



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

# CONFIABILIDAD EN LA INDUSTRIA

Tesis presentada al  
Colegio de Matemáticas  
como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

por:

**René Contreras Sevilla**

Director de tesis:

Dr. FRANCISCO SOLANO TAJONAR SANABRIA

Puebla, México

OCTUBRE de 2022



# Dedicatoria

Esta tesis esta dedicada a:

A mis padres Octaviano y Lulú quienes con su amor, paciencia y esfuerzo me han permitido llegar a cumplir hoy un sueño más, gracias por inculcar en mí el ejemplo de esfuerzo y valentía, de no temer las adversidades porque Dios esta conmigo siempre.

A mis hermanos Malú, Ana Karen y Edgar por su cariño y apoyo incondicional, durante todo este proceso, por estar conmigo en todo momento gracias.

A toda mi familia porque con sus oraciones, consejos y palabras de aliento hicieron de mí una mejor persona y de una u otra forma me acompañan en todos mis sueños y metas.

Finalmente quiero dedicar esta tesis a todos mis amigos Abraham, Mario, Franco, Julio, Nacho, Macal, Elibeth, Cristina, Oswaldo, Nayeli, Gustavo, Guillermo, Víctor, Ramces, Israel, Cristian, Eberth y Alejandro por apoyarme cuando más los necesite, por extender su mano en momentos difíciles y por el Cariño brindado cada día, siempre los llevo en mi corazón.

¡Gracias a todos!

*René Contreras Sevilla*



# Agradecimientos

Me considero afortunado de haber tenido la oportunidad de trabajar para la realización de mi licenciatura en compañía de tantas personas que estuvieron a mi lado en diferentes circunstancias de este logro.

Mi profundo agradecimiento se extiende a mi asesor y amigo Dr. Francisco Solano Tajonar Sanabria. Sus conocimientos, sus orientaciones, su manera de trabajar, su persistencia, su paciencia y su motivación han sido fundamentales para mi formación como Licenciado en Matemáticas. Él ha inculcado en mí un sentido de seriedad, responsabilidad y rigor académico sin los cuales no podría tener una formación completa. A su manera, ha sido capaz de ganarse mi lealtad y admiración, así como sentirme en deuda con él por todo lo recibido durante el periodo de tiempo que ha durado la tesis y no solamente en este periodo si no a lo largo de mi carrera. Honestamente puedo decir que sin su guía y apoyo no habría alcanzado esta meta.

Expreso mi profundo agradecimiento al Dr. Fernando Velasco Luna, al Dr. José Julio Condes Mones y a la Dra. Gladys Denisse Salgado Suárez por aceptar ser integrante del jurado. Agradezco su tiempo y dedicación en la revisión de la tesis y de los comentarios y sugerencias, las cuales las tendré presente.

Me gustaría agradecer a todos los profesores del cuerpo de Matemáticas que conocí durante mi licenciatura, por compartir sus conocimientos mientras pasaron horas de arduo trabajo en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.

También quiero agradecer a mis amigos que me apoyaron y me dieron impulso para luchar por este fin.

¡Gracias a todos!

*René Contreras Sevilla*



# Contenido

	<b>Página</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Conceptos y Definiciones</b>	<b>3</b>
<b>3 Leyes tradicionales de falla</b>	<b>11</b>
3.1 Ley de fallas de Weibull . . . . .	11
3.2 Ley exponencial de falla . . . . .	18
3.3 Ley normal de falla . . . . .	23
3.4 Otras distribuciones tradicionales . . . . .	28
<b>4 Leyes no tradicionales de falla</b>	<b>29</b>
4.1 Modelo Weibull Modificado (MWM) . . . . .	29
4.2 El nuevo Modelo Modificado de Weibull (NMWM) . . . . .	30
4.3 Modelo Weibull Transmutado Modificado (WTM) . . . . .	31
4.4 Otras distribuciones no tradicionales . . . . .	32
<b>5 Confiabilidad de los sistemas</b>	<b>35</b>
5.1 Confiabilidad de los sistemas conectados en serie . . . . .	35
5.2 Confiabilidad de los sistemas conectados en paralelo . . . . .	36
5.3 Confiabilidad de los sistemas con estructura mixta . . . . .	37
5.4 La estructura K-out-of-n . . . . .	39
<b>6 Modelos de procesos de degradación de componentes</b>	<b>43</b>
6.1 Modelos de fallos mecánicos . . . . .	43
6.2 Modelos de fallos electrónicos . . . . .	44
6.3 Modelos de riesgos proporcionales . . . . .	45

CONTENIDO

---

<b>7 Conclusiones</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>49</b>

# Lista de tablas

3.1	Fallos (Ejemplo 1) . . . . .	12
3.2	Bondad de ajustes-Weibull (Ejemplo 1) . . . . .	13
3.3	Tiempo de falla (Ejemplo 2) . . . . .	19
3.4	Bondad de ajuste-Exponencial (Ejemplo 2) . . . . .	21
3.5	Tiempo de vida de una batería (Ejemplo 3) . . . . .	24
3.6	Bondad de ajuste-Normal (Ejemplo 3) . . . . .	24
3.7	Distribuciones tradicionales . . . . .	28
4.1	Distribuciones no tradicionales 1 . . . . .	32
4.2	Distribuciones no tradicionales 2 . . . . .	33



# Lista de figuras

2.1	Tasa de fallo para $Z(t) = 0.2$ . . . . .	4
2.2	Tasa de fallo con distribución uniforme . . . . .	5
2.3	Etapas distintas de tasa de fallos . . . . .	5
3.1	Histograma - Weibull (Ejemplo 1) . . . . .	13
3.2	Función de distribución acumulada (Ejemplo 1) . . . . .	14
3.3	Cuantil-Cuantil (Ejemplo 1) . . . . .	14
3.4	Tasa de fallo $Z(t)$ . . . . .	16
3.5	Función de densidad de probabilidad (ejemplo 2) . . . . .	20
3.6	Cuantil-Cuantil (Ejemplo 2) . . . . .	20
3.7	Función de distribución acumulativa (Ejemplo 2) . . . . .	21
3.8	Confiabilidad (Ejemplo 2) . . . . .	22
3.9	Función de riesgo (Ejemplo 2) . . . . .	22
3.10	Modelo normal de falla . . . . .	23
3.11	Cuantil-Cuantil (Ejemplo 3) . . . . .	25
3.12	Función de Densidad (Ejemplo 3) . . . . .	25
3.13	Función de distribución (Ejemplo3) . . . . .	26
3.14	Función de confiabilidad (Ejemplo 3) . . . . .	26
3.15	Tasa de fallo (Ejemplo 3) . . . . .	27
5.1	Representación de sistemas en serie . . . . .	35
5.2	Representación de sistemas en paralelo . . . . .	36
5.3	Representación de sistemas con estructuras mixtas . . . . .	38
5.4	Estructura de cuatro componentes . . . . .	40



# Capítulo 1

## Introducción

La confiabilidad o fiabilidad se define como la probabilidad de que un sistema realice satisfactoriamente su función específica para la cual fue diseñado, durante un periodo de tiempo determinado y bajo un conjunto dado de condiciones técnicas, operativas, de seguridad y ambientales previamente definidas. La confiabilidad es una función del diseño del sistema o equipo; del proceso de fabricación; de la operación y el mantenimiento que se realice al equipo o sistema; y de otras consideraciones de ingeniería como el costo, la complejidad, el tamaño y el peso real de los componentes.

La confiabilidad inherente de un sistema o equipo, es la máxima confiabilidad que este puede alcanzar basado en su diseño y en su proceso de fabricación. El mantenimiento puede incrementar la confiabilidad pero no su confiabilidad inherente.

Independiente del tipo y complejidad del sistema bajo estudio, se requieren tres pasos esenciales para la evaluación de la confiabilidad de un sistema. Primero se debe construir un modelo para el análisis, después se debe hacer el análisis del modelo y el cálculo de los índices apropiados de confiabilidad, y por último se debe hacer una evaluación e interpretación de los resultados analizados.

De manera global, la confiabilidad se utiliza para medir el desempeño y/o comportamiento de sistemas, equipos y/o componentes individuales, con fines de garantizar: la optimización de los costos de diseño, mantenimiento, calidad y producción; la seguridad humana, industrial y ambiental; la cantidad y consecuencia de las fallas; la calidad de los productos, entre otros aspectos.

Obtener confiabilidad normalmente significa economía de dinero y preservación de la seguridad integral del sistema productivo, razón que conduce a mantener un "balance económico" que permita fijar niveles de confiabilidad óptimos. Por ejemplo un diseñador podría preguntarse

si el sistema que va a desarrollar será lo "suficientemente confiable" en vez de preguntarse si el sistema "será confiable" y la respuesta requiere cuantificar la confiabilidad recurriendo directamente a las herramientas de la estadística y por supuesto a la teoría de la confiabilidad

El término confiabilidad puede aplicarse en distintas áreas, algunos ejemplos de estas, son la psicología, noticias y la industria. Para el caso de la industria, la confiabilidad, surgió de la integración de una serie de actividades, y de diversas ramas de la ingeniería, donde, el análisis del "fracaso", jugó un papel fundamental para la mejora de la confiabilidad.

La tesis esta conformada por siete capítulos y la estructura es la siguiente.

En el Capítulo 1: Se ilustra una introducción de los aspectos importantes en la industria, donde la teoría de confiabilidad juega un papel importante.

En el Capítulo 2: Describe la fundamentación básica para calcular Confiabilidad, Mantenibilidad y Disponibilidad, a partir de la presentación de sus principales criterios de uso.

En Capítulo 3: En este capítulo se presentaron las distribuciones clásicas de mayor aplicación y uso para medir Confiabilidad, Mantenibilidad y Disponibilidad, las cuales, centran su análisis en la función de tasa de fallas de acuerdo con las tres fases de la curva de la Bañera.

En el Capítulo 4: Se presenta las distribuciones no tradicionales encontradas en estudios sobre el análisis de confiabilidad para sistemas o componentes reparables, en los cuales se considera que la función de tasa de fallas con la variable aleatoria tiempo de servicio se asemeja a varias fases de la curva de la bañera, se describen con sus principales características y funciones matemáticas nueve modelos o distribuciones que se pueden usar en el análisis CMD.

En el Capítulo 5: Describe la confiabilidad en sistemas conectados en serie, paralelo y mixto analizando las ventajas y desventajas de cada uno.

En el Capítulo 6: Presentamos algunos modelos para los procesos de degradación de componentes mecánicos y electrónico, la clasificación de estos dos tipos de componentes se debe a que son de los más utilizados para la conformación de sistemas en algunas ramas de la ingeniera.

En el Capítulo 7: Enfatiza la importancia que tiene el estudio de confiabilidad para que las empresas tengan mayores beneficios no solo en lo económico, también en cuestiones de confianza, seguridad y tranquilidad.

## Capítulo 2

# Conceptos y Definiciones

Para este estudio, explicaremos primero, a través de un ejemplo, el término de confiabilidad, y su utilidad. Supongamos que en una fábrica de bombillas, necesitamos saber el tiempo de duración de estas, para así ofrecer un producto de calidad y seguro; en este contexto, diremos que la confiabilidad, es la capacidad de que la bombilla cumpla su función en un tiempo determinado, por supuesto, bajo condiciones específicas y controladas, es decir, no considerando casos extraordinarios, como que esta se moje mientras está en funcionamiento.

Ahora bien, notemos que la duración, o el tiempo de vida para esta bombilla, puede ser representada a través de una variable aleatoria continua, digamos  $T$ , con función de densidad de probabilidad asociada,  $f$ . Como deseamos predecir el valor de  $T$ , que nos indica el tiempo que una bombilla puede durar hasta que falle, tenemos dos opciones, utilizar un modelo determinístico o un modelo probabilístico; debido a la composición del problema y de las circunstancias, es claro que la opción factible y realista es la de utilizar un modelo probabilístico, y así enunciamos la siguiente definición [4] [5].

**Definición:** La confiabilidad de un componente(o sistema), en el tiempo  $t$ , llamémosla  $R(t)$ , está definida como  $R(t) = P(T > t)$ , donde,  $T$  es la duración del componente y  $R$  es la función de confiabilidad.

En otras palabras, *la confiabilidad nos indica la probabilidad de que un componente funcione, o “sobreviva”, al menos hasta un tiempo  $t$ .*

Los sistemas en general, se encuentran integrados por componentes, y como hemos mencionado, es necesario evaluar la confiabilidad de dicho sistema, ya que nos permitirá estar preparados al momento de que este falle.

Si tratamos de identificar las características de diseño y construcción de sistemas, que nos permitan mayor confiabilidad, entonces podemos considerar los siguientes tres factores:

1. Complejidad: cuantos menos componentes y menos tipos de material se utilicen, en general, mayor es la probabilidad de un artículo confiable.

2. Duplicación / replicación: el uso de partes adicionales, redundantes, mediante las cuales una sola falla no causa que el sistema en general falle es un método para lograr confiabilidad.
3. Exceso de resistencia: el diseño deliberado para soportar tensiones superiores a las previstas reducirá las tasas de fallas.

Pero, ¿qué es la tasa de falla?

Además de la función de confiabilidad  $R$ , otra función que desempeña un indicador importante, para describir las partes que fallan en un artículo, es la tasa de fallas.

**Definición 1:** La tasa de falla (instantánea), o también llamada función de riesgo,  $Z(t)$ , asociada con la variable aleatoria  $T$ , se puede expresar como:

$$Z(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

Para  $F(t) < 1$ , que es la función de distribución acumulada de  $T$  y  $f(t)$  su función de densidad de probabilidad [4].

La tasa de fallas  $Z(t)$  de un componente o sistema, representa la relación entre el número de fallas que experimenta el componente por unidad de tiempo en que se encuentra operando.

Esta tasa, nos describe, de alguna forma, el deterioro o desgaste que sufre el componente o sistema en cuestión. Por ejemplo, supongamos la vida de un fusible tiene distribución exponencial con parámetro  $\lambda = 0.2$ , es decir, que  $T \sim \text{exp}(0.2)$ , entonces  $Z(t) = 0.2$ , (Vea Figura 2.1).

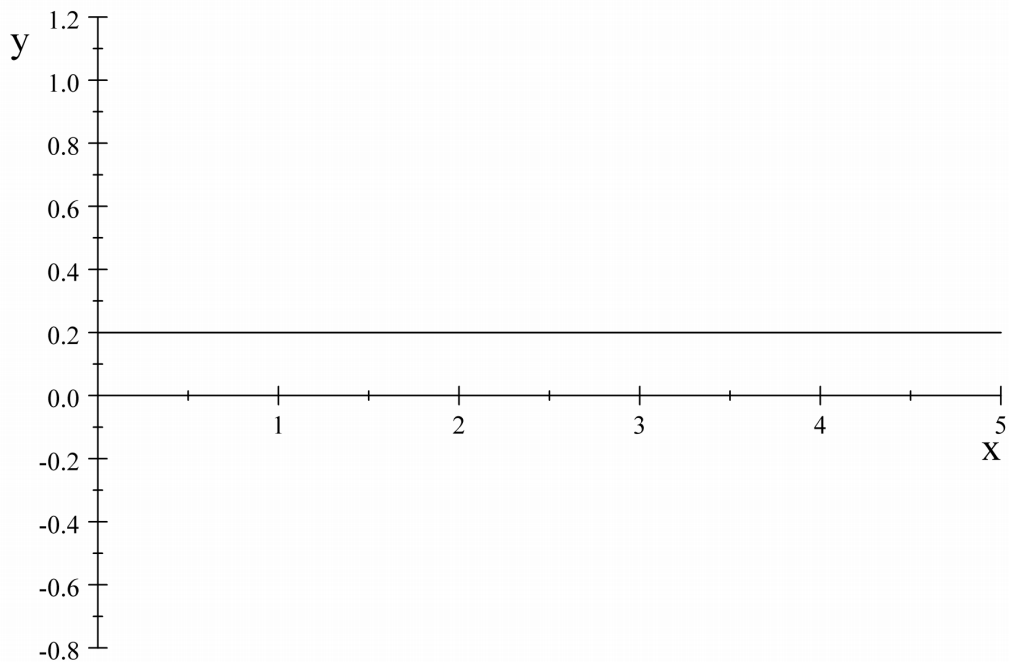


Figura 2.1: Tasa de fallo para  $Z(t) = 0.2$ ,  $x = t$  y  $y = Z(t)$ .

Esto nos diría, que el fusible no sufre ningún deterioro con el paso del tiempo. Sin embargo, si la vida de un fusible tiene distribución uniforme en el intervalo  $[0, 500]$ , es decir, que  $T \sim U[0, 500]$ , entonces  $Z(t) = \frac{1}{(500-t)}$  (Vea Figura 2.2).

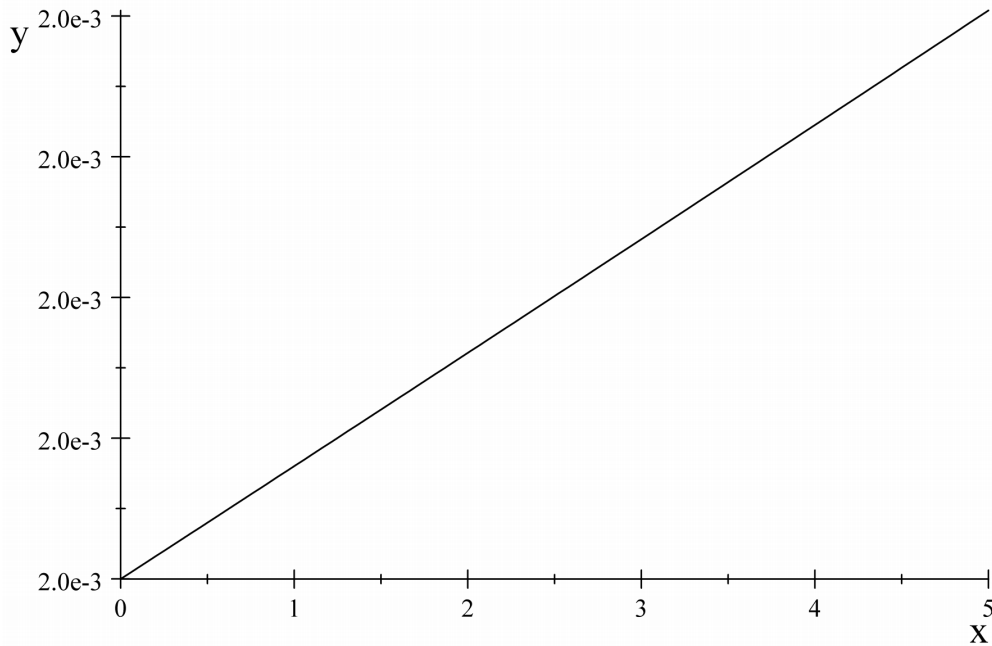


Figura 2.2: Tasa de fallo con distribución uniforme

Notemos que esta es una función creciente, y nos indica, que con el paso del tiempo, el tiempo de vida del fusible se deteriora [4] [5]. Los distintos casos de las tasas de falla, se pueden identificar gráficamente a través de la curva de la bañera, la cual mostramos a continuación:

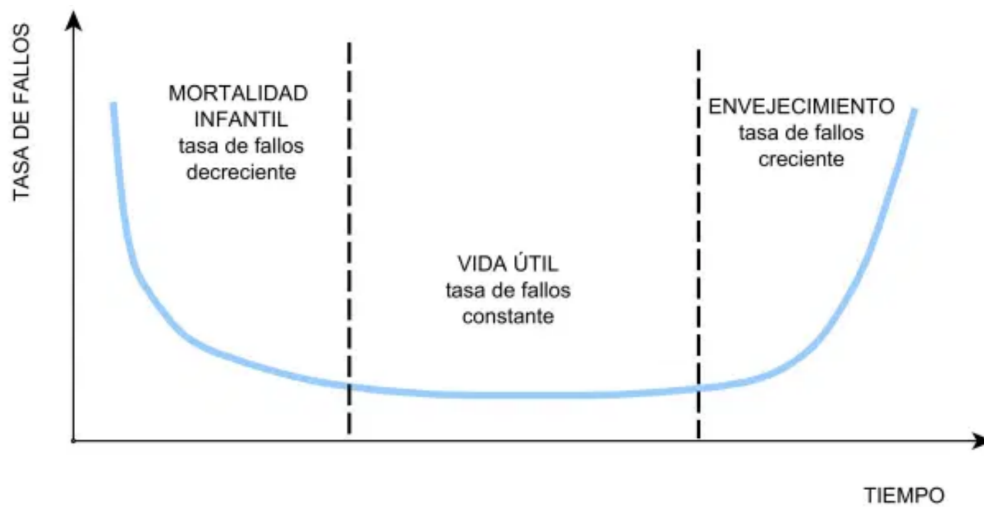


Figura 2.3: Etapas distintas de tasa de fallos

La curva 2.3 nos muestra 3 etapas distintas de las tasas de fallo:

**Etapas 1 (Mortalidad infantil):** Al inicio de la vida útil del componente o sistema, se presenta una tasa de falla alta, pero va decreciendo a medida que transcurre el tiempo, pues esta va evolucionando. Se presenta principalmente en componentes que están siendo probados y han tenido fallos debido a problemas en el diseño, a errores de instalación, a defectos de fabricación, a la falta de control de calidad, a componentes inadecuados o a funcionamiento insuficiente.

**Etapas 2 (Vida útil):** El componente ha pasado su tiempo infantil y ahora, la tasa de fallos se vuelve más estable debido a que se han corregido los errores de fabricación principalmente. Durante la vida útil del activo, los fallos son aleatorios y se producen debido a errores humanos, fallos naturales, uso excesivo o sobrecarga y daños accidentales.

**Etapas 3 (Desgaste y envejecimiento):** En esta etapa, los fallos aumentan progresivamente, debido al envejecimiento del componente y su desgaste. No todos los componentes llegan necesariamente a este fin, porque algunos dejan de utilizarse antes de desgastarse (por ejemplo, los aparatos electrónicos que fueron sustituidos cuando la tecnología quedó obsoleta, a pesar de que todavía están en pleno funcionamiento). Los fallos en esta fase, se deben a un mantenimiento deficiente, a revisiones incorrectas, o su natural curso por el envejecimiento. Las reparaciones son cada vez más costosas y los riesgos de seguridad son cada vez mayores.

La utilidad de la tasa de falla, además de describir el deterioro, se encuentra también en las técnicas de modelado de predicción de confiabilidad, ya que requieren tasas de falla de componentes como entradas para las ecuaciones de predicción.

La colección de técnicas relacionadas con la confiabilidad, la disponibilidad, la capacidad de mantenimiento y la seguridad se denominan RAMS (Reliability, Availability, Maintainability and Safety).

El modelado de sistemas, utilizando métodos de análisis de modo de falla y análisis de árbol de fallas, se ha desarrollado durante los últimos treinta años, y ahora involucra numerosas herramientas de software que permiten actualizar y refinar las predicciones a lo largo del ciclo de diseño. Sin embargo, las técnicas de predicción de confiabilidad se limitan principalmente al mapeo de fallas de componentes, a fallas del sistema, y no abordan estos factores adicionales tales como: factores humanos o documentación operativa, factores ambientales, a limitaciones de tiempo dentro del diseño, etc. Actualmente, las metodologías están evolucionando para modelar fallas de modo común, fallas de factores humanos y fallas de software, pero no hay evidencia de que los modelos que surjan, gocen de mayor precisión que las predicciones de confiabilidad existentes basadas en fallas de componentes de hardware.

Ahora, enunciaremos un teorema importante para nuestro estudio.

---

**Teorema 1 :** Si  $T$ , el tiempo para que ocurra la falla, es una variable aleatoria continua, con “función de densidad de probabilidad  $f$ ” ( $f dp$ ) y si  $F(0) = 0$ , donde  $F$  es la “función de distribución acumulada” ( $f da$ ) de  $T$ , entonces

$$f(t) = Z(t)e^{-\int_0^t Z(s)ds} \text{ y } R(t) = e^{-\int_0^t Z(s)ds}$$

“Donde  $Z(t)$  es como en la Definición 1”

Demostración:

Primero veamos que

$$f(t) = Z(t)e^{-\int_0^t Z(s)ds}$$

Como,

$$R(t) = 1 - F(t)$$

tenemos

$$R'(t) = -F'(t) = -f(t),$$

luego,

$$Z(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{-R'(t)}{R(t)}.$$

Integrando ambos miembros de 0 a  $t$ ,

$$\int_0^t Z(s)ds = \int_0^t \frac{-R'(s)}{R(s)} ds = -\ln R(s)|_0^t = -\ln R(t) + \ln R(0) = -\ln R(t).$$

Lo anterior, suponiendo que  $\ln R(0) = 0$ , lo cual es válido sí y sólo sí,  $R(0) = 1$ , pero esta condición se cumple si  $F(0) = 0$ , [4.5]. Entonces

$$R(t) = e^{-\int_0^t Z(s)ds}.$$

Ahora,

$$f(t) = F'(t) = \frac{d}{dt}[1 - R(t)] = Z(t)e^{-\int_0^t Z(s)ds},$$

por lo tanto,

$$f(t) = Z(t)e^{-\int_0^t Z(s)ds} \text{ y } R(t) = e^{-\int_0^t Z(s)ds}. \blacktriangledown$$

De esta forma, la función de densidad de la variable aleatoria se encuentra en términos de la tasa de falla, y sucede lo mismo para la función de confiabilidad.

También, existe una relación interesante entre la función de confiabilidad,  $R$ , y el tiempo promedio de falla,  $E(T)$ . Pero antes de ver esta relación de manera precisa, consideremos el siguiente lema.

**Lema 1:**

Supongamos que  $E[T]$  es finito, entonces

$$\lim_{b \rightarrow \infty} b(1 - F(b)) = 0.$$

*Demostración:*

Ya que  $E[T]$  es infinito, entonces las "colas" tienden a 0, es decir,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_b^{\infty} tf(t)dt = 0,$$

$$\lim_{b \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^b tf(t)dt = 0.$$

De la desigualdad de Markov obtenemos,

$$(2.1) \quad bP(T \geq b) \leq E[T].$$

Además,

$$(2.2) \quad \int_b^{\infty} tf(t)dt \leq E[T].$$

Restando (2.1) menos (2.2) tenemos que,

$$bP(T \geq b) - \int_b^{\infty} tf(t)dt \leq 0$$

$$\Rightarrow bP(T \geq b) \leq \int_b^{\infty} tf(t)dt$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} bP(1 - F(b)) \leq \lim_{b \rightarrow \infty} \int_b^{\infty} tf(t)dt$$

pero,

$$0 \leq \lim_{b \rightarrow \infty} b(1 - F(b)) \leq \lim_{b \rightarrow \infty} \int_b^{\infty} tf(t)dt = 0$$

por lo tanto,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} b(1 - F(b)) = 0. \blacktriangledown$$

**Teorema 2:** Si  $E(T)$  es finito, entonces:

$$E(T) = \int_0^{\infty} R(t)dt.$$

*Demostración:*

Tenemos que,

$$\int_0^{\infty} R(t)dt = \int_0^{\infty} \left[ \int_t^{\infty} f(s)ds \right] dt.$$

Integrando por partes, sean:

$$u = \int_t^{\infty} f(s)ds \Rightarrow du = -f(t)dt$$

$$dv = dt \Rightarrow v = t$$

---

Así,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left[ \int_t^\infty f(s) ds \right] dt &= \left[ t \int_t^\infty f(s) ds \right]_0^\infty + \int_0^\infty t f(t) dt \\ &= \left[ t \int_t^\infty f(s) ds \right]_0^\infty + E[T] \\ &= \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} t F(t) - 0 \cdot \int_0^\infty f(s) ds \right] + E[T] \\ &= \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot F(t) \right] + E[T].\end{aligned}$$

Ahora bien, por el **Lema 1**, tenemos que,

$$= \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot F(t) \right] = 0,$$

por lo tanto:

$$E[T] = \int_0^\infty R(t) dt. \blacktriangledown$$

Notemos entonces, que una pregunta interesante es, ¿cuál es la *fdp* de la variable aleatoria  $T$ ? para así, obtener conclusiones. Lo anterior, nos lleva, a una siguiente pregunta más general, ¿cuál es un modelo matemático razonable para la descripción de algunos fenómenos observables?

Existen distintos modelos para el cálculo de la confiabilidad o ley de falla, cuyas funciones relacionadas, se encuentran determinadas por la función de densidad de la variable aleatoria  $T$ .



## Capítulo 3

# Leyes tradicionales de falla

### 3.1 Ley de fallas de Weibull

La distribución Weibull, es una de las más utilizadas en la teoría de la confiabilidad, según la experiencia de varios autores, esta distribución es fácil de interpretar y muy versátil,[4][5][6] puesto que la función de riesgo,  $Z(t)$ , puede ser decreciente, constante o creciente.

Esta distribución, en particular, ayuda a modelar “la vida de algún objeto” o bien, su duración antes de que falle, especialmente, se usa si el objeto consta de muchas partes, y experimenta la muerte (falla), cuando alguna de estas partes falla, tanto teórica, como empíricamente, que en estas condiciones, una distribución de Weibull proporcionan una aproximación cercana a la vida útil del artículo.

De esta manera, es posible responder preguntas como:

- ¿Qué porcentaje de los elementos se espera falle durante algún período?
- ¿Cuántos reclamos de garantía pueden esperarse durante la fase de vida útil? Por ejemplo, ¿Cuántos reclamos de garantía se espera recibir durante la vida útil de 50,000 millas de neumáticos?
- ¿Cuándo se espera que se produzca un desgaste rápido? Esto podría ser utilizado para programar el mantenimiento de algún motor evitando accidentes posteriores.

Además, la distribución de Weibull, es utilizada para evaluar aplicaciones como resistencias de materiales. Pero también, dentro de sus limitaciones, esta función no sería tan adecuada para modelar fallas de producción causadas por reacciones químicas o un proceso de degradación como corrosión.

Veamos mediante el siguiente ejemplo, algunas condiciones que se pueden obtener respecto de datos específicos, con una distribución ajustada Weibull.

Ejemplo 1

La información disponible acerca de la duración de 10 sistemas mecánicos de detectores de presencia, sometidos a funcionamiento continuo hasta que se produce un fallo, da los siguientes resultado, expresados por su duración en meses y ordenados:

Sistema Mecánico	Tiempo de fallo (meses)
1	1.7
2	3.5
3	5
4	6
5	8
6	9
7	11
8	13
9	18
10	22

Tabla 3.1: Fallos (Ejemplo 1)

Supongamos que necesitamos contestar las siguientes preguntas:

1. Aproximadamente, ¿En que tiempo estos sistemas mecánicos comienzan a sufrir mayor desgaste?
2. Aproximadamente, ¿Cuántas veces al año fallaría algún sistema mecánico de este tipo?
3. ¿Qué porcentaje de estos sistemas, se espera que falle a lo largo de 12 meses? o bien, ¿Cuál es la probabilidad de que uno de estos sistemas falle en 1 año?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que alguno de estos sistemas dure mas de 1 año?
5. En promedio, ¿Cuánto tiempo duran estos sistemas mecánicos?

Para dar respuestas a las preguntas anteriores, notemos que la variable aleatoria  $T$ , puede tener una distribución Weibull con parámetros  $\alpha, \beta > 0$ , es decir, que la función de densidad, para esta variable aleatoria, es de la forma:

$$f(t) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha}, \text{ para } t > 0,$$

con la función de distribución:

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha}, \text{ para } t > 0.$$

A continuación, presentamos el histograma de la frecuencia de nuestros datos y la función de densidad de la distribución elegida (Vea Figura 3.1), donde los parámetros  $\alpha, \beta$  fueron calculados a través de un software estadístico, además, se realizaron las pruebas de bondad de ajustes que también se presentan.

Alpha(forma)	Beta (escala)
1.3583	9.8227

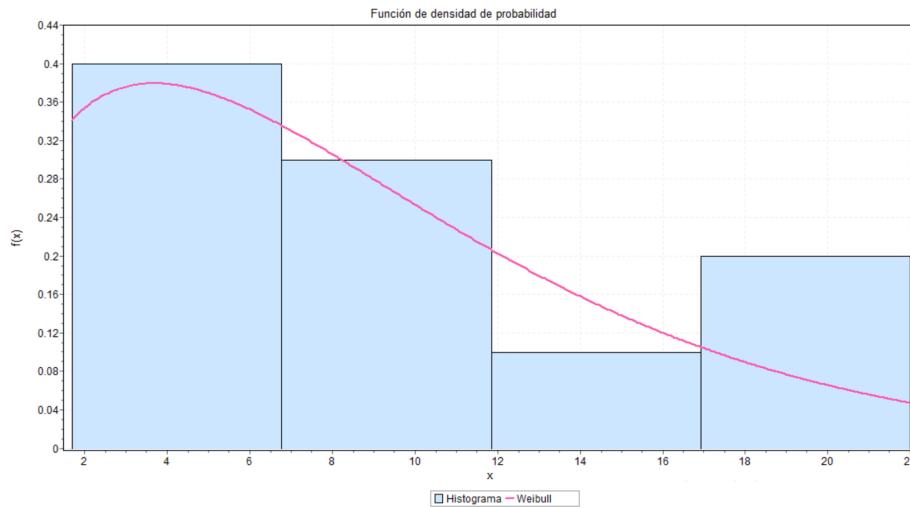


Figura 3.1: Histograma - Weibull (Ejemplo 1)

Bondad de ajuste - Detalles					
Weibull [#63]					
Kolmogorov-Smirnov					
Tamaño de la muestra	10				
Estadística	0.13079				
Valor P	0.98668				
Rango	27				
alpha	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valor Critico	0.3226	0.36866	0.40925	0.45662	0.48893
Rechazar?	No	No	No	No	No
Anderson-Darling					
Tamaño de la muestra	10				
Estadística	0.23092				
Rango	27				
Alpha	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valor critico	1.3749	1.9286	2.5018	3.2892	3.9074
Rechazar?	No	No	No	No	No

Tabla 3.2: Bondad de ajustes Weibull (Ejemplo 1)

Por último, mostrando las gráficas de la distribuciones, tanto de la muestra, como la del modelo Weibull con parámetros  $\alpha = 1.3583$  y  $\beta = 9.8227$  (figura 3.2), y el gráfico cuantil-cuantil (figura 3.3).

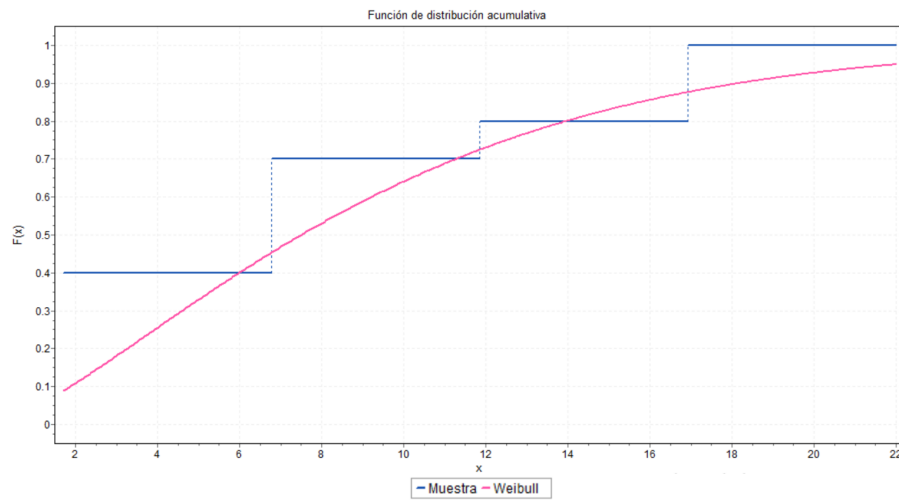


Figura 3.2: Función de distribución acumulada (Ejemplo 1)

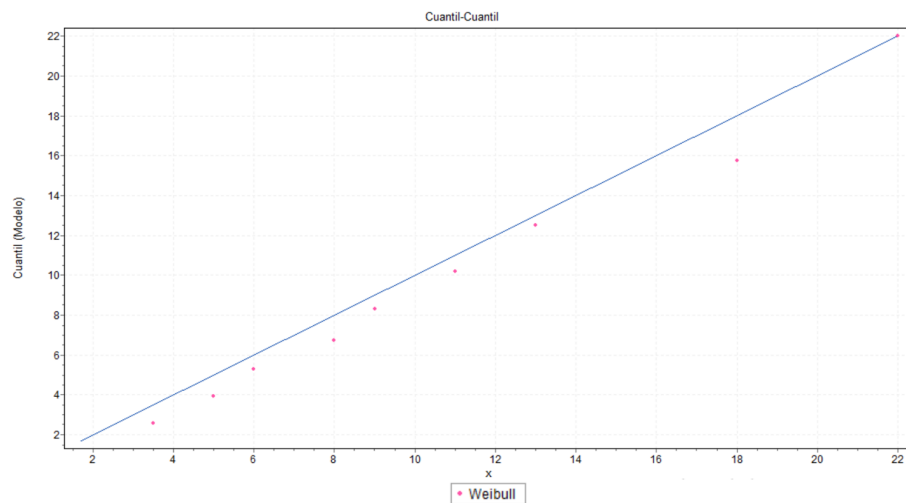


Figura 3.3: Cuantil-Cuantil (Ejemplo 1)

Ahora bien, calculemos las funciones para la tasa de fallo, confiabilidad y esperanza, de esta distribución:

$$Z(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{\frac{\alpha}{\beta^\alpha} t^{\alpha-1} e^{-(\frac{t}{\beta})^\alpha}}{1 - (1 - e^{-(\frac{t}{\beta})^\alpha})} = e^{-(\frac{t}{\beta})^\alpha}.$$

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-(\frac{t}{\beta})^\alpha}) = e^{-(\frac{t}{\beta})^\alpha}.$$

Para calcular la esperanza utilizaremos el resultado que nos dice:

Si  $E(T)$  es finito, [4][5]. Entonces:

$$E(T) = \int_0^\infty R(t) dt$$

Por lo tanto, cuando  $E(T)$  es finito y  $T \sim Weibull(\alpha, \beta)$ :

$$E(T) = \int_0^\infty e^{-(\frac{t}{\beta})^\alpha} dt.$$

Sean:

$$u = \left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha \Rightarrow t = \beta u^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$du = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1} dt \Rightarrow dt = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} du$$

De aquí que

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_0^\infty e^{-(\frac{t}{\beta})^\alpha} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-u} \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\beta u^{\frac{1}{\alpha}}}{\beta}\right)^{1-\alpha} du \\ &= \int_0^\infty e^{-u} \frac{\beta}{\alpha} (u^{1/\alpha})^{1-\alpha} du \\ &= \frac{\beta}{\alpha} \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} du \\ &= \frac{\beta}{\alpha} \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du \\ &= \frac{\beta}{\alpha} \times \tau\left(\frac{1}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, cuando el tiempo de fallo  $T \sim Weibull(\alpha, \beta)$ :

- $Z(t) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t^{\alpha-1}$
- $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha}$
- $E(T) = \frac{\beta}{\alpha} \times \tau \left(\frac{1}{\alpha}\right)$

Ahora, para este ejemplo específico:

$$(3.1) \quad Z(t) = \frac{1.3583}{9.8227^{1.3583}} t^{1.3583-1} = 0.6t^{0.3583}.$$

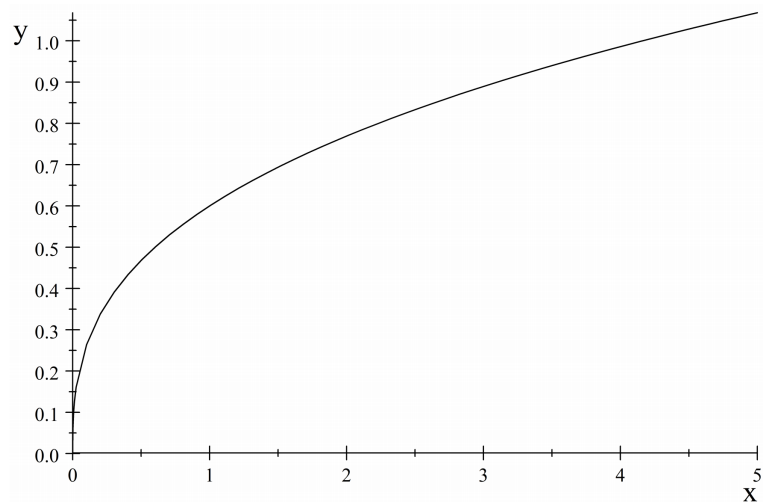


Figura 3.4: Tasa de fallo  $Z(t)$  para ecuación 3.1

Cuya gráfica, presenta una tendencia creciente, esto quiere decir, que con el paso del tiempo, el deterioro para los sistemas mecánicos analizados, es cada vez mayor.

Respondamos las preguntas planteadas inicialmente:

1. Aproximadamente, ¿en qué tiempo estos sistemas mecánicos comienzan a sufrir un mayor desgaste? Desde los primeros años de vida existe un deterioro, pero podríamos decir que debido a que la pendiente es mayor en los primeros meses, este deterioro se presenta con mayor rapidez en esta etapa.
2. Aproximadamente, ¿Cuántas veces al año fallaría algún sistema mecánico de este tipo? Con la función  $Z(t)$ , es posible calcular el deterioro del sistema para un tiempo en específico. Para conocer el deterioro a los 12 meses, sólo es necesario sustituir  $t = 12$  en la expresión

$$Z(t) = 0.6t^{0.3583}.$$

Así.

$$Z(12) = (0.6)(12)^{0.3583} = 0.1485.$$

Por tanto, aproximadamente tendríamos 0.14 fallas x año.

3. ¿Qué porcentaje de estos sistemas, se espera que falle a lo largo de 12 meses? o bien, ¿cuál es la probabilidad de que uno de estos sistemas falle en 1 año?

Tenemos que:

$$P(T \leq 12) = F(12) = 1 - e^{-\left(\frac{12}{\beta}\right)^\alpha} = 1 - e^{-\left(\frac{12}{9.8227}\right)^{1.3583}} = 0.7308.$$

Por tanto, tenemos que 73.08 % de los sistemas, podría fallar en el primer año, que es lo mismo que la probabilidad de que uno de estos sistemas falle.

4. ¿Cuál es la probabilidad de que alguno de los sistemas dure más de 1 año?

Como

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha},$$

para nuestro caso en particular:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{12}{9.8227}\right)^{1.3583}}.$$

Pero como ya hemos obtenido la función de distribución, es equivalente realizar

$$R(12) = 1 - F(12) = 1 - 0.7308 = 0.2691$$

Por lo tanto, la probabilidad de que algún sistema mecánico, de este tipo, dure más de un año, es 26.91%.

Respondamos una última pregunta para este ejemplo:

5. En promedio, ¿Cuánto tiempo duran estos sistemas mecánicos? Como en nuestro caso  $E(T)$  es finito, ya que todos estos componentes no duran toda la vida, entonces:

$$\int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha} dt = \frac{\beta}{\alpha} * \tau\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{9.8227}{1.3583} * \tau\left(\frac{1}{1.3583}\right) = 8.9976.$$

(La función  $\tau\left(\frac{1}{1.3583}\right)$  fue calculada a través del software estadístico R).

Podemos comprobar este resultado a través de la esperanza de la distribución Weibull, que es la siguiente:

$$E(T) = \beta * \tau \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right).$$

Para este caso particular tendríamos que:

$$E(T) = 9.8227 * \tau \left( 1 + \frac{1}{1.3583} \right) = 8.9976.$$

Del mismo modo,  $\tau \left( 1 + \frac{1}{1.3583} \right)$  fue calculada en R.

Por lo tanto, la duración media de este tipo de sistemas mecánicos es de 8.99 meses aproximadamente.

Además de la ley de fallas de Weibull, que como dijimos, es una de las más importantes y utilizadas para el análisis de confiabilidad, existen algunas otras, las cuales mencionaremos a continuación.

## 3.2 Ley exponencial de falla

La ley de falla exponencial, es un caso particular de la distribución Weibull cuando  $\alpha = 1$ , sin embargo, deseamos considerarla de forma específica, debido a sus características, [4][5][6][7], las cuales nos permitirán identificar, si la implementación de esta distribución, es adecuada para modelar el tiempo de vida representado por la variable aleatoria  $T$ .

Recordemos, que una variable aleatoria, tiene distribución exponencial, si su función de densidad es de la forma,

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \text{ si } t > 0 \text{ y } 0 \text{ de otra forma.}$$

Lo que implica que,

- $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$
- $R(t) = e^{-\lambda t}$
- $E[T] = \frac{1}{\lambda}$
- $Z(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$

Podemos notar, que la tasa de falla es constante, y como ya lo habíamos mencionado anteriormente, si nosotros quisiéramos describir el comportamiento del tiempo de vida de un componente o sistema a través de la variable  $T \sim exp(\lambda)$ , significaría que dicho componente o sistema, no sufre

ningún deterioro con el paso del tiempo, o bien, que el tiempo transcurrido antes que ocurra la falla, no tiene relación con que esta se presente, lo que significa que las fallas se pueden producir en cualquier momento. Es esta característica, la que permite que la distribución exponencial se utilice para componentes que nunca se fatigan, es decir, “*cuando un componente, que aún no falla en operación normal, es estadísticamente igual de bueno que un componente nuevo*”.

Los componentes que se identifican con este comportamiento son de tipo eléctrico, electrónico, electromecánica y mecánico. Suelen requerir el desmontaje de los componentes para su reparación (si es que la tiene); y de tenerla, puede suponer un alto costo y el tiempo de parada.

Algunos ejemplos de componentes electrónicos, que por lo general no presentan un desgaste, son los componentes de los circuitos integrados de alta calidad, como diodos, transistores, resistencias y condensadores. Sin embargo, la distribución exponencial no debe utilizarse para modelar componentes mecánicos o eléctricos que se espera que muestren fatiga, corrosión o desgaste, antes de que termine la vida útil del producto, como los rodamientos de esferas o ciertos láseres o filamentos.

A continuación, presentamos un ejemplo de aplicación de esta distribución, para modelar la vida útil de un componente.

#### Ejemplo 2:

La siguiente tabla muestra los tiempos, para un tipo de falla, que se puede presentar en la lámpara de un proyector. Este tipo de falla se debe a picos de voltaje aleatorios, que causan fallas al sobrecargar el sistema.

Tiempo de falla (horas)	
107	132
288	309
655	804
881	1068
1431	1732

Tabla 3.3: Tiempo de falla (Ejemplo 2)

Notemos que, la causa analizada, para que la lámpara del proyector falle, se debe a picos de voltaje que se comportan de forma aleatoria, por lo tanto, la distribución exponencial, resulta un modelo a considerar para el ajuste de estos datos.

Presentando los gráficos de densidad ajustado (Figura 3.5) y cuantil-cuantil (Figura 3.6) para estos datos, además de algunas pruebas de bondad de ajuste, donde el parámetro,  $\lambda = 0.00104$  estimado, fue calculado a través de un software estadístico.

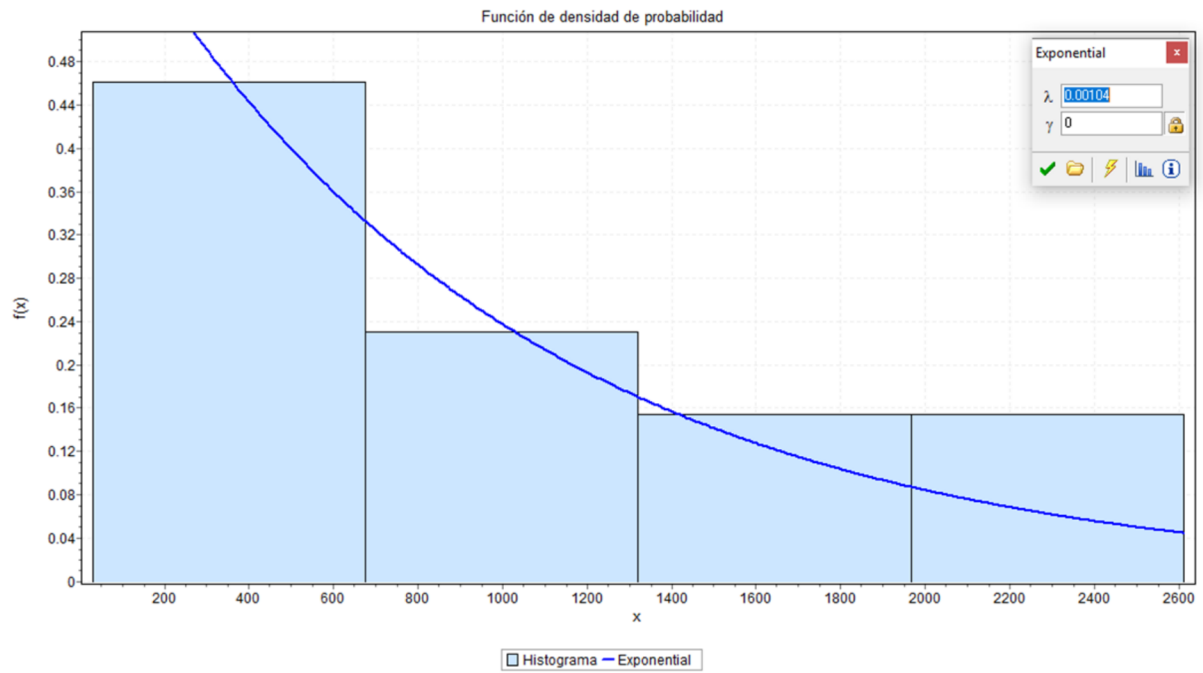


Figura 3.5: Función de densidad de probabilidad (Ejemplo 2)

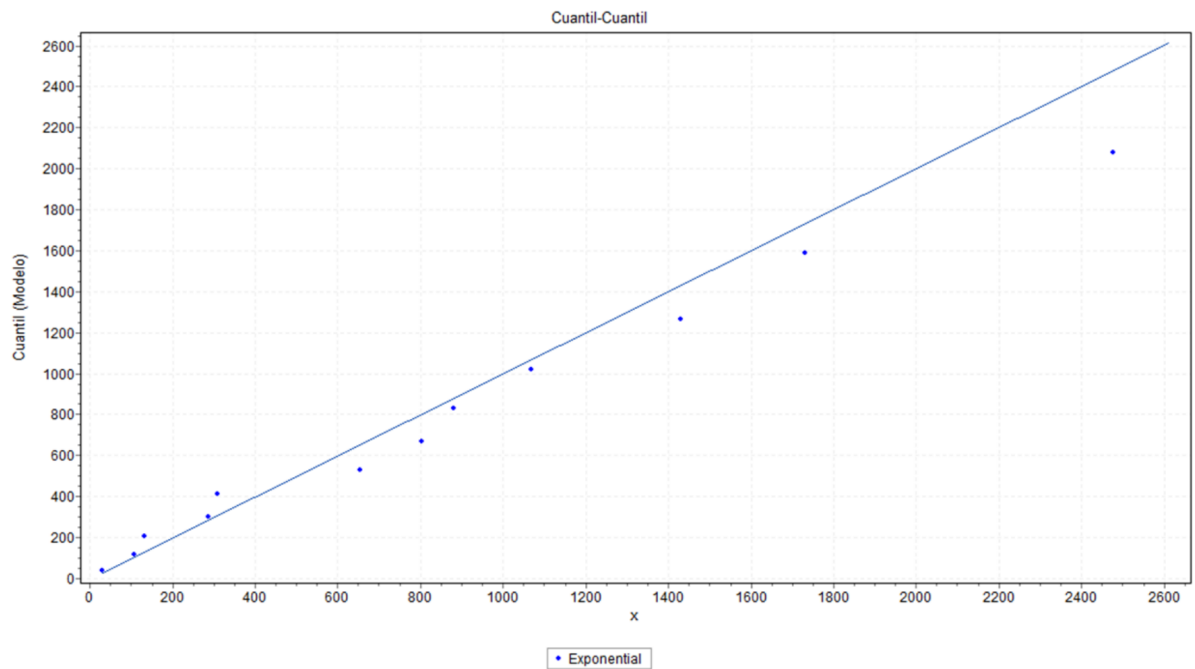


Figura 3.6: Cuantil-Cuantil (Ejemplo 2)

Bondad de ajuste - Detalles					
Exponencial [#13]					
Kolmogorov-Smirnov					
Tamaño de la muestra	13				
Estadística	0.11028				
Valor P	0.99213				
Rango	4				
alpha	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valor Critico	0.2847	0.32549	0.36143	0.40362	0.43247
Rechazar?	No	No	No	No	No
Anderson-Darling					
Tamaño de la muestra	13				
Estadística	0.2129				
Rango	5				
Alpha	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valor critico	1.3749	1.9286	2.5018	3.2892	3.9074
Rechazar?	No	No	No	No	No

Tabla 3.4: Bondad de ajuste-Exponencial (Ejemplo 2)

También presentamos los gráficos de las funciones de distribución (Figura 3.7), confiabilidad (Figura 3.8) y tasa de fallo (Figura 3.9), las cuales se encuentran expresadas en la siguiente forma

$$F(t) = 1 - e^{-0.00104t}$$

$$R(t) = e^{-0.00104t}$$

$$Z(t) = 0.00104$$

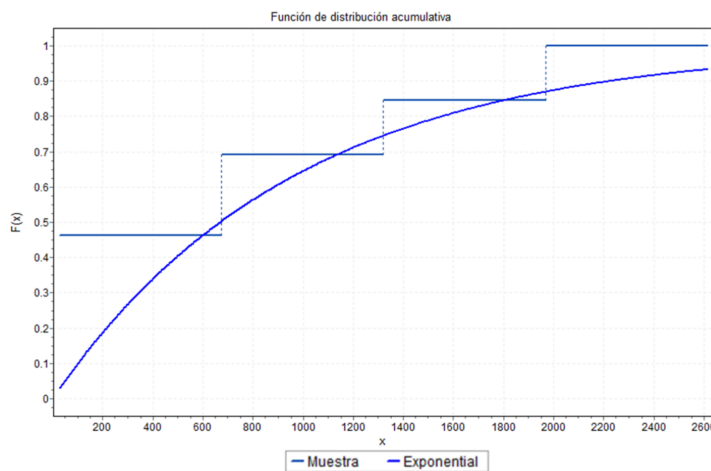


Figura 3.7: Función de distribución acumulativa (Ejemplo 2)

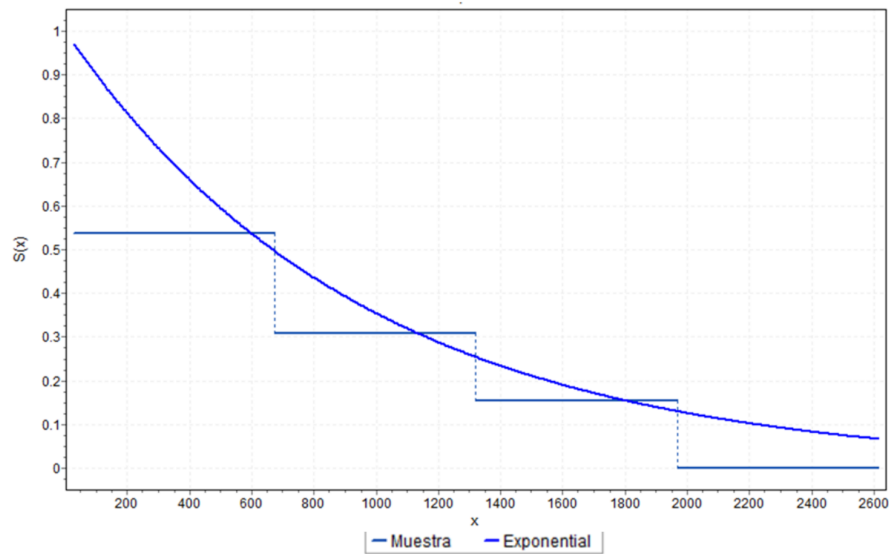


Figura 3.8: Confiabilidad (Ejemplo 2)

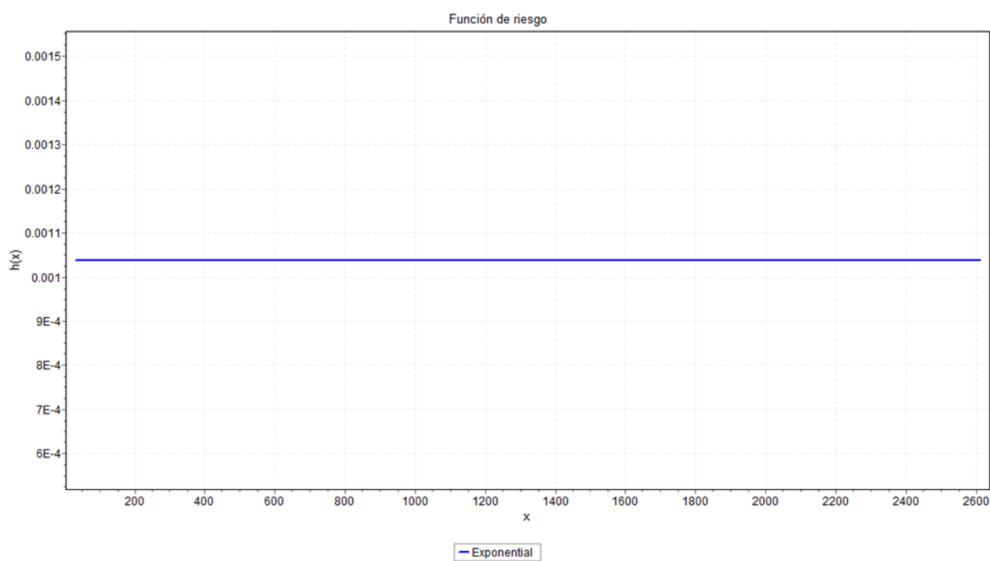


Figura 3.9: Función de riesgo (Ejemplo 2)

Notemos que la esperanza de vida, en este tipo de fallo, para la lámpara del proyector es,  $E[T] = \frac{1}{0.00104} = 961.54$  horas, lo cual equivale a 40 días aproximadamente; creemos que esto es un tiempo aceptable de vida promedio, ya que corresponde al tiempo en funcionamiento.

Por último, quisiéramos mencionar que una ventaja de utilizar la distribución exponencial, para modelar el tiempo de vida, es que esta distribución, resulta sencilla de tratar algebraicamente.

### 3.3 Ley normal de falla

Otro modelo conocido es la ley normal de falla, la cual, utiliza la distribución normal con parámetros  $(\mu, \sigma)$  para la variable aleatoria  $T$ . Cabe aclarar que ya que  $T$ , modela el tiempo de vida, entonces  $P(T < 0)$  debe estar cercana a cero.

Para la ley normal de falla, existen implicaciones muy particulares del modelo, algunas de ellas, son que la mayoría de los artículos fallan alrededor del tiempo promedio de falla, esto, ya que  $E[T] = \mu$ ; que el número de fallas disminuye (simétricamente) cuando  $|T - \mu|$  aumenta; y también, que 95.44 % de la fallas ocurren en el intervalo de tiempo  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ . Estas características se encuentran representadas en la figura 3.10.

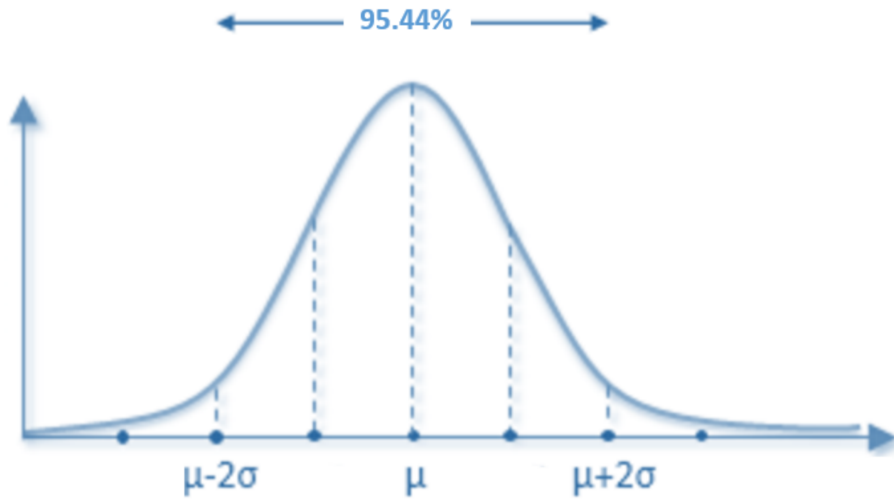


Figura 3.10: Modelo normal de falla

Ahora, enlistaremos las funciones asociadas al modelo normal de falla.

- $f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{t-\mu}{\sigma}\right]^2\right)$
- $F(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{t-\mu}{\sigma}\right]^2\right) dt = \phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$
- $R(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{t-\mu}{\sigma}\right]^2\right) dt = 1 - \phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$
- $Z(t) = \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{t-\mu}{\sigma}\right]^2\right)}{1 - \phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)}$

Note que la función de la ley normal de falla puede expresarse mediante la función de distribución normal acumulativa tabulada  $\Phi$ , [4][5][6][7].

La distribución normal se utiliza para modelar componentes o sistemas, cuando estos comienzan a desgastarse o envejecer, esto, debido a que la tasa de falla es una función creciente, en otras palabras, podemos utilizar este modelo cuando el componente o sistema tiene un deterioro por edad.

Ejemplo 3:

Un ejemplo de uso, para la utilización de este modelo, puede ser el tiempo de vida de una batería, la cual se va desgastando desde que comienza a utilizarse. Hemos simulado la siguiente muestra de datos y presentamos los parámetros estimados del modelo ajustado, sus respectivas pruebas y el gráfico cuantil-cuantil (Figura 3.11) .

Tiempo de vida de una batería (horas)				
26.093047	27.984826	42.341524	39.424797	41.859074
34.115814	33.446220	48.379157	39.224126	18.520358
4.973696	62.224533	42.729563	48.825522	12.775663
31.430549	24.022085	59.368013	53.442375	24.595472
50.277874	41.757483	48.978917	40.676305	35.584337
33.043834	45.610186	36.571895	36.749297	42.321425
49.834324	44.211903	45.725935	41.498818	69.471459
36.153610	39.990527	48.695706	40.306218	42.957813
53.174637	58.502231	32.945672	58.253986	1.882104
31.657751	37.267111	45.372450	18.908271	47.993359

Tabla 3.5: Tiempo de vida de una batería (Ejemplo 3)

$\mu$  estimado     $\sigma$  estimado  
 39.443        13.562

Bondad de ajuste - Detalles					
Normal [#44]					
Kolmogorov-Smirnov					
Tamaño de la muestra	50				
Estadística	0.09732				
Valor P	0.69436				
Rango	21				
alpha	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valor Critico	0.1484	0.16959	0.18841	0.21068	0.22604
Rechazar?	No	No	No	No	No
Anderson-Darling					
Tamaño de la muestra	50				
Estadística	0.69015				
Rango	17				
Alpha	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valor critico	1.3749	1.9286	2.5018	3.2892	3.9074
Rechazar?	No	No	No	No	No

Tabla 3.6: Bondad de ajuste-Normal (Ejemplo 3)

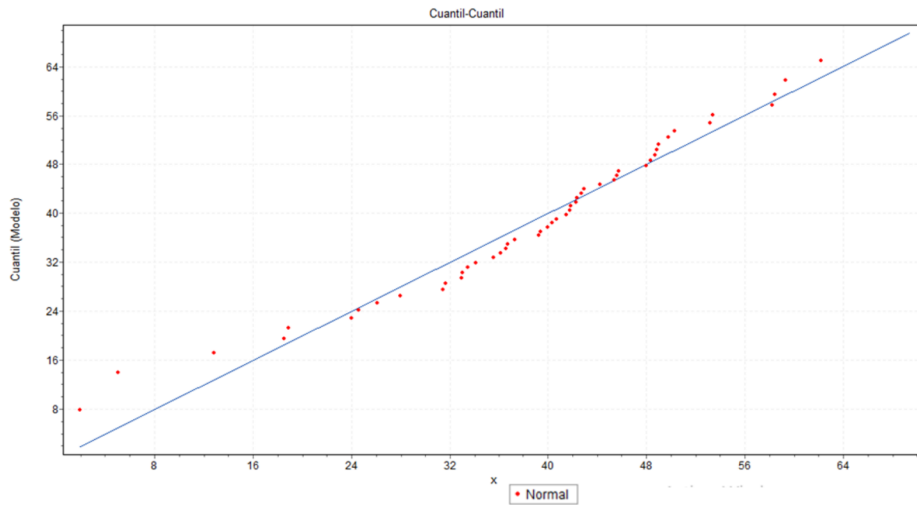


Figura 3.11: Cuantil-Cuantil (Ejemplo 3)

Agregamos también, las funciones asociadas a los datos, al igual que sus gráficos, para tener una comprensión visual del comportamiento de estas.

Función de densidad

$$(3.2) \quad f(t) = \frac{1}{13.562\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{t-39.442}{13.562}\right]^2\right)$$

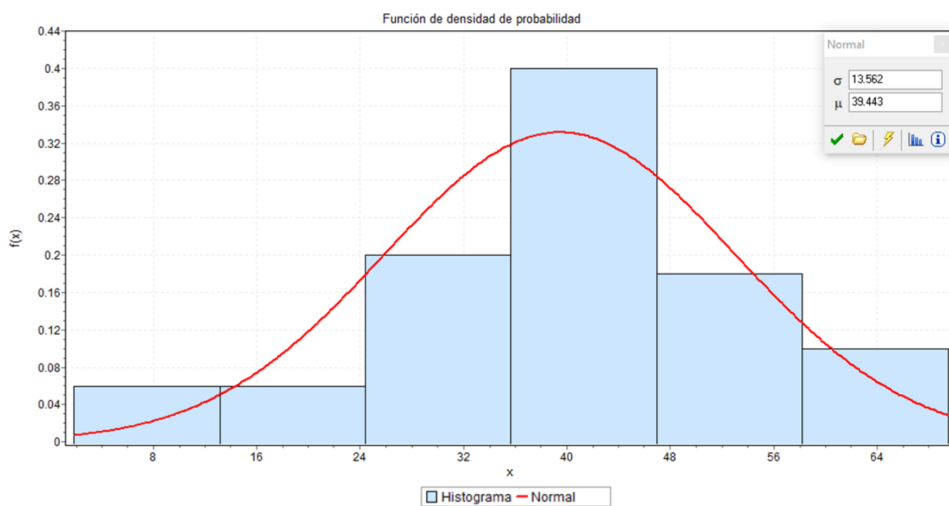


Figura 3.12: Función de Densidad de la ecuación 3.2

Función de distribución

(3.3) 
$$F(t) = \phi\left(\frac{t - 39.443}{13.562}\right)$$

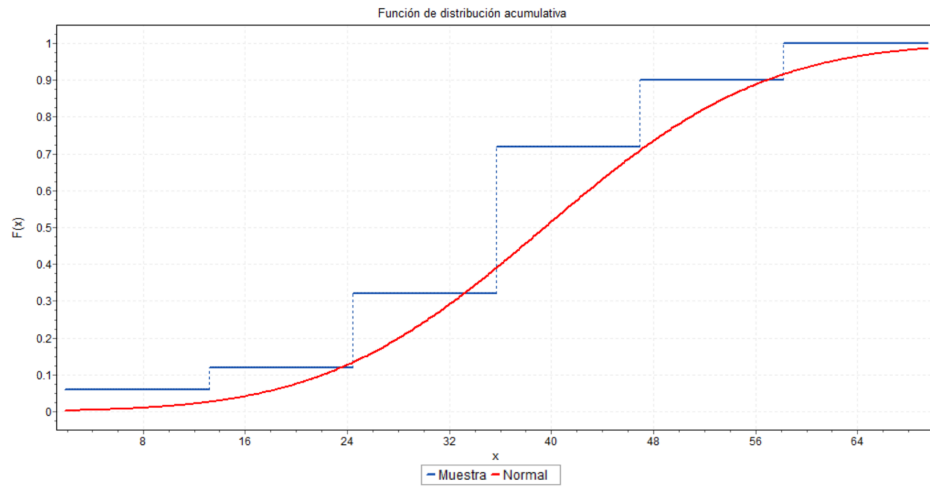


Figura 3.13: Función de distribución de la ecuación 3.3

Función de Confiabilidad

(3.4) 
$$R(t) = 1 - \phi\left(\frac{t - 39.443}{13.562}\right)$$

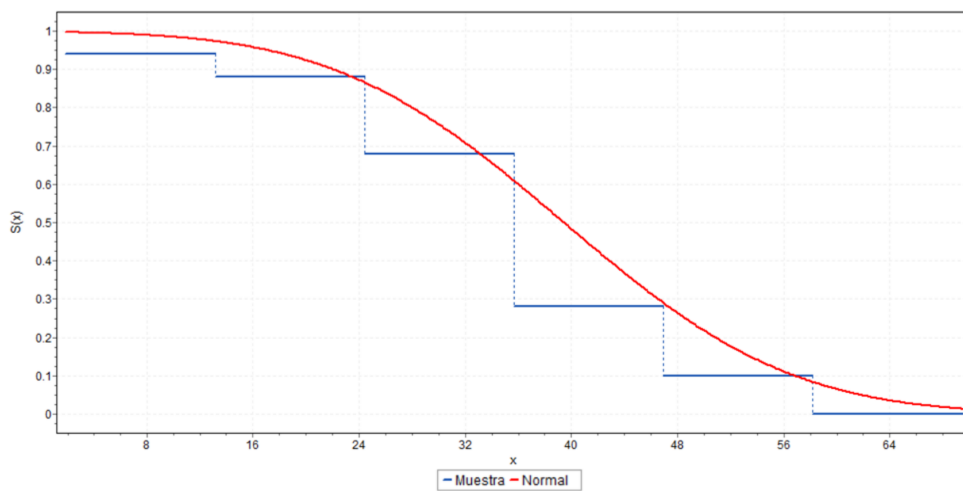


Figura 3.14: Función de confiabilidad de la ecuación 3.4

## Tasa de Fallo

$$(3.5) \quad Z(t) = \frac{\frac{1}{13.562\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{t-39.442}{13.562}\right]^2\right)}{1 - \phi\left(\frac{t-39.443}{13.562}\right)}$$

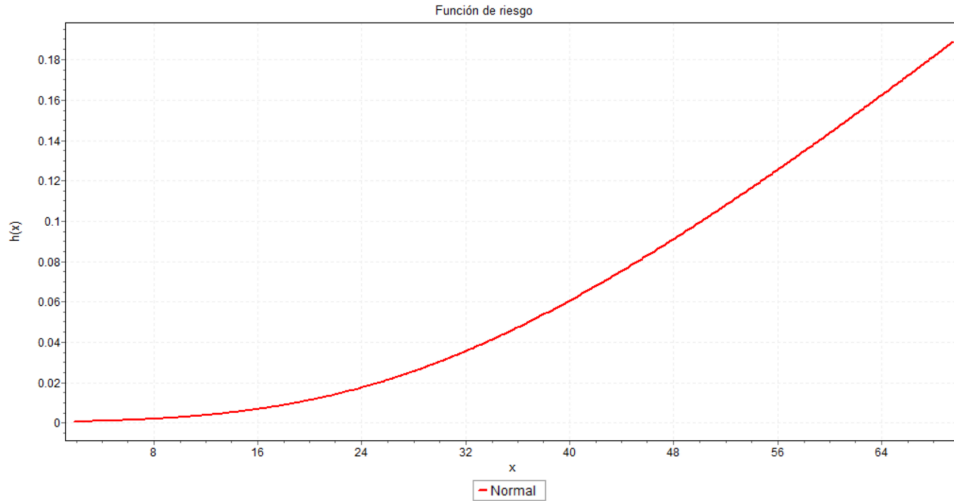


Figura 3.15: Tasa de fallo de la ecuación 3.5

Suponiendo una reserva de 25 baterías de este tipo, cuya vida útil es independiente. Aproximar, la probabilidad de que se puedan obtener más de 1100 horas de uso.

Solución:

Si dejamos que  $X_i$  denote la vida útil de la  $i$ -ésima batería que se pondría en uso, entonces deseamos que  $p = P(X_1 + \dots + X_{25} > 1100)$ , que se aproxima de la siguiente manera

$$p = P\left(\frac{X_1 + \dots + X_{25} - (25)(39.443)}{13.562\sqrt{25}} > \frac{1100 - (25)(39.443)}{13.562\sqrt{25}}\right)$$

$$\approx 1 - \phi(1.68) \approx 0.0465.$$

Cabe mencionar, que las leyes de fallas exponencial y normal, para algunos, son una segunda opción al modelar el tiempo de vida  $T$ , esto, debido a que la distribución Weibull, abarca de forma general, tasas de falla decrecientes, constantes y crecientes. Comúnmente, se propone emplear la distribución de Weibull de 2 y 3 parámetros, y dependiendo del valor de los parámetros de forma y escala, el modelo se puede transformar en la distribución exponencial, en la distribución normal, o en otras.

### 3.4 Otras distribuciones tradicionales

Algunas otras distribuciones comúnmente utilizadas para el cálculo de la confiabilidad, se encuentran descritas en la siguiente tabla, al igual que sus características principales de elección.

<i>Distribución</i>	<i>Criterios</i>
Normal	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Describe fenómenos de envejecimiento de equipos (Díaz, 1992).</li> <li>- Describe fenómenos de modelos de fatiga (Ebeling, 2005)</li> <li>- Describe fenómenos naturales (Ramakumar, 1996).</li> <li>- Los componentes son afectados desde un comienzo por el desgaste (Rojas, 1975).</li> </ul>
Exponencial	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Las reparaciones constituyen un intercambio de piezas estándar.</li> <li>- Fallas aleatorias y que no dependan del tiempo que lleve en funcionamiento.</li> <li>- Describe situaciones de función de tasa de falla constante (Rojas, 1975).</li> <li>- El componente usado que aún no ha fallado, es estadísticamente tan bueno como un componente nuevo.</li> <li>- Modelar componentes electrónicos (Díaz, 1992). Es un caso particular de la Gamma cuando <math>\beta = 1</math>.</li> </ul>
Weibull	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Es la única función de probabilidad que puede utilizarse para representar cualquier tipo de distribución (Kelly y otro, 1998, 24).</li> <li>- Representar la vida de los componentes.</li> <li>- Vida de servicio de tubos y equipos electrónicos (Rojas, 1975).</li> </ul>
Gamma	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Conveniente para caracterizar los tiempos de fallas de equipos durante períodos de rodaje (Rojas, 1975).</li> <li>- Adecuada para representar sistemas con componentes <i>stand-by</i> (Díaz, 1992).</li> </ul>
Log normal	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Describe bien cuando la mayor parte de las intervenciones son de corta duración (Díaz, 1992).</li> <li>- Aplicada para equipos electrónicos y electromecánicos (Blanchard, 1994).</li> <li>- Se aproxima a la distribución exponencial, y siendo ésta mucho más sencilla de manejar, es esta última la que más se utiliza.</li> </ul>
Binomial	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Se aplica en eventos mutuamente excluyentes, falla o no falla (Lewis, 1995).</li> </ul>
Poisson	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Frecuentemente usada en gestión de inventarios.</li> <li>- Se usa también en lugar de la distribución binomial cuando se manejan probabilidades de fallas bajas (Díaz, 1992).</li> </ul>
Beta	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Usada principalmente en procesos acotados en dos extremos (Díaz, 1992).</li> </ul>
Erlang	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Es un caso especial de la distribución gamma, K entero (Díaz, 1992).</li> </ul>
Rayleigh	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Es un caso especial de la distribución Weibull, <math>\beta=2</math> (Ebeling, 2005).</li> </ul>
Chi cuadrada	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Es un caso especial de la distribución gamma, <math>\lambda=0.5</math>, y <math>\nu = 2a</math> (Leemis, 1995).</li> </ul>
Valores Extremos	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Es usada en modelos que limitan los valores máximos y mínimos (Díaz, 1992).</li> </ul>

Tabla 3.7: **Fuente:** Mora, Luis (2009). Mantenimiento. Planeación, ejecución y control.

Es importante recalcar que los modelos anteriores son los más comunes a utilizar, pero existen algunas otras distribuciones no tradicionales, que se usan para medir la confiabilidad. Estas distribuciones suelen ser, en ocasiones, modificaciones a las distribuciones más clásicas, principalmente a la distribución Weibull, que como ya dijimos, esta distribución es la más frecuente a utilizar por su versatilidad. Mencionaremos algunos aspectos generales de estas distribuciones no tradicionales, junto con sus funciones principales asociadas.

## Capítulo 4

# Leyes no tradicionales de falla

### 4.1 Modelo Weibull Modificado (MWM)

A pesar de que la distribución Weibull de dos parámetros es de amplio uso para modelar la vida de distintos componentes en ingeniería, este modelo no se puede utilizar para representar, al mismo tiempo, las 3 etapas de la curva de la bañera, es por esta razón que se propuso “ The Additive Weibull Model”, o bien, el Modelo de Weibull Modificado (MWM), [1][2]. Como lo sugiere indirectamente el nombre en inglés, la modificación consiste en expresar la función de tasa de fallo, como la suma de dos tasas de falla cuya forma sea la de la distribución Weibull. El modelo de Weibull modificado combina dos distribuciones de weibull, uno con una tasa de fallo creciente y otra con tasa de fallo decreciente. A continuación, presentamos las funciones principales asociadas a este modelo,

- $f(t) = at^b + ct^d$
- $F(t) = 1 - e^{-at^b - ct^d}$
- $R(t) = e^{-at^b - ct^d}$
- $E(t) = \int_0^\infty e^{-at^b - ct^d} dt$
- $Z(t) = ab(at)^{b-1} + cd(ct)^{d-1}$

con parámetros  $t, a, c \geq 0$ ,  $b > 1$  y  $d < 1$ .

Algunas de las características de este modelo que valen la pena comentar, es que al graficar  $Z(t)$ , se puede apreciar que la tasa de fallas tiene forma de curva de la Bañera; para tiempos pequeños el segundo término de dicha ecuación es dominante y decreciente, para los tiempos más grandes el primer término es dominante para una función creciente, la tasa de fallas constante se presenta en los tiempos medios de la vida del componente.

Este modelo se puede utilizar para el análisis de series de datos de fallas recogidos, en los cuales, se desconozca el modo de fallo que ha ocurrido. Además, la fase constante puede ser el resultado intermedio cuando la función creciente y decreciente son de magnitud similar.

Existe también el caso reducido para este modelo, en donde solamente se utilizan dos parámetros para facilitar su aplicación, este modelo se obtiene de considerar que  $a = c$  y  $d = 1/b$ , cuando  $b > 1$  y por lo tanto  $1/b < 1$ , así, se reduce el modelo a dos parámetros, pero se conserva la forma de la tasa de fallas, la cual, como ya dijimos, es de la forma de la curva de bañera.

La función de tasa de fallas para el MWM reducido a dos parámetros es:

$$Z(t) = ab(at)^{b-1} + \frac{a(at)^{\frac{1}{b-1}}}{b}.$$

El modelo reducido a dos parámetros, a pesar de utilizarse de forma educacional, presenta buenos resultados en aplicaciones prácticas. Este modelo es útil para el análisis de confiabilidad de productos y sistemas, permite determinar el tiempo óptimo para el cambio de componentes y también el tiempo para realizar algún servicio. Utiliza la función tasa de fallas para determinar el periodo de recambio antes de que el riesgo de aparición de la falla aumente.

## 4.2 El nuevo Modelo Modificado de Weibull (NMWM)

Se espera que la nueva modificación realizada al modelo de Weibull, permita realizar mejores ajustes de las tasas de fallas a la curva de la bañera, [1][2]. Se puede utilizar para modelar la confiabilidad de componentes o sistemas que se encuentren en la etapa inicial de su vida o en una etapa intermedia en funcionamiento. Es posible aplicar este modelo para representar el desgaste en componentes mecánicos y algunos componentes eléctricos. Para casos de desgaste y fatiga este modelo se comporta mejor que el exponencial, dado que realiza un buen ajuste de los datos.

Las funciones principales asociadas a este modelo son:

- $f(t) = a(b + \eta t)t^{b-1}e^{\eta t}e^{-at^b e^{\eta t}}$
- $F(t) = 1 - e^{-at^b e^{\eta t}}$
- $R(t) = e^{-at^b e^{\eta t}}$
- $E(t) = \int_0^{\infty} e^{-at^b e^{\eta t}} dt$
- $Z(t) = a(b + \eta t)t^{b-1}e^{\eta t}$

con parámetros  $a > 0$ ,  $b \geq 0$  y  $\eta > 0$ , siendo  $\eta$  un parámetro de escala.

Los mejores resultados con este modelo se obtienen en el estudio de confiabilidad de componentes que son puestos en funcionamiento y rápidamente alcanzan un desempeño de operación, es decir, el periodo de rodaje es muy corto y las fallas son fácilmente solucionables.

### 4.3 Modelo Weibull Transmutado Modificado (WTM)

Este modelo busca convertirse en una opción para realizar el análisis de fallas y confiabilidad en sistemas reparables, y debido a que este, se deriva de la distribución Weibull, hereda su flexibilidad para manejarse, [1][2].

Utiliza cuatro parámetros, por lo que se puede usar para modelar la confiabilidad de distintos modos de falla. Dos de estos parámetros,  $\beta$  y  $\eta$ , son de forma, uno es de escala,  $\alpha$ , y el parámetro  $\gamma$ , es el transmutado. Para el rango de valores  $\alpha, \beta, \eta > 0$  y  $-1 \leq \gamma \leq 1$ , la función de densidad se escribe de la siguiente forma:

- $f(t) = (\alpha + \beta\eta t^{\beta-1})e^{(-\alpha t - \eta t^\beta)(1-\gamma+2\gamma e^{-\alpha t - \eta t^\beta})}$

Donde los parámetros de forma y el de escala, son positivos. Los parámetros de forma representan diferentes patrones del modelo transmutado y el parámetro de escala representa la vida característica.

Así, las demás funciones principales asociadas a este modelo son:

- $F(t) = (1 - e^{(-\alpha t - \eta t^\beta)})(1 + \gamma e^{(-\alpha t - \eta t^\beta)})$
- $R(t) = 1 - (1 - e^{(-\alpha t - \eta t^\beta)})(1 + \gamma e^{(-\alpha t - \eta t^\beta)})$
- $E(t) = \int_0^\infty 1 - (1 - e^{(-\alpha t - \eta t^\beta)})(1 + \gamma e^{(-\alpha t - \eta t^\beta)}) dt$
- $Z(t) = \frac{(\alpha + \beta\eta t^{\beta-1})e^{(-\alpha t - \eta t^\beta)(1-\gamma+2\gamma e^{-\alpha t - \eta t^\beta})}}{1 - (1 - e^{(-\alpha t - \eta t^\beta)})(1 + \gamma e^{(-\alpha t - \eta t^\beta)})}$

Las bondades de este modelo radican en su flexibilidad, ya que se asemeja a otras distribuciones como Rayleigh y Exponencial si se cambian sus parámetros, distribuciones que también se estudian bajo modelos transmutados. La flexibilidad de este modelo propicia que se pueda utilizar para distintos patrones de falla e incluso para fallas características con la forma de curva de la bañera. Por esta flexibilidad y ajuste con otros modelos, es utilizada para el análisis de modos de falla en componentes o sistemas que son reparables y sufren de desgaste o deterioro, pero no se ajusta bien para fallas prematuras aparecidas en el periodo de rodaje o sincronización.

Cuando la función de distribución acumulada es igual a cero nos indica que los componentes no han fallado. Además, la función de probabilidad de tasa de fallas se puede graficar con base en diferentes unidades como tiempo, distancia o ciclos.

Por estas y otras características el modelo WTM puede ser utilizado para determinar la confiabilidad de componentes o sistemas durante las pruebas de diseño, es decir, antes de sacar un producto al mercado, en las cuales se requiere estimar la vida útil del elemento.

Así como las distribuciones anteriores, existen otros modelos no comunes en su utilización, pero que de igual o mejor forma, según sea el caso, sirven para representar la vida útil de los componentes o sistemas. En la siguiente tabla presentamos los modelos ya mencionados, y algunos otros, junto a sus características más importantes.

### 4.4 Otras distribuciones no tradicionales

Modelo	Autor	Función de Confiabilidad R(t), Función de tasa de Fallas λ(t)	Características
Weibull Modificado	M, Xie; C, D, Lai	$R(t) = e^{-at^b - ct^d}$ $\lambda(t) = ab(at)^{b-1} + cd(ct)^{d-1}$	Se Adapta a la Curva de la Bañera
Nuevo Weibull Modificado	M, Xie; C, D, Lai	$R(t) = e^{-at^b e^{\eta t}}$ $\lambda(t) = a(b + \eta t)t^{b-1} e^{\eta t}$	$b \geq 1$ , Tasa de Fallas aumenta (Curva Creciente). $0 < b < 1$ , inicialmente decrece y después aumenta, lo que se asemeja a la curva de la bañera.
Weibull Transmutado Modificado	K, Muhaamad; King, Robert	$R(t) = 1 - \left(1 - e^{(-\alpha t - \eta t^\beta)}\right) \left(1 + \gamma e^{(-\alpha t - \eta t^\beta)}\right)$ $\lambda(t) = \frac{(\alpha + \beta \eta t^{\beta-1}) e^{(-\alpha t - \eta t^\beta)} (1 - \gamma + 2\gamma e^{(-\alpha t - \eta t^\beta)})}{1 - \left(1 - e^{(-\alpha t - \eta t^\beta)}\right) \left(1 + \gamma e^{(-\alpha t - \eta t^\beta)}\right)}$	$\beta = 1$ , Distribución Exponencial transmutada $\beta = 2$ , Distribución Rayleigh $\beta > 1$ , Tasa de Fallas Creciente. $\beta < 1$ , tasa de fallas Decreciente
Modelo Weibull Modificado con Función de Tasa de Fallas en forma de Curva de la Bañera	M, Xie; Y, Tang; T, N, Goh	$R(t) = e^{-\eta \alpha \left[1 - e^{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}\right]}$ $\lambda(t) = \eta \beta \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}$	$t > 0, \lambda'(t) > 0$ , Por lo tanto λ(t) es una función creciente. $t < t^*$ , y $\lambda'(t) < 0$ , la función de tasa de fallas decrece.
Modelo Burn XII	F, K, Wang	$R(t) = e^{\left[-k_1 \ln\left(1 + \left(\frac{t}{s_1}\right)^{c_1}\right) - k_2 \ln\left(1 + \left(\frac{t}{s_2}\right)^{c_2}\right)\right]}$ $\lambda(t) = \frac{k_1 c_1 \left(\frac{t}{s_1}\right)^{c_1-1}}{s_1 \left[1 + \left(\frac{t}{s_1}\right)^{c_1}\right]} + \frac{k_2 c_2 \left(\frac{t}{s_2}\right)^{c_2-1}}{s_2 \left[1 + \left(\frac{t}{s_2}\right)^{c_2}\right]}$	$0 < b < 1$ , Inicialmente decrece y después aumenta lo que se asemeja a la curva de la bañera.

Tabla 4.1: Fuente: Espinel, Edwin (2014)

4.4. OTRAS DISTRIBUCIONES NO TRADICIONALES

Modelo	Autor	Función de Confiabilidad R(t), Función de tasa de Fallas λ(t)	Características
Distribución Hjorth	Hjorth; Urban.	$R(t) = \frac{e^{-\frac{\delta t^2}{2}}}{(1 + \beta t)^\beta}$ $\lambda(t) = \delta t + \frac{\theta}{1 + \beta t}$	<p><math>\theta = 0</math> Distribución de Rayleigh</p> <p><math>\delta = \beta = 0</math> Distribución Exponencial</p> <p><math>\delta = 0</math> Tasa de Fallas Decreciente</p> <p><math>\delta \geq \theta\beta</math> Tasa de Fallas Creciente</p> <p><math>0 &lt; \delta &lt; \theta\beta</math> Curva de la Bañera</p>
Distribución Weibull Exponencial	Lemonte; Artur.	$R(t) = 1 - \left[ 1 - e^{[1-(1+\eta t)^\alpha]^\beta} \right]$ $\lambda = \alpha\beta\eta \frac{(1 + \eta t)^{\alpha-1} e^{(1-(1+\eta t)^\alpha)^\beta} [1 - e^{(1-(1+\eta t)^\alpha)^\beta}]^{\beta-1}}{1 - [1 - e^{(1-(1+\eta t)^\alpha)^\beta}]^\beta}$	<p><math>0 &lt; \beta \leq 1</math>, Tasa de Fallas Decreciente.</p> <p><math>\alpha &gt; 1</math> y <math>\beta &gt; 1</math>, Tasa de Fallas Creciente.</p> <p><math>\beta = \alpha = 1</math> Tasa de Fallas Constante (Distribución Exponencial)</p>
Modelo JIANG	Jiang; R.	$R(t) = \frac{1 - t/\gamma}{(1 + t/\eta)^\beta}$ $\lambda(t) = \frac{\beta}{t + \eta} + \frac{1}{\gamma - t}$	<p>Cuando <math>\gamma \leq \eta/\sqrt{\beta}</math> la función de tasa de fallas es creciente</p> <p>Cuando <math>\gamma &gt; \eta/\sqrt{\beta}</math> la función de tasa de fallas se adapta a la curva de la bañera.</p>
Modelo Muldholkar and Srivastava	Muldholkar, G; Srivastava, D.	$R(t) = 1 - \left[ 1 - e^{\left(\frac{t}{\eta}\right)^\alpha} \right]^\beta$ $\lambda = \frac{\alpha\beta \left( 1 - e^{\left(\frac{t}{\eta}\right)^\alpha} \right)^{\beta-1} e^{\left(\frac{t}{\eta}\right)^\alpha} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\alpha-1}}{\eta \left[ 1 - \left( 1 - e^{\left(\frac{t}{\eta}\right)^\alpha} \right)^\beta \right]}$	<p><math>\eta = \beta = 1</math>, la función de tasa de fallas es constante.</p> <p>Si <math>\eta = 1</math>, la función de tasa de fallas es creciente cuando <math>\beta &gt; 1</math> y decreciente cuando <math>\beta &lt; 1</math>.</p> <p>Si <math>\beta = 1</math>, la función de tasa de fallas es creciente cuando <math>\eta &gt; 1</math> y decreciente cuando <math>\eta &lt; 1</math></p>

Tabla 4.2: Fuente: Espinel, Edwin (2014)

Hasta ahora, en los ejemplos abordados, hemos obtenido un modelo para la vida de ciertos componentes, sin embargo, debido a que la confiabilidad de los sistemas es también de nuestro interés, hemos destinado la siguiente sección para explicar algunos aspectos importantes a considerar para el ajuste de un modelo apropiado.



## Capítulo 5

# Confiabilidad de los sistemas

Resulta fácil pensar, que la confiabilidad de los sistemas dependerá de la confiabilidad de cada uno de los componentes que lo conforman, es por esta razón, que analizaremos, dos maneras en las cuales se encuentran conectados los sistemas y determinaremos una función que nos permita el cálculo de su confiabilidad.

### 5.1 Confiabilidad de los sistemas conectados en serie

Se dice que un sistema se encuentra conectado en serie, si el funcionamiento de cada uno de sus componentes implica que el sistema en conjunto funcione, es decir, cada uno de los componentes que conforman el sistema, deben de funcionar para que el sistema también funcione, un ejemplo sencillo podría ser una lámpara conectada a una pila, si la pila o la bombilla de la lámpara no funcionan, la lámpara en conjunto tampoco lo hará, [4][5]. Los sistemas en serie se pueden representar mediante la siguiente Figura 5.1.



Figura 5.1: Representación de sistemas en serie

Si nosotros suponemos que los componentes de un sistema conectado en serie, funcionan de manera independiente, podríamos obtener su confiabilidad de forma sencilla, para lo que enunciamos el siguiente teorema.

**Teorema 3:** Sean,  $T$  la variable aleatoria del tiempo de vida de un sistema,  $T_i$  la variable aleatoria del componente  $i$  del sistema, con  $i = 1, 2, \dots, n$ , y  $R(t)$ ,  $R_i(t)$ , sus funciones de confiabilidad respectivas.

Si  $T_i$  es independiente de  $T_j$ , con  $i \neq j$ . Entonces

$$R(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t)$$

*Demostración:*

$$R(t) = P(T > t) = P(T_1 > t, T_2 > t, \dots, T_n > t)$$

$$= P(T_1 > t) \cdot P(T_2 > t) \cdot \dots \cdot P(T_n > t)$$

$$= R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot \dots \cdot R_N(t)$$

$$= \prod_{i=1}^n R_i(t). \blacktriangledown$$

*Observación:* Notemos que si las  $T_i$  son variables independientes y tienen distribución exponencial con parámetro  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Entonces

$$R(t) = e^{-\lambda_1} \cdot e^{-\lambda_2} \cdot \dots \cdot e^{-\lambda_n} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)}.$$

Es decir, la función de confiabilidad del sistema corresponde a la de una v.a. con distribución exponencial pero de parámetro  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ .

## 5.2 Confiabilidad de los sistemas conectados en paralelo

Un sistema que se encuentra conectado en paralelo, deja de funcionar, cuando todos los componentes que lo conforman han dejado de funcionar también, [4][5]. Las fallas de uno o más componentes que se encuentran conectados en paralelo, normalmente no se detectan o identifican, a menos que se realicen inspecciones en forma periódica. Un sistema conectado en paralelo, se puede representar mediante el siguiente Figura 5.2.

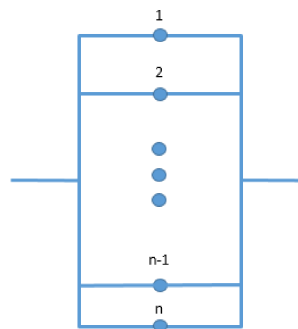


Figura 5.2: Representación de sistemas en paralelo

Deseamos conocer la función de confiabilidad para este tipo de sistema conectado en paralelo, así, el siguiente teorema nos será útil cuando el funcionamiento de sus componentes se comporte de forma independiente.

**Teorema 3:** Sean,  $T$  la variable aleatoria del tiempo de vida de un sistema,  $T_i$  la variable aleatoria del componente  $i$  del sistema, con  $i = 1, 2, \dots, n$ , y  $R(t)$ ,  $R_i(t)$ , sus funciones de confiabilidad respectivas.

Si  $T_i$  es independiente de  $T_j$ , con  $i \neq j$ . Entonces

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n F_i(t).$$

Donde,  $F_i(t) = 1 - R_i(t)$ .

*Demostración:*

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - [P(T_1 \leq t, T_2 \leq t, \dots, T_n \leq t)]$$

$$= 1 - [P(T_1 \leq t) \cdot P(T_2 \leq t) \cdot \dots \cdot P(T_n \leq t)]$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^n F_i(t). \blacktriangledown$$

En el caso en que todos los componentes tengan igual confiabilidad, es decir  $R_i(t) = r(t)$ , para toda  $i$ , la confiabilidad del sistema con estas características puede escribirse de la siguiente forma:

$$R(t) = 1 - [1 - r(t)]^n.$$

### 5.3 Confiabilidad de los sistemas con estructura mixta

Una estructura mixta es la combinación de dos o más tipos de estructuras elementales, estructura que está presente en la mayoría de los equipos. Para el cálculo de este tipo de confiabilidad, es necesario realizar el cálculo de la confiabilidad por partes, es decir, obtener primero el porcentaje de confiabilidad para el grupo de componentes que se encuentran conectados en serie o paralelo y así hasta obtener la confiabilidad del sistema en general, [4][5].

A continuación, presentamos un ejemplo para el cálculo de confiabilidad de estos tipos de sistemas comunes.

Ejemplo 4:

Supongamos un artículo que ha conectado en serie, dos grupos de componentes, que a su vez están conectados en paralelo cada uno, como se muestra en la Figura 5.3.

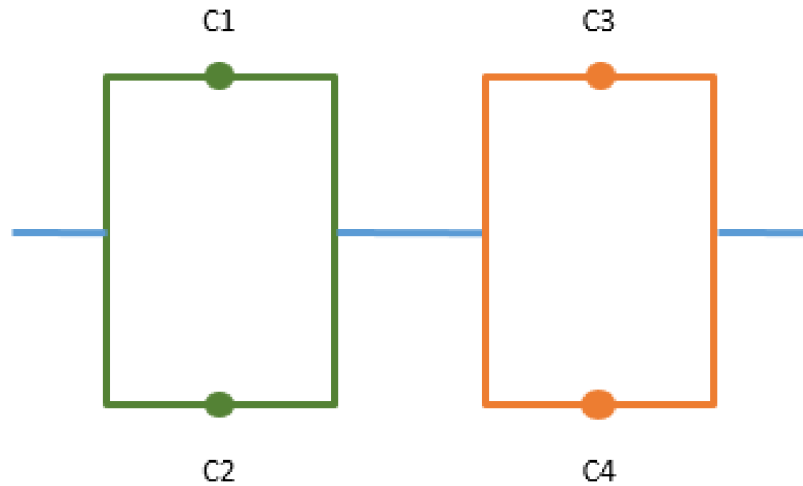


Figura 5.3: Representación de sistemas con estructuras mixtas

Además, supongamos que hemos ajustado un modelo para la vida útil de cada uno de los componentes de este sistema, tal y como hemos explicado anteriormente. Los componentes 1 y 2, llamémosles, C1 y C2, que se encuentran conectados en paralelo, tienen una confiabilidad de 85% y 74% respectivamente, para el tiempo  $t = 6$ ; para los componentes 3 y 4, es decir, C3 y C4, también es conocida su confiabilidad, para  $t = 6$ , estas son de 80% y 56% respectivamente.

¿Cuál será la confiabilidad, en el tiempo  $t = 6$ , para este sistema que conecta estos 2 subsistemas en serie?

*solución:*

Obtengamos primero la confiabilidad de cada grupo conectado en paralelo. Para el subsistema que contiene a los componentes 1 y 2, tenemos que:

$$\begin{aligned} R_{1,2} &= 1 - [F_1(6) \cdot F_2(6)] \\ &= 1 - (1 - 0.85)(1 - 0.74) = 0.961. \end{aligned}$$

Para el subsistema que contiene a los componentes 3 y 4, la confiabilidad en el tiempo  $t = 6$ , es:

$$\begin{aligned} R_{3,4} &= 1 - [F_3(6) \cdot F_4(6)] \\ &= 1 - (1 - 0.80)(1 - 0.56) = 0.9612. \end{aligned}$$

Por último, obtengamos la confiabilidad del sistema en general, y debido a que su conexión es en serie, tenemos que

$$R(t) = R_{1,2} \cdot R_{3,4} = (0.961)(0.912)$$

$$= 0.87643.$$

Por lo tanto, la confiabilidad del sistema en general, en el tiempo  $t = 6$ , es del 87.64%.

Existen algunos otros tipos de sistemas que se encuentran estructurados de una forma más compleja, sin embargo, si cada subsistema que los conforma se encuentra conectado en serie o en paralelo, es posible obtener su confiabilidad.

Por último, quisiéramos mencionar una estructura más general de conexión para los sistemas.

## 5.4 La estructura K-out-of-n

Los sistemas en serie y en paralelo son casos particulares del sistema k-out-of-n. Tal sistema, se puede definir como un sistema con  $n$  componentes, que funciona, sí y solo sí, funcionan  $k$  o más de los componentes, un ejemplo de esto, podría ser un avión que funciona con 4 motores, pero es suficiente para que el avión pueda volar, con ciertas limitaciones, si dos de estos motores están funcionando, este es un sistema 2-out-of-4.

Notemos que, un sistema en serie se produce cuando  $k = n$ , mientras que un sistema paralelo es equivalente a un sistema 1-out-of- $n$ , es decir, cuando  $k = 1$ . Para determinar el funcionamiento de estos tipos de sistemas, utilizaremos una nueva función.

Sea  $\psi$  el estado del sistema, donde,

$$\psi = \begin{cases} 1, & \text{si el sistema funciona.} \\ 0, & \text{si el sistema ha fallado.} \end{cases}$$

Consideramos la situación en que el sistema está formado por  $n$  componentes. Sea  $x_i = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  el vector de estados de las componentes, es decir,

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{si el sistema funciona.} \\ 0, & \text{si el sistema ha fallado.} \end{cases}, i = 1, \dots, n.$$

Así, a la función  $\psi(x) = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , la conoceremos como función de estructura del sistema.

A manera de resumen, reescribiremos los tipos de conexión para los sistemas, y esta nueva función que indica si este funciona o no.

a) Sistemas en serie: Se dice que un sistema de  $n$  componentes es un sistema en serie, si el sistema funciona solo cuando funcionan todas sus componentes, es decir

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_i = 1, \forall i = 1, \dots, n. \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$\prod_{i=1}^n x_i = \min \{x_i\}.$$

b) Sistemas en paralelo: Se dice que un sistema de  $n$  componentes es un sistema en paralelo, si el sistema funciona siempre que al menos una de las componentes funcione, es decir,

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_i = 1, \text{ para alguna } i = 1, \dots, n. \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i) = \max \{x_i\}.$$

c) Sistemas k-out-of-n: Se dice que un sistema de  $n$  componentes es un sistema k de  $n$ , si el sistema funciona si al menos  $k$  de las  $n$  componentes están funcionando, es decir

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i \geq k. \\ 0, & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i < k. \end{cases}$$

Ejemplo 5 (Una estructura de cuatro componentes)

Considere un sistema que consta de cuatro componentes, y suponga que el sistema funciona, sí y sólo sí, los componentes 1 y 2 funcionan, y al menos uno de los componentes 3 y 4 funciona. Su función de estructura está dada por:

$$\phi(x) = x_1 \cdot x_2 \max(x_3, x_4)$$

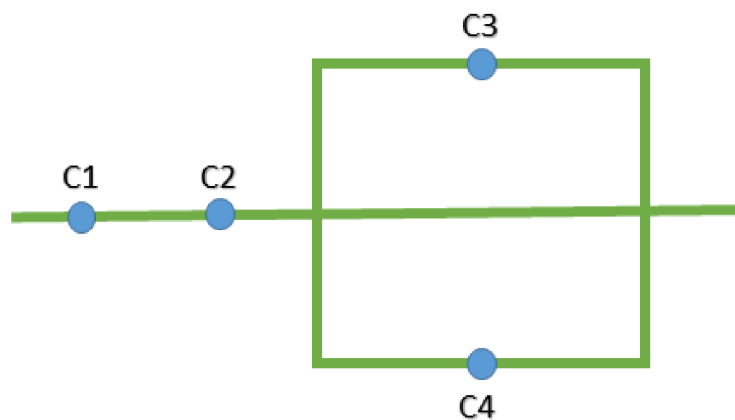


Figura 5.4: Estructura de cuatro componentes

Gráficamente, el sistema es como se muestra en la Figura 5.4. Una identidad que nos será útil, es la de las variables binarias,  $x_i, i = 1, \dots, n$ .

$$\max(x_1, \dots, x_n) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i).$$

Cuando  $n = 2$ , esto produce

$$\max(x_1, x_2) = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2) = x_1 + x_2 - x_1x_2.$$

Por lo tanto, la función de estructura en el ejemplo se puede escribir como

$$\phi(x) = x_1x_2(x_3 + x_4 - x_3x_4).$$



## Capítulo 6

# Modelos de procesos de degradación de componentes

En el estudio de la fiabilidad de los sistemas, podemos notar que un factor que influirá en el óptimo funcionamiento de estos, es decir, que fallen o no, es el entorno en que los sistemas llevan a cabo su función. Además, como ya habíamos mencionado, la fiabilidad de los sistemas depende de la fiabilidad de los componentes que lo conforman, por esta razón, en la disciplina de la fiabilidad, se han enfocado en el estudio y la realización de algunos modelos de los procesos de degradación de componentes.

La operación de un sistema implica la imposición de algún tipo de fuerza o energía sobre el sistema y sus componentes, estas fuerzas inducen y sostienen el progreso de varios tipos de procesos de deterioro, los cuales, dan como resultado, que los componentes fallen, y muy posiblemente, el sistema también lo haga.

A continuación, presentamos algunos modelos para los procesos de degradación de componentes mecánicos y electrónicos, la clasificación de estos dos tipos de componentes se debe a que son de los más utilizados para la conformación de sistemas en algunas ramas de la ingeniería.

### 6.1 Modelos de fallos mecánicos

Comúnmente se considera que la fiabilidad de los equipos mecánicos depende de la integridad de su estructura, considerando que esta, es influenciada tanto de las cargas aplicadas, y de la fuerza natural o inherente al sistema [1].

Una representación inicial, y aún, comúnmente utilizada, de la fiabilidad de un dispositivo mecánico, es el “*Modelo de interferencia de tensión y fuerza*”. Este modelo, considera que existe una dispersión aleatoria de la tensión en el sistema, y esta dispersión, es el resultado de las cargas aplicadas. Es por la razón anterior, que la tensión puede ser modelada por una función de distribución, digamos  $H(y)$ . Análogamente, hay también una dispersión aleatoria de la fuerza inherente de los dispositivos,  $X$ , la cual puede ser modelada por  $G(x)$ . Por consecuencia, podemos

decir que la confiabilidad de los dispositivos corresponde al fenómeno de que la fuerza es mayor que la tensión. Es decir:

$$R = P(X > Y) = \int_0^\infty \int_y^\infty h(y)g(x)dx dy = \int_0^\infty \int_0^x h(y)g(x)dy dx.$$

O equivalentemente

$$R = P(X > Y) = \int_0^\infty h(y)(1 - G(y))dy = \int_0^\infty H(x)g(x)dx.$$

Ya que la expresión anterior no tiene que ver con el tiempo, según este modelo, la fiabilidad solo se centra en la selección de las distribuciones  $H$  y  $G$ , y en la representación de la evolución en el tiempo de estas distribuciones. Un modelo particular de este, comúnmente utilizado, considera que la tensión tiene una distribución normal, con media y varianza constantes, mientras que la fuerza también es normal pero con una media decreciente y varianza creciente.

De manera más extendida, otro modelo utilizado, es el llamado “*modelo de daños acumulativos*”, este se basa en el supuesto de que un dispositivo se encuentra sujeto a “*choques*” que ocurren de modo aleatorio en el tiempo, estos choques, transmiten una cuantía aleatoria de daños en el dispositivo, el cual falla cuando se excede un umbral máximo de capacidad o tolerancia. Frecuentemente, se supone que los choques ocurren de acuerdo con un proceso Poisson con intensidad  $\lambda$ , y que las cantidades de daños por choque son independientes idénticamente distribuidas. De este modelo, una extensión consiste en que las funciones de daño vayan evolucionando en el tiempo, para reflejar el hecho de que los choques posteriores dañan más al dispositivo; otra extensión, consiste en que el umbral máximo de los fallos sea una función decreciente en el tiempo, para así, representar una menor tolerancia al daño. Por último, queremos mencionar que algunas características más de este modelo, son la correlación en el proceso o la posibilidad de múltiples tipos de choques. En cada uno de estos casos, la distribución de vida resultante es IFRA (Increasing Failure Average Rate).

## 6.2 Modelos de fallos electrónicos

Los modelos de fiabilidad para sistemas eléctricos y electrónicos surgieron como consecuencia de realizar observaciones empíricas, y es importante mencionar que fueron posteriores a los modelos de fiabilidad mecánicos, sin embargo, la fiabilidad de los dispositivos electrónicos ha sido un foco de atención debido a la necesidad que produce el avance tecnológico, puesto que un sistema complejo, como un avión, incluye más componentes electrónicos que mecánicos [1]. Otra razón por la que la fiabilidad de los dispositivos electrónicos ha recibido una gran atención, es porque la “*vida*” o la duración de estos, era considerablemente más corta que los dispositivos mecánicos.

A diferencia de los modelos de fallos mecánicos, la fiabilidad de los sistemas eléctricos, se ha considerado como poco dependiente de la estabilidad de su estructura, esto, a pesar de exposiciones a reacciones químicas como la corrosión u oxidación.

Algunos de los modelos propuestos, se basan en la idea de que los procesos de degradación de los dispositivos eléctricos son reacciones de conversión química, que tienen lugar en los materiales que integran los dispositivos. A consecuencia de esto, los modelos se basan en la ecuación de tasa reacción del científico sueco, Svante August Arrhenius, la cual, es una expresión matemática que se utiliza para comprobar la dependencia de la constante de velocidad (o cinética) de una reacción química con respecto a la temperatura a la que se lleva a cabo esa reacción.

Svante August Arrhenius desarrolló la ecuación durante el estudio de reacciones irreversibles como la oxidación. La forma básica de la ecuación es que la tasa de reacción,  $\rho$ , es:

$$\rho = \eta e^{-E_a/KT}$$

donde,  $\eta$  es un factor de frecuencia de electrones,  $K$  es la constante de Boltzman,  $T$  es la temperatura en grados Kelvin y  $E_a$  es la energía de activación de Gibb. Para la realización de modelos de fiabilidad, el producto de la tasa de reacción,  $\rho$  con el tiempo, da la extensión del progreso de la reacción del deterioro, y por lo tanto, se considera que corresponde al riesgo acumulativo del tiempo  $T$ .

### 6.3 Modelos de riesgos proporcionales

El modelo de riesgos proporcionales es de los más populares en el análisis de tiempo de vida, este modelo, no sólo representa la relación entre la tasa de fallo y el tiempo, sino que también considera la relación con otras variables pertenecientes al entorno (factores de riesgo), que pueden influir en la tasa de fallo [1]. También es conocido como “*modelo de Cox*”, el cual debe su nombre al estadístico inglés, David Roxbee Cox (Birmingham, 15 de julio de 1924). Hay muchas formas de escribir este modelo, una forma general es:

$$Z = Z(t, X) = Z(t, X_1, \dots, X_p) = Z_0(t)e^{\beta'X},$$

en donde  $t$ , representa el tiempo,  $X$  es un vector de  $p$  variables del entorno, y donde el producto vectorial  $\beta'X$  es un producto ordinario que da un escalar.

A la función  $Z_0(t)$  se le denomina “*función de riesgo base*” y corresponde al riesgo del elemento en cuestión, componente o sistema, que tiene como valor 0 en todas las variables de entorno, es decir,  $X_1 = \dots = X_p = 0$ . También se considera que esta función, sería aquella función “*básica*” del modelo si este no incorpora predictores. La función de riesgo base, es la única parte de la expresión del modelo de Cox que depende del tiempo, la otra parte del modelo,  $e^{\beta'X}$ , depende del vector de covariables,  $X = (X_1, \dots, X_p)$ , y podríamos decir que es independiente del tiempo.

Al modelo de Cox que considera que estas variables dependan del tiempo es decir,  $X = (X_1(t), \dots, X_p(t))$ , se le conoce como “*Modelo de Cox ampliado*”.

El modelo de Cox es considerado como un modelo “*semiparamétrico*”. La parte “*paramétrica*” que podemos escribir como:

$$e^{\beta'X} = e^{\sum_{i=1}^p \beta_i X_i}$$

La cual, es la exponencial del predictor lineal  $\eta = \sum_{i=1}^p \beta_i X_i$ . Aquí, se estiman los parámetros  $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p)$  de la regresión mediante la maximización de la denominada “función de verosimilitud parcial”, o el logaritmo de esta, una contribución que también se debe a Cox. La maximización de dicha función se realiza mediante métodos numéricos.

La parte “no paramétrica” es la función de riesgo base,  $Z_0(t)$ . Esta es una función no especificada y arbitraria. Se estima en un segundo estadio, condicionada a la estimación de los parámetros  $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p)$ .

Este modelo, además de ser utilizado en temas de confiabilidad, también ha sido de relevancia en el área médica, como es el caso del análisis de la mortalidad de algunos pacientes por enfermedades específicas. Otras de las aplicaciones de este modelo, se encuentran en áreas menos comunes, como son los negocios de transportación, al investigar los factores que influyen en los retrasos de las entregas de los pedidos.

## Capítulo 7

# Conclusiones

La confiabilidad es una disciplina relevante en toda área de la industria que involucre sistemas, pues es posible obtener información útil para la toma de decisiones de mantenimiento, reparación, prevención y otras. La comprensión de ella, puede ir desde conceptos básicos de probabilidad y estadística, hasta conocimientos avanzados de, estas mismas, y de algunas otras ciencias.

Uno de los retos que enfrentarán quienes deseen aplicar los modelos para el cálculo de la confiabilidad en su etapa de estudiantes, es el de la escasez de bases de datos reales de tiempos de falla de componentes o sistemas, a pesar de ello, las investigaciones y la información respecto a confiabilidad, resulta suficiente para interesarse en su estudio, además de que existen técnicas de simulación para la creación de datos.

Con el avance tecnológico de las últimas décadas en la creación de distintos tipos de software para automatizar procesos, la aplicación de los modelos de confiabilidad resulta más sencilla de ser realizada a través programas como JMP y R, este último, es gratuito y de código abierto, por lo que está al alcance de muchas pequeñas y grandes industrias, cabe mencionar que estos programas, son una herramienta para facilitar el trabajo, pero es necesaria la comprensión teórica para la interpretación y aplicación de los resultados. Hoy en día, los cálculos y la manipulación de datos, pueden realizarse de manera más eficiente, y por lo tanto, los beneficios son mayores. Sin embargo, la disciplina de la confiabilidad no es mencionada en las empresas más pequeñas para el mantenimiento de sus equipos, por lo que consideramos que la difusión de este conocimiento, traería beneficios a nuestra sociedad, no solamente económicos, sino también en cuestiones de confianza, seguridad y tranquilidad.



# Bibliografía

- [1] E. BOJ DEL VAL, *El modelo de Cox de riesgos proporcionales*, 2017.  
Recuperado de: <http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/49070/6/El%20modelo%20de%20Cox%20de%20riesgos%20proporcionales.pdf>.
- [2] E. ESPINEL, *Distribuciones no tradicionales para medir confiabilidad, mantenibilidad y disponibilidad*, 2014.  
Recuperado de: <https://core.ac.uk/download/pdf/47246327.pdf>.
- [3] L. MORA, *Mantenimiento. Planeación, ejecución y control.*, Primera Edición, 2009.
- [4] M. PAUL, *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*, Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, 1992.
- [5] C. PRIETO, *Fiabilidad y mantenimiento.*, 2008.  
Recuperado de: [https://web.archive.org/web/20100926060922/http://www.aloj.us.es/notastecnicas/Fiabilidad Mantenibilidad y Mantenimiento.pdf](https://web.archive.org/web/20100926060922/http://www.aloj.us.es/notastecnicas/Fiabilidad%20Mantenibilidad%20y%20Mantenimiento.pdf).
- [6] M. R. SHELDON, *A First Course In Probability*, Edition Num. 8, 2010.
- [7] M. R. SHELDON AND R. A, *Introduction to Probability Models.*, 11th Edition Num. 1, 2014.

