



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Instituto de Física
Ing. Luis Rivera Terrazas

Estructura de bandas fotónicas para un cristal fotónico bidimensional que hace el papel de envolvente en una fibra óptica de cristal fotónico.

Tesis presentada

como requisito para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias
(Física)**

por

Briseida Meneses Alviso

asesorada por

Dr. Jesus Arriaga Rodríguez

Puebla Pue.
Octubre de 2002



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Instituto de Física
Ing. Luis Rivera Terrazas

Estructura de bandas fotónicas para un cristal fotónico
bidimensional que hace el papel de envolvente en una fibra
óptica de cristal fotónico.

Tesis presentada

como requisito para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias
(Física)**

por

Briseida Meneses Alviso

asesorada por

Dr. Jesus Arriaga Rodríguez

Puebla Pue.
Octubre de 2002

Título: Estructura de bandas fotónicas para un cristal fotónico bidimensional que hace el papel de envolvente en una fibra óptica de cristal fotónico.

Estudiante: BRISEIDA MENESES ALVISO

COMITÉ

Presidente

Secretario

Vocal

Dr. Jesus Arriaga Rodríguez
Asesor

Índice general

1. Cristales Fotónicos	5
1.1. Ecuaciones de Maxwell	6
1.2. Teorema de Bloch	8
2. Cristales fotónicos en dos dimensiones	13
2.1. Red cuadrada de columnas dieléctricas.	14
2.2. Red cuadrada con átomos cuadrados.	16
2.3. Red triangular de columnas de aire.	19
3. Fibra Optica	23
3.1. Fibras ópticas de cristal fotónico	25
4. Aros dieléctricos	29
4.1. Propagación fuera del plano de la periodicidad $k_z \neq 0$	32
5. Conclusiones	39

Introducción

Como sabemos con el descubrimiento de los semiconductores, la humanidad tuvo grandes avances en la tecnología, lo que llevo a grandes mejoras en la vida cotidiana. La forma en que los semiconductores trabajan es controlando las corrientes eléctricas, un fenómeno interesante en ellos es el de la llamada banda prohibida. La banda prohibida electrónica es un estrecho rango de energías prohibidas que no pueden ocupar los electrones. Cuando los electrones en un semiconductor llenan todos los estados disponibles por debajo de la banda prohibida, no existe flujo de corriente eléctrica. La banda prohibida electronica se encuentra entre la banda de valencia y la banda de conducción de los materiales[1]. La existencia y las propiedades de una banda prohibida electronica dependen del tipo de átomos del material y de su estructura cristalina. Con el paso del tiempo se logran fabricar circuitos electronicos cada vez más pequeños, una de sus desventajas es la pérdida de energía. Buscando la forma de eliminar esta pérdida, surge un nuevo tipo de dispositivos los llamados dispositivos ópto-electrónicos, en los cuales se utilizan tanto las propiedades electrónicas como las propiedades ópticas de los materiales.

En la última década surge un nuevo reto, el de controlar las propiedades ópticas en los materiales, y con esto diseñar un nuevo tipo de circuitos. Estos circuitos se llamarían circuitos ópticos integrados o semiconductores de luz, y serían el análogo de los circuitos electrónicos. Si pudieramos construir un material que prohiba la propagación de la luz, o que la permita solo en ciertas direcciones y a ciertas frecuencias, o permita localizar la luz en áreas específicas, toda nuestra tecnología tendría una gran revolución, sobre todo en la información y las telecomunicaciones al hacer posible fibras ópticas de mayor capacidad, láseres nanoscópicos, computadoras de alta velocidad, circuitos ópticos integrados, etc..

La propagación de la luz nos ofrece muchas ventajas con respecto a la de los electrones ya que esta puede viajar en un material dieléctrico con una mayor velocidad que la del electrón en un alambre metálico. La luz puede llevar una gran cantidad de información por segundo, el ancho de banda de un material dieléctrico es significativamente más

grande que el de los metales. Por ejemplo: el ancho de banda de una fibra óptica usada en telecomunicaciones es del orden de un terahertz, mientras que para sistemas electrónicos como el teléfono es solo de algunos cientos de kilohertz[2]. Además, como los fotones no tienen interacciones entre ellos como en el caso de los electrones, esto nos reduce la pérdida de energía.

Una nueva clase de materiales conocidos como cristales fotónicos son la clave para continuar con el desarrollo hacia los circuitos ópticos integrados[3]. Los primeros científicos en estudiar a los cristales fotónicos fueron Eli Yablonovitch [4] y John Sajeev [5] en 1987 cuando mandan sus trabajos con una diferencia de meses a publicar. La idea de Eli Yablonovitch fué buscar una región en los materiales en la cual se pudiese suprimir la emisión espontanea, esta region es conocida ahora como banda de gap fotónica en los cristales fotónicos. El fenomeno de emisión espontanea se da en los semiconductores cuando un electrón decae de la banda de valencia a la banda de conducción emitiendo un foton. John Sajeev propone la banda de gap fotónica para crear lo que se conoce como localización de la luz. Su analogía electronica es un efecto cuántico llamado localización electronica y esta ocurre en materiales desordenados, tales como semiconductores amorfos. Como dato curioso ambos utilizan la misma terminología, banda de gap fotónica y cristales fotónicos.

Podemos definir un cristal fotónico como un arreglo periódico de materiales dieléctricos. Para determinados valores de las constantes dieléctricas y con cierta geometria definida, se puede obtener lo que se conoce como "gap fotónico". Un gap fotónico es una región de frecuencias en la cual la propagación de ondas electromagnéticas está totalmente prohibida. Como son sistemas artificiales los cristales fotónicos pueden construirse en una, dos o tres dimensiones. En el caso de los cristales fotónicos bidimensionales la mayoría de los estudios teóricos se han concentrado en estudiar las propiedades de la propagación de ondas electromagnéticas en el plano de periodicidad. Existen algunos trabajos que han estudiado la propagación de ondas electromagnéticas fuera del plano de periodicidad. Por otro lado, se ha demostrado que en los sistemas bidimensionales, la propagación de ondas electromagnéticas a lo largo de la dirección perpendicular al plano de la periodicidad posee propiedades extraordinarias, específicamente en las llamadas fibras ópticas de cristal fotónico[6, 7].

La forma más simple de una fibra óptica es la que esta compuesta de un núcleo y su envolvente, con diferente índice de refracción. Las fibras ópticas de cristal fotónico se construyen rodeando el núcleo de la fibra con un cristal fotónico bidimensional. Si el índice de refracción del núcleo es mayor que el índice de refracción del cristal fotónico, la propagación de ondas electromagnéticas ocurre debido al fenómeno de reflexión total interna[8]. Sin embargo, esto no ocurre si el índice de refracción del núcleo es menor que el índice de refracción del cristal fotónico. Se ha demostrado experimentalmente que es posible la propagación de ondas electromagnéticas en estas condiciones, siempre y cuando el cristal fotónico rodeando al núcleo posea un gap fotónico completo. En este caso la propagación de ondas electromagnéticas a lo largo del núcleo se debe a la expulsión de los modos debido al gap fotónico de la estructura. Esto permite la fabricación de

fibras ópticas cuyo núcleo este compuesto por aire, obteniéndose la máxima velocidad de propagación y la mínima pérdida de energía[9, 10].

Una forma simple de construir las fibras ópticas de cristales fotónicos es mediante un arreglo periódico de agujeros circulares en una matriz de un material con cierta constante dieléctrica, el núcleo de la fibra óptica se construye introduciendo uno o más defectos en la estructura periódica. Los defectos pueden generarse simplemente haciendo que uno o más agujeros de la estructura estén ausentes.

El objetivo del presente trabajo es calcular la estructura de bandas fotónicas para un cristal fotónico bidimensional .

En el primer capítulo se describe teoría la necesaria para el cálculo de la estructura de bandas para los cristales fotónicos. En el segundo capítulo se muestran las estructuras de bandas fotónicas para algunos tipos de redes y diferentes materiales dieléctricos. En el capítulo tercero mencionamos brevemente las fibras ópticas. En el capítulo cuarto calculamos la estructura de bandas para el cristal fotónico bidimensional, que hace el papel de la envolvente de la fibra óptica de cristal fotónico, la cual posee un núcleo de aire. Como nuestra referencia nos asegura la existencia de un gap fotónico completo en esta fibra óptica de cristal fotónico, se analiza la propagación dentro y fuera del plano de periodicidad. Y en el capítulo cinco damos nuestras conclusiones.

Capítulo 1

Cristales Fotónicos

Los cristales fotónicos se pueden considerar como el análogo óptico de los semiconductores. Los semiconductores o cristales electrónicos son arreglos periódicos de átomos o moléculas, los cuales presentan un potencial periódico para la propagación de electrones. Debido a la difracción de Bragg por los planos cristalinos que sufren la propagación de electrones es como aparecen gaps en la energía. Es decir, una región de energía prohibida para los electrones. Los cristales fotónicos son arreglos periódicos de materiales dieléctricos. Si consideramos la propagación de ondas electromagnéticas en el cristal, estas sienten un “potencial periódico” debido a la variación periódica de la constante dieléctrica. Debido a la difracción de Bragg por los planos cristalinos de las ondas electromagnéticas, tenemos bandas de gaps fotónicas. Un gap fotónico es una región de frecuencias en la cual la propagación de las ondas electromagnéticas está prohibida. Los cristales fotónicos son sistemas artificiales que necesitan ser fabricados, y pueden ser en una, dos o tres dimensiones como se puede observar en la fig.1.1

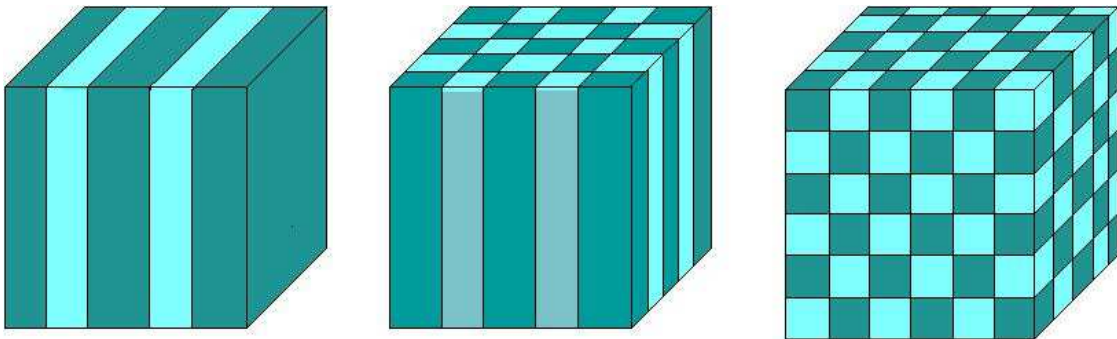


Figura 1.1: a) Cristal fotónico crecido solo en una dimensión, compuesto de dos materiales con diferente constante dieléctrica arreglados en forma periódica, el espacio periódico entre ellos se le llama constante de red. b) Cristal fotónico en dos dimensiones y c) en tres dimensiones.

Desde el punto de vista de la fabricación, aun cuando es posible crecer cristales fotónicos tridimensionales, los sistemas bidimensionales son los más fáciles de construir, y son los que han sido más estudiados hasta el momento. Sabemos qué tipo de arreglos bidimen-

sional y tridimensional dan origen a los gaps fotónicos. Sin embargo, para estos arreglos, no todas las combinaciones de constantes dieléctricas permiten obtener gaps fotónicos completos. De la misma manera que los defectos en un semiconductor localizan los estados electrónicos, los defectos en un cristal fotónico localizan las ondas electromagnéticas. Desde el punto de vista tecnológico, es necesario contar con un cristal fotónico que posea un gap fotónico en la región visible del espectro. Para esto, es necesario que el tamaño de la constante de red usada en un cristal fotónico sea del orden de $0.5\mu\text{m}$, esto es alrededor de 1000 veces más grande que la constante de red de un semiconductor.

Después de haber hecho la comparación entre los semiconductores electrónicos y los cristales fotónicos podemos darnos cuenta que la teoría ocupada para entender a los semiconductores puede ser utilizada también para entender a los cristales fotónicos. La diferencia más importante es que en los semiconductores es necesario resolver la ecuación de Schrödinger, la cual es una ecuación escalar, que gobierna a los electrones; en los cristales fotónicos debemos resolver las ecuaciones de Maxwell, ya que ellas gobiernan todos los fenómenos electromagnéticos. Estas ecuaciones, a diferencia de la ecuación de Schrödinger, son ecuaciones vectoriales.

1.1. Ecuaciones de Maxwell

Nuestro punto de partida son las ecuaciones de Maxwell que en unidades (cgs), tienen la siguiente forma

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 4\pi\rho \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (1.4)$$

Si no consideramos densidades de cargas libres ni corrientes, y suponiendo materiales no-magnéticos, entonces, $\mathbf{J} = 0, \rho = 0$, y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$. Suponiendo también que la constante dieléctrica es lineal e isotrópica, $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, y si tomamos la dependencia temporal de los campos como $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$, podemos escribir las ecuaciones de Maxwell de la siguiente manera,

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{i\omega}{c} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \frac{i\omega}{c} \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.7)$$

Dividamos la ecuación (1.7) por $\epsilon(\mathbf{r})$ y tomemos el rotacional. Después de eliminar $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ usando la ecuación (1.6), obtenemos una ecuación que solo depende de $\mathbf{H}(\mathbf{r})$;

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\epsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right] = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (1.8)$$

Para cualquier cristal fotónico con constante dieléctrica $\epsilon(\mathbf{r})$, podemos resolver esta ecuación y calcular las frecuencias ω , así como también los modos $\mathbf{H}(\mathbf{r})$. Una vez conocido $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ se obtiene usando la ecuación (1.7),

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \left(\frac{-ic}{\omega \epsilon(\mathbf{r})} \right) \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (1.9)$$

La ecuación (1.8) se puede identificar como un problema matemático de eigenvalores,

$$\Theta \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (1.10)$$

donde $\Theta \equiv \nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \right)$ es un operador que actúa sobre $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ y $\left(\frac{\omega}{c} \right)^2$ son los eigenvalores de $\mathbf{H}(\mathbf{r})$. Se puede demostrar que Θ es un operador hermítico en el sentido que satisface propiedades como producto interno, normalización, ortogonalización de estos operadores[11].

Debido a que se tiene un sistema periódico y la constante dieléctrica tiene la periodicidad del sistema, y solo depende de \mathbf{r} , se utiliza el método de ondas planas[12, 13, 14] para resolver la ec.(1.10) y calcular la estructura de bandas, ya que es el método más sencillo de implementar y obtener resultados aceptables. En el caso de que en nuestro sistema la constante dieléctrica dependiera no solo de \mathbf{r} sino también de la frecuencia ω , tendríamos una ecuación similar a la ec.(1.10) en términos del campo eléctrico[15]. Aunque este método tiene deficiencias, especialmente para cuando tenemos defectos en el sistema, se obtienen buenos resultados. Buscando como resolver la ec.(1.10) surgen otros métodos para el cálculo de la estructura de bandas para cristales fotónicos, algunos de ellos son: El método iterativo[16]. En este método se describe un algoritmo para calcular los eigenestados de las ecuaciones de Maxwell para sistemas dieléctricos periódicos,

incluyendo sistemas con birefringencia o materiales magnéticos. Se calculan solo los modos deseados en sistemas con defectos y además nos provee de un camino atractivo para hacer un análisis propio de diversos sistemas electromagnéticos.

El método de multigrad[17], este método se utiliza para calcular la velocidad de grupo y la masa fotónica efectiva. La eficiencia de este método es demostrada cuando utiliza una versión simplificada del operador matriz, la cual converge lentamente, esto reduce rápidamente el error para frecuencias altas. Y permite que el problema sea transferido a una grid ordinaria donde ese error puede ser resuelto sin dificultad. El método de multipolar[18], este método se utiliza cuando tenemos sistemas con defectos, los campos se expresan en terminos de armonicos cilindricos centrados alrededor de cada defecto. Este método tiene cierta ventaja en rapidez y exactitud.

El método KKK[19]. Con el desarrollo de este método es facil de calcular los coeficientes de transmisión, reflexión y absorción de la luz que incide en cualquier ángulo dentro de una placa de cristal fotónico y utilizando matrices de transferencia se obtienen los resultados.

En la siguiente sección se desarrolla el método de ondas planas.

1.2. Teorema de Bloch

Bloch demostró que la solución a la ecuación de Schrödinger para un electrón en presencia de un potencial periódico tiene la forma,

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (1.11)$$

esto es, las eigenfunciones de la ecuación de onda se pueden escribir como el producto de una onda plana por una función que tiene la periodicidad de la red; es decir $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, donde \mathbf{R} es un vector de translación de la red, dado por,

$$\mathbf{R} = l\mathbf{a} + m\mathbf{b} + n\mathbf{c}. \quad (1.12)$$

En la ecuación anterior $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ son vectores unitarios y l, m, n son enteros. Este teorema es aplicable a cualquier sistema periódico, como los cristales fotonicos son sistemas periódicos, entonces los campos electromagnéticos pueden ser expresados mediante el producto de una onda plana por una función que posea la periodicidad del cristal, es decir,

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (1.13)$$

donde $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$. En la ecuación anterior el vector \mathbf{k} está definido como $\mathbf{k} = k_x \mathbf{a}^* + k_y \mathbf{b}^* + k_z \mathbf{c}^*$ siendo \mathbf{a}^* , \mathbf{b}^* y \mathbf{c}^* , los vectores unitarios de la red recíproca, y están dados en terminos de los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} primitivos de la red de la siguiente manera [1],

$$\mathbf{a}^* = 2\pi \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{b}^* = 2\pi \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{c}^* = 2\pi \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}.$$

Definiendo la función $\eta(\mathbf{r})$ como,

$$\frac{1}{\epsilon(\mathbf{r})} = \eta(\mathbf{r}). \quad (1.14)$$

Como la constante dieléctrica es periódica, entonces $\eta(\mathbf{r})$ es también periódica. Tanto $\eta(\mathbf{r})$ como $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ de la ecuación (1.13) podemos representarlas de la siguiente forma,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \mathbf{u}(\mathbf{G}) e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}}, \quad (1.15)$$

$$\eta(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon(\mathbf{r})} = \sum_{\mathbf{G}} \eta(\mathbf{G}) e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}}, \quad (1.16)$$

donde \mathbf{G} es un vector de la red recíproca, dado por $\mathbf{G} = l\mathbf{a}^* + m\mathbf{b}^* + n\mathbf{c}^*$ con l, m, n enteros. Al sustituir la ecuación (1.15) en (1.13) el campo magnético se puede escribir como,

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \mathbf{u}(\mathbf{G}) e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}}. \quad (1.17)$$

Si sustituimos la ecuación (1.16) y (1.17) en la ecuación (1.8) obtenemos lo siguiente:

$$\sum_{\mathbf{G}'} \eta(\mathbf{G} - \mathbf{G}') [(\mathbf{k} + \mathbf{G}) \times [(\mathbf{k} + \mathbf{G}') \times \mathbf{u}(\mathbf{G}')]] = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{u}(\mathbf{G}) \quad (1.18)$$

la cual es un sistema de ecuaciones en tres dimensiones, cuyos eigenvalores $\left(\frac{\omega}{c}\right)^2$ pueden obtenerse mediante técnicas convencionales. En la ecuación anterior \mathbf{k} es el vector de propagación de la onda electromagnética, \mathbf{G} es un vector de la red recíproca, y $\eta(\mathbf{G} - \mathbf{G}')$ son los coeficientes de Fourier de la función $\eta(\mathbf{r}) = 1/\epsilon(\mathbf{r})$. Estos coeficientes están dados en general, de la siguiente forma,

$$\eta(\mathbf{G}) = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} \eta(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{G} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{r}, \quad (1.19)$$

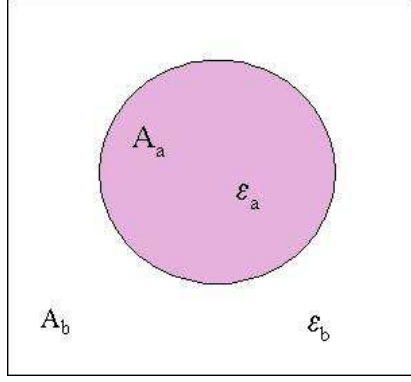


Figura 1.2: Celda unitaria de un cristal fotónico bidimensional compuesto por dos materiales dieléctricos. En este caso tomamos el área de la celda unitaria, como la suma de el área de los átomos mas el área restante $A_c = A_a + A_b$.

donde V_c es el volumen de la celda unitaria. Por ejemplo, en la fig.2 tenemos lo que se conoce como celda unitaria de un cristal fotónico, compuesto de dos materiales dielectricos. Podemos evaluar la integral (1.19) de la siguiente forma, para $\mathbf{G} = 0$

$$\eta(\mathbf{G} = \mathbf{0}) = \frac{1}{V_c} \left[\int_{V_a} \eta_a d\mathbf{r} + \int_{V_b} \eta_b d\mathbf{r} \right], \quad (1.20)$$

como η_a y η_b son constantes en los volúmenes V_a , y V_b , la integral se calcula facilmente obteniendo,

$$\eta(\mathbf{G} = \mathbf{0}) = \frac{1}{V_c} [\eta_a V_a + \eta_b V_b] = f\eta_a + (1 - f)\eta_b, \quad (1.21)$$

donde f es la fracción de llenado, es decir el volumen de los átomos ocupado dentro de la celda unitaria ($f = V_a/V_c$).

Para $\mathbf{G} \neq 0$ tenemos,

$$\eta(\mathbf{G}) = \frac{1}{V_c} \eta_a \left[\int_{V_a} e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} + \eta_b \int_{V_b} e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \right] \quad (1.22)$$

sumando y restando $\eta_b \int_{V_a} e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}$

$$\eta(\mathbf{G}) = \frac{1}{V_c} \left[(\eta_a - \eta_b) \int_{V_a} e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} + \eta_b \int_{V_a+V_b} e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \right] \quad (1.23)$$

la segunda integral es simplemente $\int_{V_c} e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}$ la cual se anula, por lo que obtenemos:

$$\eta(\mathbf{G} \neq \mathbf{0}) = \frac{(\eta_a - \eta_b)}{V_c} \left[\int_{V_a} e^{-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \right] \quad (1.24)$$

Donde la integral se calcula solo sobre el volumen ocupado por los “átomos” de V_a (ver fig.2). Esta integral puede calcularse analíticamente para cuando la forma de los átomos es relativamente sencilla. Por ejemplo, esferas en un arreglo cubico simple, cilindros o cuadrados en un arreglo bidimensional cuadrado, rectangular o hexagonal, etc.

Una vez obtenidos los coeficientes de Fourier procedemos a resolver la ecuación (1.18), la cual es una suma infinita que depende del vector \mathbf{G} de la red recíproca. El criterio para acotar esta suma es: elegir un número lo suficientemente grande del vector \mathbf{G} de tal manera que cuando se obtengan los eigenvalores, estos ya no tengan cambios significativos. Al resolver la ecuación (1.18) obtenemos una matriz de $2N \times 2N$ debido a que el campo magnético \mathbf{H} se puede descomponer en $\mathbf{H} = \mathbf{H}_t + \mathbf{H}_l$ donde \mathbf{H}_t es la componente transversal, y \mathbf{H}_l la componente longitudinal.

Capítulo 2

Cristales fotónicos en dos dimensiones

Un cristal fotónico bidimensional es periódico a lo largo de dos ejes y homogéneo a lo largo del tercero. En la figura 2.1 se muestra un cristal fotónico bidimensional el cual consiste de una red cuadrada de columnas dieléctricas con constante dieléctrica ϵ_a en un medio de constante dieléctrica ϵ_b .

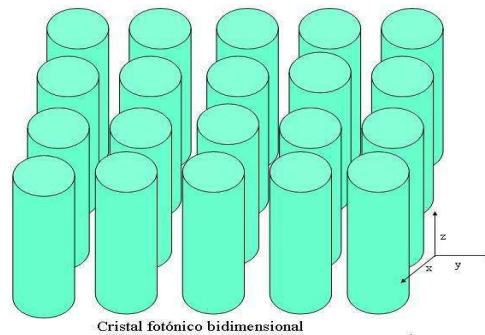


Figura 2.1: Cristal fotónico bidimensional formado por el arreglo periódico de columnas dieléctricas en aire. El cristal es homogéneo en la dirección z , periódico a lo largo de x y y , y su constante de red es a .

Propagación en el plano $k_z = 0$

Cuando se considera la propagación de ondas electromagnéticas en el plano de la periodicidad, tanto el vector \mathbf{G} , como el vector de propagación \mathbf{k} son bidimensionales, es decir, $\mathbf{G} = G_x\hat{i} + G_y\hat{j}$, $\mathbf{k} = k_x\hat{i} + k_y\hat{j}$.

Como el cristal es homogéneo a lo largo de z , entonces la constante dieléctrica solo depende de x y y , es decir $\epsilon(\mathbf{r}) = \epsilon(x, y)$. Sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación (1.18), obtenemos dos sistemas de ecuaciones, las cuales son

$$\sum_{\mathbf{G}'} \eta(\mathbf{G} - \mathbf{G}') |\mathbf{k} + \mathbf{G}'|^2 H_z(\mathbf{G}') = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 H_z(\mathbf{G}) \quad (2.1)$$

$$\sum_{\mathbf{G}'} \eta(\mathbf{G} - \mathbf{G}') \left[|\mathbf{k} + \mathbf{G}'|^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{G}')(\mathbf{k} + \mathbf{G}') \cdot \right] \mathbf{H}_T(\mathbf{G}') = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{H}_T(\mathbf{G}) \quad (2.2)$$

La ecuación (2.1) describe los modos cuyo campo magnético está a lo largo del eje \hat{z} , estos modos se conocen como modos transversales eléctricos (TE), ya que el campo eléctrico \mathbf{E} está en el plano (x, y) . Por otro lado, la ecuación (2.2) nos da los modos para los cuales el campo magnético \mathbf{H} se encuentra en el plano (x, y) , y nos da los modos transversales magnéticos (TM). En este caso el campo eléctrico \mathbf{E} se encuentra a lo largo del eje \hat{z} . La estructura de bandas para los modos TE y TM pueden ser completamente diferentes [20, 21, 22, 23]. Para que un cristal fotónico prohíba la propagación de ondas electromagnéticas en todas direcciones, es necesario que éste posea un gap fotónico completo para ambas polarizaciones, es decir para los modos TE y TM.

2.1. Red cuadrada de columnas dieléctricas.

Consideremos la propagación en el plano de la periodicidad de las ondas electromagnéticas en un arreglo cuadrado de columnas dieléctricas, como la que se muestra en la fig (2.1). Las columnas dieléctricas están dentro de una matriz de aire. La estructura de bandas para un arreglo cuadrado de columnas de aluminio $\epsilon = 8,9$ con $r_0/a = 0,2$ se muestra en la fig.(2.3). El vector de onda \mathbf{k} recorre la zona irreducible de la 1ª zona de Brillouin, de $\Gamma - X - M - \Gamma$.

La celda unitaria y la zona irreducible de Brillouin de esta red cuadrada se muestran en la fig.(2.2). Para este tipo de red los vectores unitarios son: $\mathbf{a}_1 = a\hat{i}$, $\mathbf{a}_2 = a\hat{j}$. Su red recíproca también es una red cuadrada generada por los vectores unitarios, $\mathbf{a}_1^* = (2\pi/a)\hat{i}$, $\mathbf{a}_2^* = (2\pi/a)\hat{j}$.

CAPÍTULO 2. CRISTALES FOTÓNICOS EN DOS DIMENSIONES
2.1. RED CUADRADA DE COLUMNAS DIELECTRICAS.

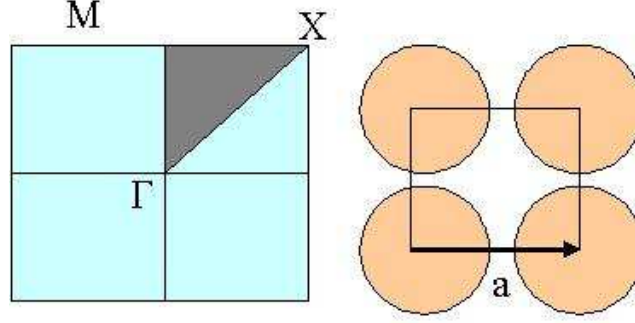


Figura 2.2: Celda unitaria de una red cuadrada y la zona irreducible de Brillouin.

Cualquier vector de la red recíproca se escribe como: $\mathbf{G} = m_1\mathbf{a}_1^* + m_2\mathbf{a}_2^*$, donde m_1 y m_2 son enteros. Tenemos que para $\mathbf{G} = 0$, el coeficiente de Fourier $\eta(0)$ (ec. 1.21) es:

$$\eta(0) = f\eta_a + (1 - f)\eta_b \quad (2.3)$$

donde f es la fracción del área de la celda unitaria ocupada por las columnas dieléctricas,

$$f = \frac{A_a}{A_c} = \frac{\pi r_0^2}{a^2} \quad (2.4)$$

los coeficientes de Fourier para $\mathbf{G} \neq 0$ están dados por la ecuación (1.29), donde la integral se realiza sobre la sección transversal del área de la columna. Podemos evaluar esta integral en coordenadas polares de la siguiente forma.

$$\eta(\mathbf{G} \neq 0) = \frac{(\eta_a - \eta_b)}{A_c} \left[\int_0^{r_0} r dr \int_0^{2\pi} e^{-iGr\cos\theta} d\theta \right] \quad (2.5)$$

donde $G = |\mathbf{G}|$, $r = |\mathbf{r}|$ y θ es el ángulo entre los vectores \mathbf{G} y \mathbf{r} .

La integral sobre θ es simplemente,

$$\int_0^{2\pi} e^{-iGr\cos\theta} d\theta = 2\pi J_0(Gr), \quad (2.6)$$

donde J_0 es la función de Bessel de orden cero. Para evaluar la integral sobre r usamos la relación,

$$\frac{d}{dx} [x^m J_m(x)] = x^m J_{m-1}(x). \quad (2.7)$$

Entonces, calculemos fácilmente la integral sobre r , haciendo el cambio $x = |\mathbf{G}|r$ y $dx = |\mathbf{G}|dr$

$$\int_0^{r_0} r dr J_0(|\mathbf{G}|r) \quad (2.8)$$

obteniendo finalmente

$$\int_{A_a} e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} dr = \frac{2\pi r_0^2 J_1(|G|r_0)}{|G|r_0} \quad (2.9)$$

sustituyendo este resultado en la ecuación (2.5)

$$\eta(G) = 2(\eta_a - \eta_b) f \frac{J_1(|G|r_0)}{|G|r_0} \quad (2.10)$$

donde $J_1(|G|r_0)$ es la función de Bessel de orden 1. Finalmente los coeficientes de Fourier para el caso de cilindros circulares de radio r_0 son

$$\eta(\mathbf{G} \neq \mathbf{0}) = \begin{cases} f\eta_a + (1-f)\eta_b & \mathbf{G} = 0 \\ 2(\eta_a - \eta_b) f \frac{J_1(|G|r_0)}{|G|r_0} & \mathbf{G} \neq 0 \end{cases}$$

La estructura de bandas para los modos TE y TM obtenidos de las ecuaciones 2.1 y 2.2 se muestran en la fig(2.3). Como puede verse la estructura posee un gap fotónico para los modos TM (entre la primera y la segunda banda). Sin embargo este gap desaparece para los modos TE[2, 24].

2.2. Red cuadrada con átomos cuadrados.

Como segundo ejemplo de cristales fotónicos bidimensionales, analizemos la estructura formada por un enrejado cuadrado de material dieléctrico en una matriz de aire. La figura 2.4 muestra esta estructura vista desde la parte superior, también muestra la celda unitaria y la zona irreducible de la 1ra zona de Brillouin. Como podemos ver tenemos una estructura conectada, con regiones de constante dieléctrica altas, las cuales nos muestran un camino continuo en el plano xy , y columnas con una constante dieléctrica $\epsilon = 1$.

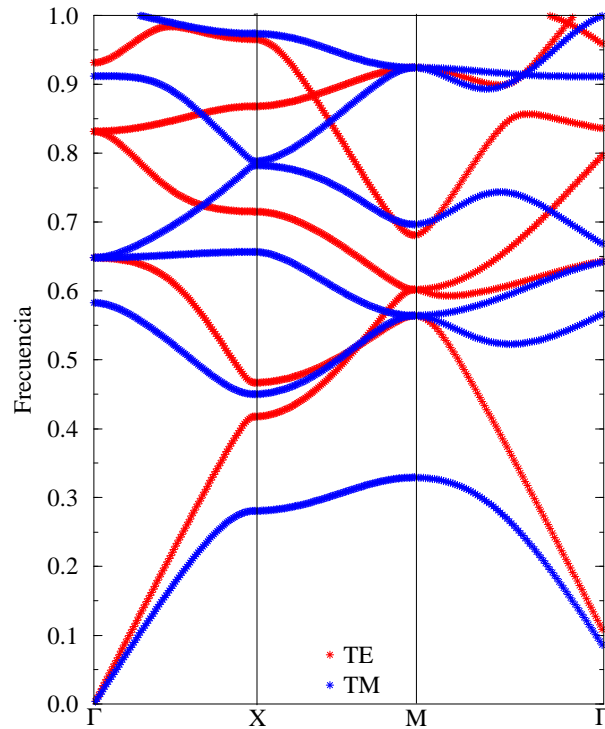


Figura 2.3: La figura muestra la frecuencia ($\omega/2\pi a$) como función del vector de propagación a lo largo las direcciones de alta simetría de la zona irreducible de Brillouin. Las líneas azules representan los modos TM y las líneas rojas representan a los modos TE.

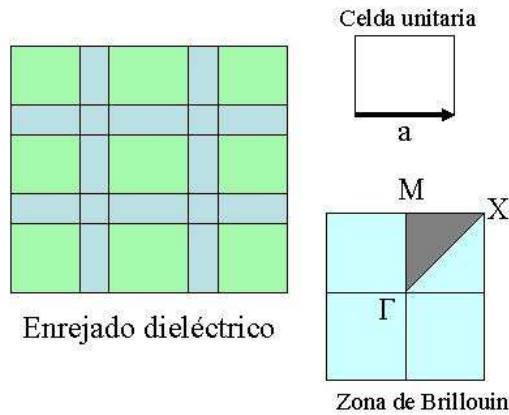


Figura 2.4: Cristal fotónico bidimensional formado por un enrejado dieléctrico. Celda unitaria de una red cuadrada con una constante de red a , y la primera zona irreducible de Brillouin.

CAPÍTULO 2. CRISTALES FOTÓNICOS EN DOS DIMENSIONES
2.2. RED CUADRADA CON ÁTOMOS CUADRADOS.

En este caso los vectores unitarios de la red real y de la red recíproca son de la misma forma que los del ejemplo anterior.

Sin embargo, como podemos ver de la figura 2.4, podemos tomar la celda unitaria como un cuadrado de lado a , la cual contiene columnas de aire de sección transversal cuadrada. Si b es el lado de las columnas de aire dentro de la celda unitaria, la fracción del área ocupada por ellas es,

$$f = \frac{A_a}{A_c} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \quad (2.11)$$

El coeficiente de Fourier $\mathbf{G} = 0$ es igual al de la ecuación (2.3) con f dado por la ecuación (2.11)

$$\eta(0) = f\eta_a + (1 - f)\eta_b \quad (2.12)$$

Los coeficientes de Fourier para $\mathbf{G} \neq 0$, se calculan utilizando la ecuación (1.22). En dos dimensiones esta integral es expresada en coordenadas cartesianas, donde $\mathbf{G} \cdot \mathbf{r} = G_x x + G_y y$. Como tenemos "átomos cuadrados" los límites de integración son de $-\frac{b}{2}$ a $\frac{b}{2}$, en ambas direcciones.

$$\eta(\mathbf{G} \neq \mathbf{0}) = \frac{(\eta_a - \eta_b)}{A_c} \left[\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-i(G_x x + G_y y)} dy \right], \quad (2.13)$$

esta integral se calcula fácilmente obteniendo

$$\eta(\mathbf{G} \neq \mathbf{0}) = \frac{(\eta_a - \eta_b)}{A_c} \frac{4}{G_x G_y} \text{sen} \left(\frac{b}{2} G_x \right) \text{sen} \left(\frac{b}{2} G_y \right). \quad (2.14)$$

En caso de que $G_x = 0$ ó $G_y = 0$ sean igual a cero, entonces tenemos que los coeficientes de Fourier son

$$\eta(\mathbf{G} \neq \mathbf{0}) = \begin{cases} f\eta_a + (1 - f)\eta_b, & G = 0 \\ \frac{2(\eta_a - \eta_b)f}{b} \frac{\text{sen}(\frac{b}{2}G_y)}{G_y}, & G_x = 0, \quad G_y \neq 0 \\ \frac{2(\eta_a - \eta_b)f}{b} \frac{\text{sen}(\frac{b}{2}G_x)}{G_x}, & G_y = 0, \quad G_x \neq 0 \\ \frac{4(\eta_a - \eta_b)f}{b^2} \frac{\text{sen}(\frac{b}{2}G_x)\text{sen}(\frac{b}{2}G_y)}{G_x G_y} & G_x, G_y \neq 0 \end{cases}$$

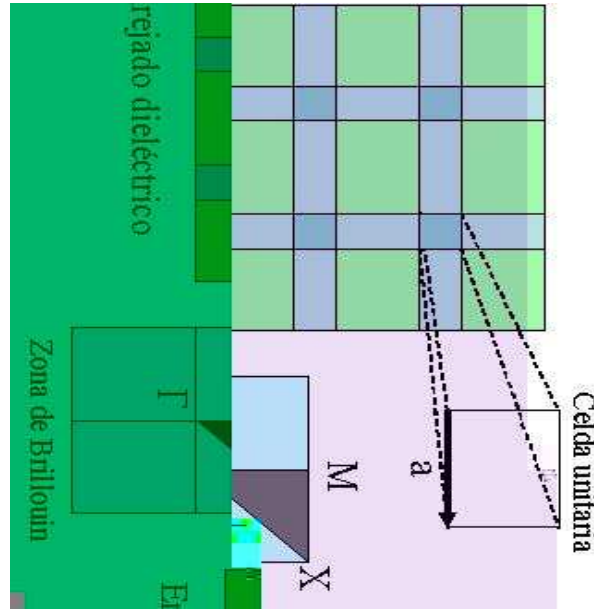


Figura 2.5: Estructura de bandas fotónico para un arreglo cuadrado átomos cuadrados formados por un enrejado dieléctrico. Las líneas azules representan los modos TM y las líneas rojas representan a los modos TE.

La estructura de bandas para los modos TE y TM se muestra en la fig(2.5). Como puede verse la estructura posee un gap fotónico para los modos TE (entre la primera y la segunda bandas), pero no para los modos TM.

Hemos encontrado la estructura de bandas para una red cuadrada con diferentes tipos de átomos en la celda unitaria. Cuando se tienen cilindros dieléctricos aparece un gap fotónico para los modos TM, por otro lado, para el caso de los cilindros cuadrados de aire en un enrejado dieléctrico aparece un gap fotónico para los modos TE.

2.3. Red triangular de columnas de aire.

En este ejemplo tenemos un sistema compuesto de un material dieléctrico $\epsilon = 13$ y columnas de aire, este sistema presenta un arreglo triangular con una constante de red a . Las columnas tienen radio r y constante dieléctrica $\epsilon = 1$. Este sistema es mostrado en la fig.(2.6)

Este arreglo triangular se describe mediante los vectores unitarios,

$$\mathbf{a}_1 = a\hat{i}, \quad \mathbf{a}_2 = a\left(\frac{1}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j}\right) \quad (2.15)$$

en la red recíproca los vectores unitarios son,

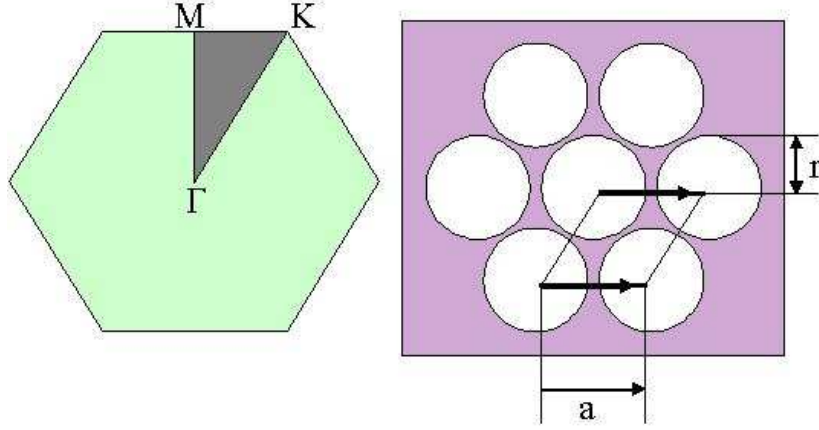


Figura 2.6: Cristal fotónico bidimensional en un arreglo triangular de columnas de aire en un material dieléctrico con constante dieléctrica $\epsilon = 13$. La celda unitaria tiene una constante de red a .

$$\mathbf{a}_1^* = \frac{2\pi}{a}(\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j}), \quad \mathbf{a}_2^* = \frac{2\pi}{a}(-\frac{2}{\sqrt{3}})\hat{j}. \quad (2.16)$$

Cualquier vector de la red recíproca se escribe como, $\mathbf{G} = l_1\mathbf{a}_1^* + l_2\mathbf{a}_2^*$, utilizando los vectores unitarios de la ecuación (2.16).

El primer ejemplo y este, tienen en común el mismo tipo de átomos en el arreglo periódico, entonces los coeficientes de Fourier se calculan utilizando la misma ecuación en ambos casos y obteniendo resultados similares, las diferencias entre ellos es: el área de la celda unitaria, la fracción de llenado y los vectores de la red recíproca, en el primer ejemplo tenemos un arreglo cuadrado y en este ejemplo tenemos un arreglo triangular. El área de la celda unitaria en este caso es $A_c = \sqrt{3}a^2/2$, y la fracción de llenado esta dada por

$$f = \frac{A_a}{A_c} = \frac{2\pi r_0^2}{\sqrt{3}a^2} \quad (2.17)$$

Los coeficientes de Fourier para cuando $G = 0$ son calculados por la ecuación (1.21), y cuando $G \neq 0$ se obtienen de manera similar como en el primer ejemplo, entonces

$$\eta(G) = 2(\eta_a - \eta_b)f \frac{J_1(|G|r_0)}{|G|r_0} \quad (2.18)$$

donde $J_1(|G|r_0)$ es la función de Bessel de orden 1. Resumiendo, los coeficientes de Fourier son:

$$\eta(\mathbf{G}) = \begin{cases} f\eta_a + (1-f)\eta_b & \mathbf{G} = 0 \\ 2(\eta_a - \eta_b)f \frac{J_1(|G|r_0)}{|G|r_0} & \mathbf{G} \neq 0 \end{cases}$$

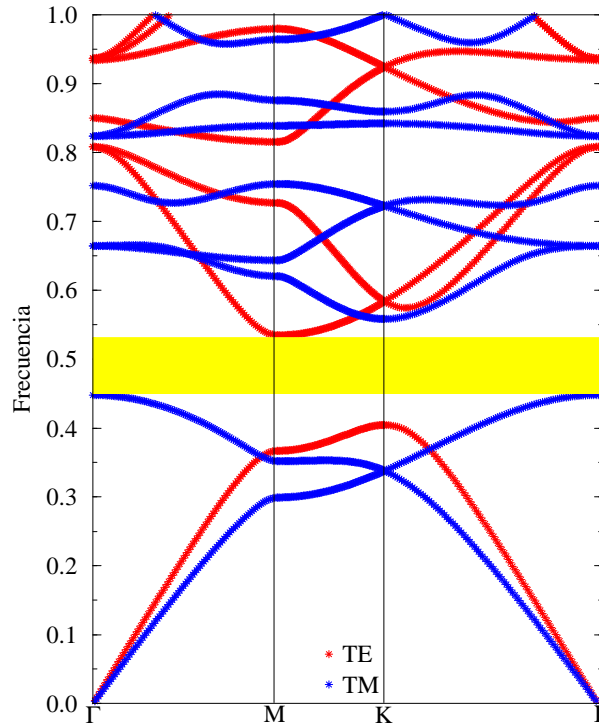


Figura 2.7: Estructura de bandas fotónica para los modos de un arreglo triangular de columnas de aire dentro de un sustrato dieléctrico $\epsilon = 13$.

La estructura de bandas para este cristal fotónico, es mostrada en la fig.(2.7), claramente se ve que posee un gap fotónico completo para ambas polarizaciones, TE y TM[25, 26, 27]. Las líneas azules representan a los modos TM y las líneas rojas representan a los modos TE.

En este capítulo hemos calculado la estructura de bandas para cristales fotónicos bidimensionales encontrando que dependiendo el tipo de arreglo y de los valores de las constantes dieléctricas, es posible encontrar un gap fotónico completo en el plano de la periodicidad. Es decir, una región de frecuencias que no pueden propagar las ondas electromagnéticas en todas las direcciones. Desde el punto de vista tecnológico, aunque es difícil construir un dispositivo óptico que contenga un cristal fotónico bidimensional, debido a que hemos supuesto que el cristal es infinito en una dirección. Sin embargo, los cristales fotónicos bidimensionales han encontrado aplicación tecnológica en el campo de la fibra óptica, especialmente en la denominada “fibra óptica de cristal fotónico”. Se ha demostrado que la fibra óptica de cristal fotónico posee propiedades extraordinarias comparadas con la fibra óptica convencional.

En el siguiente capítulo describiremos las fibras ópticas convencionales y las fibras ópticas de cristal fotónico.

Capítulo 3

Fibra Óptica

La forma más simple de una fibra óptica es la que esta compuesta de un núcleo y su envolvente con diferente índice de refracción, como se muestra en la fig. (3.1).

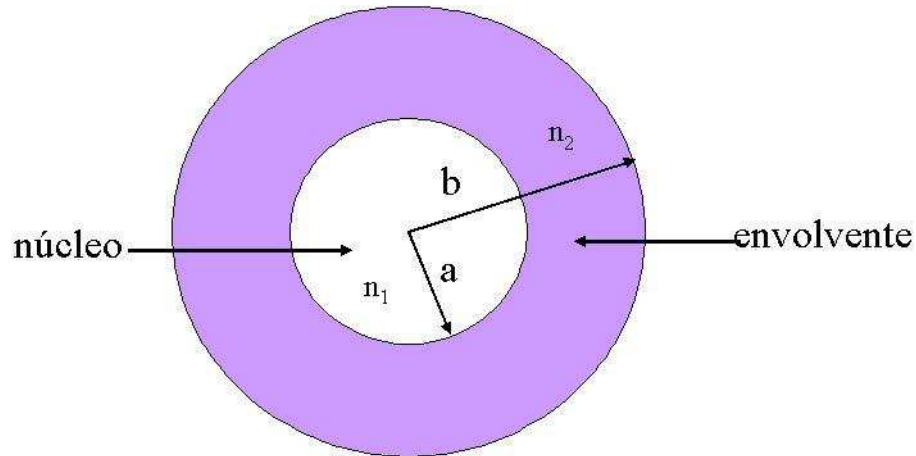


Figura 3.1: Fibra óptica.

Las fibras ópticas más comunes son: la fibra óptica de índice escalon y la fibra óptica de índice gradual. En la fig.3.2 mostramos la sección transversal de este tipo de fibras y también el esquema de la distancia radial y el índice de refracción[28, 29].

En la fig.3.2 de la seccion transversal se ve claramente que ambas fibras estan compuestas por un núcleo con radio $r_1 = a$ y una envolvente con radio $r_2 = b$. En el esquema distancia radial e índice de refracción se ve claramente que para la fibra de índice escalon el índice de refracción del núcleo es constante y es mayor que el índice de refracción de la envolvente. Para la fibra de índice gradual se tiene que el índice de refracción es mayor en el centro y este decrece gradualmente dentro del núcleo hasta llegar al índice de refracción de la envolvente en donde se hace constante.

La forma en la que una fibra óptica guía ondas electromagnéticas, es debido al fenómeno de reflexión total interna, el cual ocurre cuando el índice de refracción del núcleo es mayor que el índice de refracción de la envolvente. En la fig.(3.3) se muestra este fenómeno.

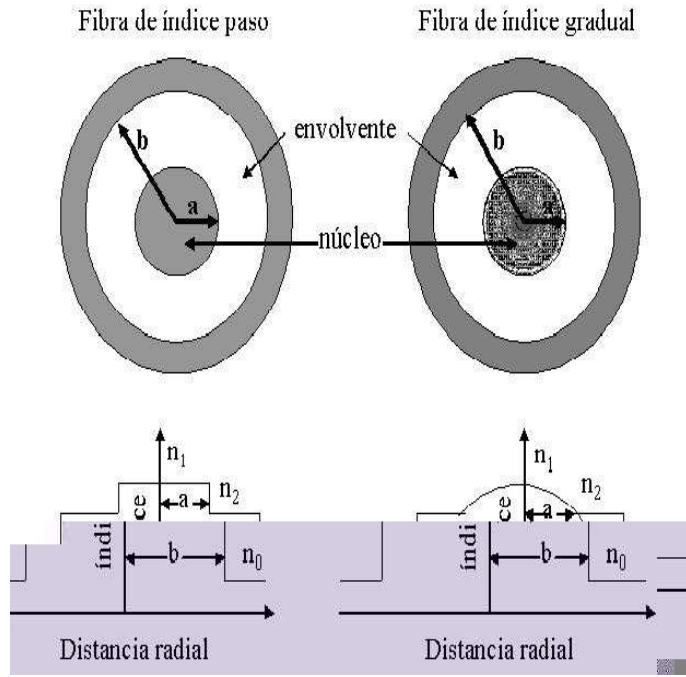


Figura 3.2: Fibras ópticas comunes, esquema de índice de refracción y distancia radial.

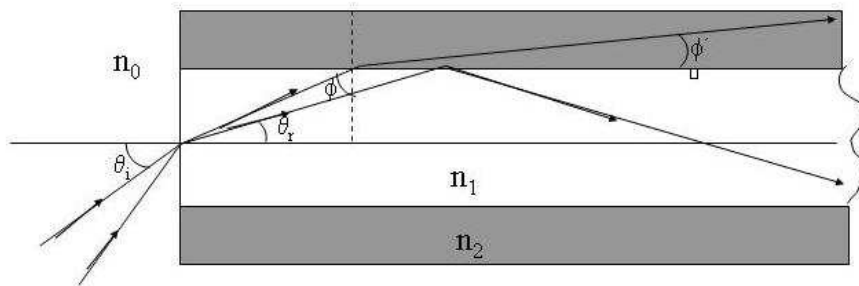


Figura 3.3: Fibras ópticas comunes, esquema de índice de refracción y distancia radial.

Analizamos la geometría de la fig.(3.3), donde un rayo incidente forma un ángulo de incidencia θ_i con el eje de la fibra. Debido a la refracción de la interface fibra-aire, el rayo penetra en el núcleo formando un ángulo θ_r . El ángulo θ_r del rayo refractado está dado de acuerdo a la ley de Snell[8].

$$n_0 \text{sen} \theta_i = n_1 \text{sen} \theta_r \quad (3.1)$$

donde n_0 es el índice de refracción del aire y n_1 es el índice de refracción del núcleo de la fibra óptica respectivamente. El rayo refractado que incide en la interface núcleo-envolvente es refractado nuevamente, la refracción es posible solo si el ángulo de incidencia ϕ cumple dentro de la fibra

$$n_1 \text{sen} \phi = n_2 \text{sen} \phi'$$

donde n_2 es el índice de refracción de la envolvente, entonces para que exista reflexión total interna se debe cumplir que

$$\text{sen} \phi < n_2/n_1.$$

Existe un ángulo crítico para el cual se cumple la relación

$$\text{sen} \phi_c = n_2/n_1 \quad (3.2)$$

donde n_2 es el índice de refracción de la envolvente. Cuando esta relación se cumple el rayo experimenta reflexión total interna en la interface núcleo-envolvente. Debido a que las reflexiones ocurren a lo largo de la fibra, todos los rayos con $\phi > \phi_c$ se quedan confinados en el núcleo de la fibra. Este es básicamente el mecanismo que está detrás del confinamiento de la luz en una fibra óptica.

Para encontrar el máximo ángulo de incidencia que hace el rayo incidente con el eje de la fibra, el cual lo confinara en el núcleo, utilizamos las ecuaciones (3.1,3.2) y obtenemos que $\theta_r = \pi/2 - \phi_c$, substituyendo θ_r en la ecuación (3.1) tenemos

$$n_0 \text{sen} \theta_i = n_1 \text{cos} \phi_c = (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}. \quad (3.3)$$

$n_0 \text{sen} \theta_i$ es conocida como la Apertura Numerica (AN) de la fibra. Esto representa la capacidad del guiado de la luz en una fibra óptica, la AN puede ser aproximada a uno y en el aire ($n_0 = 1,00028 \approx 1$). Esto significa que el valor más grande de AN es uno. En este caso, el semiángulo θ_t es igual a 90° y la fibra refleja interna y totalmente toda la luz que entra a su cara.

3.1. Fibras ópticas de cristal fotónico

Las fibras ópticas de cristal fotónico se construyen rodeando el núcleo de la fibra convencional por un cristal fotónico bidimensional. Este tipo de fibra se puede construir

por ejemplo, mediante un arreglo periódico de agujeros circulares en una matriz de un material con cierta constante dieléctrica, el núcleo de la fibra óptica se construye introduciendo uno o más defectos en la estructura periódica. Estos defectos consisten en omitir o colocar uno o más agujeros en el cristal fotónico. Si el índice de refracción del núcleo es mayor que el índice de refracción del cristal fotónico, la propagación de ondas electromagnéticas ocurre debido al fenómeno de reflexión total interna[2, 28, 29]. Al considerar la propagación de las ondas electromagnéticas a lo largo de los ejes de los agujeros, y debido a este fenómeno, aparecen modos guiados en la estructura los cuales se localizan en los defectos. Sin embargo, si el índice de refracción del núcleo es menor que el índice de refracción del cristal fotónico, la propagación de las ondas electromagnéticas en estos sistemas no puede llevarse a cabo por el fenómeno de reflexión total interna, entonces la propagación de las ondas electromagnéticas se dará por la expulsión de los modos debido al gap fotónico que posea la estructura.

Es decir, si se considera un cristal fotónico con uno o más defectos el cual posee un rango de frecuencias prohibidas (o gaps fotónicos)[30], y se considera la propagación de ondas electromagnéticas cuyas frecuencias estén en el rango de las del gap fotónico, estas sólo podrán propagarse a lo largo del eje de los defectos. Recientemente se ha reportado una fibra óptica de cristal fotónico cuyo núcleo esta compuesto por aire y que es capaz de poseer modos guiados en él[9, 10]. En este tipo de fibras, es posible tener propagación a lo largo del núcleo siempre y cuando el cristal fotónico bidimensional que rodea al núcleo posea un gap fotónico completo.

En el siguiente capítulo se realizarán los cálculos para ver si la estructura de banda de el cristal fotónico bidimensional que sirve como envolvente de esta fibra óptica de cristal fotónico posee un gap fotónico completo. En la fig.(3.4) mostramos este tipo de fibra óptica de cristal fotónico. Si encontramos que este cristal fotónico bidimensional tiene un gap fotónico completo, entonces la propagación de ondas electromagnéticas será por la expulsión de los modos.

En las siguientes figuras se muestran diferentes tipos de fibras ópticas de cristales fotónicos.

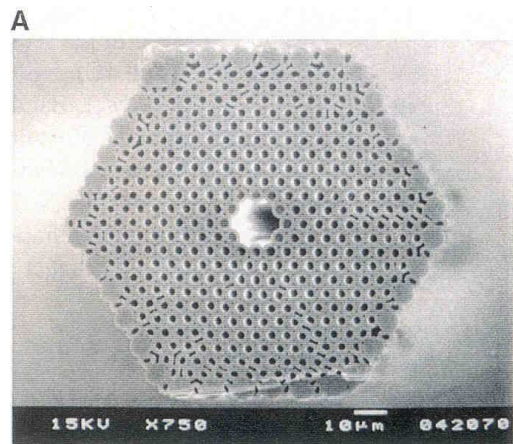


Figura 3.4: Fibras ópticas de cristal fotónico con un núcleo de aire.

Capítulo 4

Aros dieléctricos

En este capítulo se realizan los cálculos para ver si la estructura de banda del cristal fotónico bidimensional que sirve como envoltorio de esta fibra óptica de cristal fotónico posee un gap fotónico completo[9], esta fibra es mostrada en la fig.(4.1).

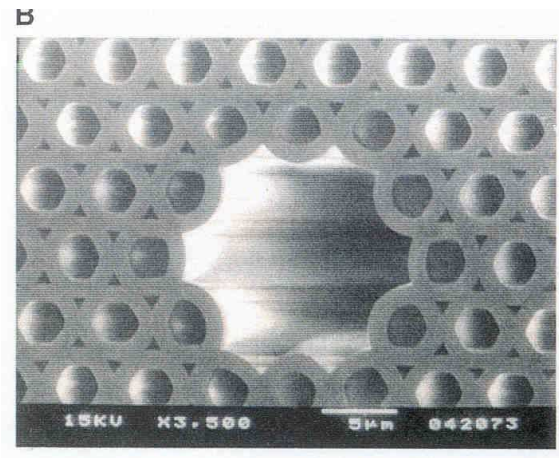


Figura 4.1: fibra óptica de cristal fotónico.

El cristal fotónico bidimensional que hace el papel de la envoltorio de esta fibra óptica de cristal fotónico, consiste de una red triangular compuesta de anillos de material dieléctricos con un radio externo $r_2 = a/2$ y un radio interno r_1 , siendo a la constante de red[9, 10], como se puede ver en la fig.(4.2)

Calcularemos la estructura de bandas de este cristal fotónico bidimensional de la misma forma que se realizó en el capítulo anterior, utilizando la ecuación (1.18), considerando la propagación de las ondas electromagnéticas en el plano de la periodicidad, esto es $kz = 0$ y utilizando las ecuaciones (2.1-2.4). La forma específica de los coeficientes de Fourier $\eta(G)$ para este caso en particular, como ya vimos, en el capítulo anterior tenemos un dos ejemplos que involucran átomos con sección transversal circular, la diferencia es que ahora además tenemos un radio interno. La fracción de llenado para este caso es:

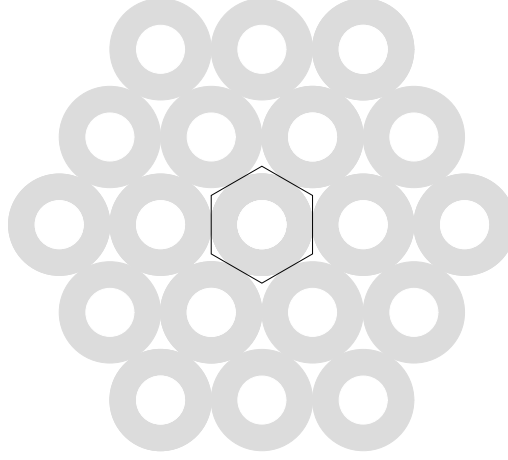


Figura 4.2: Anillos de dióxido de silicio con un radio interno r_1 y un radio externo $r_2 = a/2$, su celda unitaria tiene una constante de red a

$$f_1 = \frac{\pi r_1^2}{A_c} \quad f_2 = \frac{\pi}{A_c}(r_2^2 - r_1^2) \quad (4.1)$$

los coeficientes de Fourier se calculan apartir de la ecuación

$$\eta(\mathbf{G}) = \frac{(\eta_a - \eta_b)}{A_c} \left[\int_{A_a} e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \right] \quad (4.2)$$

para cuando $G = 0$ tenemos que los coeficientes de Fourier son

$$\eta(\mathbf{0}) = f_2\eta_a + (1 - f_2)\eta_b \quad (4.3)$$

y para cuando $G \neq 0$ los coeficientes de Fourier son

$$\eta(\mathbf{G} \neq \mathbf{0}) = 2(\eta_a - \eta_b) \left[(f_1 + f_2) \frac{J_1(|G|r_2)}{|G|r_2} - f_1 \frac{J_1(|G|r_1)}{|G|r_1} \right] \quad (4.4)$$

donde $J_1(|G|r_0)$ es la función de Bessel de orden 1. En la fig.3.2 se muestra la estructura de bandas para el cristal fotónico compuesto por anillos de dióxido de silicio con una constante dieléctrica $\epsilon = 2,1025$. La propagación de las ondas electromagnéticas es en el plano de la periodicidad. Los datos para realizar los calculos fueron tomados del articulo[9], teniendo una constante de red $a = 4,9\mu$, un radio externo $r_2 = 2,45\mu$ y un radio interno $r_1 = 1,40\mu$. Los modos TM son de color azul y los modos TE son de color rojo.

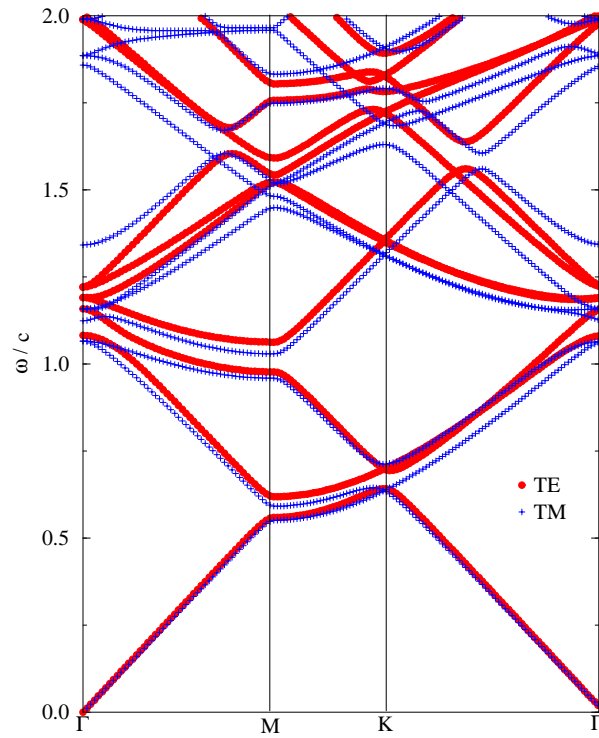


Figura 4.3: Estructura de bandas para anillos de dióxido de silicio con una constante dieléctrica $\epsilon = 2,1025$. La propagación de las ondas electromagnéticas es en el plano de la periodicidad. Con radio externo $r_2 = 2,45\mu$ y radio interno $r_1 = 1,40\mu$.

Se puede apreciar claramente que no existe gap fotónico completo en esta estructura de bandas, entonces para asegurarnos de que no existen gaps en el plano de la periodicidad, se calculara la estructura de bandas para radios internos diferentes en el plano de la periodicidad. Las siguientes figuras nos muestran la estructura de bandas para dos radios internos diferentes, la primera tiene un radio interno $r_1 = 0,500\mu$ y la segunda tiene un radio interno $r_1 = 2,35\mu$. En las figs.(3.3) y (3.4) mostramos la estructura de bandas para los dos radios internos mencionados.

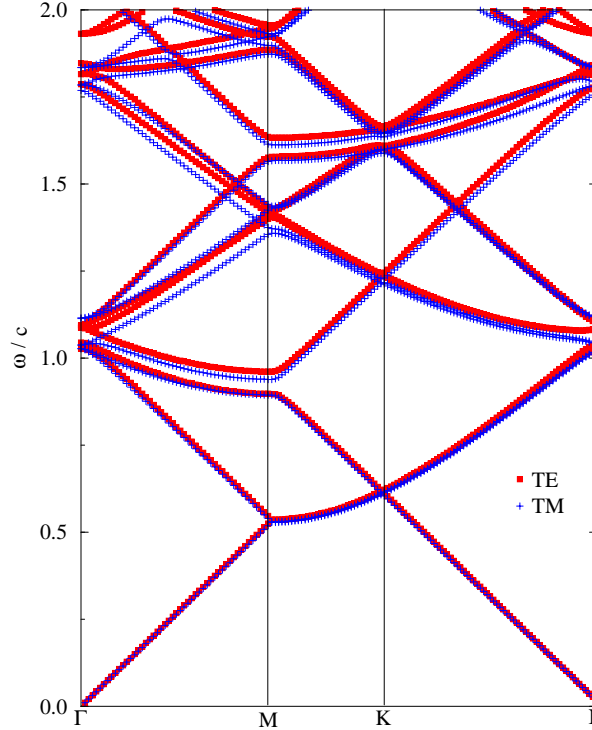


Figura 4.4: Estructura de bandas para anillos de dióxido de silicio con una constante dieléctrica $\epsilon = 2,1025$. La propagación de las ondas electromagnéticas es en el plano de la periodicidad. Con radio externo $r_2 = 2,45\mu$ y radio interno $r_1 = 0,50\mu$.

Se puede apreciar que no existe gap fotónico completo en ninguna de las estructuras de bandas que aquí se presentan. Por lo tanto, concluimos que para la propagación de ondas electromagnéticas en el plano de la periodicidad, la estructura de banda de este cristal fotónico bidimensional no posee gap fotónico completo. Ahora se buscará el gap fotónico fuera del plano de la periodicidad.

4.1. Propagación fuera del plano de la periodicidad $k_z \neq 0$

Para la propagación de las ondas electromagnéticas fuera del plano de la periodicidad $k_z \neq 0$, ahora el vector \mathbf{k} tiene sus tres componentes, esto es; $\mathbf{k} = k_x\hat{i} + k_y\hat{j} + k_z\hat{k}$, resolvemos la ecuación (1.18), y nos damos cuenta que esta ecuación no puede ser separada como en el caso anterior, por lo que tenemos una ecuación con sus tres componentes donde los modos

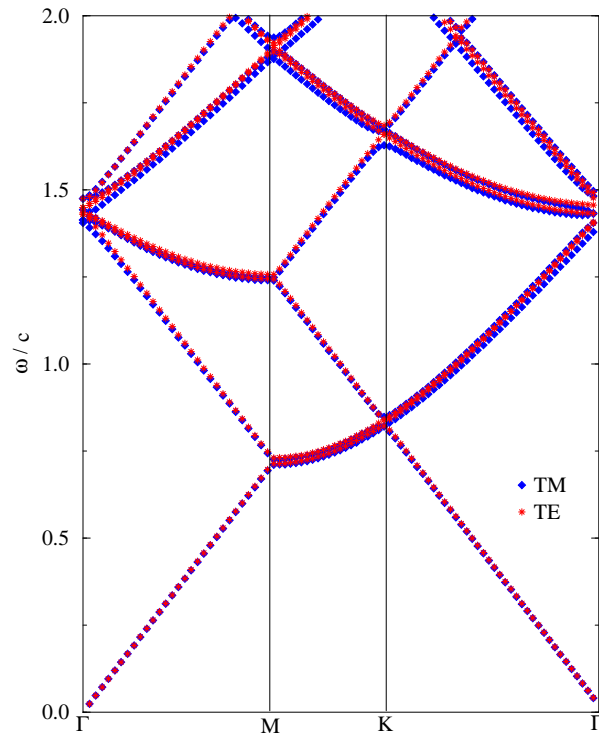


Figura 4.5: Estructura de bandas para anillos de dióxido de silicio con una constante dieléctrica $\epsilon = 2,1025$. La propagación de las ondas electromagnéticas es en el plano de la periodicidad. Con radio externo $r_2 = 2,45\mu$ y radio interno $r_1 = 2,35\mu$.

TE y TM se encuentran mezclados[?]. Separaremos por componentes la ecuación obtenida,

componente x

$$\sum_{\mathbf{G}'} \eta(\mathbf{G} - \mathbf{G}') \left[((k_y + G_y)^2 + k_z^2) H_x - [(k_y + G_y)(k_x + G_x)] H_y - [k_z(k_x + G_x)] H_z \right] = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 H_x(\mathbf{G})$$

componente y

$$\sum_{\mathbf{G}'} \eta(\mathbf{G} - \mathbf{G}') \left[-((k_x + G_x)(k_y + G_y)) H_x + [(k_x + G_x)^2 + k_z^2] H_y - [k_z(k_y + G_y)] H_z \right] = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 H_y(\mathbf{G})$$

componente z

$$\sum_{\mathbf{G}'} \eta(\mathbf{G} - \mathbf{G}') \left[-((k_x + G_x)k_z) H_x - [(k_y + G_y)k_z] H_y + [(k_x + G_x)^2(k_y + G_y)^2] H_z \right] = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 H_z(\mathbf{G}).$$

Las ecuaciones anteriores nos daran la estructura de bandas del cristal fotónico, la cual se muestra en la fig.(3.5), tenemos una estructura de bandas en donde claramente se ve que no se puede distinguir entre los modos transversales magnéticos TM y los modos transversales eléctricos TE[1], ya que se encuentran mezclados.

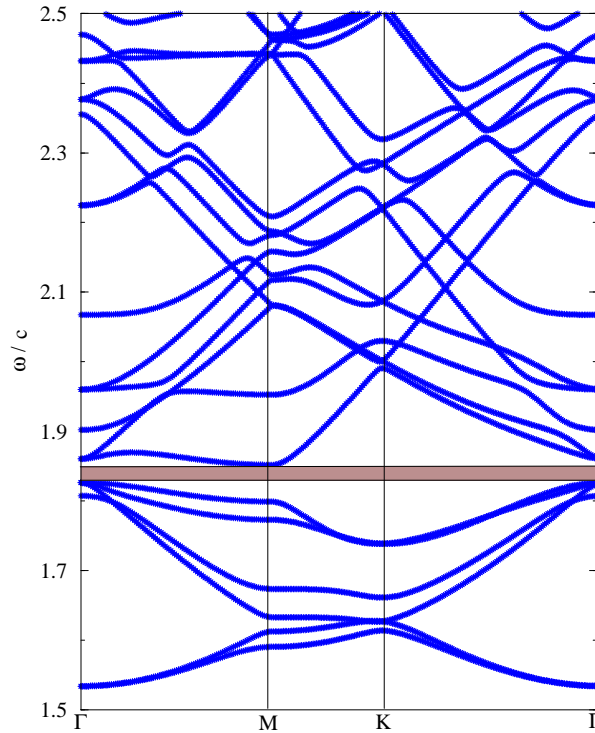


Figura 4.6: Estructura de bandas para los anillos de dióxido de silicio, la propagación es fuera del plano de la periodicidad, $k_z = 2,0$.

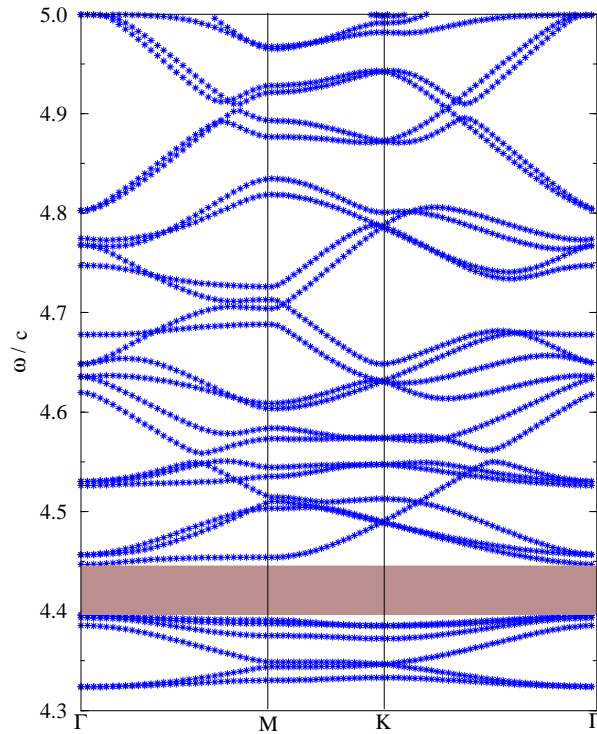


Figura 4.7: Estructura de bandas para los anillos de dióxido de silicio, la propagación es fuera del plano de la periodicidad, $k_z = 6,0$.

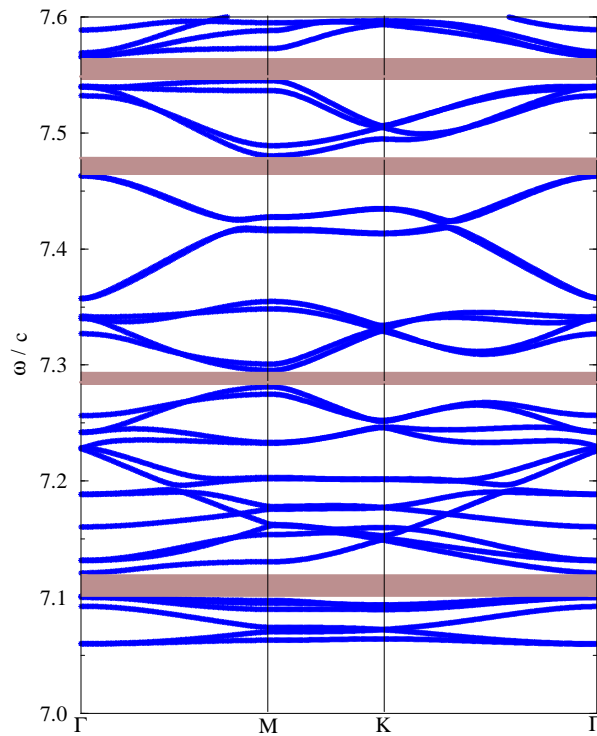


Figura 4.8: Estructura de bandas para los anillos de dióxido de silicio, la propagación es fuera del plano de la periodicidad, $k_z = 10,0$.

En esta estructura de bandas se puede apreciar la existencia de gaps fotónicos que era lo que se quería encontrar para este cristal fotónico. Las características para la obtención de esta estructura son radio externo $r_2 = 2,45\mu$, radio interno $r_1 = 1,40\mu$, $k_z = 10$. Se realizaron varios calculos con diferentes valores de k_z . Finalmente después de obtenidas las estructuras de bandas para cada valor de k_z , se grafica el valor de k_z contra la frecuencia donde aparecen los gaps fotonicos completos, esta grafica se muestra en la fig.3.8.

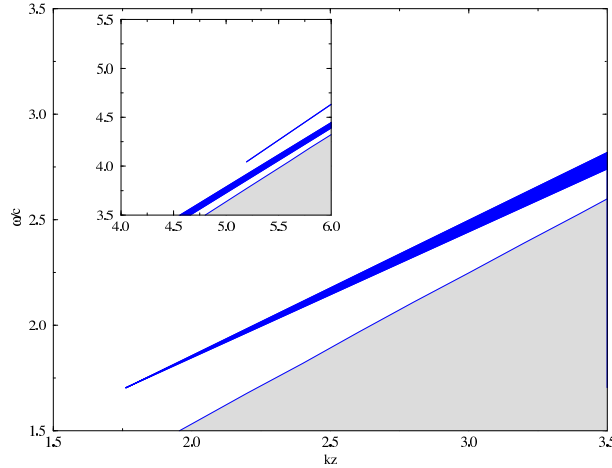


Figura 4.9: Valores de k_z contra el rango de frecuencia en donde es localizados los gaps fotónicos completos.

Comparemos ahora nuestros resultados con los resultados experimentales reportados en la referencia[9], donde los autores reportan que esta fibra óptica de cristal fotónico bidimensional tiene un pico en el espectro de luz transmitida en el centro de aire de la fibra con una longitud de onda de alrededor de 810nm. En la fig.(4.) mostramos la fig.4 de la referencia[9]. Entonces, esto nos indica que el cristal fotónico debe de tener un gap fotónico completo con una frecuencia de alrededor de $(\omega/c) = 7,75\mu m^{-1}$. Con estos valores buscamos el valor correspondiente de k_z para el cual el cristal fotónico posee un gap fotónico completo para la frecuencia reportada (ω/c) , y encontramos que el valor es $k_z = 10,93$. La fig.(4.) nos muestra la estructura de banda para los valores reportados en la referencia. Vemos que la estructura de bandas posee un gap fotónico completo en la frecuencia especificada.

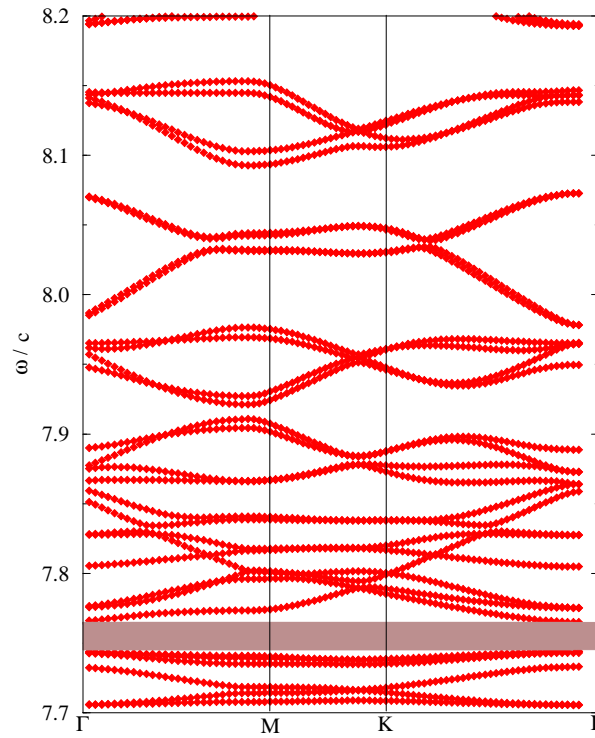


Figura 4.10: Estructura de banda con un valor de $k_z = 10,93$ fuera del plano de la periodicidad con la frecuencia $(\omega/c) = 7,75\mu m^{-1}$.

Capítulo 5

Conclusiones

Utilizando los conceptos básicos de la mecánica cuántica, la física del estado sólido y la electrodinámica. En conjunto estas tres áreas de la física nos ayudan a comprender el comportamiento de las ondas electromagnéticas en los cristales fónicos. Se resolvieron las ecuaciones de Maxwell sin considerar cargas libres ni corrientes. Y valiendonos del método de ondas planas llegamos a una ecuación que es considerada como un problema matemático de eigenvalores, la cual nos permite calcular las frecuencias permitidas en el plano de la periodicidad para cristales fónicos.

Se calculo la estructura de bandas para cristales fónicos bidimensionales los cuales son homogéneos a lo largo de cierta dirección y son periódicos en el plano de la periodicidad. Se analizaron distintas configuraciones de cristales fónicos bidimensionales con el fin de encontrar bajo que circunstancias se originan los gaps fónicos. El primer caso que se reviso; esto es, en la red cuadrada de columnas circulares dieléctricas encontramos que la estructura de bandas posee un gap fónico solo para los modos TM y este gap desaparece para los modos TE. En el segundo caso, el cuál consiste en la red cuadrada de columnas cuadradas encontramos que la estructura de bandas posee un gap fónico para los modos TE, pero no para los modos TM. Finalmente, para la red triangular de columnas de aire encontramos que la estructura de bandas posee un gap fónico completo para ambas polarizaciones, TE y TM.

Hemos calculado la estructura de bandas para cristales fónicos bidimensionales encontrando que, dependiendo el tipo de arreglo y de los valores de las constantes dieléctricas, es posible encontrar un gap fónico completo en el plano de la periodicidad. Es decir, una región en la que no pueden propagarse las ondas electromagnéticas en todas direcciones en el plano de la periodicidad del cristal. Estos resultados nos sirven de base para calcular la estructura de bandas de cualquier configuración de un cristal fónico. Es la base para calcular la estructura de bandas de un cristal fónico bidimensional que sirve como envolvente en una fibra óptica con núcleo de aire. Los cristales fónicos bidimensionales han encontrado aplicación tecnológica en el campo de las fibras ópticas especialmente en las denominadas "fibras ópticas de cristales fónicos".

Bibliografía

- [1] Kittel, C. *Solid State Physics* (John Wiley & Sons, 1986).
- [2] J. D. Joannopoulos, P. R. Villeneuve, Shanhui Fan, *NATURE*. **386** 143-149 (1997).
- [3] E. Yablonovitch, *Scientific American* 47-55(2001).
- [4] E. Yablonovitch, *Phys. Rev. Lett.* **58** 2059-2062(1987).
- [5] J. Sajeev, *Phys. Rev. Lett.* **58** 2486-2489(1987).
- [6] J. C. Knight, J. Broeng, T. A. Birks, P. St. J. Russell, *SCIENCE* **282** 1476-1478 (1998).
- [7] Pauline Rigby, *NATURE* **396** 415-416 (1998).
- [8] E. Hecht, A. Zajac. *Optica* (Addison-Wesley Iberoamericana, E.U.A. 1986.)
- [9] R. F. Cregan, B. J. Mangan, J. C. Knight, T. A. Birks, P St. J. Russell, P. J. Roberts, D. C. Allan, *SCIENCE* **285** 1537-1539 (1999).
- [10] T. A. Birks, P. J. Roberts, P St. J. Russell, D. M. Atkin, and T. J. Shepherd, *ELECTRONICS LETTERS* **31** Num.22 1941-1942 (1995).
- [11] J. D. Joannopoulos, R. D. Meade, J. N. Winn, *Photonic Crystals: Molding the flow of light*(Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1995).
- [12] Robert D. Meade, Karl D. Brommer, Andrew M. Rappe, and J. D. Joannopoulos, *Phys. Rev. B* **44** Num. 24 13772-13774 (1991).

- [13] S.L. McCall, P.M. Platzman, R. Dalichaouch, David Smith and S. Schultz, *Phys. Rev. Lett.* **67** Num15 2017-2020 (1991).
- [14] W. M. Robertson and G. Ajavalingan *Phys. Rev. Lett.* **68** Num.13 2023-2026 (1992).
- [15] J. B. Pendry *Condens. Matter* **8** 1085-1108 (1996)
- [16] Steven G. Johnson and J. D. Joannopoulos *Optics Express* **8** Num.3 173-190 (2000)
- [17] D. Hermann, M. Frank, K. Busch, and P. Wölfe *Optics Express* **8** Num.3 167-172 (2000)
- [18] T.P. White, R.C. McPhedran, L.C. Botten, G.H. Smith, C. Martijn de Sterke *Optics Express* **9** Num.13 721-732 (2001)
- [19] A. Modinos, N. Stefanou, and V. Yannopapas *Optics Express* **8** Num.3 197-202 (2000)
- [20] E. Yablonovitch, *Condens. Matter B* **5** 2443-2460 (1993).
- [21] K. M. Ho, C. T. Chan, and C. M. Soukoulis. *Phys. Rev. Lett.* **65** Num.25, 3152-3155 (1990).
- [22] F. Genereux, S. W. Leonard, H. M. Driel, A. Brirner and U. Gösele, *Phys. Rev. B* **63** 1-4 (2001).
- [23] E. Yablonovitch, T.J. Gmitter, and K.M.Leung *Phys. Rev. Lett.* **67** Num.17 2295-2298 (1991).
- [24] Pierre R. Villeneuve and Michel Piché, *Phys. Rev. B* **46** Num.8 4973-4975 (1992).
- [25] M. Plihal and A. A. Maradudin, *Phys. Rev. B* **44** Num.16 8565-8571 (1991).
- [26] D. Cassagne, C. Jouanin, and D. Bertho, *Phys. Rev. B* **53** Num.11 7134-7142 (1996).

- [27] Robert D. Meade, Karl D. Brommer, Andrew M. Rappe, and J. D. Joannopoulos
Appl. Phys. Lett. **61** Num.4 495-497 (1992).
- [28] Agrawal Govind P. *Fiber-Optic Communication Systems* (Wiley-Interscience, 1999).
- [29] Agrawal Govind P. *Nonlinear Fiber Optic* (academic Press, 1999).
- [30] D.R. Smith, R. Dalichaouch, N. Kroll, S. Schultz, S.L. MacCall and P.M. Platzman
Opt. Soc. Americana **10** Nom.2 314-321(1993).

