



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD  
AUTÓNOMA DE PUEBLA

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas  
Posgrado en Ciencias Matemáticas

**Algunos teoremas del tipo Voronovskaya para  
operadores polinomiales en espacios de funciones  
periódicas**

Tesis

que presenta

**Lázaro Flores de Jesús**

para obtener el grado de

**Doctorado en Ciencias (Matemáticas)**

Director de Tesis:

Dr. Jorge Bustamante González





**DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE  
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y  
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP  
P R E S E N T E:**

Por este medio le informo que el C:

**LÁZARO FLORES DE JESÚS**

estudiante del Doctorado en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 11 de noviembre de 2022, con la tesis titulada:

***“ALGUNOS TEOREMAS DEL TIPO VORONOVSKAYA PARA  
OPERADORES POLINOMIALES EN ESPACIOS DE FUNCIONES  
PERIÓDICAS”***

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

**A T E N T A M E N T E.**  
H. Puebla de Z, a 14 de noviembre de 2022

**DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO  
COORDINADORA DEL POSGRADO  
EN MATEMÁTICAS.**



D\*PDS/mtrv



# Dedicatoria

A mis padres. Gracias por todas sus enseñanzas y ser los pilares de mi vida.

A mis hermanos, que han me han apoyado siempre, depositando su confianza en mí.



# Agradecimientos

Agradezco a mis padres, María Rosalia y José Alejandro. Son los primeros que me educaron y gracias a ellos he logrado todas mi metas. Les estaré eternamente agradecido.

A mis hermanos, René, Rosaura, Daniel, Gloria y Guillermo Alejandro, todos y cada uno de ellos en su forma particular forman parte de mis logros. Espero poder algún día regresarles todo el apoyo que me brindaron.

A mi tía Clara, espero corresponder a todo su cariño. Gracias por el apoyo invaluable que me otorgó desde el principio de mis estudios universitarios.

A mis amigos que han estado a mi lado en las buenas y las malas. Su paciencia en mis arrebatos de enojo fueron un gran alivio para mí. Especialmente a Ángeles y Fernanda, gracias por escucharme y compartir alegres momentos y también por apoyarme en momentos de tristeza.

A mi director de tesis, Dr. Jorge Bustamante González, agradezco que me haya aceptado como su alumno. Muchas gracias por guiarme en la realización de este trabajo. Su apoyo, tanto académico como la amistad que me brindo fue una gran motivación para lograr alcanzar mis metas.

A mi jurado, Dr. Miguel Antonio Jiménez Pozo, Dr. David Herrera Carrasco, Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, Dra. Patricia Domínguez Soto y Dr. Reinaldo Martínez Cruz. Cada una de sus observaciones ayudó a mejorar la presentación de mi tesis, muchas gracias por el tiempo dedicado a la revision de mi trabajo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por el apoyo económico brindado para la realización de mis estudios de doctorado.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>III</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Espacios $X^p$ y derivadas . . . . .	1
1.2. Polinomios y series trigonométricas . . . . .	4
1.3. Núcleos y aproximación . . . . .	6
1.4. Módulos de continuidad y clases de Lipschitz . . . . .	7
<b>2. Operadores de Fejér</b>	<b>9</b>
2.1. Introducción . . . . .	9
2.2. Desigualdades fuertes para combinaciones de operadores de Fejér . . . . .	11
2.3. Aproximación simultánea . . . . .	15
2.4. Teoremas del tipo Voronovskaya . . . . .	19
2.5. Otras observaciones sobre los operadores de Fejér . . . . .	22
<b>3. Operadores de Jackson</b>	<b>27</b>
3.1. Introducción . . . . .	27
3.2. Resultados generales para polinomios positivos . . . . .	28
3.3. Teoremas del tipo Voronovskaya . . . . .	32
<b>4. Operadores de Fejér-Korovkin</b>	<b>39</b>
4.1. Introducción . . . . .	39
4.2. Algunos resultados auxiliares . . . . .	43
4.3. Resultados del tipo Voronovskaya . . . . .	50
<b>5. Operadores de Nörlund y Riesz</b>	<b>55</b>
5.1. Estimados para los operadores $L_n$ . . . . .	55
5.2. Funciones conjugadas . . . . .	63
5.3. Algunas notas históricas . . . . .	67
<b>Conclusiones</b>	<b>75</b>

Referencias

75

# Introducción

En esta tesis se estudian propiedades de algunos operadores polinomiales en espacios de funciones periódicas. En particular, se consideran los operadores de Fejér, Jackson, Fejér-Korovkin, Nörlund y Riesz.

Recordemos que, para  $f \in C[0, 1]$  y  $n \in \mathbb{N}$  los polinomios de Bernstein se definen como

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0, 1].$$

Utilizando un cambio de variable es fácil construir polinomios similares para  $f \in C[a, b]$  ( $a < b$ ). Para ello basta definir

$$B_n(f, x) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) (x-a)^k (b-x)^{n-k}, \quad x \in [a, b].$$

Se sigue de un resultado de Voronovskaya [69] una limitación de los polinomios de Bernstein. En particular, si  $x \in (0, 1)$  y  $f^{(2)}(x)$  existe en el punto  $x$ , entonces

$$B_n(f, x) - f(x) = \frac{x(1-x)}{2n} f^{(2)}(x) + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (1)$$

Lo anterior implica que la velocidad de convergencia no puede ser mayor que  $1/n$ . Si  $f$  tiene segunda derivada continua,  $\epsilon > 0$  y

$$\|B_n(f) - f\| \leq \frac{C}{n^{1+\epsilon}},$$

entonces, para todo  $x$  se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(B_n(f, x) - f(x)) = 0,$$

mientras que de la fórmula de Voronovskaya se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(B_n(f, x) - f(x)) = \frac{x(1-x)}{2} f^{(2)}(x).$$

En tal caso  $f^{(2)}(x) = 0$  y  $f$  debe ser un polinomio de primer grado.

Actualmente, cuando una sucesión de operadores cumple una condición similar a la ecuación (1) se dice que es un resultado del tipo Voronovskaya.

La definición siguiente se debe a Favard (véase [22]). Fijemos  $1 \leq p \leq \infty$ . Sea  $\{L_n\}$ ,  $L_n : X^p \rightarrow X^p$  un proceso de aproximación. Esto es, para toda  $f \in X^p$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_p = 0.$$

Si existe una función decreciente y positiva  $\varphi(n)$  y  $K \subset X^p$  tales que

(I)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n(f)\|_p / \varphi(n) = 0$  implica que  $f$  es constante,

(II)  $\sup\{\|f - L_n(f)\|_p / \varphi(n) : n \in \mathbb{N}\} < \infty$  implica que  $f \in K$

(III)  $f \in K$  implica que  $\sup\{\|f - L_n(f)\|_p / \varphi(n) : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ ,

se dice que el proceso de aproximación  $\{L_n\}$  está saturado, que el orden de saturation es  $\varphi(n)$  y que la clases de saturación es  $K$ .

Las fórmulas de tipo Voronovskaya están estrechamente relacionadas con la clase de saturación de operadores. En el caso algebraico se relacionan con la segunda derivada, sin embargo, en el caso trigonométrico no siempre es así.

En teoría de aproximación se diferencia los resultados cualitativos de los cuantitativos. Por ejemplo, si  $\{L_n\}$  es una sucesión de operadores,  $L_n : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ , y se prueba que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\| = 0, \quad \text{para toda } f \in C[0, 1],$$

se dice que se tiene *un resultado del tipo cualitativo*. Pero, si se encuentra una constante  $C$  y una funcional  $\phi : C[0, 1] \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que para toda  $f \in C[0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(f, n) = 0$$

y

$$\|L_n(f) - f\| \leq C\phi(f, n),$$

se dice que se tiene *un resultado del tipo cuantitativo*.

En los últimos años se han realizado estudios con el fin de obtener fórmulas cuantitativas del tipo Voronovskaya. Para los operadores de Bernstein véase [25] y [28].

En el caso de operadores para aproximar funciones periódicas no se conocen resultados cuantitativos del tipo Voronovskaya.

Aunque se conocen muchos hechos relacionados con los operadores de Fejér, no hemos encontrado estudios detallados que incluyan el comportamiento de combinaciones lineales de estos operadores ni su utilización para la aproximación simultánea.

---

Por otro lado, para extender los operadores de Fejér, se introdujeron las sumas de Nörlund y Riesz. Sin embargo, en muchos casos no está clara la relación entre dichas sumas y las de Fejér.

Dicho lo anterior, señalaré los objetivos de esta investigación:

1.- Obtener teoremas del tipo Voronovskaya en versión cuantitativa para algunos operadores polinomiales trigonométricos.

2.- Encontrar estimados para la velocidad de convergencia de la aproximación, mediante combinaciones iterativas de los operadores de Fejér similares a las conocidas para los operadores de Jackson.

3.- Determinar cuándo el estudio de las propiedades aproximativas de los operadores de Nörlund y Riesz se puede realizar en términos de los operadores de Fejér (de ser posible).

La tesis contiene cinco capítulos.

El Capítulo 1 contiene notaciones y resultados conocidos que se utilizarán en todo el trabajo.

El Capítulo 2 presenta el estudio de los operadores de Fejér. En la Sección 2.1 se incluyen resultados clásicos. La Sección 2.2 se dedica a demostrar nuevas propiedades relacionadas con combinaciones lineales de operadores de Fejér. En particular, en el Teorema 2.9 se caracteriza la velocidad de convergencia de las combinaciones iterativas en términos de módulos de continuidad (incluyendo constantes específicas). En la Sección 2.3 se discuten problemas concernientes a la aproximación simultánea; para ello se analiza previamente una variante especial de los operadores de De la Vallée Poussin. El resultado principal de dicha sección es el Teorema 2.16. En la Sección 2.4 se presenta un teorema cualitativo del tipo Voronovskaya. Finalmente, la Sección 2.5 contiene varias observaciones sobre los operadores de Fejér que se necesitan en el último capítulo.

El Capítulo 3 se dedica a los operadores de Jackson. El objetivo principal es obtener teoremas del tipo Voronovskaya. Esto se logra en los Teoremas 3.8 y 3.11 aunque, para ello, previamente se presenta un resultado de carácter general en el Teorema 3.3.

El Capítulo 4 sigue la línea del Capítulo 3, no obstante, considera los operadores de Fejér-Korovkin. La diferencia fundamental entre estos estudios radica en un reconocimiento previo de los factores de convergencia, así como una serie de cálculos adicionales (véase la Sección 4.2). Para las pruebas relacionadas con los operadores de Fejér-Korovkin necesitamos, además, estimar las derivadas intermedias. Lo anterior se logró con la ayuda de un resultado nuevo que se muestra interesante por sí mismo (véase el Teorema 4.9 y el Corolario 4.10).

El último capítulo está dedicado a los operadores de Nörlund y Riesz. El objetivo es utilizar los nuevos resultados previos, relacionados con los operadores de Fejér para generalizar y/o simplificar estudios conocidos.

Las ideas fundamentales, utilizadas en la presentación de esta tesis están incluidas en los trabajos siguientes:

J. Bustamante y L. Flores-de-Jesús, *Strong converse inequalities and quantitative Voronovskaya-type theorems for trigonometric Fejér sums*, Const. Math. Anal. 3 (2) (2020), 53-63. ISSN 2651 - 2939,  
[doi.org/10.33205/cma.653843](https://doi.org/10.33205/cma.653843)

J. Bustamante y L. Flores-de-Jesús, *Quantitative Voronovskaya-type theorems for Fejér-Korovkin operators*, Const. Math. Anal. 3 (4) (2020), 150-164.  
<http://dergipark.gov.tr/en/pub/cma> ISSN 2651 - 2939  
[doi.org/10.33205/cma.818715](https://doi.org/10.33205/cma.818715)

J. Bustamante y L. Flores-de-Jesús, *Quantitative Voronovskaya-type theorems for Jackson operators*, Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity ISSN 1584-4536, 17 (2019), 21-34.  
[atps.tucn.ro/html/2019.html](https://atps.tucn.ro/html/2019.html)

J. Bustamante y L. Flores-de-Jesús, *Extension of Nörlund and Riesz means: new estimates*, Publ. Math. Debrecen. 101/1-2 (2022), 231-237.  
doi: 10.5486/PMD.2022.9286

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Espacios $X^p$ y derivadas

Durante este trabajo denotaremos con  $X^\infty$  al espacio de las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuas y  $2\pi$  periódicas. En  $X^\infty$  consideramos la norma del supremo. Esto es:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Para  $1 \leq p < \infty$ ,  $X^p$  denotará al espacio  $L^p$  de las funciones  $f$  medibles con respecto a la medida de Lebesgue y  $2\pi$  periódicas, para las cuales

$$\|f\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(u)|^p du \right\}^{1/p} < \infty.$$

Utilizamos estas notaciones para diferenciar a  $C = X^\infty$  de  $L^\infty$ , el espacio de las funciones medibles con respecto a la medida de Lebesgue y esencialmente acotadas. Para  $g \in L^\infty$

$$\|g\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|.$$

**Teorema 1.1.** (Desigualdad de Minkowski, [10, Proposition 0.1.5]) *Si  $1 \leq p \leq \infty$  y  $f, g \in X^p$ , entonces*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Si  $p$  es tal que  $1 < p < \infty$ , el conjugado de  $p$ , denotado por  $q$ , se define por medio de la relación siguiente:  $1/p + 1/q = 1$ . Para simplificar, cuando  $p = 1$  supondremos que  $q = \infty$ , y cuando  $p = \infty$  tomamos  $q = 1$ .

**Teorema 1.2.** (Desigualdad de Hölder, [10, Proposition 0.1.6]) *Si  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $f \in X^p$  y  $g \in X^q$ , entonces  $fg \in X^1$  y*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

**Teorema 1.3.** (Desigualdad de Hölder-Minkowski, [20, pag. 18]) *Supongamos que  $1 \leq p \leq \infty$ . Si  $A$  y  $B$  son intervalos de la recta real,  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones medibles con respecto a la medida de Lebesgue no negativas, entonces*

$$\left\{ \int_A \left( \int_B g(y)f(x,y)dy \right)^p dx \right\}^{1/p} \leq \int_B g(y) \left\{ \int_A f(x,y)^p dx \right\}^{1/p} dy.$$

**Proposición 1.4.** [10, Proposition 0.1.11] *Sea  $1 < p < \infty$  y  $f, \{f_n\}_{n=1}^\infty$  pertenecientes a  $X^p$ . Si existe una constante  $M$  tal que  $\|f_n\|_p \leq M$  para todo  $n$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  a.e., entonces para todo  $g \in X^q$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)g(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

**Teorema 1.5.** (Beppo Levi, [10, Proposition 0.3.3]) *Sea  $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X^1$ . Si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x)|dx < \infty,$$

*entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge absolutamente a.e. en  $(-\pi, \pi)$ . Si denotamos*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \text{ entonces } f \in X^1 \text{ y}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)dx.$$

**Definición 1.6.** Sea  $\mathbb{A} = \mathbb{N}$  o  $\mathbb{A} = (a, b)$ , donde  $0 \leq a < b \leq \infty$ , y sea  $\rho_0$  uno de los puntos  $a, b$  o  $\infty$ . Un conjunto de funciones  $\{\chi_\rho(x), \rho \in \mathbb{A}\}$  es llamado un núcleo si, para cada  $\rho \in \mathbb{A}$ ,  $\chi_\rho \in X^1$  y

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_\rho(u)du = 1.$$

El núcleo  $\{\chi_\rho(x), \rho \in \mathbb{A}\}$  se dice:

1. Real, si para cada  $\rho \in \mathbb{A}$ ,  $\chi_\rho(x)$  es una función real.
2. Acotado, si para cada  $\rho \in \mathbb{A}$ ,  $\chi_\rho \in L^\infty$ .
3. Continuo, si para cada  $\rho \in \mathbb{A}$ ,  $\chi_\rho \in C$ .

4. Absolutamente continuo, si  $\chi_\rho(x)$  es absolutamente continua para cada  $\rho \in \mathbb{A}$ .
5. Par, si para cada  $\rho \in \mathbb{A}$ ,  $\chi_\rho(x) = \chi_\rho(-x)$  a.e.
6. Positivo, si  $\chi_\rho(x) \geq 0$  a.e. para cada  $\rho \in \mathbb{A}$ .

**Definición 1.7.** Si  $1 \leq p \leq \infty$  y  $\{\chi_n(x), n \in \mathbb{N}\}$  es un núcleo, una expresión de la forma

$$I_n(f, x) = (f * \chi_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\chi_n(u)du, \quad f \in X^p, \quad (1.1)$$

se llama integral singular. La integral singular es positiva (continua) si el núcleo correspondiente es positivo (continuo).

**Definición 1.8.** Un núcleo  $\{\chi_n(x), n \in \mathbb{N}\}$  es llamado una identidad aproximada si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} |\chi_n(u)| du = 0, \quad (0 < \delta < \pi),$$

y existe una constante  $M > 0$  tal que

$$\|\chi_n\|_1 \leq M, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Una identidad aproximada es par, positiva, acotada o continua si el núcleo es par, positivo, acotado o continuo, respectivamente.

**Proposición 1.9.** [10, Proposition 1.1.3] Si  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $f \in X^p$  y  $\{\chi_n(x), n \in \mathbb{N}\}$  es un núcleo, entonces  $I_n(f, x) \in X^p$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  y

$$\|I_n(f)\|_p \leq \|\chi_n\|_1 \|f\|_p.$$

Más aún, si el núcleo es acotado, entonces  $I_n(f)$  es una función continua.

**Teorema 1.10.** [10, Theorem 1.1.5] Si  $1 \leq p \leq \infty$  y el núcleo de la integral (1.1) es una identidad aproximada, entonces para cada  $f \in X^p$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|I_n(f) - f\|_p = 0.$$

**Definición 1.11.** Sea  $f \in X^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Si existe  $g \in X^p$  tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{f(\circ + h) - f(\circ)}{h} - g(\circ) \right\|_p = 0,$$

entonces  $g$  es llamada la derivada uniforme  $f$ , si  $p = \infty$  y la derivada de  $f$  en medida de orden  $p$  si  $X^p = L^p$ . De forma abreviada, hablaremos de esta derivada como la primera derivada en norma o derivada fuerte y denotamos  $g$  por  $D^{(1)}f$ . Para cualquier  $r \in \mathbb{N}$ , la  $r$ -ésima derivada fuerte de  $f \in X^p$  se define por  $D^{(r)}f = D^{(1)}(D^{(r-1)}f)$ , si existe.

Para  $1 \leq p \leq \infty$  y  $r \in \mathbb{N}$ , denotamos por  $W_p^r$  a la familia de todas las funciones  $f \in X^p$  tales que  $f, \dots, D^{r-1}(f)$  son absolutamente continuas y  $D^r(f) \in X^p$ . Aquí  $D(f) = D^1(f) = f'$  y  $D^{r+1}(f) = D(D^r(f))$ . Además,  $AC^{r-1}$  es la clase de las funciones  $\phi$  tales que  $\phi, \dots, D^{r-1}(\phi)$  son absolutamente continuas.

**Proposición 1.12.** [10, Proposition 1.1.16] *Sea  $1 \leq p \leq \infty$  y  $\{\chi_n(x), n \in \mathbb{N}\}$  un núcleo  $I_n(f)$  acotado. Si  $f \in W_p^r$ , entonces  $I_n(f)$  es una función  $r$  veces continuamente diferenciable para cada  $n \in \mathbb{N}$  y*

$$(I_n(f, x))^{(r)} = I_n(D_s^{(r)} f, x) = I_\rho(\phi^{(r)}, x),$$

donde  $\phi \in AC^{r-1}$  con  $\phi^{(r)} \in X^p$  es tal que  $\phi(x) = f(x)$  a.e. Más aún, si  $\{\chi_n(x), n \in \mathbb{N}\}$  es una identidad aproximada, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(I_n(f, \circ))^{(r)} - (D_s^{(r)} f)(\circ)\|_p = 0.$$

Para  $f \in L^1$ , la función conjugada es definida por

$$\tilde{f}(x) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_\varepsilon^\pi \frac{f(x+t) - f(x-t)}{\tan(t/2)} dt,$$

siempre que el límite exista. Se sabe que si  $f \in X^p$  con  $1 < p < \infty$ , entonces  $\tilde{f}$  existe casi donde quiera y  $\tilde{f} \in X^p$ , y éste no es el caso para  $p = 1$  y  $p = \infty$  (véase [75, pag. 253]).

Para las funciones continuamente diferenciables, la función conjugada siempre existe. En particular, si  $T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sen(kx))$ , entonces

$$\tilde{T}_n(x) = \sum_{k=1}^n (-b_k \cos(kx) + a_k \sen(kx)). \quad (1.2)$$

## 1.2. Polinomios y series trigonométricas

Un polinomio trigonométrico (o de forma abreviada, un polinomio)  $T_n(x)$  de grado no mayor que  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , es una expresión de la forma

$$T_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos(kx) + b_k \sen(kx)\}. \quad (1.3)$$

El conjunto de todos los polinomios trigonométricos de grado no mayor que  $n$  se denota por  $\mathbb{T}_n$ . Si  $T_n \in \mathbb{T}_n$  y  $|a_n| + |b_n| \neq 0$ , decimos que  $T_n$  es estrictamente de grado  $n$ .

Para  $n \in \mathbb{N}_0$  y  $f \in X^p$ , la mejor aproximación se define como:

$$E_{n,p}(f) = \inf_{T \in \mathbb{T}_n} \|f - T\|_p.$$

La primer desigualdad en la ecuación (1.5) se conoce como la desigualdad de Bernstein, aunque el caso  $1 \leq p < \infty$  fue estudiado por Zygmund, quien también consideró los polinomios conjugados. Dichas desigualdades serán varias veces utilizadas en este texto.

**Teorema 1.13.** [67, pag. 215] *Si  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $r, n \in \mathbb{N}$  y  $T \in \mathbb{T}_n$ , entonces*

$$\|T_n^{(r)}\|_p \leq \left( \frac{n}{2 \operatorname{sen}(nh/2)} \right)^r \|\Delta_h^r T_n\|_p, \quad (1.4)$$

para todo  $h \in (0, 2\pi/n)$ . Más aún,

$$\|D^r(T_n)\|_p \leq n^r \|T\|_p \quad y \quad \|D^r(\tilde{T}_n)\|_p \leq n^r \|T_n\|_p. \quad (1.5)$$

Las series trigonométricas son de la forma

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)\},$$

y la suma parcial de orden  $n$  se definen como:

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)\}.$$

Dada  $f \in L^1$ , los coeficientes de Fourier de orden  $n$  están definidos de la forma siguiente:

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos(ku) du \quad y \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \operatorname{sen}(ku) du.$$

La serie (formal) de Fourier de  $f \in L^1$  está definida por:

$$f(x) \sim S(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \operatorname{sen}(nx)). \quad (1.6)$$

La serie conjugada asociada es definida por:

$$\tilde{S}(f, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( -b_k(f) \cos(kx) + a_k(f) \operatorname{sen}(kx) \right) := \sum_{n=1}^{\infty} B_n(f). \quad (1.7)$$

Se conoce que las sumas parciales de (1.6) se pueden representar en la forma siguiente (véase [10, pag. 42]):

$$\begin{aligned} S_n(f, x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \{ \cos(ku) \cos(kx) + \operatorname{sen}(ku) \operatorname{sen}(kx) \} \right] du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos k(x-u) \right] du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D_n(u) du, \end{aligned}$$

donde

$$D_n(x) \equiv 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}((2n+1)x/2)}{\operatorname{sen}(x/2)} & ; \quad x \neq 2j\pi \\ 2n+1 & ; \quad x = 2j\pi \end{cases},$$

se conoce como el núcleo de Dirichlet.

Las funciones  $D_n(x)$  definen un núcleo con parámetro  $\rho = n \in \mathbb{N}$  y  $\rho_0 = \infty$ .

**Proposición 1.14.** [10, Proposition 1.2.6] *El sistema trigonométrico es cerrado en  $X^p$ , i.e., si  $f \in X^p$  y para toda  $k \in \mathbb{N}_0$*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos(ku) du = 0 \quad y \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \operatorname{sen}(ku) du = 0,$$

entonces  $f(x) = 0$  a.e.

Se sigue, de la proposición anterior, que las funciones  $f \in X^p$  están unívocamente determinadas por sus coeficientes de Fourier. En otras palabras, si los coeficientes de Fourier, de dos funciones en  $X^p$ , son iguales para todo  $k \in \mathbb{N}_0$ , entonces dichas funciones son iguales casi donde quiera.

### 1.3. Núcleos y aproximación

**Teorema 1.15.** [10, Theorem 1.3.7] *Sean  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\{\chi_n(x), n \in \mathbb{N}\}$  un núcleo positivo, y los operadores  $I_n$  definidos como en (1.1). Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|I_n(f) - f\|_p = 0$  para toda  $f \in X^p$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|I_n(\cos) - \cos\|_p = 0$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|I_n(\operatorname{sen}) - \operatorname{sen}\|_p = 0$ .
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\operatorname{sen}^2(u/2), 0) = 0$ .

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} \chi_n(u) du = 0 \text{ para toda } 0 < \delta < \pi.$$

**Proposición 1.16.** [10, Proposition 1.3.9] Sea  $\{\chi_n(x), n \in \mathbb{N}\}$  el núcleo de  $I_n(f)$  y considerémoslo positivo. Entonces la relación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|I_n(f) - f\|_p = 0$$

se satisface para cada  $f \in X^p$  si y solo si existe un punto  $x_0$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\cos(u), x_0) = \cos(x_0) \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\sin(u), x_0) = \sin(x_0). \quad (1.8)$$

## 1.4. Módulos de continuidad y clases de Lipschitz

**Definición 1.17.** Para  $r \in \mathbb{N}$ , una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $h > 0$ , la diferencia de orden  $r$  está definida por

$$\tilde{\Delta}_h^r f(x) = \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} f(x + kh).$$

La diferencia simétrica de orden  $r$  está definida por

$$\Delta_h^r f(x) = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} f(x + r(h/2) - kh).$$

**Definición 1.18.** Para  $r \in \mathbb{N}$ ,  $f \in X^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) y  $t > 0$ , el módulo usual de continuidad (suavidad) de orden  $r$  de  $f$  se define como

$$\omega_r(f, t)_p = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^r f\|_p.$$

Usualmente, para el módulo de continuidad de primer orden, empleamos la notación  $\omega_1(f, t)_p = \omega(f, t)_p$ .

**Lema 1.19.** [10, Lemma 1.5.2] Sean  $1 \leq p \leq \infty$  y  $f \in X^p$ .

1.  $\omega(f, \delta)_p$  es una función monótona creciente de  $\delta$ , con  $\delta \geq 0$ .
2.  $\omega(f, \lambda\delta)_p \leq (1 + \lambda)\omega(f, \delta)_p$  para  $\lambda > 0$  y  $\delta \geq 0$ .
3.  $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f, \delta)_p = 0$ .
4. Si  $\omega(f, \delta)_p = o(\delta)$  cuando  $\delta \rightarrow 0^+$ , entonces  $f$  es constante a.e.

**Definición 1.20.** Si  $1 \leq p \leq \infty$ , una función  $f \in X^p$  cumple una condición de Lipschitz de orden  $\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , denotado por  $f \in Lip(X^p, \alpha)$ ; si  $\omega(f, \delta)_p = O(\delta^\alpha)$ . Si  $\omega(f, \delta)_p = o(\delta^\alpha)$  cuando  $\delta \rightarrow 0^+$ , se denota por  $f \in lip(X^p, \alpha)$ .

Para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha > 0$ , la clase  $W_p^{r,\alpha}$  es definida como el conjunto de las funciones  $f \in W_p^r$ , las cuales cumplen que  $\phi^{(r)} \in Lip(X^p, \alpha)$ , donde  $\phi \in AC^{r-1}$  y  $\phi^{(r)} \in X^p$  es tal que  $\phi(x) = f(x)$  a.e.

Para el módulo de continuidad de segundo orden se cumplen propiedades similares a las del Lema 1.19 (véase [10, Lemma 1.5.4]), con algunas variantes en los incisos siguientes:

- $\omega_2(f, \delta)_p \leq 2\omega(f, \delta)_p$ ,
- si  $\omega_2(f, \delta)_p = o(\delta^2)$  cuando  $\delta \rightarrow 0^+$ , entonces  $f$  es constante a.e.

## Capítulo 2

# Operadores de Fejér

### 2.1. Introducción

Para  $n \in \mathbb{N}$  y  $f \in X^1$ , la suma de Fejér de orden  $n$  se define como

$$\sigma_n(f, x) = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) A_k(f, x), \quad (2.1)$$

donde  $A_k(f, x) = a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ . También consideraremos el operador conjugado

$$\tilde{\sigma}_n(f, x) = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) B_k(f, x),$$

donde  $B_k(f, x) = -b_k \cos(kx) + a_k \sin(kx)$ .

Si definimos

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(u),$$

donde  $D_k(u)$  es el núcleo de Dirichlet, se prueba que

$$F_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos(kx),$$

de lo cual obtenemos

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) F_n(u) du. \quad (2.2)$$

La expresión (2.2) se denomina como la integral singular de Fejér. La sucesión  $\{F_n(x)\}$  es llamada el núcleo de Fejér.

Como  $\{F_n(x)\}$  satisface que [10, pag. 43], para cualquier  $\delta$  fijo, con  $0 < \delta < \pi$ ,

$$\sup_{\delta \leq |u| \leq \pi} |F_n(u)| \leq \frac{1}{(n+1) \operatorname{sen}^2(\delta/2)},$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\delta \leq |u| \leq \pi} |F_n(u)| = 0, \quad (0 < \delta < \pi).$$

Por lo tanto,  $\{F_n(x)\}$  es una identidad aproximada.

Como una consecuencia directa del Teorema 1.10 se tiene el resultado siguiente:

**Corolario 2.1.** *Si  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y  $f \in X^p$ , entonces  $\|\sigma_n(f)\|_p \leq \|f\|_p$ . Además,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n(f) - f\|_p = 0.$$

**Corolario 2.2.** [10, Corollary 1.4.7] *Si  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y  $f \in X^p$ , entonces para casi todo  $x$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f, x) = f(x) \text{ a.e.} \quad (2.3)$$

**Lema 2.3.** [10, Lemma 1.6.4] *Sea  $\{F_n(x)\}$  el núcleo de Fejér. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  se cumple que:*

1. Para  $0 < \alpha \leq 1$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{1/n} u^\alpha F_n(u) du \leq \frac{1}{n^\alpha} \quad y \quad \frac{1}{2\pi} \int_{1/n}^\pi u^\alpha F_n(u) du \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{1-\alpha} n^\alpha.$$

2. Si  $\alpha = 1$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{1/n}^\pi u^\alpha F_n(u) du \leq \frac{\pi}{2} \frac{\log(n) + \log(\pi)}{n+1}.$$

3. Si  $0 < \alpha \leq 1$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi u^{1+\alpha} F_n(u) du \leq \frac{\pi^2}{2\alpha} \frac{1}{n}.$$

**Corolario 2.4.** [10, Corollary 1.7.2] *Si  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in X^p$  y*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf n \|\sigma_n(f) - f\|_p = 0, \quad (2.4)$$

entonces  $f$  es constante a.e.

## 2.2. Desigualdades fuertes para combinaciones de operadores de Fejér

Para incrementar la velocidad de convergencia de los operadores de Fejér (2.1), se pueden utilizar distintos tipos de combinaciones lineales. Aquí consideraremos las llamadas combinaciones iterativas  $(I - \sigma_n)^r$  donde, como es usual, para un operador  $A$ ,  $A^{r+1} = A(A^r)$  (siempre que esto tenga sentido), e  $I$  es el operador identidad.

Nótese que

$$(I - \sigma_n)^r(f) = \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} \sigma_n^j(f),$$

luego necesitamos propiedades de  $\sigma_n^j$  para obtener representaciones convenientes de los operadores iterativos. Esto se logra con el uso de la Proposición 2.5.

**Proposición 2.5.** *Para cada  $n, r \in \mathbb{N}$  y  $f \in L^1$  tenemos que*

$$\sigma_n^r(f, x) = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^r A_k(f, x).$$

*Demostración.* Por las relaciones de ortogonalidad sabemos que, para  $0 \leq k \leq n$ ,

$$\begin{aligned} a_k(\sigma_n(f)) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(f, t) \cos(kt) dt = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A_k(f, t) \cos(kt) dt \\ &= \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a_k(f, t) \cos^2(kt) dt = \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) a_k(f). \end{aligned}$$

Con argumentos similares, podemos verificar que

$$b_k(\sigma_n(f)) = \left(1 - k/(n+1)\right) b_k(f).$$

Luego  $A_k(\sigma_n(f)) = \left(1 - k/(n+1)\right) A_k(f)$ . Por lo tanto,

$$\sigma_n^2(f) = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) A_k(\sigma_n(f)) = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^2 A_k(f).$$

Usando un argumento inductivo se obtiene el resultado. ■

**Proposición 2.6.** *Para cada  $n, r \in \mathbb{N}$  y  $f \in L^1$  tenemos que*

$$(I - \sigma_n)^r(f) = f - \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k^r}{(n+1)^r}\right) A_k(f).$$

*Demostración.* Tenemos que

$$\begin{aligned}
(I - \sigma_n)^r(f) &= \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} \sigma_n^j(f) = f + \sum_{j=1}^r (-1)^j \binom{r}{j} \sigma_n^j(f) \\
&= f + \sum_{j=1}^r (-1)^j \binom{r}{j} \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^j A_k(f) \\
&= f + \sum_{k=0}^n \left( \sum_{j=1}^r \binom{r}{j} \left(\frac{k}{n+1} - 1\right)^j \right) A_k(f) \\
&= f - \sum_{k=0}^n A_k(f) + \sum_{k=0}^n \left( \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \left(\frac{k}{n+1} - 1\right)^j \right) A_k(f) \\
&= f - \sum_{k=0}^n A_k(f) + \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n+1} - 1 + 1\right)^r A_k(f) \\
&= f - \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k^r}{(n+1)^r}\right) A_k(f).
\end{aligned}$$

■

Usando las Proposiciones 2.5 y 2.6 podemos obtener el resultado siguiente para los polinomios trigonométricos:

**Proposición 2.7.** *Para cada  $n, r \in \mathbb{N}$  y  $T \in \mathbb{T}_n$  se cumple lo siguiente*

$$(I - \sigma_n)^r(T) = \begin{cases} \frac{(-1)^{r/2}}{(n+1)^r} D^r(T) & ; \text{ si } r \text{ es par} \\ \frac{(-1)^{(r-1)/2}}{(n+1)^r} D^r(\tilde{T}) & ; \text{ si } r \text{ es impar.} \end{cases}$$

*Demostración.* Se puede verificar, que para cada polinomio  $T \in \mathbb{T}_n$ ,

$$(I - \sigma_n)(T) = T - \sigma_n(T) = \frac{D(\tilde{T})}{n+1} \tag{2.5}$$

y

$$(I - \sigma_n)^2(T) = -\frac{1}{(n+1)^2} D^2(T). \tag{2.6}$$

Por ejemplo, si  $T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sen(kx))$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
 & (I - \sigma_n)(T(x)) \\
 &= a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)) - a_0 - \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)) \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n+1} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)).
 \end{aligned}$$

Pero

$$D(\tilde{T}(x)) = D\left(\sum_{k=1}^n (-b_k \cos(kx) + a_k \operatorname{sen}(kx))\right) = \sum_{k=1}^n k (b_k \operatorname{sen}(kx) + a_k \cos(kx)).$$

Dado que  $(I - \sigma_n)(T)$  es un operador lineal, para probar la Proposición, podemos considerar solo el caso  $T(x) = a \cos(kx) + b \operatorname{sen}(kx)$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $1 \leq k \leq n$ . A este respecto, de la Proposición 2.6 tenemos que

$$(I - \sigma_n)^m(T) = \frac{k^m}{(n+1)^m} T.$$

Si  $r$  es par, entonces usando (2.6), por inducción obtenemos lo siguiente

$$(I - \sigma_n)^{r+2}(T) = \frac{(-1)^{r/2}}{(n+1)^r} (I - \sigma_n)^2(D^r(T)) = \frac{(-1)^{(r+2)/2}}{(n+1)^{r+2}} D^{r+2}(T).$$

Si  $r > 1$  es impar, entonces usando (2.5), se tiene que

$$\begin{aligned}
 (I - \sigma_n)^r(T) &= (I - \sigma_n)^{r-1}((I - \sigma_n)(T)) = \frac{1}{n+1} (I - \sigma_n)^{r-1}(D(\tilde{T})) \\
 &= \frac{(-1)^{(r-1)/2}}{(n+1)^r} D^{r-1}(D(\tilde{T})) = \frac{(-1)^{(r-1)/2}}{(n+1)^r} D^r(\tilde{T}).
 \end{aligned}$$

■

Para la prueba del Teorema 2.9 necesitamos un resultado conocido.

**Proposición 2.8.** [35] Para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{(k!)^2}{(2k)!} < \frac{\sqrt{\pi(k+1/2)}}{2^{2k}} < \frac{\pi\sqrt{\pi(2k+1)}}{2^{2k}\sqrt{2}}. \quad (2.7)$$

**Teorema 2.9.** Si  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $f \in X^p$  y  $n, r \in \mathbb{N}$ , con  $r$  par, entonces

$$\frac{1}{2^r + \pi^r(2^r + 1)} \omega_r\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_p \leq \|(I - \sigma_n)^r(f)\|_p \leq (1 + 8r(6 + \ln r)) \omega_r\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_p.$$

*Demostración.* (a) Primera desigualdad. Si  $f \in X^p$ , fijamos  $T \in \mathbb{T}_n$  tal que  $\|f - T\|_p = E_{n,p}(f)$ .

Dado que  $(I - \sigma_n)^r(f) - f \in \mathbb{T}_n$ , tenemos que

$$E_{n,p}(f) = \|f - T\|_p \leq \|f - ((I - \sigma_n)(f) - f)\|_p = \|(I - \sigma_n)(f)\|_p.$$

Usando las propiedades de  $\omega_r$  y la Proposición 2.7 obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \omega_r\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_p &\leq 2^r \|f - T\|_p + \omega_r\left(T, \frac{\pi}{n+1}\right)_p \leq 2^r \|f - T\|_p + \frac{\pi^r}{(n+1)^r} \|D^r(T)\|_p \\ &= 2^r \|f - T\|_p + \pi^r \|(I - \sigma_n)^r(T)\|_p \\ &\leq 2^r \|f - T\|_p + \pi^r \left(2^r \|f - T\|_p + \|(I - \sigma_n)^r(f)\|_p\right) \\ &\leq \left(2^r + \pi(2^r + 1)\right) \|(I - \sigma_n)^r(f)\|_p. \end{aligned}$$

(b) Segunda desigualdad. Sea  $T$  como en la parte (a). Usando las Proposiciones 2.5, 2.7, las propiedades de  $\omega_r$  y la ecuación (1.4) (con  $h = \pi/n$ ), tenemos que

$$\begin{aligned} \|(I - \sigma_n)^r(f)\|_p &\leq \|(I - \sigma_n)^r(f - T)\|_p + \|(I - \sigma_n)^r(T)\|_p \\ &\leq 2^r E_{n,p}(f) + \frac{1}{(n+1)^r} \|D^r(T)\|_p \\ &\leq 2^r E_{n,p}(f) + \frac{1}{(n+1)^r} \left(\frac{n}{2}\right)^r \omega_r\left(T, \frac{\pi}{n}\right)_p \\ &\leq (2^r + 1) E_{n,p}(f) + \frac{1}{2^r} \omega_r\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_p \\ &\leq (2^r + 1) E_{n,p}(f) + \omega_r\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_p. \end{aligned}$$

De [23, Theorem 6.1] sabemos que

$$E_{n,p}(f) \leq \sqrt{r} \left(2 \ln(r) + 12\right) \frac{([r/2]!)^2}{r!} \omega_r\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_p.$$

Usando (2.7) con  $r = 2k$  obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} E_{n,p}(f) &\leq 2\sqrt{r} \left(\ln(r) + 6\right) \frac{\sqrt{r\pi}}{2^r} \omega_r\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_p \\ &= \frac{8r}{2^{r+1}} \left(6 + \ln(r)\right) \omega_r\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_p \end{aligned} \tag{2.8}$$

y

$$\|(I - \sigma_n)^r(f)\|_p \leq (1 + 8r(6 + \ln(r))) \omega_r\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_p.$$

■

### 2.3. Aproximación simultánea

En esta sección presentamos varios resultados relacionados con la aproximación simultánea. En teoría de aproximación, cuando se tiene una sucesión  $\{T_n\}$  de polinomios trigonométricos que convergen a una función  $f \in X^p$ , si la función  $f \in W_p^r$  suele preguntarse si  $\{D^r(T_n)\}$  converge a  $D^r(f)$ . En tal caso se dice que se tiene aproximación simultánea.

Para que se entienda mejor el objetivo de esta sección recordemos un resultado de Favard:

**Teorema 2.10.** [67, pag. 289] *Si  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $r, n \in \mathbb{N}$  y  $g \in W_p^r$ , entonces*

$$E_{n,p}(g) \leq \frac{\pi}{2(n+1)^r} E_{n,p}(D^r(g)) \quad (2.9)$$

y

$$E_{n,p}(\tilde{g}) \leq \frac{\pi}{2(n+1)^r} E_{n,p}(D^r(\tilde{g})). \quad (2.10)$$

Por ejemplo, si para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n$  es el polinomio de la mejor aproximación para  $g \in W_p^r$  queremos estimar

$$\|D^r(g) - D^r(T_n)\|_p.$$

Pero no podemos hacerlo directamente utilizando el Teorema 2.10 ya que, en general,  $D^r(T_n)$  no es el polinomio de la mejor aproximación para  $D^r(g)$ . La pregunta es ¿se podrá acotar  $\|D^r(g) - D^r(T_n)\|_p$  en términos de  $E_{n,p}(D^r(g))$ ? Como demostraremos en el Teorema 2.16 la respuesta a la pregunta es afirmativa.

El Teorema 2.10 no está escrito en la forma usual del teorema de Favard. Pero, como Czipser y Freud notaron [18, pag. 37], las desigualdades presentadas anteriormente pueden ser deducidas de las originales de Favard.

Parece que los principales resultados en aproximación simultánea por polinomios trigonométricos se deben a Czipser y Freud [18]. Ellos consideraron el caso de las funciones continuas, pero (como algunos autores usualmente hacen) sólo explicaron que todos los resultados se cumplen en los espacios  $L^p$  [18, pag. 49-51]. Previamente, Freud [24] obtuvo la estimación

$$\|D(f) - D(T_n)\|_\infty \leq C_r(n^r \|f - T_n\|_\infty + E_{n,\infty}(D^r(f))), \quad f \in C_{2\pi}^r,$$

donde  $T_n \in \mathbb{T}_n$  es el polinomio de la mejor aproximación para  $f$ .

En este trabajo preferimos incluir una prueba completa del Teorema 2.16 por varias razones. Primero, en [18] algunos detalles son omitidos para  $X^p$  con  $1 \leq p \leq \infty$  y no se da información sobre las constantes. Se sigue de nuestra prueba, que las constantes en el Teorema 2.16 no son las mejores posibles, no obstante, en la

aplicación para los operadores de Fejér, proporcionan estimaciones razonables. Con respecto a la prueba del Teorema 2.16 necesitamos algunos hechos auxiliares. La idea original se debe a De la Vallée Poussin [19].

**Definición 2.11.** Sea  $r \in \mathbb{N}$  fijo. Para  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq r$  y  $f \in X^1$  definimos

$$C_{n,r}(f, x) = \frac{1}{[n(1 + 1/r)] - n} \sum_{k=n}^{[n(1+1/r)]-1} S_k(f, x).$$

Tomando en cuenta que  $\tilde{S}_n(f, x) = \sum_{k=1}^n B_k(f, x)$ , tenemos que:

$$\tilde{C}_{n,r}(f, x) = \frac{1}{[n(1 + 1/r)] - n} \sum_{k=n}^{[n(1+1/r)]-1} \tilde{S}_k(f, x).$$

Veamos algunas de las propiedades de  $C_{n,r}(f, x)$  dadas en [18, pag. 46].

**Proposición 2.12.** Sean  $r \in \mathbb{N}$  fijo y  $q = 1 + 1/r$ . Si  $f \in L^1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y

$$I_{n,r}(t) = \frac{1}{[n/r]} \frac{([n(2 + 1/r)]t/2)([n/r]t/2)}{2(t/2)},$$

entonces  $C_{n,r}(f, x) \in \mathbb{T}_{[nq]-1}$  y

$$C_{n,r}(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) I_{n,r}(t) dt.$$

*Demostración.* El hecho de que  $C_{n,r}(f, x) \in \mathbb{T}_{[nq]-1}$  se sigue de la definición de  $S_k(f, x)$ .

La expresión

$$C_{n,r}(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) I_{n,r}(t) dt$$

es un caso especial de los operadores de De la Vallée Poussin. ■

**Proposición 2.13.** Si  $r, n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq r$ ,  $f, \tilde{f} \in L^1$ ,  $g \in W_1^1$  y  $T_n \in \mathbb{T}_n$ , entonces

$$C_{n,r}(\tilde{f}, x) = \tilde{C}_{n,r}(f, x), \quad C_{n,r}(g', x) = \frac{d}{dx} C_{n,r}(g, x)$$

y  $C_{n,r}(T_n, x) = T_n(x)$ .

*Demostración.* Tenemos que

$$C_{n,r}(\tilde{f}, x) = \frac{1}{[n(1 + 1/r)] - n} \sum_{k=n}^{[n(1+1/r)]-1} S_k(\tilde{f}, x)$$

$$= \frac{1}{[n(1+1/r)] - n} \sum_{k=n}^{[n(1+1/r)]-1} \tilde{S}_k(f, x) = \tilde{C}_{n,r}(f, x).$$

La igualdad  $C_{n,r}(g', x) = \frac{d}{dx} C_{n,r}(g, x)$  se sigue de [10, Proposition 1.1.15].

Para la tercera igualdad recordemos que, para  $k, n \in \mathbb{N}$  con  $k \geq n$  y  $T_n \in \mathbb{T}_n$ ,  $S_k(T_n, x) = T_n$ . ■

El resultado siguiente da un estimado de la norma del operador  $C_{n,r}$ .

**Proposición 2.14.** *Si  $r, n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq r$ , entonces*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |I_{n,r}(t)| dt \leq 3 + \frac{1}{r} + \ln(2r).$$

*Demostración.* Primero utilizamos la identidad

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |I_{n,r}(t)| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |I_{n,r}(2t)| dt.$$

Dividimos el intervalo  $[0, \pi/2]$  en los subintervalos siguientes:  $A(1) = [0, \pi/(2n)]$ ,

$$A(2) = [\pi/(2n), \pi/(2[n/r])] \quad \text{y} \quad A(3) = [\pi/(2[n/r]), \pi/2].$$

Observe que

$$1 \leq n/r \leq n \quad \text{y} \quad 1 \leq [n/r] \leq n.$$

En el resto de la prueba suponemos que  $0 \leq x \leq \pi/2$ .

Tomando en cuenta que  $|\sen(nx)| \leq n \sen x$ , obtenemos que

$$\frac{2}{\pi} \int_{A(1)} |I_{n,r}(2t)| dt \leq \frac{2}{\pi [n/r]} [n(2+1/r)] [n/r] \int_0^{\pi/(2n)} dt \leq 2 + 1/r.$$

Para acotar la integral en el intervalo  $A(2)$ , nótese que si  $n \geq \max\{2, r\}$  y  $n = qr + \theta$ , con  $q \in \mathbb{N}$  y  $\theta \in [0, 1)$ , entonces  $2\theta < 2 \leq n = qr + \theta$ . Por lo tanto,  $qr > \theta$  y  $n = qr + \theta < 2rq = 2r[n/r]$ . Dado que  $2x \leq \pi \sen x$ , tenemos que,

$$\frac{2}{\pi} \int_{A(2)} |I_{n,r}(2t)| dt \leq \frac{2}{\pi [n/r]} \frac{\pi}{2} [n/r] \int_{\pi/(2n)}^{\pi/(2[n/r])} \frac{dt}{t} = \ln \frac{n}{[n/r]} < \ln 2 + \ln r.$$

Finalmente,

$$\frac{2}{\pi} \int_{A(3)} |I_{n,r}(2t)| dt \leq \frac{2}{\pi [n/r]} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \int_{\pi/(2[n/r])}^{\pi/2} \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{\pi [n/r]} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{2[n/r]}{\pi} = 1.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |I_{n,r}(t)| dt \leq 3 + \frac{1}{r} + \ln(2r). \quad \blacksquare$$

**Proposición 2.15.** Si  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $f \in X^p$  y  $n, r \in \mathbb{N}$  con  $n \geq \max\{2, r\}$ , entonces

$$\|f - C_{n,r}(f)\|_p \leq \left(4 + \frac{1}{r} + \ln(2r)\right) E_{n,p}(f).$$

*Demostración.* Si  $T \in \mathbb{T}_n$  y  $\|f - T\|_p = E_{n,p}(f)$ , entonces

$$\begin{aligned} \|f - C_{n,r}(f)\|_p &= \|f - T - C_{n,r}(f - T)\|_p \\ &\leq (1 + \|C_{n,r}\|_1) \|f - T\|_p \\ &\leq \left(4 + \frac{1}{r} + \ln(2r)\right) E_{n,p}(f). \end{aligned}$$

■

**Teorema 2.16.** Suponga que  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $r, n \in \mathbb{N}$  y  $n \geq \max\{2, r\}$ .

1. Si  $g \in W_p^r$ ,  $T \in \mathbb{T}_n$  y  $\|g - T\|_p = E_{n,p}(g)$ , entonces

$$\|D^r(g) - D^r(T)\|_p \leq \left(4 + \frac{1}{r} + \ln(2r)\right) \left(1 + \frac{e\pi}{2}\right) E_{n,p}(D^r(g)).$$

2. Si  $g, \tilde{g} \in W_p^r$ ,  $T \in \mathbb{T}_n$  y  $\|g - T\|_p = E_{n,p}(g)$ , entonces

$$\|D^r(\tilde{g}) - D^r(\tilde{T})\|_p \leq \left(4 + \frac{1}{r} + \ln(2r)\right) \left(E_{n,p}(D^r(\tilde{g})) + \frac{e\pi}{2} E_{n,p}(D^r(g))\right).$$

*Demostración.* Sea  $C_{n,r}$  como en la Definición 2.11. Notemos que

$$([n(1 + 1/r)] - 1)^r < n^r \left(1 + \frac{1}{r}\right)^r < en^r, \quad n \geq r.$$

De las Proposiciones 2.13, 2.14 y 2.15 obtenemos las desigualdades siguientes:

$$\|C_{n,r}(g) - T\|_p = \|C_{n,r}(g - T)\|_p \leq \left(4 + \frac{1}{r} + \ln(2r)\right) \|g - T\|_p$$

$$\leq \left(4 + \frac{1}{r} + \ln(2r)\right) \frac{\pi}{2(n+1)^r} E_{n,p}(D^r(g)),$$

$$\|D^r(g) - C_{n,r}(D^r(g))\|_p \leq \left(4 + \frac{1}{r} + \ln(2r)\right) E_{n,p}(D^r(g))$$

y

$$\begin{aligned} \|D^r(C_{n,r}(g)) - D^r(T)\|_p &\leq ([n(1 + 1/r)] - 1)^r \|C_{n,r}(g) - T\|_p \\ &\leq \frac{e\pi}{2} \left(4 + \frac{1}{r} + \ln(2r)\right) E_{n,p}(D^r(g)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|D^r(g) - D^r(T)\|_p &\leq \|D^r(g) - C_{n,r}(D^r(g))\|_p + \|D^r(C_{n,r}(g)) - D^r(T)\|_p \\ &\leq \left(4 + \frac{1}{r} + \ln(2r)\right) \left(1 + \frac{e\pi}{2}\right) E_{n,p}(D^r(g)). \end{aligned}$$

Para la función conjugada, consideramos las relaciones

$$C_{n,r}(D^r(\tilde{g})) = D^r(\tilde{C}_{n,r}(g))$$

y

$$\begin{aligned} \|D^r(\tilde{g}) - D^r(\tilde{T})\|_p &\leq \|D^r(\tilde{g}) - C_{n,r}(D^r(\tilde{g}))\|_p + \|D^r(\tilde{C}_{n,r}(g) - \tilde{T})\|_p \\ &\leq \left(4 + \frac{1}{r} + \ln(2r)\right) E_{n,p}(D^r(\tilde{g})) + en^r \|C_{n,r}(g) - T\|_p \\ &\leq \left(4 + \frac{1}{r} + \ln(2r)\right) \left(E_{n,p}(D^r(\tilde{g})) + \frac{e\pi}{2} E_{n,p}(D^r(g))\right), \end{aligned}$$

aquí aplicamos el Teorema 1.13. ■

## 2.4. Teoremas del tipo Voronovskaya

Para los operadores de Fejér se conoce una versión cualitativa del teorema de Voronovskaya: Zamansky [72, Theorem 14] probó que, si  $f \in C_{2\pi}^1$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(n+1)(\tilde{\sigma}_n(f) - \tilde{f}) + D(f)\|_\infty = 0.$$

También se sabe que, si  $E_n(f)_\infty \leq C/n^r$  [73, Theorem 1],  $r > 1$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|n(\sigma_n(f) - f) + D(\tilde{f})\|_\infty = 0.$$

La extensión de la ecuación anterior a los espacios  $X^p$ ,  $1 < p < \infty$ , fue dada por Butzer y Görlich en [9, pag. 386].

En el resultado siguiente presentamos una versión cuantitativa de los teoremas del tipo Voronovskaya para los operadores de Fejér.

**Teorema 2.17.** *Si  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $f, \tilde{f} \in W_p^1$  y  $n > 1$ , entonces*

$$\|(n+1)(\sigma_n(f) - f) + D(\tilde{f})\|_p \leq (1+3e)\pi E_{n,p}(D(f)) + 6 E_{n,p}(D(\tilde{f})),$$

y

$$\|(n+1)(\tilde{\sigma}_n(f) - \tilde{f}) - D(f)\|_p \leq (1+3e)\pi E_{n,p}(D(\tilde{f})) + 6 E_{n,p}(D(f)).$$

*Demostración.* Si  $T_n \in \mathbb{T}_n$  satisfice que  $E_{n,p} = \|f - T_n\|_p$ , considerando la Proposición 2.7, el Teorema 2.16 y la ecuación (2.9) tenemos que

$$\begin{aligned} \left\| \sigma_n(f) - f + \frac{D(\tilde{f})}{n+1} \right\|_p &= \left\| \sigma_n(f - T_n) - (f - T_n) - \frac{D(\tilde{f}) - D(\tilde{T}_n)}{n+1} \right\|_p \\ &\leq 2E_{n,p}(f) + \frac{5+\ln(2)}{n+1} \left( E_{n,p}(D(\tilde{f})) + \frac{e\pi}{2} E_{n,p}(D(f)) \right) \\ &\leq \frac{\pi}{n+1} E_{n,p}(D(f)) + \frac{5+\ln(2)}{n+1} \left( E_{n,p}(D(\tilde{f})) + \frac{e\pi}{2} E_{n,p}(D(f)) \right) \\ &\leq (1 + 3e) \frac{\pi}{n+1} E_{n,p}(D(f)) + \frac{6}{n+1} E_{n,p}(D(\tilde{f})). \end{aligned}$$

Sea  $g = \tilde{f}$ . Vamos a verificar que  $\tilde{\sigma}_n(f) = \sigma_n(g)$  a.e y  $D(\tilde{g})(x) = -D(f)(x)$  a.e. En efecto, si

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k(kx)),$$

entonces

$$\tilde{f}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos(kx) + a_k(kx)).$$

De aquí que

$$\tilde{\sigma}_n(f, x) = \sum_{k=1}^n \left( 1 - \frac{k}{n+1} \right) (-b_k \cos(kx) + a_k(kx)) = \sigma_n(\tilde{f}, x).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} D(f, x) &\sim \sum_{k=1}^{\infty} k(b_k \cos(kx) - a_k(kx)), \\ \tilde{g}(x) &\sim - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k(kx)) \end{aligned}$$

y

$$D(\tilde{g}, x) \sim - \sum_{k=1}^{\infty} k(-b_k \cos(kx) + a_k(kx)) \sim -D(f, x).$$

Por lo tanto,

$$\tilde{\sigma}_n(f) - \tilde{f} - \frac{D(f)}{n+1} = \sigma_n(g) - g + \frac{D(\tilde{g})}{n+1}.$$

Dado que  $g = \tilde{f} \in W_p^1$  y  $\tilde{g} = -f \in W_p^1$ , tenemos que

$$\|(n+1)(\tilde{\sigma}_n(f) - \tilde{f} + D(f))\| \leq \pi(1 + 3e) E_{n,p}(D(g)) + 6 E_{n,p}(D(\tilde{g}))$$

$$= \pi(1 + 3e) E_{n,p}(D(\tilde{f})) + 6 E_{n,p}(D(f))$$

y esto prueba el resultado. ■

El corolario siguiente es una consecuencia simple del teorema anterior. Recordemos que, para  $1 < p < \infty$ , el elemento  $\tilde{f}$  siempre existe.

**Corolario 2.18.** *Si  $1 < p < \infty$  y  $f \in W_p^1$ , entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(n+1)(\sigma_n(f) - f) + D(\tilde{f})\|_p = 0.$$

Veamos un resultado similar al Teorema 2.17 para los operadores  $(I - \sigma_n)^r$ . Consideraremos solamente el caso cuando  $r$  es par.

**Teorema 2.19.** *Si  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $r \in \mathbb{N}$  es par,  $f \in W_p^r$  y  $n \geq r$ , entonces*

$$\|(n+1)^r (I - \sigma_n)^r(f) - (-1)^{r/2} D^r(f)\|_p \leq (2^{r+1} + 7(5 + \ln(2r))) E_{n,p}(D^r(f)).$$

*Demostración.* Si  $T \in \mathbb{T}_n$  es tal que  $E_{n,p}(f) = \|f - T_n\|_p$ , de la Proposición 2.7 se infiere que

$$(I - \sigma_n)^r(f) - \frac{(-1)^{r/2}}{(n+1)^r} D^r(f) = (I - \sigma_n)^r(f - T) - \frac{(-1)^{r/2}}{(n+1)^r} D^r(f - T_n).$$

Tomado en cuenta la condición  $n \geq r$ , se sigue de (2.9) y el Teorema 2.16, que

$$\begin{aligned} \|(I - \sigma_n)^r(f) - \frac{(-1)^{r/2}}{(n+1)^r} D^r(f)\|_p &\leq 2^r E_{n,p}(f) + \frac{1}{(n+1)^r} \|D^r(f - T_n)\|_p \\ &\leq \frac{2^{r-1}\pi}{(n+1)^r} E_{n,p} D^r(f) + \left(4 + \frac{1}{r} + \ln(2r)\right) \left(1 + \frac{e\pi}{2}\right) \frac{1}{(n+1)^r} E_{n,p} D^r(f) \\ &\leq \frac{2^{r-1}\pi}{(n+1)^r} E_{n,p} D^r(f) + \left(5 + \ln(2r)\right) \frac{(1+2e)}{(n+1)^r} E_{n,p} D^r(f) \\ &\leq \frac{1}{(n+1)^r} (2^{r+1} + 7(5 + \ln(2r))) E_{n,p} D^r(f). \end{aligned}$$

Con esto concluimos la demostración del Teorema. ■

## 2.5. Otras observaciones sobre los operadores de Fejér

Necesitamos el resultado siguiente tomado de [3].

**Teorema 2.20.** *Supongamos que  $1 \leq p \leq \infty$ . Si  $n \in \mathbb{N}$  y  $f \in X^p$ , entonces*

$$\frac{1}{2} \|f - \sigma_n(f)\|_p \leq \tilde{K}\left(f, \frac{3}{n+1}\right)_p \leq 4 \|f - \sigma_n(f)\|_p, \quad (2.11)$$

donde  $\tilde{K}(f, t)_p = \inf \{ \|f - g\|_p + t \|(\tilde{g})'\|_p : g, \tilde{g} \in X^p, \tilde{g} \in AC, (\tilde{g})' \in X^p \}$ . Más aún, si  $1 < p < \infty$  y  $f \in X^p$ , entonces

$$\frac{1}{2P(p)} \|f - \sigma_n(f)\|_p \leq \omega_1\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leq 8P(p) \|f - \sigma_n(f)\|_p, \quad (2.12)$$

donde

$$P(p) = \begin{cases} \tan \frac{\pi}{2p}, & \text{si } 1 < p \leq 2, \\ \cot \frac{\pi}{2p}, & \text{si } 2 < p < \infty. \end{cases} \quad (2.13)$$

La estimación siguiente es menos exacta, pero es útil cuando se trabaja con funciones que satisfacen una condición de Lipschitz. Usamos la notación

$$\Omega_1(f, t)_p = \omega_1(f, t)_p + t \int_t^\pi \frac{\omega_1(f, s)_p}{s^2} ds, \quad t > 0. \quad (2.14)$$

**Teorema 2.21.** *Supongamos que  $1 \leq p \leq \infty$ . Si  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $f \in X^p$  y  $\sigma_n$  es el operador de Fejér, entonces*

$$\|f - \sigma_n(f)\|_p \leq \Omega_1\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_p.$$

*Demostración.* Primero, supongamos que  $n \geq 1$ . Dado que

$$|\operatorname{sen}((n+1)t)| \leq (n+1) |\operatorname{sen} t|,$$

para  $t \in [0, \pi/(n+1)]$ , tomando en cuenta la desigualdad generalizada de Minkowski, obtenemos que

$$\begin{aligned} \|f - \sigma_n(f)\|_p &= \left\| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Delta_t^2 f(\cdot) F_n(t) dt \right\|_p \\ &\leq \left\| \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/(n+1)} \Delta_t^2 f(\cdot) F_n(t) dt \right\|_p + \left\| \frac{1}{\pi} \int_{\pi/(n+1)}^\pi \Delta_t^2 f(\cdot) F_n(t) dt \right\|_p \\ &\leq \frac{n+1}{2\pi} \int_0^{\pi/(n+1)} \omega_2(f, t)_p dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/(n+1)}^\pi \frac{\omega_2(f, t)_p}{(n+1)^2 (t/2)} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \omega_2\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_p \frac{n+1}{2\pi} \int_0^{\pi/(n+1)} dt + \frac{2\pi}{(n+1)} \int_{\pi/(n+1)}^{\pi} \frac{\omega_2(f, t)_p}{t^2} dt \\
 &= \frac{1}{2} \omega_2\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_p + \frac{2\pi}{(n+1)} \int_{\pi/(n+1)}^{\pi} \frac{\omega_2(f, t)_p}{t^2} dt \\
 &\leq \omega_1\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_p \frac{n+1}{\pi} \int_0^{\pi/(n+1)} dt + \frac{\pi}{(n+1)} \int_{\pi/(n+1)}^{\pi} \frac{\omega_1(f, t)_p}{t^2} dt.
 \end{aligned}$$

Una relación similar se cumple también para  $n = 0$ . En efecto, dado que

$$\begin{aligned}
 \sigma_0(f, x) - f(x) &= \frac{a_0(f)}{2} - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) dt - f(x) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) dt - f(x) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \Delta_t^2 f(x) dt,
 \end{aligned}$$

obtenemos lo siguiente:

$$\|\sigma_0(f) - f\|_p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \|\Delta_t^2 f(\circ)\|_p dt \leq \frac{1}{2} \omega_2(f, \pi)_p \leq \omega_1(f, \pi)_p = \Omega_1(f, \pi)_p. \quad (2.15)$$

Esto da el resultado. ■

Necesitaremos la proposición siguiente más adelante.

**Proposición 2.22.** *Supongamos que  $1 \leq p \leq \infty$ . Si  $f \in X^p$ , entonces*

$$\frac{\Omega_1(f, t)_p}{t} \leq 2 \frac{\Omega_1(f, s)_p}{s}, \quad 0 < s < t \leq \pi.$$

Más aún, si  $0 < t \leq 1$ ,

$$\Omega_1(f, t)_p \leq (2 + \pi)t \int_t^{\pi} \frac{\omega_1(f, v)_p}{v^2} dv.$$

*Demostración.* Se sabe (véase [67, pag. 104]) que, si  $0 < s < t$ , entonces

$$\frac{\omega_1(f, t)_p}{t} \leq 2 \frac{\omega_1(f, s)_p}{s}. \quad (2.16)$$

Dado que la función

$$\theta(t) = \int_t^{\pi} \frac{\omega_1(f, v)_p}{v^2} dv$$

decrece, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_1(f, t)_p}{t} &= \frac{\omega_1(f, t)_p}{t} + \int_t^\pi \frac{\omega_1(f, v)_p}{v^2} dv \leq 2 \frac{\omega_1(f, s)_p}{s} + 2 \frac{s}{s} \int_s^\pi \frac{\omega_1(f, v)_p}{v^2} dv \\ &= \frac{2}{s} \left( \omega_1(f, s)_p + s \int_s^\pi \frac{\omega_1(f, v)_p}{v^2} dv \right) \leq 2 \frac{\Omega_1(f, s)_p}{s}. \end{aligned}$$

Por otro lado, si  $0 < t \leq 1$ , tenemos que  $t \leq 1 < \pi e^{-1/\pi}$ , entonces  $1 < \pi \ln(\pi/t)$ , así

$$\begin{aligned} \frac{\omega_1(f, t)_p}{t} &= \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{\pi} \right) \omega_1(f, t)_p + \frac{\omega_1(f, t)_p}{\pi} \leq \omega_1(f, t)_p \int_t^\pi \frac{dv}{v^2} + \omega_1(f, t)_p \int_t^\pi \frac{1}{v} dv \\ &\leq \int_t^\pi \frac{\omega_1(f, t)_p}{v^2} dv + \int_t^\pi \frac{\omega_1(f, t)_p}{v} dv \\ &= \int_t^\pi \frac{(1+v)\omega_1(f, t)_p}{v^2} dv \leq \int_t^\pi \frac{(1+v)\omega_1(f, v)_p}{v^2} dv, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \Omega_1(f, t)_p &= \omega_1(f, t)_p + t \int_t^\pi \frac{\omega_1(f, v)_p}{v^2} dv \\ &\leq t \int_t^\pi \frac{(1+v)\omega_1(f, v)_p}{v^2} dv + t \int_t^\pi \frac{\omega_1(f, v)_p}{v^2} dv = t \int_t^\pi \frac{(2+v)\omega_1(f, v)_p}{v^2} dv. \end{aligned}$$

■

La primera desigualdad en la Proposición 2.23 fue demostrada por De la Vallée Poussin [19, pag. 34] para funciones continuas, pero los argumentos pueden ser usados en el caso de los espacios  $L^p$ . La última desigualdad está incluida en el Teorema 2.5 de [23].

**Proposición 2.23.** Si  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $f \in X^p$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n > m$  y

$$\mathbb{V}_{n,m}(f, x) = \frac{1}{n-m} \sum_{k=m}^{n-1} S_k(f, x),$$

entonces

$$\|f - \mathbb{V}_{n,m}(f)\|_p \leq \frac{2n}{n-m} E_{m,p}(f) \leq \frac{10n}{n-m} \omega_1\left(f, \frac{2\pi}{m+1}\right)_p.$$

Recordemos que la función máximo entero (techo) de  $x$  le asigna a  $x$  el menor entero mayor o igual a  $x$  y es denotado por  $[x]$ .

**Teorema 2.24.** Si  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $f, \tilde{f} \in X^p$  y  $n \in \mathbb{N}_0$ , entonces

$$\|(I - \sigma_n)(f)\|_p \leq 48\omega_1\left(f, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p + 25\omega_1\left(\tilde{f}, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p \quad (2.17)$$

y

$$\|(I - \sigma_n)(\tilde{f})\|_p \leq 48\omega_1\left(\tilde{f}, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p + 25\omega_1\left(f, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p. \quad (2.18)$$

*Demostración.* Probaremos la primera desigualdad considerando tres casos:

- (i) Si  $n = 0$ , de (2.15) obtenemos que  $\|\sigma_0(f) - f\|_p \leq \omega_1(f, \pi)_p$ .
- (ii) Supongamos que  $1 \leq n < 6$ . De [10, pag. 69], sabemos que

$$\|f - \sigma_n(f)\|_p \leq \frac{(3 + 2\sqrt{2})}{4}\omega_2\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)_p,$$

dado que  $2\sqrt{n} \leq n + 1$ , tomando en cuenta (2.16), obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \|f - \sigma_n(f)\|_p &\leq \frac{(3 + 2\sqrt{2})}{4}\omega_2\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)_p \\ &\leq \frac{(3 + 2\sqrt{2})}{2}\omega_1\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)_p \\ &\leq \frac{(3 + 2\sqrt{2})}{2}\frac{n+1}{\sqrt{n}}\omega_1\left(f, \frac{2\pi}{n+1}\right)_p \\ &\leq \frac{(3 + 2\sqrt{2})}{2}\frac{6}{\sqrt{5}}\omega_1\left(f, \frac{2\pi}{n+1}\right)_p \\ &\leq 8\omega_1\left(f, \frac{2\pi}{n+1}\right)_p. \end{aligned}$$

(iii) Asumamos que  $n \geq 6$ . Sea  $g = \mathbb{V}_{n,m}(f)$ , con  $m = \lceil n/2 \rceil$ . Dado que  $(n-1)/2 \leq n - m$ , tenemos que

$$\frac{n}{n-m} \leq \frac{2n}{n-1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{m+1} \leq \frac{2}{n+2}.$$

Más aún, si  $n \geq 6$ , entonces

$$\frac{n}{n-1} \leq \frac{6}{5} \quad \text{y} \quad \frac{n^2}{n^2-1} \leq \frac{6}{5}.$$

Usando (2.5), la Proposición 2.23 y la ecuación (1.4) (con  $h = \pi/n$ ), tenemos que

$$\|(I - \sigma_n)(f)\|_p \leq \|(I - \sigma_n)(f - g)\|_p + \|(I - \sigma_n)(g)\|_p$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\|f - g\|_p + \frac{1}{(n+1)}\|D(\tilde{g})\|_p \\
&\leq \frac{20n}{n-m}\omega_1\left(f, \frac{2\pi}{m+1}\right)_p + \frac{1}{(n+1)}\binom{n}{2}\omega_1\left(\tilde{g}, \frac{\pi}{n}\right)_p \\
&\leq \frac{40n}{n-1}\omega_1\left(f, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p + \frac{n}{n+1}\|\tilde{f} - \tilde{g}\|_p + \frac{1}{2}\omega_1\left(\tilde{f}, \frac{\pi}{n}\right)_p \\
&= \frac{40n}{n-1}\omega_1\left(f, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p + \frac{n}{n+1}\|\tilde{f} - \mathbb{V}_{n,m}(\tilde{f})\|_p + \frac{1}{2}\omega_1\left(\tilde{f}, \frac{\pi}{n}\right)_p \\
&\leq 48\omega_1\left(f, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p + \frac{20n^2}{n^2-1}\omega_1\left(\tilde{f}, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p + \frac{1}{2}\omega_1\left(\tilde{f}, \frac{2\pi}{n+1}\right)_p \\
&\leq 48\omega_1\left(f, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p + 24\omega_1\left(\tilde{f}, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p + \frac{1}{2}\omega_1\left(\tilde{f}, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p \\
&\leq 48\omega_1\left(f, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p + 25\omega_1\left(\tilde{f}, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p.
\end{aligned}$$

Para la segunda desigualdad, sustituyendo  $f$  por  $\tilde{f}$  en (2.17), tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\|(I - \sigma_n)(\tilde{f})\|_p &\leq 48\omega_1\left(\tilde{f}, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p + 25\omega_1\left(\tilde{(\tilde{f})}, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p \\
&= 48\omega_1\left(\tilde{f}, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p + 25\omega_1\left(f, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p.
\end{aligned}$$

■

## Capítulo 3

# Operadores de Jackson

### 3.1. Introducción

Para  $r, n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , y  $f \in X^1$ , el operador de Jackson-Matsuoka se define como

$$\mathbb{J}_{rn-r}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) J_{rn-r}(t) dt, \quad (3.1)$$

donde

$$J_{rn-r}(t) = \frac{1}{\gamma_{rn-r}} \left( \frac{\text{sen}(nt/2)}{\text{sen}(t/2)} \right)^{2r}$$

y  $\gamma_{rn-r}$  se toma de la condición

$$\frac{1}{\gamma_{rn-r}} \left( \frac{\text{sen}(nt/2)}{\text{sen}(t/2)} \right)^{2r} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{r(n-1)} \mu_{k,n,r} \cos(kt).$$

En efecto, como la expresión entre paréntesis es un polinomio par de grado  $r(n-1)$ , existen constantes  $c_k$ ,  $0 \leq k \leq r(n-1)$ , tales que

$$\left( \frac{\text{sen}(nt/2)}{\text{sen}(t/2)} \right)^{2r} = c_0 + \sum_{k=1}^{r(n-1)} c_k \cos(kt).$$

Nótese que

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{\text{sen}(nt/2)}{\text{sen}(t/2)} \right)^{2r} dt \neq 0.$$

Entonces basta tomar  $\gamma_{rn-r} = 2c_0$ .

Nuestro propósito en este capítulo es presentar teoremas cuantitativos del tipo Voronovskaya para los operadores  $\mathbb{J}_{2n-2}$  y  $\mathbb{J}_{3n-3}$ . Estas tareas se realizan en la Sección 3.3. En la Sección 3.2 presentamos algunos hechos conocidos y un resultado general para operadores polinomiales trigonométricos positivos.

### 3.2. Resultados generales para polinomios positivos

La convolución de dos funciones  $f$  y  $g$  en  $L^1$ ,  $g$  una función par, se define como

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t))g(t)dt.$$

El resultado principal de esta sección es el Teorema 3.3.

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  fijemos un núcleo

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_{k,n} \cos(kx) \geq 0. \quad (3.2)$$

El momento algebraico de orden  $2r$  de  $Q_n(x)$  está definido por

$$M_{2r}(Q_n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} v^{2r} Q_n(v)dv. \quad (3.3)$$

La acotación que se presenta en la Proposición 3.1 aparece en diferentes trabajos, véase [31, Lemma 1] y [10, Lemma 1.5.7].

**Proposición 3.1.** *Si  $Q_n$  está definido por (3.2), entonces*

$$2(1 - \lambda_{1,n}) \leq M_2(Q_n) \leq \frac{\pi^2}{2}(1 - \lambda_{1,n})$$

y

$$M_4(Q_n) \leq \frac{\pi^4}{8} \left( 2(1 - \lambda_{1,n}) - \frac{1}{2}(1 - \lambda_{2,n}) \right).$$

La proposición siguiente es bien conocida, incluimos una demostración para beneficio de los lectores.

**Proposición 3.2.** *Suponga que  $1 \leq p \leq \infty$ . Sean  $Q_n(t)$  definido por (3.2) y  $K_n(f) = f * Q_n$ . Si  $g \in W_p^2$ , entonces*

$$\|g - K_n(g)\|_p \leq \frac{\pi^2}{2}(1 - \lambda_{1,n})\|D^2(g)\|_p.$$

*Demostración.* Dado que  $Q_n$  es una función par

$$\begin{aligned} K_n(f, x) - f(x) &= K_n(f, x) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)Q_n(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) - 2f(x) + f(x-t))Q_n(t) dt. \end{aligned}$$

Si denotamos  $\Delta_t^2 g(x) = g(x+t) - 2g(x) + g(x-t)$ , usando la desigualdad generalizada de Minkowski obtenemos,

$$\begin{aligned} \|g - K_n(g)\|_p &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/p} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Delta_t^2 g(x) Q_n(t) dt \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} Q_n(t) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_t^2 g(x)|^p dx \right)^{1/p} dt \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} Q_n(t) \omega_2(g, t) dt \\ &\leq \|D^2(g)\|_p \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 Q_n(t) dt \\ &= M_2(Q_n) \|D^2(g)\|_p \\ &\leq \frac{\pi^2}{2} (1 - \lambda_{1,n}) \|D^2(g)\|_p \end{aligned}$$

donde, para obtener la última desigualdad se usó la Proposición 3.1. ■

**Teorema 3.3.** *Suponga que  $1 \leq p \leq \infty$  y la sucesión  $\{Q_n\}$  está dada por (3.2). Si  $K_n(f) = f * Q_n$ , entonces para cada  $g \in W_p^2$  se cumple que*

$$\begin{aligned} \left\| \frac{K_n(g) - g}{\Lambda_n} - \frac{D^2(g)}{2} \right\|_p &\leq \left( 1 + \frac{\pi^3}{8\sqrt{2}\sqrt{1 - \lambda_{1,n}}} \sqrt{4 - \frac{1 - \lambda_{2,n}}{1 - \lambda_{1,n}}} \right) \\ &\quad \times \omega_1 \left( D^2(g), \sqrt{1 - \lambda_{1,n}} \right)_p, \end{aligned}$$

donde  $\Lambda_n = M_2(Q_n)$  es el momento algebraico definido por (3.3).

*Demostración.* Presentamos la prueba para los espacios  $X^p$  con  $1 < p < \infty$ .

Para  $x, v \in [-\pi, \pi]$ , sea

$$\Theta_{x,v}(s) = \begin{cases} \chi_{[x, x+v]}(s), & v \geq 0, \\ \chi_{[x+v, x]}(s), & v < 0, \end{cases}$$

donde  $\chi_A(s)$  es la función característica del conjunto  $A$ .

Dado que

$$\begin{aligned} g(x+v) &= g(x) + D^1(g, x)v + \int_x^{x+v} (x+v-s)D^2(g, s)ds, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} vQ_n(v)dv &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} vQ_n(v)dv + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (-v)Q_n(-v)dv = 0, \end{aligned}$$

ya que  $Q_n$  es un polinomio trigonométrico par, y

$$\int_x^{x+v} (x+v-s)ds = \frac{v^2}{2},$$

tenemos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x+v)Q_n(v)dv - g(x) - \frac{D^2(g,x)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v^2Q_n(v)dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( g(x+v) - g(x) - D^2(g,x)\frac{v^2}{2} \right) Q_n(v)dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( g(x+v) - g(x) - D^1(g,x)v - D^2(g,x)\frac{v^2}{2} \right) Q_n(v)dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_x^{x+v} (x+v+s)D^2(g,s) - D^2(g,x)(x+v+s)ds \right) Q_n(v)dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_x^{x+v} (x+v+s)(D^2(g,s) - D^2(g,x))ds \right) Q_n(v)dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \text{sign}(v) \int_{-\pi}^{\pi} \Theta_{x,v}(s)(x+v+s)(D^2(g,s) - D^2(g,x))ds \right) Q_n(v)dv. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x+v)Q_n(v)dv - g(x) - \frac{D^2(g,x)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v^2Q_n(v)dv \right|^p dx \\ & \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \left| \Theta_{x,v}(s)(x+v-s)(D^2(g,s) - D^2(g,x)) \right| ds \right) Q_n(v)dv \right|^p dx. \end{aligned}$$

Si

$$F(x,v) = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \Theta_{x,v}(s)(x+v-s)(D^2(g,s) - D^2(g,x)) \right| ds,$$

se sigue de la desigualdad generalizada de Minkowski que

$$\begin{aligned} \pi \|K_n(f) - f - (\Lambda_n/2)D^2(g)\|_p & \leq \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(v) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (F(x,v))^p dx \right)^{1/p} dv \\ & = \int_0^{\pi} Q_n(v) \left( \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (F(x,v))^p dx \right)^{1/p} + \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (F(x,-v))^p dx \right)^{1/p} \right) dv. \end{aligned}$$

Pero, si  $0 \leq v \leq \pi$ , usamos otra vez la desigualdad generalizada de Minkowski para obtener lo siguiente

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (F(x, v))^p dx \right)^{1/p} \\
 &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_x^{x+v} |(x+v-s)(D^2(g, s) - D^2(g, x)) ds| \right)^p dx \right)^{1/p} \\
 &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_0^v |(v-w)(D^2(g, x+w) - D^2(g, x)) dw| \right)^p dx \right)^{1/p} \\
 &\leq \int_0^v (v-w) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D^2(g, x+w) - D^2(g, x)|^p dx \right)^{1/p} dw \\
 &\leq \int_0^v (v-w) \omega_1(g'', w)_p dw = \frac{1}{2} v^2 \omega_1(D^2(g), v)_p.
 \end{aligned}$$

Si  $-\pi \leq v < 0$ , entonces  $0 < -v \leq \pi$ , luego

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (F(x, v))^p dx \right)^{1/p} \\
 &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_x^{x+v} |(x+v-s)(D^2(g, s) - D^2(g, x)) ds| \right)^p dx \right)^{1/p} \\
 &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_x^{x-v} |(x-v-s)(D^2(g, s) - D^2(g, x)) ds| \right)^p dx \right)^{1/p} \\
 &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_0^{-v} |(-v-w)(D^2(g, x+w) - D^2(g, x)) dw| \right)^p dx \right)^{1/p} \\
 &\leq \int_0^{-v} (-v-w) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D^2(g, x+w) - D^2(g, x)|^p dx \right)^{1/p} dw \\
 &\leq \int_0^{-v} (-v-w) \omega_1(g'', w)_p dw = \frac{1}{2} v^2 \omega_1(D^2(g), -v)_p.
 \end{aligned}$$

Así, tomando en cuenta (3.3) y la Proposición 3.1, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \|K_n(f) - f - (\Lambda_n/2)D^2(g)\|_p &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} Q_n(v) v^2 \omega_1(D^2(g), v)_p dv \\
 &\leq \omega_1 \left( D^2(g), \sqrt{1 - \lambda_{1,n}} \right)_p \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} Q_n(v) v^2 \left( 1 + \frac{v}{\sqrt{1 - \lambda_{1,n}}} \right) dv \\
 &\leq \omega_1 \left( D^2(g), \sqrt{1 - \lambda_{1,n}} \right)_p \left( \Lambda_n + \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_{1,n}}} \sqrt{M_2(Q_n)M_4(Q_n)} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \omega_1 \left( D^2(g), \sqrt{1 - \lambda_{1,n}} \right)_p \left( \Lambda_n + \sqrt{\frac{\pi^2 \pi^4}{2 \cdot 8} \left( 2(1 - \lambda_{1,n}) - \frac{1}{2}(1 - \lambda_{2,n}) \right)} \right) \\ &= \omega_1 \left( D^2(g), \sqrt{1 - \lambda_{1,n}} \right)_p \left( \Lambda_n + \frac{\pi^3 \sqrt{(1 - \lambda_{1,n})}}{4\sqrt{2}} \sqrt{4 - \frac{1 - \lambda_{2,n}}{1 - \lambda_{1,n}}} \right). \end{aligned}$$

Hemos probado que

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{\Lambda_n} \left( K_n(g) - g \right) - \frac{1}{2} D^2(g) \right\|_p \\ &\leq \left( 1 + \frac{\pi^3}{4\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1 - \lambda_{1,n}}}{\Lambda_n} \sqrt{4 - \frac{1 - \lambda_{2,n}}{1 - \lambda_{1,n}}} \right) \omega_1 \left( D^2(g), \sqrt{1 - \lambda_{1,n}} \right)_p \\ &\leq \left( 1 + \frac{\pi^3}{8\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_{1,n}}} \sqrt{4 - \frac{1 - \lambda_{2,n}}{1 - \lambda_{1,n}}} \right) \omega_1 \left( D^2(g), \sqrt{1 - \lambda_{1,n}} \right)_p. \end{aligned}$$

■

**Observación 3.4.** Para una sucesión  $\{Q_n\}$  de polinomios trigonométricos positivos, el Teorema 3.3 es interesante solo en el caso  $\lambda_{1,n} \rightarrow 1$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_{1,n}}} \sqrt{4 - \frac{1 - \lambda_{2,n}}{1 - \lambda_{1,n}}} < \infty. \quad (3.4)$$

### 3.3. Teoremas del tipo Voronovskaya

Para los operadores  $\mathbb{J}_{2n-2}$  se conocen algunas relaciones del tipo Voronovskaya. Por ejemplo, Korovkin [37] probó que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| 2n^2 \left( \mathbb{J}_{2n-2}(f) - f \right) - 3D^2(f) \right\|_{\infty} = 0.$$

Por otro lado, si  $f \in C_{2\pi}$  y  $D^2(f, x)$  existe en un punto  $x$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^2 \left( \mathbb{J}_{2n-2}(f, x) - f(x) \right) = \frac{3}{2} D^2(f, x)$$

(véase [38, pag. 134] y [8, Theorem 6.2]). Además, si  $f \in W_p^2$ ,  $1 < p < \infty$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| n^2 \left( \mathbb{J}_{2n-2}(f) - f \right) - \frac{3}{2} D^2(f) \right\|_p = 0, \quad (3.5)$$

(véase [9, pag. 387]).

Teoremas de carácter local, del tipo Voronovskaya para operadores de Jackson-Matsuoka  $\mathbb{J}_{rn-r}$  fueron probados por Schurer [61, Theorem 22] para  $f \in C_{2\pi}^2$  y

Rathore [58, Lemma 3] (no en una forma cuantitativa). Para los espacios  $X^p$  se conocen estimaciones menos exactas (véase [36, pag. 160]). Un resultado para el caso general fue dado por Matsuoka en [46].

En esta sección presentamos teoremas del tipo Voronovskaya para los operadores de Jackson-Matsuoka  $\mathbb{J}_{2n-2}$  y  $\mathbb{J}_{3n-3}$ . En particular, demostramos que la afirmación (3.5) puede ser mejorada. Al estudiar ambos operadores aparecen algunas diferencias. Para explicarlo de forma clara, recordemos algunos hechos conocidos.

**Proposición 3.5.** [62, Theorem 1] *Para cada  $n \geq 3$ , existen números reales  $\varrho_{k,n}$ ,  $1 \leq k \leq 2n - 2$  tales que*

$$\frac{1}{\gamma_{2n-2}} \left( \frac{\text{sen}(nt/2)}{\text{sen}(t/2)} \right)^4 = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{2n-2} \varrho_{k,n} \cos(kt),$$

con

$$\frac{1}{\gamma_{2n-2}} = \frac{3}{2(2n^3 + n)} \quad \varrho_{1,n} = 1 - \frac{3}{2n^2 + 1}, \quad y \quad \varrho_{2,n} = 1 - \frac{3(4n - 3)}{n(2n^2 + 1)}.$$

Se sigue de la proposición previa que para el operador  $\mathbb{J}_{2n-2}$ , tenemos que

$$\frac{1}{1 - \varrho_{1,n}} \left( 4 - \frac{1 - \varrho_{2,n}}{3(1 - \varrho_{1,n})} \right) = \frac{(2n^2 + 1)}{3} \frac{3}{n}.$$

Por lo tanto, la condición en la ecuación (3.4) no se satisface y el Teorema 3.3 no es útil en este caso.

En la Proposición 3.7 usaremos el Teorema 2.16, inciso 1, para el caso particular  $r = 2$ . Con el objetivo de simplificar la afirmación, es conveniente usar una constante mayor. En particular, consideramos el estimado

$$\left( \frac{9}{2} + \ln 4 \right) \left( 1 + \frac{e\pi}{2} \right) \leq (5.9)(5.27) < 31.05.$$

También necesitamos un resultado auxiliar que se presenta a continuación.

**Proposición 3.6.** [53, Petrov] *Para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in \mathbb{R}$  se cumple que*

$$\begin{aligned} J_{2n-2}(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left( 1 - \frac{k}{\gamma_{2n-2}} - \frac{2n}{\gamma_{2n-2}} k^2 + \frac{1}{\gamma_{2n-2}} k^3 \right) \cos(kx) \\ &+ \frac{1}{3\gamma_{2n-2}} \sum_{k=n+1}^{2n-2} \left( 8n^3 - 2n - (12n^2 - 1)k + 6nk^2 - k^3 \right) \cos(kx). \end{aligned}$$

**Proposición 3.7.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $T \in \mathbb{T}_n$  se cumple que

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{2n-2}(T) &= T + \frac{3}{2n^2+1}T'' - \frac{3}{2n(2n^2+1)}(\tilde{T})' + \frac{3}{2n(2n^2+1)}(\tilde{T})''' \\ &= T + \frac{3D^2(T)}{2n^2+1} + \frac{3(n+1)(\sigma_n - I)(T)}{2n(2n^2+1)} + \frac{3(n+1)}{2n(2n^2+1)}(\sigma_n - I)(D^2(T)), \end{aligned}$$

donde  $\sigma_n$  es el operador de Fejér.

*Demostración.* Sea  $T(x) = \sum_{k=0}^n A_k(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx))$ . Tomando en cuenta la relaciones de ortogonalidad y la Proposición 3.6 tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{2n-2}(T) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(t+x) J_{2n-2}(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^n (a_k \cos(k(t+x)) + b_k \operatorname{sen}(k(t+x))) J_{2n-2}(t) dt \\ &= A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^n a_k \cos(k(t+x)) J_{2n-2}(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^n b_k \operatorname{sen}(k(t+x)) J_{2n-2}(t) dt \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k(t+x)) \left(1 - \frac{k}{\gamma_{2n-2}} - \frac{2nk^2}{\gamma_{2n-2}} + \frac{k^3}{\gamma_{2n-2}}\right) \cos(kt) dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(k(t+x)) \left(1 - \frac{k}{\gamma_{2n-2}} - \frac{2nk^2}{\gamma_{2n-2}} + \frac{k^3}{\gamma_{2n-2}}\right) \cos(kt) dt \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) \left(1 - \frac{k}{\gamma_{2n-2}} - \frac{2nk^2}{\gamma_{2n-2}} + \frac{k^3}{\gamma_{2n-2}}\right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n b_k \operatorname{sen}(kx) \left(1 - \frac{k}{\gamma_{2n-2}} - \frac{2nk^2}{\gamma_{2n-2}} + \frac{k^3}{\gamma_{2n-2}}\right) \\ &= T(x) + \frac{3}{2n(2n^2+1)} D^1(\tilde{T})(x) + \frac{3}{2n^2+1} D^2(T)(x) + \frac{1}{\gamma_{2n-2}} D^3(\tilde{T})(x) \\ &= T(x) + \frac{3D^2(T)(x)}{2n^2+1} - \frac{3(n+1)(\sigma_n - I)(T, x)}{2n(2n^2+1)} - \frac{3(n+1)(\sigma_n - I)(D^2(T), x)}{2n(2n^2+1)}, \end{aligned}$$

donde hemos usado (2.5), la Proposición 3.5 y la identidad  $D^3(\tilde{T}) = (\tilde{M})'$ , con  $M = D^2(T)$ . ■

**Teorema 3.8.** *Suponga que  $1 \leq p \leq \infty$ . Si  $f \in W_p^2$  y  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , entonces*

$$\begin{aligned} \|(2n^2 + 1)(\mathbb{J}_{2n-2}(f) - f) - 3D^2(f)\|_p &\leq 4E_{n,p}(f) + (219 + 47\pi^2)E_{n,p}(D^2(f)) \\ &\quad + 2\|(I - \sigma_n)(f)\|_p + 2\|(I - \sigma_n)(D^2(f))\|_p, \end{aligned}$$

donde  $\sigma_n$  es el operador de Fejér.

*Demostración.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $f \in W_p^2$ , elegimos  $T \in \mathbb{T}_n$  tal que  $E_{n,p}(f) = \|f - T\|_p$ . Observe que

$$\begin{aligned} (2n^2 + 1)(\mathbb{J}_{2n-2}(f) - f) - 3D^2(f) &= (2n^2 + 1)(\mathbb{J}_{2n-2}(T) - T) - 3D^2(f) \\ &\quad + (2n^2 + 1)\left(\mathbb{J}_{2n-2}(f - T) - (f - T)\right) + 3(D^2(T) - D^2(f)). \end{aligned}$$

Estimaremos cada término de la suma anterior por separado.

Según la Proposición 3.7 se cumple que, para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $T \in \mathbb{T}_n$ ,

$$\mathbb{J}_{2n-2}(T) - T - \frac{3}{2n^2 + 1}D^2(T) = -\frac{3}{2n(2n^2 + 1)}D^1(\tilde{T}) + \frac{3}{2n(2n^2 + 1)}D^3(\tilde{T}).$$

Tomando en cuenta (2.5) podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{2n-2}(T) - T - \frac{3}{2n^2 + 1}D^2(T) &= \frac{3(n+1)(\sigma_n - I)(T)}{2n(2n^2 + 1)} + \frac{3(n+1)}{2n(2n^2 + 1)}(I - \sigma_n)(D^2(T)), \end{aligned}$$

donde  $\sigma_n$  es el operador de Fejér.

Si  $n \geq 3$ , entonces

$$\frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 2.$$

Así,

$$\begin{aligned} \|(2n^2 + 1)(\mathbb{J}_{2n-2}(T) - T) - 3D^2(T)\|_p &\leq 2\|(\sigma_n - I)(T)\|_p + 2\|(I - \sigma_n)(D^2(T))\|_p \\ &\leq 4\|T - f\|_p + 2\|(\sigma_n - I)(f)\|_p + 2\|(I - \sigma_n)(D^2(f))\|_p + 4\|D^2(T - f)\|_p \\ &\leq 4E_{n,p}(f) + 2\|(\sigma_n - I)(f)\|_p + 2\|(I - \sigma_n)(D^2(f))\|_p + 125E_{n,p}(D^2(f)). \end{aligned}$$

Por otro lado, dado que  $f - T \in W_p^2$ , como una consecuencia directa de la Proposición 3.2 (recordemos que  $\varrho_{1,n} = 1 - 3/(2n^2 + 1)$ ) sabemos que

$$\begin{aligned} (2n^2 + 1)\|\mathbb{J}_{2n-2}(f - T) - (f - T)\|_p &\leq \frac{3\pi^2}{2}\|D^2(f - T)\|_p \\ &\leq \frac{3\pi^2}{2}\left(31.05\right)E_{n,p}(D^2(f)) \leq 46.7\pi^2E_{n,p}(D^2(f)), \end{aligned}$$

donde usamos nuevamente el Teorema 2.16.

El término  $3(D^2(T) - D^2(f))$  puede ser estimado como en el Teorema 2.16. Esto es

$$\|3(D^2(T) - D^2(f))\|_p \leq 3 \times (31.05)E_{n,p}(D^2(f)) \leq 94E_{n,p}(D^2(f)).$$

En conclusión, hemos probado que

$$\begin{aligned} \|(2n^2 + 1)(\mathbb{J}_{2n-2}(f) - f) - 3D^2(f)\|_p &\leq 4\overline{E}_{n,p}(f) + (219 + 47\pi^2)\overline{E}_{n,p}(D^2(f)) \\ &\quad + 2\|(I - \sigma_n)(f)\|_p + 2\|(I - \sigma_n)(D^2(f))\|_p. \end{aligned}$$

■

La Proposición 3.9 se usará para obtener un teorema del tipo Voronovskaya relacionado con el operador  $\mathbb{J}_{3n-3}$  con la ayuda del Teorema 3.3.

**Proposición 3.9.** [62, Theorem 1] *Para cada  $n \geq 3$ , existen números reales  $q_{k,n}$ ,  $1 \leq k \leq 3n - 3$  tales que*

$$\frac{1}{\gamma_{3n-3}} \left( \frac{\text{sen}(nt/2)}{\text{sen}(t/2)} \right)^6 = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{3(n-1)} q_{k,n} \cos(kt).$$

Más aún,

$$\begin{aligned} \gamma_{3n-3} &= \frac{n(11n^4 + 5n^2 + 4)}{10}, \\ q_{1,n} &= 1 - \frac{n(n^2 + 1)}{\gamma_{3n-3}} \quad y \quad q_{2,n} = 1 - \frac{20(2n^2 - 1)}{9n^4 + 5n^2 + 4}. \end{aligned}$$

**Proposición 3.10.** *Sean  $q_{k,n}$ ,  $q_{1,n}$  y  $q_{2,n}$  los coeficientes dados en la Proposición 3.9. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , tenemos que*

$$\frac{1}{1 - q_{1,n}} \left( 4 - \frac{1 - q_{2,n}}{1 - q_{1,n}} \right) \leq \frac{27}{5} \quad y \quad 1 - q_{1,n} \leq \frac{10}{n^2}.$$

*Demostración.* De la representación de los factores de convergencia  $q_{1,n}$  y  $q_{2,n}$ , sabemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - q_{1,n}} \left( 4 - \frac{1 - q_{2,n}}{1 - q_{1,n}} \right) &= \frac{9n^4 + 5n^2 + 4}{10(n^2 + 1)} \left( 4 - \frac{2n(2n^2 - 1)}{n(n^2 + 1)} \right) \\ &= \frac{6(9n^4 + 5n^2 + 4)}{10(n^2 + 1)^2} \leq \frac{27}{5} \end{aligned}$$

y

$$1 - q_{1,n,3} = \frac{n(n^2 + 1)}{\gamma_{3n-3}} = \frac{10n(n^2 + 1)}{n(9n^4 + 5n^2 + 4)} \leq \frac{10(n^2 + 1)}{n^4 + n^2} = \frac{10}{n^2}.$$

■

**Teorema 3.11.** *Suponga que  $1 \leq p \leq \infty$  y  $\mathbb{J}_{3n-3}$  es el operador de Jackson-Matsuoka (3.1). Para cada  $g \in W_p^2$  tenemos que, para  $n \geq 3$ ,*

$$\left\| \frac{1}{\Lambda_n} \left( \mathbb{J}_{3n-3}(g) - g \right) - \frac{1}{2} D^2(g) \right\|_p \leq 6\omega_1 \left( D^2(g), \frac{\sqrt{10}}{n} \right)_p,$$

donde  $\Lambda_n = M_2(J_{3n-3})$ . Véase (3.3).

*Demostración.* La demostración se sigue del Teorema 3.3 y la Proposición 3.10. ■

Nótese que el índice  $r(n-1)$  en la definición de los operadores  $\mathbb{J}_{nr-r}$  hace referencia al grado del polinomio. Luego, dados dos enteros positivos  $n$  y  $m$  se tiene que si  $\mathbb{J}_{2(n-1)} = \mathbb{J}_{3(m-1)}$ ,  $m$  debe ser impar. Si  $m = (2r + 1)$  con  $r \in \mathbb{N}$ , se tiene que

$$6r = 3(m - 1) = 2(n - 1).$$

Luego  $n = 3r + 1$ .

Si  $m = (2r + 1)$  y  $n = 3r + 1$ , del Teorema 3.8 obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \|(2(3r + 1)^2 + 1)(\mathbb{J}_{6r}(g) - g) - 3D^2(g)\|_p &= \|(2n^2 + 1)(\mathbb{J}_{2n-2}(g) - g) - 3D^2(g)\|_p \\ &\leq 4E_{n,p}(g) + (219 + 47\pi^2)E_{n,p}(D^2(g)) \\ &\quad + 2\|(I - \sigma_n)(g)\|_p + 2\|(I - \sigma_n)(D^2(g))\|_p, \\ &= 4E_{3r+1,p}(g) + (219 + 47\pi^2)E_{3r+1,p}(D^2(g)) \\ &\quad + 2\|(I - \sigma_{3r+1})(g)\|_p + 2\|(I - \sigma_{3r+1})(D^2(g))\|_p, \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\Lambda_{3r+1}} \left( \mathbb{J}_6(g) - g \right) - \frac{1}{2} D^2(g) \right\|_p + \left\| \frac{1}{\Lambda_n} \left( \mathbb{J}_{3n-3}(g) - g \right) - \frac{1}{2} D^2(g) \right\|_p \\ \leq 6\omega_1 \left( D^2(g), \frac{\sqrt{10}}{n} \right)_p = 6\omega_1 \left( D^2(g), \frac{\sqrt{10}}{3r+1} \right)_p. \end{aligned}$$

Según lo anterior, vemos que, además de que no podemos comparar los dos tipos de operadores para todos índices, en los casos donde los grados coinciden se obtiene expresiones que no pueden deducirse una de la otra. Expliquemos algunos detalles.

Se puede acotar a  $E_{3r+1,p}(D^2(g))$  en términos del primer módulo de continuidad de  $D^2(g)$ , pero a cambio de obtener una constante más grande. Esto es

$$E_{3r+1,p}(D^2(g)) \leq 48\omega_1 \left( D^2(g), \frac{\pi}{3r+2} \right)_p$$

y debemos multiplicar por  $(219 + 47\pi^2)$  (véase la ecuación (2.8)).

Por otro lado, se conoce que (véase [10, pag. 77])

$$\|(I - \sigma_{3r+1})(D^2(f))\|_p \leq C\omega_2\left(D^2(g), \frac{1}{\sqrt{3r+1}}\right)_p \leq 4C\omega_1\left(D^2(g), \frac{1}{\sqrt{3r+1}}\right)_p.$$

Pero, existen funciones  $g \in W_p^2$  para las cuales

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\omega_1\left(D^2(g), \frac{1}{\sqrt{3r+1}}\right)_p}{\omega_1\left(D^2(g), \frac{\sqrt{10}}{3r+1}\right)_p} = \infty.$$

Los argumentos presentados más arriba prueban que el resultado para los operadores  $\mathbb{J}_{3n-3}$  no se pueden deducir de los correspondientes a  $\mathbb{J}_{2n-2}$ , cuando dan lugar a operadores del mismo grado.

Veamos que la resultados para  $\mathbb{J}_{2n-2}$  no se pueden deducir de los correspondientes a  $\mathbb{J}_{3n-3}$ .

Si  $g \in \mathbb{T}_{3n+1}$  y  $g$  no es una constante se tiene que

$$0 \neq \omega_1\left(D^2(g), \frac{\sqrt{10}}{3r+1}\right)_p \quad \text{y} \quad E_{3r+1,p}(g) = 0.$$

Luego, en general, no podemos estimar a

$$\omega_1\left(D^2(g), \frac{\sqrt{10}}{3r+1}\right)_p$$

en términos de  $E_{3r+1,p}(D^2(g))$ .

## Capítulo 4

# Operadores de Fejér-Korovkin

### 4.1. Introducción

Para  $n \in \mathbb{N}$ , el núcleo de Fejér-Korovkin se define como

$$K_n = \frac{1}{n+2} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n+2} \frac{\cos^2((n+2)x/2)}{(\cos(\pi/(n+2)) - \cos x)^2},$$

para  $x \neq \pm\pi/(n+2) + 2j\pi$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ .

Para  $f \in X^1$ , se define la integral singular de Fejér-Korovkin mediante la expresión

$$\mathbb{F}_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_n(u) du. \quad (4.1)$$

Enunciemos algunos teoremas conocidos del tipo Voronovskaya para el operador  $\mathbb{F}_n$ .

**Teorema 4.1.** [10, Corollary 1.6.2] *Si  $f \in C_{2\pi}$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$  y  $f''(x)$  existe, entonces*

$$\mathbb{F}_n(f, x) - f(x) = \frac{\pi^2}{2n^2} f''(x) + o(n^{-2}). \quad (4.2)$$

**Teorema 4.2.** [9, pag. 385] *Si  $1 < p < \infty$  y  $f \in W_p^2$ , entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|n^2(\mathbb{F}_n(f) - f) - \frac{\pi^2}{2} f''(x)\|_p = 0.$$

El propósito de este capítulo es presentar un teorema cuantitativo del tipo Voronovskaya para el operador  $\mathbb{F}_n$ . Esto es, queremos estimar la velocidad de convergencia del operador al valor 0 en los resultados presentados anteriormente (Teorema 4.1 y Teorema 4.2). Para lo cual, necesitamos otros hechos conocidos.

**Teorema 4.3.** [23, Theorem 2.5] Si  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $f \in X^p$  y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$E_{n,p}(f) \leq 5\omega_1 \left( f, \frac{2\pi}{n+1} \right)_p.$$

**Proposición 4.4.** [9, Theorem 2.5] Supongamos que  $1 \leq p \leq \infty$  y

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_{k,n} \cos(kx)$$

es un polinomio trigonométrico no negativo. Si  $g \in W_p^2$ , entonces

$$\|g - (g * Q_n)\|_p \leq \frac{\pi^2}{2} (1 - \lambda_{1,n}) \|D^2(g)\|_p.$$

Recordemos que una sucesión  $\{a_n\}$  es convexa si  $\Delta^2 a_n \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$  y  $\Delta^2 a_n = \Delta a_n - \Delta a_{n+1}$ .

**Proposición 4.5.** [75, pag. 93] Si  $\{a_n\}$  es una sucesión acotada y convexa, entonces  $\{a_n\}$  decrece,  $n\Delta^1 a_n \rightarrow 0$  y

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\Delta^2 a_n = a_0 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

**Proposición 4.6.** [75, pag. 183] Si  $\{a_n\}$  es una sucesión convexa que converge a 0, entonces la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx),$$

converge para todo  $x \neq 0$  a una función integrable y no negativa.

**Proposición 4.7.** La función

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k}, \quad x \neq 0,$$

es integrable. Además,

$$\|\varphi\|_1 \leq \frac{3}{2}.$$

*Demostración.* Si consideramos la Proposición 4.6 con la sucesión  $\{a_n\}$  dada por  $a_0 = 3/2$  y  $a_k = 1/k$  para  $k \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k} \geq 0,$$

para  $x \neq 0$ . Pero

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k} \right| dx &\leq \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k} \right| dx \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k} \right) dx = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \Delta^2 a_k = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Aquí usamos la Proposición 4.5. ■

**Observación 4.8.** En la prueba de la proposición previa no podemos tomar  $a_0 < 3/2$ , pues necesitamos que  $\Delta^2 a_0 = a_0 - 2a_1 + a_2 = a_0 - 3/2 \geq 0$ .

Las derivadas intermedias han sido usadas por varios autores. Ahora presentamos algunas constantes particulares.

Denotemos por  $\mathbb{T}_n^0$  a la familia de todos los  $T \in \mathbb{T}_n$  con media cero, esto es

$$\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x) dx = 0. \quad (4.3)$$

**Teorema 4.9.** Para  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y  $T \in \mathbb{T}_n$ , tenemos que:

$$\|(I - \sigma_n)(T)\|_p \leq \frac{3(n+1)}{2} \|(I - \sigma_n)^2(T)\|_p,$$

donde  $\sigma_n$  denota al operador de Fejér. Además, si  $T \in \mathbb{T}_n^0$ , entonces

$$\|T\|_p \leq \frac{3(n+1)}{2} \|(I - \sigma_n)(T)\|_p.$$

*Demostración.* Definamos  $\tau_n : \mathbb{T}_n^0 \rightarrow \mathbb{T}_n^0$  por la ecuación

$$\tau_n(T) = (n+1) \sum_{k=1}^n \frac{A_k(x)}{k}, \quad \text{donde} \quad T(x) = \sum_{k=1}^n A_k(x). \quad (4.4)$$

Observe que, para cada  $T \in \mathbb{T}_n^0$ ,

$$\|\tau_n(T)\|_p \leq (n+1) \|\varphi\|_1 \|T\|_p \leq \frac{3(n+1)}{2} \|T\|_p,$$

donde  $\varphi$  es la función de la Proposición 4.7. Por otro lado, si  $T$  está dado como en (4.4), entonces

$$\tau_n((I - \sigma_n)(T), x) = \tau_n \left( \sum_{k=1}^n \frac{k}{n+1} A_k, x \right) = \sum_{k=1}^n A_k(x) = T(x). \quad (4.5)$$

Por lo tanto, para cualquier  $T \in \mathbb{T}_n$ , si denotamos por  $T^* = T - A_0(T)/2$ , entonces

$$\begin{aligned} \|(I - \sigma_n)(T)\|_p &= \|(I - \sigma_n)(T^*)\|_p = \|\tau_n((I - \sigma_n)^2(T^*))\|_p \\ &\leq \frac{3(n+1)}{2} \|(I - \sigma_n)^2(T^*)\|_p = \frac{3(n+1)}{2} \|(I - \sigma_n)^2(T)\|_p. \end{aligned}$$

Finalmente, si  $T \in \mathbb{T}_n^0$ , se sigue de (4.5) que

$$\|T\|_p = \|\tau_n((I - \sigma_n)(T))\|_p \leq \frac{3(n+1)}{2} \|(I - \sigma_n)^2(T)\|_p.$$

■

Como consecuencia del teorema anterior tenemos el resultado que aparecerá en el corolario siguiente.

**Corolario 4.10.** *Si  $n \in \mathbb{N}$  y  $T \in \mathbb{T}_n^0$ , entonces*

$$\begin{aligned} \|T\|_p &\leq \frac{9}{4} \|T''\|_p, & \|T\|_p &\leq \frac{27}{8} \|D^3(\tilde{T})\|_p, \\ \|\tilde{T}'\|_p &\leq \frac{3}{2} \|T''\|_p, & \|\tilde{T}'\|_p &\leq \frac{9}{4} \|D^3(\tilde{T})\|_p, \end{aligned}$$

y

$$\|D^3(\tilde{T})\|_p \leq 2(n+1) \|T''\|_p.$$

*Demostración.* El resultado se sigue del Teorema 4.9 y la Proposición 2.7. En efecto, tenemos que

$$\|T\|_p \leq \frac{3(n+1)}{2} \|(I - \sigma_n)(T)\|_p \leq \frac{9(n+1)^2}{4} \|(I - \sigma_n)^2(T)\|_p = \frac{9}{4} \|T''\|_p$$

y

$$\|T\|_p \leq \frac{27(n+1)^3}{8} \|(I - \sigma_n)^3(T)\|_p = \frac{27}{8} \|D^3(\tilde{T})\|_p.$$

Por otro lado,

$$\|\tilde{T}'\|_p = (n+1) \|(I - \sigma_n)(T)\|_p \leq \frac{3}{2} (n+1)^2 \|(I - \sigma_n)^2(T)\|_p = \frac{3}{2} \|T''\|_p$$

y

$$\|\tilde{T}'\|_p \leq \frac{9}{4} (n+1)^3 \|(I - \sigma_n)^3(T)\|_p = \frac{9}{4} \|D^3(\tilde{T})\|_p.$$

Finalmente,

$$\|\tilde{T}'''\|_p = \|(\tilde{T}'')'\|_p = (n+1) \|(I - \sigma_n)(T'')\|_p \leq 2(n+1) \|T''\|_p.$$

■

## 4.2. Algunos resultados auxiliares

Algunas representaciones para los factores de convergencia aparecen en diferentes lugares. Véase [64, pag. 1098]. Denotemos

$$\zeta_n(x) = (1-x) \cos(\pi x) + \frac{1}{n+2} \cot \frac{\pi}{n+2} \operatorname{sen}(\pi x). \quad (4.6)$$

Algunas veces escribiremos  $\varrho_{k,n} = \zeta_n(k/(n+2))$ .

**Proposición 4.11.** *El núcleo de Fejér-Korovkin puede ser escrito en la forma siguiente:*

$$K_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \zeta_n \left( \frac{k}{n+2} \right) \cos(kx) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \varrho_{k,n} \cos(kx).$$

**Corolario 4.12.** *Para cada  $n > 1$ , tenemos que*

$$\varrho_{1,n} = \cos \frac{\pi}{n+2}, \quad \varrho_{2,n} = 1 - 2 \left( 1 - \cos^2 \frac{\pi}{n+2} \right) \left( 1 - \frac{1}{n+2} \right)$$

y

$$4 - \frac{1 - \varrho_{2,n}}{1 - \varrho_{1,n}} = 2 - 2 \cos \frac{\pi}{n+2} + \frac{2(1 + \cos(\pi/(n+2)))}{n+2}.$$

Necesitamos algunas estimaciones relacionadas con los factores de convergencia  $\varrho_{k,n}$ . En lo siguiente denotamos

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left( 1 - \frac{\pi}{n+2} \cot \frac{\pi}{n+2} \right),$$

$$H_{n,1}(x) = (1-x) \cos(\pi x) + \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi} + \frac{\pi^2}{2} x^2 - \frac{\pi^2}{3} x^3, \quad (4.7)$$

$$H_{n,2}(x) = a_n (\operatorname{sen}(\pi x) - \pi x), \quad (4.8)$$

y

$$\lambda_{k,n} = 1 - \zeta_n \left( \frac{k}{n+2} \right) - \frac{\pi^2}{2} \frac{k^2}{(n+2)^2} + \frac{\pi^2 k^3}{3(n+2)^3} - \pi a_n \frac{k}{n+2}. \quad (4.9)$$

**Lema 4.13.** *Para  $0 < x \leq \pi$ , tenemos que*

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq x \cot x \leq 1 - \frac{x^2}{3}.$$

En particular,

$$a_n \leq \frac{\pi}{2(n+2)^2}.$$

*Demostración.* La primera afirmación se sigue del desarrollo de la serie de Taylor de la cotangente. Para la segunda, tenemos que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left( 1 - \frac{\pi}{n+2} \cot \frac{\pi}{n+2} \right) \leq \frac{1}{\pi} \frac{\pi^2}{2(n+2)^2}.$$

■

**Lema 4.14.** Sea  $x_0 \in (0, \pi/2)$  definido por la ecuación  $3 \tan(\pi x_0) = \pi(1 - x_0)$ . Para  $x \in [0, x_0]$  tenemos que

$$\pi(1-x)(1-\cos(\pi x)) + \operatorname{sen}(\pi x) - \pi x \geq 0.$$

Más aún,  $x_0 > \pi/6$ .

*Demostración.* Para  $0 < x \leq 1$ ,

$$-4 \cos(\pi x) - \pi(1-x) \operatorname{sen}(\pi x) \leq 0.$$

Por lo tanto, la función

$$f_1(x) = -3 \operatorname{sen}(\pi x) + \pi(1-x) \cos(\pi x)$$

es decreciente en  $[0, 1]$ . Pero  $f_1(x_0) = 0$  si y solo si

$$\tan(\pi x_0) = \frac{\pi}{3}(1-x_0).$$

De lo cual obtenemos que  $f_1(x) \geq 0$  para  $x \in [0, x_0]$ .

Con argumentos similares se verifica que la función

$$f_2(x) = -2 + 2 \cos(\pi x) + \pi(1-x) \operatorname{sen}(\pi x)$$

es creciente en  $[0, x_0]$ . Así  $f_2(x) \geq 0$  para  $x \in [0, x_0]$ .

Si  $f_3(x) = \pi(1-x)(1-\cos(\pi x)) + \operatorname{sen}(\pi x) - \pi x$ , entonces  $f_3'(x) = \pi f_2(x) \geq 0$ , para  $x \in [0, x_0]$ . ■

**Lema 4.15.** Si  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq m \geq 5$  y  $H_{n,1}$  está definido como en (4.7), entonces

$$\left| 1 - H_{n,1} \left( \frac{m}{n+2} \right) \right| \leq \frac{\pi^4 m^4}{6(n+2)^4} \left( \frac{1}{4} - \frac{m}{5(n+2)} \right),$$

$$0 \leq H_{n,1} \left( \frac{m}{n+2} \right) - H_{n,1} \left( \frac{m-1}{n+2} \right) \leq \frac{\pi^3 (m-1)^3}{4(n+2)^4}$$

y, para  $0 \leq k \leq m-2$ ,

$$\left| H_{n,1} \left( \frac{k+2}{n+2} \right) - 2H_{n,1} \left( \frac{k+1}{n+2} \right) + H_{n,1} \left( \frac{k}{n+2} \right) \right| \leq \frac{\pi^4 (k+1)^2}{2(n+2)^4}.$$

*Demostración.* Observe que

$$H'_{n,1}(x) = -\pi(1-x)\operatorname{sen}(\pi x) + \pi^2 x(1-x) = \pi(1-x)(\pi x - \operatorname{sen}(\pi x))$$

y

$$H''_{n,1}(x) = \pi(\pi(1-x)(1 - \cos(\pi x)) + \operatorname{sen}(\pi x) - \pi x).$$

(i) Si  $x_m = m/(n+2)$ , entonces

$$\begin{aligned} |1 - H_{n,1}(x_m)| &= |H_{n,1}(0) - H_{n,1}(x_m)| = \left| \int_0^{x_m} H'_{n,1}(s) ds \right| \\ &= \pi \int_0^{x_m} (1-s)(\pi s - \operatorname{sen}(\pi s)) ds. \end{aligned}$$

Para  $0 \leq y \leq 1$ , tenemos que

$$0 \leq (1-y)(\pi y - \operatorname{sen}(\pi y)) \leq \frac{\pi^3 y^3}{6}(1-y),$$

por lo tanto, para  $0 \leq z \leq n+2$ , la función

$$F(z) = \int_0^{z/(n+2)} (1-s)(\pi s - \operatorname{sen}(\pi s)) ds - \frac{\pi^3}{6(n+2)^4} \left( \frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5(n+2)} \right),$$

decrece. Tomando en cuenta que  $F(0) = 0$ ,

$$|1 - H_{n,1}(x_m)| = \pi F(m) \leq \frac{\pi^4 m^4}{6(n+2)^4} \left( \frac{1}{4} - \frac{m}{5(n+2)} \right).$$

(ii) Por otro lado, si  $y = (m-1)(n+2)$ ,

$$\begin{aligned} 0 &\leq H_{n,1}\left(\frac{m}{n+2}\right) - H_{n,1}\left(\frac{m-1}{n+2}\right) \\ &= \int_y^{y+1/(n+2)} H'_{n,1}(s) ds \\ &= \pi \int_y^{y+1/(n+2)} (1-s)(\pi s - \operatorname{sen}(\pi s)) ds. \end{aligned}$$

Como antes, para  $x \geq 0$ , la función

$$\begin{aligned} G_y(z) &= \int_y^{y+z} (1-s)(\pi s - \operatorname{sen}(\pi s)) ds - \frac{\pi^3((y+z)^4 - y^4)}{24(n+2)^4} \\ &= \int_0^z (1-(y+s))(\pi(y+s)) ds - \frac{\pi^3((y+z)^4 - y^4)}{24(n+2)^4}, \end{aligned}$$

decrece y  $G_y(0) = 0$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
H_{n,1}\left(\frac{m}{n+2}\right) - H_{n,1}\left(\frac{m-1}{n+2}\right) &\leq \frac{\pi^3((y+1/(n+2))^4 - y^4)}{24} \\
&= \frac{\pi^3}{24} \left(4\frac{y^3}{(n+2)} + 6\frac{y^2}{(n+2)^2} + 4\frac{y}{(n+2)^3} + \frac{1}{(n+2)^4}\right) \\
&= \frac{\pi^3}{24(n+2)^4} (4(m-1)^3 + 6(m-1)^2 + 4(m-1) + 1) \\
&= \frac{\pi^3(m-1)^3}{24(n+2)^4} \left(4 + \frac{6}{(m-1)} + \frac{4}{(m-1)^2} + \frac{1}{(m-1)^3}\right) \leq \frac{\pi^3(m-1)^3}{4(n+2)^4},
\end{aligned}$$

para  $m \geq 5$ .

(iii) Sea  $x_0$  como en el Lema 4.14. Pongamos  $z = k/(n+2)$ . Note que

$$0 \leq z < z + \frac{2}{(n+2)} \leq \frac{m-2+2}{n+2} \leq \frac{\pi}{6} < x_0.$$

Luego, si  $0 \leq s \leq z + 2/(n+2)$ ,

$$\begin{aligned}
0 \leq \frac{1}{\pi} H''_{n,1}(s) &= \pi(1-s)(1 - \cos(\pi s)) + \operatorname{sen}(\pi s) - \pi s \\
&\leq \pi(1 - \cos(\pi s)) < \pi \frac{(\pi s)^2}{2}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
0 &\leq H_{n,1}(x) - 2H_{n,1}\left(z + \frac{1}{n+2}\right) + H_{n,1}\left(z + \frac{2}{n+2}\right) \\
&= \int_0^{1/(n+2)} (H'_{n,1}(z+s+1/(n+2)) - H'_{n,1}(z+s)) ds \\
&= \int_0^{1+(n+2)} \int_0^{1+(n+2)} H''_{n,1}(z+s+t) dt ds \\
&\leq \frac{\pi^4}{2} \int_0^{1+(n+2)} \int_0^{1+(n+2)} (z+s+t)^2 dt ds \\
&= \frac{\pi^4}{6} \int_0^{1+(n+2)} \left(3\frac{(z+s)^2}{n+2} + 3\frac{(z+s)}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)^3}\right) ds \\
&= \frac{\pi^4}{6} \left(\frac{1}{n+2} \left(3\frac{z^2}{n+2} + 3\frac{z}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)^3}\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2(n+2)^3} \left(2z + \frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{(n+2)^4}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi^4}{6(n+2)^4} \left( 3k^2 + 3k + 1 + 3k + \frac{3}{2} + 1 \right) \\
&= \frac{\pi^4}{6(n+2)^4} \left( 3k^2 + 6k + \frac{5}{2} \right) \\
&< \frac{\pi^4}{6(n+2)^4} (3k^2 + 6k + 3) = \frac{\pi^4}{2(n+2)^4} (k+1)^2.
\end{aligned}$$

■

**Lema 4.16.** Si  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq m \geq 5$  y  $H_{n,2}$  está definido por (4.7), entonces

$$\left| H_{n,2} \left( \frac{m}{n+2} \right) \right| \leq \frac{\pi^4}{12} \frac{m^3}{(n+2)^5},$$

$$\left| H_{n,2} \left( \frac{m-1}{n+2} \right) - H_{n,2} \left( \frac{m}{n+2} \right) \right| \leq \frac{\pi^4}{4} \frac{m^2}{(n+2)^5}$$

y, para  $0 \leq k \leq m-2$ ,

$$\left| H_{n,2} \left( \frac{k+2}{n+2} \right) - 2H_{n,2} \left( \frac{k-1}{n+2} \right) + H_{n,2} \left( \frac{k}{n+2} \right) \right| \leq \frac{\pi^4(3k^2 + 9k + 7)}{4(n+2)^5}.$$

*Demostración.* (i) Si  $x = m/(n+2)$  tenemos que

$$\begin{aligned}
|H_{n,2}(x)| &= \frac{1}{\pi} \left( 1 - \frac{\pi}{n+2} \cot \frac{\pi}{n+2} \right) (\pi x - \operatorname{sen}(\pi x)) \\
&\leq \frac{1}{\pi} \frac{\pi^2}{2(n+2)^2} \frac{(\pi x)^3}{6} = \frac{\pi^4}{12} \frac{m^3}{(n+2)^5}.
\end{aligned}$$

(ii) Por otro lado, existe  $\theta \in (\pi(m-1)/(n+2), \pi m/(n+2))$  tal que (véase el Lema 4.13)

$$\begin{aligned}
\left| H_{n,2} \left( \frac{m-1}{n+2} \right) - H_{n,2} \left( \frac{m}{n+2} \right) \right| &= a_n \left| \operatorname{sen} \left( \frac{\pi m}{n+2} \right) - \operatorname{sen} \left( \frac{\pi(m-1)}{n+2} \right) - \frac{\pi}{n+2} \right| \\
&= \frac{\pi a_n}{n+2} (1 - \cos \theta) \leq \frac{\pi a_n}{n+2} \frac{\theta^2}{2} \leq \frac{\pi^4}{4(n+2)^3} \left( \frac{m}{n+2} \right)^2 \\
&\leq \frac{\pi^4}{4} \frac{m^2}{(n+2)^5}.
\end{aligned}$$

Finalmente, tomando en cuenta el Lema 4.13 y poniendo  $z = k/(n+2)$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
& |H_{n,2}(z + 2/(n+2)) - 2H_{n,1}(z + 1/(n+2)) + H_{n,2}(z)| \\
&= a_n |\operatorname{sen}(\pi(z + 2/(n+2))) - 2\operatorname{sen}(\pi(z + 1/(n+2))) + \operatorname{sen}(\pi z)| \\
&= \pi^2 a_n \left| \int_0^{1/(n+2)} \int_0^{1/(n+2)} \operatorname{sen}(\pi(z + s + t)) ds dt \right| \\
&= \pi a_n \int_0^{1/(n+2)} \left( 1 - \cos \left( \pi \left( z + s + \frac{1}{n+2} \right) \right) \right) ds \\
&\leq \frac{\pi^4}{4(n+2)^2} \int_0^{1/(n+2)} \left( z + s + \frac{1}{n+2} \right)^2 ds \\
&= \frac{\pi^4}{4(n+2)^2} \left( \frac{3}{n+2} \left( z + \frac{1}{n+2} \right)^2 + \frac{3}{(n+2)^2} \left( z + \frac{1}{n+2} \right) + \frac{1}{(n+2)^3} \right) \\
&= \frac{\pi^4}{4(n+2)^5} (3(k+1)^2 + 3(k+1) + 1) = \frac{\pi^4}{4(n+2)^5} (3k^2 + 9k + 7).
\end{aligned}$$

■

**Lema 4.17.** Si  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $5 \leq m \leq n$  y  $\lambda_{k,m}$  está definido por (4.9), entonces

$$|\lambda_{m,n}| \leq \frac{\pi^4}{24} \frac{m^4}{(n+2)^2}, \quad |m(\lambda_{m-1,n} - \lambda_{m,n})| \leq \frac{\pi^3 m^4}{4(n+2)^4},$$

y

$$\left| \sum_{k=0}^{m-2} (k+1) \Delta^2 \lambda_{k,n+2} \right| < \frac{\pi^4 m^3 (m-1)}{(n+2)^4}.$$

*Demostración.* Observe que

$$\begin{aligned}
1 - H_{n,1}(x) + H_{n,2}(x) &= 1 - (1-x) \cos(\pi x) - \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi} - \frac{\pi^2}{2} x^2 + \frac{\pi^2}{3} x^3 + a_n (\operatorname{sen}(\pi x) - \pi x) \\
&= 1 - (1-x) \cos(\pi x) - \frac{\pi}{n} \cot \frac{\pi}{n} \operatorname{sen}(\pi x) - \frac{\pi^2}{2} x^2 + \frac{\pi^2}{3} x^3 - a_n \pi x.
\end{aligned}$$

De donde obtenemos que

$$\lambda_{k,n} = 1 - H_{n,1} \left( \frac{k}{n+2} \right) + H_{n,2} \left( \frac{k}{n+2} \right).$$

(i) Si  $m \geq 5$ , se sigue de los Lemas 4.15 y 4.16 que

$$\begin{aligned}
|\lambda_{m,n}| &= \left| 1 - H_{n,1} \left( \frac{m}{n+2} \right) + H_{n,2} \left( \frac{m}{n+2} \right) \right| \\
&\leq \frac{\pi^4}{6} \frac{m^4}{(n+2)^4} \left( \frac{1}{4} - \frac{m}{5(n+2)} \right) + \frac{\pi^4}{12} \frac{m^3}{(n+2)^5} \leq \frac{\pi^4}{24} \frac{m^4}{(n+2)^4}.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
|m(\lambda_{m-1,n} - \lambda_{m,n})| &\leq m \left| H_{n,1} \left( \frac{m}{n+2} \right) - H_{n,1} \left( \frac{m-1}{n+2} \right) \right| \\
&\quad + m \left| H_{n,2} \left( \frac{m}{n+2} \right) - H_{n,2} \left( \frac{m-1}{n+2} \right) \right| \\
&\leq \frac{\pi^3 m(m-1)^3}{4(n+2)^4} + \frac{\pi^4 m^3}{4(n+2)^5} \leq \frac{\pi^3 m^3}{4(n+2)^4} \left( m-1 + \frac{\pi}{(n+2)} \right) \leq \frac{\pi^3 m^4}{4(n+2)^4}.
\end{aligned}$$

(iii) Finalmente, para  $0 \leq k \leq m-2$ , entonces

$$\begin{aligned}
|\Delta^2 \lambda_{k,n+2}| &\leq \left| H_{n,1} \left( \frac{k+2}{n+2} \right) - 2H_{n,1} \left( \frac{k+1}{n+2} \right) + H_{n,1} \left( \frac{k}{n+2} \right) \right| \\
&\quad + \left| H_{n,2} \left( \frac{k+2}{n} \right) - 2H_{n,2} \left( \frac{k+1}{n} \right) + H_{n,2} \left( \frac{k}{n} \right) \right| \\
&\leq \frac{\pi^4 (k+1)^2}{2(n+2)^4} + \frac{\pi^4 (3k^2 + 9k + 7)}{4(n+2)^5} \leq \frac{\pi^4}{(n+2)^4} (4k^2 + 11k + 8).
\end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m-2} (k+1)(4k^2 + 11k + 8) = \sum_{k=0}^{m-2} (4k^3 + 15k^2 + 10k + 8) \\
&= (m-1)(m-2) \left( (m-2)(m-1) + 15 \frac{(2m-3)}{6} + \frac{19}{2} + \frac{8}{m-2} \right) = m^4 - m^3.
\end{aligned}$$

Así,

$$\left| \sum_{k=0}^{m-2} (k+1) \Delta^2 \lambda_{k,n+2} \right| \leq \frac{\pi^4 m^3 (m-1)}{(n+2)^4}.$$

■

### 4.3. Resultados del tipo Voronovskaya

Veamos previamente un estimado relacionado con la aproximación simultánea, mediante el polinomio de la mejor aproximación.

**Teorema 4.18.** *Supongamos que  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $m \in \mathbb{N}$  y  $m \geq 2$ . Si  $g \in W_p^2$ ,  $T \in \mathbb{T}_m$  y  $\|g - T\|_p = E_{m,p}(g)$ , entonces*

$$\|g'' - T''\|_p \leq 30 E_{m,p}(g''). \quad (4.10)$$

*Demostración.* Recordemos que (Teorema 2.16), para cualquier  $r \in \mathbb{N}$ ,  $g \in W_p^2$  y  $m \geq \max\{2, r\}$ , si  $T \in \mathbb{T}_m$  es tal que  $\|g - T\|_p = E_{m,p}(g)$ , entonces

$$\|D^r(g) - D^r(T)\|_p \leq \left(4 + \frac{1}{r} + \ln(2r)\right) \left(1 + \frac{e\pi}{2}\right) E_{m,p}(D^r(g)).$$

Dado que

$$\left(4 + \frac{1}{r} + \ln(2r)\right) \left(1 + \frac{e\pi}{2}\right) < 30,$$

tenemos que

$$\|D^2(g) - D^2(T)\|_p \leq 30 E_{m,p}(D^2(g)).$$

■

**Proposición 4.19.** *Si  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y  $g \in W_p^2$ , entonces*

$$\|g - \mathbb{F}_n(g)\|_p \leq \frac{\pi^4}{4(n+2)^2} \|D^2(g)\|_p.$$

*Demostración.* Se sigue de la Proposición 4.4 y del Corolario 4.12 que

$$\begin{aligned} \|g - \mathbb{F}_n(g)\|_p &\leq \frac{\pi^2}{2} (1 - \varrho_{1,n}) \|D^2(g)\|_p = \frac{\pi^2}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n+2}\right) \|D^2(g)\|_p \\ &\leq \frac{\pi^4}{4(n+2)^2} \|D^2(g)\|_p. \end{aligned}$$

■

**Proposición 4.20.** *Para cada  $1 \leq p \leq \infty$ , si  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq m \geq 5$  y  $T \in \mathbb{T}_m^0$  (véase (4.3)), entonces*

$$\left\| \mathbb{F}_n(T) - T - \frac{\pi^2}{2(n+2)^2} T'' \right\|_p \leq \left( \frac{9\pi^3 m^4}{(n+2)^4} + \frac{3\pi^2}{4(n+2)^3} + \frac{2\pi^2(m+1)}{3(n+2)^3} \right) \|T''\|_p.$$

*Demostración.* Definamos  $\lambda_{k,n}$  como en (4.9). Si  $T = \sum_{k=0}^m A_k(x) \in \mathbb{T}_n$ , con  $A_k(x) = a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ , entonces

$$\begin{aligned}
& T(x) - \mathbb{F}_n(T, x) + \frac{\pi^2}{2(n+2)^2} T''(x) \\
&= \sum_{k=0}^m \left( 1 - \zeta_{n+2} \left( \frac{k}{n+2} \right) - \frac{\pi^2 k^2}{2(n+2)^2} \right) A_k(x) \\
&= \sum_{k=0}^m \left( 1 - \zeta_{n+2} \left( \frac{k}{n+2} \right) - \frac{\pi^2}{2} \frac{k^2}{(n+2)^2} + \frac{\pi^2 k^3}{3(n+2)^3} - \pi a_n \frac{k}{n+2} \right) A_k(x) \\
&\quad + \sum_{k=0}^m \left( \pi a_n \frac{k}{n+2} - \frac{\pi^2 k^3}{3(n+2)^3} \right) A_k(x) \\
&= \sum_{k=0}^m \lambda_{k,n} A_k(x) + \frac{\pi a_n}{n+2} \tilde{T}' - \frac{\pi^2}{3(n+2)^3} \tilde{T}'''.
\end{aligned}$$

Ahora aplicamos dos veces la transformada de Abel para obtener lo siguiente

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^m \lambda_{k,n} A_k(x) = \lambda_{m,n} \sum_{k=0}^m A_k(x) + \sum_{k=0}^{m-1} (\lambda_{k,n} - \lambda_{k+1,n}) \sum_{j=0}^k A_j(x) \\
&= \lambda_{m,n} T(x) + (\lambda_{m-1,n} - \lambda_{m,n}) \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^k A_k(x) + \sum_{k=0}^{m-2} \Delta^2 \lambda_{k,n} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j A_i(x) \\
&= \lambda_{m,n} T(x) + m(\Delta^1 \lambda_{m-1,n}) \sigma_m(T, x) + \sum_{k=0}^{m-2} (k+1) \Delta^2 \lambda_{k,n} \sigma_k(T, x),
\end{aligned}$$

donde  $\sigma_k$  es la suma de Fejér. Se sigue del Lema 4.17 que

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{k=0}^n \lambda_{k,n} A_k(x) \right\|_p \leq \left( \frac{\pi^4 m^4}{24(n+2)^4} + \frac{\pi^3 m^4}{4(n+2)^4} + \frac{\pi^4 m^3 (m-1)}{(n+2)^4} \right) \|T\|_p \\
&\leq \left( \frac{1}{24} \frac{16}{5} + \frac{1}{4} + \frac{16}{5} \right) \frac{\pi^4 m^4}{(n+2)^4} \|T\|_p \\
&\leq \frac{\pi^3 m^4}{(n+2)^4} \|T\|_p \\
&\leq \frac{4\pi^3 m^4}{(n+2)^4} \|T\|_p.
\end{aligned}$$

Ahora, tomando en cuenta el Lema 4.13 obtenemos que

$$\begin{aligned} \left\| T - \mathbb{F}_n(T) + \frac{\pi^2}{2(n+2)^2} T'' \right\|_p &\leq \left\| \sum_{k=0}^m \lambda_{k,n} A_k(x) \right\| + \frac{\pi a_n \|\tilde{T}'\|_p}{n+2} - \frac{\pi^2 \|\tilde{T}'''\|_p}{3(n+2)^3} \\ &\leq \frac{4\pi^3 m^4}{(n+2)^4} \|T\|_p + \frac{\pi^2}{2(n+2)^3} \|\tilde{T}'\|_p + \frac{\pi^2}{3(n+2)^3} \|\tilde{T}'''\|_p. \end{aligned}$$

Cada una de las normas anteriores puede ser estimada con la ayuda del Corolario 4.10 (aquí la condición  $T \in \mathbb{T}_m^0$  es necesaria). Esto es,

$$\left\| T - \mathbb{F}_n(T) + \frac{\pi^2}{2(n+2)^2} T'' \right\|_p \leq \left( \frac{9\pi^3 m^4}{(n+2)^4} + \frac{3\pi^2}{4(n+2)^3} + \frac{2\pi^2(m+1)}{3(n+2)^3} \right) \|T''\|_p.$$

■

Para la prueba del teorema principal de este capítulo recordemos el Teorema 4.3.

**Teorema 4.21.** *Supongamos que  $1 \leq p \leq \infty$  y  $0 < \alpha < 1$ . Si  $n+2 \geq 7^{2/\alpha}$  y  $f \in W_p^2$ , entonces*

$$\left\| (n+2)^2 (\mathbb{F}_n(f) - f) - \frac{\pi^2}{2} f'' \right\|_p \leq \frac{795\pi^2}{(n+2)^{2/3}} \|f''\|_p.$$

*Demostración.* Sea  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$m+1 = \lceil (n+2)^{\alpha/2} \rceil.$$

Note que

$$6 \leq (n+2)^{\alpha/2} - 1 < \lceil (n+2)^{\alpha/2} \rceil = m+1 < n.$$

Sea  $T_m \in \mathbb{T}_m$  dado por la condición  $E_{m,p}(f) = \|f - T_m\|_p$ . Como

$$(n+2)^2 (\mathbb{F}_n(f+c) - (f+c)) - \frac{\pi^2}{2} (f+c)'' = (n+2)^2 (\mathbb{F}_n(f) - f) - \frac{\pi^2}{2} f''$$

y

$$E_{m,p}(f+c) = E_{m,p}(f),$$

para cualquier constante  $c$ , sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $T_m$  tiene media cero. Esto es  $T_m \in \mathbb{T}_m^0$

Tomando en cuenta (4.10) y la Proposición 4.19,

$$\begin{aligned} \left\| (n+2)^2 (\mathbb{F}_n(f) - f) - \frac{\pi^2}{2} f'' \right\|_p &\leq (n+2)^2 \|\mathbb{F}_n(f - T_m) - (f - T_m)\|_p \\ &\quad + \frac{\pi^2}{2} \|f'' - T_m''\|_p + \left\| (n+2)^2 (\mathbb{F}_n(T_m) - T_m) - \frac{\pi^2}{2} T_m'' \right\|_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left( \frac{\pi^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} \right) \|f'' - T_m''\|_p + \left\| (n+2)^2(\mathbb{F}_n(T_m) - T_m) - \frac{\pi^2}{2}T_m'' \right\|_p \\
&\leq 30 \left( \frac{\pi^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} \right) E_{m,p}(f'') + \left\| (n+2)^2(\mathbb{F}_n(T_m) - T_m) - \frac{\pi^2}{2}T_m'' \right\|_p.
\end{aligned}$$

Utilizando la Proposición 4.20 obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\| (n+2)^2(\mathbb{F}_n(T_m) - T_m) - \frac{\pi^2}{2}T_m'' \right\|_p &\leq \left( \frac{9\pi^3 m^4}{(n+2)^4} + \frac{3\pi^2}{4(n+2)^3} + \frac{2\pi^2(m+1)}{3(n+2)^3} \right) \|T_m''\|_p \\
&\leq \left( \frac{9\pi^3(n+2)^{2\alpha}}{(n+2)^2} + \frac{3\pi^2}{4(n+2)} + \frac{2\pi^2(n+2)^{\alpha/2}}{3(n+2)} \right) (\|T_m'' - f''\|_p + \|f''\|_p) \\
&\leq \left( \frac{9\pi^3}{(n+2)^{2(1-\alpha)}} + \frac{3\pi^2}{4(n+2)} + \frac{2\pi^2}{3(n+2)^{1-\alpha/2}} \right) (30E_{m,p}(f'') + \|f''\|_p) \\
&\leq 31\pi^2 \left( 9\pi + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \right) \frac{\|f''\|_p}{(n+2)^\alpha} \leq (31\pi)^2 \frac{\|f''\|_p}{(n+2)^\alpha}.
\end{aligned}$$

Más aún, tomando en cuenta el Teorema 4.3, tenemos que

$$\begin{aligned}
30 \left( \frac{\pi^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} \right) E_{m,p}(f'') &\leq 150\pi^2 \left( \frac{10}{4} + \frac{1}{2} \right) \omega_1 \left( f'', \frac{2\pi}{m+1} \right)_p \\
&= 450\pi^2 \omega_1 \left( f'', \frac{2\pi}{m+1} \right)_p \leq 450\pi^2 \omega_1 \left( f'', \frac{2\pi}{(n+2)^{\alpha/2} - 1} \right)_p.
\end{aligned}$$

Resumiendo, hemos probado que

$$\left\| (n+2)^2(\mathbb{F}_n(f) - f) - \frac{\pi^2}{2}f'' \right\|_p \leq 450\pi^2 \omega_1 \left( f'', \frac{2\pi}{(n+2)^{\alpha/2} - 1} \right)_p + \frac{(31\pi)^2}{(n+2)^\alpha} \|f''\|_p.$$

Esto nos da el resultado que buscamos. ■



## Capítulo 5

# Operadores de Nörlund y Riesz

Sea  $D = \{d_{n,k}\}$  una matriz triangular inferior fija ( $d_{n,k} = 0$  para  $k > n$ ) que satisface

$$d_{n,k} \geq 0 \quad (0 \leq k \leq n), \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^n d_{n,k} = 1. \quad (5.1)$$

Sea  $\{L_n\}$  la sucesión de operadores,  $L_n : \mathbb{L}^1 \rightarrow \mathbb{T}_n$ , definida por

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^n d_{n,k} S_k(f, x), \quad \text{para } f \in \mathbb{L}^1, \quad (5.2)$$

donde  $S_k$  denota a las sumas parciales de Fourier.

Necesitamos otras restricciones relacionadas con la matriz  $\{d_{n,k}\}$ . En adelante, en este capítulo supondremos que

$$\Lambda := \sup_{n \in \mathbb{N}} (n+1) \left( \sum_{k=0}^n |d_{n,k+1} - d_{n,k}| \right) < \infty. \quad (5.3)$$

La condición (5.3) no siempre es asumida por otros autores. Varios ejemplos de operadores que satisfacen las condiciones (5.1) y (5.3) pueden encontrarse en los artículos [17], [33], [39], [56] y [71].

### 5.1. Estimados para los operadores $L_n$

En esta sección presentaremos un estimado para el error relacionado con los operadores  $L_n$ , en términos de los operadores de Fejér.

Si

$$I_n(t) := \sum_{k=0}^n d_{n,k} \frac{\text{sen}((2k+1)t/2)}{\text{sen}(t/2)},$$

entonces

$$L_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) I_n(t) dt. \quad (5.4)$$

En lo que sigue denotaremos  $\Delta d_{n,k} = d_{n,k+1} - d_{n,k}$ . Recordemos que la transformada de Abel puede ser escrita como

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = a_n \sum_{k=0}^n b_k - \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \sum_{j=0}^k b_j.$$

**Proposición 5.1.** *Si  $n \in \mathbb{N}$  y la matriz  $D = \{d_{n,k}\}$  satisface las condiciones (5.1) y (5.3), entonces*

$$\int_{\pi/(2n+1)}^{\pi} |I_n(t)| dt \leq 4\pi\Lambda \quad y \quad \int_0^{\pi/(2n+1)} |I_n(t)| dt \leq \pi\Lambda,$$

donde  $\Lambda$  está definido en (5.3).

*Demostración.* Es sabido que (véase [51, pag. 157])

$$\sum_{k=0}^n \operatorname{sen}((2k+1)t/2) = \frac{\operatorname{sen}^2((n+1)t/2)}{\operatorname{sen}(t/2)}.$$

De la fórmula de Abel obtenemos lo siguiente, recordemos que  $d_{n,n+1} = 0$ ,

$$\begin{aligned} |I_n(t)| &= \left| \sum_{k=0}^n d_{n,k} \frac{\operatorname{sen}((2k+1)t/2)}{\operatorname{sen}(t/2)} \right| \\ &= \left| d_{n,n} \sum_{k=0}^n \frac{\operatorname{sen}((2k+1)t/2)}{\operatorname{sen}(t/2)} - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta d_{n,k} \sum_{j=0}^k \frac{\operatorname{sen}((2j+1)t/2)}{\operatorname{sen}(t/2)} \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n \Delta d_{n,k} \frac{\operatorname{sen}^2((k+1)t/2)}{\operatorname{sen}^2(t/2)} \right| \\ &\leq \frac{1}{\operatorname{sen}^2(t/2)} \sum_{k=0}^n |\Delta d_{n,k}| \leq \frac{\pi^2}{t^2} \sum_{k=0}^n |\Delta d_{n,k}|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando la condición (5.3)

$$\begin{aligned} \int_{\pi/(2n+1)}^{\pi} |I_n(t)| dt &\leq 2\pi^2 \left( \sum_{k=0}^n |\Delta d_{n,k}| \right) \int_{\pi/(2n+1)}^{\pi} \frac{dt}{t^2} \\ &\leq 2\pi(2n+1) \sum_{k=0}^n |\Delta d_{n,k}| \leq 4\pi \Lambda. \end{aligned}$$

Para la segunda desigualdad recordemos que

$$|\operatorname{sen}((2k+1)t/2)| \leq (2k+1) \operatorname{sen}(t/2),$$

para  $t \in [0, \pi/(2n+1)]$  y  $0 \leq k \leq n$ . Por lo tanto, usando nuevamente la condición (5.3)

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/(2n+1)} |I_n(t)| dt &\leq \int_0^{\pi/(2n+1)} \left( \sum_{k=0}^n (2k+1) d_{n,k} \right) dt \\ &= \frac{\pi}{2n+1} \sum_{k=0}^n (2k+1) d_{n,k} \\ &= \frac{\pi}{2n+1} \left( d_{n,n} \sum_{k=0}^n (2k+1) - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta d_{n,k} \sum_{j=0}^k (2j+1) \right) \\ &\leq \frac{\pi}{2n+1} \left( \sum_{k=0}^n (2k+1) \right) \left( \sum_{k=0}^n |\Delta d_{n,k}| \right) \\ &= \frac{\pi(n+1)^2}{2n+1} \left( \sum_{k=0}^n |\Delta d_{n,k}| \right) \leq \pi \Lambda. \end{aligned}$$

■

Para evitar repeticiones presentamos un resultado general.

**Proposición 5.2.** *Supongamos que  $1 \leq p \leq \infty$  y  $L_n(f)$  está definido por (5.2). Si  $f \in X^p$ , entonces  $(\sigma_j)$  denota al operador de Fejér*

$$\|f - L_n(f)\|_p \leq (n+1) d_{n,n} \|\sigma_n(f) - f\|_p + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) |\Delta d_{n,k}| \|\sigma_k(f) - f\|_p.$$

*Demostración.* Tomando en cuenta (5.1) y usando la transformada de Abel, tenemos que

$$\begin{aligned}
L_n(f, x) - f(x) &= \sum_{k=0}^n d_{n,k} S_k(f, x) - f(x) = \sum_{k=0}^n d_{n,k} (S_k(f, x) - f(x)) \\
&= d_{n,n} \sum_{k=0}^n (S_k(f, x) - f(x)) - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta d_{n,k} \sum_{j=0}^k (S_j(f, x) - f(x)) \\
&= (n+1)d_{n,n}(\sigma_n(f, x) - f(x)) - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(\Delta d_{n,k})(\sigma_k(f, x) - f(x)).
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
&\|L_n(f, x) - f(x)\| \\
&= \|(n+1)d_{n,n}(\sigma_n(f, x) - f(x)) - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(\Delta d_{n,k})(\sigma_k(f, x) - f(x))\| \\
&\leq \|(n+1)d_{n,n}(\sigma_n(f, x) - f(x))\| + \left\| \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(\Delta d_{n,k})(\sigma_k(f, x) - f(x)) \right\| \\
&\leq (n+1)d_{n,n}\|(\sigma_n(f, x) - f(x))\| + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(\Delta d_{n,k})\|(\sigma_k(f, x) - f(x))\|.
\end{aligned}$$

■

Los Teoremas 5.3, 5.4 y 5.6 son los resultados principales de esta sección. Particularmente se sigue del Teorema 5.3 que  $\|f - L_n(f)\|_p \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , para cada  $f \in X^p$ . Este tipo de resultados no son obtenidos claramente en algunos artículos dedicados a los operadores de Nörlund o Riesz.

**Teorema 5.3.** *Supongamos que  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $L_n(f)$  está definido por (5.2) y se satisfacen las condiciones (5.1) y (5.3). Si  $f \in X^p$  y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces*

$$\|f - L_n(f)\|_p \leq \Lambda \left( \frac{\omega_1(f, \pi)_p}{(n+1)} + 8\|f - \sigma_n(f)\|_p \right).$$

*Demostración.* Se sigue de la Proposición 5.2, del Teorema 2.20 y (2.15) que

$$\begin{aligned}
\|f - L_n(f)\|_p &\leq 2(n+1)d_{n,n} \tilde{K} \left( f, \frac{3}{n+1} \right)_p + \frac{1}{2} |d_{n,1} - d_{n,0}| \omega_2(f, \pi)_p \\
&\quad + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) |d_{n,k+1} - d_{n,k}| \tilde{K} \left( f, \frac{3}{k+1} \right)_p,
\end{aligned}$$

donde  $\tilde{K}$  está definida como en el Teorema 2.20.

Si  $w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  es una función monótona creciente y cóncava, para la cual  $w(0) = 0$ , entonces  $w(t)/t$  decrece, (véase [67, pag. 97]). Dado que cualquier  $K$ -funcional es una función cóncava, tenemos que:

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) |d_{n,k+1} - d_{n,k}| \tilde{K}\left(f, \frac{3}{k+1}\right)_p \\ &= 6 \sum_{k=1}^{n-1} |d_{n,k+1} - d_{n,k}| \frac{\tilde{K}(f, 3/(k+1))_p}{3/(k+1)} \\ &\leq 2(n+1) \tilde{K}\left(f, \frac{3}{n+1}\right)_p \sum_{k=1}^{n-1} |d_{n,k+1} - d_{n,k}|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, de (2.11), recordemos que  $d_{n,n+1} = 0$ , obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \|f - L_n(f)\|_p &\leq \frac{\Lambda}{2(n+1)} \omega_2(f, \pi)_p + 2(n+1) \left( \sum_{k=1}^n |\Delta d_{n,k}| \right) \tilde{K}\left(f, \frac{3}{n+1}\right)_p \\ &\leq \Lambda \left( \frac{\omega_1(f, \pi)_p}{(n+1)} + 8\|f - \sigma_n(f)\|_p \right). \end{aligned}$$

■

La conclusión del Teorema 5.4 es menos exacta que la presentada en el Teorema 5.3, pero es útil para el estudio de funciones que satisfacen una condición de Lipschitz.

**Teorema 5.4.** *Supongamos que  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $L_n(f)$  está definido por (5.2) y se satisfacen las condiciones (5.1) y (5.3). Si  $f \in X^p$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y  $\Omega_1(f, t)$  está definida como en (2.14), entonces*

$$\|f - L_n(f)\|_p \leq 2\Lambda \Omega_1\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_p.$$

*Demostración.* En este caso, la Proposición 5.2 y el Teorema 2.21 nos dan

$$\|L_n(f) - f\|_p \leq (n+1)d_{n,n} \Omega_1\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_p + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) |\Delta d_{n,k}| \Omega_1\left(f, \frac{\pi}{k+1}\right)_p.$$

Más aún, tomando en cuenta la Proposición 2.22 sabemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) |\Delta d_{n,k}| \Omega_1\left(f, \frac{\pi}{k+1}\right)_p &= \pi \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta d_{n,k}| \frac{\Omega_1\left(f, \pi/(k+1)\right)_p}{(\pi/(k+1))} \\ &\leq 2(n+1) \Omega_1\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_p \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta d_{n,k}|. \end{aligned}$$

■

En algunos artículos los autores aplican los operadores de Nörlund (Riesz) a las funciones conjugadas. En ellos se hacen cálculos complicados. Como el Teorema 5.5 muestra, el análisis puede ser hecho en forma simple.

**Teorema 5.5.** *Supongamos que  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $L_n(f)$  está definido por (5.2) y se satisfacen las condiciones (5.1) y (5.3). Si  $f, \tilde{f} \in X^p$  y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces*

$$\|f - L_n(f)\|_p \leq 2\Lambda \left( 48\omega_1\left(f, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p + 25\omega_1\left(\tilde{f}, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p \right)$$

y

$$\|\tilde{f} - \tilde{L}_n(\tilde{f})\|_p \leq 2\Lambda \left( 48\omega_1\left(\tilde{f}, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p + 25\omega_1\left(f, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p \right).$$

*Demostración.* Se sigue de la Proposición 5.2 y del Teorema 2.24 que

$$\begin{aligned} \|f - L_n(f)\|_p &\leq (n+1)d_{n,n} \left( 48\omega_1\left(f, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p + 25\omega_1\left(\tilde{f}, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p \right) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) |\Delta d_{n,k}| \left( 48\omega_1\left(f, \frac{4\pi}{k+1}\right)_p + 25\omega_1\left(\tilde{f}, \frac{4\pi}{k+1}\right)_p \right) \\ &\leq 2(n+1)d_{n,n} \left( 48\omega_1\left(f, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p + 25\omega_1\left(\tilde{f}, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p \right) \\ &\quad + 2(n+1) \left( 48\omega_1\left(f, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p + 25\omega_1\left(\tilde{f}, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p \right) \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta d_{n,k}| \\ &\leq 2\Lambda \left( 48\omega_1\left(f, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p + 25\omega_1\left(\tilde{f}, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p \right). \end{aligned}$$

Para la segunda desigualdad cambiemos  $f$  por  $\tilde{f}$ , en la primera desigualdad. Entonces

$$\begin{aligned} \|\tilde{f} - L_n(\tilde{f})\|_p &\leq 2\Lambda \left( 48\omega_1\left(\tilde{f}, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p + 25\omega_1\left(\tilde{f}, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p \right) \\ &= 2\Lambda \left( 48\omega_1\left(\tilde{f}, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p + 25\omega_1\left(f, \frac{4\pi}{n+1}\right)_p \right). \end{aligned}$$

■

Si  $1 < p < \infty$ , la hipótesis  $\tilde{f} \in X^p$  puede ser omitida. Más aún, en tal caso se puede obtener otra buena estimación que involucra solo al primer módulo de continuidad.

**Teorema 5.6.** *Supongamos que  $1 < p < \infty$  y  $P(p)$  está dado por (2.13). Sea  $L_n(f)$  definido por (5.2) y supongamos que se satisfacen las condiciones (5.1) y (5.3). Si  $f \in X^p$  y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces*

$$\|f - L_n(f)\|_p \leq 8\Lambda P(p) \omega_1\left(f, \frac{1}{n}\right)_p.$$

*Demostración.* Aplicando la Proposición 5.2 y el Teorema 2.20 obtenemos

$$\begin{aligned} \|L_n(f) - f\|_p &\leq 2(n+1)d_{n,n}P(p)\omega_1\left(f, \frac{1}{n}\right)_p + |\Delta d_{n,0}| \omega_1(f, \pi)_p \\ &\quad + 2P(p) \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) |\Delta d_{n,k}| \omega_1\left(f, \frac{1}{k}\right)_p \\ &\leq 2(n+1)d_{n,n}P(p)\omega_1\left(f, \frac{1}{n}\right)_p + 4|\Delta d_{n,0}| \omega_1(f, 1)_p \\ &\quad + 4P(p) \sum_{k=1}^{n-1} k |\Delta d_{n,k}| \omega_1\left(f, \frac{1}{k}\right)_p \\ &\leq 8P(p) \left( (n+1)d_{n,n} + n \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta d_{n,k}| \right) \omega_1\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \\ &\leq 8\Lambda P(p) \omega_1\left(f, \frac{1}{n}\right)_p. \end{aligned}$$

■

El método utilizado en la demostración del Teorema 5.3 nos da otra ventaja. De hecho, podemos considerar variaciones para estudiar algunas clases de funciones que aparecen en la aproximación en normas de Hölder generalizadas.

Sea  $w : (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función creciente tal que  $w(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow 0$  y

$$t \int_t^\pi \frac{w(v)}{v^2} dv \leq Mw(t), \quad 0 < t \leq \pi, \quad (5.5)$$

para una constante  $M$  fija. Sea  $H_w^p$  la familia de todas las funciones  $f \in X^p$ , para las cuales

$$\theta_w(f)_p := \sup_{0 < s \leq \pi} \frac{\omega_1(f, s)_p}{w(s)} < \infty.$$

**Teorema 5.7.** *Supongamos que  $1 \leq p \leq \infty$  y  $w$  cumple las condiciones antes mencionadas. Si  $f \in H_w^p$ ,  $L_n(f)$  está definido por (5.2) y se satisfacen las condiciones (5.1) y (5.3), entonces ( $M$  es la constante en (5.5))*

$$\|f - L_n(f)\|_p \leq \Lambda (10 + 8M) \theta_w(f)_p w\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

*Demostración.* Para  $t \in (0, \pi]$ ,

$$\begin{aligned} \Omega_1(f, t)_p &= \omega_1(f, t)_p + t \int_t^\pi \frac{\omega_1(f, s)_p}{s^2} ds \leq \theta_w(f)_p \left( w(t) + t \int_t^\pi \frac{w(s)}{s^2} ds \right) \\ &\leq \theta_w(f)_p (1 + M) w(t). \end{aligned}$$

Del Teorema 2.21 sabemos que

$$\|f - \sigma_n(f)\|_p \leq \Omega_1\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_p \leq \theta_w(f)_p (1 + M) w\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

Ahora, el Teorema 5.3 y la ecuación (2.16) nos dan

$$\begin{aligned} \|f - L_n(f)\|_p &\leq \Lambda \left( \frac{\omega_1(f, \pi)_p}{(n+1)} + 8\|f - \sigma_n(f)\|_p \right) \\ &\leq \Lambda \left( 2\omega_1\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right) \right) + 8\|f - \sigma_n(f)\|_p \\ &\leq (10 + 8M) \Lambda \theta_w(f)_p w\left(\frac{\pi}{n+1}\right). \end{aligned}$$

■

Para poder comparar nuestras estimaciones con otros resultados conocidos, presentamos algunos corolarios.

Un caso particular de la clase  $H_w^p$  se obtiene cuando  $w(t) = t^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Dado que

$$t \int_t^\pi \frac{v^\alpha}{v^2} dv \leq \frac{t^\alpha}{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (5.6)$$

podemos tomar en (5.5)  $M = 1/(1-\alpha)$ . En este caso escribimos  $\theta_\alpha(f)_p = \theta_w(f)_p$ .

**Corolario 5.8.** *Supongamos que  $1 < p < \infty$ ,  $L_n(f)$  está definido por (5.2) y se satisfacen las condiciones (5.1) y (5.3). Si  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $f \in L^p$  y  $\omega_1(f, t)_p \leq Kt^\alpha$ , entonces*

$$\|f - L_n(f)\|_p \leq 8\Lambda P(p) \frac{K}{n^\alpha}.$$

*Demostración.* La desigualdad es una simple consecuencia del Teorema 5.6. ■

**Corolario 5.9.** *Supongamos que  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $L_n(f)$  está definido por (5.2) y se satisfacen las condiciones (5.1) y (5.3). Si  $0 < \alpha < 1$ ,  $f \in X^p$  y  $\omega_1(f, t)_p \leq Kt^\alpha$ , entonces*

$$\|f - L_n(f)\|_p \leq \Lambda \left(10 + \frac{8}{1 - \alpha}\right) \frac{K\pi^\alpha}{(n+1)^\alpha}.$$

*Demostración.* La prueba se sigue del Teorema 5.7. Observe que  $\theta_\alpha(f)_p \leq K$  y  $M \leq 1/(1 - \alpha)$ . ■

Para  $1 < p < \infty$ , en la estimación del Corolario 5.8, las constantes no dependen de  $\alpha$ , pero no están acotadas como función de  $p$ . Por otro lado, en el Corolario 5.9 las constantes no dependen de  $p$ , pero no están acotadas como función de  $\alpha$ . Estos hechos explican por qué presentamos dos resultados diferentes. Observemos que, en el caso  $\alpha = 1$ , el Teorema 5.7 no es muy útil, de hecho un término extra,  $\ln(n+1)$ , aparece.

## 5.2. Funciones conjugadas

Algunos autores (véase Sección 5.3) han estudiado la acción de los operadores  $L_n$  definidos en (5.4) para funciones conjugadas. Este problema no siempre es interesante. Para  $1 < p < \infty$ , se sabe que, si  $f \in X^p$ , entonces  $\tilde{f}$  existe a.e. y  $\tilde{f} \in X^p$ . Más aún, si  $f \in Lip(X^\infty, \alpha)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , entonces  $\tilde{f} \in Lip(X^\infty, \alpha)$  (véase [74] y [75, pag.121-122]). Por lo tanto, en todos estos casos, podemos aplicar directamente los resultados presentados anteriormente a  $\tilde{f}$ . Recordemos que, si  $\tilde{f} \in L^1$ , entonces  $\tilde{S}(f) = S(\tilde{f})$  (véase [1, Cap. VIII, Sec. 17]).

Un problema nuevo aparece si queremos estimar  $\|\tilde{f} - L_n(\tilde{f})\|_p$  en términos del módulo de continuidad de  $f$ . Por supuesto, obtendremos una solución si somos capaces de estimar el módulo de continuidad de  $\tilde{f}$  en términos del módulo de continuidad de  $f$ . Como Zygmund mostró en [74], para las funciones continuas existen casos donde esto es posible. Dado que estamos prestando atención a las constantes, presentamos una modificación de los argumentos de Zygmund.

**Lema 5.10.** *Si  $0 < h < \pi/3$ , entonces*

$$0 < I(h) := \int_{-\pi}^{-2h} \frac{1}{\tan((t-h)/2)} dt + \int_{2h}^{\pi} \frac{1}{\tan((t-h)/2)} dt \leq \ln 3,$$

*y si  $2h \leq |t| \leq \pi$ , entonces*

$$J(h) := \left| \frac{1}{\tan((t-h)t/2)} - \frac{1}{\tan(t/2)} \right| \leq \frac{\pi^2 h}{|t|^2}.$$

*Demostración.* Note que

$$\begin{aligned}
 I(h) &= - \int_{2h}^{\pi} \frac{\cos((t+h)/2)}{\operatorname{sen}((t+h)/2)} dt + \int_{2h}^{\pi} \frac{\cos((t-h)/2)}{\operatorname{sen}((t-h)/2)} dt \\
 &= - \int_{3h/2}^{(\pi+h)/2} \frac{\cos s}{\operatorname{sen} s} ds + \int_{h/2}^{(\pi-h)/2} \frac{\cos s}{\operatorname{sen} s} ds \\
 &= \int_{h/2}^{3h/2} \frac{\cos s}{\operatorname{sen} s} ds - \int_{(\pi-h)/2}^{(\pi+h)/2} \frac{\cos s}{\operatorname{sen} s} ds \\
 &= \log \frac{\operatorname{sen}(3h/2)}{\operatorname{sen}(h/2)} + \log \frac{\operatorname{sen}((\pi-h)/2)}{\operatorname{sen}((\pi+h)/2)} \\
 &= \log \frac{\operatorname{sen}(3h/2)}{\operatorname{sen}(h/2)} + \log \frac{\cos(h/2)}{\cos(h/2)} = \log \frac{\operatorname{sen}(3h/2)}{\operatorname{sen}(h/2)}.
 \end{aligned}$$

En el intervalo  $(0, \pi/3)$ , la función  $F(h) = \operatorname{sen}(3h/2)/\operatorname{sen}(h/2)$  decrece. En efecto,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sign}(F'(h)) &= \operatorname{sign}\left(3 \cos \frac{3h}{2} \operatorname{sen} \frac{h}{2} - \operatorname{sen} \frac{3h}{2} \cos \frac{h}{2}\right) \\
 &= \operatorname{sign}\left(2 \cos \frac{3h}{2} \operatorname{sen} \frac{h}{2} + \operatorname{sen}\left(\frac{h}{2} - \frac{3h}{2}\right)\right) \\
 &= \operatorname{sign}\left(\frac{\cos((3h/2))}{\cos(h/2)} \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} h\right) \\
 &= \frac{\operatorname{sen} h}{\cos(h/2)} \operatorname{sign}\left(\cos(3h/2) - \cos(h/2)\right) < 0,
 \end{aligned}$$

ya que  $3h/2 < \pi/2$ . Así,

$$1 < \frac{\operatorname{sen}(3h/2)}{\operatorname{sen}(h/2)} \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(3h/2)}{\operatorname{sen}(h/2)} = 3,$$

lo cual prueba que  $0 < I(h) \leq \ln 3$ .

Por otro lado, si  $2h \leq |t| \leq \pi$ , entonces  $|t|/2 \leq \pi/2$  y  $|t-h|/2 \leq \pi/2$ . Más aún, si  $t < 0$ , por la condición  $2h \leq |t| = -t$ , tenemos que

$$-t = |t| \leq -2(t+h) = 2|t-h|.$$

Si  $t > 0$ , entonces  $|t-h| = t-h \geq t/2$ , por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 J(h) &= \left| \frac{\operatorname{sen}(t/2) \cos((t-h)/2) - \cos(t/2) \operatorname{sen}((t-h)/2)}{\operatorname{sen}((t-h)/2) \operatorname{sen}(t/2)} \right| \\
 &= \left| \frac{\operatorname{sen}(t/2 - (t-h)/2)}{\operatorname{sen}((t-h)/2) \operatorname{sen}(t/2)} \right| \leq \operatorname{sen}(h/2) \frac{\pi^2}{|(t-h)t|} \leq \frac{h}{2} \frac{2\pi^2}{|t|^2} = \frac{\pi^2 h}{|t|^2}.
 \end{aligned}$$

■

**Teorema 5.11.** Si  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $f \in X^p$  y

$$\int_0^\pi \frac{\omega_1(f, t)_p}{t} dt < \infty, \quad (5.7)$$

entonces  $\tilde{f} \in X^p$  y para  $0 < t < \pi$ ,  $\omega_1(\tilde{f}, t)_p \leq 4\Omega_1(f, 2t)_p$ , donde  $\Omega_1$  está definido en (2.14).

*Demostración.* Presentaremos una prueba para el caso de funciones continuas. Para los espacios  $X^p$  con  $1 \leq p < \infty$  la demostración es similar. Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta \in (0, \pi/2)$  tal que, si  $0 < s_1 < s_2 \leq \delta$ , entonces

$$\left| \int_{s_1}^{s_2} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{\tan(t/2)} dt \right| \leq \int_{s_1}^{s_2} \frac{\omega_1(f, 2t)}{\operatorname{sen}(t/2)} dt \leq \pi \int_0^{s_2} \frac{\omega_1(f, t)}{t} dt,$$

donde la última expresión es menor que  $\varepsilon$ . Esto prueba que  $\tilde{f}$  existe.

Dado que  $\tan(t/2)$  es una función impar,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) - f(x-t)}{\tan(t/2)} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) - f(x) - f(x-t) + f(x)}{\tan(t/2)} dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{f(x+t) - f(x)}{2 \tan(t/2)} dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$-\tilde{f}(x+h) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{f(x+h+t) - f(x+h)}{2 \tan(t/2)} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{f(x+t) - f(x+h)}{2 \tan((t-h)/2)} dt.$$

De aquí que

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x) &= \frac{1}{2\pi} (f(x+h) - f(x)) \int_{2h \leq |t| \leq \pi} \frac{1}{\tan((t-h)/2)} dt \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{2h \leq |t| \leq \pi} \Delta_t f(x) \left( \frac{1}{\tan((t-h)t/2)} - \frac{1}{\tan(t/2)} \right) dt \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq 2h} \left( \frac{f(x+t) - f(x+h)}{\tan((t-h)/2)} + \frac{f(x+t) - f(x)}{\tan(t/2)} \right) dt = I_1 + I_2 + I_3. \quad (5.8) \end{aligned}$$

El término  $I_1$  puede ser estimado con ayuda de la primera desigualdad del Lema 5.10. Esto es

$$|I_1| \leq \frac{\ln 3}{2\pi} \omega_1(f, h)_\infty \leq \frac{\ln 3}{2\pi \log 2} \int_h^{2h} \frac{\omega_1(f, h)_\infty}{s} ds.$$

Para  $I_2$  (véase la segunda desigualdad del Lema 5.10)

$$|I_2| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{2h \leq |t| \leq \pi} \omega_1(f, |t|)_\infty \frac{\pi^2 h}{|t|^2} dt = \pi h \int_{2h}^{\pi} \frac{\omega_1(f, t)_\infty}{t^2} dt.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq 2h} \left( \frac{\omega_1(f, |t-h|)_\infty}{|\operatorname{sen}((t-h)/2)|} + \frac{\omega_1(f, |t|)_\infty}{|\operatorname{sen}(t/2)|} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2h} \frac{\omega_1(f, |t-h|)_\infty}{|\operatorname{sen}((t-h)/2)|} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2h} \frac{\omega_1(f, t+h)_\infty}{\operatorname{sen}((t+h)/2)} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{2h} \frac{\omega_1(f, t)_\infty}{\operatorname{sen}(t/2)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-h}^h \frac{\omega_1(f, |s|)_\infty}{|\operatorname{sen}(s/2)|} ds + \frac{1}{2\pi} \int_h^{3h} \frac{\omega_1(f, s)_\infty}{\operatorname{sen}(s/2)} ds + \frac{1}{\pi} \int_0^{2h} \frac{\omega_1(f, t)_\infty}{\operatorname{sen}(t/2)} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^h \frac{\omega_1(f, s)_\infty}{\operatorname{sen}(s/2)} ds + \frac{1}{2\pi} \int_h^{3h} \frac{\omega_1(f, s)_\infty}{\operatorname{sen}(s/2)} ds + \frac{1}{\pi} \int_0^{2h} \frac{\omega_1(f, s)_\infty}{\operatorname{sen}(s/2)} ds \\ &\leq 2 \int_0^{2h} \frac{\omega_1(f, s)_\infty}{s} ds + \int_{2h}^{3h} \frac{\omega_1(f, s-h)_\infty}{s-h} ds = 3 \int_0^{2h} \frac{\omega_1(f, s)_\infty}{s} ds. \end{aligned}$$

Hemos probado que

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)| &\leq \left( \frac{\ln 3}{2\pi \log 2} + 3 \right) \int_0^{2h} \frac{\omega_1(f, s)_\infty}{s} ds + \pi h \int_{2h}^{\pi} \frac{\omega_1(f, t)_\infty}{t^2} dt \\ &\leq 4 \int_0^{2h} \frac{\omega_1(f, s)_\infty}{s} ds + \pi h \int_{2h}^{\pi} \frac{\omega_1(f, t)_\infty}{t^2} dt, \end{aligned}$$

y esto es suficiente para obtener el resultado. ■

Recordemos que, si  $f, \tilde{f} \in X^p$ , entonces la serie conjugada (1.7) coincide con la serie de Fourier de  $\tilde{f}$  a.e. Esto es  $\tilde{S}(f) = S(\tilde{f})$ .

**Teorema 5.12.** *Supongamos que  $1 \leq p \leq \infty$  y  $0 < \alpha < 1$ . Sea  $L_n(f)$  definido por (5.2). Si  $\omega_1(f, t)_p \leq Kt^\alpha$ , entonces*

$$\|\tilde{f} - \tilde{L}_n(f)\|_p \leq 17 \Lambda \frac{2^{2+\alpha}(2-\alpha)^2}{(1-\alpha)^2} \frac{K\pi^\alpha}{(n+1)^\alpha}.$$

*Demostración.* Se sigue de la ecuación (5.6) que

$$t \int_t^\pi \frac{\omega_1(f, s)_p}{s^2} dv \leq Kt \int_t^\pi \frac{s^\alpha}{s^2} dv \leq \frac{Kt^\alpha}{1-\alpha}.$$

Del Teorema 5.11 sabemos que

$$\omega_1(\tilde{f}, t)_p \leq 4 \left( \omega_1(f, 2t)_p + 2t \int_{2t}^\pi \frac{\omega_1(f, s)_p}{s^2} ds \right) \leq 4 \frac{2^\alpha(2-\alpha)}{1-\alpha} Kt^\alpha.$$

Ahora, usando el Teorema 5.7 con  $M = 1/(1-\alpha)$  y  $w(t) = t^\alpha$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \|\tilde{f} - \tilde{L}_n(f)\|_p &= \|\tilde{f} - L_n(\tilde{f})\|_p \\ &\leq 17 \Lambda (1+M) \theta_\alpha(\tilde{f})_p \frac{\pi^\alpha}{(n+1)^\alpha} \\ &\leq 17 \Lambda \frac{2^{2+\alpha}(2-\alpha)^2}{(1-\alpha)^2} \frac{K\pi^\alpha}{(n+1)^\alpha}. \end{aligned}$$

■

### 5.3. Algunas notas históricas

Recordemos algunos resultados conocidos (sin incluir la convergencia puntual). Varios autores han estudiado los operadores  $L_n$  definidos por (5.2), sin considerar la condición (5.3). Dos tipos de hipótesis independientes son usualmente invocadas. La primera involucra la suavidad de las funciones: en ciertas ocasiones las estimaciones son dadas en términos del módulo de continuidad y en otras, el análisis es restringido a la clase de funciones de Lipschitz (o generalizadas de Lipschitz). El segundo grupo de condiciones está relacionado con las propiedades de la matriz  $\{d_{n,k}\}$ .

Diremos que la matriz  $\{d_{n,k}\}$  crece (decrece) si, para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $0 \leq k < n$ ,  $d_{n,k} \leq d_{n,k+1}$  ( $d_{n,k} \geq d_{n,k+1}$ ). Para las matrices de este tipo, la condición (5.3) se satisface si  $\sup\{(n+1) | d_{n,0} - d_{n,n} | : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ .

Utilizaremos la notación

$$L_{n,i} = L_n, \quad \text{si } \{d_{n,k}\} \text{ crece} \tag{5.9}$$

y

$$L_{n,d} = L_n, \quad \text{si } \{d_{n,k}\} \text{ decrece.} \quad (5.10)$$

Gran parte de los resultados conocidos están en términos de los operadores  $L_{n,i}$  y  $L_{n,d}$ . Hay otras condiciones que no se estudiarán a detalle en este trabajo. Particularmente, en [56] Qureshi, además de la condición (5.1), supuso que existe una constante  $C$  tal que

$$np_n \leq CP_n \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{n-1} k |p_{k+1} - p_k| \leq CP_n, \quad (5.11)$$

donde

$$P_n = \sum_{k=0}^n p_k.$$

En [65, Theorem 3.3], Sun consideró el caso en que existe una constante  $C$  tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^n |d_{n,k} - d_{n,k+1}| \leq Cd_{n,0}, \quad \text{y} \quad nd_{n,0} \leq C. \quad (5.12)$$

Una condición similar a la de Sun aparece en [26] y [48, Theorem 2] en la forma

$$\sum_{k=0}^n |d_{n,k} - d_{n,k+1}| \leq Cd_{n,n}$$

(véase también [42] y [52]).

En un principio los autores solo estudiaron funciones que satisfacían una condición de Lipschitz. Por ejemplo, véanse los trabajos de Goel y Sahney [27], Chandra [11] y Qureshi [56]. Dado que los resultados para funciones de Lipschitz pueden ser obtenidos de las estimaciones en términos de los módulos de continuidad, preferimos considerar el caso general.

**Teorema 5.13.** *Sean  $L_{n,d}$  y  $L_{n,i}$  dados como en (5.10) y (5.9) respectivamente. Si se satisface (5.1), entonces existe una constante  $C$  tal que, para cada  $f \in C_{2\pi}$ ,*

$$\|L_{n,d}(f) - f\|_\infty \leq C \sum_{k=1}^n \frac{\omega_1(f, 1/k)_\infty}{k} \sum_{j=0}^{k+1} d_{n,j} \quad (5.13)$$

y

$$\|L_{n,i}(f) - f\|_\infty \leq C \left( \omega_1\left(f, \frac{1}{n}\right)_\infty + \sum_{k=1}^n \frac{\omega_1(f, 1/k)_\infty}{k} \sum_{j=n-k}^n d_{n,j} \right). \quad (5.14)$$

**Corolario 5.14.** *Si  $0 < \alpha \leq 1$  y  $f \in Lip(X^\infty, \alpha)$ , entonces*

$$\|L_{n,i}(f) - f\|_\infty \leq \begin{cases} C(d_{n,n})^\alpha, & 0 < \alpha < 1, \\ Cd_{n,n} \ln d_{n,n}^{-1}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Las ecuaciones (5.13) y (5.14), al igual que el Corolario 5.14, se deben a Mohapatra y Sahney [50, Theorem 2 y Theorem 3]. La ecuación (5.13) aparece también en [14, Theorem 3] en una forma ligeramente diferente. Debemos observar estos resultados con precaución, ya que no se asume una condición de regularidad. Esto es, no está claro si los términos, en la parte derecha de las ecuaciones, tienden a cero cuando  $n$  tiende a infinito.

Usaremos las notaciones siguientes, para una sucesión  $\{p_n\}$  de números reales no negativos, escribimos

$$R_n(f, x) = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^n p_k S_k(f, x) \quad \text{y} \quad N_n(f, x) = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^n p_{n-k} S_k(f, x),$$

donde  $P_n = \sum_{k=0}^n p_k > 0$ . Usualmente los  $R_n$  ( $N_n$ ) son llamados operadores de Riesz (Nörlund). Para simplificar, escribimos  $N_{n,i}$  y  $R_{n,i}$  si  $\{p_n\}$  crece. Si  $\{p_n\}$  decrece, escribimos  $N_{n,d}$  y  $R_{n,d}$ . Más aún,  $\tilde{N}_{n,i}$  y  $\tilde{R}_{n,i}$  ( $\tilde{N}_{n,d}$  y  $\tilde{R}_{n,d}$ ) representan a los operadores con respecto a las sumas parciales conjugadas. Si escribimos  $d_{n,k} = p_k/P_n$  o  $d_{n,k} = p_{n-k}/P_n$ , entonces  $R_n$  y  $N_n$  son operadores de la forma (5.2).

Observemos que el Teorema 5.13 puede ser aplicado a las sumas de Nörlund,  $N_{n,d}$ , en tal caso la ecuación (5.13) fue probada por Holland, Sahney y Tzimbarario [33]. Un resultado similar fue dado en [34], considerando una matriz triangular. De hecho, en [33] y [34] no se hicieron suposiciones sobre la monotonía de la sucesión, pero algunos resultados no son correctos. Mohapatra y Sahney observaron un error en la prueba del Corolario 2 de [34] y Sue en [65] dio un contraejemplo para demostrar que la estimación (5.13) es falsa si  $\{p_n\}$  es creciente.

Si para una sucesión creciente  $\{p_n\}$  tomamos  $d_{n,k} = p_k/P_n$ , entonces el Corolario 5.14 da un resultado para las medias de Riesz  $R_{n,i}$  previamente probado por Chandra en [11], quien añadió la condición de regularidad  $P_n \rightarrow \infty$ , pero si  $p_0 > 0$  y  $\{p_n\}$  es creciente, tal condición se cumple. En efecto,

$$P_n \geq (n+1)p_0.$$

Si  $\{p_n\}$  es una sucesión positiva, decreciente y  $d_{n,k} = p_{n-k}/P_n$ , entonces  $N_{n,d} = L_{n,i}$  (véase (5.9)) y  $\sum_{j=n-k}^n d_{n,j} = P_k/P_n$ . Por lo tanto, de (5.14) y el Teorema 5.11 obtenemos el resultado que aparece en los teoremas siguientes.

**Teorema 5.15.** *Si  $0 < \alpha \leq 1$ , existe una constante  $C$  tal que para toda  $f \in Lip(X^\infty, \alpha)$  se cumple que*

(i) (Goel y Sahney [27])

$$\|N_{n,d}(f) - f\|_\infty \leq \frac{C}{P_n} \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{k^{1+\alpha}}$$

y

(ii) (Chandra [11])

$$\|R_{n,i}(f) - f\|_\infty \leq C(p_n/P_n)^\alpha.$$

**Teorema 5.16.** Si  $0 < \alpha < 1$ , existe una constante  $C$  tal que para toda  $f \in Lip(X^\infty, \alpha)$  se cumple que

(i) (Qureshi y Sharma [54, pag. 84])

$$\|\tilde{N}_{n,d}(f) - \tilde{f}\|_\infty \leq \frac{C}{P_n} \sum_{k=1}^n \frac{P_k \omega_1(f, 1/k)_\infty}{k}$$

y

(ii) (Sharma y Qureshi [54, pag. 37])

$$\|\tilde{R}_{n,i}(f) - \tilde{f}\|_\infty \leq C(p_n/P_n)^\alpha.$$

Observemos que, si  $\{p_n\}$  es creciente, entonces  $P_n = \sum_{k=0}^n p_k \leq (n+1)p_n$ . Por lo tanto,

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{p_n}{P_n},$$

y la desigualdad en (ii) del Teorema 5.15 puede ser deducida del Corolario 5.9. Por otro lado, en [17] Chandra da un ejemplo de una sucesión  $\{p_n\}$ , para la cual podemos usar el Corolario 5.9 pero  $p_n/P_n$  no converge a cero. En efecto, es suficiente tomar  $p_n = c^n$ , donde  $c > 1$  es cualquier número real.

Afirmaciones análogas al Teorema 5.16, para funciones conjugadas, aparecen en artículos de Qureshi ([55], [56] y [57]) para medias de Nörlund y en Saxena [60] para medias de Riesz. Singh y Raghuwanshi consideraron un problema similar en [63]. El análisis fue hecho para funciones en  $Lip(X^p, \alpha)$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ . Para  $0 < \alpha < 1$  los resultados pueden ser obtenidos a partir del Teorema 5.12.

Para sucesiones crecientes, Sun presentó la estimación en una forma ligeramente diferente en términos del módulo de continuidad de segundo orden. Él añadió la condición  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{n,k} = 0$ , sin embargo, no encontramos dónde fue usada en la prueba.

**Teorema 5.17.** (Sun, [65, Theorem 3.1]) *Supongamos que (5.1) se satisface y*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{n,k} = 0$$

para todo  $k$ . Existe una constante  $C$  tal que, para cada  $f \in C_{2\pi}$  tenemos que

$$\|L_{n,i}(f) - f\|_\infty \leq C \sum_{k=1}^n \frac{\omega_2(f, 1/k)_\infty}{k} \sum_{j=n-k+1}^n d_{n,j}. \quad (5.15)$$

Observemos que, si  $\{d_{n,k}\}$  es creciente, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\omega_2(f, 1/k)_\infty}{k} \sum_{j=n-k+1}^n d_{n,j} &\leq 2d_{n,n} \sum_{k=1}^n \omega_1\left(f, \frac{1}{k+1}\right)_\infty \\ &\leq 2d_{n,n} \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \omega_1\left(f, \frac{1}{t}\right)_\infty dt = 2d_{n,n} \int_1^{n+1} \omega_1\left(f, \frac{1}{t}\right)_\infty dt \\ &= 2d_{n,n} \int_{1/n+1}^1 \frac{\omega_1(f, s)_\infty}{s^2} dt. \end{aligned}$$

Considerando esta observación se puede obtener otro resultado conocido. Para estudiar clases de funciones más grandes que las de Lipschitz, dada una función no negativa  $H$  tal que

$$\int_0^t H(s) ds \leq CtH(t), \quad (5.16)$$

Chandra consideró en [14], [15] y [16] funciones  $f$ , para las cuales

$$\int_t^\pi \frac{\omega_1(f, s)_\infty}{s^2} ds \leq M_f H(t). \quad (5.17)$$

Este tipo de condiciones han sido usadas también en [42], [44], [52] y [70]. Por ejemplo, para sucesiones crecientes en [14] y [16], Chandra estableció que, si (5.16) y (5.17) se satisfacen, entonces

$$\|f - L_{n,i}(f)\|_\infty \leq C(f) d_{n,n} H(d_{n,n}), \quad f \in C_{2\pi}.$$

En [16], Chandra también verificó que bajo las condiciones (5.16) y (5.17),

$$\|f - L_{n,d}(f)\|_\infty \leq C(f) d_{n,0} H(d_{n,0}), \quad f \in C_{2\pi}.$$

En [44], Leindler no asume la condición de monotonía, pero probó que, bajo las condiciones (5.16) y (5.17),

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leq C(f) \alpha_n H(\alpha_n), \quad f \in C_{2\pi},$$

donde  $\alpha_n = \sum_{k=0}^n \Delta d_{n,k}$ . Más aún, si solo asumimos (5.17), entonces

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leq C(f) \left( \omega_1\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_\infty + \alpha_n H\left(\frac{\pi}{n}\right) \right), \quad f \in C_{2\pi}.$$

Leindler no explicó cuando  $\alpha_n H(\alpha_n) \rightarrow 0$ .

Los resultados recordados anteriormente pueden ser deducidos usando la segunda afirmación de la Proposición 2.22 y el Teorema 5.4. Más aún, se pueden extender al caso de funciones integrables. Nótese que en el Teorema 5.18 no se incluye la condición (5.16).

**Teorema 5.18.** *Supongamos que  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $L_n(f)$  está definido por (5.2) y la condición (5.3) se satisface. Si  $f \in X^p$  satisface*

$$\int_t^\pi \frac{\omega_1(f, s)_p}{s^2} ds \leq M(f)H(t),$$

entonces

$$\|f - L_n(f)\|_p \leq \frac{2M(f)\Lambda(2+\pi)\pi}{(n+1)} H\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

Del Teorema 5.18 se infiere el Teorema 2 de [14].

En el resultado siguiente solo tomamos parte del Teorema 3.2 de Sun.

**Teorema 5.19.** (Sun, [65, Theorem 3.2]) *Supongamos que (5.1) se satisface. Existe una constante  $C$  tal que, para cada  $f \in C_{2\pi}$  tenemos que*

$$\|L_{n,d}(f) - f\|_\infty \leq C \sum_{k=1}^n d_{n,k} \omega_2\left(f, \frac{1}{k+1}\right)_\infty. \quad (5.18)$$

Si  $\{d_{n,k}\}$  decrece y  $1 \leq k \leq n$ , entonces

$$kd_{n,k-1} \leq \sum_{i=0}^{k-1} d_{n,i} \leq (k+1) \sum_{j=0}^k d_{n,j}.$$

Esto puede usarse para obtener (5.13) de (5.18).

**Teorema 5.20.** (Sun, [65, Theorem 3.3]) *Supongamos que las condiciones (5.1) y (5.12) se satisfacen. Existe una constante  $C$  tal que, para cada  $f \in C_{2\pi}$ ,*

$$\|L_n(f) - f\|_\infty \leq C \left( \omega_2\left(f, \frac{1}{n}\right)_\infty + d_{n,0} \sum_{k=1}^n \omega_2(f, 1/k)_\infty \right). \quad (5.19)$$

Las funciones integrables fueron estudiadas por Mohapatra y Russell en [48], y Chandra en [12], [13], [15] y [17].

**Teorema 5.21.** (Chandra, [12] y [13]) *Supongamos que  $1 < p < \infty$  y  $p_n > 0$ .*

(i) Existe una constante  $C$  tal que para cada  $f \in L^p$  tenemos que

$$\|R_{n,d}(f) - f\|_p + \|N_{n,d}(f) - f\|_p \leq \frac{C}{P_n} \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{k} \omega_1\left(f, \frac{\pi}{k}\right)_p.$$

(ii) Si  $0 < \alpha \leq 1$  y  $f \in Lip(X^p, \alpha)$ , entonces

$$\|f - R_{n,i}(f)\|_p + \|f - N_{n,i}(f)\|_p \leq C(p_n/P_n)^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$y \quad \|f - R_{n,i}(f)\|_p + \|f - N_{n,i}(f)\|_p \leq C(p_n/P_n) \ln(p_n/P_n), \quad \alpha = 1.$$

Para  $f \in Lip(X^p, \alpha)$  desigualdades menos exactas fueron probadas por Sahney y Rao en [59] para  $N_{n,d}(f)$  y Qureshi [54, pag. 104] para  $R_{n,i}(f)$ :

$$\|f - N_{n,d}(f)\|_p \leq C/n^{\alpha-1/p} \quad y \quad \|f - R_{n,i}(f)\|_p \leq C(p_n/P_n)^{\alpha-1/p}.$$

Sahney y Rao añadieron la condición adicional ( $P(y) = P_{[y]}$ )

$$\left( \int_1^n \frac{P(y)^q}{y^{q\alpha+2-q}} dy \right)^{1/q} \leq \frac{CP_n}{n^{\alpha+1/p-1}}. \quad (5.20)$$

Agreguemos un comentario. Si  $\{p_k\}$  decrece y  $p_k > 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , como en la prueba del Lema 1 en [34], se tiene que

$$\begin{aligned} \omega_1\left(f, \frac{1}{n}\right)_p &= \omega_1\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_k}{P_{n-1}} = \omega_1\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \frac{(k+1)p_k}{P_{n-1}} \\ &\leq \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{j=0}^k p_j \right) \frac{\omega_1\left(f, 1/(k+1)\right)_p}{k+1} \leq \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_{k+1}}{k+1} \omega_1\left(f, \frac{1}{k+1}\right)_p \\ &= \frac{P_n}{P_{n-1}} \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{k} \omega_1\left(f, \frac{1}{k}\right)_p \leq \frac{2}{P_n} \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{k} \omega_1\left(f, \frac{1}{k}\right)_p. \end{aligned}$$

Por lo tanto, del Teorema 5.6 obtenemos que

$$\|f - L_n(f)\|_p \leq \Lambda \left(4 + 6P(p)\right) \omega_1\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leq \frac{2\Lambda(4 + 6P(p))}{P_n} \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{k} \omega_1\left(f, \frac{1}{k}\right)_p.$$

Así, el Teorema 5.6 mejora al Teorema 5.21.

**Teorema 5.22.** (Chandra, [17]) Supongamos que  $p_n > 0$  y  $\{p_n\}$  es una sucesión creciente que satisface  $(n+1)p_n \leq CP_n$ . Si  $f \in Lip(X^1, \alpha)$  con  $0 < \alpha < 1$ , entonces

$$\|f - N_{n,i}(f)\|_1 + \|f - R_{n,i}(f)\|_1 \leq Cn^{-\alpha}.$$

En [43] Leindler presentó varios resultados para sucesiones que satisfacen (5.3). Nótese que los estimados de Chandra y Leindler (y también el Teorema 1 de [47]) pueden ser mejorados utilizando las ideas de la Sección 5.1. En el enunciado original del Teorema 1 en [47] la condición  $d_{n,0} \leq C_2/(n+1)$  no se incluye, pero se usó en parte de la prueba (véase la ecuación (22) de [47]).

Mohapatra y Russell obtuvieron algunas desigualdades sin usar la condición (5.20).

**Teorema 5.23.** (Mohapatra y Russell, [48]) *Supongamos que  $1 < p \leq \infty$  y  $f \in Lip(X^\infty, 1)$ , o  $\tilde{f} \in Lip(X^p, 1)$  si  $p < \infty$ .*

- (i) *Si  $\sum_{k=0}^n |p_{n-k} - p_{n-k-1}| \leq Cp_n$ , entonces  $\|f - L_n(f)\|_p \leq Cp_n/P_n$ .*
- (ii) *Si  $\sup \sum_{k=0}^n |p_k - p_{k+1}| < \infty$ , entonces  $\|f - L_n(f)\|_p \leq C/P_n$ .*

Para finalizar, señalamos que las pruebas que presentaron Lal-Krishna en [40] y Lal-Kushwaha [41] en el caso  $1 < p < \infty$  no son correctas. En particular, ellos trataron de estimar la integral

$$\int_0^{1/(n+1)} \left( \frac{\xi(t)}{t^2} \right)^q dt,$$

donde  $q > 1$  y  $\xi$  es un módulo de continuidad. Es conocido que, si  $\xi(t)$  es un módulo de continuidad no nulo, entonces  $\xi(t) \geq Ct$  (véase [67, pag. 100]). Por lo tanto, la integral considerada anteriormente diverge.

# Conclusiones

Nuestro objetivo fundamental era obtener teoremas del tipo Voronovskaya en versión cuantitativa para algunos operadores polinomiales trigonométricos.

Como se puede observar en el texto, la formulación y posterior demostración de teoremas del tipo Voronovskaya depende en gran medida de los operadores concretos a considerar. También, a diferencia de la aproximación de funciones  $f \in C[0, 1]$  mediante polinomios algebraicos, cuando se estudian operadores polinomiales trigonométricos pueden aparecer las funciones conjugadas.

Los Teoremas 2.17, 2.19, 3.8, 3.11 y 4.21 presentan estimados cuantitativos del tipo Voronovskaya. Estos son los resultados fundamentales de la tesis.

Resaltamos que, para obtener los teoremas del tipo Voronovskaya, en la Sección 2.3, estudiamos previamente varios resultados sobre aproximación simultánea. En particular, el Teorema 2.16 se utilizó en la prueba de los Teoremas 2.17 (para Fejér) y 4.18 (para Fejér-Korovkin).

Con respecto a la velocidad de convergencia de la aproximación, mediante combinaciones iterativas, se demostró el Teorema 2.9. Obsérvese que en dicho resultado, además del estimado directo, se incluye un estimado inverso fuerte. Esto es, se caracteriza la velocidad de convergencia en términos de un módulo de suavidad de orden conveniente. Se conocen resultados similares para los operadores de Jackson.

Se determinó que, bajo ciertas condiciones, (véase (5.1) y (5.3)), el estudio de las propiedades aproximativas de los operadores de Nörlund y Riesz se puede realizar en términos de los operadores de Fejér. Con respecto a dichos operadores, el trabajo realizado consistió en utilizar los resultados obtenidos sobre los operadores de Fejér para mejorar los estudios conocidos.

Otra aportación de la tesis fue dar de forma explícita algunas constantes que en otros trabajos no son calculadas.

Aunque el planteamiento inicial fue indicado para un número mayor de operadores, debido a ciertas circunstancias, nos restringimos a algunos, quedando esto para un trabajo futuro.



# Referencias

- [1] N.K. Bary, *A Treatise on Trigonometric Series Vol. I and II*, Pergamonpress, 1964.
- [2] J. Bustamante, *Bernstein Operators and Their Properties*, Birkhäuser, Springer International Publishing, 2017.
- [3] J. Bustamante, *Direct and strong converse inequalities for approximation with Fejér means*, Demonstratio Mathematica 2020; 53: 80-85.
- [4] J. Bustamante y L. Flores-de-Jesús, *Strong converse inequalities and quantitative Voronovskaya-type theorems for trigonometric Fejér sums*, Const. Math. Anal. 3 (2) (2020), 53-63. ISSN 2651 - 2939, doi.org/10.33205/cma.653843
- [5] J. Bustamante y L. Flores-de-Jesús, *Quantitative Voronovskaya-type theorems for Fejér-Korovkin operators*, Const. Math. Anal. 3 (4) (2020), 150-164.  
<http://dergipark.gov.tr/en/pub/cma> ISSN 2651 - 2939  
doi.org/10.33205/cma.818715
- [6] J. Bustamante y L. Flores-de-Jesús, *Quantitative Voronovskaya-type theorems for Jackson operators*, Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity ISSN 1584-4536, 17 (2019), 21-34.  
[atps.tucn.ro/html/2019.html](https://atps.tucn.ro/html/2019.html)
- [7] J. Bustamante y L. Flores-de-Jesús, *Extension of Nörlund and Riesz means: new estimates*, Publ. Math. Debrecen. 101/1-2 (2022), 231-237 DOI: 10.5486/PMD.2022.9286
- [8] P. L. Butzer, Representation and approximation of functions by general singular integrals, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Series*, 63 (22) (1960), 1-24.
- [9] P. L. Butzer and E. Görlich, *Saturationsklassen und asymptotische Eigenschaften trigonometrischer singulärer Integrale*, Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, Bd. 33, Köln (1966), 339-392.

- [10] P. L. Butzer and R. J. Nessel, *Fourier Analysis and Approximation*, Academic Press, New York and London, 1971.
- [11] P. Chandra, *On the degree of approximation of functions belonging to the Lipschitz class*, Nanta Math., 8 (1) (1975), 88-91.
- [12] P. Chandra, *Approximation by Nörlund operators*, Mat. Vesnik, 38 (3) (1986), 263-269.
- [13] P. Chandra, *Functions of classes  $L_p$  and  $Lip(\alpha, p)$  and their Riesz means*, Riv. Mat. Univ. Parma, (4) 12 (1986), 275-282.
- [14] P. Chandra, *On the degree of approximation of a class of functions by means of Fourier series*, Acta Math. Hungar., 52 (1988), 199-205.
- [15] P. Chandra, *A note on degree of approximation by Nörlund and Riesz operators*, Mat. Vesnik, 42 (1) (1990), 9-10.
- [16] P. Chandra, *A note on the degree of approximation of continuous functions*, Acta Math. Hungar., 61 (1993), 21-23.
- [17] P. Chandra, *Trigonometric approximation of functions in  $L_p$ -norm*, J. Math. Anal. Appl., 275 (1) (2002), 13-26.
- [18] J. Czipser, G. Freud, *Sur l'approximation d'une fonction périodique et de ses dérivées successives par un polynome trigonometrique et par ses dérivées successives*, Acta Math. 99 (1958), 33-51.
- [19] Ch. de la Vallée Poussin, *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle* (in French), Gauthier-Viliars, Paris, 1919.
- [20] R. A. DeVore, G.G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Springer-Verlag, 1993
- [21] Z. Ditzian, K. G. Ivanov, *Strong converse inequalities*, J. Anal. Math., 61 (1993), 61-111.
- [22] J. Favard, *Sur l'approximations des fonction d'une variable réelle*, Colloques Internationaux CNRS, 15 (1949), 97-110.
- [23] S. Foucart, Y. Kryakin and A Shadrin, *On the exact constant in the Jackson-Stechkin inequality for the uniform metric*, Constr. Approx., 29 (2009), 157-179.
- [24] G. Freud, *Über gleichzeitige Approximation einer Funktion und ihrer Derivierten*, Intern. Math. Nachrichten, Wien, 47/49 (1957), 36-37.

- [25] I. Gavrea y M. Ivan, *An answer to a conjecture on Bernstein operators*, J. Math. Anal. Appl., 390 (2012) 86-92.
- [26] D. S. Goel, A. S. B. Holland, C. Nasim and B. N. Sahney, *Best approximation by a saturation class of polynomial operators*, Pacific J. Math. 55 (1974), 149-155.
- [27] D. S. Goel and B. N. Sahney, *On the degree of approximation of continuous functions*, Ranchi Univ. Math. J., 4 (1973), 50-53.
- [28] H. Gonska, *On the degree of approximation in Voronovskaja's theorem*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, LV (3) (2007), 103-115.
- [29] H. Gonska, P. Piştul, P. and I Raşa, *On Peano's form of the Taylor remainder, Voronovskaja's theorem and the commutator of positive linear operators*, In: *Numerical Analysis and Approximation Theory* (Proc. Int. Conf. Cluj-Napoca 2006, ed. by O. Agratini and P. Blaga), 55-80. Cluj-Napoca, Casa Cartii de Stiinta 2006.
- [30] H. Gonska and I Raşa, *The limiting semigroup of the Bernstein iterates: degree of convergence*, Acta Math. Hung., 111 (2006), 119-130.
- [31] E. Görlich and E. L. Stark, *Über beste Konstanten und asymptotische Entwicklungen positiver Faltungsintegrale und deren Zusammenhang mit dem Saturationsproblem*, Jber. Deutsch. Math.-Verein, 72 (1970), 18-61.
- [32] V. Gupta and G. Tachev, *Approximation with Positive Linear Operators and Linear Combinations*, Springer, 2017.
- [33] A. S. Holland, B. N. Sahney, and J. Tzimbalario, *On degree of approximation of a class of functions by means of Fourier series*, Acta Sci. Math. (Szeged), 38 (1-2) (1976), 69-72.
- [34] P. D. Kathal, A. S. B. Holland, and B. B. Sahney, *A class of continuous functions and their degree of approximation*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 30 (3-4) (1977), 227-231.
- [35] D. K. Kazarinoff, *On Wallis formula*, Edinburgh Math. Notes 40 (1956), 19-21.
- [36] H-B. Knoop and X. Zhou, *Inequalities for trigonometric polynomials and some integral means*, J. Math. Anal. Appl., 255 (2001), 147-162.
- [37] P. P. Korovkin, *On the order of the approximation of functions by linear positive operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 114 (6) (1957), 1158-1161.
- [38] P. P. Korovkin, *Linear Operators and Approximation Theory*, Delhi (1960).

- [39] J. Kuang, *The Nörlund-Voronoi means of the conjugate Fourier operators and the Fejér operators*, Hunan Shifan Daxue Ziran Kexue Xuebao, 9 (1) (1986), 20-27.
- [40] S. Lal and H. K. Krishna, *Degree of approximation of conjugate of a function belonging to  $Lip(\xi(t), p)$  class by matrix summability means of conjugate Fourier series*, Int. J. Math. Math. Sci. 27 (9) (2001), 555-563.
- [41] S. Lal and J. K. Kushwaha, *Approximation of conjugate of functions belonging to the generalized Lipschitz class by lower triangular matrix means*, Int. J. Math. Anal. (Ruse), 3 (21) (2009), 1031-1041.
- [42] L. Leindler, *On the degree of approximation of continuous functions*, Acta Math. Hungar., 104 (1-2) (2004), 105-113.
- [43] L. Leindler, *Trigonometric approximation in  $L_p$ -norm*, J. Math. Anal. Appl., 302 (1) (2005), 129-136.
- [44] L. Leindler, *On the degree of approximation of continuous functions*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput., 29 (2008), 93-99.
- [45] G. G. Lorenz, *Bernstein Polynomials*, University of Toronto Press, Toronto, 1953.
- [46] Y. Matsuoka, *On the degree of approximation of functions by some positive linear operators*, Sci. Rep. Kagoshima Univ., 9 (1960), 11-16.
- [47] M. L. Mittal, B. E. Rhoades, S. Sonker, and U. Singh, *Approximation of signals of class  $Lip(\alpha, p)$  by linear operators*, Appl. Math. Comput., 217 (9) (2011), 4483-4489.
- [48] R. N. Mohapatra and D. C. Russell, *Some direct and inverse theorems in approximation of functions*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A, 34 (2) (1983), 143-154.
- [49] R. N. Mohapatra and B. Szal, *On trigonometric approximation of functions in the  $L_q$  norm*, Demonstr. Math. 51 (1) (2018), 17-26.
- [50] R. N. Mohapatra, and B. N. Sahney, *Approximation of continuous functions by their Fourier series*, Anal. Numér. Théor. Approx., 10 (1) (1981), 81-87.
- [51] I. P. Natanson, *Constructive Function Theory. Vol I*, Frederick Ungar Publ., New York, 1964.
- [52] J. Németh, *A remark on the degree of approximation of continuous functions*. Acta Math. Hungar., 106 (1-2) (2005), 83-88.

- 
- [53] L. M. Petrov, *Order of approximation of functions of class  $Z_{2k}$  by certain linear polynomial operators* (en ruso), *Uspehi Mat. Nauk*, 13 (84) (1958), 127-131.
- [54] K. Qureshi, *Some problems in approximation theory*, Ph. Thesis, University of Saugar, 1981.
- [55] K. Qureshi, *On the degree of approximation of functions belonging to the Lipschitz class by means of a conjugate series* (Hindi), *Vijnana Parishad Anusandhan Patrika* 24 (2)(1981), 121-125
- [56] K. Qureshi, *On the degree of approximation of functions belonging to the Lipschitz class by means of a conjugate series*, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 12 (9) (1981), 1120-1123.
- [57] K. Qureshi, *On the degree of approximation of functions belonging to the class  $Lip(\alpha, p)$  by means of a conjugate series*, *Indian J. Pure Appl. Math.* 13 (5) (1982), 560-563.
- [58] R. K. S. Rathore, *On a sequence of linear trigonometric polynomial operators*, *SIAM J. Math. Anal.*, 5 (1974), 908-917.
- [59] B. N. Sahney and V. V. Rao, *Error bounds in the approximation of functions*, *Bull. Austral. Math. Soc.* 6 (1972), 11-18.
- [60] R. B. Saxena, *Degree of approximation of functions by the conjugate series of a Fourier series* (Hindi), *Vijnana Parishad Anusandhan Patrika*, 24 (4) (1981), 301-305.
- [61] F. Schurer, *On Linear Positive Operators in Approximation Theory*, Mathematical Institute of the Technological University Delft, Report, 1962.
- [62] F. Schurer and F. W. Steutel, *On linear positive operators of the Jackson type*, *Mathematica*, 9 (32) (1967), 155-184.
- [63] T. Singh and B. P. Raghuvanshi, *A note on the degree of approximation to a class of continuous functions by conjugate Fourier series* (Hindi), *Vijnana Parishad Anusandhan Patrika* 33 (3) (1990), 171-175.
- [64] E. L. Stark, *The kernel of Fejér-Korovkin: a basic tool in the constructive theory of functions*, *Functions, series, operators*, Vol. I, II (Budapest, 1980), *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, 35, North-Holland, Amsterdam, 1983, 1095-1123.
- [65] X. Sun, *On a problem of approximation by means of Fourier series*, *J. Math. (Wuhan)* 16 (3) (1996), 286-292.

- [66] G. T. Tachev, *Voronovskaja's theorem revisited*, J. Math. Anal. Appl. 343 (2008) 399-404.
- [67] A. F. Timan, *Theory of Approximation of Functions of Real Variable*, Pergamon Press, 1963.
- [68] V. V. Videnskii, *Bernstein Polynomials*, State Pedagogical Institute, Leningrad, 1985 (en ruso).
- [69] E. V. Voronovskaya, *El comportamiento asintótico de la aproximación de funciones por sus polinomios de Bernstein*, Doklady SSSR, 4 (1932), 79-85 (en ruso).
- [70] B. Y. Wei and D. S. Yu, *On the degree of approximation of continuous functions by means of Fourier series*, Math. Commun. 17 (1) (2012), 211-219.
- [71] T. Xie, *On a problem of approximation by linear means*, J. Math. Res. Exp., 6 (2) (1985), 93-96.
- [72] M. Zamansky, *Classes de saturation de certains procédés d'approximation des séries de Fourier des fonctions continues et application à quelques problèmes d'approximation*, Ann. Sci. Ecole Normale Sup. 3 (66) (1949), 19-23.
- [73] M. Zamansky, *Classes de saturation des procédés de sommation des séries de Fourier et application aux séries trigonométriques*, Ann. Sci. Ecole Normale Sup. 67 (1950), 161-198.
- [74] A. Zygmund, *O module ciągłości sumy szeregu sprzężonego z szeregiem Fouriera* (in Polish), Prace Mat.-fiz., 33 (1924), 125-132.
- [75] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Third Edition, Vol I and II combined, Cambridge Mathematical Library, 2002.