theory*, In P. Gärdenfors, ed., *Belief Revision*, 142-182, Cambridge University Press, 1992.
- [5] D. Dubois and H. Prade, *Epistemic Entrenchment and Possibilistic Logic*, *Artificial Intelligence*, 50:223-239, 1991.
- [6] D. Dubois and H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, *Mathematics in Sciences and Engineering Series*, Vol. 144. Academic Press, New York, 1980.
- [7] D. Dubois and H. Prade, *Possibilistic Logic, Preferential Models, Non-monotonicity and Related Issues*, In *Proceedings of the 12th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-91)*, Sydney, Australia, Aug. 24-30, pages 419-424, 1991.

- [8] D. Dubois and H. Prade, (with the collaboration of H. Ferreny, R. Martin-Clouaire and C. Testemale). *Théorie des Possibilités-Applications á la Représentation des Connaissances en Informatique*, Masson, Paris, 1985. 2nd revised and augmented edition, 1987.
- [9] D. Dubois, J. Lang and H. Prade, *Automated Reasoning Using Possibilistic Logic: Semantics, Belief Revision, and Variable Certainty Weights*, IEEE Trans. on Data and Knowledge Engineering, 1994.
- [10] D. Dubois, J. Lang and H. Prade, *Possibilistic Logic*, Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming, Vol. 3, 439-513, Oxford University Press.
- [11] D. Dubois, J. Lang and H. Prade, *Towards Possibilistic Logic Programming*, Proc. of ICLP91, 581-595.
- [12] D. Lewis, *Counterfactuals and Comparative Possibility*, In W. L. Harper, R. Stalnaker, and G. Pearce, editors, *Ifs*, pages 57-58. D. Reidel, Dordrecht, 1973.
- [13] D. M. Gabbay, *Theoretical Foundations for Non-monotonic Reasoning in Expert Systems*, In K. R. Apt, editor, *Logics and Models of Concurrent Systems*, pages 439-457. Springer Verlag, Berlin, 1985.
- [14] D. Van Nieuwenborgh, M. De Cock, D. Vermier, *Fuzzy Answer Set Programming*, DPL, 1994.
- [15] G. Wagner, *Negation in Fuzzy and Possibilistic Logic Programs*, Fuzzy Answer Set Programming, JELIA 2006, pages 359-372.
- [16] E. Hisdal, *Conditional Possibilities-Independence and Non-interactivity*, Fuzzy Sets and Systems, 1:283-297,1978.
- [17] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, Chapman and Hall, London, (1997).

- [18] F. J. Pelletier and R. Elio. *Scope of Logic, Methodology and Philosophy of Science*, vol 1 of Synthese Library, chapter Logic and Computation, pages 137-156. Dordrecht: Kluwer Academic Press (2002).
- [19] J. Lang, D. Dubois and H. Prade, *A Logic of Graded Possibility and Certainty Coping with Partial Inconsistency*, In Proceedings of the 7th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, UCLA, Los Angeles, July 13-15, pages 188-196. Morgan and Kaufmann, 1991.
- [20] J. W. Lloyd, *Foundations of Logic Programming*, Symbolic computation, Artificial Intelligence, Springer Verlag, 1987.
- [21] L. A. Zadeh, *Fuzzy Sets and Information Granularity*, In M.M. Gupta, R.K. Ragade, and R.R. Yager, editors, *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*, pages 3-18. North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [22] L. A. Zadeh, *Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility*, *Fuzzy Sets and Systems*, 1(1):3-28, 1978.
- [23] P. Gärdenfors and D. Makinson, *Non-monotonic Inference Based on Expectation Orderings*, *Artificial Intelligence*, 1992. To appear.
- [24] P. Nicolas, L. Garcia, et al., *Possibilistic uncertainty handling for answer set programming*, *Annals Math. Artif. Intell.* **47** (2006). 139 – 181.
- [25] R. C. Stalnaker, *A Theory of Conditionals*, In W. L. Harper, R. Stalnaker, and G. Pearce, editors, *Iffs*, pages 41-55. Reidel, Dordrecht, 1981, 1968.
- [26] R. R. Yager, *An Introduction to Applications of Possibility Theory*, *Human Systems Management*, 3:246-269, 1983.
- [27] S. Benferhat, D. Dubois and H. Prade, *Default Rules and Possibilistic Logic*, *Proceedings of KR'92*, 673-684.

- [28] S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade, *Representing Default Rules in Possibilistic Logic*, In Proceedings of the 3rd International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR92), Cambridge, Mass. Oct. 25-29, pages 673-684, 1992.
- [29] Y. Shoham, *Reasoning About Change-Time and Causation from the Standpoint of Artificial Intelligence*, The MIT Press, Cambridge, Mass., 1988.