BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

“ANÁLISIS DE LOS SIGNIFICADOS DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN EN ESTUDIANTES DE NUEVO INGRESO DE UNA PREPARATORIA DE LA BUAP”

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE

LICENCIADO EN
MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA

DANIEL GILES CUANENEMI

DIRECTORA DE TESIS

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR

OCTUBRE 2024

RESUMEN

La presente investigación tiene como objetivo analizar la comprensión de los significados del concepto de fracción propuestos en la literatura de la educación matemática en estudiantes de nuevo ingreso de una preparatoria de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Para ello, se diseñaron y aplicaron dos cuestionarios de once preguntas cada uno, donde cada pregunta aborda un significado del concepto de fracción, fracción como parte-todo, fracción como cociente, fracción como operador, fracción como medida, entre otros.

Los resultados obtenidos revelan que los estudiantes presentan mayores dificultades en ciertos significados del concepto de fracción, particularmente en el de parte-todo en el caso discreto, fracción como una relación, fracción como un cociente, fracción como porcentaje, y fracción como número racional. Otra de las dificultades encontradas fue la interpretación y aplicación de las fracciones en situaciones que requieren una mayor abstracción, además dificultades en la realización de operaciones aritméticas y en la localización de fracciones en la recta numérica, las cuales coinciden con las reportadas en la literatura.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN 7

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 10

1.1 Antecedentes 11

1.2 Justificación 13

1.3 Objetivos y pregunta de investigación 14

1.3.1 Objetivo general 14

1.3.2 Objetivos específicos 14

1.3.3 Pregunta de investigación 14

CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL 15

2.1 Relación parte-todo. 16

2.2 Un cociente 17

2.3 Una relación 17

2.4 Un operador 18

2.5 Una probabilidad 18

2.6 Un número racional 19

2.7 Un punto de una recta orientada 19

2.8 Una medida 20

2.9 Un porcentaje 20

2.10 En el lenguaje cotidiano 21

2.11 Dificultades reportadas en la literatura 21

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA 25

3.1 Tipo de estudio 26

3.2 Descripción de los participantes 26

3.3 Cuestionarios 26

CAPÍTULO 4. RESULTADOS DE LA APLICACIÓN 32

CONCLUSIONES 44

REFERENCIAS 47

ANEXO 50

DEDICATORIA

Por muchos años anhelé con este momento, la realización de mi sueño. Fue un largo trayecto el cual tuve que recorrer para llegar hasta aquí, durante toda mi vida estudiantil me esforcé por sobresalir, por ser mejor conmigo mismo y por lograr tener un mejor futuro.

Durante este camino conocí muchas personas, que de una u otra manera influyeron en que pudiera lograrlo. Quiero agradecer en primera instancia a todos mis maestros que ayudaron en mi formación académica, particularmente al maestro Jorge Lara Rojas, él fue quien me motivó a seguir el camino de la docencia en matemáticas y que me demostró que podía ser alguien destacado si yo me lo proponía. Así mismo al maestro José Juan Huerta Romero por enseñarme el valor del trabajo y el entender por qué debía hacer las cosas. Sin duda alguna también al maestro Nahum Sarmiento Cordero, puesto que marcó una parte muy importante de mi vida, gracias a él forme mi determinación de nunca rendirme ante nada ni nadie, y sin duda alguna lo que siempre le voy a agradecer es la oportunidad que me brindó de comenzar a practicar la profesión que quiero ejercer. Por último, pero con un reconocimiento muy especial, a la doctora Lidia Aurora Hernández Rebollar, mi asesora de tesis, quien no solo aceptó guiarme en este proyecto, sino que también se ha convertido en un ejemplo a seguir, tanto por su dedicación y pasión por la enseñanza. Su apoyo incondicional, paciencia y sabiduría han dejado una huella imborrable en mi formación académica y personal, inspirándome a alcanzar mis metas con entusiasmo y determinación.

Quiero agradecer a mis estudiantes por todas las muestras de cariño y apoyo, así como a toda mi familia, por todas las palabras de aliento que me mostraron estos últimos años. A la señora María Inés Guadalupe Romero Díaz por el apoyo y cariño que me brindo durante la carrera. A mi padre Pascual Giles Flores por solventar los gastos de mi educación, y sin duda alguna a mi madre Margarita Cuanenemi Rosas quien con mucho esfuerzo, sacrificio y lágrimas me dio todo para llegar hasta aquí. Este trabajo te lo dedico a ti madre…

Recuerdo el día en que este sueño empezó. Aunque el camino no fue fácil y en más de una ocasión me sentí caer en un abismo de dolor y tristeza, nunca dejé de creer. Afortunadamente, encontré una señal de paz que me ayudó en los momentos más oscuros. Tropecé, caí, pero siempre me levanté. Me aferré con fuerza a este sueño que, con cada paso, se hizo más grande y real. Hoy, con orgullo y gratitud, puedo decir que lo he alcanzado.

INTRODUCCIÓN

En las matemáticas, las fracciones representan una parte fundamental en la comprensión de conceptos numéricos y en la resolución de problemas. Desde la división de un pastel hasta cálculos financieros complejos, las fracciones están presentes en muchos aspectos de la vida diaria. Para Angulo y Arteaga (2018):

> La fracción aparece cuando se desea medir una determinada magnitud, en la cual la unidad no está contenida un número entero de veces en la magnitud que se quiere medir. Para obtener la medida exacta se deben:
>
> - Medir utilizando múltiplos y submúltiplos de la unidad.
> - Realizar comparaciones con la unidad. (p.151)

Es importante comprender la importancia de este concepto, ya que nos puede ayudar a entender diversos temas. Las fracciones están presentes en una multitud de situaciones, desde actividades simples hasta tareas más complejas que requieren un pensamiento matemático avanzado. Además de facilitar el aprovechamiento académico en sus futuros cursos de matemáticas. “La comprensión de este significado les permitirá a los estudiantes resolver con mayor habilidad sumas y restas de fracciones y relacionarlos con otras representaciones como lo son los números decimales y estos nos llevan a los porcentajes” (Angulo y Arteaga, 2018, p.151).

A pesar de su importancia y relevancia en la vida cotidiana, las fracciones son un tema que a menudo genera ansiedad y confusión entre los estudiantes de educación media superior, pues esto en ocasiones afecta su desempeño académico. Según Parra y Flores (2008), “si la comprensión del concepto fracción y sus modelos es de por sí problemática para alumnos regulares, en alumnos con bajo aprovechamiento la situación se complica” (p.34).

Muchos estudiantes se encuentran luchando para comprender conceptos básicos y aplicarlos de manera efectiva en la resolución de problemas matemáticos, esto también puede ser ocasionado por no comprender conceptos como los números reales positivos o negativos, o bien al hacer operaciones con estos mismos. “Pese a las dificultades conceptuales implicadas en la comprensión de las fracciones, algunos alumnos intentan resolver problemas usando los modelos pictóricos (gráficos, dibujos, etc.) que les son familiares y, con ello, prescinden de algoritmos formales” (Parra y Flores, 2008, p.34).

Esta problemática ha sido estudiada con gran profundidad en el nivel básico de la educación, en trabajos como el de Fandiño (2015) o el de Olfos Ayarza (2011), sin embargo, no hay tantas investigaciones respecto a este tema en el nivel medio superior.

Este estudio se enfoca en estudiantes de nuevo ingreso de una preparatoria de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), con el objetivo de analizar su comprensión del concepto de fracción y las dificultades asociadas a este. Dado que la transición de la educación básica a la preparatoria representa un cambio significativo en el nivel de dificultad de los conceptos matemáticos, es crucial entender cómo los estudiantes manejan estos conceptos y qué problemas encuentran.

Para esto se aplicaron dos cuestionarios, donde cada problema estaba relacionado con un significado del concepto de fracción propuesto por Fandiño (2015). A partir del análisis de las respuestas a estos cuestionarios se identificaron varias dificultades, especialmente en los significados relacionados con fracciones como parte-todo en el caso discreto, como una relación, como un cociente, como porcentaje y como número racional. Sin embargo, se observó un desempeño más sólido en problemas vinculados con los significados de fracción como parte-todo en el caso continuo, como operador y en el lenguaje cotidiano.

Esta investigación es relevante porque proporcionará información valiosa sobre cómo un grupo de estudiantes de preparatoria comprenden las fracciones en diversas situaciones y permitirá desarrollar estrategias pedagógicas para abordar las dificultades identificadas. Este estudio busca responder a la pregunta de investigación: ¿Cómo comprenden los estudiantes de nuevo ingreso de una preparatoria de la BUAP los diferentes significados del concepto de fracción, y qué dificultades enfrentan en comparación con las reportadas en la literatura?

La tesis está organizada en cuatro capítulos. El primer capítulo presenta el planteamiento del problema, los antecedentes, la justificación, los objetivos y la pregunta de esta investigación. El segundo capítulo presenta el marco conceptual sobre los significados del concepto de fracción. El tercer capítulo describe la metodología utilizada en la investigación. El cuarto capítulo presenta los resultados obtenidos de dos cuestionarios aplicados a dichos estudiantes. Finalmente, se presentan las conclusiones.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las fracciones están presentes en diversas actividades de nuestra vida diaria, como por ejemplo en la repartición de bienes, al calcular el porcentaje de descuento que tiene algún producto o al calcular la probabilidad en juegos de azar. En todos los niveles educativos se estudia el concepto de fracción, pero donde se ve con mayor profundidad es en el nivel básico, iniciando en los primeros años de primaria y durante toda la secundaria.

Cuando los estudiantes llegan al nivel medio superior (sea bachillerato o preparatoria) la gran mayoría de los profesores asume que los estudiantes tienen bien cimentadas las ideas sobre las fracciones, desafortunadamente esto no siempre es así. Según Olfos Ayarza (2011), “en la actualidad una gran parte de los profesores ignora las dificultades y sub-comprensiones de sus alumnos, no focalizando las clases en los aspectos que son relevantes considerar” (p.10).

Las fracciones son fundamentales para el entendimiento de conceptos matemáticos más avanzados, sobre todo en las áreas de álgebra y de cálculo, el tener una comprensión deficiente en niveles superiores podría ser un obstáculo significativo para el éxito académico de los estudiantes. Como menciona Martínez Merino et al. (2019), “es necesario que el alumno interprete las fracciones de forma eficaz, independientemente del registro en el que se encuentren representadas, ya que son la base para otros constructos” (p.4727).

1.1 Antecedentes

Las fracciones son un tema importante en el área de las matemáticas y, a menudo, representan un desafío para los estudiantes. Este concepto es fundamental, ya que se utiliza en diversas áreas de las matemáticas y en situaciones cotidianas, como la proporcionalidad, la probabilidad de que ocurra algún suceso y el cálculo de porcentajes. Existen diversas investigaciones sobre el concepto de fracción en el nivel básico, en mayor medida, estudios enfocados a estudiantes de primaria, por ejemplo, los estudios de Fandiño (2015), Olfos Ayarza (2011), por mencionar algunos.

Si bien este concepto ha sido ampliamente investigado, aún hay estudiantes que tiene dificultades en la comprensión de este concepto, además de que es complicado erradicar esta situación. Según Cortina et al. (2013):

> Aunque el tema ha sido extensamente investigado, sigue habiendo gran insatisfacción respecto a los niveles de comprensión de las fracciones que los estudiantes típicamente logran y, más importante, respecto a lo que se sabe acerca de lo que se debe hacer para mejorarlos. (p.7)

Por otro lado, la gran mayoría de los profesores en la educación media superior esperan que los estudiantes en este nivel sean capaces de afrontar con facilidad problemas que involucren este concepto, puesto que lo han analizado por muchos años en el nivel básico, es decir, esperan que estas dificultades hayan sido erradicadas en el nivel básico, sin considerar que este concepto también tiene su dificultad debido a los diferentes significados que este engloba. Como menciona Torres Medina (2013):

> Es necesario entender que alcanzar el concepto de fracción con todas sus relaciones conlleva un proceso de aprendizaje a largo plazo y que no todos los significados asociados a la fracción tienen las mismas dificultades de comprensión por parte de los niños. (p.530)

Esto es preocupante, ya que se supone que los estudiantes en este nivel deben manejar las fracciones con mayor profundidad y aplicarlas en conceptos más complejos sin ninguna dificultad, pero hay estudiantes que desafortunadamente no pueden hacerlo y por ende se estancan en diversos temas de matemáticas.

A pesar de la relevancia del concepto de fracción en la educación matemática, especialmente en el nivel medio superior, la investigación específica sobre este tema en dicho nivel educativo es relativamente escasa. Tras una revisión en diversas bases de datos académicas como Latindex, Google Académico, ERIC, y en repositorios institucionales de la BUAP y la UNAM, se reveló un número limitado de investigaciones relacionadas con la comprensión de los significados de las fracciones en el nivel medio superior, entre los cuales se identificó el estudio de Torres Medina (2013). Este artículo presenta una experiencia de aula con estudiantes de grado 11 de una escuela de Bogotá, Colombia, enfocada en el uso de los conceptos de fracción, razón y número racional. A través de actividades que promueven la clasificación y ordenamiento de números racionales en situaciones de aproximación, el objetivo fue que los estudiantes comprendieran estas nociones dentro del curso de cálculo, interactuando de manera activa con los conceptos. Sin embargo, el trabajo de Torres Medina no aborda todos los significados del concepto de fracción que se plantean en esta investigación.

Aunque diversos estudios han examinado la enseñanza y comprensión de las fracciones, son pocos los que han explorado cómo los estudiantes manejan los distintos significados de este concepto, especialmente en el caso de los alumnos de nuevo ingreso a la preparatoria de la BUAP. Además, se busca analizar si las dificultades encontradas en la comprensión de estos significados coinciden con las reportadas previamente en la literatura, lo que permitiría ofrecer una visión más completa y precisa sobre las barreras que enfrentan los estudiantes en este nivel educativo.

1.2 Justificación

Como no hay tantos estudios que aborden la problemática antes expuesta, surge la necesidad de investigar este tema en el nivel medio superior. Con esto se podrá llenar la brecha en la literatura sobre la comprensión de fracciones en este nivel. Al realizar esta investigación con estudiantes de una preparatoria de la BUAP, no solo se contribuirá a la teoría educativa, sino también se proporcionarán datos que podrían influir en la práctica pedagógica en este nivel.

Esta problemática se vuelve crítica, ya que la comprensión insuficiente de cada significado del concepto de fracciones puede afectar el aprendizaje de áreas fundamentales como el álgebra y el cálculo. Como menciona Angulo Vergara y Arteaga Valdés (2018):

> Sabiendo que las fracciones tienen el significado de medida, cociente, razón, operador y parte-todo, es preciso que los alumnos identifiquen y dominen sus distintos significados, pues el predominio en el aprendizaje de unos puede llegar a interferir u obstaculizar el uso y la comprensión del resto. (p.152)

Los resultados de esta investigación podrían guiar el cambio de estrategias de enseñanza para mejorar su comprensión en el tema de fracciones, por ende, su rendimiento en futuros temas de matemáticas.

1.3 Objetivos y pregunta de investigación

Dado el vacío existente en la literatura sobre el estudio de este tema en la educación media superior, particularmente en preparatorias de la BUAP, surge la necesidad de investigar cómo los estudiantes comprenden los diferentes significados de las fracciones y qué dificultades enfrentan en este proceso. Con base en ello, se plantean los siguientes objetivos de investigación.

1.3.1 Objetivo general

Analizar la comprensión del concepto de fracción, considerando sus diferentes significados, en estudiantes de nuevo ingreso de una preparatoria de la BUAP y comparar las dificultades encontradas con las reportadas en la literatura.

1.3.2 Objetivos específicos

- Identificar los distintos significados del concepto de fracción en estudiantes de nuevo ingreso de una preparatoria de la BUAP.
- Comparar las dificultades detectadas en los estudiantes participantes con las reportadas en la literatura.

1.3.3 Pregunta de investigación

¿Cómo comprenden los estudiantes de un grupo de nuevo ingreso de una preparatoria de la BUAP los diferentes significados del concepto de fracción, y dificultades enfrentan en comparación con las reportadas en la literatura?

CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL

En matemáticas, el concepto de fracción es muy utilizado en diversos temas, esto en todas las áreas de la matemática. Según Martínez Merino et al. (2019) “es necesario que el alumno interprete las fracciones de forma eficaz, independientemente del registro en el que se encuentren representados, ya que son la base para otros constructos” (p.4737).

La idea intuitiva de la gran mayoría de los estudiantes en todos los niveles educativos es que las fracciones representan las partes de un objeto o de un número real. Según Fazio y Siegler (2013), “las fracciones a menudo se enseñan utilizando la idea de que representan parte de un entero” (p.10). Según el Colegio Nacional de Matemáticas (2009)

> Si a y b son números enteros, y b es diferente de cero, se llama *fracción común* a la expresión a $\frac{a}{b}$, donde a recibe el nombre de *numerador* y b el de *denominador*. En una fracción común el denominador indica el número de partes iguales en que se divide la unidad y el numerador indica el número de partes que se toman de la unidad. (p. 46)

Esta idea del concepto de fracción es conocida por la mayoría de los estudiantes en todos los niveles educativos, además de que considera que es el único significado que esta posee. Si bien esta definición contiene algunas nociones importantes sobre el concepto de fracción, esta es inadecuada ya que no considera que la fracción tiene distintos significados dependiendo del contexto en la cual se vaya a emplear. “Se pretende dar una “definición” inicial definitiva de este objeto, pero esta elección luego no tiene la fuerza para satisfacer todos los significados que el término asumirá en el curso de los estudios” (Fandiño, 2015, p. 26).

A continuación, se presentan las definiciones de cada uno de los significados del concepto de fracción expuestos por Fandiño (2015).

2.1 Relación parte-todo.

El primer significado del concepto de fracción es la relación parte-todo, de la cual se desprenden dos significados dependiendo de la unidad que se considere como el “todo”, es decir, si la unidad está constituida por algo continuo o bien por un conjunto discreto. Si se considera al “todo” como algo continuo, el significado de la relación parte-todo hace referencia a cuando dividimos algo en partes cada vez más pequeñas sin llegar a unidades separadas, como una cuerda o una pizza, además de que no hay saltos entre dichas divisiones, ya que todo sigue siendo unido como un solo conjunto. Según Fandiño (2015):

> Si el todo es una unidad continua (la superficie de un rectángulo o una pizza o una torta, la longitud de un segmento, el volumen de un cuerpo, etc.), hallar los *a b-ésimos* (es decir hallar la fracción $\frac{a}{b}$) puede hacerse siempre (teóricamente, porque hallar realmente los $\frac{423}{874}$ de una pizza sería concreta mente imposible). (p. 26)

Por otra parte, en el caso discreto, el "parte-todo" se refiere a dividir un conjunto de objetos que se pueden contar individualmente, como un grupo de canicas o chocolates. Aquí las partes están claramente separadas y no se pueden dividir más sin perder su identidad como unidades completas. “Sería necesario entonces distinguir: dada una unidad-todo discreta, existen algunas fracciones que tienen un sentido concreto y otras que no lo tienen” (Fandiño, 2015, p. 27).

2.2 Un cociente

Esta resulta ser una interpretación que sugiere la división de un número (o bien de un objeto) por otro. El término $\frac{a}{b}$ significa que a es dividido entre b, de donde esta división puede o no ser realizada, es decir, que solamente se puede indicar. “La escritura $\frac{a}{b}$ fue propuesta en precedencia en los términos de parte-todo: dada una unidad, dividirla en b partes (iguales, congruentes, que puedan sobreponerse, consideradas en últimas intercambiables) y tomar a” (Fandiño, 2015, p. 31).

2.3 Una relación

El significado de fracción como relación se refiere a la comparación entre dos cantidades, donde la fracción expresa cómo una cantidad se relaciona con otra, al ser una comparación esta se puede invertir sin alterar su significado y relación. En este caso, la fracción $\frac{a}{b}$ muestra la cantidad de veces que una cantidad es mayor o menor que otra, sin referirse a un reparto o división de dicha cantidad. Según Fandiño (2015):

> A veces la fracción $\frac{a}{b}$ se usa explícitamente para indicar la relación entre a y b y entonces se escribe $a{:}b$ el signo ":" sustituye "–" no tanto y no sólo indicando la operación de división (indicada solamente o por efectuar) sino también al hacer explícito un sentido de relación entre dos magnitudes que están entre ellas como a está a b. (p.31)

2.4 Un operador

Hace referencia a la función que la fracción tiene para modificar o transformar una cantidad, ya sea a través de una multiplicación o bien una división. En este sentido la fracción vista como un operador indica cómo una cantidad se ajusta o se cambia en función del valor de la fracción. Según Fandiño (2015) "La fracción como operador, entonces, actúa sobre los números puros más que sobre los conjuntos o sobre los objetos; es, de hecho, una nueva operación que combina división y multiplicación." (p.33)

2.5 Una probabilidad

La fracción como probabilidad se utiliza para representar la posibilidad de que ocurra un evento en un conjunto de eventos posibles. Se define como el número de eventos favorables sobre el total de eventos posibles, proporcionando una forma de cuantificar la incertidumbre relacionada con el evento considerado. Fandiño (2015) propone un ejemplo para entender este significado:

> Buscamos evaluar la probabilidad según la cual, lanzando dos dados, se obtiene un múltiplo de 4. Los casos posibles son 36, los eventos favorables son 9 (que salga 4, que se presenta en 3 casos; 8, que se presenta en 5 casos; 12, que se presenta en 1 caso). Entonces la probabilidad de ese evento se puede expresar con la escritura $\frac{9}{36}$, es decir el número de casos favorables al evento, con respecto al número de casos posibles. (p. 34)

2.6 Un número racional

Un número racional es cualquier número que puede expresarse como una fracción de la forma $\frac{a}{b}$, donde a es cualquier número entero y b es un número entero distinto de cero. Además de que estas pueden tener múltiples representantes. Por ejemplo, la fracción $\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{9}{18}$, y así sucesivamente. Todas estas fracciones pertenecen a la misma clase de equivalencia, la cual representa el mismo valor numérico. Asimismo, los números decimales también son representaciones de números racionales, por ejemplo, 0.50 es un decimal que equivale a la fracción $\frac{1}{2}$, y 0.25 es equivalente a $\frac{1}{4}$. De esta manera, tanto las fracciones como los decimales forman parte del conjunto de los números racionales. Según Fandiño (2015):

> El número racional 0.5, por ejemplo, no es otra cosa que la clase de equivalencia $[(1;\ 2), (2;\ 4), (4;\ 8) \ldots, (3;\ 6), (6;\ 12), (9;\ 18), (5;\ 10), (10;\ 20) \ldots]$ formada por todos y sólo aquellas infinitas parejas ordenadas de números $(a;\ b)$, tales que:$a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N} - \{0\}$ y entre los cuales aparece el par $(1; 2)$ o bien, si se prefiere, $b = 2a$. (p. 35)

De esto último, las parejas de ordenadas de números $(a;\ b)$ también pueden ser ambas negativas, es decir, tanto $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Es importante aclarar que, aunque las fracciones y los números racionales están relacionados, no son lo mismo, las fracciones son una representación específica de los números racionales, pero los números racionales incluyen otras representaciones, como los decimales.

2.7 Un punto de una recta orientada

Indica con un punto o una marca la posición de una fracción en la recta numérica real, representando un punto específico que corresponde a su valor, de donde cada punto se encuentra entre dos números racionales. En este sentido, Fandiño (2015) menciona que "la fracción indica en este caso una distancia, la distancia entre el origen y el punto–fracción." (p.36). Esto subraya cómo las fracciones pueden interpretarse como puntos en una recta numérica, donde cada fracción representa una posición o valor específico. Al considerar fracciones en términos de números racionales, estamos no solo evaluando su relación con una unidad total, sino también estableciendo su ubicación en una escala numérica.

2.8 Una medida

La fracción también puede interpretarse como una medida, donde su valor representa una cantidad en relación con una unidad de medida establecida. En este sentido, una fracción permite expresar magnitudes y cantidades en situaciones donde se requiere precisión y comparación. Por ejemplo, en situaciones de medición, se pueden utilizar fracciones para indicar una parte de una unidad, como medio litro de agua o tres cuartos de un metro. Esta no solo define una porción de una unidad, sino que también facilita la comunicación y la comprensión de las medidas, haciendo más accesible el trabajo con cantidades. De esto Fandiño (2015) propone un ejemplo:

> La cantidad de vino en la botella y el costo de un lápiz son medidas; a veces tiene sentido pensarlas como números racionales, a veces como fracciones, pero en ningún caso es necesario o conviene hacer referencia a la definición original de fracción. Es mucho más espontáneo un uso directo de la medida, así como viene indicada. (p.36)

Fandiño se refiere a cómo las fracciones y los números racionales pueden ser utilizados para expresar medidas en situaciones cotidianas, destaca la diferencia entre pensar en una fracción como un concepto matemático en su forma más primitiva (dividir una unidad en partes iguales) y su uso práctico como una medida que ya está definida y es fácilmente entendible por las personas.

2.9 Un porcentaje

Al considerar la fracción como un porcentaje, se entiende como una forma de expresar una cantidad en relación con un total, donde el total se considera como 100. Esta representación permite que se comunique de manera más intuitiva a las proporciones y comparaciones entre objetos o bien cantidades. Fandiño (2015) menciona que:

De vez en cuando es más fácil expresar 75% bajo la forma de fracción $\frac{75}{100}$ o $\frac{3}{4}$, a veces conviene dejarlo indicado bajo forma de porcentaje, y otras veces es preferible el número decimal 0.75. En el caso de la botella de vino serían ridículas las dos primeras escrituras y por lo tanto se privilegia la tercera. (p.37)

2.10 En el lenguaje cotidiano

Se refiere a cómo las fracciones son utilizadas y comprendidas en situaciones y expresiones comunes fuera del ámbito académico o técnico. En lugar de manejar definiciones formales o matemáticas precisas, el lenguaje cotidiano emplea las fracciones de manera práctica y accesible para describir proporciones, cantidades o partes de un todo, de manera que cualquier persona, pueda comprenderlas. "Puede por lo tanto ser de ayuda un parágrafo en el cual se exploran distintos campos y distintos usos de las fracciones en la vida diaria" (Fandiño, 2015, p.37).

Por ejemplo, expresiones como "la mitad de un pastel" o "tres cuartos de un litro" son frases del lenguaje cotidiano que emplean fracciones sin requerir que el hablante o el oyente tengan un conocimiento profundo de las propiedades formales de las fracciones.

2.11 Dificultades reportadas en la literatura

Las dificultades que tienen los estudiantes cuando resuelven cualquier problema, pueden estar relacionada con una infinidad de causas, por ejemplo, la falta de comprensión de los conceptos, la escasez de ejercicios prácticos, la falta de conexión que hay entre los conceptos teóricos y su aplicación práctica, los diferentes estilos de aprendizaje que puede llevar a que algunos estudiantes no se beneficien adecuadamente de las estrategias de enseñanza utilizadas en el aula, por mencionar algunos. De esto, en el caso de Colombia, Torres Medina (2013) menciona que:

> La enseñanza usual de las fracciones en Colombia obedece a patrones repetitivos verbalistas desde el punto de vista de la sintaxis matemática, que no permite un aprendizaje significativo y que es fuertemente perpetuada por los libros de texto, en donde se asume al estudiante como

> un espectador que sólo repite procedimientos y que enfrenta ejercicios descontextualizados, aislados de su cotidianidad en los que prima el trabajo algorítmico y repetitivo. (p.530)

En cuanto al tema de fracciones y relacionado a cada uno de los significados que se van a analizar, en el trabajo de Olfos Ayarza (2011) con estudiantes del nivel de 4º básico en Chile, se encontraron las siguientes dificultades en los estudiantes que contestaron el cuestionario que les aplicó, si bien no entró en detalles, estas ideas se encuentran presentes en el análisis de los resultados de su investigación respecto a cada pregunta del cuestionario que aplicó.

- Cambio de la unidad parte-todo en los problemas, generando confusión al adaptarse a las modificaciones dentro de la misma pregunta.
- Problemas para ubicar correctamente fracciones en la recta real, especialmente en la identificación de números reales positivos y negativos.
- Manejo incorrecto de operaciones con fracciones.
- Incapacidad para identificar el espacio muestral en problemas de probabilidad, lo que afecta el cálculo de probabilidades en situaciones con múltiples elementos.
- Dominio insuficiente de conceptos aritméticos básicos.

En cuanto al trabajo de Fazio y Siegler (2015) ellos hablan de errores aritméticos. “Los niños suelen confundir las reglas de la aritmética de números enteros con fracciones aritméticas” (p.16). Además, mencionan que:

> El error común de intentar sumar fracciones agregando primero los numeradores y luego los denominadores se debe, en parte, a no entender que las fracciones son números con magnitudes. El confiar solamente en una comprensión parcial de las fracciones, a menudo deja a los niños confundidos en cuanto al significado de las fracciones mayores a 1 y al significado de las fracciones negativas. (p.10)

Por último, Parra Álvarez y Flores Macías (2008) en su investigación, clasifican los errores comunes de los estudiantes en tres categorías, pues mencionan que:

> Las principales problemáticas encontradas en los alumnos se pueden agrupar en tres categorías: el concepto de fracción, los procedimientos rutinarios de operaciones con fracciones y las concepciones sobre problemas con fracciones. En primer lugar, se

> encontraron dos diferentes conceptos de fracción relacionados con la conservación del entero. (p.49).

Así mismo, en su investigación, encontraron que diversos estudiantes tenían confusiones en la identificación de la unidad (el todo) que generaban al dividir un entero en una cierta cantidad de partes. “Por otro lado, quien no conservaba el entero tenía el conocimiento de que un entero podía fraccionarse, pero cada fracción se “convertía” en un nuevo entero independiente del original, susceptible de ser fraccionado también.” (Parra Álvarez y Flores Macías, 2008, p.49).

Además de dificultades al realizar operaciones con fracciones y de confusión entre el numerador y el denominador, como lo mencionan:

> Los alumnos presentaron problemas para recordar los procedimientos sobre la obtención del común denominador, además, confundieron el procedimiento de la multiplicación con el de la división. Durante la suma con fracciones, fue notoria la dificultad para comprender la relación entre numerador y denominador, los cuales fueron sumados como si fueran enteros sin alguna relación entre sí. (p.49)

También Torres Medina (2013) indica que una de las posibles razones por la que estas dificultades estén presentes en los estudiantes, se debe a que los estudiantes estaban acostumbrados a aprender los temas mediante patrones o bien, mediante la memorización. “Puede inferirse que los alumnos estaban habituados a una enseñanza centrada en los procedimientos algorítmicos de los ejercicios y su posterior aplicación a problemas matemáticos sin considerar otras posibles estrategias de solución” (Parra Álvarez y Flores Macías, 2008, p.49).

En el trabajo de Martínez Merino et al. (2019), el cual fue realizado con estudiantes de secundaria se encontraron las siguientes dificultades:

> Se detectaron dificultades persistentes en algunos estudiantes, por ejemplo, para identificar la unidad, identificar el valor posicional de los decimales, ordenar las fracciones y para interpretar la fracción como cociente. También se detectaron errores persistentes como: ordenar las fracciones considerando sólo el numerador, realizar operaciones aritméticas arbitrarias, colocar el denominador de la fracción como dividendo. Por otro lado, la multiplicación de fracciones continuó presentando dificultades de comprensión en algunos

estudiantes debido a que no lograron reestructurar su modelo multiplicativo de la primaria. (p.4761)

Por último, en mi experiencia dando clases como parte de mi servicio social y práctica profesional a grupos de primer año de preparatoria, me percaté que tenían dificultades al realizar operaciones con fracciones, pues confundían el algoritmo de suma o resta de fracciones con el de producto o bien con el de división, no identificaban con claridad al numerador y el denominador, no sabían ubicar de manera correcta la posición de fracciones o de números decimales en la recta real, no sabían de qué forma se escribe una razón, tenían dificultades al extraer la información de una enunciado en lenguaje matemático y por último, en problemas que involucraban unidades de medida; hacían conversiones innecesarias o, en ocasiones, olvidaban mencionarlas en sus resultados.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

3.1 Tipo de estudio

En este trabajo, se va a utilizar el método de investigación cualitativa para analizar la comprensión de los significados del concepto de fracción propuestos por Fandiño (2015). Se emplea este enfoque para obtener datos empíricos que permitan estudiar la comprensión y las dificultades enfrentadas por estudiantes al resolver problemas que requieren de las fracciones, y para comparar los resultados con los mencionados en la literatura.

3.2 Descripción de los participantes

En esta investigación participaron 34 estudiantes de nuevo ingreso de una preparatoria de la BUAP, de los cuales se descartaron 5 ya que solo resolvieron uno de los dos cuestionarios aplicados, por lo cual los datos obtenidos fueron de 29 estudiantes.

3.3 Cuestionarios

Se diseñaron dos cuestionarios, cada uno de 11 preguntas relacionadas con diferentes significados del concepto de fracción. Algunos de estos problemas son utilizados por profesores de esta preparatoria en sus evaluaciones y algunos fueron extraídos del libro del Colegio nacional de matemáticas (2009). También se analizó el significado que está involucrado en cada problema por parte de la directora de esta tesis y del tesista que hicieron ajustes hasta tener una misma interpretación.

Los cuestionarios tuvieron como objetivo el recabar información sobre la compresión de cada uno de los significados del concepto de fracción y de determinar cuáles eran los errores más comunes que tenían los estudiantes a la hora de resolver cada problema. Los cuestionarios fueron aplicados en dos sesiones separadas por un día de diferencia y con una duración de 50 minutos cada una. Enseguida se enlistan los problemas que constituyeron a los dos cuestionarios denotados por el número del problema y el cuestionario al que pertenecen A o B (problema 1 A, problema 2 A, problema 4 B, problema 5 B, etc.), además se menciona el significado involucrado en ellos.

Problema 1 A: En una barra de chocolate hay 12 cuadritos. Si comes 6 cuadritos, ¿qué fracción de la barra de chocolate has comido? Y si le compartes a un amigo 2 cuadritos, ¿qué fracción de la barra de chocolate te queda?

Problema 4 B: En una pizzería Don Francisco compra $\frac{5}{8}$ de una pizza de pepperoni y $\frac{3}{4}$ de una pizza de queso, ¿qué fracción de pizza tiene en total? ¿Qué fracción de pizza de pepperoni y de pizza de queso queda sin vender? Comparando las fracciones de pizza que quedan sin vender, ¿de cuál tipo de pizza queda una mayor cantidad sin vender?

El problema 1 del cuestionario A y el problema 4 del cuestionario B tienen el significado de fracción como parte-todo en el caso continuo, ya que en ambos se toma como el todo como una barra de chocolate y a una pizza, respectivamente, los cuales teóricamente podemos dividir de una infinidad de formas.

Problema 2 A: En una bolsa hay 20 canicas. Si tomas 7 canicas, ¿qué fracción del total de canicas has tomado? Y si pierdes 3 canicas, ¿cuál es la fracción del nuevo total de canicas, considerando que tomaste 7 canicas?

Problema 9 B: En un mazo de cartas hay 52 cartas. Si sacas 8 cartas, ¿qué fracción del mazo de cartas has sacado? Si le das a un amigo $\frac{3}{4}$ de las cartas restantes, ¿cuántas cartas le diste?

El problema 2 del cuestionario A y el problema 9 del cuestionario B tienen el significado de fracción como parte-todo en el caso discreto, en ambos ejemplos se presentaron situaciones en las cuales no es posible dividir al objeto en situaciones reales, como por ejemplo las cartas y las canicas.

Problema 3 A: Si tienes 15 galletas y las repartes entre 5 amigos, ¿qué fracción del total de galletas le corresponde a cada amigo? Después, cada amigo le da $\frac{1}{3}$ de su fracción a otro amigo que no recibió galletas. ¿Qué fracción del total de galletas le queda a cada amigo después de dar la tercera parte?

Problema 5 B: Un coche recorre 300 kilómetros con 20 litros de gasolina. ¿Qué fracción de kilómetro recorre por cada litro de gasolina? Si en el siguiente viaje el coche utiliza 5 litros menos y recorre la misma distancia, ¿qué fracción de kilómetro recorre por cada litro de gasolina en el segundo viaje?

El problema 3 del cuestionario A y el problema 5 del cuestionario B tiene el significado de fracción como un cociente, ya que los objetos presentados en los problemas están siendo divididos en b partes, donde solo se les pide indicar tal división o bien dar el resultado de dicha división.

Problema 4 A: En una bolsa hay 10 bolas rojas y 15 bolas azules. ¿Cuál es la relación de bolas rojas a bolas azules en forma de fracción? Si se agregan 5 bolas rojas y se quitan 3 bolas azules, ¿cuál es la nueva relación de bolas rojas a bolas azules en forma de fracción?

Problema 1 B: En una clase hay 18 estudiantes que usan gafas y 22 estudiantes que no las usan. ¿Cuál es la relación entre la cantidad de estudiantes que usan gafas y la cantidad de estudiantes que no las usan? Expresa esta relación en forma de fracción. Si 6 estudiantes más empiezan a usar gafas y 4 estudiantes dejan de usar gafas, ¿cuál es la nueva relación entre la cantidad de estudiantes que usan gafas y la cantidad de estudiantes que no las usan?

El problema 4 del cuestionario A y el problema 1 del cuestionario B tiene el significado de fracción como una relación, ya que ambos problemas se mencionan dos objetos los cuales tienen una correspondencia en común y se les pide indicar dicha relación como una fracción.

Problema 5 A: Calcula $\frac{2}{3}$ de 18.

Problema 11 B: Calcula $\frac{7}{9}$ de 81.

El problema 5 del cuestionario A y el problema 11 del cuestionario B tiene el significado de fracción como un operador, ya que las fracciones que les dan en cada problema fungen como operadores multiplicativos con respecto a los números enteros que les indican, esto para hallar el resultado del problema.

Problema 8 A: Si una cuerda mide 12 metros y se corta $\frac{3}{4}$ de la cuerda para amarrar una lona, ¿cuántos metros de cuerda has cortado para amarrar dicha lona? Si luego se cortan 1/3 de lo que queda para hacer ganchos para sujetarla a una barda, ¿cuántos metros de cuerda quedan sin usar?

Problema 3 B: Don Felipe tiene un campo de 7 hectáreas para sembrar maíz, solo sembró $\frac{5}{9}$ del total del campo. ¿Cuántas hectáreas quedan sin sembrar? Si luego Don Felipe decide sembrar $\frac{1}{4}$ de las hectáreas restantes con trigo, ¿cuántas hectáreas quedan sin sembrar al final?

El problema 8 del cuestionario A y el problema 3 del cuestionario B tiene el significado de fracción como una medida, ya que en los problemas involucran unidades de medida como lo son los metros y las hectáreas.

Problema 6 A: En una bolsa hay 5 canicas rojas, 3 canicas azules y 2 canicas verdes. Si sacas una canica al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una canica roja?

Problema 6 B: Si se lanzan dos dados justos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas caras de los dados sean pares?

El problema 6 del cuestionario A y el problema 6 del cuestionario B tiene el significado de fracción como una probabilidad, ya que en ambos problemas se les pide determinar cuál es la probabilidad de sacar cierta cantidad de objetos con respecto al total, es decir, tienen que determinar la probabilidad de clásica de cada situación.

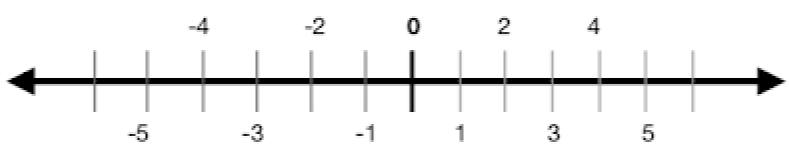
Problema 7 A: Simplifica la fracción $\frac{18}{24}$ y expresa el resultado como un número decimal.

Problema 8 B: Suma las fracciones $\frac{5}{6}$ y $\frac{5}{8}$, expresa el resultado como un número decimal.

El problema 7 del cuestionario A y el problema 8 del cuestionario B tiene el significado de fracción como un número racional, en dichos problemas se les solicita hacer operaciones aritméticas con las fracciones indicadas y además se les pide convertir el resultado en un número decimal, esto demuestra que las fracciones son representaciones de los números racionales, evidenciando su equivalencia.

Problema 9 A: En la siguiente recta real ubica las fracciones $\frac{3}{4}, \frac{9}{2}, -\frac{8}{3}$ en la recta real.

Problema 10 B: En la siguiente recta real ubica las fracciones $-\frac{3}{4}, \frac{8}{2}, \frac{8}{3}$ en la recta real.



El problema 9 del cuestionario A y el problema 10 del cuestionario B tiene el significado de fracción como ubicada en la recta real, ya que en ambos enunciados se pide ubicar en la recta real tres fracciones distintas, esto para verificar si reconocen las posiciones dentro de la recta real, es decir, cuando se trata de un número positivo o negativo.

Problema 10 A: Daniel está preparando una receta que requiere $\frac{7}{9}$ de una taza de azúcar. ¿Cuál es el porcentaje de taza de azúcar que Daniel necesita para preparar su receta? Luego, si Daniel necesita reducir la cantidad de azúcar en un 25% porque es muy dulce, ¿cuánta azúcar deberá usar al final?

Problema 2 B: Un jardinero ha plantado flores en $\frac{7}{8}$ del jardín de una casa. ¿qué porcentaje del jardín está cubierto con flores? Si el área total del jardín es de 200 metros cuadrados, ¿cuántos metros cuadrados del jardín están cubiertos con flores?

El problema 10 del cuestionario A y el problema 2 del cuestionario B tiene el significado de fracción como un porcentaje, porque se les solicita calcular el porcentaje de azúcar que necesita Daniel para la receta y el porcentaje del terreno que el jardinero ya sembró.

Problema 11 A: Escribe un ejemplo donde divididas algo entre partes iguales (congruentes)

Problema 7 B: Escribe un ejemplo donde expreses una relación entre dos objetos y escribe dicha relación como una fracción.

El problema 11 del cuestionario A y el problema 7 del cuestionario B tienen el significado de fracción en el lenguaje cotidiano, porque a los alumnos se les pide que planteen un ejemplo que pueda representar alguna actividad o situación relacionada con su entorno.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS DE LA APLICACIÓN

Al revisar los cuestionarios, se obtuvieron los datos mostrados en las tablas 2 y 3 (Anexo) del cuestionario A y B respectivamente, donde a cada respuesta de cada estudiante se le asignó un uno si la respuesta era correcta y un cero en caso contrario. Se sumó la cantidad de estudiantes que acertaron en cada pregunta para cada cuestionario y se obtuvieron los datos de la tabla 1, que muestra la relación de aciertos de los cuestionarios A y B respecto a cada significado del concepto de fracción.

ACIERTOS RESPECTO A CADA SIGNIFICADO DEL COCEPTO DE FRACCIÓN											
ACIERTOS	PARTE-TODO (CONTINUO)	PARTE-TODO (DISCRETO)	UN COCIENTE	UNA RELACIÓN	UN OPERADOR	UNA MEDIDA	UNA PROBABILIDAD	UN NÚMERO RACIONAL	UN PUNTO EN LA RECTA REAL	UN PORCENTAJE	LENGUAJE COTIDIANO
EN A	18	8	4	3	21	22	19	8	13	4	20
EN B	10	1	11	1	26	2	5	3	12	3	12

Tabla 1. Total de aciertos por significado y por cuestionario.

Dados los resultados de la tabla 1 es visible que el cuestionario B tuvo un mayor grado de dificultad en relación con el cuestionario A, además de esto, se observa que los significados del concepto de fracción de parte-todo en el caso discreto, como una relación, como un número racional y como un porcentaje son en los que mayor dificultad tienen los estudiantes de esta preparatoria. A continuación, se presenta un análisis detallado respecto a cada significado del concepto de fracción.

Fracción como parte-todo (caso continuo)

Los problemas 1 A y 4 B mostraron un total de 18 y 10 aciertos respectivamente. Esto muestra que la pregunta planteada en el cuestionario A tuvo una mayor cantidad de aciertos en comparación a la del cuestionario B, lo cual puede deberse a que la pregunta en el cuestionario B, la unidad parte-todo involucraba a dos unidades (dos pizzas), es decir, los estudiantes tuvieron dificultades en reconocer la unidad. Además, en el cuestionario B se formularon más preguntas sobre la situación planteada que en el A.

Figura 1. Ejemplo de respuesta al problema 4 B

Como se muestra en la figura 1, algunos estudiantes en el problema 4 B, dibujaban ambas pizzas, pero tuvieron dificultad para interpretar y representar la cantidad de rebanadas que eran compradas. Además, algunos estudiantes tuvieron errores en la suma de fracciones, pues sumaban de forma directa, numerador con numerador y denominador con denominador, como se muestra en la figura 2.

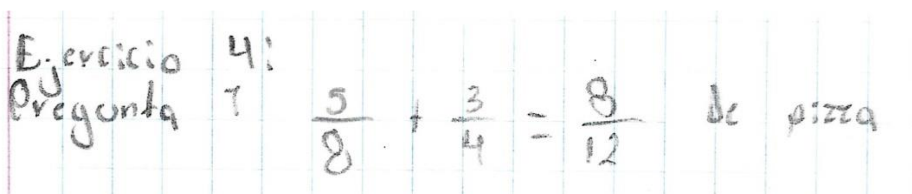


Figura 2. Ejemplo de respuesta al problema 4 B

Fracción como parte-todo (caso discreto)

Los problemas 2 A y 9 B presentaron un bajo número de aciertos, con ocho y uno, respectivamente. Esto puede deberse a que para los estudiantes no es natural que las canicas y las cartas puedan dividirse en b partes. Además, en la pregunta 2 del cuestionario A el parte-todo cambia en dos ocasiones, primero son las veinte canicas mientras que, en la segunda parte, el parte-todo cambia a trece canicas, la mayoría de los estudiantes tuvieron dificultades en la interpretación del problema, sobre todo en la segunda pregunta como se muestra en la figura 3. En otras palabras, los estudiantes tuvieron dificultades en reconocer la unidad cuando esta cambia

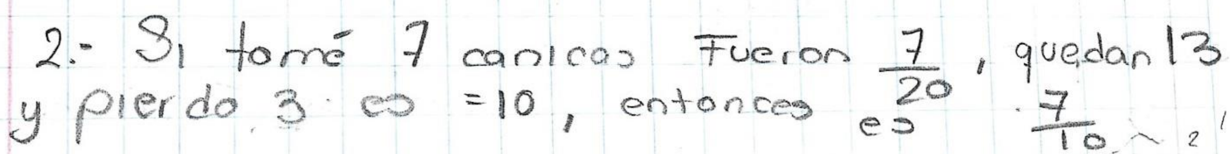


Figura 3. Ejemplo de respuesta al problema 2 A

Algo similar ocurre en la pregunta 9 del cuestionario B, pues primero se plantea la parte-todo como 52 cartas y después cambia a 44 cartas. De esta pregunta algunos estudiantes que intentaron resolver el problema proponían como resultado lo que se muestra en la figura 4.

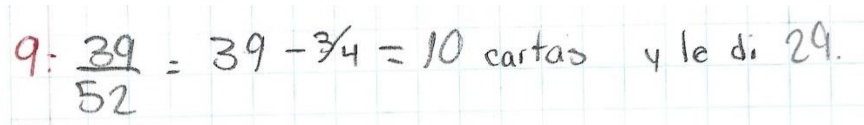


Figura 4. Ejemplo de respuesta al problema 9 B

La mayoría de los estudiantes no respondieron la primera pregunta del problema, solo mencionaban la fracción de cartas que restaban luego de quitar las 8 cartas al mazo de 52 cartas. Los estudiantes tuvieron dificultades en calcular la cantidad de cartas restantes y en calcular los $\frac{3}{4}$ de estas mismas.

Fracción como cociente

El problema 3 A, tuvo 4 aciertos y el problema 5 B tuvo 11 aciertos. En este significado hubo un incremento en la cantidad de aciertos entre cada prueba, esto se debe porque el problema 5 del cuestionario B estuvo más sencillo en comparación con el problema 3 A.

En el problema 3 A, se hacen más preguntas referentes a la situación planteada; primero se mencionan a 5 amigos que se reparten 15 galletas de manera proporcional y luego se agrega un sexto amigo, al cual deben de darle una tercera parte de las galletas que les correspondían, la mayoría de los estudiantes contestaron correctamente la primera pregunta, sin embargo, en la segunda no pudieron lograrlo. La dificultad en este problema radico en que los estudiantes tuvieron dificultades para interpretar que repartir 15 galletas entre 5 amigos era un cociente, y para entender que a cada amigo le correspondía 1/5 del total. Además, se les complicó calcular la tercera parte de esa fracción y restar fracciones con diferentes denominadores, incluso hubo estudiantes que sumaron ambas cantidades como se muestra en la figura 5.

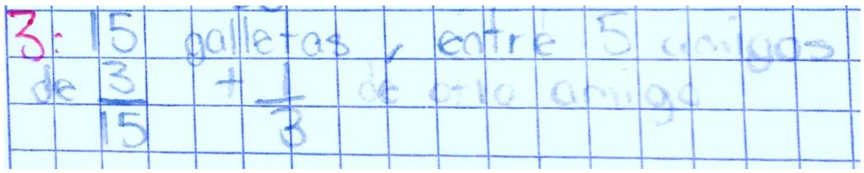


Figura 5 Ejemplo de respuesta al problema 3 A

En cuanto el problema 5 B, ocurrió algo similar, pues tuvieron dificultades para indicar la cantidad de kilómetros que el automóvil recorría entre la cantidad de litros que necesitaba para hacerlo, algunos estudiantes cambiaron la relación solicitada, en el numerador colocaban la cantidad de litros y en el denominador la cantidad de kilómetros que recorría el automóvil como se muestra en la figura 6.

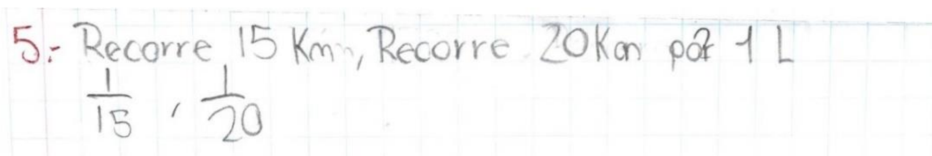


Figura 6. Ejemplo de respuesta al problema 5 B

En ambos problemas, la mayoría de los estudiantes indicó el resultado de la operación entre las dos cantidades, mas no indicaron de forma explícita el cociente.

Fracción como relación

El problema 4 del cuestionario A recibió solo tres aciertos y el problema 1 del cuestionario B tuvo solo un acierto, lo que indica que los estudiantes tienen dificultades en la comprensión de este significado, pues casi ninguno de los participantes escribió la respuesta correcta en ambos cuestionarios. El nivel de dificultad en ambos problemas fue el mismo, pues primero, dados los dos objetos se les solicita escribir la relación que hay entre estos y luego a cada objeto se le resta o se le suma una cantidad específica a cada uno para dar la respuesta a la segunda pregunta del mismo problema.

Uno de los errores que cometieron los estudiantes fue considerar el resultado de estos problemas como una probabilidad, pues confundieron la fracción como relación con la fracción como una probabilidad, en el caso del problema 4 calculaban la probabilidad de sacar una bola roja, y luego la probabilidad de sacar una bola azul como se muestra en la figura 7.

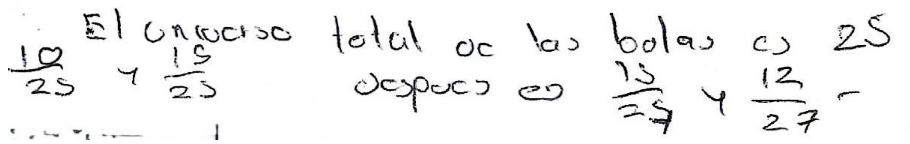


Figura 7. Ejemplo de respuesta al problema 4 A

De manera similar ocurrió con el problema 1 B como se muestra en la figura 8.

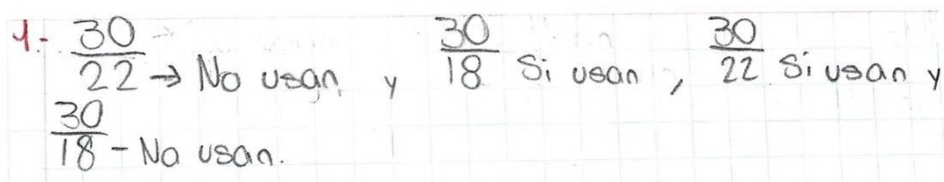


Figura 8. Ejemplo de respuesta al problema 1 B

Fracción como operador

El problema 5 del cuestionario A tuvo 21 aciertos y el problema 11 del cuestionario B tuvo con 26 aciertos, lo que sugiere que los estudiantes son más competentes en la utilización de fracciones como operadores multiplicativos en problemas prácticos. En ambos problemas se tiene la misma estructura y nivel de dificultad, puesto que solo tenían que calcular la fracción indicada dado el número entero, aplicando sus conocimientos básicos de aritmética.

Fracción como medida

El problema 8 del cuestionario A mostró 8 aciertos y el problema 3 del cuestionario B también mostró resultados relativamente bajos con 3 aciertos. Esto muestra que los estudiantes tienen dificultades en la comprensión del significado de fracción como medida.

De los problemas de cada cuestionario, la dificultad recayó en que no entendieron la situación del problema. En el caso de la pregunta 8 de A, pocos estudiantes fueron capaces de determinar la cantidad de cuerda que necesitaban para amarrar la lona, además de que algunos sí identificaron la cantidad en metros de cuerda que restaban. Sin embargo, casi ninguno de los estudiantes fue capaz de comprender la instrucción de que, dados los 3 metros de cuerda restantes necesitaban 1/3 de esta para hacer los ganchos que se iban a utilizar para sujetar la lona a una barda como se muestra en la figura 9.

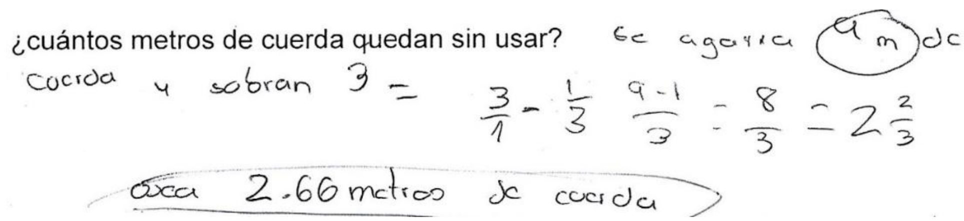


Figura 9. Ejemplo de respuesta al problema 8 A

Pues como se observa en la figura 9, a los 3 metros de cuerda, ellos le restaban 1/3, más no calculaban a cuánto equivalía 1/3 de los 3 metros, para así concluir con la respuesta de la cantidad de metros de cuerda que restaban luego de amarrar la lona y de hacer los ganchos.

Por otro lado, los estudiantes tuvieron dificultades en la conversión de unidades de medida, pues en el problema 3 B se les daba la unidad de medida en hectáreas de un cierto campo de cultivo. Más de la mitad de los estudiantes convirtieron esas hectáreas a metros cuadrados, esto provocó que fallaran al intentar resolver el problema, pues les daban cantidades muy grandes y al calcular las fracciones de estas cantidades se confundían al realizar las operaciones aritméticas como se muestra en la figura 10.

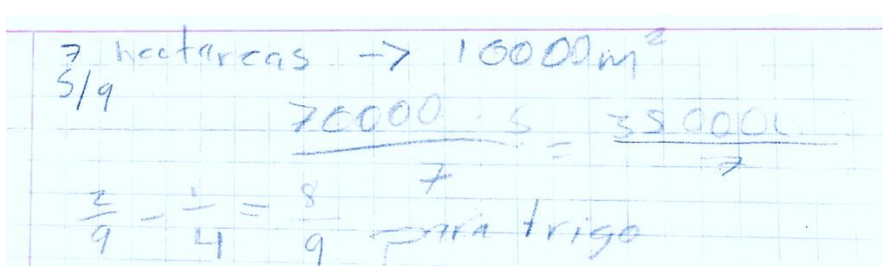


Figura 10. Ejemplo de respuesta al problema 3 B

Fracción como probabilidad

El problema 6 del cuestionario A tuvo 22 aciertos y el problema 6 del cuestionario B mostró 2 aciertos. La diferencia entre estos resultados se puede explicar por la diferencia en la complejidad de los problemas planteados. En el cuestionario A el problema era más directo, ya que los estudiantes solo tenían que identificar el cociente entre el número de casos favorables (sacar una canica roja) y el total de canicas en la bolsa. En cambio, en el cuestionario B, requería que los estudiantes identificaran todos los posibles resultados del evento descrito. En algunos de ellos se presentaron nuevamente dificultades al hacer suma de fracciones tal y como se muestra en la figura 11.

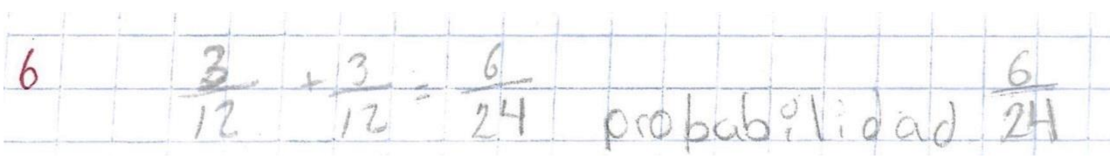


Figura 11. Ejemplo de respuesta al problema 6 B

Esto evidencia que los estudiantes fueron capaces de calcular probabilidades en el problema donde los resultados de un experimento están relacionados únicamente con un solo objeto. Sin embargo, cuando la cantidad de elementos involucrados aumentó, su desempeño disminuyó notablemente. Esto podría deberse a que no logran imaginar o visualizar correctamente todos los posibles resultados y las combinaciones de estos, lo que les impide identificar el espacio muestral completo y, en consecuencia, calcular la probabilidad correctamente.

Fracción como número racional

El problema 7 del cuestionario A tuvo 8 aciertos y el problema 8 del cuestionario B, el rendimiento fue más bajo con 3 aciertos. La razón por la cual hubo una diferencia en la cantidad de aciertos entre ambos problemas fue que en el problema 8 del cuestionario B se les pide sumar dos fracciones, mientras que en el problema 7 del cuestionario A, se les pide simplificar la fracción a su mínima expresión, además de solicitarles indicar el resultado como un número decimal en ambos problemas. En otras palabras, la dificultad del problema 8 B radicó en una suma de fracciones como se muestra en la figura 12.

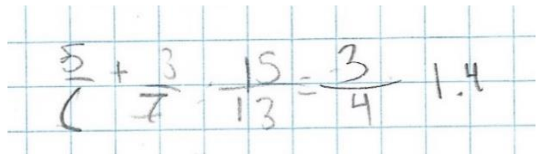


Figura 12. Ejemplo de respuesta al problema 8 B

Fracción en la recta real

El problema 9 del cuestionario A mostró 13 aciertos y el problema 10 del cuestionario B, el desempeño fue similar con 12 aciertos. Ambos problemas requerían ubicar tres fracciones en la recta real, en el 9 A las fracciones eran $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{2}$ y $-\frac{8}{3}$, mientras que en 10 B eran las fracciones $-\frac{3}{4}, \frac{8}{2}\ y\ \frac{8}{3}$. Algunos estudiantes no indicaron la ubicación correcta de cada fracción, tal y como se muestra en la figura 13.

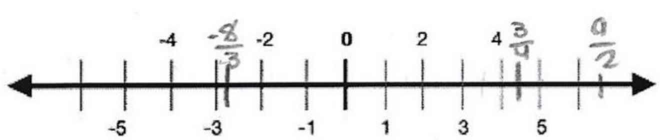


Figura 13. Ejemplo de respuesta al problema 9 A

Otros estudiantes, tenían una idea de por dónde se ubicaban dichas fracciones, pero no lo denotaban con una marca o algo que indicara que ahí se ubicaba dicho punto, simplemente escribían la fracción entre los dígitos de la recta real como se muestra en la figura 14.

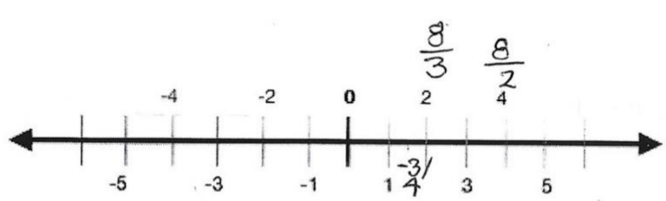


Figura 14. Ejemplo de respuesta al problema 10 B

Otros estudiantes confundieron la ubicación de los números reales positivos y negativos en la recta real, pues cuando dibujaban la recta real en su hoja de respuestas, los números reales positivos los colocaban a la izquierda del cero y los negativos a la derecha, como se muestra en la figura 15.

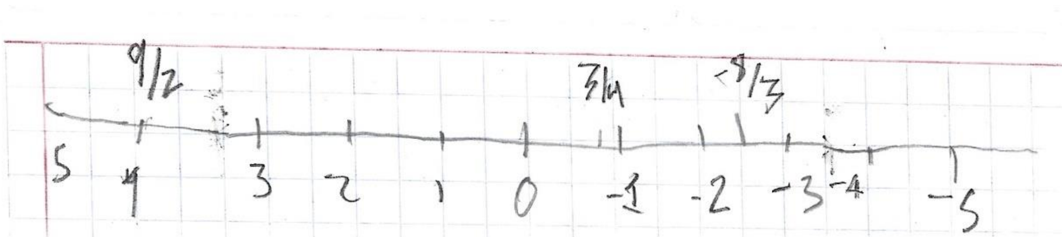


Figura 15. Ejemplo de respuesta al problema 10 B

Fracción como porcentaje

La pregunta 10 del cuestionario A mostró cuatro aciertos. En el cuestionario B la pregunta 2 tuvo tres aciertos, lo que sugiere que los estudiantes tienen problemas al convertir fracciones a porcentajes. El nivel de dificultad en ambos problemas fue el mismo, pues en ambos se les solicita calcular una cierta cantidad de un 100%, la cual muchos estudiantes no contestaron y luego, en el caso del problema 10 A, del porcentaje que habían encontrado, tenían que restarle 25%, mientras que en B solo tenían que encontrar los 7/8 de los 200 metros cuadrados del jardín, en otras palabras, no respondieron correctamente porque omitieron contestar la primera pregunta del problema.

En lenguaje cotidiano

La pregunta 11 del cuestionario A mostró 20 aciertos, lo que indica que los estudiantes pueden relacionar fracciones con su entorno. En la pregunta 7 del cuestionario B, el rendimiento fue más bajo con 12 aciertos. Esto podría deberse a que el problema 7 del cuestionario B, les pide expresar una relación entre 2 objetos, y por lo visto en los resultados de esta investigación, estos estudiantes tienen dificultades en el significado fracción como una relación, pues muchos no fueron capaces de imaginar una situación de esta característica, mientras que la pregunta 11 del cuestionario A fue más sencilla ya que les pedía escribir un ejemplo donde dividieran algo en partes iguales, dicha situación fue más sencilla de imaginar para los estudiantes.

A pesar de que las respuestas de cada problema de ambos cuestionarios eran directas, pues no requerían realizar un procedimiento muy avanzado para llegar a la respuesta, la gran mayoría de los estudiantes no acertó con la respuesta correcta de cada pregunta. Si bien cada pregunta contenía un significado distinto del concepto de fracción, las situaciones que se planteaban estaban relacionadas con su entorno, con actividades que comúnmente hacen o que por lo general ven a su alrededor.

En resumen, los resultados muestran que los estudiantes presentan un desempeño variable en la comprensión de los significados del concepto de fracción. Los significados que implican situaciones prácticas, como en el lenguaje cotidiano, fue mejor comprendido en comparación con conceptos más abstractos como la relación y el cociente.

De acuerdo con la pregunta de esta investigación y en relación con los resultados obtenidos podemos afirmar que este grupo de estudiantes tienen mayor dificultad al resolver problemas que estén relacionados a los significados del concepto de fracción de parte-todo en el caso discreto, como una relación, como un cociente, como un punto en la recta real, como un porcentaje y como un número racional.

En cuanto a los significados del concepto de fracción como medida y como una probabilidad los estudiantes tuvieron dificultades al resolverlos, posiblemente, por el modo en que estaban planteados, pues en ambos significados la cantidad de aciertos en el cuestionario A fue mayor en comparación con la del cuestionario B.

Por otra parte, los estudiantes mostraron una buena compresión en los significados de parte-todo en el caso continuo, como un operador y como lenguaje cotidiano, pues la gran mayoría acertó con las respuestas de los problemas.

Los resultados de esta investigación muestran que los estudiantes de este nivel educativo aún tienen dificultades en la compresión de estos significados y estos coinciden a los reportados por Torres Medina (2013), Martínez Merino et al. (2019), Olfos Ayarza (2011), Fazio y Siegler (2015), y Parra Álvarez y Flores Macías (2008), los cuales se realizaron con estudiantes del nivel básico. A grandes rasgos, confundían a la unidad (el todo) que debían considerar para resolver el problema, experimentaron problemas para ubicar fracciones correctamente en la recta real, particularmente al identificar números positivos y negativos, al realizar operaciones con fracción, algunos estudiantes confundían al numerador con el denominador y viceversa.

Además, se encontraron otras dificultades en esta investigación. Por ejemplo, algunos estudiantes mostraron dificultad para establecer una relación entre dos objetos cuando esta debía escribirse como una fracción; en problemas de probabilidad, tuvieron dificultades para identificar el espacio muestral de un experimento y para indicar dicha probabilidad si el evento está condicionado, agregando también que confundieron el hecho de calcular una probabilidad con escribir una relación.

CONCLUSIONES

En esta investigación se utilizó un enfoque cualitativo para analizar la comprensión del concepto de fracción a través de los significados propuestos por Fandiño (2015), además de verificar si las dificultades enfrentadas por los estudiantes a la hora de resolver los problemas eran los mismos a los reportados en la literatura, esto, con estudiantes de nuevo ingreso de una preparatoria de la BUAP.

Para lograrlo, se aplicaron dos cuestionarios, compuestos por 11 preguntas cada uno, y donde cada pregunta estaba relacionada a un significado del concepto de fracción. Tales cuestionarios se aplicaron a 34 estudiantes, que al realizar el análisis de los resultados quedaron descartados 5, pues estos solo habían participado en uno de los cuestionarios.

Aunque este estudio se realizó con un solo grupo de una preparatoria de la BUAP, enciende una alerta sobre lo que podría estar ocurriendo con varios de los estudiantes de este nivel educativo. Además, resulta interesante que las dificultades para comprender ciertos significados coincidan con los reportados en investigaciones realizadas en el nivel básico. Lo anterior permite concluir, por un lado, que es posible que hasta el momento, no se han implementado estrategias efectivas para la comprensión de las fracciones en el nivel básico y, por otro lado, que hace falta una mayor cantidad de investigaciones sobre este tema en el nivel medio superior.

Así, coincidimos con la literatura revisada en que es necesario que, durante la educación básica y media superior, se explore cada significado del concepto de fracción, proponiendo problemas prácticos que estén relacionados con el entorno de los estudiantes como menciona Fazio y Siegler (2015):

> Antes que los niños reciban enseñanza para la resolución de problemas de tasa, relación y proporción con el algoritmo de multiplicación cruzada, deben aprender cómo resolver algunos problemas utilizando estrategias intuitivas. Es deseable que los estudiantes descubran estas estrategias por cuenta propia y que luego en clase se discutan las fortalezas y debilidades de cada estrategia. (p.20)

Finalmente, es crucial evitar el enfoque puramente algorítmico y repetitivo que muchas veces se perpetua en los libros de texto. En lugar de centrarse únicamente en la memorización de procedimientos, se deben promover actividades que estimulen el pensamiento crítico, la resolución de problemas y el análisis conceptual, lo que favorecerá un aprendizaje más profundo y duradero.

Esta investigación evidencia que las dificultades en la comprensión de los significados del concepto de fracción, reportadas por diversos autores en el nivel básico, persisten en el nivel medio superior y proporciona una base para futuras investigaciones educativas.

REFERENCIAS

Fandiño Padilla, M. I. (2015). Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos. En L. Hernández, J. Juárez y J. Slisko. (Eds.). *Tendencias en la educación matemática basada en la investigación* (pp. 25-38). Dirección de fomento editorial.

Colegio nacional de matemáticas. (2009). Capítulo 4: Números Racionales. En A. Aguilar, F. Bravo, H. Gallegos, M. Cerón y R. Reyes (Eds.). Matemáticas simplificadas (pp. 45-66). Pearson.

Fazio, L. y Siegler, R. (2015). *Enseñanza de las fracciones*. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000212781_spa

Angulo Vergara, M. L., y Arteaga Valdés, E. (2018). Las representaciones mentales en la aprehensión de conceptos matemáticos: formación del concepto de fracción. *Revista Conrado, 14*(63), 147-154. http://con-rado.ucf.edu.cu/index.php/conrado

Parra Álvarez, M. Á., y Flores Macías, R. D. (2008). Aprendizaje cooperativo en la solución de problemas con fracciones. *Educación Matemática, 20*(1), 31-52. https://www.redalyc.org/pdf/405/40512063003.pdf

Cortina, J. L., Zuñiga, C. y Visnovska, J. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática, 25*(2), 7-29. https://www.redalyc.org/pdf/405/40528961002.pdf

Olfos Ayarza, R. (2011). Dificultades en el aprendizaje de las fracciones y el conocimiento del profesor. *Comité interamericano de educación matemática. 1-11*. https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/2391/326

Torres Medina, J. A., (2013). Fracción, razón y número racional en procesos de aproximación para la introducción del cálculo con estudiantes de grado once. *Educación científica y tecnológica.* 528-532. https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/revcie/article/view/7718/9528

Martínez Merino, M. E., Hernández Rebollar, L. A., Juárez Ramírez, M. A. y Juárez López, J. A. (2019). El impacto de una intervención didáctica para la comprensión del concepto de fracción a través de representaciones semióticas en estudiantes de secundaria. *Brazilian*

Journal od Development. 5(6), 4736 – 4764. https://ojs.braziliansjournals.com.br/ojs/index.php/BRJD/article/view/1671/1671

ANEXO

Tabla 2. Relación de aciertos en el cuestionario A respecto a cada alumno

ACIERTOS CUESTIONARIO A											
PREGUNTAS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ALUMNO 1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1
ALUMNO 2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
ALUMNO 3	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
ALUMNO 4	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1
ALUMNO 5	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1
ALUMNO 6	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1
ALUMNO 7	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1
ALUMNO 8	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
ALUMNO 9	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
ALUMNO 10	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
ALUMNO 11	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
ALUMNO 12	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
ALUMNO 13	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
ALUMNO 14	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1
ALUMNO 15	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1
ALUMNO 16	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1
ALUMNO 17	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1
ALUMNO 18	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1
ALUMNO 19	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
ALUMNO 20	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1
ALUMNO 21	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
ALUMNO 22	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
ALUMNO 23	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1
ALUMNO 24	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0
ALUMNO 25	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
ALUMNO 26	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
ALUMNO 27	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
ALUMNO 28	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
ALUMNO 29	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
TOTAL DE ACIERTOS	18	8	4	3	21	22	19	8	13	4	20

Tabla 3. Relación de aciertos en el cuestionario B respecto a cada alumno

	ACIERTOS CUESTIONARIO B										
PREGUNTAS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ALUMNO 1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
ALUMNO 2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
ALUMNO 3	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
ALUMNO 4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
ALUMNO 5	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
ALUMNO 6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
ALUMNO 7	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1
ALUMNO 8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
ALUMNO 9	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1
ALUMNO 10	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
ALUMNO 11	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1
ALUMNO 12	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
ALUMNO 13	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ALUMNO 14	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
ALUMNO 15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
ALUMNO 16	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
ALUMNO 17	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
ALUMNO 18	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1
ALUMNO 19	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1
ALUMNO 20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
ALUMNO 21	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
ALUMNO 22	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1
ALUMNO 23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
ALUMNO 24	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
ALUMNO 25	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
ALUMNO 26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
ALUMNO 27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
ALUMNO 28	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
ALUMNO 29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
TOTAL DE ACIERTOS	1	3	3	10	11	2	12	5	1	12	26