



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"

**"MODELO ELECTRODINÁMICO DE CINTAS
REBCO PARA SU USO EN LA GENERACIÓN DE
CAMPOS MAGNÉTICOS ALTOS"**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRA EN CIENCIAS
(FÍSICA)**

PRESENTA

MICHELL ALEJANDRA OSORNIO PLANCARTE

DIRECTORES DE TESIS

**DR. FELIPE PÉREZ RODRÍGUEZ
DRA. CECILIA URIBE ESTRADA**

No. de CVU: 1301916

NOVIEMBRE 2025

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Instituto de Física “Ing. Luis Rivera Terrazas”

**Modelo electrodinámico de cintas REBCO
para su uso en la generación de campos
magnéticos altos**

Tesis presentada por

Michell Alejandra Osornio Plancarte

para obtener el grado de

**Maestra en Ciencias
(Física)**

Dirigida por

**Dr. Felipe Pérez Rodríguez
Dra. Cecilia Uribe Estrada**

Puebla, México
Noviembre 2025

©2025 - Michell Alejandra Osornio Plancarte

Derechos Reservados

Agradecimientos

La vida de un estudiante de física no es sencilla en ningún aspecto. Cada paso en este camino implica esfuerzo, sacrificios y decisiones importantes. A lo largo de la carrera cargamos sobre nuestros hombros no solo el peso de nuestros sueños, sino también las expectativas de nuestras familias, profesores y de nosotros mismos. Sin embargo, cada reto superado —desde resolver un problema de electrodinámica hasta lograr que una pastilla superconductora levite, o culminar la escritura de esta tesis— se convierte en un recordatorio del valor de la perseverancia.

Este logro no habría sido posible sin el apoyo de personas y entidades que, de una u otra manera, fueron pilares fundamentales durante este recorrido.

En primer lugar, agradezco profundamente a mi mamá, mi papá, mi abuela y mi hermano, por su amor incondicional, paciencia y por acompañarme en los momentos más difíciles, pero también en los más felices.

A mis amigos Isaac, Mari y a “los 4 fantásticos”, gracias por su amistad, por las risas compartidas y por recordarme que no estoy sola en este camino.

A Ed, gracias por ser mi refugio en los días más difíciles. Por darme fuerza cuando mis dudas pesaban más que mis logros, y por creer en mí incluso más de lo que yo misma lo hacía. Esta tesis también es resultado de tu apoyo incondicional y de tu fe en mí.

A mis asesores, Dr. Felipe y Dra. Cecilia, por su guía, confianza y dedicación para formar no solo estudiantes, sino científicos críticos y comprometidos.

Agradezco también a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) por el apoyo brindado a través de sus programas, sin el cual este proyecto no habría sido posible.

Asimismo, extiendo mi agradecimiento a los proyectos de investigación:

- **Convocatoria de Fronteras de la Ciencia 2023,**

Propuesta No.: CF-2023-I-1429

Título: *Respuesta a campos magnéticos de nanoestructuras superconductor–semiconductor*

Responsable Técnico: Dr. Francisco Javier Flores Ruiz

Institución: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Vigencia: 2023–2025

- **Proyecto VIEP 2025** (Clave: **100187688–VIEP2025**),

Título: *Estudio de las propiedades superconductoras de materiales artificialmente nanoestructurados*

Responsable: Dr. Valentín García Vázquez

Cuerpo Académico: BUAP–CA–250

Institución: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Vigencia: 2025

Finalmente, se agradece a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado por el apoyo otorgado para la conclusión de esta tesis dentro del Eje IV. Modelo de Investigación abierta y compartida. Objetivo 13. Formar recursos humanos que impacten positivamente el contexto social y científico como consecuencia de su accionar en una comunidad para lograr una educación desarrolladora de la transformación. Indicador establecido en el Plan de Desarrollo Institucional 2021-2025.

Dedicado a ...

*A mis seres queridos que ya no se encuentran en este mundo terrenal, pero que
siguen presentes en mi corazón y en cada uno de mis logros.*

Modelo electrodinámico de cintas REBCO para su uso en la generación de campos magnéticos altos

Resumen

En este trabajo se desarrolló un modelo electrodinámico utilizando el formalismo general basado en la ecuación dinámica de la magnetización en superconductores tipo II de forma arbitraria. Se derivaron expresiones analíticas para la ecuación de movimiento de la magnetización en tres geometrías: un prisma rectangular alargado sometido a un campo magnético con orientación arbitraria, una cinta en campo magnético perpendicular y una placa infinita bajo la acción de un campo paralelo a su plano. A partir de estas expresiones, se realizó un análisis numérico en Fortran, considerando el modelo de Bean, para obtener las curvas de histéresis de la magnetización y perfiles espaciales de la inducción magnética, para placas infinitas de un monocristal y de un policristal, ambos tipo REBCO (acrónimo de *Rare Earth Barium Copper Oxide*). Los resultados obtenidos reproducen de manera consistente el comportamiento característico de materiales tipo REBCO y muestran concordancia con observaciones experimentales reportadas, lo que valida la pertinencia del modelo y su potencial utilidad en el diseño de electroimanes basados en materiales superconductores para aplicaciones de campos magnéticos intensos (superiores a 30 T).

Electrodynamic model of REBCO strips for use in the generation of high magnetic fields

Abstract

This work presents an electrodynamic model developed using a general formalism based on the magnetization dynamic equation in arbitrarily shaped type II superconductors. Analytical expressions were derived for the magnetization motion equation in three geometries: an elongated rectangular prism in a magnetic field of arbitrary orientation; a strip in a perpendicular magnetic field; and an infinite plate in a parallel field. A numerical analysis was then performed in Fortran based on these expressions, considering the Bean model to obtain hysteresis curves for the magnetization and spatial profiles of magnetic induction for infinite plates of single-crystal and polycrystal REBCO materials (acronym for Rare Earth Barium Copper Oxide). The results consistently reproduce the characteristic behaviour of REBCO-type materials, aligning with reported experimental observations and validating the model's relevance and potential usefulness in designing electromagnets based on superconducting materials for applications involving high magnetic fields (greater than 30 T).

Participación en eventos

- **Noche de las Estrellas 2025 — Preparatoria Regional Mixteca Poblana (BUAP), Izúcar de Matamoros (noviembre 2025)**

Participaré impartiendo una plática titulada “*Introducción a los superconductores y sus aplicaciones tecnológicas*”, dirigida a estudiantes de nivel medio superior. El objetivo de esta charla es acercar a las y los jóvenes al conocimiento de los materiales superconductores, su relevancia en la física moderna y sus aplicaciones en la generación de campos magnéticos intensos.

- **Noche de las Estrellas 2024 — IFUAP, BUAP (noviembre 2024)**

Presenté la actividad titulada “*Braquistocrona: La curva más rápida*”, donde se invitó al público a construir sus propias trayectorias utilizando materiales sencillos. Después de la actividad, se explicó el concepto físico de la *braquistocrona* y las razones por las cuales esta curva representa el camino de descenso más rápido, promoviendo el aprendizaje experimental y la curiosidad científica entre los asistentes.

- **8^a Escuela de Superconductividad — IFUAP & UNAM (octubre 2024)**

En este evento presenté mi proyecto de investigación titulado “*Modelo electrodinámico de cintas superconductoras REBCO para su uso en la generación de campos magnéticos altos*”, recibiendo valiosas observaciones por parte de expertos en el área.

- **LXVII Congreso Nacional de Física (octubre 2024)**

Presenté el trabajo “*Simulación de procesos de ionización en detectores gaseosos utilizando GARFIELD++*”. En esta contribución se desarrolló una simulación detallada del proceso de ionización en detectores tipo RPC, destacando el uso de herramientas de modelado computacional.

Contenido

1	Introducción	1
1.1	Objetivo general	3
1.2	Objetivos específicos	3
2	Marco Teórico	4
2.1	Introducción a la superconductividad	4
2.1.1	Definición y origen histórico	4
2.1.2	De Ginzburg–Landau a BCS	5
2.1.3	Tipos de superconductores	7
2.1.4	Efecto Meissner	9
2.1.5	Estado mixto y la física de los vórtices	10
2.2	Modelado de superconductores tipo II en geometrías comunes	12
2.2.1	Ecuación material y modelos constitutivos	12
2.2.2	Configuraciones geométricas en el modelado de superconductores tipo II	14
2.2.3	Importancia para el presente trabajo	16
2.3	Cintas REBCO	17
2.3.1	Estructura multicapa	17
2.3.2	Propiedades físicas relevantes	18
2.3.3	Desafíos	19
3	Desarrollo del Modelo Electrodinámico para Superconductores Tipo II	21
3.1	Sistema de ecuaciones fundamentales	21
3.1.1	Prisma rectangular alargado	22
3.1.2	Cinta alargada	23
3.1.3	Placa infinita	27
4	Cálculo Numérico, Resultados y Análisis	31
4.1	Placa infinita	31
4.1.1	Implementación numérica: Caso base	32
4.1.2	Implementación numérica: Caso Monocristal	38
4.1.3	Implementación numérica: Caso Policristal	45
5	Conclusiones	52

A Apéndice: Expresión de la inducción magnética en términos de la magnetización.	54
B Apéndice: Derivación de la ecuación de movimiento para la magnetización en un prisma alargado.	57

Capítulo 1

Introducción

La generación de campos magnéticos intensos mediante el uso de superconductores ha sido fundamental en diversas áreas de la ciencia y la tecnología. Esto se debe a la capacidad de los superconductores para conducir electricidad sin pérdidas resistivas y producir campos magnéticos sumamente potentes. La aplicación de estas propiedades en diferentes tecnologías ha permitido mejorar la calidad de vida humana.

En el sector salud, los superconductores son el pilar del sistema de imágenes por resonancia magnética (IRM), que permite realizar diagnósticos de alta precisión de enfermedades neurológicas, cardiovasculares y oncológicas. En el ámbito energético, la aplicación de cables superconductores representa una potente alternativa para la transmisión eficiente de energía, aumentando la capacidad de las redes eléctricas. Además, su contribución sin precedentes se refleja en el sistema de transporte a través de los trenes de levitación magnética, impulsados por superconductores. En el plano científico, su impacto se aprecia en los imanes utilizados en los aceleradores de partículas, como el Gran Colisionador de Hadrones (LHC).

La creación de estos campos magnéticos se realiza en instalaciones especializadas, donde se utilizan electroimanes de alta potencia y sistemas híbridos que combinan imanes convencionales con superconductores de alta temperatura (HTS), como las cintas, REBCO (acrónimo de *Rare Earth Barium Copper Oxide*). Los superconductores HTS han mostrado ser capaces de soportar altos valores de corriente crítica, incluso en presencia de campos intensos, lo que les permite generar campos magnéticos sostenidos superiores a los 30 T [1]. Ejemplos notables incluyen el imán de 45.5 T alcanzado en el Laboratorio Nacional de

Campo Magnético Alto (NHMFL) utilizando un inserto HTS de 14.4 T en combinación con un imán resistivo de 31.1 T. Este hito tecnológico ha motivado el desarrollo de una nueva generación de imanes para generar campos altos en configuraciones completamente superconductoras, es decir, que emplean solo materiales superconductores para generar campos intensos y sostenibles en el tiempo [2].

Las cintas **REBCO**, empleadas en configuraciones de bobinas enrolladas, son clave en el desarrollo de imanes HTS de alta potencia. Sin embargo, presentan desafíos específicos, como las **corrientes de apantallamiento**, que inducen campos magnéticos internos y propician pérdidas por histéresis, aumentando la demanda en el sistema de refrigeración criogénica necesario para mantener el estado superconductor [2]. Para mitigar estos problemas, se han implementado mejoras en el diseño, como el refuerzo de las bobinas con tiras de acero inoxidable y la precompresión, proporcionando estabilidad adicional frente a las tensiones generadas por las fuerzas de Lorentz en estos dispositivos [1].

La modelación de electroimanes superconductores ha evolucionado considerablemente para hacer frente a los desafíos que presentan los sistemas de alta potencia y gran tamaño. Las primeras aproximaciones, como la formulación **H**, describían el campo magnético en términos de la densidad de corriente en todo el sistema, pero esta formulación resulta computacionalmente costosa para modelos de gran escala. La formulación **T - A** mejoró la eficiencia al dividir el cálculo entre el potencial vectorial magnético **A** en toda la geometría y el potencial de corriente **T** en el dominio superconductor, permitiendo así el modelado de sistemas más grandes en menos tiempo [3, 2].

Sin embargo, la **formulación J - A** ha surgido como una alternativa prometedora para el modelado de dispositivos superconductores de gran escala, particularmente en imanes HTS de alta intensidad. En esta formulación, el potencial vectorial magnético **A** se calcula en todas las regiones fuera del superconductor, mientras que el potencial de corriente **J** se calcula directamente en el dominio superconductor, lo cual reduce la carga computacional y permite una mayor precisión en los cálculos [1]. Este enfoque ha demostrado ser efectivo en la predicción de fenómenos electromagnéticos complejos, como las pérdidas por histéresis y las corrientes de apantallamiento, lo que permite optimizar el rendimiento y la estabilidad de los imanes HTS en condiciones de campo alto [3].

En los trabajos [1, 3, 2] el comportamiento magnético de las cintas superconductoras ultra delgadas se describe en el marco de la aproximación de lámina delgada, es decir, se sustituye la cinta por una interfaz por donde fluye una corriente superficial y luego se hace uso de la condición de frontera de Maxwell para las componentes tangenciales del campo magnético. Cabe mencionar que el comportamiento de superconductores planares delgados de forma arbitraria (e.g., cintas, plaquetas cuadradas o rectangulares, discos) en un campo magnético perpendicular se puede también describir con el formalismo propuesto en los trabajos [4, 5, 6]. Este formalismo se basa en la solución de la ecuación de movimiento ya sea para la densidad de corriente [4] o la magnetización local (densidad de pequeños bucles de corriente, equivalente al potencial de corriente) [5, 6] y resulta ser muy eficiente.

1.1 **Objetivo general**

Desarrollar un formalismo general para describir el comportamiento magnético de superconductores tipo II irreversibles de forma arbitraria basado en la ecuación dinámica de la magnetización.

1.2 **Objetivos específicos**

- Obtener una expresión analítica de la magnetización para el caso de un prisma rectangular alargado, una cinta alargada y una placa infinita.
- Implementar en Fortran dichas expresiones para analizar el perfil espacial de la inducción magnética y la curva de histéresis de la magnetización para el caso de una placa infinita, un monocristal y un policristal de tipo REBCO.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1 Introducción a la superconductividad

2.1.1 Definición y origen histórico

La **superconductividad** surge como una propiedad que poseen ciertos materiales, al ser enfriados por debajo de una temperatura crítica específica, que les permite conducir corriente eléctrica indefinidamente sin disipar energía en forma de calor. Además de esta característica, estos materiales conocidos como superconductores, expulsan de su interior los campos magnéticos aplicados externamente, a este comportamiento se le conoce como **efecto Meissner** (del cual hablaremos adelante con más detalle).

Este fenómeno surge de un estado cuántico colectivo, en el que los electrones forman pares enlazados (conocidos como **pares de Cooper**) que se comportan como una sola entidad cuántica. Esta onda cuántica se extiende a través de todo el material, dando lugar a la conducción sin fricción.

Fue descubierta por el físico neerlandés **Heike Kamerlingh Onnes** el **8 de abril de 1911**, mientras estudiaba las propiedades eléctricas del mercurio a bajas temperaturas en la Universidad de Leiden. Este hallazgo marcó el inicio de una nueva era en la física del estado sólido y la tecnología de materiales [7].

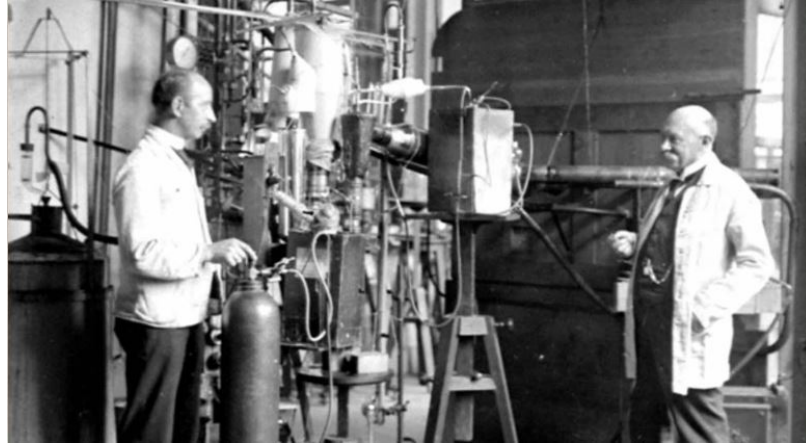


Figura 2.1: Heike Kamerlingh Onnes (a la derecha) y Gerrit Flim, su técnico jefe, en el licuefactor de helio del laboratorio de Kamerlingh Onnes en Leiden, 1911. Adaptado de *The discovery of superconductivity*, por D. van Delft y P. Kes, 2010, *Physics Today*, 63(9), p. 40. © 2010 American Institute of Physics.

2.1.2 De Ginzburg–Landau a BCS

Durante décadas este fenómeno permaneció sin una explicación teórica satisfactoria, fue hasta mediados del siglo XX cuando surgieron los primeros modelos teóricos capaces de describir sus propiedades fundamentales. Entre ellos destacan la teoría fenomenológica de Ginzburg–Landau y la teoría microscópica BCS, cada una con enfoques y alcances distintos.

- Teoría Ginzburg - Landau

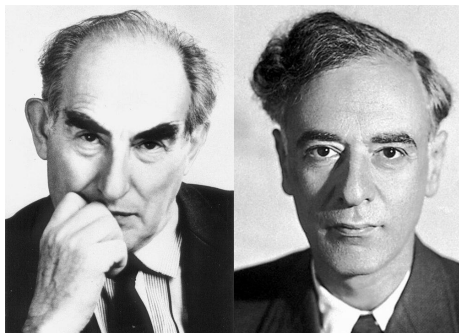


Figura 2.2: Vitali Guinzburg y Lev Landáu, figuras fundamentales en el desarrollo de la teoría de la superconductividad Ginzburg–Landau. Imágenes tomadas de Wikipedia [8] y editadas.

Fue propuesta en **1950** por **Vitaly Ginzburg** y **Lev Landau**, este modelo tiene un enfoque fenomenológico inspirado en la teoría de transiciones de fase de Landau. Introdujeron una función de orden compleja $\psi(\mathbf{r})$, que describe el estado **macroscópico** del sistema superconductor, asociada a la densidad de pares de electrones (aunque originalmente no se interpretaba así) [9].

Estas son algunas de las propiedades que permitió describir esta teoría:

- La aparición del efecto Meissner.
- La longitud de coherencia ξ y la profundidad de penetración del campo magnético λ .
- La clasificación entre superconductores tipo I y tipo II mediante el parámetro adimensional $\kappa = \lambda/\xi$ [10].

Esta teoría es particularmente útil para describir el comportamiento espacial del campo magnético y la corriente en presencia de superficies o interfaces, y ha sido ampliamente aplicada a sistemas con geometrías no triviales.

- **Teoría BCS**



Figura 2.3: John Bardeen, Leon Cooper y Robert Schrieffer, autores de la teoría BCS de la superconductividad. Fuente: Historia de la Superconductividad [11].

Por otra parte, en **1957**, **John Bardeen**, **Leon Cooper** y **Robert Schrieffer** propusieron una teoría **microscópica** basada en la mecánica cuántica, hoy conocida como teoría BCS (por las iniciales de sus autores). La cual explica la superconductividad como el resultado de la formación de **pares de Cooper**, uniones débiles de electrones con momentos opuestos cerca de la superficie de Fermi, debido a una interacción atractiva mediada por fonones (vibraciones de la red cristalina) [12].

Estas son algunas de las propiedades que permitió describir esta teoría:

- La existencia de una temperatura crítica.
- La brecha de energía en el espectro electrónico.
- La persistencia de la corriente superconductor.

Bajo este enfoque, la superconductividad es interpretada como un **estado cuántico colectivo coherente**, con una brecha de energía (Δ) que impide la dispersión normal de los electrones y, por lo tanto, la resistencia eléctrica [12].

2.1.3 Tipos de superconductores

Tradicionalmente, los superconductores se dividen en dos grandes grupos de acuerdo a su comportamiento frente al campo magnético externo aplicado y su temperatura crítica, en tipo I y tipo II. A continuación se mencionan sus diferencias:

- **Superconductores Tipo I**

Expulsan completamente el campo magnético del interior cuando están por debajo de una temperatura crítica T_c y de un campo crítico H_c , a través del efecto Meissner. Por lo general, son elementos puros, como el plomo (Pb), el aluminio (Al) y el mercurio (Hg).

- **Superconductores Tipo II**

Su comportamiento físico fue descrito teóricamente por Abrikosov en 1957. Esta clase de superconductores no expulsan completamente el campo magnético, en su lugar, permiten que el campo penetre parcialmente en forma de vórtices magnéticos, manteniendo la superconductividad hasta un segundo campo crítico H_{c2} [13]. Este comportamiento es característico de materiales como el niobio-titanio (NbTi), el niobio-estaño (NbSn) y los superconductores de alta temperatura como las cerámicas cupratas.

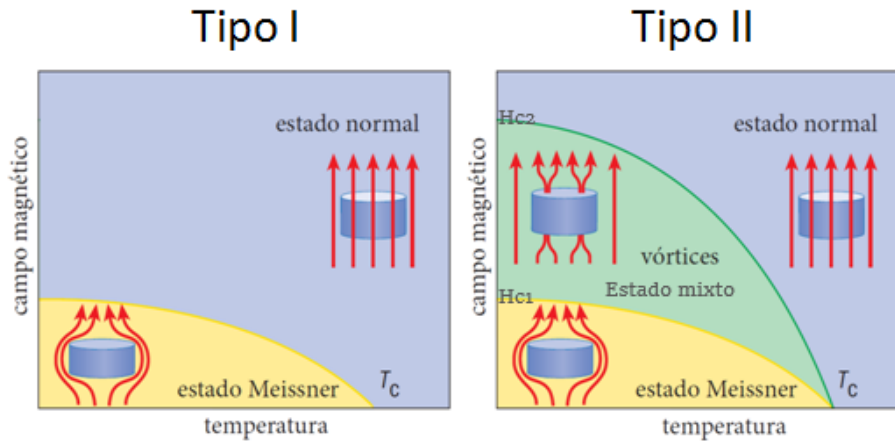


Figura 2.4: Comparación entre superconductores tipo I y tipo II. Adaptado de [14].

No obstante, a medida que la investigación sobre estos fue avanzando, se sugirieron otras categorías basadas en su composición química, estructura electrónica y contexto histórico de descubrimiento. Así, hoy en día es común hablar también de **superconductores convencionales**, **superconductores de alta temperatura crítica (HTS)** y **superconductores no convencionales** [15]. Cada uno de estos grupos encierra características únicas que han abierto nuevas fronteras en la ciencia de materiales y en sus múltiples aplicaciones.

En este contexto, resulta pertinente destacar a los superconductores de alta temperatura crítica (HTS), cuya relevancia radica en que ampliaron significativamente las posibilidades de aplicación de los materiales superconductores. A diferencia de los superconductores convencionales, los HTS pueden operar a temperaturas más elevadas, lo que disminuye las limitaciones técnicas y económicas asociadas a los sistemas de refrigeración, abriendo así un nuevo panorama para la investigación y el desarrollo tecnológico.

- **Superconductores de alta temperatura crítica (HTS)**

Durante la **década de 1980**, **J. Georg Bednorz** y **K. Alex Müller** descubrieron el primer HTS en un compuesto cerámico cuprato, lo que les hizo merecedores del Premio Nobel en 1987 [16]. La mayoría de los HTS son superconductores tipo II, capaces de mantener superconductividad incluso bajo campos magnéticos altos al permitir la penetración de vórtices magnéticos. Son en su mayoría materiales cerámicos y anisotrópicos, lo que implica propiedades que dependen fuertemente de la orientación

del campo magnético respecto a la estructura cristalina y permiten enfriamiento con nitrógeno líquido, más accesible que el helio líquido.

2.1.4 Efecto Meissner



Figura 2.5: Walther Meissner, físico alemán reconocido por el descubrimiento del efecto Meissner. Imagen tomada de la Magnet Academy, National High Magnetic Field Laboratory [17].

En **1933**, fue descubierto el Efecto Meissner por **Walther Meissner** y **Robert Ochsenfeld**, a través del cual se describió que un superconductor expulsa el campo magnético de su interior cuando está por debajo de su temperatura crítica (T_c) [9].

Este fenómeno implica que los superconductores no solo presentan resistencia eléctrica nula, sino que también se comportan como **diamagnéticos perfectos**. La expulsión del campo magnético ocurre porque en la superficie del superconductor se generan corrientes inducidas que cancelan el campo en el interior. Este efecto no puede explicarse únicamente por la ausencia de resistencia, ya que un conductor perfecto conservaría el campo magnético inicial dentro de sí mismo.

Desde el punto de vista teórico, el efecto Meissner se describe mediante las ecuaciones de London, propuestas en 1935, que introducen una profundidad característica llamada longitud de penetración de London (λ), la cual determina hasta qué punto puede penetrar el campo magnético en la superficie del superconductor

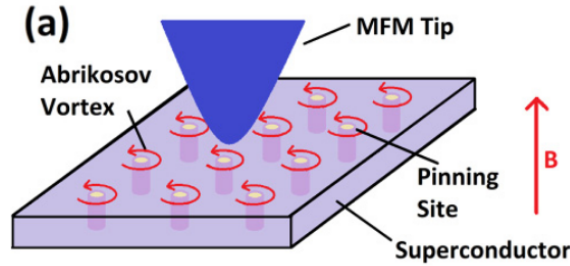


Figura 2.6: Esquema de vórtices de Abrikosov en una red periódica de sitios de pinning observados mediante punta MFM. Figura adaptada de Ma, Reichhardt and Reichhardt (2018) [18].

2.1.5 Estado mixto y la física de los vórtices

En los superconductores tipo II, cuando el campo magnético aplicado se encuentra entre los valores críticos H_{c1} y H_{c2} , el material entra en el llamado **estado mixto**. En esta fase, el campo no es totalmente expulsado (como en los tipo I), sino que penetra en forma de vórtices de flujo magnético, descritos por **Abrikosov en 1957**, resolviendo las ecuaciones de Ginzburg–Landau [19]. A nivel microscópico, el núcleo del vórtice es una región normal-conductora, mientras que alrededor circulan supercorrientes de apantallamiento. En el núcleo existen estados ligados de baja energía que determinan la disipación cuando los vórtices se mueven [20]. A nivel macroscópico, los vórtices forman una red periódica (generalmente triangular), visible por microscopía de efecto túnel o difracción de neutrones. La respuesta magnética global de la muestra queda dominada por la distribución y dinámica de los vórtices [13].

- **Dinámica de vórtices y disipación**

Cuando se induce corriente eléctrica, los vórtices experimentan una fuerza de Lorentz $\mathbf{F}_L = \mathbf{J} \times \Phi$, la cual tiende a mover los vórtices perpendicularmente a la corriente aplicada. Además existe una fuerza de anclaje (pinning), de la que hablaremos posteriormente. Existen dos regímenes dinámicos clave:

- **Flux - flow:** régimen en el que los vórtices están desanclados (o el pinning es despreciable) y se mueven libremente por la acción de \mathbf{J} . Como consecuencia, se produce un campo eléctrico proporcional a la corriente dando lugar a una resistividad efectiva llamada resistividad de flux-flow, aproximada por el modelo

de Bardeen - Stephen [21]. Este se observa cuando las corrientes están por encima del umbral de depinning, y tenemos barridos rápidos y campos moderados - altos.

- **Flux - creep:** régimen en el que incluso por debajo de la corriente crítica J_c (cuando el pinning debería impedir el movimiento), la temperatura finita permite que los vórtices salten térmicamente por encima de las barreras de pinning. No es flujo continuo, sino saltos intermitentes activados térmicamente [22].

- **Defectos y pinning**

La movilidad de los vórtices puede controlarse mediante el anclaje de vórtices en defectos estructurales que reducen su energía al alojarse en regiones donde la superconductividad está suprimida (vacancias, impurezas, dislocaciones, inclusiones, entre otros), a esto se le conoce como pinning. Hablamos de un **pinning fuerte** cuando un defecto individual es tan “profundo o agudo” que por sí solo atrapa un vórtice venciendo la elasticidad de la red. Y se considera un **pinning débil** o colectivo, cuando muchos defectos débiles no atrapan por sí solos, pero colectivamente deforman la red de vórtices en un volumen de correlación [23].

En superconductores de alta temperatura como REBCO, se usan estrategias de ingeniería de defectos para mejorar el pinning: introducción de nanopartículas de $BaZrO_3$, columnas de defectos correlacionados (nanorods), o inclusiones de óxidos. Estos defectos artificiales aumentan la densidad de corriente crítica J_c y permiten aplicaciones en campos magnéticos superiores a 20 – 30 T [24].

- **Pérdidas por Histéresis**

Cuando un superconductor tipo II se somete a campos o corrientes alternas, los vórtices se mueven de manera irreversible dentro del material, lo que origina pérdidas por histéresis. Estas pérdidas están directamente ligadas al área de magnetización $M(H)$, y se explican mediante el modelo de estado crítico de Bean, del cual hablaremos en la siguiente sección. En aplicaciones AC, las pérdidas totales incluyen: histéresis en el superconductor (dominante), pérdidas de acoplamiento entre filamentos en conductores multifilamento y pérdidas en estabilizadores metálicos por corrientes parásitas. El diseño de conductores superconductores (por ejemplo, cintas REBCO estriadas) busca reducir estas pérdidas, lo cual es esencial en sistemas eléctricos de potencia.

2.2 Modelado de superconductores tipo II en geometrías comunes

Uno de los desarrollos teóricos más completos para describir el comportamiento dinámico de superconductores tipo II bajo la influencia de un campo magnético perpendicular es el trabajo de E. H. Brandt titulado “Thick Superconductors in a Perpendicular Magnetic Field” [25]. En este trabajo se desarrolla un enfoque integral para calcular la distribución de corriente, la inducción magnética, el momento magnético, y la susceptibilidad AC, aplicable a diversas geometrías.

2.2.1 Ecuación material y modelos constitutivos

Para describir cómo responde un superconductor cuando se le aplica un campo magnético, es necesario definir una **ecuación material**, es decir, una relación que vincule las magnitudes físicas involucradas: el campo magnético \mathbf{B} , la densidad de corriente \mathbf{J} y el campo eléctrico \mathbf{E} . Estas ecuaciones varían según el tipo de superconductor y el régimen en que se encuentre (reversible o irreversible). A continuación, se describen los principales modelos considerados:

- **Curvas de magnetización reversibles**

En ciertos materiales superconductores, especialmente en condiciones de laboratorio muy controladas, es posible que el campo magnético inducido en el interior del material (\mathbf{B}) dependa únicamente del campo aplicado externamente (\mathbf{H}). El comportamiento de esta relación se considera **reversible** porque si se retira el campo externo, el sistema vuelve exactamente a su estado anterior.

Para modelar esta respuesta, Brandt propone partir de una energía libre $\mathbf{F}(\mathbf{B})$, que contiene toda la información termodinámica del sistema. Este enfoque permite modelar materiales que tienen un comportamiento más ideal, sin pérdidas de energía ni retardo en su respuesta magnética.

Sin embargo, en la mayoría de los superconductores tipo II en aplicaciones reales, el comportamiento no es completamente reversible. Por eso, el modelo más útil en la práctica es el modelo de Bean.

- **Modelo de Bean (modelo estático e irreversible)**

Este es el modelo más conocido para describir el comportamiento de superconductores tipo II cuando se encuentran en el **estado mixto**, es decir, cuando permiten que el campo magnético penetre parcialmente en forma de vórtices. Fue propuesto por **Charles P. Bean** en 1962 [26] y se basa en una simplificación poderosa: asumir que el material permite que la corriente eléctrica fluya hasta un valor máximo, llamado **corriente crítica J_c** , sin disipar energía, pero que no puede superar ese valor.

En este modelo:

- Las corrientes en el material siempre tienen una magnitud constante $|\mathbf{J}| = J_c$ en las regiones donde el campo ha penetrado.
- No se considera el movimiento térmico de los vórtices ni la dependencia del campo magnético.
- La magnetización resultante muestra **histéresis**, es decir, depende de la historia del campo aplicado, lo que se traduce en pérdidas energéticas en aplicaciones con campos alternantes (AC).

Aunque idealizado, el modelo de Bean permite calcular de forma eficiente perfiles de corriente y campo en geometrías complejas, y fue adoptado por Brandt como punto de partida para sus **modelos numéricos**.

- **Modelo de resistividad no lineal**

El modelo de Bean ignora la disipación asociada al movimiento de vórtices; por ello, desarrollos posteriores introdujeron una relación constitutiva no lineal del tipo:

$$E(J) = E_c \left(\frac{J}{J_c} \right)^n$$

donde:

- E es el campo eléctrico generado dentro del superconductor.
- E_c es un valor de referencia muy pequeño (por ejemplo, $10^{-6} V/m$).
- J es la densidad de corriente.
- J_c es la corriente crítica.

- n es un exponente que define qué tan abrupto es el paso entre un estado sin pérdida (superconductor ideal) y uno con pérdida (resistivo).

conocida como modelo E–J de ley de potencia, ampliamente formalizada por Brandt en una serie de trabajos pioneros [5], [25]. Este modelo permite describir el fenómeno conocido como “**creep de flujo**” o **deslizamiento térmico de vórtices**, del cual hablamos en la sección 2.1.5. Para $n = 1$, se recupera el comportamiento de un conductor normal, que disipa energía linealmente.

Este modelo es especialmente útil en simulaciones porque permite transiciones suaves entre distintos regímenes del material y facilita la implementación numérica estable.

- **Modelo de resistividad compleja (AC)**

Este es el último caso analizado por Brandt en [25], en el cual el campo magnético aplicado **varía en el tiempo**, como ocurre en aplicaciones con corriente alterna, por ejemplo en transformadores o imanes pulsados. En este régimen, la respuesta del superconductor se caracteriza por una **resistividad compleja**, que depende de la frecuencia del campo alternante. La parte real de la resistividad está relacionada con las **pérdidas de energía** en forma de calor; mientras que la parte imaginaria refleja la capacidad del material para **almacenar energía magnética**, como un inductor.

Este tipo de análisis permite entender fenómenos como la expulsión del campo (efecto Meissner) en regímenes AC, y es útil para optimizar el diseño de dispositivos donde se desea minimizar las pérdidas por corriente alterna.

2.2.2 Configuraciones geométricas en el modelado de superconductores tipo II

Para entender cómo se comporta un superconductor bajo un campo magnético, no basta con saber qué tipo de material es. También es crucial considerar su **forma física o geometría**, ya que la distribución del campo magnético y de las corrientes internas depende mucho de si el superconductor es delgado, grueso, largo, cilíndrico, etc.

En su artículo, E. H. Brandt estudia varias configuraciones geométricas bajo dos tipos de campo aplicado: **paralelo y perpendicular** a la muestra. Estas configuraciones se

analizan con distintos grados de complejidad matemática (1D o 2D), según sea necesario. A continuación se explican cada una de estas geometrías, de forma clara:

- **Campo paralelo (geometrías 1D y 2D)**

En este caso, el campo magnético aplicado apunta en la **misma dirección que la superficie del superconductor**, por ejemplo, a lo largo del eje de una barra o de una placa delgada. Al aplicar el campo en esta dirección, las ecuaciones que describen la evolución del campo y la corriente en el material se vuelven más simples. Esto permite usar modelos de **una sola dimensión (1D)** en algunos casos. También se reduce el efecto desmagnetizante, es decir, el efecto que tiene la forma del material en modificar el campo interno.

- **Campo perpendicular (geometrías 1D y 2D)**

Aquí el campo magnético se aplica de forma **vertical** respecto a la superficie del superconductor. Es decir, entra desde arriba o desde abajo. Esta configuración induce **corrientes circulares** dentro del superconductor que tienden a oponerse al campo aplicado. Como estas corrientes pueden variar tanto en el plano como en el espesor del material, a veces se requiere usar modelos en **dos dimensiones (2D)**, por ejemplo, una tira delgada con el campo entrando desde arriba o un disco plano (como una moneda) expuesto a un campo vertical.

En tiras delgadas, Brandt utiliza integrales unidimensionales para describir cómo la corriente fluye a lo largo de la cinta. Esta aproximación es válida cuando el espesor es mucho menor que el ancho (lámina delgada). Estas ideas son especialmente útiles para modelar **cintas REBCO**.

- **Discos y barras gruesas (geometrías 2D)**

Este es el caso más complejo pero más realista, pues se trata de materiales que tienen un **espesor no despreciable** (no son láminas delgadas). Aquí, el campo penetra tanto radial como verticalmente, por lo que la corriente también tiene una distribución bidimensional. Por ejemplo, un disco grueso (como un cilindro corto) o una barra cilíndrica bajo un campo que entra desde arriba.

2.2.3 Importancia para el presente trabajo

El formalismo desarrollado por Brandt proporciona una base teórica sólida para modelar sistemas superconductores de forma arbitraria bajo campos perpendiculares. En este trabajo se ha utilizado esta aproximación como fundamento para desarrollar un modelo electrodinámico de cintas REBCO basado en la ecuación dinámica de la magnetización, incluyendo también su implementación numérica para estudiar pérdidas por histéresis y perfiles de campo.

Particularmente, el artículo valida la utilización de modelos tipo Bean extendidos a geometrías no triviales y justifica el tratamiento integral de los efectos de borde, relevantes en configuraciones como cintas enrolladas en bobinas HTS.

2.3 Cintas REBCO

Las cintas REBCO, pertenecen a la familia de los **superconductores tipo II de alta temperatura crítica**. Estos materiales poseen la capacidad de transportar corriente eléctrica sin resistencia, incluso en condiciones de campo magnético intenso, lo que los hace ideales para aplicaciones en las que se requieren corrientes elevadas, eficiencia energética y **campos magnéticos extremos**.

A diferencia de los superconductores tradicionales como el $NbTi$ o el Nb_3Sn , que son utilizados en forma de hilos o alambres rígidos, las cintas REBCO tienen una geometría plana y flexible, similar a una cinta delgada. Esta característica estructural les permite adaptarse mejor a configuraciones compactas y curvas, como es el caso de bobinas enrolladas utilizadas en imanes de alto campo [27].

2.3.1 Estructura multicapa

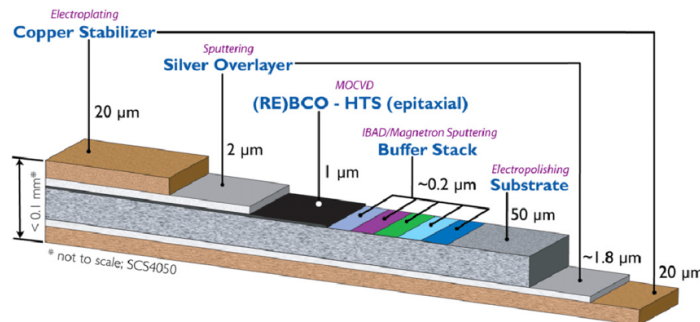


Figura 2.7: Estructura típica de una cinta superconductora REBCO. Imagen tomada del Applied Superconductivity Center, National High Magnetic Field Laboratory [28].

La estructura de las cintas REBCO se caracteriza por su diseño **plano multicapa**, de unos pocos milímetros de ancho y menos de 0.2 mm de espesor. Su diseño está optimizado para maximizar la corriente crítica, minimizar pérdidas energéticas, y proporcionar flexibilidad mecánica [29]:

- **Sustrato metálico:** comúnmente Hastelloy o acero inoxidable. Aporta resistencia mecánica.
- **Capas buffer (óxidos):** como MgO , CeO_2 , que permiten el crecimiento epitaxial

de la capa superconductora.

- **Capa superconductora REBCO:** de grosor típico entre $1\text{--}2\ \mu\text{m}$.
- **Capas estabilizadoras:** usualmente de cobre o plata, para protección térmica y derivación de corriente en caso de quench, es decir, una transición repentina del estado superconductor al estado resistivo, generalmente inducida por un aumento local de temperatura.

Este diseño permite alcanzar densidades de corriente crítica superiores a $10^8\ \text{A}/\text{m}^2$ bajo campos superiores a 20 T y temperaturas de 30–77 K.

2.3.2 Propiedades físicas relevantes

Las cintas REBCO presentan un conjunto de propiedades físicas únicas que las hacen ideales para aplicaciones en condiciones extremas. A continuación se detallan las más relevantes:

- **Temperatura crítica T_c**

La temperatura crítica T_c de los materiales REBCO, como YBCO (Yttrium Barium Copper Oxide, $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$) o GdBCO (Gadolinium Barium Copper Oxide, $\text{GdBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$), se encuentra típicamente en el rango de **85–92 K**, lo cual permite su operación práctica a **77 K**, temperatura alcanzada mediante **refrigeración con nitrógeno líquido** [27]. Esta característica representa una ventaja económica y operativa considerable frente a superconductores de baja temperatura, que requieren helio líquido para alcanzar sus condiciones de operación.

- **Campo magnético crítico H_c**

Las cintas REBCO pueden operar por **encima de los 30 teslas**, incluso manteniendo altas densidades de corriente crítica J_c , lo que supera ampliamente los límites de superconductores convencionales como NbTi ($\approx 10\ \text{T}$) o Nb_3Sn ($\approx 18\ \text{T}$) [30].

Este rendimiento ha sido comprobado en aplicaciones como el imán de 32 T desarrollado por el NHMFL, que utilizó insertos fabricados con cintas REBCO [31].

- **Alta anisotropía**

Una propiedad distintiva de este tipo de materiales es su alta anisotropía, es decir, que su comportamiento electromagnético varía significativamente dependiendo de la orientación del campo magnético aplicado respecto a su estructura cristalina. El rendimiento máximo de la cinta se alcanza cuando el campo se encuentra paralelo a la superficie de la cinta, mientras que disminuye notablemente si el campo se orienta perpendicular al plano [32].

- **Flexibilidad mecánica**

Gracias al uso de un sustrato metálico (como Hastelloy), las cintas REBCO tienen una alta flexibilidad mecánica, pudiendo doblarse o enrollarse sin fracturarse ni perder rendimiento. Esta propiedad es clave en aplicaciones donde las cintas deben ser integradas en bobinas compactas o en sistemas móviles, como: motores eléctricos superconductores, imanes toroidales en reactores de fusión o sistemas de levitación magnética (Maglev).

2.3.3 Desafíos

A pesar de sus impresionantes capacidades, las cintas REBCO todavía enfrentan limitaciones técnicas importantes que deben ser superadas para garantizar su implementación a gran escala en aplicaciones industriales, científicas y médicas. Los desafíos más relevantes se describen a continuación:

- **Corrientes de apantallamiento**

Uno de sus principales problemas, especialmente en configuraciones de bobinas para imanes de campo alto, es la aparición de corrientes de apantallamiento (también llamadas screening currents). Estas corrientes son inducidas dentro de la cinta como respuesta al campo magnético aplicado y tienden a circular en el volumen del superconductor de forma **no uniforme**.

Estas corrientes producen campos magnéticos internos adicionales que pueden: distorsionar el campo útil en la región central de la bobina, reducir la homogeneidad del campo magnético, provocar fluctuaciones temporales (efectos transitorios) o complicar la calibración en dispositivos sensibles como RMN o aceleradores.

Este fenómeno ha sido ampliamente estudiado por investigadores como Pardo et al. [33], quienes demostraron que su efecto es particularmente relevante en cintas con

gran ancho y alta J_c , y que se agrava cuando las cintas están enrolladas en capas múltiples. Además, estas corrientes persisten incluso en condiciones estacionarias, lo que representa un problema crónico para aplicaciones donde se requiere un campo muy uniforme.

- **Pérdidas por histéresis y corrientes alternas**

Otro reto importante son las pérdidas energéticas que se producen en condiciones dinámicas, como cuando el campo magnético externo cambia con el tiempo o cuando las cintas transportan corriente alterna. Estas pérdidas generan calor dentro del sistema criogénico, lo cual puede: elevar la temperatura localmente, reduciendo J_c , aumentar el consumo de refrigeración o provocar transiciones no deseadas al estado resistivo (quench).

- **Costo elevado y complejidad de fabricación**

Uno de los principales obstáculos para la adopción masiva de las cintas REBCO es su alto costo de producción, especialmente en comparación con los superconductores de primera generación. Su fabricación involucra procesos sofisticados como:

- **Depósito por haz de electrones** (E-beam evaporation)
- **Sputtering epitaxial** sobre sustratos cerámicos o metálicos con capas tampón alineadas cristalográficamente
- **Procesamiento de texturización biaxial**, necesario para lograr la orientación óptima de los granos del material superconductor.

Estos procesos requieren condiciones de vacío, temperatura y alineamiento muy precisas, lo que eleva los costos tanto en equipamiento como en tiempo de producción. Aunque ha habido avances recientes en métodos de deposición más económicos (como metal-organic chemical vapor deposition, MOCVD), aún no se logra una solución de bajo costo y alta escala completamente estandarizada [29].

Capítulo 3

Desarrollo del Modelo Electrodinámico para Superconductores Tipo II

3.1 Sistema de ecuaciones fundamentales

Consideramos un superconductor tipo II bajo la influencia de un campo magnético \mathbf{H}_a . El campo magnético total en este estará dado como:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}_a + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{j} \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} dV', \quad (3.1)$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ y el segundo término es el campo generado por las corrientes internas \mathbf{j} , que se obtiene mediante la ley de Biot-Savart; además, la integral se realiza sobre el volumen de la muestra, de manera que $\mathbf{j} \neq 0$. Siendo $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{M}$, podemos reescribir (3.1) como:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}_a + \mu_0 \mathbf{M} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left[\frac{3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{M}}{R^3} \right] dV', \quad (3.2)$$

Esto es útil para describir el comportamiento de los vórtices magnéticos en superconductores de tipo II, fundamentales en su capacidad de soportar campos altos sin perder superconductividad. En el apéndice A, se encuentra el desarrollo de la ecuación (3.1) a la (3.2).

Para obtener una ecuación de movimiento para la magnetización, derivamos respecto al

tiempo la expresión (3.2) y usamos la Ley de inducción de Faraday: $\dot{\mathbf{B}} = -\nabla \times \mathbf{E}$, con la cual llegamos a:

$$\mu_0 \dot{\mathbf{M}} = - \left(\nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \dot{\mathbf{H}}_a \right) - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left[\frac{3(\dot{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\dot{\mathbf{M}}}{R^3} \right] dV'. \quad (3.3)$$

Esta ecuación puede resolverse numéricamente como en [5] y [34].

Para describir la relación entre la magnetización \mathbf{M} , la corriente \mathbf{j} y el campo magnético \mathbf{B} , se introduce la ecuación material (modelo de estado crítico doble):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{j}, \mathbf{B}) = \mathbf{E}(\mathbf{M}, \mathbf{B}) \quad (3.4)$$

la cual describe el campo eléctrico en función de la magnetización y el campo magnético en un superconductor. Además, debemos considerar la descomposición de la corriente, tal que:

$$\mathbf{j} = \left(\mathbf{j} \cdot \frac{\mathbf{B}}{B} \right) \frac{\mathbf{B}}{B} + \frac{\mathbf{B}}{B} \times \left(\mathbf{j} \times \frac{\mathbf{B}}{B} \right) = \mathbf{j}_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp} \quad (3.5)$$

Resolver estas ecuaciones en una geometría tridimensional es computacionalmente pesado, ya que la magnetización depende de tres coordenadas espaciales y del tiempo, lo que implica considerar un número grande de puntos en la malla de simulación,

$$M(x_i, y_j, z_k), \quad 1 \leq i \leq N_x, \quad 1 \leq j \leq N_y, \quad 1 \leq k \leq N_z$$

3.1.1 Prisma rectangular alargado

Establecemos un modelo geométrico del superconductor para simplificar las ecuaciones y hacer el problema manejable. Consideramos una muestra en forma prismática rectangular con dimensiones a, b y c , como se muestra en la Figura 3.1. Suponemos que $c \rightarrow \infty$, pero a y b son finitos. Bajo esta suposición, la magnetización solo depende de x , y y no de z , de tal manera que:

$$\mu_0 \mathbf{M} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H}_a - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} dy' \int_{-a/2}^{a/2} dx' \left[\frac{4(\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\rho}}{\rho^4} - \frac{2(M_x \hat{x} + M_y \hat{y})}{\rho^2} \right] \quad (3.6)$$

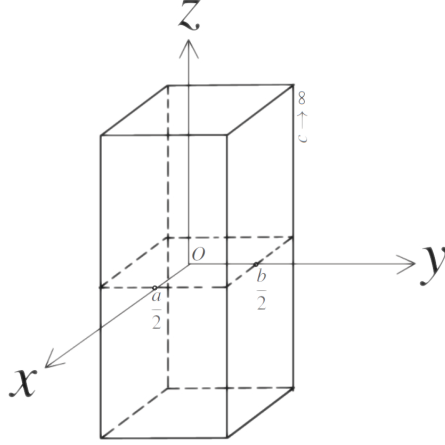


Figura 3.1: Geometría del superconductor en forma de prisma rectangular alargado

$$\begin{aligned} \mu_0 \dot{\mathbf{M}} = & - \left(\nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \dot{\mathbf{H}}_a \right) \\ & - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} dy' \int_{-a/2}^{a/2} dx' \left[\frac{4(\dot{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\rho})\rho}{\rho^4} - \frac{2(\dot{M}_x \hat{x} + \dot{M}_y \hat{y})}{\rho^2} \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde $\boldsymbol{\rho} = (x - x', y - y', 0)$. Esta ecuación sirve para modelar la situación experimental con un campo aplicado como en el artículo [35]. El desarrollo de las ecuaciones (3.6) y (3.7) se encuentra en el apéndice B.

3.1.2 Cinta alargada

Dado que nuestro trabajo está centrado en la modelación físico-matemática de las cintas REBCO, ahora consideramos una muestra donde: $b \ll a < c \rightarrow \infty$, como se ilustra en la Figura 3.2. Se cambian $\dot{\mathbf{M}}$ y $\nabla \times \mathbf{E}$ por su promedio sobre el espesor:

$$\langle \dot{\mathbf{M}} \rangle = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \dot{\mathbf{M}}(x, y) dy, \quad \langle \nabla \times \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \nabla \times \mathbf{E}(x, y) dy, \quad (3.8)$$

entonces $\langle \dot{\mathbf{M}} \rangle$ y $\langle \nabla \times \mathbf{E} \rangle$ sólo dependen de x y podemos reescribir (3.7) como:

$$\begin{aligned} \mu_0 \langle \dot{\mathbf{M}} \rangle = & - \left(\langle \nabla \times \mathbf{E} \rangle + \mu_0 \dot{\mathbf{H}}_a \right) \\ & - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} dy' \int_{-a/2}^{a/2} dx' \left[\frac{4 \left(\langle \dot{\mathbf{M}} \rangle \cdot \boldsymbol{\rho} \right) \rho}{\rho^4} - \frac{2 \left(\langle \dot{M}_x \rangle \hat{x} + \langle \dot{M}_y \rangle \hat{y} \right)}{\rho^2} \right]. \end{aligned}$$

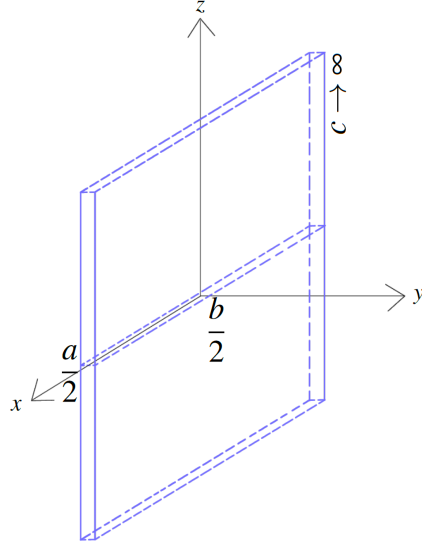


Figura 3.2: Geometría del superconductor en forma de cinta alargada

Nos interesa la geometría en donde el campo es perpendicular al plano de la cinta, entonces: $\mathbf{H}_a = H_a(t)\hat{y}$. Debido a que el campo variable se induce sobre la componente y , entonces nos fijamos en esta:

$$\begin{aligned} \mu_0 \langle \dot{M}_y \rangle &= - \langle (\nabla \times \mathbf{E})_y \rangle - \mu_0 \dot{H}_a \\ &= - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx' \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy' \left[\frac{4 \left(\langle \dot{\mathbf{M}} \rangle \cdot \rho \right) (y - y')}{\rho^4} - \frac{2 \langle \dot{M}_y \rangle}{\rho^2} \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

siendo:

$$\begin{aligned} \langle (\nabla \times \mathbf{E})_y \rangle &= \frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy (\nabla \times \mathbf{E})_y = \frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy (\epsilon^{xzy} \partial_x E_z + \epsilon^{zxy} \partial_z E_x) \\ &= \frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy (-\partial_x E_z + \underbrace{\partial_z E_x}_0) = -\partial_x \langle E_z \rangle, \end{aligned} \quad (3.10)$$

sustituimos (3.10) en (3.9):

$$\begin{aligned} \mu_0 \langle \dot{M}_y \rangle &= \partial_x \langle E_z \rangle - \mu_0 \dot{H}_a \\ &= - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx' \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy' \left[\frac{4 \left(\langle \dot{\mathbf{M}} \rangle \cdot \rho \right) (y - y')}{\rho^4} - \frac{2 \langle \dot{M}_y \rangle}{\rho^2} \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

y promediamos sobre el espesor:

$$\begin{aligned} \mu_0 \langle \dot{M}_y \rangle &= \partial_x \langle E_z \rangle - \mu_0 \dot{H}_a \\ &- \frac{\mu_0}{4\pi b} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx' \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy' \left[\frac{4 \left(\langle \dot{\mathbf{M}} \rangle \cdot \boldsymbol{\rho} \right) (y - y')}{\rho^4} - \frac{2 \langle \dot{M}_y \rangle}{\rho^2} \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Desarrollamos la expresión entre corchetes:

$$\begin{aligned} \frac{4 \left(\langle \dot{\mathbf{M}} \rangle \cdot \boldsymbol{\rho} \right) (y - y')}{\rho^4} - \frac{2 \langle \dot{M}_y \rangle}{\rho^2} &= \frac{4 \langle \dot{M}_x \rangle (x - x') (y - y')}{\rho^4} + \frac{4 \langle \dot{M}_y \rangle (y - y')^2}{\rho^4} - \frac{2 \langle \dot{M}_y \rangle}{\rho^2} \\ &= 4 \langle \dot{M}_x \rangle \left[\frac{(x - x') (y - y')}{\rho^4} \right] + 4 \langle \dot{M}_y \rangle \left[\frac{(y - y')^2}{\rho^4} \right] \\ &- 2 \langle \dot{M}_y \rangle \left(\frac{1}{\rho^2} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

de manera que tenemos que realizar tres integrales a lo largo de y e y' :

$$\begin{aligned} 1) \quad &\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy' \frac{(x - x') (y - y')}{\rho^4}, \quad 2) \quad \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy' \frac{(y - y')^2}{\rho^4} \\ &y \quad 3) \quad \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy' \frac{1}{\rho^2}. \end{aligned}$$

Para la primera expresión

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy' \frac{(x - x') (y - y')}{\rho^4} &= (x - x') \left\{ \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy' \frac{y}{[(x - x')^2 + (y - y')^2]^2} \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy' \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \frac{y'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2]^2} \right\}, \end{aligned}$$

podemos intercambiar $y \longleftrightarrow y'$ en la segunda integral doble y por tanto

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy' \frac{(x - x') (y - y')}{\rho^4} = 0$$

Para la segunda expresión hacemos el cambio de variable $u = y - y'$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy' \frac{(y - y')^2}{\rho^4} &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy' \frac{(y - y')^2}{[(x - x')^2 + (y - y')^2]^2} \\
&= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \left\{ \int_{y-\frac{b}{2}}^{y+\frac{b}{2}} du \frac{u^2}{[(x - x')^2 + u^2]^2} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \left\{ \frac{1}{(x - x')} \left[\arctan \left(\frac{y + \frac{b}{2}}{x - x'} \right) - \arctan \left(\frac{y - \frac{b}{2}}{x - x'} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{y + \frac{b}{2}}{(x - x')^2 + (y - y')^2} + \frac{y - \frac{b}{2}}{(x - x')^2 + (y - y')^2} \right\}
\end{aligned}$$

y luego hacemos otros dos cambios de variable: $v = y + \frac{b}{2}$ y $w = y - \frac{b}{2}$, de manera que:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy' \frac{(y - y')^2}{\rho^4} &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^b dv \left[\frac{1}{(x - x')} \arctan \left(\frac{v}{x - x'} \right) - \frac{v}{(x - x')^2 + v^2} \right] \right. \\
&\quad \left. - \int_{-b}^0 dw \left[\frac{1}{(x - x')} \arctan \left(\frac{w}{x - x'} \right) - \frac{w}{(x - x')^2 + w^2} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{b}{(x - x')} \arctan \left(\frac{b}{x - x'} \right) - \ln [(x - x')^2 + b^2] \right. \\
&\quad \left. + \ln [(x - x')^2] \right\} - \frac{1}{2} \left\{ -\ln [(x - x')^2] \right. \\
&\quad \left. - \frac{b}{(x - x')} \arctan \left(-\frac{b}{x - x'} \right) + \ln [(x - x')^2 + b^2] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ -2 \ln [(x - x')^2 + b^2] + 2 \ln [(x - x')^2] \right\}
\end{aligned}$$

Para la tercera expresión hacemos nuevamente los cambios de variable $u = y - y'$, $v = y + \frac{b}{2}$ y $w = y - \frac{b}{2}$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy' \frac{1}{\rho^2} &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy' \frac{1}{(x - x')^2 + (y - y')^2} \\
&= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \left[\int_{y-\frac{b}{2}}^{y+\frac{b}{2}} du \frac{1}{(x - x')^2 + u^2} \right] \\
&= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \left[\frac{1}{(x - x')} \arctan \left(\frac{y + \frac{b}{2}}{x - x'} \right) - \frac{1}{(x - x')} \arctan \left(\frac{y - \frac{b}{2}}{x - x'} \right) \right] \\
&= \frac{1}{(x - x')} \left[\int_0^b dv \arctan \left(\frac{v}{x - x'} \right) - \int_{-b}^0 dw \arctan \left(\frac{w}{x - x'} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy' \frac{1}{\rho^2} &= \left\{ \frac{b}{(x-x')} \arctan\left(\frac{b}{x-x'}\right) - \frac{1}{2} \ln[(x-x')^2 + b^2] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \ln[(x-x')^2] \right\} - \left\{ -\frac{1}{2} \ln[(x-x')^2] \right. \\
&\quad \left. - \frac{b}{(x-x')} \arctan\left(-\frac{b}{x-x'}\right) + \frac{1}{2} \ln[(x-x')^2 + b^2] \right\} \\
&= -\ln[(x-x')^2 + b^2] + \ln[(x-x')^2]
\end{aligned}$$

De manera que, juntando las tres expresiones:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy' \left[\frac{4(\langle \dot{\mathbf{M}} \rangle \cdot \rho)(y-y')}{\rho^4} - \frac{2\langle \dot{M}_y \rangle}{\rho^2} \right] \\
&= 4\langle \dot{M}_x \rangle(0) + 4\langle \dot{M}_y \rangle \left(\frac{1}{2} \right) \left\{ -2 \ln[(x-x')^2 + b^2] + 2 \ln[(x-x')^2] \right\} \\
&\quad - 2\langle \dot{M}_y \rangle \left\{ -\ln[(x-x')^2 + b^2] + \ln[(x-x')^2] \right\} \\
&= 2\langle \dot{M}_y \rangle \ln \left[\frac{(x-x')^2}{(x-x')^2 + b^2} \right]
\end{aligned}$$

por lo que la ecuación final para la cinta alargada superconductora en un campo magnético perpendicular es

$$\mu_0 \langle \dot{M}_y \rangle = \partial_x \langle E_z \rangle - \mu_0 \dot{H}_a - \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{2}{b} \right) \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx' \langle \dot{M}_y \rangle \ln \left[\frac{(x-x')^2}{(x-x')^2 + b^2} \right]. \quad (3.14)$$

3.1.3 Placa infinita

Consideremos ahora una placa delgada muy grande, aunque con espesor no despreciable (b finito, $a \rightarrow \infty$, $c \rightarrow \infty$), como se muestra en la Figura 3.3. Partiendo de las ecuaciones (3.6) y (3.7), si hacemos que $a \rightarrow \infty$ entonces ni \mathbf{M} ni $\dot{\mathbf{M}}$ dependen de x' , por lo que se puede calcular una integral de la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' \left[\frac{4(\mathbf{C} \cdot \rho)\rho}{\rho^4} - \frac{2(C_x \hat{x} + C_y \hat{y})}{\rho^2} \right]$$

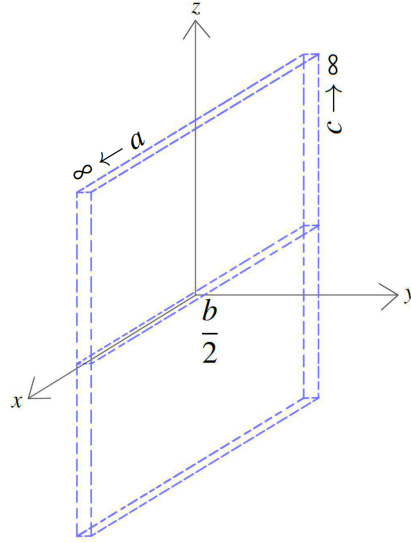


Figura 3.3: Geometría del superconductor en forma de placa infinita

donde \mathbf{C} es una función vectorial que representa a \mathbf{M} o $\dot{\mathbf{M}}$. Desarrollamos la expresión entre corchetes:

$$\begin{aligned} \frac{4(\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\rho}}{\rho^4} - \frac{2(C_x \hat{\mathbf{x}} + C_y \hat{\mathbf{y}})}{\rho^2} &= \frac{4C_x (x - x')^2 \hat{\mathbf{x}}}{[(x - x')^2 + (y - y')^2]^2} + \frac{4C_x (x - x') (y - y') \hat{\mathbf{y}}}{[(x - x')^2 + (y - y')^2]^2} \\ &+ \frac{4C_y (y - y') (x - x') \hat{\mathbf{x}}}{[(x - x')^2 + (y - y')^2]^2} + \frac{4C_y (y - y')^2 \hat{\mathbf{y}}}{[(x - x')^2 + (y - y')^2]^2} \\ &- \frac{2(C_x \hat{\mathbf{x}} + C_y \hat{\mathbf{y}})}{(x - x')^2 + (y - y')^2}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} dx' \left[\frac{4(\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\rho}}{\rho^4} - \frac{2(C_x \hat{\mathbf{x}} + C_y \hat{\mathbf{y}})}{\rho^2} \right] \\ &= 4C_x \hat{\mathbf{x}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{(x - x')^2}{[(x - x')^2 + (y - y')^2]^2} \\ &+ 4C_x (y - y') \hat{\mathbf{y}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{(x - x')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2]^2} \\ &+ 4C_y (y - y') \hat{\mathbf{x}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{(x - x')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2]^2} \\ &+ 4C_y (y - y')^2 \hat{\mathbf{y}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2]^2} \\ &- 2(C_x \hat{\mathbf{x}} + C_y \hat{\mathbf{y}}) \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{1}{(x - x')^2 + (y - y')^2} \end{aligned}$$

y hacemos el cambio de variable $u = x - x'$:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left[\frac{4(\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\rho}) \rho}{\rho^4} - \frac{2(C_x \hat{\mathbf{x}} + C_y \hat{\mathbf{y}})}{\rho^2} \right] \\ &= 4C_x \hat{\mathbf{x}} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{u^2}{[u^2 + (y - y')^2]^2} + 4C_x (y - y') \hat{\mathbf{y}} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{u}{[u^2 + (y - y')^2]^2} \\ &+ 4C_y (y - y') \hat{\mathbf{x}} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{u}{[u^2 + (y - y')^2]^2} + 4C_y (y - y')^2 \hat{\mathbf{y}} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{1}{[u^2 + (y - y')^2]^2} \\ &- 2(C_x \hat{\mathbf{x}} + C_y \hat{\mathbf{y}}) \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{1}{u^2 + (y - y')^2}. \end{aligned}$$

Usando:

$$\begin{aligned} I) \quad & \int dx \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) - \frac{x}{x^2 + a^2} \right], \\ II) \quad & \int dx \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2 + a^2} \right), \\ III) \quad & \int dx \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^3} \right) \left[\arctan \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{ax}{x^2 + a^2} \right] \\ y \quad IV) \quad & \int dx \frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left[\frac{4(\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\rho}) \rho}{\rho^4} - \frac{2(C_x \hat{\mathbf{x}} + C_y \hat{\mathbf{y}})}{\rho^2} \right] \\ &= 4C_x \hat{\mathbf{x}} \left[\frac{1}{y - y'} \left(\frac{\pi}{2} \right) - 0 - \frac{1}{y - y'} \left(-\frac{\pi}{2} \right) + 0 \right] + 4C_x (y - y') \hat{\mathbf{y}} \left(-\frac{1}{2} \right) (0 - 0) \\ &+ 4C_y (y - y') \hat{\mathbf{x}} \left(-\frac{1}{2} \right) (0 - 0) + 4C_y (y - y')^2 \hat{\mathbf{y}} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1}{(y - y')^3} \left[\frac{\pi}{2} + 0 - \left(-\frac{\pi}{2} \right) - 0 \right] \\ &- 2(C_x \hat{\mathbf{x}} + C_y \hat{\mathbf{y}}) \frac{1}{y - y'} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right], \\ &\implies \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left[\frac{4(\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\rho}) \rho}{\rho^4} - \frac{2(C_x \hat{\mathbf{x}} + C_y \hat{\mathbf{y}})}{\rho^2} \right] \\ &= 2\pi C_x \hat{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{y - y'} \right) + 2\pi C_y \hat{\mathbf{y}} \left(\frac{1}{y - y'} \right) - 2\pi (C_x \hat{\mathbf{x}} + C_y \hat{\mathbf{y}}) \left(\frac{1}{y - y'} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para la placa infinita las ecuaciones adquieren la forma típica (es decir, no dependen de las coordenadas a lo largo de los lados a y c infinitos) y se pueden escribir como:

$$\mu_0 \mathbf{M} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H}_a, \quad (3.15)$$

$$\mu_0 \dot{\mathbf{M}} = - \left(\nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \dot{\mathbf{H}}_a \right), \quad (3.16)$$

para la geometría de campo magnético paralelo al plano de la placa.

Capítulo 4

Cálculo Numérico, Resultados y Análisis

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos mediante la simulación numérica del comportamiento de superconductores tipo II bajo la aplicación de un campo magnético externo. El estudio se realizó utilizando un modelo de estado crítico tipo Bean, implementado en Fortran, para resolver la evolución espacio-temporal de la inducción magnética \mathbf{B} y la magnetización \mathbf{M} . Además, se consideró lo siguiente:

- Una **placa superconductora infinita**, como caso base de validación, estudiada en dos variantes estructurales: **Monocristalina y Policristalina**.

Este análisis permite observar cómo influyen la geometría y la microestructura del material en la distribución de la inducción magnética y la magnetización.

4.1 Placa infinita

El modelo de una placa superconductora idealizada de grosor finito pero extensión infinita en las otras dimensiones es ampliamente utilizado en el estudio de superconductores tipo II debido a su simplicidad matemática. Además, permite capturar efectos físicos esenciales sin la complicación de condiciones de frontera en los bordes de una placa real (finita).

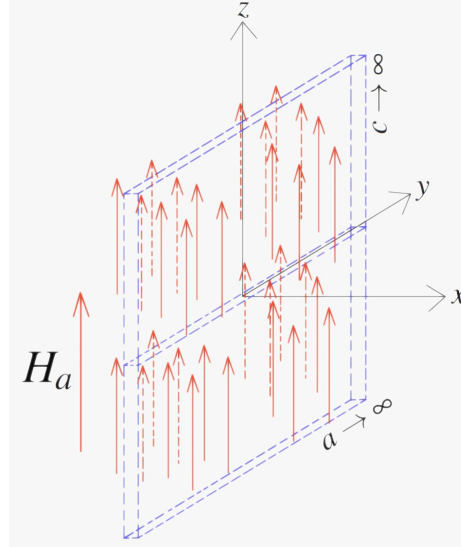


Figura 4.1: Geometría de la placa infinita simulada sometida a un campo magnético externo paralelo, \mathbf{H}_a . La líneas rojas representan esquemáticamente las líneas de flujo magnético.

4.1.1 Implementación numérica: Caso base

La Fig. 4.1 ilustra la geometría considerada en este capítulo: una placa superconductora infinita con superficies paralelas al plano y - z en las posiciones $x = 0$ y $x = D$. El campo magnético externo \mathbf{H}_a se orienta a lo largo del eje z . De acuerdo con los resultados obtenidos para esta geometría en el capítulo anterior, las ecuaciones que describen la evolución del campo eléctrico \mathbf{E} , la inducción magnética \mathbf{B} , y la magnetización \mathbf{M} están dadas por las ecuaciones (3.15) y (3.16), y se deben complementar con la ecuación material $\mathbf{E} = (\mathbf{M}, \mathbf{B})$ (3.4). Sin embargo, en este caso particular, podemos pasar de manera directa a la descripción comúnmente utilizada [36] en términos de \mathbf{E} , \mathbf{B} y la densidad de corriente eléctrica \mathbf{j} . Utilizando $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{M}$ y las ecuaciones (3.15) y (3.16), obtenemos las leyes de Ampère y de Faraday:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4.1)$$

Estas ecuaciones se pueden resolver modelando la ecuación constitutiva $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{j}, \mathbf{B})$.

Dado que \mathbf{H}_a es paralelo al eje z , la inducción magnética lo es también para un medio isótropo, es decir, $\mathbf{B} = B \hat{z}$, y depende solamente de la coordenada x dentro del

superconductor ($0 < x < D$), donde supondremos que $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Las condiciones de frontera para $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ están dadas por

$$\mathbf{B}(x = 0) = \mu_0 \mathbf{H}_a, \quad \mathbf{B}(x = D) = \mu_0 \mathbf{H}_a. \quad (4.2)$$

Las ecuaciones de Maxwell (sin considerar la corriente de desplazamiento), dadas en la ecuación (4.1), se pueden reescribir entonces en la forma:

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0 j, \quad \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}. \quad (4.3)$$

La relación constitutiva entre el campo eléctrico $\mathbf{E} = E \hat{y}$ y la densidad de corriente eléctrica $\mathbf{j} = j \hat{y}$ se describirá con el modelo de estado crítico de Bean:

$$j = j_c(|B|) \frac{E}{|E|}. \quad (4.4)$$

Para lograr resolver el sistema de ecuaciones diferenciales fuertemente no lineales (4.3) y (4.4), es conveniente escribir la ecuación material (4.4) de la siguiente manera:

$$E(j) = \begin{cases} 0, & |j| \leq j_c(|B|), \\ \rho(|j| - j_c(|B|))j/|j|, & |j| \geq j_c(|B|), \end{cases} \quad (4.5)$$

donde se ha introducido la resistividad ρ , que juega el papel de un parámetro auxiliar. Siendo esto, en el caso de variaciones lentas del campo magnético aplicado, cuando se producen campos eléctricos de magnitud pequeña ($|E| \ll \rho j_c(|B|)$), el cálculo de la distribución espacial de $B(x)$ resulta ser cuasi-relajado e independiente del parámetro ρ que se elija. El método de solución numérica que aplicaremos se basará en el que se describe en [37]. Por tanto, después de sustituir la primera ecuación de (4.3) (ley de Ampère) y la ecuación material (4.5) (modelo de Bean) en la segunda ecuación de (4.3) (ley de Faraday), se obtiene una ecuación no lineal de primer orden en t y de segundo orden en x .

Los valores de la inducción magnética en las superficies de la placa se fijan en concordancia con las condiciones de frontera (4.2). Los valores de $B(x_i)$ en el interior de la placa superconductora ($i = 1, \dots, N - 1$) se obtienen resolviendo el sistema de $N - 1$ ecuaciones diferenciales no lineales resultantes para $B(x_i)$ mediante un método de diferencias finitas de primer orden. Con esta solución numérica para $B(x)$ calcularemos la distribución de magnetización en la placa, $\mathbf{M}(x) = M(x)\hat{z}$, donde

$$M(x) = \left(\frac{B(x)}{\mu_0} \right) - H_a.$$

Posteriormente, se calcula la magnetización promediada sobre el espesor de la placa :

$$\langle M \rangle = -\frac{1}{\mu_0 D} \int_0^D (B(x) - \mu_0 H_a) dx. \quad (4.6)$$

a fin de comparar con curvas experimentales de $\langle M \rangle$ vs H_a .

- **Condiciones iniciales y parámetros del modelo**

La muestra se modeló como una placa infinita de espesor total

$$D = 0.8 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad (4.7)$$

dividida en $N = 100$ intervalos uniformes, con paso espacial

$$\Delta x = \frac{D}{N} = 8 \times 10^{-6} \text{ m}. \quad (4.8)$$

El cálculo inicia con campo magnético nulo en todo el volumen ($B(x) = 0$) y un incremento externo inicial

$$\Delta B = 0.01 \text{ T}, \quad (4.9)$$

que se utiliza para barrer el campo aplicado desde cero hasta la completa penetración y posteriormente de regreso, describiendo así el ciclo $M(H)$.

El código incluye además una resistividad efectiva

$$\rho = 1.0 \times 10^{-7} \Omega \text{ m}, \quad (4.10)$$

utilizada únicamente para estabilizar los pasos numéricos, y una densidad crítica de corriente expresada como

$$J_c = 1.0 \times 10^{10} \text{ A/m}^2, \quad (4.11)$$

- Análisis de resultados

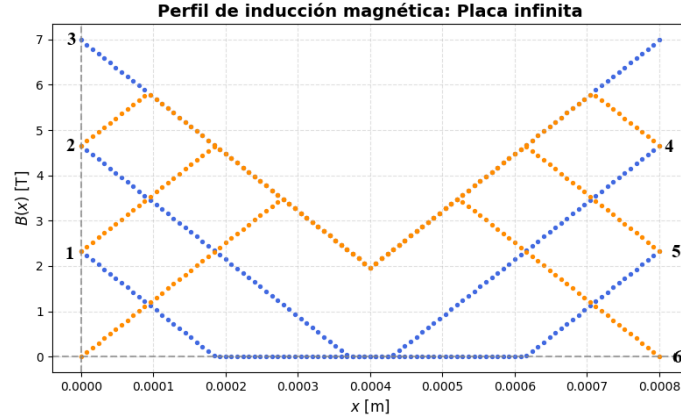


Figura 4.2: Perfil espacial de $B(x)$ de la placa infinita.

En la Fig. 4.2 se presentan los perfiles de la inducción magnética $B(x)$ calculados numéricamente para el caso ideal cuando la densidad del flujo de corriente eléctrica tiene una magnitud constante ($|j| = j_c$) en las regiones de la placa superconductora donde ha penetrado el campo magnético ($B(x) \neq 0$). La suposición de que la densidad crítica de corriente eléctrica j_c sea constante (como hemos propuesto en (4.11)) se conoce como el modelo de Bean.

El campo inicial H_a aplicado es nulo, por lo que la distribución inicial es $B(x) = 0$ en todo el intervalo $0 \leq x \leq D$. A medida que el campo externo se incrementa, la inducción magnética crece en las regiones aledañas a las superficies de la placa superconductora infinita. Nótese que, para valores pequeños de H_a (como es el caso de las dos primeras curvas de color azul en la Fig. 4.2), $B(x)$ decrece desde su valor superficial $B(0) = B(D) = \mu_0 H_a$ hasta anularse en algún punto dentro de la placa. En estas zonas superficiales, $B(x)$ se describe mediante líneas rectas con pendientes iguales a $dB/dx = \pm\mu_0 j_c$.

Para valores suficientemente grandes de H_a (véase la Fig. 4.2, curva 3), el campo magnético logra penetrar en toda la muestra y los perfiles de $B(x)$ adquieren la forma característica de “V”. Con el subsecuente aumento de H_a , la forma de estos perfiles se conserva, aunque $B(x)$ continúa incrementando su valor en toda la placa.

Las curvas de color naranja muestran la evolución de $B(x)$ al disminuir H_a después de

que éste había alcanzado un valor máximo $H_{a,\max} = 7$ T. Se observa que la inducción magnética decrece únicamente cerca de las superficies, mientras que en el interior el perfil conserva la forma previa al inicio de la disminución de H_a .

Finalmente, cuando H_a alcanza el valor cero, $B(x)$ se anula también en las superficies $x = 0$ y $x = D$, pero queda atrapado flujo magnético dentro de la placa, ya que $B(x) \neq 0$ en su interior.

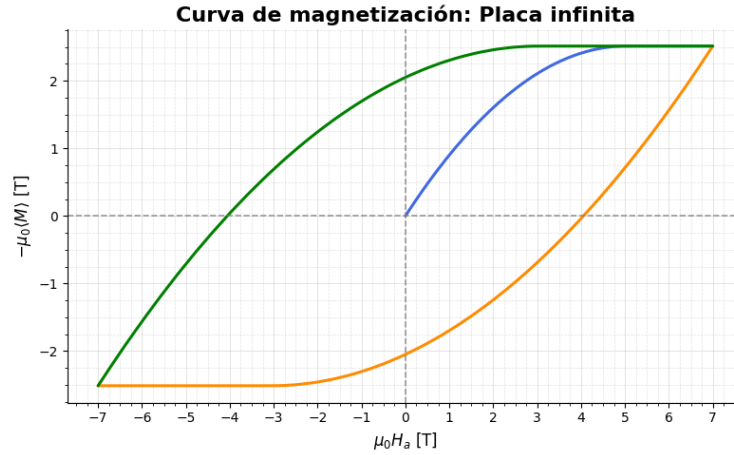


Figura 4.3: Curva de magnetización para la placa infinita, mostrando el comportamiento histerético típico del régimen crítico.

En la Fig. 4.3 se presenta el resultado del cálculo de la magnetización promediada sobre el espesor de la placa (dada por la ecuación (4.6)), en función de la intensidad del campo magnético aplicado. Al inicio, $H_a = 0$, $B(x) = 0$, y por tanto $\langle M \rangle = 0$. Conforme se incrementa H_a , la magnetización promediada $\langle M \rangle$ adquiere valores negativos (véase la curva azul que inicia en el origen en la Fig. 4.3), indicando que la respuesta del superconductor es diamagnética. Sin embargo, para valores suficientemente grandes de H_a , la magnetización se satura, alcanzando una magnitud máxima $|\langle M \rangle|_{\max}$ que se mantiene constante al continuar incrementando H_a . Esto se debe a que los perfiles tipo V de la inducción magnética no cambian su pendiente, consecuencia de que se eligió una densidad crítica de corriente constante J_c (independiente de $|\mathbf{B}|$). Al disminuir el campo aplicado, la magnetización promediada cambia de signo (véase la Fig. 4.3). Cuando $H_a = 0$, la magnetización promediada, $\langle M(H_a = 0) \rangle$, es distinta de cero y su valor se conoce como **magnetización remanente**, que se debe

al hecho de que queda flujo magnético atrapado en el interior de la placa superconductora (véase la curva 6 de color naranja en la Fig. 4.2). H_a se continúa variando hasta alcanzar el valor $H_a = -H_{a,\max} = -7\text{ T}$.

Posteriormente, H_a se vuelve a incrementar hasta completar un ciclo de histéresis, llegando nuevamente a $H_a = H_{a,\max} = 7\text{ T}$ (vea la curva verde de la Fig. 4.3). Se puede observar que en el último trayecto la curva de cierre del ciclo de histéresis y la curva inicial transitoria se unen para luego evolucionar de la misma manera. El punto donde se unen ambas curvas (la azul y la verde) corresponde al valor de H_a donde el campo magnético ha penetrado en toda la placa superconductora.

4.1.2 Implementación numérica: Caso Monocristal

Para estudiar la respuesta magnética de un monocristal tipo REBCO, se utilizó un procedimiento numérico análogo al implementado en el caso de la placa infinita, basado en el modelo de estado crítico. La geometría de la placa infinita isótropa es realista para las cintas de REBCO cuando los ejes cristalinos **a** y **b** de un superconductor laminar son paralelos a las superficies de la cinta. En este caso, se puede considerar que la respuesta de la cinta REBCO a un campo magnético paralelo es isótropa.

- **Condiciones iniciales y parámetros del modelo**

Los parámetros de simulación se definieron tomando como referencia los valores experimentales reportados en el trabajo de Zhang et al. (2025) [38] (vease la Fig. 7), quienes analizaron el comportamiento de monocristales de YBCO obtenidos mediante manufactura aditiva. Este estudio sirvió como guía para establecer las condiciones iniciales y los rangos de variación del campo magnético aplicados en nuestra simulación.

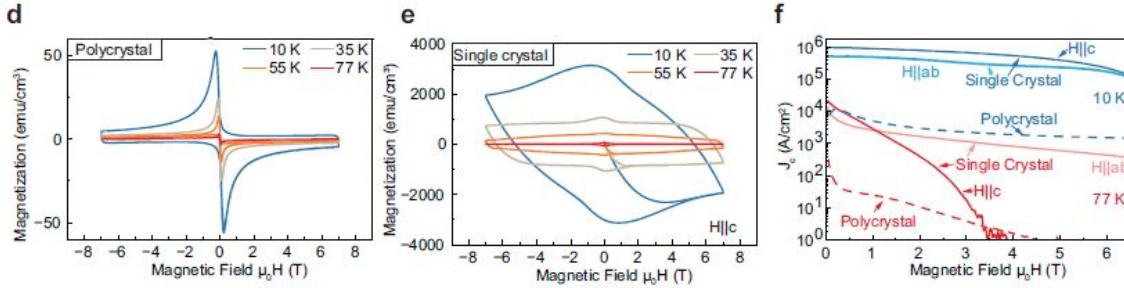


Figura 4.4: **Curvas de magnetización experimentales de YBCO.** Magnitudes experimentales de magnetización $M(H)$ para YBCO policristalino (panel d) y monocristalino (panel e) a distintas temperaturas: 10, 35, 55 y 77 K, con el campo aplicado paralelo al eje cristalográfico c para el monocristal ($H \parallel c$). El panel (f) muestra la dependencia de la densidad de corriente crítica $J_c(H)$ para ambas configuraciones cristalinas a 10 y 77 K. Las curvas a 10 K fueron tomadas como referencia para la validación del modelo numérico de magnetización implementado en esta tesis [38].

El monocristal se modeló con un espesor total de

$$D = 0.8 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad (4.12)$$

dividido en $N = 100$ intervalos uniformes a lo largo de la dirección de penetración del campo. De esta manera, el paso espacial utilizado en el cálculo corresponde a

$$\Delta x = \frac{D}{N} = 8 \times 10^{-6} \text{ m.} \quad (4.13)$$

El campo aplicado se incrementó en pasos de

$$\Delta B = 0.01 \text{ T,} \quad (4.14)$$

comenzando desde un valor inicial de $B(x) = 0.0 \text{ T}$. Estos incrementos permiten describir la evolución gradual del campo magnético desde la superficie hasta el centro del monocristal y, posteriormente, se invirtió el sentido del barrido del campo.

Para mantener la estabilidad numérica del algoritmo, se introdujo una resistividad efectiva de

$$\rho = 1.0 \times 10^{-7} \Omega \text{ m,} \quad (4.15)$$

que actúa únicamente como un parámetro de control y relajación, sin modificar las propiedades físicas del sistema.

La densidad crítica de corriente se definió como una función dependiente de la inducción magnética dentro del superconductor, expresada como

$$J_c(|B|) = \frac{1.0 \times 10^{10}}{(1 + |B|/5.0 \text{ T})} \text{ A}\cdot\text{m}^{-2}. \quad (4.16)$$

Esta relación introduce una variación suave de J_c a lo largo del espesor del monocristal, disminuyendo ligeramente con $|B|$ en el interior del material. Dicha dependencia busca representar de forma simplificada la ligera disminución del transporte de corriente con la magnitud de B en el monocristal. El valor máximo de la densidad crítica del monocristal alcanza $1 \times 10^{10} \text{ A}\cdot\text{m}^{-2}$, equivalente a $1 \times 10^6 \text{ A}\cdot\text{cm}^{-2}$, lo cual concuerda con los valores característicos de superconductores REBCO de alta calidad a temperatura del nitrógeno líquido.

- **Análisis de resultados**

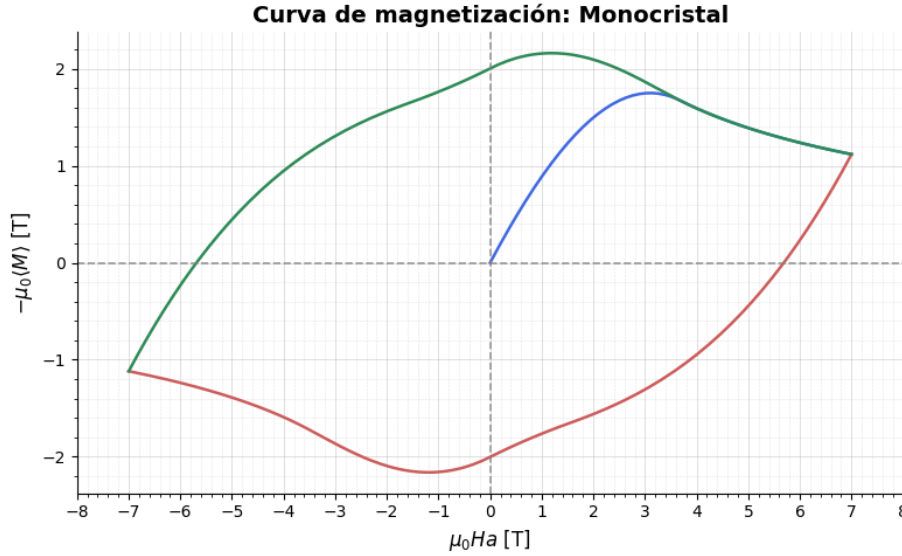


Figura 4.5: Ciclo de histéresis magnética de un monocristal superconductor YBCO.

La Fig. 4.4 presenta la curva de histéresis calculada numéricamente para un superconductor monocristalino habiendo considerado una densidad de corriente crítica J_c dependiente de la inducción magnética, dada por la ecuación (4.16). El efecto de la disminución de la corriente crítica con el aumento de la magnitud de la inducción magnética dentro del superconductor altera notablemente las curvas de histéresis de la magnetización (compare con las curvas de las Figs. 4.3 y 4.4). Se puede observar que el modelo de Bean para la densidad de corriente crítica solo describe cualitativamente bien la curva de histéresis del monocristal.

En las Figs. 4.5–4.7 y 4.8–4.12 se presentan, respectivamente, las distribuciones espaciales de la inducción magnética $B(x)$ y la magnetización $M(x)$. Los colores de las curvas corresponden a los intervalos de variación del campo magnético aplicado en la curva de histéresis de la Fig. 4.4. Comparando los perfiles de $B(x)$ con los resultados que predice el modelo de Bean (Fig. 4.3), es evidente que la dependencia de J_c en función de B no solo altera la pendiente de las distribuciones espaciales, sino influye considerablemente en la forma de la curva de histéresis de $\langle M \rangle$ vs. H_a , reproduciendo cuantitativamente las curvas experimentales para el monocristal superconductor.

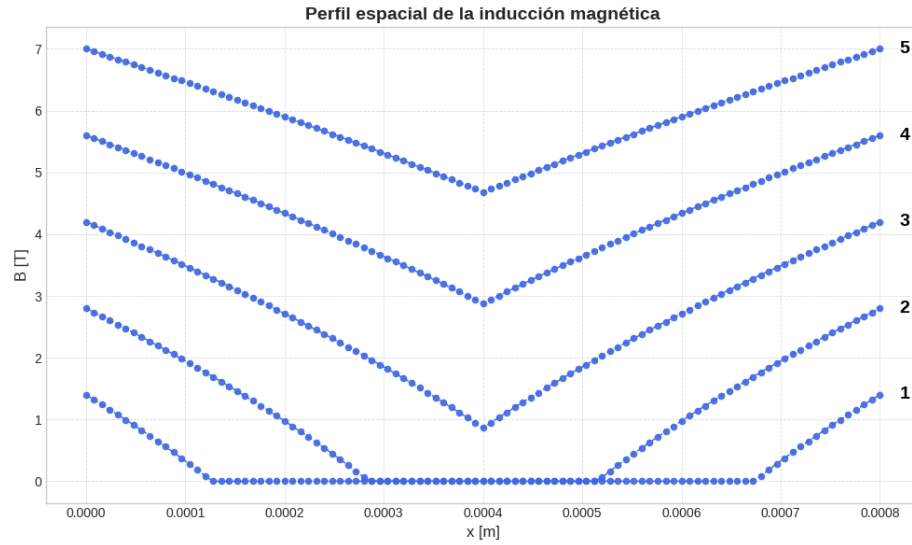


Figura 4.6: Evolución de $B(x)$ en la curva de inicio (azul) de la magnetización de un monocristal YBCO.

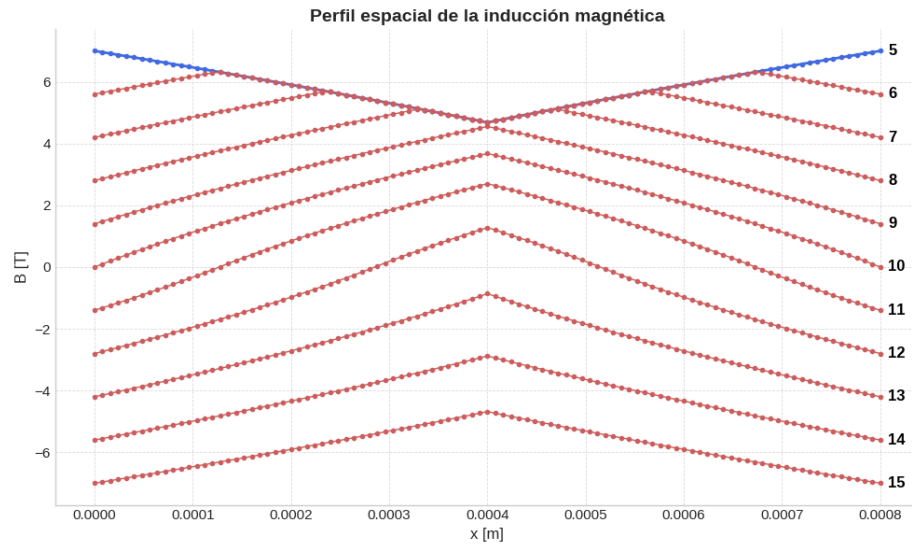


Figura 4.7: Evolución de $B(x)$ cuando el campo aplicado decrece en el monocristal YBCO (curva roja en el ciclo de histéresis magnética de la Fig. 4.4).

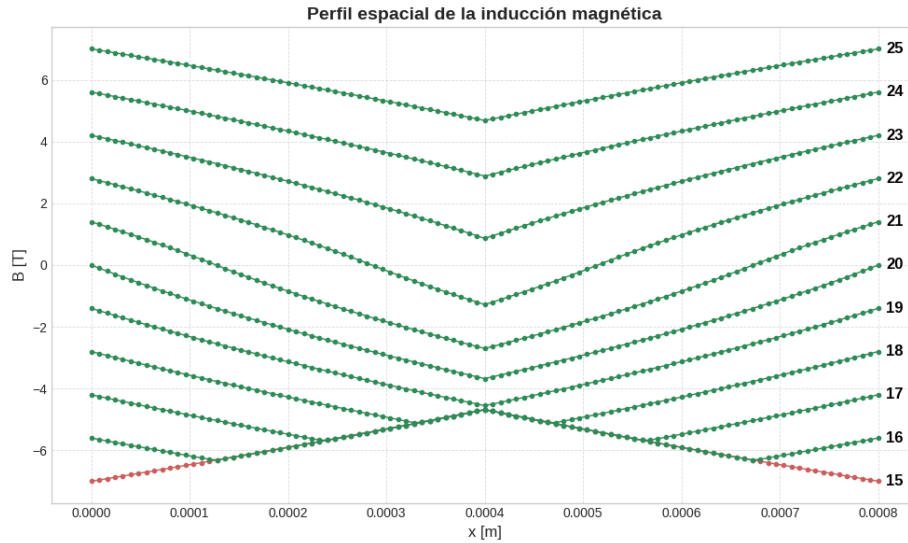


Figura 4.8: Evolución de $B(x)$ cuando el campo aplicado vuelve a aumentar en el monocristal YBCO (curva verde en el ciclo de histéresis magnética de la Fig. 4.4).

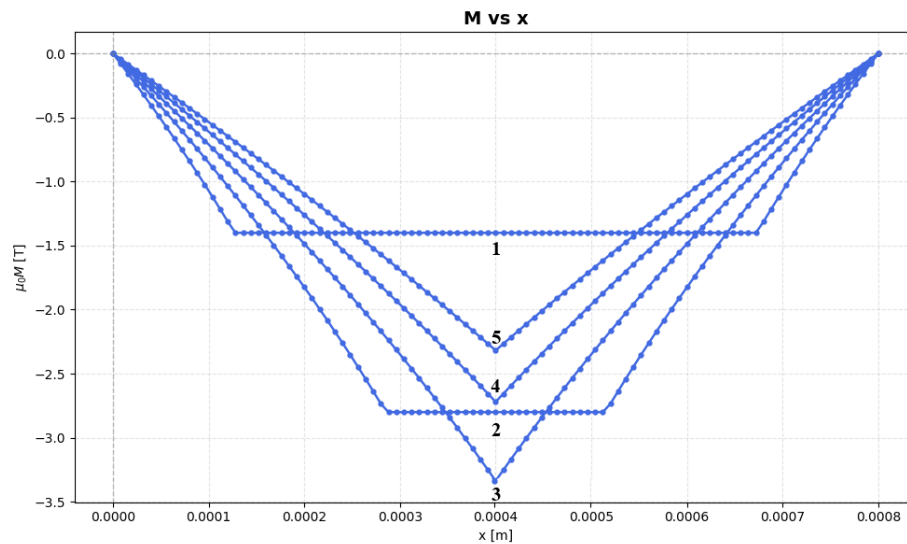


Figura 4.9: Distribuciones espaciales de la magnetización $M(x)$ en el monocristal YBCO durante la rama ascendente inicial del ciclo de histéresis de la Fig. 4.4. Estas curvas corresponden a los primeros incrementos del campo aplicado (etiquetas 1–5) y se presentan en color azul, en correspondencia con la porción inicial del ciclo mostrada en la Fig. 4.5.

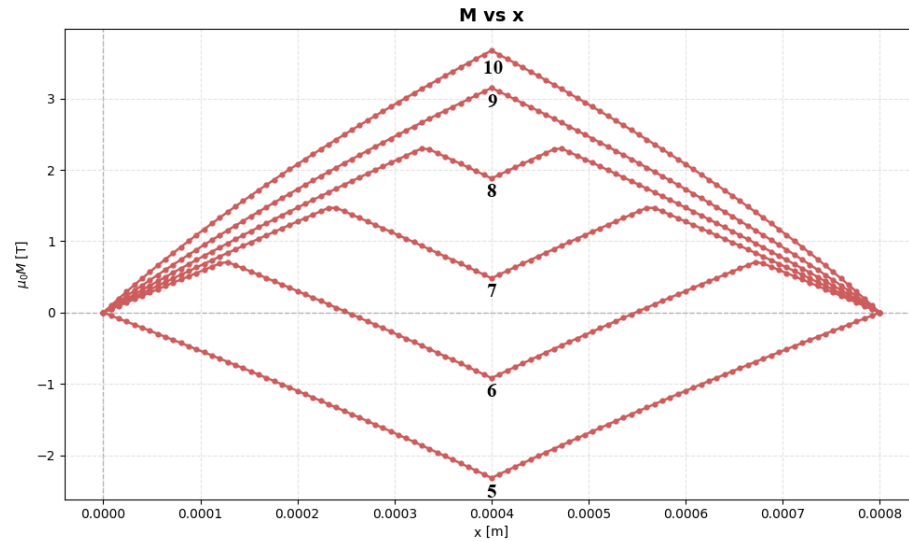


Figura 4.10: Distribuciones espaciales de la magnetización $M(x)$ cuando el campo aplicado decrece, corresponde a la rama positiva del ciclo de histéresis de la Fig. 4.4. Las curvas asociadas (etiquetas 5–10) se indican en color rojo, reflejando el mismo intervalo de campo que en los perfiles de $B(x)$ de la Fig. 4.6.

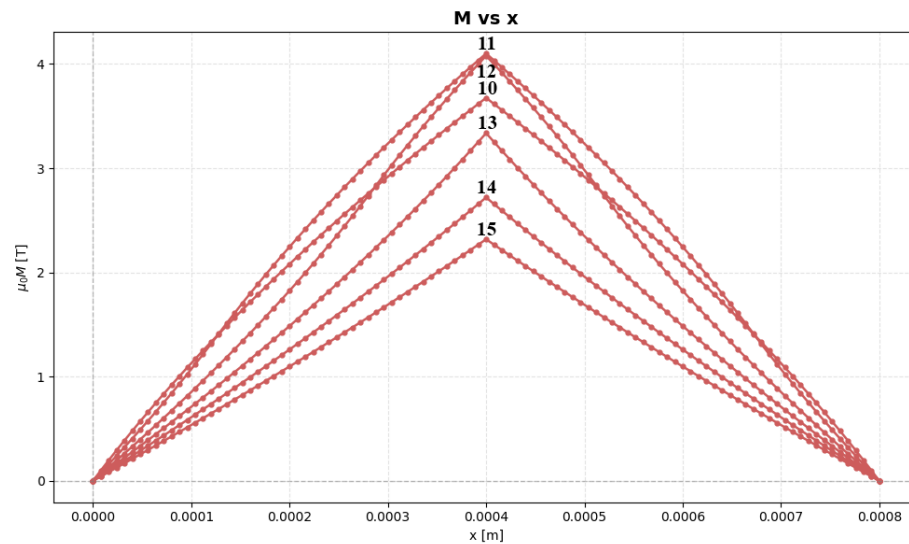


Figura 4.11: Distribuciones espaciales de la magnetización $M(x)$ en el monocristal YBCO. Estas curvas corresponden a un intervalo intermedio del ciclo de histéresis (curvas con etiquetas 10–15 de la Fig. 4.6) y se muestran en color rojo, destacando la transición entre la saturación positiva y la posterior inversión del campo.

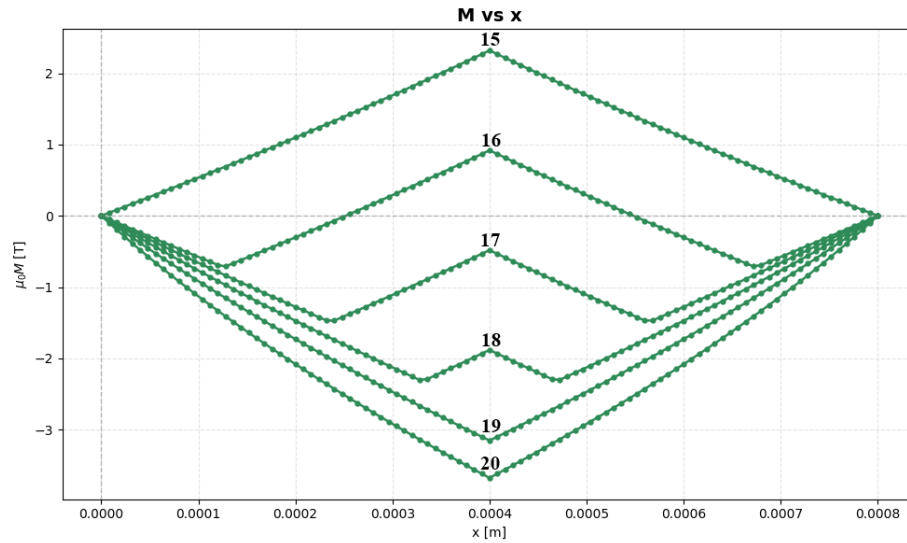


Figura 4.12: Distribuciones espaciales de la magnetización $M(x)$ durante la rama negativa del ciclo de histéresis del monocristal YBCO. Las curvas representadas (etiquetas 15–20) se muestran en color verde, en correspondencia con los perfiles de $B(x)$ de la Fig. 4.7 para el mismo intervalo de campo aplicado.

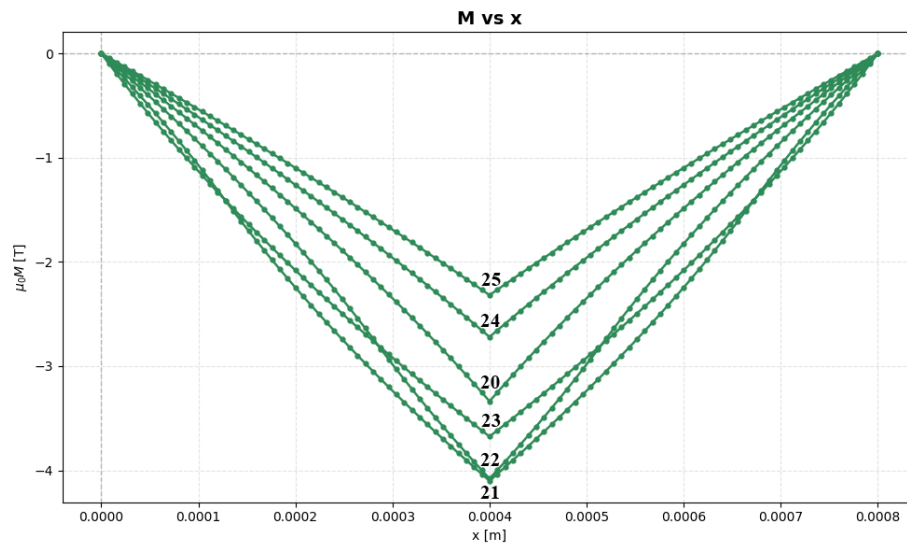


Figura 4.13: Distribuciones espaciales de la magnetización $M(x)$ en la etapa final del ciclo de histéresis de la Fig. 4.4. Las curvas, asociadas a las últimas etiquetas del ciclo (20–25), se presentan en color verde y van en correspondencia a las curvas de $B(x)$ de la Fig. 4.7.

4.1.3 Implementación numérica: Caso Policristal

El análisis numérico del comportamiento magnético de un policristal superconductor tipo REBCO se llevó a cabo siguiendo el mismo enfoque utilizado en los casos de la placa infinita isótropa y el monocristal, basado en el modelo de estado crítico. En esta simulación se buscó reproducir de forma cualitativa la respuesta magnética de un material granular, donde la presencia de límites de grano y regiones con distinta conectividad eléctrica afectan la distribución de corriente crítica y la penetración del flujo magnético.

- **Condiciones iniciales y parámetros del modelo**

Los parámetros de simulación se definieron tomando como referencia los valores experimentales reportados en el trabajo de Zhang et al. (2025) [38], quienes analizaron el comportamiento de policristales de YBCO. Este estudio sirvió como guía para establecer las condiciones iniciales y los rangos de variación del campo magnético aplicados en nuestra simulación.

El policristal se representó como una muestra de espesor total

$$D = 1.59 \times 10^{-2} \text{ m}, \quad (4.17)$$

dividida en $N = 100$ intervalos uniformes, lo que define un paso espacial de

$$\Delta x = \frac{D}{N} = 1.59 \times 10^{-4} \text{ m}. \quad (4.18)$$

El campo magnético aplicado se incrementó en pasos de

$$\Delta B = 0.01 \text{ T}, \quad (4.19)$$

comenzando desde un valor inicial de $B(x) = 0.0 \text{ T}$.

Para garantizar la estabilidad del algoritmo, se introdujo una resistividad efectiva de

$$\rho = 1.0 \times 10^{-7} \Omega \text{ m}, \quad (4.20)$$

utilizada únicamente con fines numéricos.

La densidad crítica de corriente se definió como una función dentro de la muestra, de la forma

$$J_c(|B|) = \frac{1.0 \times 10^8}{(1 + |B|/0.7 \text{ T})^2} \text{ A}\cdot\text{m}^{-2}. \quad (4.21)$$

Esta dependencia cuadrática decreciente representa la disminución del valor de J_c con $|B|$ en el interior del policristal, describiendo de forma realista la pérdida de conectividad eléctrica entre los granos.

- **Análisis de resultados**

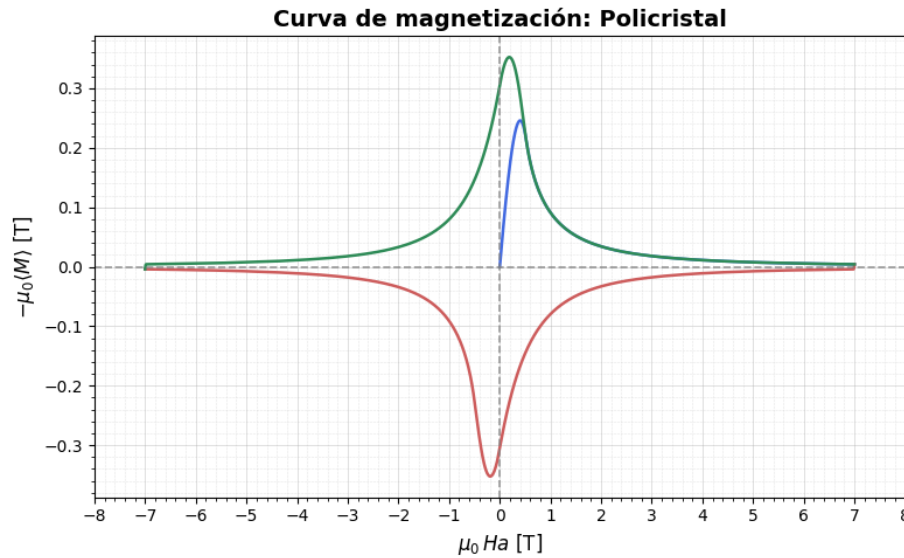


Figura 4.14: Ciclo de histéresis magnética de un policristal superconductor YBCO.

En la Fig. 4.13 se presenta la curva de histéresis de la magnetización calculada numéricamente para el caso de superconductor policristalino con una densidad de corriente crítica J_c dependiente de la inducción magnética, dada por la ecuación (4.21). Comparando este resultado con la curva de histéresis obtenida para el monocristal superconductor (Fig. 4.4), resulta evidente que la dependencia de J_c en función de B disminuye notablemente el área de la curva de histéresis, puesto que la magnetización promediada disminuye rápidamente con el campo magnético aplicado.

Para entender mejor el efecto de la dependencia de J_c en función de B , se presentan, respectivamente, las distribuciones espaciales de la inducción magnética $B(x)$ y

la magnetización $M(x)$ en las Figs. 4.14–4.16 y 4.17–4.21. Los colores de las curvas corresponden a los intervalos de variación del campo magnético aplicado en la curva de histéresis de la Fig. 4.13. Evidentemente, las pendientes de las curvas de $B(x)$ disminuyen drásticamente con el incremento de B en el interior de la placa superconductora. Como consecuencia, la magnitud de la magnetización promediada disminuye notablemente con el incremento de H_a , como se observa en las curvas experimentales de un superconductor policristalino.

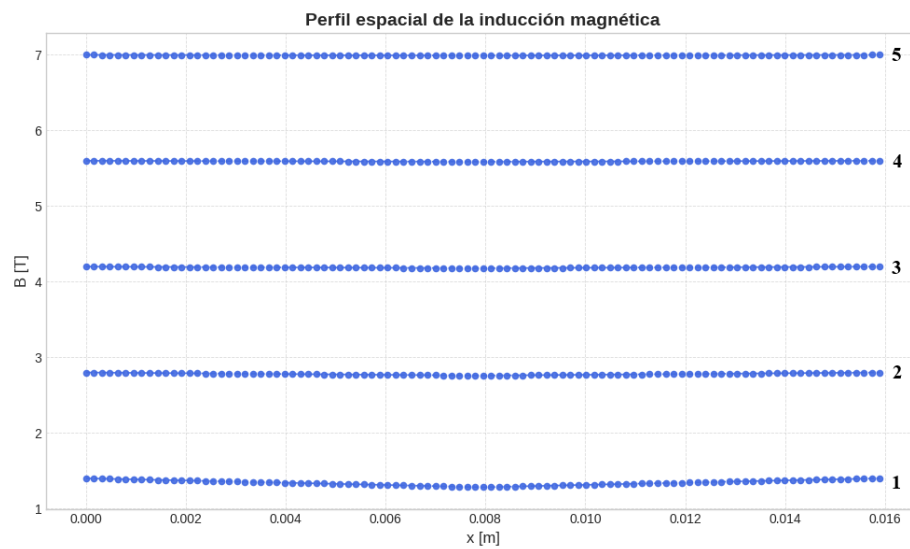


Figura 4.15: Evolución de $B(x)$ en la curva de inicio (azul) de la magnetización de un policristal YBCO (campo aplicado positivo).

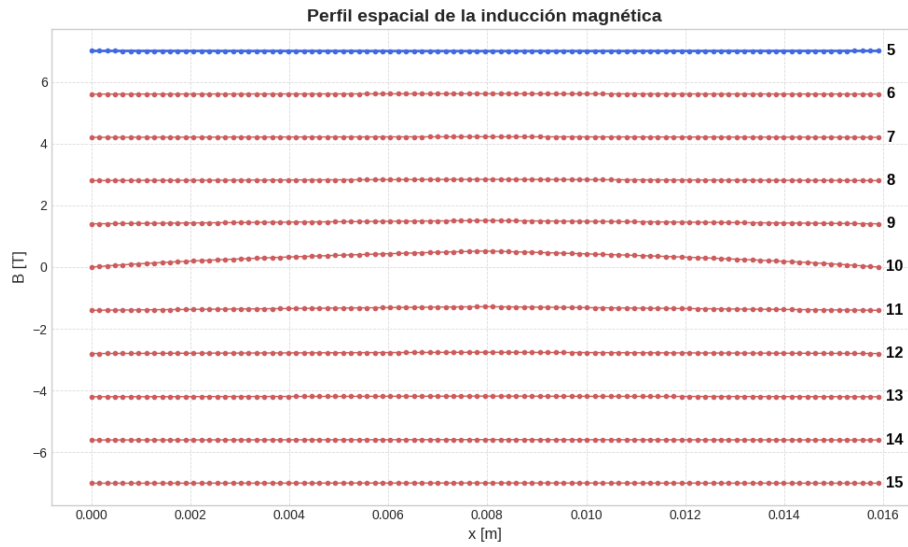


Figura 4.16: Evolución de $B(x)$ cuando invertimos el signo de barrido del campo aplicado (negativo) en el policristal YBCO (curva roja en el ciclo de histéresis magnética de la Fig. 4.13).

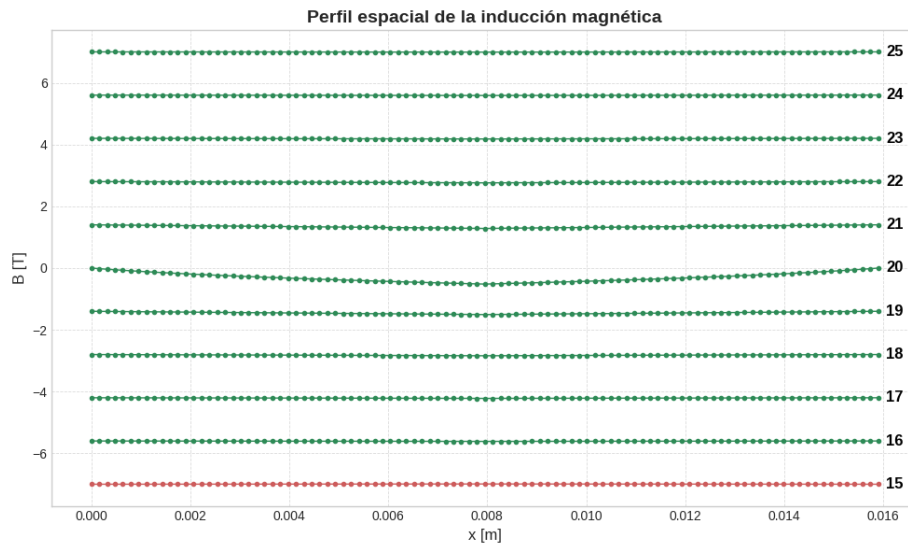


Figura 4.17: Evolución de $B(x)$ cuando el campo aplicado vuelve a aumentar en el policristal YBCO (curva verde en el ciclo de histéresis magnética de la Fig. 4.13).

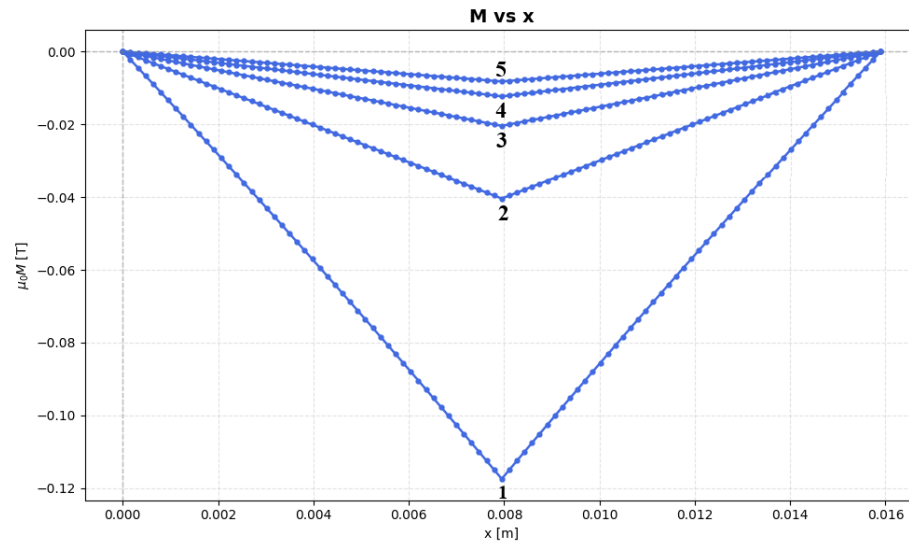


Figura 4.18: Distribuciones espaciales de la magnetización $M(x)$ en el policristal YBCO durante la etapa inicial del ciclo de histéresis. Las curvas, mostradas en color azul, corresponden a los primeros incrementos del campo aplicado. La magnitud de $M(x)$ es pequeña y su variación espacial es suave debido a la baja corriente crítica efectiva en las regiones intergranulares del policristal

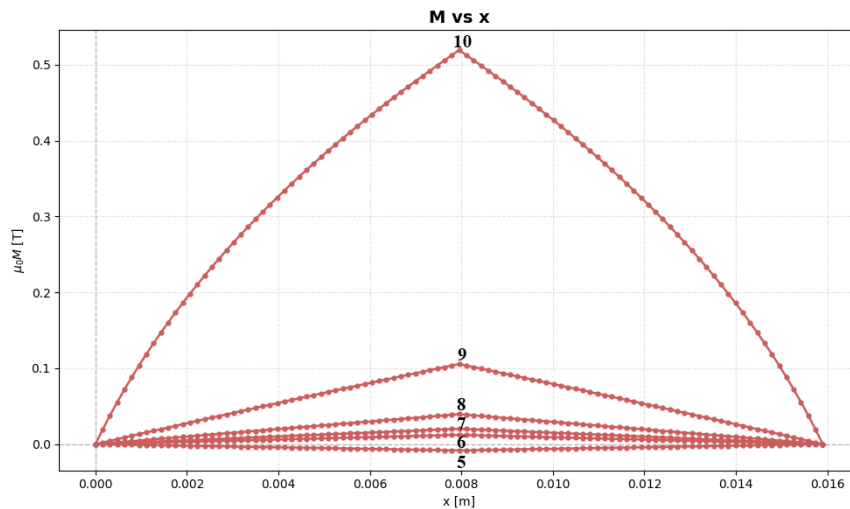


Figura 4.19: Distribuciones espaciales de la magnetización $M(x)$ para valores de campo cercanos al máximo positivo en el policristal YBCO (etiquetas 5–10 de la Fig. 4.15).

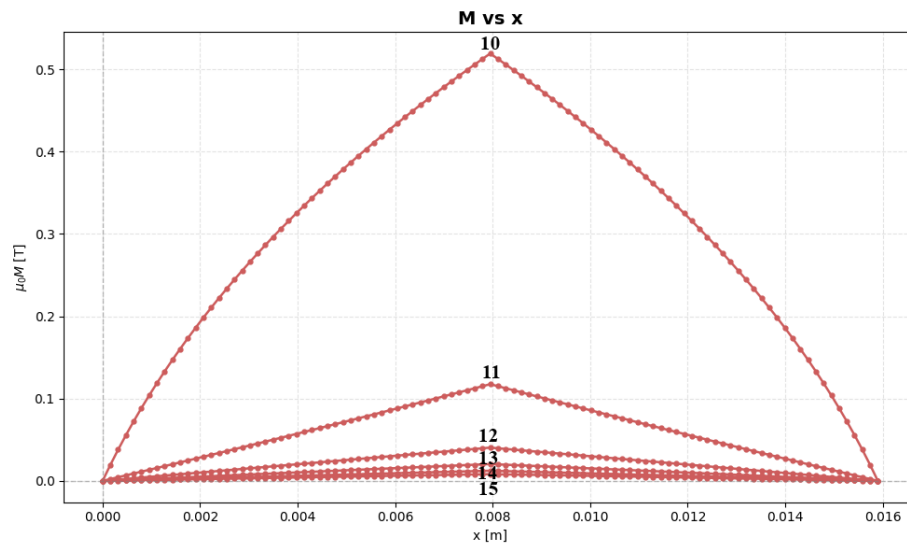


Figura 4.20: Distribuciones espaciales de la magnetización $M(x)$ en la rama positiva del ciclo de histéresis magnética. Las curvas en rojo ilustran la transición entre la saturación positiva y el inicio de la inversión hacia campos negativos. La estructura granular del policristal atenúa los gradientes de magnetización, generando perfiles más suavizados que en el caso monocristalino.

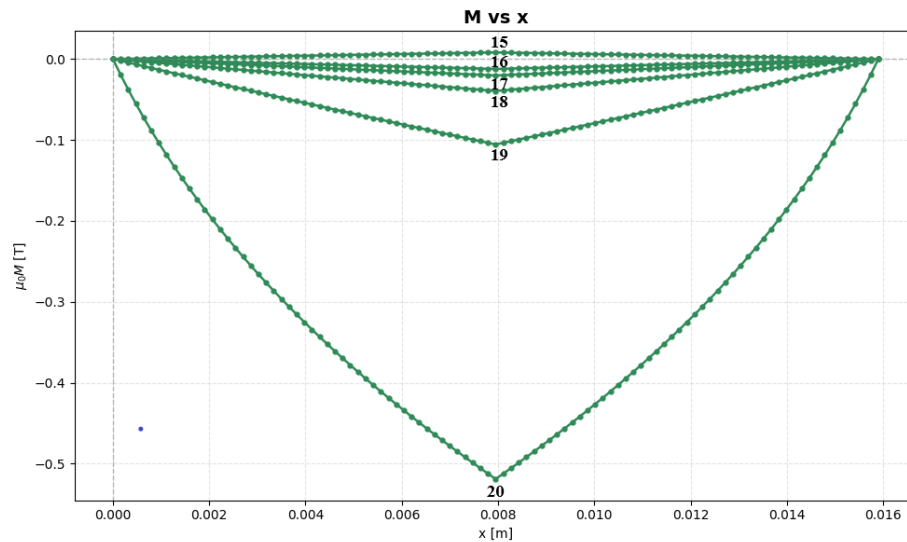


Figura 4.21: Distribuciones espaciales de la magnetización $M(x)$ en la rama negativa del ciclo de histéresis (etiquetas 15–20 de la Fig. 4.16). Las curvas, mostradas en color verde, exhiben una caída progresiva de $M(x)$ hacia valores negativos.

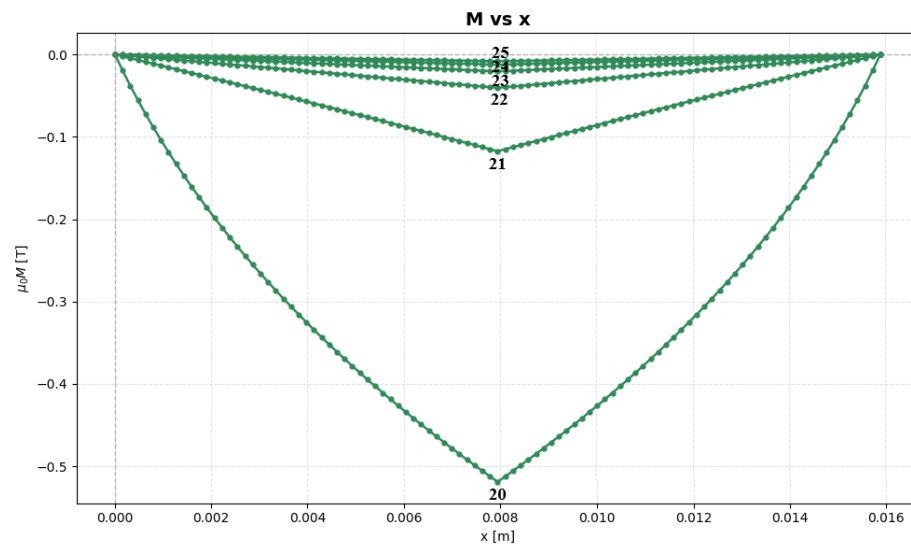


Figura 4.22: Distribuciones espaciales de la magnetización $M(x)$ en la parte final de la rama negativa del ciclo de histéresis magnética (etiquetas 20–25 de la Fig. 4.16).

Capítulo 5

Conclusiones

El desarrollo de este trabajo permitió crear una teoría general y unificada para describir la respuesta magnética de superconductores tipo II irreversibles. Particularmente, se aplicó la teoría a superconductores tipo REBCO, utilizando una ecuación material basada en el modelo del estado crítico de Bean, considerando distintas configuraciones geométricas y tipos de microestructura: una placa infinita ideal, un monocristal y un policristal.

Los resultados numéricos muestran que el modelo reproduce de forma adecuada las curvas de histéresis $M(H_a)$, evidenciando la penetración progresiva del flujo magnético y la dependencia no lineal de la magnetización con el campo aplicado. En el caso ideal de la **placa infinita**, con densidad crítica de corriente eléctrica constante se obtuvo un lazo simetría de inversión característico del régimen crítico, donde la magnetización máxima se mantiene constante después de la completa penetración del flujo.

Para el **monocristal YBCO**, los resultados mostraron una reducción ligera en la magnetización con respecto al caso ideal, atribuida a la heterogeneidad en la densidad crítica de corriente. La dependencia en función de $|\mathbf{B}|$ de la densidad de corriente permitió representar la variación realista de las propiedades del material, obteniendo curvas de histéresis coherentes con las reportadas experimentalmente para muestras de alta calidad.

En el caso del **policristal YBCO**, la introducción de una corriente fuerte dependiente de \mathbf{B} permitió reflejar la pérdida de conectividad eléctrica entre granos, generando un lazo $M(H_a)$ más angosto y una magnetización reducida. Este comportamiento concuerda con las observaciones experimentales de materiales REBCO policristalinos [38], donde los límites de grano y las regiones con menor densidad de corriente crítica facilitan la penetración del flujo magnético.

En conjunto, los tres modelos muestran cómo la geometría y la microestructura influyen directamente en la respuesta magnética del material. La implementación numérica demuestra ser una herramienta confiable y flexible para analizar de manera cualitativa y cuantitativa el comportamiento de superconductores tipo II bajo campos externos.

Finalmente, este trabajo sienta las bases para extender el modelo hacia configuraciones tridimensionales y sistemas más complejos, tales como cintas y bobinas REBCO, donde los efectos de anisotropía, histéresis y pérdidas por corrientes de apantallamiento cobran mayor relevancia en aplicaciones tecnológicas.

Apéndice A

Apéndice: Expresión de la inducción magnética en términos de la magnetización.

La inducción magnética en el material está dada por:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}_a + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} dV', \quad (\text{A.1})$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ y $\mathbf{H}_a = \mathbf{H}_a(\mathbf{r})$ es el campo magnético externo aplicado.

Sea

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} dV', \quad (\text{A.2})$$

como

$$\frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\nabla \left(\frac{1}{R} \right),$$

entonces

$$\mathbf{B}_0 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dV'. \quad (\text{A.3})$$

Usamos la identidad

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{A}) = \varphi (\nabla \times \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \times \nabla) \varphi$$

y que

$$\nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathbf{0},$$

entonces

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_{V'} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV' \quad (\text{A.4})$$

Sea $\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')$, donde $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ es la magnetización local. Como

$$\begin{aligned} \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}}{R} \right) &= \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) \times \mathbf{M} + \left(\frac{1}{R} \right) \nabla' \times \mathbf{M} \\ \Rightarrow \frac{\mathbf{j}}{R} &= \left(\frac{1}{R} \right) \nabla' \times \mathbf{M} = \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}}{R} \right) + \mathbf{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_{V'} dV' \left(\frac{1}{R} \right) \nabla' \times \mathbf{M} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_{V'} dV' \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}}{R} \right) + \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_{V'} dV' \mathbf{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_{S'} d\mathbf{A}' \times \left(\frac{\mathbf{M}}{R} \right) + \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_{V'} dV' \mathbf{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right), \end{aligned}$$

la primera integral del lado derecho de la igualdad en la última línea es cero ya que como condición de frontera tenemos que $\mathbf{M} \downarrow_{S'} = 0$. Luego, como $\nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = -\nabla \left(\frac{1}{R} \right)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_{V'} dV' \mathbf{M} \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} dV' \nabla \times \left[\mathbf{M} \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right], \end{aligned}$$

dado que $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{r}')$ es independiente de \mathbf{r} , entonces

$$\begin{aligned} \nabla \times \left[\mathbf{M} \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right] &= \mathbf{M} \left[\nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right] - \nabla \left(\frac{1}{R} \right) (\nabla \cdot \mathbf{M}) \\ &\quad + \left[\nabla \left(\frac{1}{R} \right) \cdot \nabla \right] \mathbf{M} - (\mathbf{M} \cdot \nabla) \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \\ &= \mathbf{M} \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - (\mathbf{M} \cdot \nabla) \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \\ &= \mathbf{M} (-4\pi \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) - (\mathbf{M} \cdot \nabla) \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \\ \Rightarrow \mathbf{B}_0 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} dV' \left[-4\pi \mathbf{M} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - (\mathbf{M} \cdot \nabla) \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right] \\ &= \mu_0 \int_{V'} dV' \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{M}(\mathbf{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} dV' (\mathbf{M} \cdot \nabla) \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \\ &= \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} dV' (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3} \\ &= \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} dV' \left[\frac{\mathbf{M}}{R^3} - \frac{3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} \right] \\ &= \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} dV' \left[\frac{3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{M}}{R^3} \right], \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{H}_a(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} dV' \left[\frac{3(\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R^3} \right]. \quad (\text{A.5})$$

Apéndice B

Apéndice: Derivación de la ecuación de movimiento para la magnetización en un prisma alargado.

Siendo

$$\vec{M} \cdot \vec{R} = M_x(x - x') + M_y(y - y') + M_z(z - z') \quad (\text{B.1})$$

$$R = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2} \quad (\text{B.2})$$

aplicándolo en la expresión dada en (3.2) para el campo magnético, tenemos

$$\begin{aligned} \left[\frac{3(\vec{M} \cdot \vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{M}}{R^3} \right] &= \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{R}) \left[(x - x')\hat{i} + (y - y')\hat{j} + (z - z')\hat{k} \right]}{R^5} - \frac{(M_x\hat{i} + M_y\hat{j} + M_z\hat{k})}{R^3} \\ &= \underbrace{\frac{3(\vec{M} \cdot \vec{R}) \left[(x - x')\hat{i} + (y - y')\hat{j} \right]}{R^5}}_{1)} + \underbrace{\frac{3(\vec{M} \cdot \vec{R})(z - z')\hat{k}}{R^5}}_{2)} - \underbrace{\frac{(M_x\hat{i} + M_y\hat{j} + M_z\hat{k})}{R^3}}_{3)} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$
$$(\text{B.4})$$

Resolviendo esas 3 integrales tenemos:

$$\begin{aligned}
 1) \quad 3(\vec{M} \cdot \vec{R}) \frac{[(x-x')\hat{i}+(y-y')\hat{j}]}{R^5} &= 3(X\hat{i} + Y\hat{j}) \frac{(\vec{M} \cdot \vec{R})}{R^5} = 3(X\hat{i} + Y\hat{j}) \left[\frac{M_x X + M_y Y + M_z(z-z')}{(X^2 + Y^2 + (z-z')^2)^{5/2}} \right] \\
 &= 3(X\hat{i} + Y\hat{j}) \left\{ \underbrace{\frac{(M_x X + M_y Y)}{(X^2 + Y^2 + (z-z')^2)^{5/2}}}_{a)} + \underbrace{\frac{M_z(z-z')}{(X^2 + Y^2 + (z-z')^2)^{5/2}}}_{b)} \right\} \quad (B.5)
 \end{aligned}$$

Para a), siendo $u = z - z'$ entonces:

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{dz'}{[X^2 + Y^2 + (z-z')^2]^{5/2}} = \int_{z-\frac{c}{2}}^{z+\frac{c}{2}} \frac{du}{(X^2 + Y^2 + u^2)^{5/2}} \quad (B.6)$$

$$= \frac{3(X^2 + Y^2)u + 2u^3}{3(X^2 + Y^2)^2 (X^2 + Y^2 + u^2)^{3/2}} \Bigg|_{u=z-\frac{c}{2}}^{u=z+\frac{c}{2}} \quad (B.7)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{[X^2 + Y^2 + (z-z')^2]^{5/2}} = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{z-\frac{c}{2}}^{z+\frac{c}{2}} \frac{du}{(X^2 + Y^2 + u^2)^{5/2}} \quad (B.8)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(X^2 + Y^2 + u^2)^{5/2}} \quad (B.9)$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\frac{3(X^2 + Y^2)u + 2u^3}{3(X^2 + Y^2)^2 (X^2 + Y^2 + u^2)^{3/2}} - \frac{3(X^2 + Y^2)(-u) + 2(-u)^3}{3(X^2 + Y^2)^2 (X^2 + Y^2 + u^2)^{3/2}} \right] \quad (B.10)$$

$$= 2 \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\frac{3(X^2 + Y^2)u + 2u^3}{3(X^2 + Y^2)^2 (X^2 + Y^2 + u^2)^{3/2}} \right] \quad (B.11)$$

$$= 2 \left\{ \frac{1}{(X^2 + Y^2)} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{(X^2 + Y^2 + u^2)^{3/2}} + \frac{2}{3(X^2 + Y^2)^2} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^3}{(X^2 + Y^2 + u^2)^{3/2}} \right\} \quad (B.12)$$

$$= 2 \left\{ \frac{1}{(X^2 + Y^2)} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{u} (X^2 + Y^2 + u^2)^{3/2}} + \frac{2}{3(X^2 + Y^2)^2} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{u^3} (X^2 + Y^2 + u^2)^{3/2}} \right\} \quad (B.13)$$

$$= 2 \left\{ \frac{1}{(X^2 + Y^2)} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{\left[\left(\frac{X^2 + Y^2}{u^{\frac{2}{3}}} \right) + \frac{u^{\frac{2}{3}}}{u^{\frac{2}{3}}} \right]^{3/2}} + \frac{2}{3(X^2 + Y^2)^2} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{\left[\left(\frac{X^2 + Y^2}{u^2} \right) + 1 \right]^{3/2}} \right\} \quad (\text{B.14})$$

$$= 2 \left\{ \frac{1}{(X^2 + Y^2)} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{\left[\left(\frac{X^2 + Y^2}{u^{\frac{2}{3}}} \right) + u^{\frac{4}{3}} \right]} + \frac{2}{3(X^2 + Y^2)^2} (1) \right\} = \frac{4}{3(X^2 + Y^2)^2} \quad (\text{B.15})$$

Para b), tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z - z') dz'}{[X^2 + Y^2 + (z - z')^2]^{5/2}} = 0 \quad (\text{B.16})$$

Sustituyendo (B.15) Y (B.16) en (B.5) llegamos a:

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dz' \left\{ \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{R}) [(x - x')\hat{i} + (y - y')\hat{j}]}{R^5} \right\} = 3(X\hat{i} + Y\hat{j})(M_x X + M_y Y) \left[\frac{4}{3(X^2 + Y^2)^2} \right] \quad (\text{B.17})$$

$$= \frac{4(M_x X + M_y Y)(X\hat{i} + Y\hat{j})}{(X^2 + Y^2)^2} \quad (\text{B.18})$$

2) $\frac{3(\vec{M} \cdot \vec{R})(z - z')\hat{k}}{R^5}$

$$= \frac{3[M_x(x - x') + M_y(y - y')](z - z')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{5/2}} + \frac{3M_z(z - z')^2}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{5/2}} \quad (\text{B.19})$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} dz' \left\{ \frac{3[M_x(x - x') + M_y(y - y')](z - z')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{5/2}} + \frac{3M_z(z - z')^2}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{5/2}} \right\} \quad (\text{B.20})$$

$$= 3 [M_x(x - x') + M_y(y - y')] \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{(z - z') dz'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{5/2}} \quad (c)$$

$$+ 3M_z \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{(z - z')^2 dz'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{5/2}} \quad (d)$$

Para c), siendo $u = z - z'$ entonces:

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{(z - z') dz'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{5/2}} = - \int_{z+\frac{c}{2}}^{z-\frac{c}{2}} \frac{u du}{(X^2 + Y^2 + u^2)^{5/2}} \quad (B.21)$$

$$= \int_{z-\frac{c}{2}}^{z+\frac{c}{2}} \frac{u du}{(X^2 + Y^2 + u^2)^{5/2}} = - \frac{1}{3(X^2 + Y^2 + u^2)^{3/2}} \Big|_{u=z-\frac{c}{2}}^{u=z+\frac{c}{2}} \quad (B.22)$$

$$= -\frac{1}{3} \left\{ \left[X^2 + Y^2 + \left(z + \frac{c}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} - \left[X^2 + Y^2 + \left(z - \frac{c}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} \right\} \quad (B.23)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z - z') dz'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{5/2}} \quad (B.24)$$

$$= -\frac{1}{3} \lim_{c \rightarrow \infty} \left\{ \left[X^2 + Y^2 + \left(z + \frac{c}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} - \left[X^2 + Y^2 + \left(z - \frac{c}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} \right\} \quad (B.25)$$

$$= -\frac{1}{3} \lim_{c \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\left[X^2 + Y^2 + \left(z + \frac{c}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[X^2 + Y^2 + \left(z - \frac{c}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\} = -\frac{1}{3}(0 - 0) = 0 \quad (B.26)$$

Para d), tenemos:

$$2) \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{(z - z')^2 dz'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{5/2}} = - \int_{z+\frac{c}{2}}^{z-\frac{c}{2}} \frac{u^2 du}{(X^2 + Y^2 + u^2)^{5/2}} \quad (B.27)$$

$$= \int_{z-\frac{c}{2}}^{z+\frac{c}{2}} \frac{u^2 du}{(X^2 + Y^2 + u^2)^{5/2}} = \frac{u^3}{3(X^2 + Y^2)(X^2 + Y^2 + u^2)^{3/2}} \Big|_{u=z-\frac{c}{2}}^{u=z+\frac{c}{2}} \quad (\text{B.28})$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z - z')^2 dz'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{5/2}} = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{(z - z')^2 dz'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{5/2}} \quad (\text{B.29})$$

$$= \lim_{c \rightarrow \infty} \left\{ \frac{u^3}{3(X^2 + Y^2)(X^2 + Y^2 + u^2)^{3/2}} \right\}_{u=z-\frac{c}{2}}^{u=z+\frac{c}{2}} \quad (\text{B.30})$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^3}{3(X^2 + Y^2)(X^2 + Y^2 + u^2)^{3/2}} - \frac{(-u)^3}{3(X^2 + Y^2)(X^2 + Y^2 + u^2)} \quad (\text{B.31})$$

$$= \frac{2}{3(X^2 + Y^2)} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^3}{(X^2 + Y^2 + u^2)^{3/2}} \quad (\text{B.32})$$

$$= \frac{2}{3(X^2 + Y^2)} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{\left[\left(\frac{X^2 + Y^2}{u^2} \right) + 1 \right]^{3/2}} = \frac{2}{3(X^2 + Y^2)} \quad (\text{B.33})$$

sustituyendo (B.26) y (B.33) en (B.20) tenemos:

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{R})(z - z') dz'}{R^5} = 3M_z \left[\frac{2}{3(X^2 + Y^2)} \right] = \frac{2M_z}{X^2 + Y^2} \quad (\text{B.34})$$

$$\mathbf{3)} \frac{(M_x \hat{i} + M_y \hat{j} + M_z \hat{k})}{R^3} = \frac{M_x \hat{i} + M_y \hat{j} + M_z \hat{k}}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz' \frac{M_x \hat{i} + M_y \hat{j} + M_z \hat{k}}{R^3} = (M_x \hat{i} + M_y \hat{j} + M_z \hat{k}) \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{dz'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \quad (\text{B.35})$$

Siendo $u = z - z'$ entonces:

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{dz'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} = \int_{z-\frac{c}{2}}^{z+\frac{c}{2}} \frac{du}{(X^2 + Y^2 + u^2)^{3/2}} \quad (\text{B.36})$$

$$= \frac{u}{(X^2 + Y^2)(X^2 + Y^2 + u^2)^{1/2}} \Big|_{z-\frac{c}{2}}^{z+\frac{c}{2}} \quad (\text{B.37})$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{z-\frac{c}{2}}^{z+\frac{c}{2}} \frac{du}{(X^2 + Y^2 + u^2)^{3/2}} \quad (\text{B.38})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(X^2 + Y^2 + u^2)^{3/2}} \quad (\text{B.39})$$

$$= \frac{u}{(X^2 + Y^2)(X^2 + Y^2 + u^2)^{1/2}} \Big|_{u \rightarrow -\infty}^{u \rightarrow \infty} \quad (\text{B.40})$$

$$= \frac{1}{X^2 + Y^2} \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\frac{u}{(X^2 + Y^2 + u^2)^{1/2}} - \frac{(-u)}{(X^2 + Y^2 + u^2)^{1/2}} \right] \quad (\text{B.41})$$

$$= \frac{2}{X^2 + Y^2} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{(X^2 + Y^2 + u^2)^{1/2}} \quad (\text{B.42})$$

$$= \frac{2}{X^2 + Y^2} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{\left[\frac{X^2 + Y^2}{u^2} + 1 \right]^{1/2}} = \frac{2}{X^2 + Y^2} \quad (\text{B.43})$$

Sustituyendo (B.18), (B.34) Y (B.43) en (B.4), llegamos finalmente a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz' \left[\frac{3(\vec{M} \cdot \vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{M}}{R^3} \right] = -\frac{4(M_x X + M_y Y)(X\hat{i} + Y\hat{j})}{(X^2 + Y^2)^2} - \frac{2(M_x\hat{i} + M_y\hat{j})}{X^2 + Y^2} \quad (\text{B.44})$$

$$= -\frac{4[M_x(x-x') + M_y(y-y')][(x-x')\hat{i} + (y-y')\hat{j}]}{[(x-x')^2 + (y-y')^2]^2} - \frac{2(M_x\hat{i} + M_y\hat{j})}{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad (\text{B.45})$$

Siendo

$$\rho^2 = \vec{\rho} \cdot \vec{\rho} = (x-x')^2 + (y-y')^2 \quad (\text{B.46})$$

$$\vec{M} \cdot \vec{\rho} = (M_x, M_y, M_z) \cdot (x-x', y-y', 0) = M_x(x-x') + M_y(y-y') \quad (\text{B.47})$$

entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz' \left[\frac{3(\vec{M} \cdot \vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{M}}{R^3} \right] = \frac{4(\vec{M} \cdot \vec{\rho})\vec{\rho}}{\rho^4} - \frac{2(M_x\hat{i} + M_y\hat{j})}{\rho^2} \quad (\text{B.48})$$

$$\text{y } \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy' \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \left[\frac{3(\vec{M} \cdot \vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{M}}{R^3} \right] = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy' \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx' \left[\frac{4(\vec{M} \cdot \vec{\rho})\vec{\rho}}{\rho^4} - \frac{2(M_x\hat{i} + M_y\hat{j})}{\rho^2} \right] \quad (\text{B.49})$$

Por lo tanto:

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H}_a + \mu_0\vec{M} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left[\frac{3(\vec{M} \cdot \vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{M}}{R^3} \right] dV' \quad (\text{B.50})$$

$$\Rightarrow \mu_0\vec{M} = \vec{B} - \mu_0\vec{H}_a - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left[\frac{3(\vec{M} \cdot \vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{M}}{R^3} \right] dV' \quad (\text{B.51})$$

$$\boxed{\mu_0\vec{M} = \vec{B} - \mu_0\vec{H}_a - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy' \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx' \left[\frac{4(\vec{M} \cdot \vec{\rho})\vec{\rho}}{\rho^4} - \frac{2(M_x\hat{i} + M_y\hat{j})}{\rho^2} \right]} \quad (\text{B.52})$$

$$\boxed{\mu_0\dot{\vec{M}} = -\left(\nabla \times \vec{E} + \mu_0\dot{\vec{H}}_a\right) - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy' \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx' \left[\frac{4(\dot{\vec{M}} \cdot \vec{\rho})\vec{\rho}}{\rho^4} - \frac{2(\dot{M}_x\hat{i} + \dot{M}_y\hat{j})}{\rho^2} \right]} \quad (\text{B.53})$$

Bibliography

- [1] E. Berrospe-Juarez et al. “Screening Currents and Hysteresis Losses in the REBCO Insert of the 32 T All-Superconducting Magnet Using T-A Homogenous Model”. In: *IEEE Transactions on Applied Superconductivity* 30.4 (2020), pp. 1–5. DOI: 10.1109/TASC.2020.2969865.
- [2] F. Grilli et al. “Real-time simulation of large-scale HTS systems: Multi-scale and homogeneous models using the T–A formulation”. In: *Superconductor Science and Technology* 32.6 (2019), p. 065003. DOI: 10.1088/1361-6668/ab13a4.
- [3] H. Zhang, M. Zhang, and W. Yuan. “An efficient 3D finite element method model based on the T-A formulation for superconducting coated conductors”. In: *Superconductor Science and Technology* 30.2 (2017), p. 024005. DOI: 10.1088/1361-6668/30/2/024005.
- [4] E. H. Brandt. “Thin superconductors in a perpendicular magnetic ac field: General formulation and strip geometry”. In: *Phys. Rev. B* 49.13 (Apr. 1994), pp. 9024–9040. DOI: 10.1103/PhysRevB.49.9024.
- [5] E. H. Brandt. “Square and Rectangular Thin Superconductors in a Transverse Magnetic Field”. In: *Phys. Rev. Lett.* 74.15 (Apr. 1995), pp. 3025–3028. DOI: 10.1103/PhysRevLett.74.3025.
- [6] T. Schuster et al. “Flux penetration into flat rectangular superconductors with anisotropic critical current”. In: *Phys. Rev. B* 56.6 (Aug. 1997), pp. 3413–3424. DOI: 10.1103/PhysRevB.56.3413.
- [7] Dirk van Delft. “History and significance of the discovery of superconductivity by Kamerlingh Onnes in 1911”. In: *Physica C: Superconductivity* (2012).

- [8] Wikipedia. *Teoría Ginzburg–Landau*. [https://https://es.wikipedia.org/wiki/Teora_Ginzburg-Landau](https://es.wikipedia.org/wiki/Teora_Ginzburg-Landau). Imagen de Vitali Guínzburg y Lev Landáu, figuras fundamentales en el desarrollo de la teoría de la superconductividad Ginzburg–Landau. Recuperada de Wikipedia y editada. 2025.
- [9] Raul Perez-Enriquez and Yazmin Moreno. “EL EFECTO MEISSNER Y LA LEVITACIÓN MAGNÉTICA”. In: 5 (Aug. 2011), pp. 49–56.
- [10] V. L. Ginzburg and L. D. Landau. “On the Theory of Superconductivity”. In: *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 20 (1950), p. 1064.
- [11] John Bardeen, Leon Cooper, and Robert Schrieffer. *Historia de la Superconductividad*. <https://wp.icmm.csic.es/superconductividad/investigacion/historia/>. Autores de la teoría BCS de la superconductividad. Fuente: Instituto de Ciencia de Materiales de Madrid (CSIC). 2025.
- [12] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. “Theory of Superconductivity”. In: *Physical Review* 108.5 (1957), pp. 1175–1204.
- [13] A. A. Abrikosov. “On the Magnetic Properties of Superconductors of the Second Group”. In: *Journal of Experimental and Theoretical Physics* (1957).
- [14] Francis Villatoro. *El ángulo mágico del grafeno (mi charla Naukas18)*. <https://francis.naukas.com/2018/09/17/el-angulo-magico-del-grafeno-mi-charla-naukas18/>. Consultado el 31 de julio de 2025. 2018.
- [15] M. R. Norman. “The challenge of unconventional superconductivity”. In: *Science* 332.6026 (2011), pp. 196–200.
- [16] J. Georg Bednorz and K. Alex Müller. “Possible high T_c superconductivity in the Ba–La–Cu–O system”. In: *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter* 64.1 (1986), pp. 189–193. ISSN: 0722-3277. DOI: 10.1007/BF01303701. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01303701>.
- [17] National High Magnetic Field Laboratory. *Walther Meissner*. <https://nationalmaglab.org/magnet-academy/history-of-electricity-magnetism/pioneers/walther-meissner/>. Imagen utilizada en la sección *Efecto Meissner*. Fuente: Magnet Academy, National High Magnetic Field Laboratory. 2025.

- [18] Xiaoyu Ma, C. J. O. Reichhardt, and C. Reichhardt. “Manipulation of individual superconducting vortices and stick-slip motion in periodic pinning arrays”. In: *Physical Review B* 97.21 (2018), p. 214521. DOI: 10.1103/PhysRevB.97.214521. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.97.214521>.
- [19] A. A. Abrikosov. “Nobel Lecture: Type-II superconductors and the vortex lattice”. In: *Rev. Mod. Phys.* 76 (3 Dec. 2004), pp. 975–979. DOI: 10.1103/RevModPhys.76.975. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.76.975>.
- [20] G. Blatter et al. “Vortices in high-temperature superconductors”. In: *Reviews of Modern Physics* 66.4 (1994), pp. 1125–1388.
- [21] John Bardeen and M. J. Stephen. “Theory of the Motion of Vortices in Superconductors”. In: *Phys. Rev.* 140 (4A Nov. 1965), A1197–A1207. DOI: 10.1103/PhysRev.140.A1197. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.140.A1197>.
- [22] P. W. ANDERSON and Y. B. KIM. “Hard Superconductivity: Theory of the Motion of Abrikosov Flux Lines”. In: *Rev. Mod. Phys.* 36 (1 Jan. 1964), pp. 39–43. DOI: 10.1103/RevModPhys.36.39. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.36.39>.
- [23] A. I. Larkin and Y. N. Ovchinnikov. “Pinning in type II superconductors”. In: *Journal of Low Temperature Physics* 34 (1979), pp. 409–428. DOI: 10.1007/BF00117160. URL: <https://doi.org/10.1007/BF00117160>.
- [24] M. Miura et al. “Upward shift of the vortex solid phase in high-temperature-superconducting wires through high density nanoparticle addition”. In: *Scientific Reports* 6 (2016), p. 20436. DOI: 10.1038/srep20436. URL: <https://doi.org/10.1038/srep20436>.
- [25] E. H. Brandt. “Thick Superconductors in a Perpendicular Magnetic Field”. In: *Physica C: Superconductivity* 282-287 (1997), pp. 343–346. ISSN: 0921-4534. DOI: 10.1016/S0921-4534(97)00261-X.
- [26] C. P. Bean. “Magnetization of Hard Superconductors”. In: *Physical Review Letters* 8.6 (1962), pp. 250–253. DOI: 10.1103/PhysRevLett.8.250.
- [27] David C. Larbalestier et al. “High- T_c superconducting materials for electric power applications”. In: *Nature* 414.6861 (2001), pp. 368–377. DOI: 10.1038/35104600.

- [28] National High Magnetic Field Laboratory. *High-Temperature Superconducting Tape*. <https://nationalmaglab.org/magnet-development/applied-superconductivity-center/research/science-highlights/high-temperature-superconducting-tape/>. Esquema de la estructura típica de una cinta superconductora (RE)BCO. Fuente: Applied Superconductivity Center, National High Magnetic Field Laboratory. 2025.
- [29] V. Selvamanickam et al. “Progress in Second-Generation HTS Wire Manufacturing and Performance”. In: *IEEE Transactions on Applied Superconductivity* 23.3 (2013), pp. 6601204–6601204. DOI: 10.1109/TASC.2012.2236084.
- [30] X. Obradors and T. Puig. “Coated conductors for power applications: materials challenges”. In: *Superconductor Science and Technology* 27.4 (2014), p. 044003. DOI: 10.1088/0953-2048/27/4/044003.
- [31] H. W. Weijers, D. C. Larbalestier, and J. Jaroszynski et al. “Progress in the development and construction of a 32-T superconducting magnet”. In: *IEEE Transactions on Applied Superconductivity* 27.4 (2017), p. 4300707. DOI: 10.1109/TASC.2016.2633517.
- [32] P. J. Lee, J. Jiang, and D. C. Larbalestier. “Mechanical properties of REBCO tapes and their effect on magnet design”. In: *IEEE Transactions on Applied Superconductivity* 25.3 (2015), p. 6604105. DOI: 10.1109/TASC.2015.2394472.
- [33] E. Pardo, F. Grilli, and L. F. Goodrich. “Modeling of screening currents in REBCO coils”. In: *Superconductor Science and Technology* 21.6 (2008), p. 065014. DOI: 10.1088/0953-2048/21/6/065014.
- [34] W. Xing et al. “Magnetic flux mapping, magnetization, and current distributions of $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ thin films by scanning Hall probe measurements”. In: *Journal of Applied Physics* 76.7 (Oct. 1994), pp. 4244–4255. DOI: 10.1063/1.357308.
- [35] D. R. Nelson. “A new age for type-II superconductors?” In: *Nature* 385.6618 (Feb. 1997), pp. 675–676. DOI: 10.1038/385675a0.
- [36] C. Romero-Salazar and F. Pérez-Rodríguez. “Critical state of anisotropic hard superconductors”. In: *Superconductor Science and Technology* 16.11 (2003), pp. 1273–1281. DOI: 10.1088/0953-2048/16/11/004. URL: <https://doi.org/10.1088/0953-2048/16/11/004>.

-
- [37] Antonio Perez-Gonzalez and John R. Clem. “Magnetic response of type-II superconductors subjected to large-amplitude parallel magnetic fields varying in both magnitude and direction”. In: *Journal of Applied Physics* 58.11 (Dec. 1985), pp. 4326–4335. ISSN: 0021-8979. DOI: 10.1063/1.335520. eprint: https://pubs.aip.org/aip/jap/article-pdf/58/11/4326/18413885/4326_1_online.pdf. URL: <https://doi.org/10.1063/1.335520>.
- [38] Lei Zhang, Claudio Boffo, and David C. Dunand. “Additively-manufactured monocrystalline YBCO superconductor”. In: *Nature Communications* 16.1 (2025). Referencia utilizada como base para los parámetros del monocristal tipo REBCO en la simulación numérica., p. 1070. DOI: 10.1038/s41467-025-56708-x. URL: <https://doi.org/10.1038/s41467-025-56708-x>.