



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Subastas como Juegos de Información Incompleta

Tesis presentada al

Posgrado en Ciencias Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

por

Lic. Andreiv Domínguez Martínez

Asesorado por

Dra. Teresa Pérez Muñoz y Dr. Hugo Adán Cruz Suárez

Puebla Pue.
27 de Junio de 2025



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Subastas como Juegos de Información Incompleta

Tesis presentada al

Posgrado en Ciencias Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

por

Lic. Andreiv Domínguez Martínez

Asesorado por

Dra. Teresa Pérez Muñoz y Dr. Hugo Adán Cruz Suárez

Puebla Pue.
27 de Junio de 2025



BUAP

**DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:**

Por este medio le informo que el C:


ANDREIV DOMÍNGUEZ MARTÍNEZ

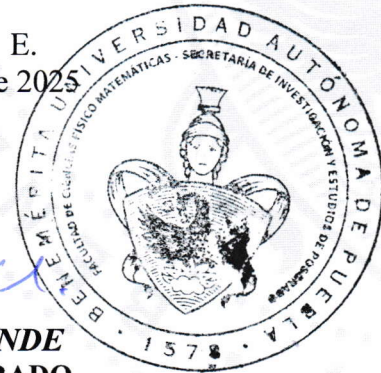
estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 6 de junio de 2025, con la tesis titulada:

Subastas como Juegos de Información Incompleta

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 19 de junio de 2025


**DR. RAÚL ESCOBEDO CONDE
COORDINADOR DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.**



D*REC/mtrv

Título: Subastas como Juegos de Información Incompleta
Estudiante: LIC. ANDREIV DOMÍNGUEZ MARTÍNEZ

COMITÉ

Dr. Víctor Hugo Vázquez Guevara
Presidente

Dr. José Juan Castro Alva
Secretario

Dr. Carlos Camilo Garay
Vocal

Dr. Ruy Alberto López Ríos
Vocal

Dra. Teresa Pérez Muñoz y Dr. Hugo Adán Cruz Suárez
Asesores

Agradecimientos

A mi hijo Diego, gracias por existir y ser mi mayor motivación.

A mi familia, por su apoyo incondicional.

A Karla Andreina, por impulsarme y apoyarme para iniciar este proyecto profesional.

A Oswaldo y Roberto, compañeros y amigos de toda una vida.

A mis asesores, la Dra. Teresa Pérez Muñoz y el Dr. Hugo Adán Cruz Suárez, por sus enseñanzas, su guía y su infinita paciencia.

A mis compañeros Víctor, Enrique y Alonzo, quienes siempre estuvieron dispuestos a ayudarme ante dudas y dificultades.

A mi jurado, por su valiosa retroalimentación: Dr. Víctor Hugo Vázquez Guevara, Dr. José Juan Castro Alva, Dr. Carlos Camilo Garay y Dr. Ruy Alberto López Ríos.

A la beca de “Ayudante de Investigador Nacional Nivel III (SNII)” otorgada por el Dr. José Raúl Montes de Oca Machorro del Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa.

Esta tesis fue parcialmente apoyada por el Proyecto CONAHCYT: “Procesos de Decisión de Markov en Ambiente Difuso”, Ciencia de Frontera 2023, CF-2023-I-1362.

Índice general

Resumen	XIII
1. Introducción	1
1.1. Subastas	1
1.2. Relevancia de los mercados regidos por subastas	2
1.3. La plataforma <i>eBay</i>	5
1.4. Teoría de juegos y subastas	5
1.5. Objetivos	6
1.6. Estructura de la tesis	6
2. Teoría de juegos	7
2.1. Tipos de juegos	7
2.2. Juegos bimatriaciales	10
2.2.1. Juego en estrategias puras	10
2.2.2. Juegos en estrategias mixtas	13
2.3. Juegos de n jugadores con estrategias continuas	20
2.4. Existencia del equilibrio de Nash	22
2.5. Ejemplos de aplicaciones	24
2.5.1. Duopolio de Cournot	24
2.6. Juegos bayesianos	29
3. Modelos aplicados a subastas	35
3.1. Subastas simples	35
3.1.1. Estimación del precio de reserva	35
3.1.2. Subasta con valoraciones uniformemente distribuidas	36
3.2. Subasta al primer precio	38
3.3. Subasta de eBay como juego bayesiano estático	40
3.3.1. Conjunto de jugadores	43
3.3.2. Tipos: valoraciones	43
3.3.3. Acciones	43
3.3.4. Estrategias	43
3.3.5. Funciones de ganancias	47
3.3.6. Cálculo del equilibrio bayesiano de Nash	47
4. Conclusión	51
Bibliografía	53

Índice de figuras

1.1. Evolución histórica del mercado mundial regido por subastas.	2
1.2. Evolución histórica del mercado mundial regido por subastas.	3
1.3. Evolución histórica de la participación de las plataformas, de 2018 a 2023.	4
1.4. Participación por empresas en el mercado de subastas en línea (2023).	4
1.5. Distribución de las categorías de objetos vendidos mediante subastas en línea.	5
2.1. Tipos de juegos.	8
2.2. Forma normal de un juego de dos jugadores. Con $a_{ij} = u_1(e_{1j}, e_{2i})$ y $b_{ij} = u_2(e_{1j}, e_{2i})$	9
2.3. Juego en forma extensiva.	10
2.4. Conjunto solución de la matriz A	17
2.5. Conjunto solución de la matriz B	18
2.6. Conjuntos solución de las matrices A y B	18
3.1. Valor crítico de la función g	36
3.2. Gráfica de la relación funcional entre valoraciones y pujas.	38
3.3. Gráfica de las pujas versus el tiempo en días.	42
3.4. Histograma de las pujas.	43
3.5. Histogramas de las pujas por tipo de jugador.	44
3.6. Ajuste de los datos mediante una mezcla de distribuciones gaussianas para jugadores precavidos.	45
3.7. Ajuste de los datos mediante una mezcla de distribuciones gaussianas para jugadores intrépidos.	46
3.8. Raíces de la función $g'(b_1)$ para un jugador intrépido, con $v_1 = 400$	48
3.9. Gráfica de la mejor respuesta para un jugador.	49
3.10. Gráfica de la función de ganancias $GE(v_1)$ para un pjugador.	49

Índice de tablas

1.1. Crecimiento Anual Compuesto (2018-2023).	3
2.1. Representación normal del dilema del prisionero.	9
2.2. Representación normal del dilema del prisionero y su equilibrio de Nash.	12
2.3. El jugador 2 elige \bar{c}_2	33
2.4. El jugador 2 elige \underline{c}_2	33
3.1. Subasta elegida: 1644594033	41
3.2. Descripción estadística de las pujas.	42

Resumen

En el año 2023, el mercado de subastas en línea, operado mediante plataformas digitales, generó ingresos estimados en 31 billones de dólares, lo que representa una tasa de crecimiento anual del 2.1 % desde 2018. La importancia económica de este sector ha motivado diversas investigaciones orientadas a fortalecer la seguridad y a reducir prácticas fraudulentas, en beneficio de compradores, vendedores y casas de subasta. No obstante, existe una carencia de modelos analíticos que permitan a un comprador individual incrementar sus probabilidades de éxito en una subasta, al tiempo que maximizan su utilidad esperada. En esta tesis se propone un modelo teórico fundamentado en la teoría de juegos bayesianos, cuyo objetivo es proporcionar una estrategia óptima de participación para un comprador racional. El enfoque clasifica a los postores en dos categorías conductuales —precavidos e intrépidos— y ajusta una función de probabilidad para cada tipo. A partir de dicha clasificación, se determina numéricamente el equilibrio de Nash bayesiano en función de la valoración privada del comprador analizado.

Palabras clave: *Teoría de juegos, Equilibrio de Nash, Juego bayesiano, Equilibrio de Nash bayesiano, Subastas en línea*

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo definimos el concepto de subasta y los tipos de subastas más comunes. También planteamos el contexto del mercado de las plataformas de subastas en línea y de la plataforma eBay.

1.1. Subastas

Las subastas son un mecanismo para la venta de objetos de naturaleza diversa. Esto incluye obras de arte, antigüedades u objetos de colección. Otras subastas se utilizan para la concesión de bienes públicos como las telecomunicaciones o los recursos energéticos. También son comunes las subastas de bienes de consumo, como pescado o flores, empleadas habitualmente en la venta de dichos bienes. Las subastas se utilizan cuando un vendedor no tiene certeza del precio de mercado del bien o servicio que vende.

Definición 1. *Una **subasta** es un proceso de venta o licitación de bienes o servicios mediante una competición de ofertas. El ganador será el postor que pague la mayor cantidad o solicite el menor cobro (Krishna, 2010) [16]*

Según (Krishna, 2010) [16], cualquier bien puede ser vendido mediante una subasta, por ello, se dice que las subastas son **universales**. El mismo autor señala que son **anónimas**, ya que no es necesario conocer la identidad del postor, pues esto no influye en el resultado. A continuación se describen lo tipos de subastas más frecuentes:

- **Inglesas:** formato de pujas públicas ascendentes, gana la persona que hace una oferta y nadie más puja un precio más elevado. El ganador paga su última puja. La subasta puede incluir un precio mínimo.
- **Holandesas:** formato de pujas públicas descendentes. El precio comienza alto y disminuye hasta que alguien hace una puja y gana la subasta. No es de uso frecuente.
- **Sobre cerrado al primer precio:** todos realizan una puja en un sobre cerrado y gana el que hace la mayor puja, paga la puja realizada.
- **Sobre cerrado al segundo precio:** Es similar a la anterior, pero el ganador paga el segundo precio.
- **Holandesa-inglesa:** el precio empieza alto y desciende hasta que un postor hace una puja, en ese momento se inicia la búsqueda de pagos mayores.
- **De fecha tope (deadline):** gana el postor con la puja más alta antes del fin de un período de tiempo preestablecido.

- **De vela (candle):** gana la puja más alta durante un período de tiempo aleatorio.

Otro concepto necesario es el de la valoración.

Definición 2. Una *valoración* es el valor que un postor asigna al objeto o bien subastado.

A continuación se describen los tipos de valoraciones de los objetos o bienes subastados.

- **Valoraciones privadas:** cada postor tiene una valoración del objeto subastado al momento de realizar una puja y ningún postor tiene certeza sobre las valoraciones de los demás.
- **Valoraciones interdependientes:** la valoración es desconocida al momento de hacer una puja ya que puede verse afectada por la información que tienen otros postores.
- **Valoración común:** la valoración es desconocida al momento de la puja, pero es la misma para todos los postores.

1.2. Relevancia de los mercados regidos por subastas

Esta sección muestra la relevancia del mercado de subastas en línea. La venta mediante subastas en línea representó casi 32 billones de dólares a nivel global en 2023, según los datos disponibles en los reportes de diversas empresas dedicadas a este tipo de transacciones. La figura 1.1 muestra los datos históricos de las ventas globales mediante subastas entre 2018 y 2023.

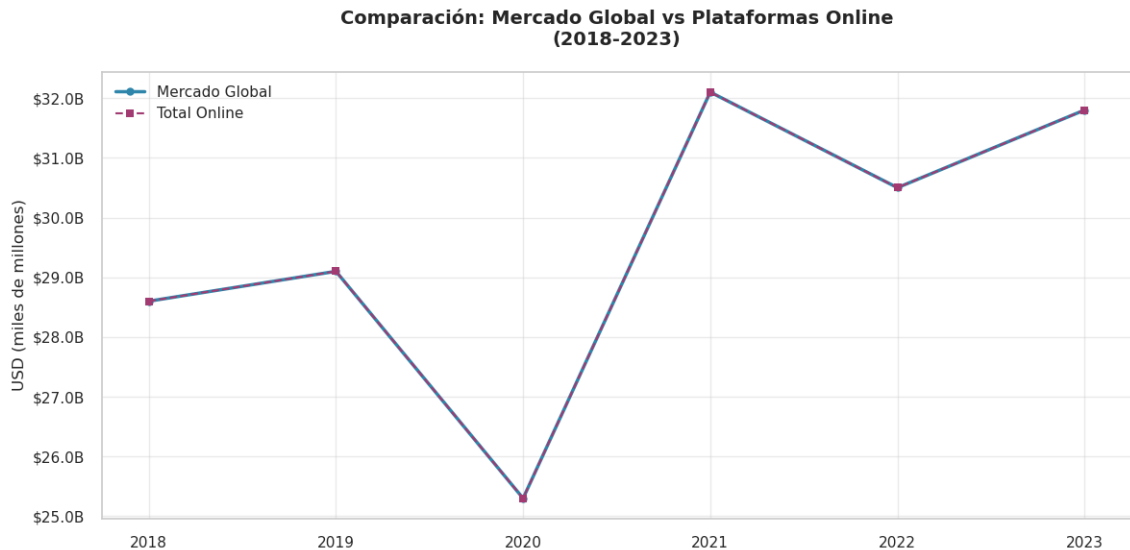


Figura 1.1: Evolución histórica del mercado mundial regido por subastas.

La figura 1.2 muestra las ventas de las principales plataformas de subastas durante 2018 y 2023.

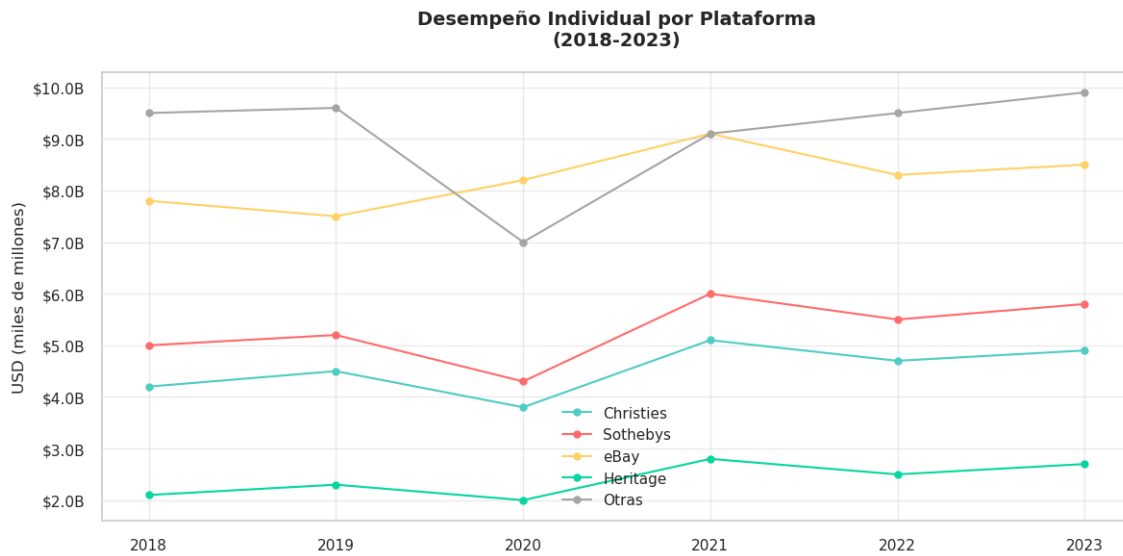


Figura 1.2: Evolución histórica del mercado mundial regido por subastas.

La tabla 1.1 muestra el crecimiento anual compuesto entre 2018 y 2023. Se observa un crecimiento en las ventas mediante subastas durante este periodo y en estas plataformas.

Global	2.1
Total Online	2.1
Christies	3.1
Sothebys	3.0
eBay	1.7
Heritage	5.2
Otras	0.8

Tabla 1.1: Crecimiento Anual Compuesto (2018-2023).

Se aprecia un crecimiento en todas las plataformas.

La figura 1.3 muestra al aportación histórica de cada plataforma a las ventas globales.

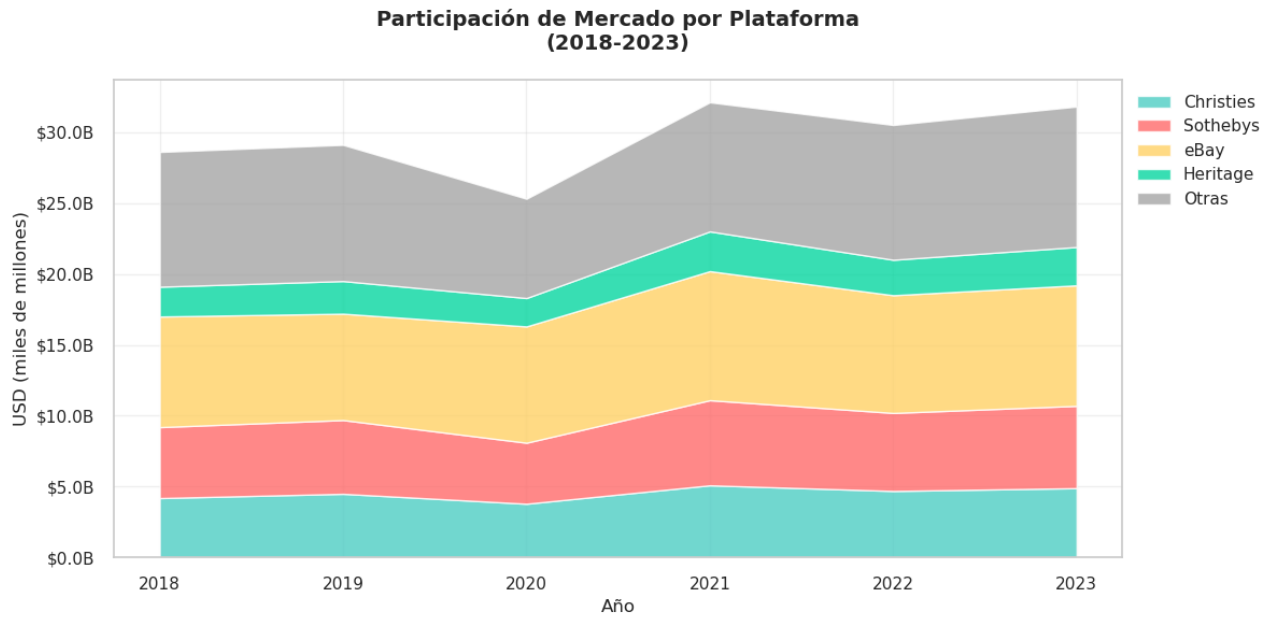


Figura 1.3: Evolución histórica de la participación de las plataformas, de 2018 a 2023.

La figura 1.4 muestra la participación de mercado de las distintas empresas de subastas en línea.

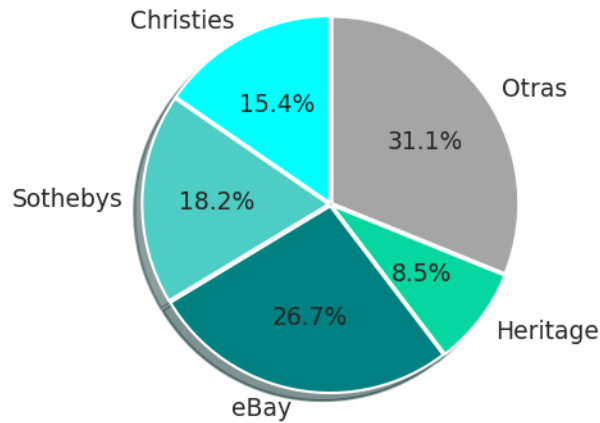


Figura 1.4: Participación por empresas en el mercado de subastas en línea (2023).

Se observa que *eBay* tiene la mayor participación en el mercado de ventas por subastas.

La figura 1.5 muestra la distribución de las diferentes categorías de bienes vendidos en las plataformas de subastas.

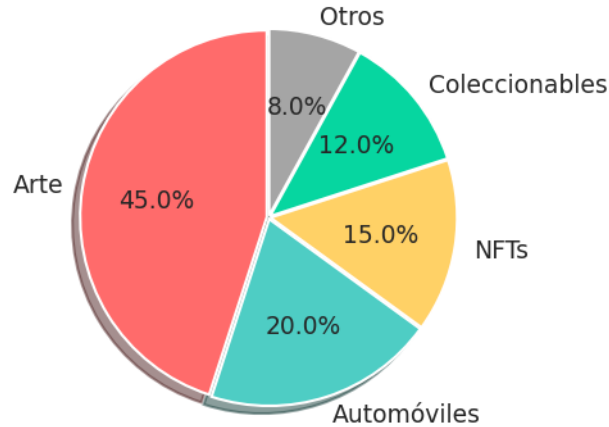


Figura 1.5: Distribución de las categorías de objetos vendidos mediante subastas en línea.

El arte constituye la principal categoría de bienes vendidos durante 2023.

1.3. La plataforma *eBay*

La empresa *eBay* (www.ebay.com) es una plataforma de comercio electrónico y subastas en línea. Nació como *AuctionWeb* en septiembre de 1995 y fue creada por Pierre Omidyar. En septiembre de 1998 adoptó su nombre al actual. Tiene presencia en países como Alemania, Australia, Reino Unido, México y otros países. Las subastas en *eBay* son de fecha tope y de valoraciones privadas. Hay subastas de 3, 5 y 7 días y los postores pueden realizar tantas ofertas como deseen antes de la fecha tope. Además, los postores no saben si alguien ha superado su oferta. Aunque *eBay* ofrece un servicio adicional, con costo, que notifica al postor cuando es superado, pero no informa el valor de la oferta que lo superó.

Los juegos bayesianos pertenecen a una rama de las matemáticas y la economía conocida como **teoría de juegos** y se describe la teoría correspondiente en el capítulo 2. Una subasta puede modelarse como un juego bayesiano para determinar una puja con las mayores probabilidades de ganar una subasta mediante un modelo de probabilidad de las valoraciones basado en el comportamiento previo de los postores (Barron, 2008) [2], (Cerdá, 2004) [5] y (Gibbons, 1992) [9].

La elección de *eBay* para realizar el modelado, se debe a que *eBay* es la plataforma de subastas en línea con mayor número de ventas, pero también responde a la disposición de bases de datos de subastas (Jank, 1995) [13].

1.4. Teoría de juegos y subastas

La teoría de juegos se emplea para resolver situaciones competitivas entre dos o más jugadores, pero de manera equilibrada. Es decir, no se busca que un único jugador logre las mayores ganancias, el objetivo es que los dos o más participantes obtengan las ganancias máximas posibles sin llevar a alguno de los otros jugadores a una pérdida en las ganancias. Se establece que es necesario que los jugadores lleguen a la conclusión que es mejor elegir ciertas opciones, aún

cuando no sea la máxima ganancia para sí mismo, a esto se le conoce como la **racionalidad** del jugador.

Un caso clásico es el análisis de la competencia entre las compañías Coca-Cola y Pepsi, en el cual se evaluó si era estratégicamente ventajoso cooperar o competir a través del uso de publicidad. El modelo concluyó que la estrategia óptima para ambas empresas consistía en no cooperar y emplear publicidad (González, 2023) [10].

La revisión de la literatura permitió identificar aplicaciones en otras áreas de la economía y finanzas (Arozamena, 2021) [1], (Flores, 2023) [7], así como aplicaciones al *machine learning* (Dasgupta, 2023) [6]. En el caso particular de las subastas en línea, la mayoría de los trabajos se enfocan en el diseño de mecanismos para prevenir fraudes, sin desarrollar modelos que orienten a los postores en la elección de una puja que maximice sus probabilidades de éxito. Además, los textos clásicos suelen presentar ejemplos simplificados y carentes de datos reales. En contraste, esta tesis aporta un modelo que incorpora datos reales y busca ofrecer a los postores una estrategia basada en teoría de juegos, proponiendo de este modo una contribución práctica y metodológica.

1.5. Objetivos

A continuación se definen los objetivos de investigación.

Objetivo general

Aplicar la teoría de juegos bayesianos a subastas de compra o venta para la planeación, previsión y toma de decisiones.

Objetivos específicos

1. Revisar la literatura para identificar las características principales de los juegos estáticos y dinámicos, con información completa e incompleta.
2. Demostrar la existencia de equilibrios de Nash bayesianos (ENB).
3. Proponer algoritmos numéricos para calcular o aproximar de ENB.
4. Aplicar la teoría a subastas.

1.6. Estructura de la tesis

En el capítulo 2 se establece la definición de un juego y sus elementos, así como su clasificación y notación. En el mismo capítulo 2 se introducen los juegos estáticos. Comenzamos con los juegos bimatriciales ya que representan un juego que involucra a dos jugadores, este es el caso más frecuente y es el que emplearemos en nuestro modelo. Se definen los conceptos de **mejor respuesta** y **equilibrio de Nash** que constituyen la solución de un juego. También se definen los juegos en estrategias puras, los juegos en estrategias mixtas y el algoritmo para determinar su solución. Los resultados principales son la existencia de un equilibrio de Nash para juegos mixtos y para juegos finitos. Se muestra la aplicación a diversos contextos de competencia de mercado entre empresas. Este capítulo concluye con la definición de los juegos bayesianos y sus soluciones.

En el capítulo 3 se muestran ejemplos de la aplicación de la teoría de juegos a subastas. Se determina el precio de reserva de un objeto, con el objetivo de que un vendedor no pierda dinero. Aquí se construye el modelo de una subasta y se determina su equilibrio de Nash.

Capítulo 2

Teoría de juegos

En este capítulo se introduce los elementos de la teoría de juegos, de los juegos bayesianos y del equilibrio de Nash para cada uno de estos casos.

Un **juego** es un modelo matemático que representa una situación de decisión interactiva entre dos o más participantes (*jugadores*) que se afectan mutuamente y que tienen como objetivo llegar a un resultado favorable (*pagos*) que dependen de sus elecciones (*estrategias*), (Cerdá, 2004) [5]. Está constituido de los siguientes elementos:

- **Conjunto de jugadores:** $J = \{1, 2, \dots, n\}, n \geq 2$.
- **Conjunto de estrategias:** $E_j = \{e_{j1}, e_{j2}, \dots, e_{jm_j}\}$ con $m_j \geq 2$, para cada jugador $j \in J$. E_j es el conjunto de todas las acciones posibles del jugador i . Posteriormente se presenta el caso en el cual las estrategias y las acciones son equivalentes.

Algunas definiciones adicionales necesarias:

- $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$
- $E_{-i} = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \dots \times E_n$
- **Funciones de pagos:** se define para cada $e = (e_{1i_1}, e_{2i_2}, \dots, e_{ni_n}) \in E$ y para cada $j \in J$, como $u_j : E \rightarrow \mathbb{R}$ y denotada como $u_j(e)$.

El juego se representa como $G = \{J; E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n; u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

2.1. Tipos de juegos

Los juegos se clasifican de acuerdo a los siguientes criterios:

- *Por el tipo de estrategias:*
 - *Estrategias puras:* las estrategias están dadas de manera determinista y son conocidas por todos los jugadores.
 - *Estrategias mixtas:* las estrategias de alguno de los jugadores están dadas de manera aleatoria para otro jugador, pero conoce la distribución de probabilidades de la elección.
- *Por el tiempo en que ocurren:*
 - *Juegos estáticos:* las selecciones de estrategias ocurren de manera simultánea o en distintos tiempos sin conocer las selecciones de los jugadores restantes.

- *Juegos dinámicos*: las selecciones ocurren de manera secuencial y los jugadores restantes pueden conocer las estrategias y pagos de jugadores anteriores.
- *Por el tipo de información disponible*:
 - *Juegos información completa*: la función de pagos de cada jugador se encuentra disponible para los otros jugadores.
 - *Juegos información incompleta*: la función de pagos de alguno de los jugadores no está disponible para algún otro, pero se conoce la distribución de probabilidades de las posibles elecciones.

La estructura de las relaciones de los tipos de juegos se muestra en la siguiente gráfica.

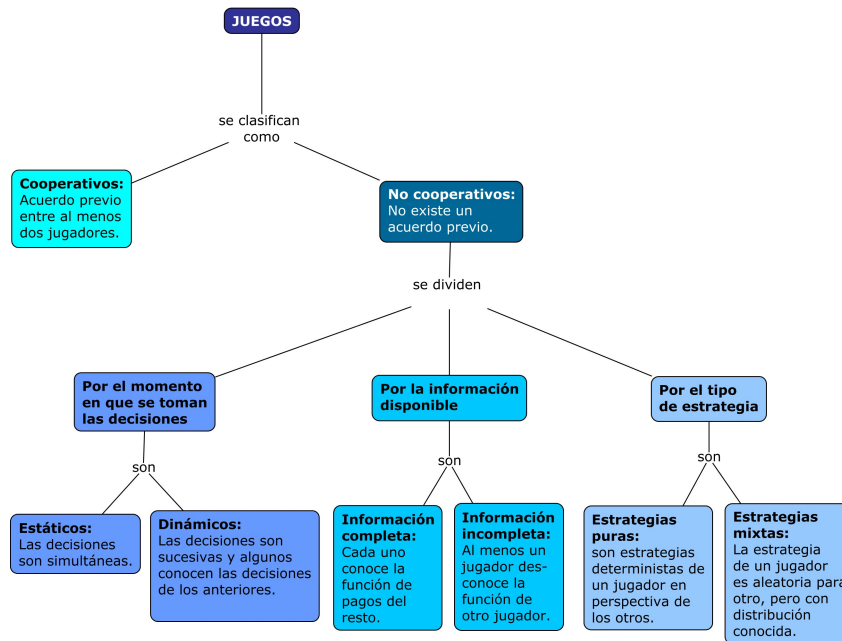


Figura 2.1: Tipos de juegos.

Dilema del prisionero Un ejemplo clásico de la teoría de juegos es el *dilema del prisionero*. Dos prisioneros condenados por un delito se encuentran presos en celdas separadas, pero la policía tiene indicios de su participación en otro delito. Deciden plantear una estrategia para que uno de ellos delate al otro: Si ambos delatan, sus condenas se reducen en un año. Si uno delata y el otro confiesa, el que delata reduce su condena en tres años y la condena del otro prisionero permanece igual. Si los dos callan, ambos prisioneros reducen sus condenas en tres años. Los elementos del juego se muestran a continuación:

- *Conjunto de jugadores*: $J = \{1, 2\}$.
- *Conjuntos de estrategias*: $E_1 = E_2 = \{C, D\}$, donde C y D representan *callar* y *delatar*, respectivamente.
- *Funciones de pago*:

$$u_1(C, C) = 3,$$

$$u_1(C, D) = 0,$$

$$u_1(D, C) = 5,$$

$$u_1(D, D) = 1,$$

$$\begin{aligned} u_2(C, C) &= 3, \\ u_2(C, D) &= 0, \\ u_2(D, C) &= 5, \\ u_2(D, D) &= 1. \end{aligned}$$

¿Cuál es la mejor elección para cada prisionero?

Resolver un juego significa hallar una solución que sea favorable para todos los jugadores, es decir, una solución equilibrada para todos. Se espera que todos los jugadores ganen o al menos que no pierdan. A esta solución se le llama *equilibrio de Nash*. Para hallar el equilibrio de Nash en un juego, es necesaria una representación adecuada del mismo, a continuación mencionamos dos representaciones frecuentes.

- *Forma normal*: es una representación matricial de un juego entre dos jugadores, las filas corresponden a las estrategias del jugador 1 y las columnas a las estrategias del jugador 2, las entradas corresponden a los pagos que recibe cada jugador. La siguiente matriz muestra esta representación.

		J2			
		e_{21}	e_{22}	\dots	e_{2s}
J1	e_{11}	a_{11}, b_{11}	a_{12}, b_{12}	\dots	a_{1s}, b_{1s}
	e_{12}	a_{21}, b_{21}	a_{22}, b_{22}	\dots	a_{2s}, b_{2s}
	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
	e_{1r}	a_{r1}, b_{r1}	a_{r2}, b_{r2}	\dots	a_{rs}, b_{rs}

Figura 2.2: Forma normal de un juego de dos jugadores. Con $a_{ij} = u_1(e_{1j}, e_{2i})$ y $b_{ij} = u_2(e_{1j}, e_{2i})$.

Representación normal del dilema del prisionero. Usando la representación normal, el dilema del prisionero se muestra en la tabla 2.1.

		J2	
		C	D
J1	C	$3, 3$	$0, 5$
	D	$5, 0$	$1, 1$

Tabla 2.1: Representación normal del dilema del prisionero.

- *Forma extensiva*: es la representación de un juego en forma de diagrama de árbol. Permiten representar un juego como un fenómeno secuencial. Los nodos (vértices) corresponden los momentos de elección de un jugador o el final del juego, las líneas que enlazan nodos indican las elecciones de los jugadores y los vectores que se encuentran en los nodos finales muestran a los pagos resultantes.

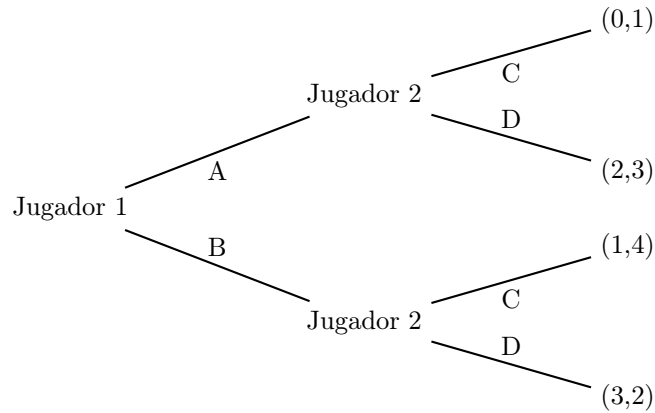


Figura 2.3: Juego en forma extensiva.

2.2. Juegos bimatriciales

Los juegos bimatriciales consisten de un juego entre dos jugadores con estrategias finitas y con representación normal.

Dado un juego de dos jugadores I con m estrategias y II con n estrategias, las matrices de ganancias para cada jugador son

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Es común representar ambas matrices en una sola matriz denominada **representación bimatricial**:

$$\begin{bmatrix} a_{11}, b_{11} & a_{12}, b_{12} & \dots & a_{1n}, b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}, b_{m1} & a_{m2}, b_{m2} & \dots & a_{mn}, b_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

En particular, a_{ij}, b_{ij} representa que el jugador I elige la fila i y el jugador II elige la columna j . Un juego bimatricial se representa como $G = \{J; E_1, E_2; u_1, u_2\}$.

Algunos tipos de juegos bimatriciales se definen a continuación:

- **Juegos de suma cero:** ocurren cuando $a_{ij} + b_{ij} = 0$, para cualesquiera $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.
- **Juegos de suma constante:** ocurren cuando $a_{ij} + b_{ij} = C$, para $C \in \mathbb{R}$, y para cualesquiera $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

2.2.1. Juego en estrategias puras

Los juegos en estrategias puras ocurren cuando las funciones de pago dependen de manera determinista de las estrategias elegidas por los jugadores, son el primer caso de juegos que se resuelven mediante el equilibrio de Nash.

Definición 3. Una *estrategia pura* es una fila o una columna individual de las matrices A y B dadas en (2.1).

Definición 4. Sea $G = \{J; E_1, E_2; u_1, u_2\}$ un juego bimatrial en estrategias puras, una pareja $e^* = (e_1^*, e_2^*) \in E_1 \times E_2$ es un **equilibrio de Nash (EN)** si satisface

$$u_1(e_1^*, e_2^*) \geq u_1(e_{1i}, e_2^*) \text{ para toda } e_{1i} \in E_1 \quad (2.3)$$

y

$$u_2(e_1^*, e_2^*) \geq u_2(e_1^*, e_{2j}) \text{ para toda } e_{2j} \in E_2. \quad (2.4)$$

En las ecuaciones (2.3) y (2.4) observamos que $u_1(e_1^*, e_2^*)$ es un valor máximo para e_2^* fijo y también es un valor máximo para e_1^* fijo. Esto lleva a la siguiente definición:

Definición 5. 1. Sea $\bar{j} \in \{1, \dots, n\}$ fijo, entonces se dice que $e_1^* \in E_1$ es la **mejor respuesta** del jugador 1 a la estrategia $e_{2\bar{j}} \in E_2$ del jugador 2, si para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ se cumple la desigualdad

$$u_1(e_1^*, e_{2\bar{j}}) \geq u_1(e_{1i}, e_{2\bar{j}}).$$

2. Sea $\bar{i} \in \{1, \dots, m\}$ fijo, entonces se dice que $e_2^* \in E_2$ es la **mejor respuesta** del jugador 2 a la estrategia $e_{1\bar{i}} \in E_1$ del jugador 1, si para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ se cumple la desigualdad

$$u_1(e_{1\bar{i}}, e_2^*) \geq u_1(e_{1\bar{i}}, e_{2j}).$$

Notemos que una pareja de mejores respuestas es un equilibrio de Nash. La búsqueda de mejores respuestas facilitan la búsqueda de equilibrios de Nash.

Ejemplo 1. Considere el juego G , dado por la siguiente matriz de pagos:

		J2	
		e_{21}	e_{22}
J1	e_{11}	150, 50	0, -75
	e_{12}	150, 0	75, -50

Solución: Para hallar los equilibrios de Nash, se buscan las mejores respuestas.

1. Para cada columna del jugador II, hallamos la mejor respuesta del jugador I:

		J2	
		e_{21}	e_{22}
J1	e_{11}	<u>150</u> , 50	0, -75
	e_{12}	<u>150</u> , 0	<u>75</u> , -50

2. Para cada fila del jugador I, hallamos la mejor respuesta del jugador II:

		J2	
		e_{21}	e_{22}
J1	e_{11}	150, <u>50</u>	0, -75
	e_{12}	150, <u>0</u>	75, -50

3. Escribimos todas las mejores respuestas en la misma matriz:

		J2	
		e_{21}	e_{22}
J1	e_{11}	<u>150</u> , <u>50</u>	0, -75
	e_{12}	<u>150</u> , <u>0</u>	<u>75</u> , -50

4. Los equilibrios de Nash ocurren cuando ambos pagos están subrayados:

		J2	
		e ₂₁	e ₂₂
J1	e ₁₁	<u>150, 50</u>	0, -75
	e ₁₂	<u>150, 0</u>	<u>75, -50</u>

El conjunto de equilibrios de Nash es $EN = \{(e_{11}, e_{21}), (e_{21}, e_{22})\}$. ■

Equilibrio de Nash para el dilema del prisionero Usando la estrategia de mejores respuestas, se determina el equilibrio de Nash para el ejemplo del dilema del prisionera definido en la página 8.

		J2	
		C	D
J1	C	3, 3	0, 5
	D	5, 0	<u>1, 1</u>

Tabla 2.2: Representación normal del dilema del prisionero y su equilibrio de Nash.

El equilibrio de Nash se consigue cuando ambos prisioneros delatan.

El algoritmo para resolver un juego bimatriacial en estrategias puras se muestra a continuación:

Algorithm 1 Algoritmo para hallar los equilibrios de Nash en estrategias puras.

Require: Matrices de pagos A, B de dimensiones $m \times n$

Ensure: Lista de equilibrios de Nash (i, j)

```

1:  $EquilibriosDeNash \leftarrow \emptyset$ 
2: for  $i = 1$  to  $m$  do
3:   for  $j = 1$  to  $n$  do
4:      $a\_mejor \leftarrow P_1[i, j] \geq \max(A[:, j])$ 
5:      $b\_mejor \leftarrow P_2[i, j] \geq \max(B[i, :])$ 
6:     if  $a\_mejor$  and  $b\_mejor$  then
7:        $EquilibriosDeNash \leftarrow EquilibriosDeNash \cup \{(i, j)\}$ 
8:     end if
9:   end for
10: end for
11: return  $EquilibriosDeNash$ 

```

Este es el código de Python:

```

import numpy as np
from itertools import product

def equilibrios_de_Nash(matriz1, matriz2):
    """
    Encuentra los equilibrios de Nash en estrategias puras
    para un juego bimatriacial.
    :param matriz1: Matriz de pagos del jugador 1.
    :param matriz2: Matriz de pagos del jugador 2.
    :return: Lista de equilibrios de Nash correspondientes a los
    pares de estrategias a elegir.
    """
    m, n = matriz1.shape

```

```

equilibrios_de_Nash = []

for i, j in product(range(m), range(n)):
    M1_mejor = matriz1[i, j] >= np.max(matriz1[:, j])
    M2_mejor = matriz2[i, j] >= np.max(matriz2[i, :])

    if M1_mejor and M2_mejor:
        equilibrios_de_Nash.append((i, j))

return equilibrios_de_Nash+np.ones((m, n))

# Definir matrices de pagos para un juego de ejemplo
A = np.array([[150, 0], [150, 75]]) # Pagos del jugador 1
B = np.array([[50, -75], [0, -50]]) # Pagos del jugador 2

# Encontrar equilibrios de Nash
equilibrios = equilibrios_de_Nash(A, B)
print("Estrategias correspondientes a los equilibrios de Nash:", equilibrios)

```

2.2.2. Juegos en estrategias mixtas

Las estrategias mixtas ocurren cuando la elección de la estrategia es una variable aleatoria con distribución de probabilidad conocida

Definición 6. Dado un juego G de dos jugadores I y II , una **estrategia mixta** son dos vectores $X = (x_1, \dots, x_n)$ y $Y = (y_1, \dots, y_m) \in S_n$ para I y II , respectivamente, tales que $x_i \geq 0, y_j \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1, \sum_{j=1}^n y_j = 1, P[I \text{ elija la fila } i] = x_i$ y $P[II \text{ elija la columna } j] = y_j$.

Dado un juego bimatriacial G , definimos el conjunto de **estrategias mixtas con k componentes** como el conjunto

$$S_k \equiv \left\{ (s_1, s_2, \dots, s_k) \mid s_i \geq 0, i \in \{1, 2, \dots, k\}, \sum_{i=1}^k s_i = 1 \right\} \quad (2.5)$$

Con esta última representación se tiene que $X \in S_n$ y $Y \in S_m$ (Gibbons, 1992) [9].

Para estrategias mixtas, el pago se determina mediante el pago esperado.

Definición 7. Sea G un juego de dos jugadores I y II con conjuntos de estrategias mixtas S_m y S_n , respectivamente. Sean $X \in S_m$ y $Y \in S_n$ sus respectivas estrategias mixtas, sea $A = (a_{ij})$ la matriz de pagos del jugador I , entonces el pago esperado del jugador I está dado por la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 E(X, Y) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} P[I \text{ elige a } i \text{ y } II \text{ elige a } j] \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} P[I \text{ elige a } i] P[II \text{ elige a } j] \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j \\
 &= XAY^T
 \end{aligned}$$

Entonces las ganancias esperadas están dadas por $E_I(X, Y) = XAY^T$ para el jugador I , $E_{II}(X, Y) = XBY^T$ para el jugador II .

Se define el equilibrio de Nash para juegos en estrategias mixtas.

Definición 8. Un *equilibrio de Nash* es un par de estrategias mixtas $(X^* \in S_m, Y^* \in S_n)$ que satisface $E_I(X, Y^*) \leq E_I(X^*, Y^*)$ para cada estrategia mixta $X \in S_m$ y $E_{II}(X^*, Y) \leq E_{II}(X^*, Y^*)$ para cada estrategia mixta $Y \in S_n$.

En los juegos bimatriaciales, el equilibrio de Nash también se determina a partir del concepto de mejor respuesta.

Definición 9. Una estrategia $X^0 \in S_m$ es la *mejor estrategia de respuesta* a una estrategia $Y^0 \in S_n$ para el jugador II, si

$$E_I(X^0, Y^0) = \max_{X \in S_m} E_I(X, Y^0).$$

Similarmente, una estrategia $Y^0 \in S_n$ es la *mejor estrategia de respuesta* para una estrategia dada $X^0 \in S_m$ para el jugador I, si

$$E_{II}(X^0, Y^0) = \max_{Y \in S_n} E_{II}(X^0, Y).$$

Juegos bimatriaciales 2×2

Sean $X = (x, 1-x), Y = (y, 1-y), 0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$ un par de estrategias mixtas para los jugadores I y II, respectivamente. Las matrices de ganancias de los jugadores están dadas por

$$\begin{aligned} E_I(X, Y) = XAY^T &= [x, 1-x] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix}, \\ E_{II}(X, Y) = XBY^T &= [x, 1-x] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

El objetivo de cada jugador es maximizar su ganancia **bajo la hipótesis de que el otro jugador busca maximizar sus propias ganancias** controlando sus estrategias. Usaremos el siguiente teorema.

Teorema 1. Las estrategias mixtas $X^* = (x^*, 1-x^*), Y^* = (y^*, 1-y^*)$ es un punto de equilibrio de Nash para el juego con matrices A y B si y sólo si

$$E_I(1, Y^*) \leq E_I(X^*, Y^*) \tag{2.6}$$

$$E_I(2, Y^*) \leq E_I(X^*, Y^*) \tag{2.7}$$

$$E_{II}(X^*, 1) \leq E_{II}(X^*, Y^*) \tag{2.8}$$

$$E_{II}(X^*, 2) \leq E_{II}(X^*, Y^*) \tag{2.9}$$

De esta proposición se tiene que para hallar el equilibrio de Nash, es necesario determinar la solución conjunta de las desigualdades (2.6) y (2.7), y para las desigualdades (2.8) y (2.9). Por su relevancia para la solución de los juegos bimatriaciales estos conjuntos reciben un nombre que se establece a continuación en la siguiente definición.

Definición 10. Sean $X = (x, 1-x), Y = (y, 1-y)$ estrategias mixtas, y sean $f(x, y) = E_I(X, Y)$ y $g(x, y) = E_{II}(X, Y)$. El **conjunto de reacción racional** para el jugador I es el conjunto de puntos

$$R_I = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq 1, \max_{0 \leq z \leq 1} f(z, y) = f(x, y)\},$$

y el conjunto de reacción racional para el jugador II es

$$R_{II} = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq 1, \max_{0 \leq w \leq 1} g(x, w) = g(x, y)\},$$

Si un punto (x^*, y^*) está en R_I y en R_{II} , entonces diremos que $X^* = (x^*, 1 - x^*)$ y $Y^* = (y^*, 1 - y^*)$ es **un equilibrio de Nash**. Se simplifica la notación al suprimir el símbolo * de los vectores y sus coordenadas de un equilibrio de Nash.

Se procede a determinar el conjunto de reacción racional para el jugador I , a partir de las desigualdades (2.6) y (2.7). De las desigualdades $E_I(1, Y) \leq E_I(X, Y)$ y $E_I(2, Y) \leq E_I(X, Y)$ se tiene que

$$\begin{aligned} (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})y + (a_{12} - a_{22}) + (a_{21} - a_{22})y + a_{22} \\ \leq (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})xy + (a_{12} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})y + a_{22} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})xy + (a_{12} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})y + a_{22} \\ \geq (a_{21} - a_{22})y + a_{22} \end{aligned}$$

Si hacemos $M = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$ y $m = a_{22} - a_{12}$, se tienen las expresiones

$$M(1-x)y - m(1-x) \leq 0 \text{ y } Mxy - mx \geq 0. \quad (2.10)$$

Entonces un punto (x, y) nos proporciona un equilibrio de Nash X, Y siempre que satisfaga la ecuación (2.10). Pero estas desigualdades son no lineales, entonces no es simple hallar su solución, pero una técnica es restringir los posibles valores de M y m .

1. $M = m = 0$. Esto implica que $M(1-x)y - m(1-x) = 0$ y $Mxy - mx = 0$, para cualesquiera $x, y \in [0, 1]$. De esto, se tiene que $a_{12} = a_{22}$ y $a_{11} = a_{21}$. Entonces no importa que estrategia elige el jugador II , porque el jugador I obtiene la misma ganancia.
2. $M = 0$ y $m > 0$. Tenemos que $-m(1-x) \leq 0$ y $-mx \geq 0$. Así $x = 0$ para cualquier $y \in [0, 1]$.
3. $M = 0$ y $m < 0$. Entonces $(1-x) \leq 0$ y $x \geq 0$, es decir, $1 \leq x \leq 1$. Entonces las soluciones satisfacen $x = 1$ y $0 \leq y \leq 1$.
4. $M > 0$. Entonces $M(1-x)y - m(1-x) \leq 0$ y $Mxy - mx \geq 0$. Ahora consideramos varios subcasos.

a) Si $x = 1$, entonces $M(1-x)y - m(1-x) = 0$ y $My - m \geq 0$, entonces $1 \geq y \geq \frac{m}{M}$.

b) Si $x = 0$, entonces $My - m \leq 0$, esto implica que $0 \leq y \leq \frac{m}{M}$.

c) Si $0 < x < 1$, entonces $1-x > 0$ y

$$M(1-x)y - m(1-x) = (My - m)(1-x) \leq 0.$$

Entonces $My - m \leq 0$. Por otro lado, $Mxy - mx \geq 0$ implica que $(My - m)x \geq 0$, es decir, $My - m \geq 0$.

Dado que $My - m \leq 0$ y $My - m \geq 0$, se tiene que $My - m = 0$, de donde $y = \frac{m}{M}$.

5. $M < 0$. De manera similar al caso anterior, tenemos los siguientes subcasos:

a) Si $x = 1$, entonces $0 \leq y \leq \frac{m}{M}$.

b) Si $x = 0$, entonces $1 \geq y \geq \frac{m}{M}$.

c) Si $0 < x < 1$, entonces $y = \frac{m}{M}$

De manera similar se halla la solución para la matriz B , con

$$R = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} \text{ y } r = b_{22} - b_{12}$$

y las desigualdades

$$R(1-y)y - r(1-y) \leq 0 \text{ y } Rxy - ry \geq 0.$$

Consideremos un juego de dos jugadores con matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hallar el equilibrio de Nash.
Tenemos que

$$\begin{aligned} M &= a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} \\ &= 1 - (-2) - (-3) + 2 \\ &= 1 + 2 + 3 + 2 \\ &= 8 > 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} m &= a_{22} - a_{12} \\ &= 2 - (-2) \\ &= 2 + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Entonces $\frac{m}{M} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ y se tiene el caso 4, $M > 0$. Por lo tanto el conjunto solución está dado por

1. $x = 1$ y $1 \geq y \geq \frac{1}{2}$.
2. $x = 0$ y $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$.
3. $0 < x < 1$ y $y = \frac{1}{2}$.

La gráfica del conjunto solución de A se muestra en la figura 2.4.

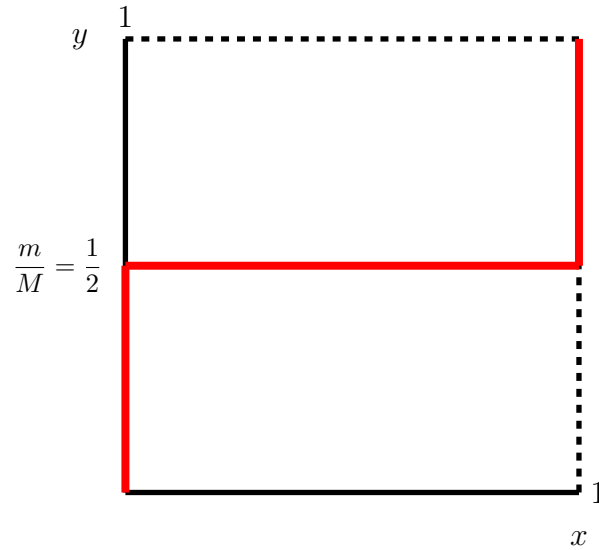


Figura 2.4: Conjunto solución de la matriz A .

De manera similar para la matriz B .

$$\begin{aligned}
 R &= b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} \\
 &= 3 - (-2) - (-2) + 1 \\
 &= 3 + 2 + 2 + 1 \\
 &= 8 > 0
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 r &= b_{22} - b_{12} \\
 &= 1 - (-2) \\
 &= 1 + 2 \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

Entonces $\frac{r}{R} = \frac{3}{8} = \frac{1}{3}$ y nuevamente estamos en el caso 4, $R > 0$. Por lo tanto el conjunto solución está dado por

1. $y = 1$ y $1 \geq x \geq \frac{3}{8}$.
2. $y = 0$ y $0 \leq x \leq \frac{3}{8}$.
3. $0 < y < 1$ y $x = \frac{3}{8}$.

La gráfica del conjunto solución de B se muestra en la figura 2.5.

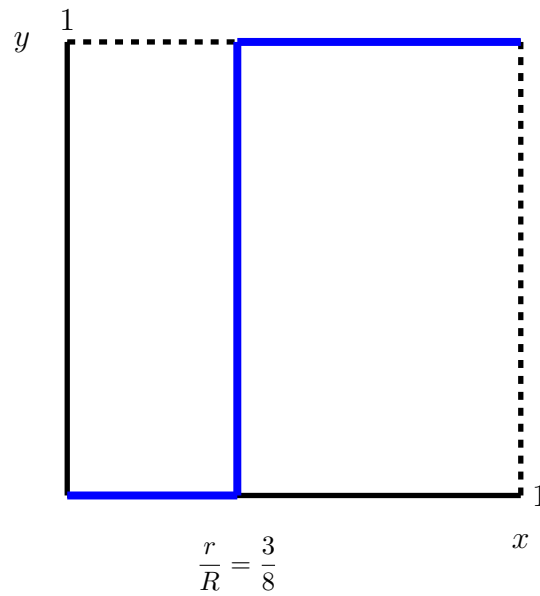


Figura 2.5: Conjunto solución de la matriz B .

Graficamos ambos conjuntos solución en la figura 2.6, la intersección son los equilibrios de Nash.

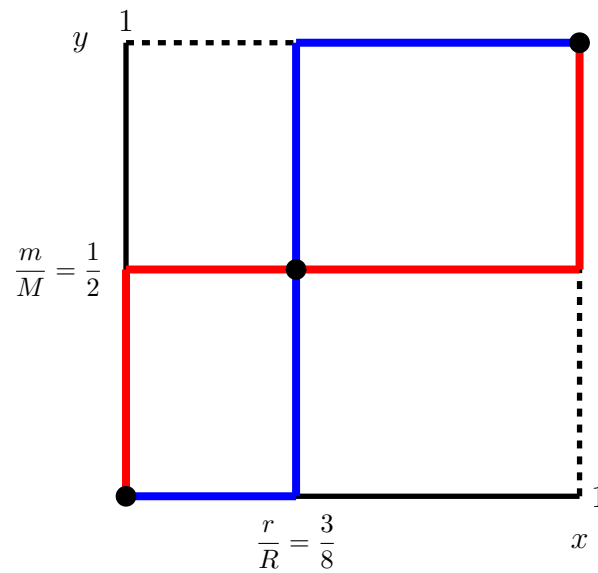


Figura 2.6: Conjuntos solución de las matrices A y B .

Los equilibrios de Nash están en los puntos $(0, 0)$, $(\frac{3}{8}, \frac{1}{2})$ y $(1, 1)$.

El algoritmo para calcular las mejores respuestas del jugador 1, que es el mismo que para el jugador 2, se muestra a continuación.

Algorithm 2 Algoritmo para determinar las mejores respuestas del Jugador I

```

1: ENTRADA: Matriz de pagos  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 
2: Calcular  $M \leftarrow a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$ 
3: Calcular  $m \leftarrow a_{22} - a_{12}$ 
4: if  $M = 0$  then
5:   if  $m = 0$  then
6:     Imprimir "Cualquier estrategia mixta es una mejor respuesta"
7:   else if  $m > 0$  then
8:     Imprimir "Mejor respuesta:  $x = 0$ "
9:   else
10:    Imprimir "Mejor respuesta:  $x = 1$ "
11:  end if
12: else if  $M > 0$  then
13:   if  $m < 0$  then
14:    Imprimir "Mejor respuesta:  $x = 1, y \in [0, 1]$ "
15:   else if  $m > M$  then
16:    Imprimir "Mejor respuesta:  $x = 0, y \leq \frac{m}{M}$ "
17:   else
18:    Imprimir "Mejor respuesta:  $x \in (0, 1), y = \frac{m}{M}$ "
19:   end if
20: else ▷  $M < 0$ 
21:   if  $m > 0$  then
22:    Imprimir "Mejor respuesta:  $x = 0, y \geq \frac{m}{M}$ "
23:   else if  $m < M$  then
24:    Imprimir "Mejor respuesta:  $x = 1, y \leq \frac{m}{M}$ "
25:   else
26:    Imprimir "Mejor respuesta:  $x \in (0, 1), y = \frac{m}{M}$ "
27:   end if
28: end if

```

Este es el código en Python:

```

def mejores_respuestas(a11, a12, a21, a22):
    M = a11 - a12 - a21 + a22
    m = a22 - a12

    print(f"M = {M}, m = {m}")

    if M == 0:
        if m == 0:
            return "Cualquier estrategia mixta es una mejor respuesta($x \in [0,1], y \in [0,1])$"
        elif m > 0:
            return "Mejor respuesta: x = 0 (jugador I juega pura primera fila)"
        else:
            return "Mejor respuesta: x = 1 (jugador I juega pura segunda fila)"
    elif M > 0:
        if m < 0:
            return "Mejor respuesta: $x = 1, y \in [0,1]$"
        elif m > M:
            return f"Mejor respuesta: $x = 0, y \leq {m/M:.2f} $"
        else:

```

```

return f"Mejor respuesta: $x \in (0,1), y = {m/M:.2f}$"
else: # M < 0
if m > 0:
return f"Mejor respuesta: $x = 0, y \geq {m/M:.2f}$"
elif m < M:
return f"Mejor respuesta: $x = 1, y \leq {m/M:.2f}$"
else:
return f"Mejor respuesta: $x \in (0,1), y = {m/M:.2f}$"

```

2.3. Juegos de n jugadores con estrategias continuas

Ahora tenemos n jugadores y cada jugador tiene como espacio de estrategias un conjunto continuo Q_i y una función de ganancias

$$u_i : \prod_{i=1}^n Q_i \rightarrow \mathbb{R}$$

Definición 11. Un *equilibrio de Nash* para el juego, con funciones de ganancias u_i , es un vector de estrategias $(q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*) \in \prod_{i=1}^n Q_i$ tal que para cada jugador i y cada $q_i \in Q_i$ se cumple

$$u_i(q_1^*, \dots, q_{i-1}^*, q_i, q_{i+1}^*, \dots, q_n^*) \geq u_i(q_1^*, \dots, q_{i-1}^*, q_i, q_{i+1}^*, \dots, q_n^*) \quad (2.11)$$

Cuando cada conjunto Q_i es abierto y $u_i \in C^2(\prod_{i=1}^n Q_i)$, entonces un equilibrio de Nash interior se determina con los siguientes pasos:

1. Resolver el sistema de ecuaciones dado por

$$\frac{\partial u_i(q_1, q_2, \dots, q_n)}{\partial q_i} = 0$$

para cada $i = 1, \dots, n$. La solución $(q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$ es nuestro candidato a punto de equilibrio.

2. Verificar, para cada i , que q_i es el único punto estacionario de la función con regla de correspondencia

$$q \mapsto u_i(q_1^*, \dots, q_{i-1}^*, q_i, q_{i+1}^*, \dots, q_n^*)$$

3. Verificar que para cada i se cumple

$$\frac{\partial^2 u_i(q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)}{\partial q_i^2} < 0$$

Dado un juego de dos jugadores con estrategias puras $Q_1 = Q_2 = \mathbb{R}$ y funciones de ganancias dadas por

$$u_1(q_1, q_2) = q_1 q_2 - 2q_1^2 + 5q_1 - q_2 \text{ y } u_2(q_1, q_2) = -4q_2^2 + 5q_1 - 2q_2$$

Hallamos las derivadas parciales mencionadas en el criterio inmediato anterior

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = q_2 - 4q_1 + 5 \text{ y } \frac{\partial u_2}{\partial q_2} = -8q_2 - 2$$

Igualando a cero y resolviendo el sistema se tiene que la solución es $q_1 = \frac{19}{16}$ y $q_2 = -\frac{1}{4}$ y es una solución única. Dado que

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial q_1^2} = -4 < 0 \text{ y } \frac{\partial^2 u_2}{\partial q_2^2} = -8 < 0,$$

se tiene que $(q_1, q_2) = \left(\frac{19}{16}, -\frac{1}{4}\right)$ es el equilibrio de Nash.

Algorithm 3 Cálculo de equilibrio de Nash interior

- 1: **Entrada:** Funciones de ganancias $u_i : \prod_{i=1}^n Q_i \rightarrow \mathbb{R}$, con $u_i \in C^2$ y $Q_i \subseteq \mathbb{R}$ abierto.
 - 2: **Salida:** Vector de estrategias $(q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$ en equilibrio de Nash (si existe).
 - 3: **for** $i = 1$ **to** n **do**
 - 4: Calcular la derivada parcial $\frac{\partial u_i}{\partial q_i}$.
 - 5: Resolver $\frac{\partial u_i}{\partial q_i} = 0$ para obtener el candidato q_i^* .
 - 6: **end for**
 - 7: Obtener el vector candidato $(q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$.
 - 8: **for** $i = 1$ **to** n **do**
 - 9: Verificar que q_i^* es el único punto estacionario de $q_i \mapsto u_i(q_1^*, \dots, q_i, \dots, q_n^*)$.
 - 10: Verificar que $\frac{\partial^2 u_i}{\partial q_i^2}(q_1^*, \dots, q_n^*) < 0$.
 - 11: **end for**
 - 12: **if** todas las condiciones se cumplen **then**
 - 13: **return** $(q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$
 - 14: **else**
 - 15: **return** "No hay equilibrio de Nash interior único."
 - 16: **end if**
-

Código en Python:

```
import sympy as sp

# Numero de jugadores
n = 2

# Definir las variables de estrategia
q = sp.symbols('q1:%d' % (n + 1)) # q1, q2, ..., qn

# Definir funciones de utilidad de los jugadores
# Ejemplo: u1 = - (q1 - 1)**2 - (q1 - q2)**2
#           u2 = - (q2 - 2)**2 - (q1 - q2)**2
u1 = - (q[0] - 1)**2 - (q[0] - q[1])**2
u2 = - (q[1] - 2)**2 - (q[0] - q[1])**2
utilities = [u1, u2]

# Paso 1: Derivadas parciales e igualar a 0
equations = [sp.diff(utilities[i], q[i]) for i in range(n)]
solutions = sp.solve(equations, q)

# Mostrar el candidato a equilibrio
print("Candidato a equilibrio de Nash:", solutions)

# Paso 2 y 3: Verificación de unicidad y segunda derivada negativa
for i in range(n):
    # Funcion reducida en terminos de $q_i$
    ui_qi = utilities[i].subs({q[j]: solutions[q[j]] for j in range(n) if j != i})

    # Derivada primera
    du_dqi = sp.diff(ui_qi, q[i])
    critical_points = sp.solve(du_dqi, q[i])

    print(f"Jugador {i+1}: puntos criticos =", critical_points)
```

```
# Derivada segunda
d2u_dqi2 = sp.diff(ui_qi, q[i], 2).subs(q[i], solutions[q[i]])
print(f"Jugador {i+1}: segunda derivada en q_i^* =", d2u_dqi2)

if len(critical_points) != 1 or d2u_dqi2 >= 0:
    print(f"No se cumple condicion de segundo orden para el jugador {i+1}")
else:
    print(f"Condiciones verificadas para el jugador {i+1}")
```

Código en Python, más simple, del ejemplo resuelto anteriormente:

```
import sympy as sp

# Variables
q1, q2 = sp.symbols('q1 q2')

# Funciones de utilidad
u1 = q1*q2 - 2*q1**2 + 5*q1 - q2
u2 = -4*q2**2 + 5*q1 - 2*q2

# Derivadas parciales respecto a estrategias propias
du1_dq1 = sp.diff(u1, q1)
du2_dq2 = sp.diff(u2, q2)

# Sistema de ecuaciones
eq1 = sp.Eq(du1_dq1, 0)
eq2 = sp.Eq(du2_dq2, 0)

# Resolver
solution = sp.solve((eq1, eq2), (q1, q2))
print("Equilibrio de Nash interior:", solution)
```

2.4. Existencia del equilibrio de Nash

El siguiente teorema establece la existencia de un equilibrio de Nash (Vega-Redondo, 2003) [20]. La demostración se fundamenta en el teorema de Kakutani.

Teorema 2 (Del punto fijo de Kakutani). *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, compacto y convexo. Sea $F : X \rightrightarrows X$ una multifunción tal que:*

1. *Para todo $x \in X$, el conjunto $F(x)$ es no vacío, convexo y compacto;*
2. *El gráfico de F , es decir, el conjunto $Gr(F) = \{(x, y) \in X \times X : y \in F(x)\}$ es cerrado;*
3. *F es superiormente semicontinua.*

Entonces, existe al menos un punto $x^ \in X$ tal que*

$$x^* \in F(x^*).$$

Teorema 3. *Existen $X^* \in S_n$ y $Y^* \in S_m$ tales que*

$$\begin{aligned} E_1(X^*, Y^*) &= X^* A Y^* \geq E_1(X, Y^*) \\ E_2(X^*, Y^*) &= X^* B Y^* \geq E_2(X^*, Y) \end{aligned}$$

Demostración. Sean S_n y S_m los conjuntos de estrategias mixtas del jugador 1 y 2, respectivamente, y A y B sus respectivas matrices de ganancias con estrategias puras. Probaremos que se satisfacen las hipótesis del teorema de Kakutani.

El primer paso consiste en probar que el conjunto $S_n \times S_m$ es un conjunto compacto y convexo. Dado que $S_n \subseteq [0, 1]^n$ por definición, basta probar que S_n es cerrado. Consideremos una sucesión $(X_k) = (x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(n)}) \subseteq S_n$ y supongamos que converge a $\hat{X} = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$. Dado que $0 \leq x_k^{(i)} \leq 1$ y $\sum_i x_k^{(i)} = 1$ para todo k , debe cumplirse que $0 \leq x^{(i)} \leq 1$ y $\sum_i x^{(i)} = 1$ en el límite. Entonces $\hat{X} \in S_n$. Con esto queda demostrada la cerradura de S_n y por lo tanto su compacidad.

Ahora demostraremos que S_n es convexo. Sean $X = (x, 1 - x), X' = (x', 1 - x') \in S_n$ dos elementos arbitrarios y $\alpha \in [0, 1]$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha X + (1 - \alpha)X' &= \alpha(x, 1 - x) + (1 - \alpha)(x', 1 - x') \\ &= (\alpha x, \alpha(1 - x)) + ((1 - \alpha)x', (1 - \alpha)(1 - x')) \\ &= (\alpha x + (1 - \alpha)x', \alpha(1 - x) + (1 - \alpha)(1 - x')) \\ &= (\alpha x + (1 - \alpha)x', \alpha - \alpha x + 1 - x' - \alpha + \alpha x') \\ &= (\alpha x + (1 - \alpha)x', 1 - [\alpha x + (1 - \alpha)x']) \in S_n. \end{aligned}$$

Entonces las combinaciones convexas de probabilidades siguen siendo vectores de probabilidad. De manera similar se demuestra que S_m es convexo.

Además, el producto cartesiano de dos conjuntos compactos es compacto y el de dos convexos es convexo, por lo tanto $S_n \times S_m$ es un conjunto compacto y convexo.

La función $E_1(X, Y)$, con Y fijo, es continua en el conjunto compacto $S_n \times S_m$, por lo tanto alcanza su máximo en dicho conjunto. De aquí se deduce que $MR_1(Y) \neq \emptyset$. De manera similar, la función $E_2(X, Y)$, con X fijo, es continua en $S_n \times S_m$, por lo tanto se tiene que $MR_2(X) \neq \emptyset$. El argumento anterior nos permite definir la multifunción

$$\phi : S_n \times S_m \rightarrow \mathcal{P}(S_n \times S_m) \quad (2.12)$$

dada por $\phi(X, Y) = MR_1(Y) \times MR_2(X)$. Ahora probaremos que esta multifunción satisface las hipótesis del teorema de Kakutani.

La multifunción (2.12) cumple:

- Para cada $(X, Y) \in S_n \times S_m$, el conjunto $\phi(X, Y)$ es no vacío, cerrado y convexo.
- El gráfico de ϕ es cerrado, ya que las mejores respuestas varían de manera semicontinua superior respecto de las estrategias del oponente (al ser máximos de funciones continuas en conjuntos compactos).

Se probó que se satisfacen todas las hipótesis del teorema de Kakutani. Entonces existe $(X^*, Y^*) \in S_n \times S_m$ tal que

$$(X^*, Y^*) \in \phi(X^*, Y^*) = MR_1(Y^*) \times MR_2(X^*),$$

donde X^* y Y^* son mejores respuestas mutuamente. Por lo tanto

$$X^* \in MR_1(Y^*) \quad \text{y} \quad Y^* \in MR_2(X^*),$$

esto demuestra que (X^*, Y^*) es un equilibrio de Nash. □

2.5. Ejemplos de aplicaciones

En esta sección se muestran dos ejemplos clásicos de situaciones de competencia comercial que se resuelven mediante la teoría de juegos. En el primer ejemplo se determinan las cantidades óptimas de producción que maximizan el beneficio para ambas empresas, en función de los costos de producción de cada empresa, los cuales son conocidos por ambas empresas. En este mismo ejemplo se considera que la función de costo es lineal y posteriormente se extiende el análisis para funciones de costo no lineales e iguales. En el segundo ejemplo se aborda el caso cuando una de las empresas desconoce el costo de producción de la otra empresa. La relevancia de estos dos ejemplos reside en la utilidad de la teoría de juegos en situaciones comerciales.

2.5.1. Duopolio de Cournot

Dos empresas 1, 2 producen $q_1, q_2 \geq 0$ cantidades del mismo producto, respectivamente. La cantidad total producida es $q = q_1 + q_2$. Sea Γ el precio máximo al que se puede vender el artículo.

El precio de oferta está determinado por la función dada por

$$P(q) = (\Gamma - q)^+ = \begin{cases} \Gamma - q & \text{si } 0 \leq q \leq \Gamma \\ q & \text{si } q > \Gamma \end{cases} \quad (2.13)$$

Sea c_i el costo por unidad para la firma i y $c_i q_i$ el costo de producción. Se asume que $c_1 + c_2 < \Gamma$, pues no tiene caso producir más allá del precio máximo de demanda. Las funciones de ganancias están dadas por

$$\begin{aligned} u_1(q_1 + q_2) &= P(q_1 + q_2)q_1 - c_1 q_1 \\ u_2(q_1 + q_2) &= P(q_1 + q_2)q_2 - c_2 q_2 \end{aligned}$$

Asumiendo $P(q_1 + q_2) \in (0, \Gamma)$, calculamos las derivadas parciales para calcular las ganancias óptimas

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} &= -2q_1 - q_2 + \Gamma - c_1 \\ \frac{\partial u_2(q_1, q_2)}{\partial q_1} &= -2q_2 - q_1 + \Gamma - c_2 \end{aligned}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -2q_1 - q_2 + \Gamma - c_1 &= 0 \\ -2q_2 - q_1 + \Gamma - c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Las soluciones óptimas están dadas por

$$\begin{aligned} q_1^* &= \frac{\Gamma + c_2 - 2c_1}{3} \\ q_2^* &= \frac{\Gamma + c_1 - 2c_2}{3} \end{aligned}$$

Notemos que $0 < q_1, q_2 < \Gamma$ y que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_1^2} &= -2 \\ \frac{\partial^2 u_2(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_2^2} &= -2 \end{aligned}$$

Entonces (q_1^*, q_2^*) maximiza las ganancias de ambos jugadores al precio de oferta

$$\begin{aligned} P(q^*) &= P(q_1^* + q_2^*) \\ &= P\left(\frac{2\Gamma - c_1 - c_2}{3}\right) \\ &= \Gamma - \frac{2\Gamma - c_1 - c_2}{3} \\ &= \frac{\Gamma + c_1 + c_2}{3} \end{aligned}$$

Este problema halla el equilibrio cuando las funciones de precios son lineales, el siguiente teorema extiende el proceso cuando las funciones de costo son no lineales, pero iguales.

Teorema 4. Sea $P = D(q)$ una función no creciente, dos veces diferenciable y cóncava en el intervalo $0 \leq q \leq \Gamma$ y además

$$D(0) > 0 \text{ y } D(q) = 0, q \geq \Gamma.$$

Sea $M_i \geq \Gamma$ es la cantidad que la empresa i tiene disponibles para venta.

Sea C , la función de costos, una función dos veces diferenciable, estrictamente creciente, no negativa, convexa y $C'(0) < D(0)$. Las funciones de ganancias están dadas por

$$\begin{aligned} u_1(q_1, q_2) &= q_1 D(q_1 + q_2) - C(q_1) \\ u_2(q_1, q_2) &= q_2 D(q_1 + q_2) - C(q_2) \end{aligned}$$

Entonces existe uno y sólo un equilibrio de Nash (q^*, q^*) , con $q^* \in [0, \Gamma]$ la única solución de la ecuación

$$\begin{aligned} D(2q) + 2D'(2q) - C'(q) &= 0 \\ q &\in \left(0, \frac{\Gamma}{2}\right). \end{aligned}$$

Demostración: las condiciones de D y C garantizan la existencia de un equilibrio de Nash (q_1^*, q_2^*) y que $0 < q_1^* + q_2^* < \Gamma$. Calculamos las derivadas parciales y las igualamos a cero

$$\frac{\partial u_1(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_1} = D(q_1^* + q_2^*) + q_1 D'(q_1^* + q_2^*) - C'(q_1^*) = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial u_2(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_2} = D(q_1^* + q_2^*) + q_2 D'(q_1^* + q_2^*) - C'(q_2^*) = 0 \quad (2.15)$$

Restando la ecuación (2.15) a la ecuación (2.14), se obtiene

$$(q_1^* - q_2^*)D'(q_1^* + q_2^*) - (C'(q_1^*) - C'(q_2^*)) = 0 \quad (2.16)$$

Tenemos que $C''(q) \geq 0$, esto significa que C' es creciente; además $D' < 0$. Si $q_1^* < q_2^*$, entonces la ecuación (2.16) es negativa. De manera similar, si $q_1^* > q_2^*$, entonces la ecuación (2.16) es positiva. Entonces se cumple que $q_1^* = q_2^* = q^*$. Sustituyendo en (2.14), tenemos que

$$D(2q^*) + q^* D'(q^*) - C'(q^*) = 0, \quad q^* \in \left(0, \frac{\Gamma}{2}\right).$$

Calculamos la segunda derivada

$$\frac{\partial^2 u_2(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_2^2} = 3D'(2q^*) + q^* D''(2q^*) - C''(q^*) < 0$$

Por lo tanto (q^*, q^*) es el único equilibrio de Nash.

Costos inciertos y modelo de Cournot En esta situación, dos empresas fabrican un producto con un costo fijo por unidad, pero ambas empresas conocen el costo de producción c_1 de la primera, aunque sólo la segunda conoce su costo de producción c_2 . Para la primera empresa, el costo c_2 es una variable aleatoria C_2 que considera que tiene función de distribución dada por

$$P(C_2 = c_2^+) = p \text{ y } P(C_2 = c_2^-) = 1 - p$$

para $p \in (0, 1)$. La cantidad de productos de la primera empresa es q_1 y para la segunda empresa es q_2 . Entonces la función de ganancias de la empresa 1 está dada por

$$u_1(q_1, q_2) = q_1[P(q_1 + q_2) - c_1]. \quad (2.17)$$

Mientras que para la segunda empresa su función de ganancias está dada por

$$u_2(q_1, q_2) = q_2[P(q_1 + q_2) - C_2]. \quad (2.18)$$

Donde $P(q_1 + q_2)$ es el precio de mercado en función de la producción conjunta. Para la segunda empresa, la ecuación (2.18) es una variable aleatoria, por lo que se requiere una estrategia adecuada para su solución.

Paso 1 Calcular la producción óptima de la segunda empresa, en función de los costos c^+ y c^- , y obteniendo q_2^+ y q_2^- .

Sean Γ el precio máximo de mercado y $P(q) = \Gamma - q$, $0 \leq q \leq \Gamma$ la función de precio. La segunda empresa tiene los siguientes costos de producción con sus respectivas probabilidades:

Costo	Probabilidad
$c^+ q_2$	p
$c^- q_2$	$1 - p$

El objetivo es maximizar las ecuaciones (2.17) y (2.18) para q_2 , en función de c^+ y c^- .

$$\max_{q_2} q_2(\Gamma - (q_1 + q_2) - c^+)$$

$$\max_{q_2} q_2(\Gamma - (q_1 + q_2) - c^-)$$

Derivando con respecto a q_2 e igualando a cero, se obtienen las soluciones respectivas.

$$q_2^+ = \frac{\Gamma - q_1 - c^+}{2} \quad (2.19)$$

$$q_2^- = \frac{\Gamma - q_1 - c^-}{2} \quad (2.20)$$

Se asume que la cantidad de productos q_1 es conocida.

Paso 2 Se calcula la ganancia esperada para la primera empresa.

$$G(q_1) = q_1 [(\Gamma - (q_1 + q_2^+) - c_1)p + (\Gamma - (q_1 + q_2^-) - c_1)(1 - p)]$$

El objetivo es hallar el valor q_1^* que satisface $\max_{q_1} G(q_1)$. Se deriva la función G con respecto a q_1 .

$$\begin{aligned}
 G'(q_1) &= [(\Gamma - (q_1 + q_2^+) - c_1)p + (\Gamma - (q_1 + q_2^-) - c_1)(1-p)] + q_1 [(-1)p + (-1)(1-p)] \\
 &= [\Gamma p - (q_1 + q_2^+)p - c_1 p + \Gamma(1-p) - (q_1 + q_2^-)(1-p) - c_1(1-p)] + q_1(-p - (1-p)) \\
 &= \Gamma p + \Gamma(1-p) - (q_1 + q_2^+)p - (q_1 + q_2^-)(1-p) - c_1 p - c_1(1-p) - q_1 \\
 &= \Gamma(p+1-p) - (q_1 + q_2^+)p - (q_1 + q_2^-)(1-p) - c_1(p+1-p) - q_1 \\
 &= \Gamma - (q_1 + q_2^+)p - (q_1 + q_2^-)(1-p) - c_1 - q_1 \\
 &= \Gamma - q_1 p - q_2^+ p - q_1(1-p) + q_2^-(1-p) - c_1 - q_1 \\
 &= \Gamma - q_2^+ p + q_2^-(1-p) - c_1 - \underbrace{q_1(p + (1-p) + 1)}_{=2q_1} \\
 &= \Gamma - q_2^+ p + q_2^-(1-p) - c_1 - 2q_1.
 \end{aligned}$$

Se iguala el resultado a cero,

$$\Gamma - q_2^+ p + q_2^-(1-p) - c_1 - 2q_1 = 0.$$

Resolviendo se obtiene

$$q_1 = \frac{\Gamma - q_2^+ p + q_2^-(1-p) - c_1}{2}. \quad (2.21)$$

Paso 3 De las ecuaciones (2.19) y (2.21) se establece el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}
 q_2^+ &= \frac{\Gamma - q_1 - c^+}{2} \\
 q_2^- &= \frac{\Gamma - q_1 - c^-}{2} \\
 q_1 &= \frac{\Gamma - q_2^+ p + q_2^-(1-p) - c_1}{2}
 \end{aligned}$$

Se resuelve el sistema para q_1, q_2^+ y q_2^- .

$$\begin{aligned}
 q_2^+ &= \frac{\Gamma - q_1 - c^+}{2} \\
 q_2^- &= \frac{\Gamma - q_1 - c^-}{2} \\
 q_1 &= \frac{\Gamma - q_2^+ p + q_2^-(1-p) - c_1}{2}
 \end{aligned}$$

Sustituimos q_2^+ y q_2^- en la última ecuación para q_1 :

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \frac{\Gamma - p \left(\frac{\Gamma - q_1 - c^+}{2} \right) + (1-p) \left(\frac{\Gamma - q_1 - c^-}{2} \right) - c_1}{2} \\
 2q_1 &= \Gamma - \frac{p(\Gamma - q_1 - c^+)}{2} + \frac{(1-p)(\Gamma - q_1 - c^-)}{2} - c_1 \\
 4q_1 &= 2\Gamma - p(\Gamma - q_1 - c^+) + (1-p)(\Gamma - q_1 - c^-) - 2c_1 \\
 &= 2\Gamma - p\Gamma + pq_1 + pc^+ + (1-p)\Gamma - (1-p)q_1 - (1-p)c^- - 2c_1 \\
 &= (3-2p)\Gamma + (2p-1)q_1 + pc^+ - (1-p)c^- - 2c_1.
 \end{aligned}$$

Reordenamos y despejamos q_1 :

$$\begin{aligned} 4q_1 - (2p - 1)q_1 &= (3 - 2p)\Gamma + pc^+ - (1 - p)c^- - 2c_1 \\ (5 - 2p)q_1 &= (3 - 2p)\Gamma + pc^+ - (1 - p)c^- - 2c_1 \\ q_1 &= \frac{(3 - 2p)\Gamma + pc^+ - (1 - p)c^- - 2c_1}{5 - 2p}. \end{aligned}$$

Sustituimos q_1 en las expresiones de q_2^+ y q_2^- :

$$\begin{aligned} q_2^+ &= \frac{\Gamma - q_1 - c^+}{2} \\ q_2^- &= \frac{\Gamma - q_1 - c^-}{2}. \end{aligned}$$

Se obtiene la solución.

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{(3 - 2p)\Gamma + pc^+ - (1 - p)c^- - 2c_1}{5 - 2p} \\ q_2^+ &= \frac{\Gamma - q_1 - c^+}{2} \\ q_2^- &= \frac{\Gamma - q_1 - c^-}{2}. \end{aligned}$$

Reescribimos la solución.

Simplificación de q_1

Multiplicamos numerador y denominador por $\frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{(3 - 2p)\Gamma + pc^+ - (1 - p)c^- - 2c_1}{\frac{5-2p}{3}} \\ &= \frac{1}{3} [\Gamma - 2c_1 + pc^+ + (1 - p)c^-] = q_1^*. \end{aligned}$$

Sustitución en q_2^+

$$\begin{aligned} q_2^+ &= \frac{\Gamma - q_1 - c^+}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\Gamma - \left(\frac{1}{3} (\Gamma - 2c_1 + pc^+ + (1 - p)c^-) \right) - c^+ \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\Gamma - \frac{1}{3}\Gamma + \frac{2}{3}c_1 - \frac{1}{3}pc^+ - \frac{1}{3}(1 - p)c^- - c^+ \right] \\ &= \frac{1}{3}\Gamma + \frac{1}{3}c_1 - \frac{1}{6}pc^+ - \frac{1}{6}(1 - p)c^- - \frac{1}{2}c^+ \\ &= \frac{1}{3}(\Gamma + c_1) - \frac{1}{6}[(1 - p)c^- + pc^+] - \frac{1}{2}c^+ = q_2^{+*}. \end{aligned}$$

Sustitución en q_2^-

$$\begin{aligned}
 q_2^- &= \frac{\Gamma - q_1 - c^-}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\Gamma - \left(\frac{1}{3} (\Gamma - 2c_1 + pc^+ + (1-p)c^-) \right) - c^- \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\Gamma - \frac{1}{3}\Gamma + \frac{2}{3}c_1 - \frac{1}{3}pc^+ - \frac{1}{3}(1-p)c^- - c^- \right] \\
 &= \frac{1}{3}\Gamma + \frac{1}{3}c_1 - \frac{1}{6}pc^+ - \frac{1}{6}(1-p)c^- - \frac{1}{2}c^- \\
 &= \frac{1}{3}(\Gamma - 2c^- + c_1) + \frac{1}{6}p(c^- - c^+) = q_2^{-*}.
 \end{aligned}$$

Ahora se muestra la misma solución, pero escrita de forma distinta.

$$\begin{aligned}
 q_1^* &= \frac{1}{3} [\Gamma - 2c_1 + pc^+ + (1-p)c^-] \\
 q_2^{+*} &= \frac{1}{3} [\Gamma + c_1] - \frac{1}{6} [(1-p)c^- + pc^+] - \frac{1}{2}c^+ \\
 q_2^{-*} &= \frac{1}{3} [\Gamma - 2c^- + c_1] + \frac{1}{6}p(c^- - c^+)
 \end{aligned}$$

Esta es la producción óptima siempre que la producción sea no negativa.

2.6. Juegos bayesianos

Los juegos bayesianos ocurren cuando un jugador conoce y mantiene en privado su propia valoración, pero desconoce al menos una valoración de otro jugador. Sin embargo, asume una creencia acerca de las valoraciones de ese jugador.

Dilema del prisionero Como ejemplo introductorio se muestra un escenario que es una modificación del dilema del prisionero definido en la página 8 y resuelto en la página 12. En este escenario hay incertidumbre del primer prisionero acerca de la función de pagos del segundo prisionero.

1. Descripción general

Este juego modela el dilema del prisionero como un juego bayesiano estático con información incompleta:

- El **prisionero 1** conoce su propia función de pagos.
- El **prisionero 1** desconoce la función de pagos del **prisionero 2**, pero tiene la siguiente creencia sobre dicha función:
 - Tipo solidario con probabilidad $p = \frac{2}{3}$
 - Tipo individualista con probabilidad $1 - p = \frac{1}{3}$
- El **prisionero 2** conoce tanto su tipo como la función de pagos de ambos prisioneros.

2. Representaciones bimatriciales

a) *Tipo solidario del prisionero 2 (probabilidad $p = \frac{2}{3}$)*

		J2 (solidario)	
		C	D
J1	C	3, 3	0, 5
	D	5, 0	1, 1

b) Tipo individualista del prisionero 2 (probabilidad $\frac{1}{3}$)

		J2 (individualista)	
		C	D
J1	C	3, 4	0, 6
	D	5, 1	1, 2

3. Matriz de pagos esperados (según el prisionero 1)

Dado $p = \frac{2}{3}$, la utilidad esperada para el prisionero 2 en cada celda es:

$$\mathbb{E}[b_{ij}] = \frac{2}{3} \cdot b_{ij}^{(A)} + \frac{1}{3} \cdot b_{ij}^{(S)}$$

Entonces, la matriz esperada es:

		J2 (esperado)	
		C	D
J1	C	$3, \frac{2}{3}(3) + \frac{1}{3}(4) = 3.3$	$0, \frac{2}{3}(5) + \frac{1}{3}(6) = 5.3$
	D	$5, \frac{2}{3}(0) + \frac{1}{3}(1) = \frac{1}{3}$	$1, \frac{2}{3}(1) + \frac{1}{3}(2) = \frac{4}{3}$

4. Matriz esperada simplificada

		J2 (esperado)	
		C	D
J1	C	3, 3.3	0, 5.3
	D	$5, \frac{1}{3}$	$1, \frac{4}{3}$

5. Conclusión

Ambos tipos del prisionero 2 prefieren delatar:

- En sus respectivas matrices, la acción D domina a C .
- Por lo tanto, el prisionero 1 anticipa que el prisionero 2 jugará D con probabilidad 1.

Dado esto, el prisionero 1 compara:

$$u_1(C, D) = 0 \quad \text{vs} \quad u_1(D, D) = 1 \quad \Rightarrow \text{prefiere } D$$

Equilibrio bayesiano: ambos prisioneros eligen D . **Resultado:** $(1, \frac{4}{3})$

A continuación, se define matemáticamente el concepto de juego bayesiano.

Definición 12. Un **juego bayesiano** es un juego con información incompleta, es decir, no se tienen algunos de los elementos de la estructura de un juego de información completa y se introduce el azar como un jugador.

En esta tesis se utilizan juegos bayesianos estáticos, debido a que las subastas son a sobre cerrado.

Definición 13 (Juego bayesiano estático). *Un juego bayesiano estático de n jugadores se compone por los siguientes elementos:*

1. **Espacios de acciones** de los jugadores A_1, \dots, A_n ,
2. **Espacios de tipos** T_1, \dots, T_n ; cada $t_{ij} \in T_i$ es una variable aleatoria.
3. **Distribuciones de probabilidad condicionadas** (conjeturas) $p_i : \prod_{k=1}^n T_k \rightarrow [0, 1]$ y $p_i(t_{-i}|t_i)$
4. **Funciones de ganancias** $u_i : \prod_{k=1}^n A_k \times \prod_{k=1}^n T_k \rightarrow \mathbb{R}$.
5. **Funciones de estrategias** para el jugador i : $s : T_i \rightarrow A_i$.

Otras condiciones adicionales para un juego bayesiano estático se enuncian a continuación:

- Sólo el jugador i conoce el tipo t_i del jugador i , este tipo determina la función de ganancias del jugador i , $u_i(a_1, \dots, a_n; t_i)$, y es un elemento del conjunto de tipos T_i .
- La conjetura del jugador i , $p_i(t_{-i}|t_i)$, describe la incertidumbre de i respecto a los posibles tipos de los otros $n - 1$ jugadores, t_{-i} , dado el propio tipo de i , t_i .

Denotamos a este juego como $G = \{A_1, \dots, A_n, T_1, \dots, T_n; p_1, \dots, p_n; u_1, \dots, u_n\}$.

Definición 14. *Para el juego $G = \{A_1, \dots, A_n, T_1, \dots, T_n; p_1, \dots, p_n; u_1, \dots, u_n\}$, una estrategia para el jugador i es una función $s_i(t_i)$, la cual para cada tipo $t_i \in T_i$, determina la acción del conjunto factible A_i que el tipo i elegiría si el azar determinara que el jugador es de este tipo. Así, se tiene que las estrategias $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ constituyen un **equilibrio bayesiano de Nash** si para cada jugador i y para cada uno de sus tipos t_i en T_i , $s_i^*(t_i)$ una solución de*

$$\max_{a_i \in A_i} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} u_i(s_1^*(t_1), \dots, s_{i-1}^*(t_{i-1}), a_i, s_{i+1}^*(t_{i+1}), \dots, s_n^*(t_n); t) p_i(t_{-i}|t_i) \quad (2.22)$$

Ningún jugador quiere cambiar su estrategia, incluso cuando el cambio supone cambiar una acción para un tipo.

Teorema 5 (Teorema de existencia de EBN). *Dado G un juego bayesiano finito, es decir, n es finito, A_1, \dots, A_n y T_1, \dots, T_n son finitos, entonces G tiene un equilibrio de Nash (Cerdá, 2004, pág. 307) [5].*

A continuación se muestra un ejemplo de la aplicación del teorema 5 a una subasta.

Subasta en sobre cerrado al segundo precio. En la subasta de un bien a sobre cerrado al segundo precio, hay n jugadores cuyos pagos individuales son iguales a los beneficios esperados netos. El conjunto de tipos T_i de cada jugador i corresponde a los valores del objeto v_i . Cada jugador conoce su conjunto de tipos y desconoce el conjunto de los otros jugadores, pero supone que los tipos de los otros jugadores son variables aleatorias uniformes, independientes e idénticamente distribuidas en el intervalo $[0, v]$ con distribución de probabilidad p_i . Con esto se asume que cada jugador tiene conocimiento de las condiciones de la subasta. Las pujas $b_i > 0$ del jugador i constituyen el conjunto $A_i = S_i = [0, \infty)$ de acciones (o estrategias). El pago de cada jugador viene dado por la diferencia entre la utilidad y la cantidad pagada, se expresa de la manera siguiente

$$u_i(b_i, \mathbf{b}_{-i}, v_i, \mathbf{v}_{-i}) = \begin{cases} v_i - \max_{j \neq i} b_j & \text{si } b_i > \max_{j \neq i} b_j \\ 0 & \text{si } b_i < \max_{j \neq i} b_j \end{cases}$$

Se tiene un juego bayesiano estático cuyo equilibrio bayesiano de estrategias dominantes será una puja que depende del tipo elegido por el mismo jugador. Demostraremos que el equilibrio bayesiano en estrategias dominantes está dado por

$$\{(b_1^*(v_1), \dots, b_n^*(v_n))\} = \{(v_1, \dots, v_n)\}$$

Para mostrar que $b_i^*(v_i) = v_i$ es una estrategia dominante débilmente para el jugador i , se supondrá que cada jugador realiza una puja por el objeto. Definamos $\bar{b} = \max_{j \neq i} b_j$ para el jugador i . Si el mismo jugador i hace la puja $b_i^*(v_1)$, su pago está dado por

$$u_i(\bar{b}, \mathbf{b}_{-i}, v_i, \mathbf{v}_{-i}) = \begin{cases} v_i - \bar{b} & \text{si } b_i > \bar{b}, \text{ ganando la subasta} \\ 0 & \text{si } b_i < \bar{b}, \text{ perdiendo la subasta} \end{cases}$$

Si el jugador i oferta $b_i(v_i) = v_i$ para $v_i > \bar{b} > 0$, y gana la subasta. De hecho, si puja $b'_i(v_i) > v_i$ mantiene su estado ganador y su pago. Consideremos el caso contrario, es decir, que pierde la subasta al pujar $b_i(v_i) = v_i$ con $\bar{b} > v_i$; en esta situación recibe un pago de cero. Lo mismo ocurre para cualquier otro valor $v_i < b_i(v_i) < \bar{b}$. Puede darse el caso que gane la subasta si su pago es $b'_i(v_i) = v_i > \bar{b}$, pero $v_i - \bar{b} = 0$, es decir, no obtiene utilidades por la puja, estaría perdiendo. Esto significa que $b_i(v_i) = v_i$ domina débilmente a la estrategia $b'_i(v_i) > v_i$.

Otro caso a analizar es cuando $b'_i(v_i) < v_i$. Nuevamente, si el jugador i puja $b_i(v_i) = v_i$, gana la subasta ya que $\bar{b} < v_i$, su utilidad es $v_i - \bar{b} > 0$. Para cualquier otra puja $v_i < b'_i v_i < v_i$, se mantiene como ganador de la subasta. Para una puja $b'_i(v_i) < \bar{b} < v_i$, pierde la subasta con una utilidad $v_i - \bar{b} = 0$. El último caso a considerar es que con la puja $b_i(v_i) = v_i$ pierde la subasta si $\bar{b} > v_i$ con utilidad negativa. Con otra puja $b'_i(v_i) < v_i$, aún pierde la subasta. Así, la estrategia $b_i(v_i) = v_i$ domina débilmente a la estrategia $b'_i(v_i) < v_i$.

Con estos argumentos queda demostrado que para cualquier jugador i y cualquier estrategia $b_i(v_i) \neq v_i$ se tiene que $u_i(v_i, \mathbf{b}_{-i}; v_i, \mathbf{v}_{-i}) \geq u_i(b_i(v_i), \mathbf{b}_{-i}; v_i, \mathbf{v}_{-i})$.

Para dos jugadores cuyos tipos son variables aleatorias idénticas y uniformemente distribuidas, se demuestra que revelar la valoración es una estrategia dominante para ambos. Veamos que así es, si $b_2(v_2) = v_2$ es la estrategia del jugador 2, el jugador puede jugar la estrategia y ganar si elige $b > b_2(v_2)$ con una utilidad $v_1 - v_2$, ya que $v_2 < b$. El pago esperado para el jugador 1 está dado por

$$\int_0^b (v_1 - v_2) f(v_2) dv_2 = \int_0^b (v_1 - v_2) dv_2 = bv_1 - \frac{1}{2}b^2$$

cuyo valor máximo se alcanza en $b = v_1$.

A partir de este análisis podemos concluir que una estrategia dominante es una oferta cuyo valor es igual a la valoración del bien subastado, debido a que aumentar la puja no incrementa las probabilidades de ganar la subasta como en el caso de la subasta al primer precio. En la subasta a sobre cerrado al segundo precio es preferible revelar la valoración del objeto.

Otro ejemplo, pero aplicado al desarrollo de obra pública. **Suministro de una infraestructura pública.**

Dos empresas 1 y 2 se ubican contiguas y necesitan una carretera nueva para recibir insumos y enviar sus productos. El gobierno local construirá la carretera si al menos una de las empresas decide contribuir a su financiamiento, pero las empresas debe decidir de manera simultánea. Las opciones para ambas empresas son contribuir (C) o no contribuir (N) en la construcción de la carretera. Esto significa que las empresas tienen como espacio de acciones a $\mathcal{A}_i = \{C, N\}$, y como la decisión debe ser simultánea, entonces $\mathcal{A}_i = \mathcal{S}_i$. La carretera se construirá si al menos una de las dos empresas decide cooperar. Cada empresa tiene una valoración de la nueva carretera de 1 millón de pesos. La carretera tiene un costo de c_1 para la empresa 1, pero para el jugador 2 tiene dos opciones \bar{c}_2 o \underline{c}_2 con $\bar{c}_2 > \underline{c}_2$. Se tienen las siguientes condiciones:

- Cada jugador conoce sus costos de financiamiento.
- El jugador 2 conoce el costo de financiamiento del jugador 1.
- El jugador 1 no conoce el costo de financiamiento del jugador 2, pero sabe que la probabilidad de \bar{c}_2 es de $\frac{2}{3}$ y la de \underline{c}_2 es de $\frac{1}{3}$.

Los elementos antes descritos muestran que estamos ante un juego bayesiano cuyas matrices de pago se muestran a continuación:

	C	N
C	$1 - c_1, 1 - \bar{c}_2$	$1 - c_1, 1$
N	$1, 1 - \bar{c}_2$	$0, 0$

Tabla 2.3: El jugador 2 elige \bar{c}_2

	C	N
C	$1 - c_1, 1 - \underline{c}_2$	$1 - c_1, 1$
N	$1, 1 - \underline{c}_2$	$0, 0$

Tabla 2.4: El jugador 2 elige \underline{c}_2

Si el jugador 1 elige C con probabilidad α y elige N con probabilidad $1 - \alpha$, entonces el pago esperado para el jugador 2 al costo \bar{c}_2 , cuando elige C , está dado por

$$E[u_2(C, \alpha | \bar{c}_2)] = \alpha(1 - \bar{c}_2) + (1 - \alpha)(1 - \bar{c}_2) = 1 - \bar{c}_2, \quad (2.23)$$

pero si elige N , entonces el pago esperado está dado por

$$E[u_2(N, \alpha | \bar{c}_2)] = \alpha(1) + (1 - \alpha)(0) = \alpha \quad (2.24)$$

A partir de las ecuaciones (2.23) y (2.24) se obtiene la mejor respuesta para el jugador 2 al costo \bar{c}_2

$$MR_2(\alpha, \bar{c}_2) = \begin{cases} C & \text{si } \bar{c}_2 \leq 1 - \alpha \\ N & \text{si } \bar{c}_2 > 1 - \alpha \end{cases} \quad (2.25)$$

El pago esperado del jugador 2 para el tipo \underline{c}_2 y eligiendo C está dado por

$$E[u_2(C, \alpha | \underline{c}_2)] = \alpha(1 - \underline{c}_2) + (1 - \alpha)(1 - \underline{c}_2) = 1 - \underline{c}_2 \quad (2.26)$$

Si elige N , la ganancia es

$$E[u_2(N, \alpha | \underline{c}_2)] = \alpha(1) + (1 - \alpha)(0) = \alpha \quad (2.27)$$

Entonces la mejor respuesta para el jugador 2 con el tipo \underline{c}_2 es la siguiente

$$MR_2(\alpha, \underline{c}_2) = \begin{cases} C & \text{si } \underline{c}_2 \leq 1 - \alpha \\ N & \text{si } \underline{c}_2 > 1 - \alpha \end{cases} \quad (2.28)$$

Por otro lado, si el jugador 2 elige C con una probabilidad α para el tipo \bar{c}_2 y con probabilidad β para el tipo \underline{c}_2 . Tenemos que el pago esperado para el jugador 1, si elige C , está dado por

$$E[u_1(C, \alpha, \beta)] = \frac{2}{3}\alpha(1 - c_1) + \frac{1}{3}\beta(1 - c_1) + \frac{2}{3}(1 - \alpha)(1 - c_1) + \frac{1}{3}(1 - \beta)(1 - c_1) = 1 - c_1, \quad (2.29)$$

Si elige N , el pago esperado para el jugador 1 es

$$E[u_1(N, \alpha, \beta)] = \frac{2\alpha + \beta}{3} \quad (2.30)$$

De las expresiones (2.29) y (2.30) obtenemos que la mejor respuesta para el jugador 1 está dado por

$$MR_1(\alpha, \beta) = \begin{cases} C & \text{si } c_1 \leq 1 - \frac{2\alpha + \beta}{3} \\ N & \text{si } c_1 > 1 - \frac{2\alpha + \beta}{3} \end{cases} \quad (2.31)$$

Capítulo 3

Modelos aplicados a subastas

En este capítulo se modelan subastas simples mediante la teoría de juegos para determinar el equilibrio de Nash. También se modela una subasta de la plataforma eBay mediante juegos bayesianos. Se determina el equilibrio de Nash con el objetivo de incrementar las posibilidades y ganancias de un postor. Para modelar una subasta como un juego bayesiano es necesario identificar los elementos correspondientes: estrategias y sus probabilidades, valoraciones y funciones de pagos.

3.1. Subastas simples

Se revisan algunos modelos de subastas simples desde el punto de vista del vendedor y desde el punto de vista de los compradores.

3.1.1. Estimación del precio de reserva

Para el primer caso se considera una situación de un vendedor que subasta un artículo, pero necesita un precio de reserva (garantía) r en el caso de una subasta con un único comprador, de lo contrario este único comprador puede realizar una puja con un precio bajo y ganar la subasta. ¿Cómo se determina este precio de reserva? Supongamos que un comprador tiene valoración V que es una variable aleatoria con función de distribución acumulada $F(v)$, entonces el pago esperado es

$$\begin{aligned} E[\text{pago}] &= rP[V > r] + 0 P[V \leq r] \\ &= rP[V > r] \\ &= r(1 - P[V \leq r]) \\ &= r(1 - F(r)) \end{aligned}$$

Es necesario maximizar la función dada por $g(r) = r(1 - F(r))$. Se asume que $F'(r) = f(r)$, es la función de densidad de V , entonces los valores críticos se determinan mediante la siguiente ecuación

$$g'(r) = 1 - F(r) - rf(r) = 0. \quad (3.1)$$

Se requiere un valor r^* tal que $g'(r^*) = 1 - F(r^*) - r^*f(r^*) = 0$ y $g''(r^*) = 2f(r^*) + r^*f'(r^*) < 0$. Supongamos que $V \sim N(0.4, 0.3)$, entonces el valor que maximiza la ecuación (3.1) es $r^* = 0.3881$. Este resultado se obtiene en Python mediante el siguiente código:

```
from sympy.stats import Normal, density, cdf
from sympy import Symbol, nsolve
from sympy.plotting import plot
```

```
u = Symbol("u")
X = Normal("x", 0.4, 0.3)
g = 1-cdf(X)(u)-u*density(X)(u)
a = float(nsolve(g, (0, 1), solver='bisect'))
print(a)
```

En la siguiente imagen se muestran la gráfica de la función g' y el valor crítico.

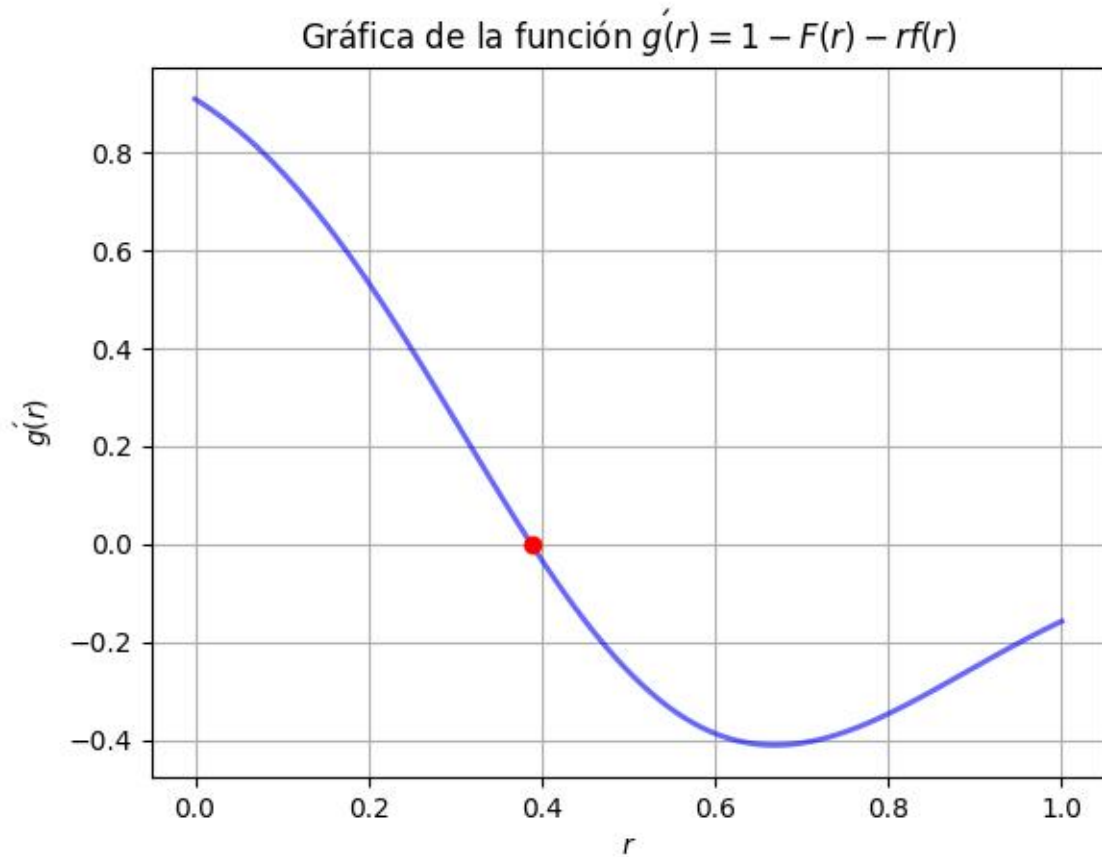


Figura 3.1: Valor crítico de la función g .

Entonces el valor máximo de reserva es 38.81 % de la valuación máxima.

3.1.2. Subasta con valoraciones uniformemente distribuidas

Consideremos una subasta con dos postores representados por el conjunto $J = \{1, 2\}$, cada uno con una **valoración** v_i que está uniformemente distribuida en $[0, V]$. Si alguno de los jugadores gana la subasta, cubre un **pago** q y obtiene un beneficio de $v_i - q$. Las ofertas son

una función lineal de las valoraciones $b_i(v_i)$ y las funciones de pagos están dadas por

$$u_j(b_j, b_k, v_j, v_k) = \begin{cases} v_j - b_j & \text{si } b_j > b_k \\ \frac{v_j - b_j}{2} & \text{si } b_j = b_k \\ 0 & \text{si } b_j < b_k \end{cases} \quad (3.2)$$

Por simplicidad, hacemos $V = 1$, $b_i(v_i) = \alpha_i + \beta_i v_i$ y en caso de empate se resuelve mediante un sorteo con probabilidad $p = \frac{1}{2}$, entonces tenemos los elementos que definen a un juego estático de información incompleta:

$$\begin{aligned} T_1 &= T_2 = [0, 1] \\ A_1 &= A_2 = [0, \alpha + \beta] \end{aligned}$$

El pago del jugador i está dado por el pago esperado que se obtiene mediante la expresión

$$(v_i - b_i)P[b_i > b_j(v_j)] + \frac{1}{2}(v_i - b_i)P[b_i = b_j(v_j)], \quad (3.3)$$

Para hallar el equilibrio bayesiano del juego, es necesario hallar la mejor respuesta del jugador i , $b_i(v_i)$, para la estrategia $b_j(v_j)$ del jugador j , es decir, resolver la expresión

$$\max_{b_i} \left[(v_i - b_i) P_1[b_i > b_j(v_j)] + \frac{1}{2}(v_i - b_i)P[b_i = b_j(v_j)] \right], \quad (3.4)$$

Tenemos que $P[b_i = b_j(v_j)] = 0$ y

$$\begin{aligned} P[b_i > b_j(v_j)] &= P[b_i > \alpha_j + \beta_j v_j] \\ &= P\left[\frac{b_i - \alpha_j}{\beta_j} > v_j\right] \\ &= \frac{b_i - \alpha_j}{\beta_j}. \end{aligned}$$

Entonces la expresión (3.4) queda simplificada como

$$\max_{b_i} \left[(v_i - b_i) \frac{b_i - \alpha_j}{\beta_j} \right]. \quad (3.5)$$

Definimos la función $g(b_i) = (v_i - b_i) \frac{b_i - \alpha_j}{\beta_j}$ y se calcula su derivada

$$\begin{aligned} g'(b_i) &= (-1) \frac{b_i - \alpha_j}{\beta_j} + (v_i - b_i) \frac{1}{\beta_j} \\ &= \frac{v_i - b_i}{\beta_j} - \frac{b_i - \alpha_j}{\beta_j} \\ &= \frac{v_i - b_i - b_i + \alpha_j}{\beta_j} \\ &= \frac{\alpha_j + v_i - 2b_i}{\beta_j}. \end{aligned}$$

Igualando a cero y resolviendo tenemos que $b_i^* = \frac{\alpha_j + v_i}{2}$ y dado que $g''(b_i) = -\frac{2}{\beta_j} < 0$, tenemos que b_i^* es un máximo para la función g .

Suponiendo una valoración máxima de 1 y un precio de reserva de 38.81 %, además la valoración debe ser positiva, la figura 3.2 muestra la relación funcional entre las valoraciones y las pujas que corresponden a un equilibrio de Nash.

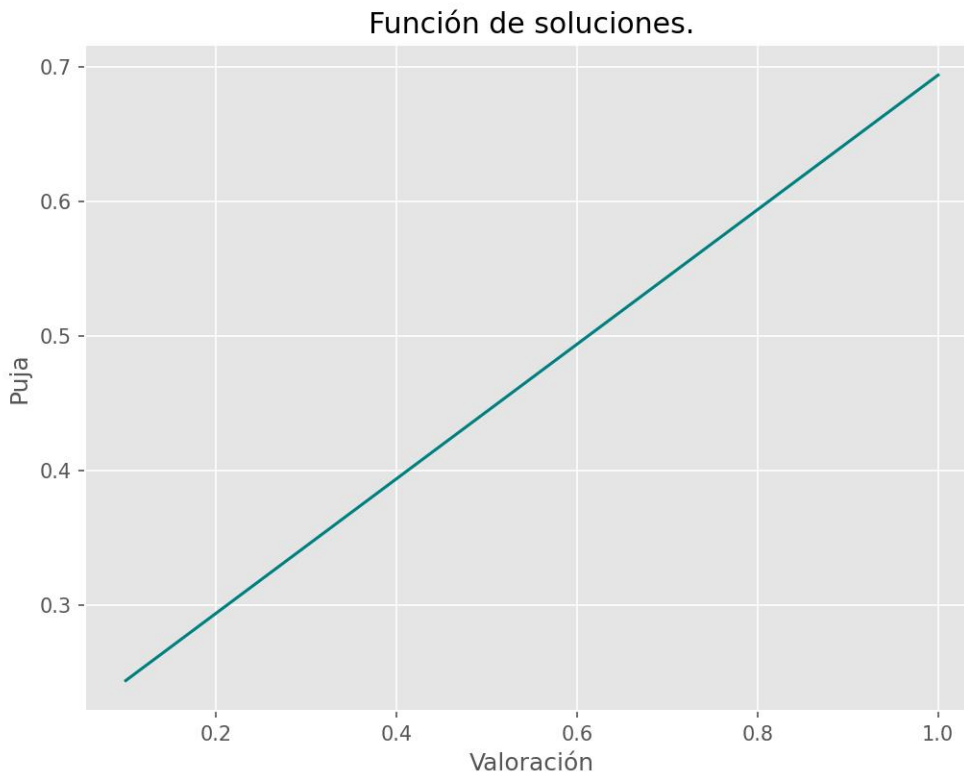


Figura 3.2: Gráfica de la relación funcional entre valoraciones y pujas.

3.2. Subasta al primer precio

Denotemos $\mathbf{b}^I \equiv b_{-i}$ y $G = F^{N-1}$ la probabilidad conjunta de los jugadores i_{-1} . Para que el jugador i gane la subasta, debe cumplirse la siguiente condición $\{b_i > \max_{j \neq i} \{\mathbf{b}^I(t_j)\}\}$. Entonces la probabilidad de que i gane la subasta es

$$G((\mathbf{b}^I)^{-1}(b_i)) = P\{b_i > \max_{j \neq i} \{\mathbf{b}^I(t_j)\}\}.$$

Entonces el pago esperado de i está dado por

$$E_i[\pi_i | T_i = t_i] = G((\mathbf{b}^I)^{-1}(b_i))(t_i - b_i)$$

Para maximizar el pago esperado es necesario resolver la siguiente ecuación

$$\frac{d}{dt_i} [G((\mathbf{b}^I)^{-1}(b_i))(t_i - b_i)] = 0.$$

Derivando tenemos que

$$\frac{g((\mathbf{b}^I)^{-1}(b_i))}{\frac{d\mathbf{b}^I((\mathbf{b}^I)^{-1}(b_i))}{dt_i}}(t_i - b_i) - G((\mathbf{b}^I)^{-1}(b_i)) = 0$$

Si suponemos equilibrio simétrico, $\mathbf{b}^I = b_i$:

$$\begin{aligned} \frac{g(t_i)}{\frac{d\mathbf{b}^I(t_i)}{dt}}(t_i - b_i) - G(t_i) &= 0 \\ \frac{d(G(t_i)\mathbf{b}^I(t_i))}{dt_i} &= tg(t_i) \\ \mathbf{b}^I(t_i) &= \frac{1}{G(t_i)} \int_0^{t_i} yg(y)dy \\ &= E[Y_1 | Y_1 < t_i] \end{aligned}$$

Este resultado lo escribimos como

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^I(t) &= E_{-i}[Y_1 | Y_1 < t] \\ &= t - \int_0^t \frac{G(y)}{G(t)} dy < t \end{aligned}$$

Si las pujas tienen una distribución uniforme en $[0, 1]$, entonces $G(t) = F^{N-1}(t) = t^{N-1}$, de donde

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^I(t) &= t - \int_0^t \frac{G(y)}{G(t)} dy \\ &= t - \int_0^t \frac{y^{N-1}}{t^{N-1}} dy \\ &= t - \frac{1}{t^{N-1}} \int_0^1 y^{N-1} dy \\ &= t - \frac{1}{t^{N-1}} \frac{t^N}{N} \\ &= t - \frac{t}{N} \\ &= \frac{Nt}{N} - \frac{t}{N} \\ &= \frac{N-1}{N}t. \end{aligned}$$

Código en Python para resolver una subasta al primer precio:

```
import sympy as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad

# Parte simbolica
t, y = sp.symbols('t y', real=True, positive=True)

# Distribucion acumulada uniforme en [0,1]: G(x) = x para x en [0,1]
G = lambda x: x # distribucion acumulada
G_t = G(t)
G_y = G(y)

# Funcion simbolica de b^I(t)
integrando = G_y / G_t
integral_expr = sp.integrate(integrando, (y, 0, t))
bI_sym = t - integral_expr
bI_sym_simplified = sp.simplify(bI_sym)
```

```

print("Solucion simbolica: b(t)=")
sp.pprint(bI_sym_simplified)

# Parte numerica
def G_uniform(x):
    return x if 0 <= x <= 1 else 1 if x > 1 else 0

def bI(t_val):
    if t_val == 0:
        return 0
    integral_val, _ = quad(lambda y: G_uniform(y) / G_uniform(t_val), 0, t_val)
    return t_val - integral_val

# Vector de valores de t
t_vals = np.linspace(0, 1, 100)
b_vals = np.array([bI(ti) for ti in t_vals])

# Grafica
plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(t_vals, b_vals, label=r'$\mathbf{b}^I(t)$', color='teal')
plt.plot(t_vals, t_vals / 2, '--', label=r'$\frac{t}{2}$ (esperado)', color='gray')
plt.plot(t_vals, t_vals, ':', label=r'$t$', color='black')
plt.xlabel(r'$t$')
plt.ylabel(r'$\mathbf{b}^I(t)$')
plt.title('Calculo de $\mathbf{b}^I(t)$ para $G(t) = t$ (Uniforme)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

```

3.3. Subasta de eBay como juego bayesiano estático

El objetivo de esta sección es modelar y resolver una subasta en línea de la empresa eBay (www.ebay.com). Las subastas en línea facilitan a los vendedores a lograr el mejor precio para sus productos y son un mecanismo de seguridad para vendedores y compradores, debido a que garantiza la recepción del producto para el comprador y del pago para el vendedor.

El modelado utiliza una base de datos de subastas a siete días de un reloj Cartier, Cartier wristwatches on eBay/Cartier+7-day+auctions.csv del repositorio <https://www.modelingonlineauctions.com/datasets>, (Jank, 1995) [13]. Se modela una subasta como un juego bayesiano estático y se determina su equilibrio de Nash. La base de datos contiene el registro de 22 subastas.

Se utiliza la subasta 1644594033 para mostrar el proceso de modelado. La tabla 3.1 muestra los datos de esta subasta.

Modelos aplicados a subastas
3.3 Subasta de eBay como juego bayesiano estático

auctionid	bid	bidtime	bidder	bidderrate	openbid	price
1644594033	25.990000	0.287396	perrymd	28	9.990000	498.000000
1644594033	20.000000	1.211597	magic11	6	9.990000	498.000000
1644594033	21.000000	2.876412	adcc007	4	9.990000	498.000000
1644594033	22.000000	4.992176	freembd	0	9.990000	498.000000
1644594033	25.000000	4.992616	freembd	0	9.990000	498.000000
1644594033	27.000000	4.992813	freembd	0	9.990000	498.000000
1644594033	42.990000	5.009792	perrymd	28	9.990000	498.000000
1644594033	29.000000	5.216019	corbatas	54	9.990000	498.000000
1644594033	31.000000	5.216215	corbatas	54	9.990000	498.000000
1644594033	33.000000	5.216435	corbatas	54	9.990000	498.000000
1644594033	50.000000	5.217350	corbatas	54	9.990000	498.000000
1644594033	50.000000	5.235301	carla-kroeze	1	9.990000	498.000000
1644594033	75.000000	5.235509	carla-kroeze	1	9.990000	498.000000
1644594033	60.000000	5.941146	boraborabora	67	9.990000	498.000000
1644594033	75.990000	5.954005	perrymd	28	9.990000	498.000000
1644594033	85.990000	5.954514	perrymd	28	9.990000	498.000000
1644594033	95.000000	6.090521	freembd	0	9.990000	498.000000
1644594033	87.990000	6.264699	marcuslick	1	9.990000	498.000000
1644594033	89.990000	6.265498	marcuslick	1	9.990000	498.000000
1644594033	100.000000	6.268391	marcuslick	1	9.990000	498.000000
1644594033	100.000000	6.313356	freembd	0	9.990000	498.000000
1644594033	102.500000	6.314907	freembd	0	9.990000	498.000000
1644594033	105.000000	6.318600	marcuslick	1	9.990000	498.000000
1644594033	150.000000	6.432292	jimboysan	5	9.990000	498.000000
1644594033	125.990000	6.531840	perrymd	28	9.990000	498.000000
1644594033	145.990000	6.532141	perrymd	28	9.990000	498.000000
1644594033	165.990000	6.532685	perrymd	28	9.990000	498.000000
1644594033	155.000000	6.691748	marcuslick	1	9.990000	498.000000
1644594033	160.000000	6.700579	freembd	0	9.990000	498.000000
1644594033	165.000000	6.701238	freembd	0	9.990000	498.000000
1644594033	175.000000	6.701562	freembd	0	9.990000	498.000000
1644594033	250.000000	6.719444	hora01	2	9.990000	498.000000
1644594033	450.000000	6.721528	hora01	2	9.990000	498.000000
1644594033	180.000000	6.724595	freembd	0	9.990000	498.000000
1644594033	185.000000	6.724850	freembd	0	9.990000	498.000000
1644594033	190.000000	6.725012	freembd	0	9.990000	498.000000
1644594033	197.500000	6.725220	freembd	0	9.990000	498.000000
1644594033	205.000000	6.725475	freembd	0	9.990000	498.000000
1644594033	210.000000	6.725752	freembd	0	9.990000	498.000000
1644594033	220.000000	6.725937	freembd	0	9.990000	498.000000
1644594033	225.000000	6.726227	freembd	0	9.990000	498.000000
1644594033	400.000000	6.796204	surfingbig-boy	3	9.990000	498.000000
1644594033	498.000000	6.797303	hora01	2	9.990000	498.000000
1644594033	420.000000	6.950637	2000joe	51	9.990000	498.000000
1644594033	493.000000	6.999456	boraborabora	67	9.990000	498.000000

Tabla 3.1: Subasta elegida: 1644594033

A continuación se describen las columnas de la tabla. 3.1:

auctionid: número de identificación de la subasta.
bid: valor de la oferta.
bidtime: tiempo (en días) en que se realiza la oferta.
bidder: identificador del postor.
bidderrate: calificación del postor.
openbid: precio inicial del objeto subastado.
price: oferta ganadora.

El análisis estadístico descriptivo de las pujas se muestra en la tabla 3.2.

	bid
N° de datos	46
media	156.536957
std	134.903698
min	20.00
25 %	52.50
50 %	115.495
75 %	195.625
max	498.00

Tabla 3.2: Descripción estadística de las pujas.

Las figuras 3.3 y 3.4 corresponden a la descripción visual de los datos de la subasta.

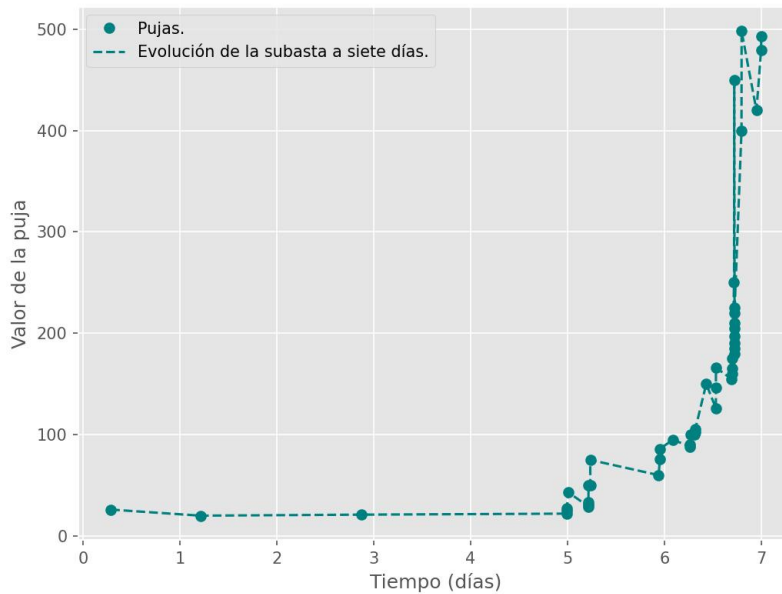


Figura 3.3: Gráfica de las pujas versus el tiempo en días.

Un análisis visual de la figura 3.3 muestra los siguientes resultados:

- El ganador es el comprador que hizo la puja de \$498.
- Las pujas intrépidas ocurren en las últimas horas del último día de la subasta.

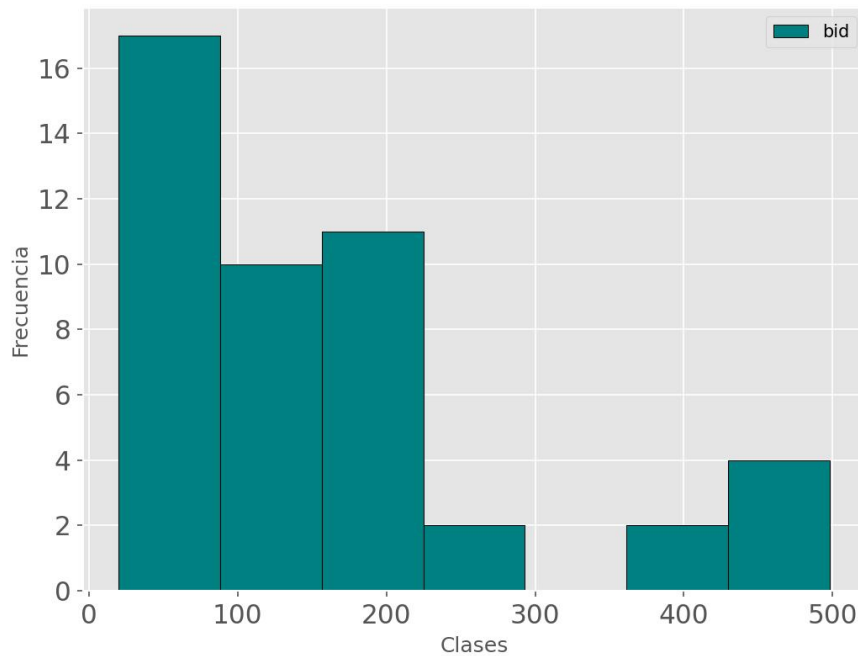


Figura 3.4: Histograma de las pujas.

Hay una clase vacía en el histograma de la figura 3.4, esta discontinuidad sugiere que la distribución no es una distribución simple.

3.3.1. Conjunto de jugadores

El modelo considera un jugador fijo que busca ganar la subasta y el resto de jugadores como un único jugador, es decir, un juego de dos jugadores que pueden actuar como precavido o como intrépido. El conjunto de jugadores es $J = \{1, 2\}$.

3.3.2. Tipos: valoraciones

Las valoraciones que cada jugador atribuye al objeto subastado es el precio de mercado M más un valor agregado u : $v = M + u$. El conjunto de valoraciones de los jugadores es $T = \{v_1 = M + u_1, v_2 = M + u_2\}$

3.3.3. Acciones

Se considera que un jugador puede actuar de dos formas durante una subasta: **Precavido**, o **Intrépido**.

El conjunto de acciones (pujas) para cada jugador van desde \$9.99, establecido por el subastador como openbid.

3.3.4. Estrategias

La estrategia de un jugador es una función $b_i : T \rightarrow A$ que asigna a cada valoración v_i una puja b_i y está dada por $b_i(v_i) = a_i + c_i v_i$ (Gibbons,1992) [9].

Distribución de probabilidad de las acciones. Las pujas se clasifican en dos tipos: precavidas o intrépidas. Las precavidas ocurren cuando la puja es menor o igual al 30 % del valor final y las intrépidas para aquellas que superan el 30 % del valor (Jank, 2002) [14]. La distribución de las pujas se muestran en la gráfica siguiente.

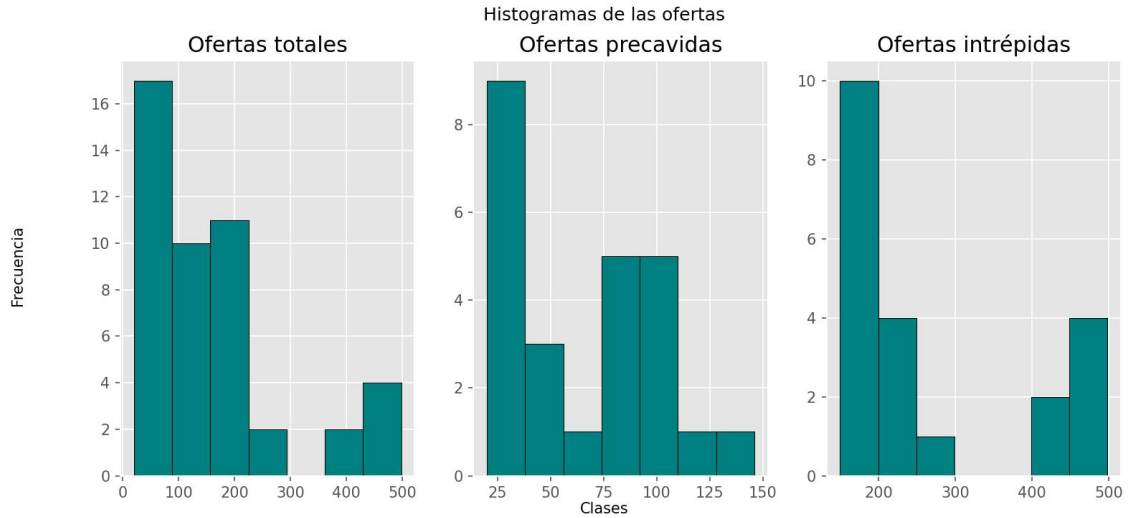


Figura 3.5: Histogramas de las pujas por tipo de jugador.

El análisis visual de las distribuciones muestran que no se ajustan a una distribución simple conocida (Casella, 2002)[4], por lo que se recurre a una mezcla de distribuciones gaussianas para ajustar las distribuciones. El ajuste usa el algoritmo EM (esperanza-maximización) (Hastie, 2017, pág. 276) [11] y (Bishop, 2006, pág. 430) [3].

Algorithm 4 Algoritmo EM para hallar la mezcla de distribuciones gaussianas.

Require: Parámetros iniciales: $\hat{\theta}_0$
 Datos observados: Z
 Tolerancia inicial: $\epsilon > 0$

Ensure: Parámetros de las distribuciones: θ

Variable auxiliar: θ'
 Esperanza inicial: $Q(\theta', \hat{\theta}_0) = E(l_0(\theta'; T) | Z, \hat{\theta}_0)$
 Máximo inicial: $\hat{\theta}_1 = \max Q(\theta', \hat{\theta}_0)$

while $error \geq \epsilon$ **do**
 $Q(\theta', \hat{\theta}_j) = E(l_0(\theta'; T) | Z, \hat{\theta}_j)$
 $\hat{\theta}_{j+1} = \max_{\theta'} Q(\theta', \hat{\theta}_j)$
end while

El algoritmo se implementa mediante la librería *scikit-learn* de Python, el código correspondiente se encuentra en el apéndice como `EM_Mezcla.ipynb`.

A continuación se muestran la gráfica y los índices para el caso de la mezcla de distribución de los jugadores precavidos.

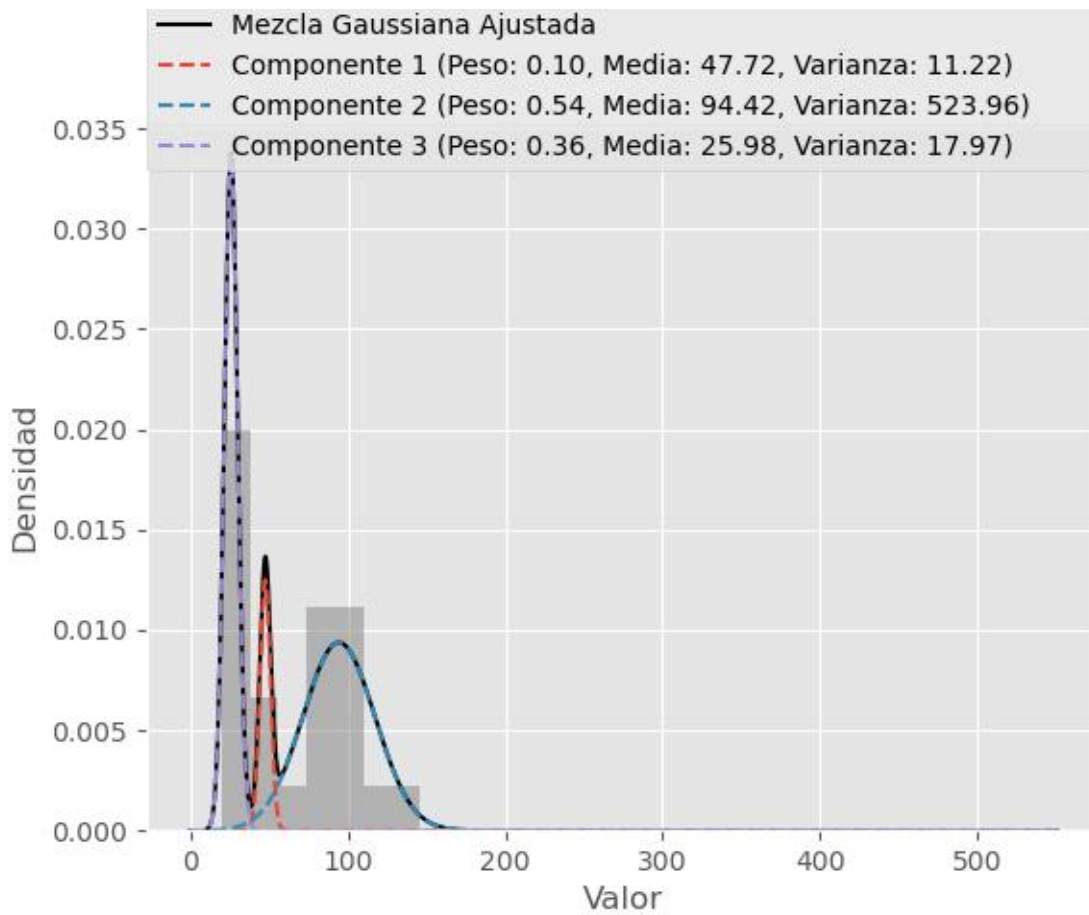


Figura 3.6: Ajuste de los datos mediante una mezcla de distribuciones gaussianas para jugadores precavidos.

```
Componentes: 1
Log-Verosimilitud: -35.47346333012306
AIC: 74.94692666024612
BIC: 77.38467830998252
Componentes: 2
Log-Verosimilitud: -27.13955318547139
AIC: 64.27910637094277
BIC: 70.37348549528377
Componentes: 3
Log-Verosimilitud: -25.604960466156157
AIC: 67.20992093231231
BIC: 76.96092753125792
```

La distribución para un jugador precavido es

$$f_1(y) = 0.10N(47.72, \sqrt{11.22}) + 0.54N(94.42, \sqrt{523.96}) + 0.36N(25.98, \sqrt{17.97}) \quad (3.6)$$

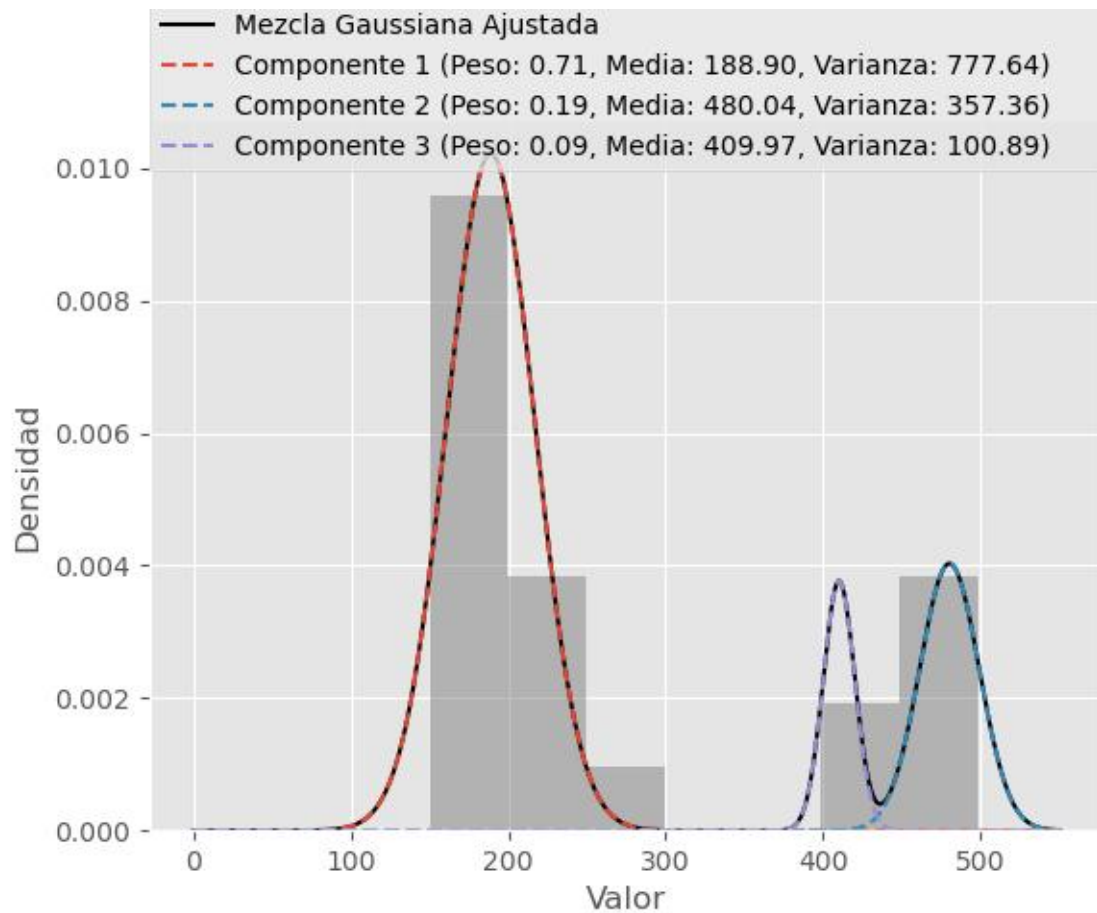


Figura 3.7: Ajuste de los datos mediante una mezcla de distribuciones gaussianas para jugadores intrépidos.

Se obtienen para cada componente de la mezcla la log-verosimilitud, el criterio de información de Akaike (AIC) y el criterio de información bayesiana (BIC). Los resultados se muestran a continuación.

```
Componentes: 1
Log-Verosimilitud: -29.797709197303377
AIC: 63.59541839460675
BIC: 65.6844632700536
Componentes: 2
Log-Verosimilitud: -12.558419295745672
AIC: 35.116838591491344
BIC: 40.33945078010846
Componentes: 3
Log-Verosimilitud: -11.029667119954981
AIC: 38.05933423990996
BIC: 46.415513741697346
```

La distribución para un jugador intrépido es

$$f_2(y) = 0.71N(188.90, \sqrt{777.64}) + 0.19N(480.04, \sqrt{357.36}) + 0.09N(409.97, \sqrt{100.89}) \quad (3.7)$$

3.3.5. Funciones de ganancias

Para el jugador $i \in J$ existen tres posibilidades:

1. Su puja es mayor que la del otro jugador: $b_i > b_j, i \neq j$.
2. Las pujas de ambos coinciden y se decide mediante el lanzamiento de una moneda: $b_i = b_j, i \neq j$.
3. Su puja es menor que la del otro jugador: $b_i < b_j, i \neq j$.

En base a estos casos de las pujas y las valoraciones se tiene la función de ganancias para cada jugador:

$$u_i(b_i, b_j, v_i, v_j) = \begin{cases} v_i - b_i & \text{si } b_i > b_j \\ \frac{v_i - b_i}{2} & \text{si } b_i = b_j \\ 0 & \text{si } b_i < b_j \end{cases} \quad (3.8)$$

3.3.6. Cálculo del equilibrio bayesiano de Nash

Para hallar el equilibrio bayesiano de Nash, se determina primero la probabilidad que un jugador actúe como precavido p o como intrépido $1 - p$. Posteriormente se determina la probabilidad de las pujas correspondientes que se calculan a partir de las mezclas obtenidas en la sección 3.3.3.

El equilibrio bayesiano de Nash es una pareja de estrategias $(b_1(v_1), b_2(v_2))$, con $v_i \in [0, M]$, que resuelve la expresión dada por (Gibbons, 1992) [9]:

$$\max_{b_i} (v_i - b_i) [P_1[b_i > b_j(v_j)]p + P_2[b_i > b_j(v_j)](1 - p)] + \frac{1}{2}(v_i - b_i)P[b_i = b_j(v_j)]. \quad (3.9)$$

Donde P_1 y P_2 son las distribuciones de un jugador intrépido y de un jugador precavido, respectivamente. Considerando que $P[b_i = b_j(v_j)] = 0$, tenemos que la expresión (3.9) resulta en

$$\max_{b_i} (v_i - b_i) [P_1[b_i > b_j]p + P_2[b_i > b_j](1 - p)].$$

Simplificando esta expresión

$$\max_{b_i} (v_i - b_i) [F_1(b_i)p + F_2(b_i)(1 - p)]. \quad (3.10)$$

Definimos una función g dada por:

$$g(b_i) = (v_i - b_i) [F_1(b_i)p + F_2(b_i)(1 - p)]. \quad (3.11)$$

Dado que las derivadas de las funciones F_1 y F_2 son:

$$\begin{aligned} F_1'(b_i) &= f_1(b_i) \\ F_2'(b_i) &= f_2(b_i). \end{aligned}$$

Entonces la derivada de g está dada por

$$\begin{aligned} g'(b_i) &= [(v_i - b_i) [F_1(b_i)p + F_2(b_i)(1 - p)]]' \\ &= -[F_1(b_i)p + F_2(b_i)(1 - p)] + (v_i - b_i) [f_1(b_i)p + f_2(b_i)(1 - p)]. \end{aligned}$$

Para hallar el valor b_i^* que maximiza g , es necesario resolver la siguiente ecuación

$$- [F_1(b_i)p + F_2(b_i)(1-p)] + (v_i - b_1)[f_i(b_i)p + f_2(b_i)(1-p)] = 0 \quad (3.12)$$

Para resolver la ecuación anterior, usamos la función $g'(b_i)$ y se determina la raíz mínima mediante el método de la bisección y la librería Sympy. Sustituimos las funciones (3.6) y (3.7) en la ecuación (3.12), resolvemos primero para el jugador intrépido y posteriormente para el jugador precavido.

Iniciamos con el jugador intrépido. Como ejemplo, consideramos que $v_j = 400$. La figura 3.8 corresponde a la función g' para este caso particular.

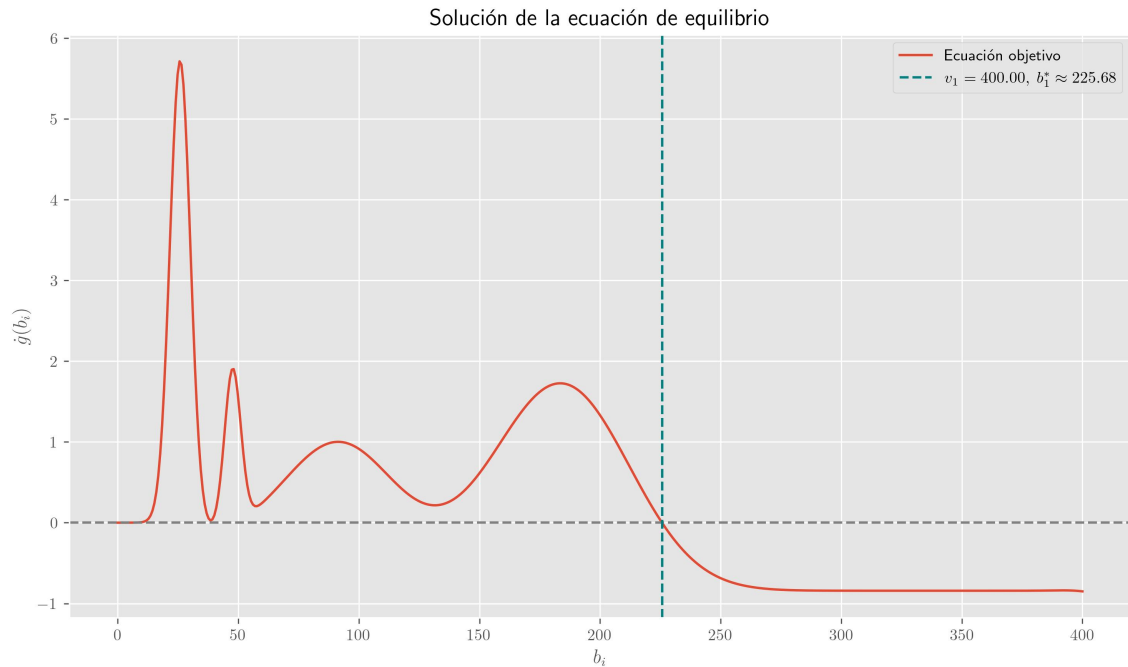


Figura 3.8: Raíces de la función $g'(b_1)$ para un jugador intrépido, con $v_1 = 400$.

La solución obtenida es $b_1^* \approx 225.68$. Entonces el equilibrio de Nash, por la simetría, es la pareja $(225.68, 225.68)$. La ganancia esperada que corresponde a $b_1^* \approx 225.68$ es $(v_i - b_i)[P_1[b_i > b_j(v_j)]p + P_2[b_i > b_j(v_j)](1-p)] = 286.49$.

A continuación se muestra la mejor respuesta b_1 del jugador 1, en función de las posibles valoraciones v_1 , es decir, la mejor respuesta del jugador 1 en función de la valoración del mismo jugador 1.

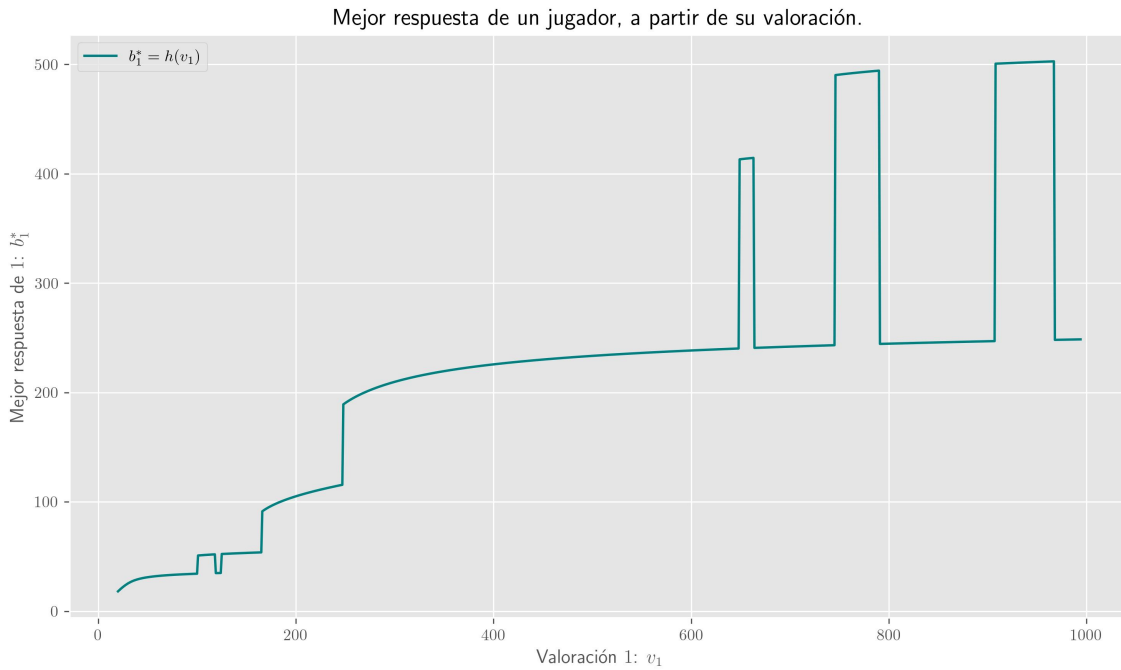


Figura 3.9: Gráfica de la mejor respuesta para un jugador.

Ahora se muestra el pago esperado del jugador 1 en función de la valoración que tiene del objeto subastado.

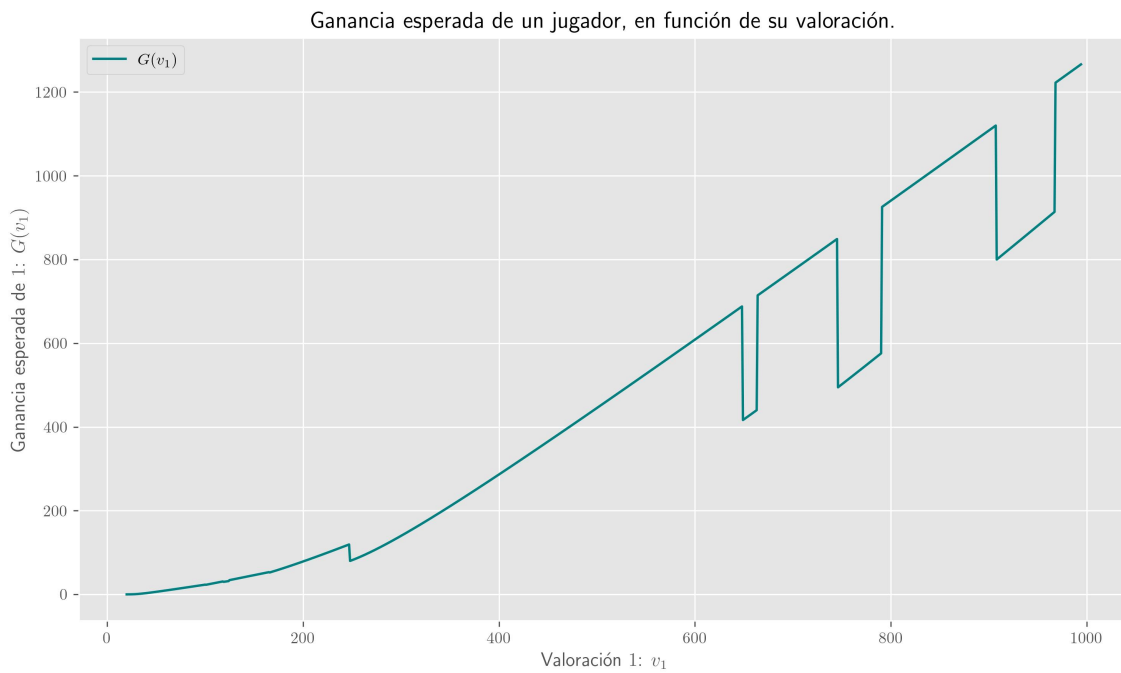


Figura 3.10: Gráfica de la función de ganancias $GE(v_1)$ para un jugador.

Este algoritmo muestra el proceso:

Algorithm 5 Análisis y equilibrio de Nash basado en datos

Entrada: Base de datos D
Salida: Pareja de estrategias en equilibrio de Nash (s_1^*, s_2^*)

```

1: procedure ENCONTRAREQUILIBRIO( $D$ )
2:   Leer la base de datos  $D$ 
3:   Realizar análisis estadístico sobre  $D$ 
4:   Estimar parámetros estadísticos (media, varianza, correlaciones, etc.)
5:   Modelar la distribución de los datos como una mezcla de distribuciones
6:   Usar modelos como GMM (mezclas gaussianas)
7:   Definir la función de pagos  $U_i(s_i, s_{-i})$  para cada jugador  $i$ 
8:   Maximizar la esperanza de  $U_i$ :
9:   for cada jugador  $i$  do
10:     Encontrar  $s_i^* = \arg \max_{s_i} \mathbb{E}[U_i(s_i, s_{-i})]$ 
11:   end for
12:   Calcular la probabilidad de elección de cada estrategia
13:   Identificar la pareja  $(s_1^*, s_2^*)$  que constituye un equilibrio de Nash:
14:   if ningún jugador tiene incentivo a desviarse unilateralmente then
15:     return  $(s_1^*, s_2^*)$ 
16:   else
17:     Volver a optimizar con nuevas estrategias
18:   end if
19: end procedure

```

El código en Python se encuentra en el apéndice.

Una primera conclusión de este capítulo es que la aplicación de la teoría de juegos en las subastas permite resolverlas en el sentido del equilibrio de Nash Bayesiano. De este modo, permite hallar un precio de reserva óptimo en una subasta para que el vendedor no presente pérdidas, en caso que no se presenten suficientes ofertas a su producto. Posteriormente, se resolvieron subastas con distribuciones uniforme y subastas al primer precio para mostrar el proceso de la solución de una subasta. Finalmente se aplicó el proceso para modelar y resolver una subasta en línea de eBay que posibilita a dos postores competir de manera que obtengan el máximo beneficio considerando la aleatoriedad histórica de las ofertas.

Capítulo 4

Conclusión

La teoría de juegos se emplea para resolver problemas diversos en los cuales se buscan una solución equilibrada para todos los actores implicados. Se analizaron ejemplos de su aplicación al comercio y licitación de bienes y servicios.

El concepto principal de la teoría de juegos es el de equilibrio de Nash, que establece que a ningún jugador le es conveniente cambiar su elección. El equilibrio de Nash puede determinarse en juegos en los que se conocen todos los elementos de manera determinista (información completa) y en los juegos en los que alguno de los jugadores desconoce alguna información de otro jugador (información incompleta), pero se involucra el azar como otro jugador con el propósito de modelar la falta de información con una distribución aleatoria (juegos bayesianos).

Las subastas en línea son un mercado relevante en el comercio electrónico y global. Entre las distintas plataformas de subastas, destaca eBay con la mayor participación a nivel global, además de ser un canal para la subasta de bienes diversos y no sólo de arte. La necesidad de un modelo para los postores puede contribuir a mejorar sus posibilidades de ganar una subasta y no quedar en desventaja frente a otros postores. Para simplificar el modelo y mejorar la perspectiva de un postor, se asume al resto de postores como un único postor.

El modelado de una subasta en línea comienza con la búsqueda de bases de datos adecuados. Las bases de datos seleccionadas complementan el texto de Jank, (Jank, 2008) [14]. Posteriormente se cargaron en Python 3 y se hace un análisis estadístico descriptivo de las pujas. Debido a la naturaleza de la distribución de los datos se opta por clasificar a los postores como precavidos o intrépidos de acuerdo a un umbral establecido en la literatura.

La distribución de las pujas para los postores precavidos o intrépidos no se ajusta a ninguna distribución simple, por ello se recurre a una mezcla de distribuciones gaussianas con mejor ajuste.

La literatura muestra que una familia de estrategias lineales es la mejor opción para la relación funcional entre valoraciones y pujas (Gibbons, 1992) [9].

Las funciones de pagos se establecen en (Gibbons, 1992) [9] y (Barron, 2008) [2], estas se usan para cumplir con las condiciones de un juego bayesiano.

El modelado de una subasta en línea, desde el punto de vista de los postores, mediante un juego bayesiano, arroja resultados cercanos a la puja ganadora para valoraciones entre los 700y800 dólares, así como entre los 900y1,000 dólares, como se muestra en la figura 3.9.

Como se menciona en el 3, la figura 3.10 muestra que un comportamiento intrépido

incrementa el beneficio del postor. Mientras que un comportamiento precavido la disminuye, pero ofrece una alternativa poco favorable en caso de un comportamiento intrépido del otro jugador.

El uso de algoritmos y su implementación en Python simplifica la obtención de los equilibrios de Nash a partir de los datos crudos.

Apéndice A

Programas en Python

```
'''
EM_Mezcla.ipynb
Programa para identificar los parámetros de una mezcla de distribuciones para
las
pujas de subastas de eBay.
'''

import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
import datetime as dt
import numpy as np
from scipy import stats
from sklearn.mixture import GaussianMixture

# Lectura de datos.
Datos = pd.read_csv('Cartier+7-day+auctions.csv')
Lista_id = sorted(list(set(Datos["auctionid"])))
ID = Datos[Datos["auctionid"]== Lista_id[55]]

# Umbral que distingue jugadores intrpidos de los precavidos, a partir de la
puja máxima.
M = 0.3*max(ID["bid"])

# Selección de los datos de los intrpidos. }
#(Cambiar > por <= para obtener los datos de los precavidos)
puja=ID[ID["bid"] > M]["bid"].values
df_standar=(puja-puja.mean())/puja.std()

# Determinación de los parámetros de una mezcla.

n_components = 3
gmm = GaussianMixture(n_components=n_components, covariance_type='full',
random_state=0)
df_standar_1=df_standar.reshape(-1,1)

gmm.fit(df_standar_1)
plt.hist(df_standar_1, bins=30, density=True, alpha=0.5, color='gray', label="
Datos")
x = np.linspace(-5, 10, 1000).reshape(-1, 1)

logprob = gmm.score_samples(x)
pdf = np.exp(logprob)
plt.plot(x, pdf, '-k', label="Mezcla Gaussiana Ajustada")
for i in range(n_components):
    mean = gmm.means_[i, 0]
```

```

variance = gmm.covariances_[i, 0, 0]
weight = gmm.weights_[i]
component_pdf = weight * (1 / np.sqrt(2 * np.pi * variance)) * np.exp(-(x
- mean) ** 2 / (2 * variance))
plt.plot(x, component_pdf, '--', label=f'Componente {i+1} (Peso: {weight
:.2f}, Media: {mean:.2f}, Varianza: {variance:.2f})')

plt.xlabel('Valor')
plt.ylabel('Densidad')
plt.legend()
plt.savefig('Mezcla_resultados.jpg')
plt.show()

# Calculo de los ndices de verosimilitud.

componentes = range(1, 4)
aic_values = []
bic_values = []
log_likelihoods = []

for n in componentes:
    gmm = GaussianMixture(n_components=n, random_state=0)
    gmm.fit(df_standar_1)

# Calcular las m tricas
log_likelihood = gmm.score(df_standar_1) * len(df_standar_1)
log_likelihoods.append(log_likelihood)
aic_values.append(gmm.aic(df_standar_1))
bic_values.append(gmm.bic(df_standar_1))

for i, n in enumerate(componentes):
    print(f"Componentes: {n}")
    print(f" Log-Verosimilitud: {log_likelihoods[i]}")
    print(f" AIC: {aic_values[i]}")
    print(f" BIC: {bic_values[i]}")

```

```

'''
Soluci n num rica con SymPy y visualizaci n del equilibrio de Nash para el
modelo de eBay.
'''

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy.stats import Normal, density, cdf
from sympy import Symbol, Rational, lambdify, nsolve, N

plt.rcParams['text.usetex'] = True
b1 = Symbol("b1")
p = Rational(21, 46)
v1 = 400

# Distribuciones
X1 = Normal("x1", 47.72, 3.349)
X2 = Normal("x2", 94.42, 22.89)
X3 = Normal("x3", 25.98, 4.239)
X1b = Normal("x1b", 188.9, 27.886)
X2b = Normal("x2b", 480.04, 18.903)
X3b = Normal("x3b", 409.97, 10.044)

f1 = 0.10 * density(X1)(b1) + 0.54 * density(X2)(b1) + 0.36 * density(X3)(b1)
F1 = 0.10 * cdf(X1)(b1) + 0.54 * cdf(X2)(b1) + 0.36 * cdf(X3)(b1)
f2 = 2 * 0.71 * density(X1b)(b1) + 2 * 0.19 * density(X2b)(b1) + 2 * 0.09 *
density(X3b)(b1)
F2 = 0.71 * cdf(X1b)(b1) + 0.19 * cdf(X2b)(b1) + 0.09 * cdf(X3b)(b1)

equation = - (F1 * p + F2 * (1 - p)) + (v1 - b1) * (f1 * p + f2 * (1 - p))

```

```

b1_sol = float(nsolve(equation, (v1/3, v1), solver='bisect'))
print(f'Soluci n: b_1^{b1_sol:.2f}')

# C lculo de mejor respuesta para diferentes $v_1$
p = 21/46
pujas1 = []
valoraciones1 = list(range(20, 400, 1))
for v1 in valoraciones1:
    equation = - (F1 * p + F2 * (1 - p)) + (v1 - b1) * (f1 * p + f2 * (1 - p))
    b1_sol = float(nsolve(equation, (v1/4, v1), solver='bisect'))
    pujas1.append(b1_sol)

plt.plot(valoraciones1, pujas1, color='teal', label=r'$b_1^* = h(v_1)$')
plt.xlabel('Valoraci n $v_1$')
plt.ylabel('Mejor respuesta $b_1^*$')
plt.title('Mejor respuesta en funci n de la valoraci n')
plt.legend()
plt.savefig('FuncionMejorIntrepido.jpg')
plt.show()

# Ganancia esperada en funci n de $v_1$
GananciaEsperada = []
valoraciones1 = list(range(20, 400, 1))
for v1 in valoraciones1:
    equation = - (F1 * p + F2 * (1 - p)) + (v1 - b1) * (f1 * p + f2 * (1 - p))
    b1_sol = float(nsolve(equation, (v1/4, v1), solver='bisect'))
    GE = N((v1 - b1_sol) * (F1.subs(b1, b1_sol).evalf() + F2.subs(b1, b1_sol).evalf
    ()))
    GananciaEsperada.append(GE)

plt.plot(valoraciones1, GananciaEsperada, color='teal', label=r'$G(v_1)$')
plt.xlabel('Valoraci n $v_1$')
plt.ylabel('Ganancia esperada $G(v_1)$')
plt.title('Ganancia esperada en funci n de la valoraci n')
plt.legend()
plt.savefig('FuncionGananciasIntrepido.jpg')
plt.show()

```


Bibliografía

- [1] Arozamena, L., Fioriti, A., and Weinschelbaum, F. (2021). From auction theory to market design: Paul Milgrom and Robert Wilson’s contributions to economics. *Estudios económicos*, 38(76), 279-296.
- [2] Barron, E. N., (2008). *Game Theory: an introduction*, primera edición, Wiley-Interscience, Estados Unidos.
- [3] Bishop, C. M., (2006). *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer Science+Business Media, Estados Unidos.
- [4] Casella, G. y Berger, R. L. (2002). *Statistical Inference*. Thomson Learning, Estados Unidos.
- [5] Cerdá, E., Jimeno, J. L., y Pérez, J., (2004). *Teoría de juegos*, primera edición, Pearson Educación, Madrid.
- [6] Dasgupta, P., Collins, J. B., and McCarrick, M. (2020, Mayo). Improving costs and robustness of machine learning classifiers against adversarial attacks via self play of repeated Bayesian games. In *The Thirty-Third International Flairs Conference*.
- [7] Flores-Zarur, K., and Olvera-Lopez, W. (2023). A Bayesian equilibrium for simultaneous first-price auctions for complementary goods and quasi-linear bids. *Journal of Dynamics and Games*, 10(2), 110-120.
- [8] Gardner, R. (2022). *Juegos*. Antoni Bosch Editor.
- [9] Gibbons, R., and Gibbons, R. (1992). *A primer in game theory*.
- [10] González Quiroz, A. (2023). *Teoría de juegos y su aplicación en la guerra entre Coca-Cola y Pepsi* [Tesis de licenciatura, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. Repositorio Institucional BUAP. <https://repositorioinstitucional.buap.mx/server/api/core/bitstreams/3e2b30d3-f285-44e4-ba02-e86394e7fb13/content>
- [11] Hastie, Trevor; Tibishirani, Robert y Friedman, Jerome, (2017). *The Elements of Statistical Learning*, segunda edición, Springer Science+Business Media, Estados Unidos.
- [12] Harsanyi, J. C. (1995). Games with incomplete information. *The American Economic Review*, 85(3), 291-303.
- [13] Jank, W. y Shmueli, G. (1995). *Modeling online auctions*. Wiley, Estados Unidos.
- [14] Jank, W. (2008). Explaining and Forecasting Online Auctions Prices and Their Dynamics Using Functional Analysis. *Journal of Busniness and Ecomical Statistics*, 144-160.
- [15] Kakutani, S. (1941). A generalization of Brouwers fixed point theorem. *Duke Mathematical Journal*, 8(3), 457-459.
Disponble en: <https://www.math.ucdavis.edu/~deloera/TEACHING/READINGSEMINAR/PAPERS/kakutanioriginal.pdf>

- [16] Krishna, Vijay, (2010). *Auction Theory*, segunda edición, Academic Press, Estados Unidos.
- [17] Nash, J. (1950). Equilibrium points in n-person games. Proceedings of the National Academy of Sciences USA, 36, 48–49. Reimpreso en H. Kuhn (ed.), *Classics in Game Theory*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1997.
- [18] Pérez Muñoz, T. (2024). Subastas como juegos de información completa e incompleta. *Mixbaal Revista Metropolitana de Matemáticas*. Volumen 15, No 1, págs. 37-49. <http://mat.izt.uam.mx/mat/documentos/revistaMixbaal/Mixbaal2024-02.pdf>
- [19] Vega-Redondo, F. (2000). *Economía y juegos*. Antoni Bosch Editor, Barcelona.
- [20] Vega-Redondo, F. (2003). *Economics and the Theory of Games*. Cambridge University Press, Cambridge.