



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA

**MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA
OPCIÓN EN AUTOMATIZACIÓN**

“Control de trayectoria de Robots Manipuladores”

T E S I S

Presentada para obtener el título de:
Maestro en Ciencias de la Electrónica, Opción en Automatización

Presenta:

Ing. Fabrizio Ricardo Cahuas Talledo*

Directores:

Dr. José Fernando Reyes Cortés [FCE-BUAP]

Dr. Pablo Sánchez Sánchez [FCFM-BUAP]

Dr. Rodolfo Reyes Báez [University of Groningen (HOLANDA)]

Puebla, México

Julio 2023

* Becario CONAHCYT

Dedicatoria

A mis padres

Agradecimientos

Agradezco a mis asesores por su dedicación y paciencia, sin sus palabras y correcciones precisas no hubiese podido llegar a esta instancia tan anhelada. Un especial agradecimiento al Dr. Fernando Reyes, gracias por su guía y consejos los cuales los tendré siempre grabados en la memoria para mi futuro profesional.

Le agradezco a mis padres y hermana que me han brindado su apoyo incondicional para siempre cumplir mis objetivos académicos y personales. También un agradecimiento a mis familiares que con sus palabras de aliento permitieron seguir adelante, concentrado en mis metas y no abandonarlas frente a cualquier adversidad.

Agradecerle a todos mis compañeros de clases y profesores por las horas compartidas, consejos y ayudas en los trabajos. Finalmente un agradecimiento a CONACYT por el apoyo económico brindado para poder realizar mis estudios de Maestría en Ciencias de la Electrónica en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Índice general

Agradecimientos	v
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Antecedentes	2
1.3. Formulación del problema	3
1.3.1. Hipótesis	3
1.3.2. Alcances	4
1.4. Contribuciones	5
1.5. Objetivos	5
1.5.1. Objetivo general	5
1.5.2. Objetivos particulares	5
2. Preliminares matemáticos	7
2.1. Cinemática	7
2.1.1. Cinemática directa	7
2.1.2. Geometría del robot	8
2.1.2.1. Representación de posición	8
2.1.2.2. Representación de rotación	9
2.1.3. Cinemática analítica de Euler	12
2.2. Dinámica	16
2.2.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange	16
2.2.2. Propiedades del modelo dinámico	19
2.2.2.1. Matriz de inercia	19
2.2.2.2. Fuerzas centrípetas y de Coriolis	20
2.2.2.3. Par gravitacional	21
2.3. Control	23
2.3.1. Introducción	23
2.3.2. Teoría de estabilidad en el sentido de Lyapunov	24
2.3.3. Método directo de Lyapunov	27
2.3.4. Control con acciones acotadas	28
2.3.5. Control de trayectoria	29
2.3.5.1. Control PD+	30
2.3.5.2. Control par calculado	32
2.4. Índice de desempeño	33

2.5. Estimadores	33
3. Modelado dinámico	35
3.1. Robot de 1 grado de libertad (Péndulo)	36
3.1.1. Cinemática directa analítica de Euler	36
3.1.2. Cálculo de la velocidad	37
3.1.3. Cálculo de la rapidez lineal	37
3.1.4. Cálculo de las energías	38
3.1.4.1. Energía cinética	38
3.1.4.2. Energía potencial	38
3.1.5. Cálculo del Lagrangiano	38
3.1.6. Ecuaciones de Euler-Lagrange	38
3.1.7. Modelo dinámico	39
3.2. Robot de 2 grados de libertad	39
3.2.1. Cinemática directa analítica de Euler	39
3.2.2. Cálculo de la velocidad	40
3.2.3. Cálculo de la rapidez	40
3.2.4. Cálculo de las energías	41
3.2.4.1. Energía cinética	41
3.2.4.2. Energía potencial	41
3.2.5. Cálculo del Lagrangiano	41
3.2.6. Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange	41
3.2.7. Modelo dinámico	42
3.3. Robot de 3 grados de libertad	43
3.3.1. Cinemática directa analítica de Euler	45
3.3.1.1. Eslabón 1	45
3.3.2. Cinemática diferencial	45
3.3.3. Cálculo de la rapidez	46
3.3.4. Cálculo de las Energías	47
3.3.4.1. Cálculo de la Energía cinética	47
3.3.4.2. Cálculo de la Energía potencial	47
3.3.5. Cálculo del Lagrangiano	47
3.3.6. Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange	48
3.3.7. Modelo dinámico	48
4. Algoritmos de control	49
4.1. Esquema de control de trayectoria	49
4.2. Control PD+ hiperbólico	50
4.2.1. Ecuación en lazo cerrado	51
4.2.2. Análisis de estabilidad asintótica	51
4.2.2.1. Existencia y unicidad del punto de equilibrio	51
4.2.2.2. Función de Lyapunov candidata	52
4.3. Control Par calculado hiperbólico	54
4.3.1. Ecuación en lazo cerrado	54
4.3.2. Análisis de estabilidad asintótica	54

4.3.2.1.	Existencia y unicidad del punto de equilibrio	54
4.3.2.2.	Función de Lyapunov candidata	55
5.	Análisis de estimadores	57
5.1.	Estimador exponencial	57
5.2.	Estimador hiperbólico	59
5.2.1.	Demostración de convergencia asintótica del error de estimación	59
5.2.1.1.	Regulación	59
5.2.1.2.	Trayectoria	60
6.	Plataforma experimental	61
6.1.	Robot manipulador	61
6.1.1.	Servomotores de transmisión directa	61
6.1.2.	Encoders	63
6.2.	Plataforma de control	65
6.2.1.	Arduino MKR vidor 4000	65
6.2.1.1.	Especificaciones técnicas	66
6.2.1.2.	Programación en placa Arduino MKR vidor 4000	66
6.2.2.	Servoamplificador - Tarjeta	66
6.2.3.	Etapa de acondicionamiento de señales	67
6.3.	Interfaz gráfica	68
7.	Resultados	71
7.1.	Control de posición	71
7.1.1.	Regulación con PD	71
7.1.2.	Regulación con controlador hiperbólico	74
7.1.3.	Índice de desempeño	77
7.2.	Control de posición con extensión dinámica para obtener la velocidad	82
7.2.1.	Control de posición con estimador	82
7.2.2.	Control de posición con estimador propuesto	90
7.3.	Control de trayectoria	97
7.3.1.	Cosimulación	98
7.3.2.	Resultados de cosimulación	101
7.3.2.1.	Controlador PD+	101
7.3.2.2.	Controlador $\tanh(\cdot)$	102
7.3.2.3.	Controlador Hiperbólico propuesto	104
7.3.2.4.	Norma $\mathcal{L}_2$	105
	CONCLUSIONES	109
	Apéndice	111

Índice de figuras

2.1.	Representación de un punto en el espacio bidimensional desde dos sistemas de referencia distintos.	9
2.2.	Rotación de sistemas de referencia en un plano.	10
2.3.	Rotación de sistemas de referencia en 3 dimensiones.	11
2.4.	Composición de tres rotaciones sucesivas.	12
2.5.	Composición de traslación y rotación.	13
2.6.	Estabilidad asintótica [36]	26
2.7.	Perfil típico de un servo-amplificador electrónico.	29
2.8.	Diagrama de bloques PD+.	30
2.9.	Diagrama de bloques Par calculado.	32
3.1.	Metodología para modelado dinámico a través de la mecánica analítica de Euler. . . .	35
3.2.	Sistemas de referencia de un robot manipulador de 1 gdl.	36
3.3.	Sistemas de referencia con el eslabón rotado.	37
3.4.	Sistemas de referencia de un robot manipulador de 2gdl.	39
3.5.	Sistemas de referencia de un robot de 3 gdl.	43
4.1.	Función vectorial hiperbólica con distintos valores de m	49
4.2.	Función vectorial hiperbólica con distintos valores de η	50
6.1.	Robot manipulador de 3 gdl.	62
6.2.	Servomotor y servoamplificador.	63
6.3.	Encoder.	64
6.4.	Señales A y B de encoder.	65
6.5.	Placa MKR vidor 4000 [52].	65
6.6.	Flujo de programación para Arduino MKR vidor 4000 [52].	67
6.7.	Diagrama de bloques de la plataforma experimental.	67
6.8.	Circuito de acondicionamiento de señal.	68
6.9.	Ventana principal de interfaz gráfica.	69
6.10.	Ventana de interfaz gráfica “Encoder”.	69
6.11.	Ventana para control de posición.	70
7.1.	Posiciones articulares del control PD.	72
7.2.	Velocidades articulares del control PD.	73
7.3.	Par aplicado de control PD.	73
7.4.	Posición articular de control hiperbólico con $m = 1$	76

7.5. Velocidad articular de algoritmo hiperbólico con $m = 1$	76
7.6. Par aplicado de control hiperbólico con $m = 1$	77
7.7. Posición articular de control hiperbólico con $m = 2$	78
7.8. Velocidad articular de algoritmo hiperbólico con $m = 2$	78
7.9. Par aplicado de control hiperbólico con $m = 2$	79
7.10. Posición articular de control hiperbólico con $m = 3$	79
7.11. Velocidad articular de algoritmo hiperbólico con $m = 3$	80
7.12. Par aplicado de control hiperbólico con $m = 3$	80
7.13. Índice de desempeño en estado transitorio.	81
7.14. Índice de desempeño en estado estacionario.	82
7.15. Posición articular - Control PD con extensión dinámica.	84
7.16. Velocidad articular - Control PD con extensión dinámica.	84
7.17. Par aplicado - Control PD con extensión dinámica.	85
7.18. Posición articular - Control Tanh con extensión dinámica.	85
7.19. Velocidad articular - Control Tanh con extensión dinámica.	86
7.20. Par aplicado - Control Tanh con extensión dinámica.	86
7.21. Posición articular - Control Hiperbólico con extensión dinámica.	87
7.22. Velocidad articular - Control Hiperbólico con extensión dinámica.	87
7.23. Par aplicado - Control Hiperbólico con extensión dinámica.	88
7.24. Índice de desempeño en estado transitorio con extensión dinámica.	89
7.25. Índice de desempeño en estado estacionario con extensión dinámica.	89
7.26. Posición articular - Control PD con extensión dinámica hiperbólica.	91
7.27. Velocidad articular - Control PD con extensión dinámica hiperbólica.	91
7.28. Par aplicado - Control PD con extensión dinámica hiperbólica.	92
7.29. Posición articular - Control Tanh con extensión dinámica hiperbólica.	93
7.30. Velocidad articular - Control Tanh con extensión dinámica hiperbólica.	93
7.31. Par aplicado - Control Tanh con extensión dinámica hiperbólica.	94
7.32. Posición articular - Control Hiperbólico con extensión dinámica hiperbólica	94
7.33. Velocidad articular - Control Hiperbólico con extensión dinámica hiperbólica.	95
7.34. Par aplicado - Control Hiperbólico con extensión dinámica hiperbólica.	95
7.35. Índice de desempeño en estado transitorio con extensión dinámica hiperbólica.	96
7.36. Índice de desempeño en estado estacionario con extensión dinámica hiperbólica.	97
7.37. Diagrama de flujo para cosimulación.	99
7.38. Entorno de modelado - Solidworks.	99
7.39. Entorno de animación - Adams MSC.	100
7.40. Entorno de simulación - Simulink.	100
7.41. Posición articular - Controlador PD+.	102
7.42. Velocidad articular - Controlador PD+.	103
7.43. Par aplicado - PD+.	103
7.44. Posición articular - Controlador tanh(.).	104
7.45. Velocidad articular - Controlador tanh(.).	104
7.46. Par aplicado - tanh(.).	105
7.47. Posición articular - Controlador propuesto hiperbólico.	106
7.48. Velocidad articular - Controlador propuesto hiperbólico.	106

7.49. Par aplicado - Controlador propuesto hiperbólico.	107
7.50. Norma $\mathcal{L}_2$ - Posición - Control de trayectoria.	107
7.51. Norma $\mathcal{L}_2$ - Velocidad - Control de trayectoria.	108
7.52. Plataforma experimental.	111

Índice de tablas

3.1. Parámetros del robot manipulador de 3gdl.	44
6.1. Características de servomotores de robot experimental.	62
6.2. Características técnicas de Arduino MKR vidor 4000.	66
7.1. Ganancias de controlador PD	72
7.2. Ganancias de controlador hiperbólico.	75
7.3. Ganancias de controladores con extensión dinámica para obtener la velocidad.	83
7.4. Ganancias de controladores con extensión dinámica propuesta para obtener la velocidad.	90
7.5. Ganancias de los algoritmos de control de trayectoria.	101

Simbología

Escalares

f_m	Coefficiente de fricción del rotor con sus soportes
I_i	Momento de inercia del i -ésimo eslabón
J_m	Inercia del rotor
K_a	Constante del motor
K_b	Constante de contrarreactión electromotriz
$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Energía cinética
$\mathcal{K}(q_i, \dot{q}_i)$	Energía cinética del i -ésimo eslabón
$\hat{k}_{pi}$	i -ésimo parámetro adaptable de ganancia proporcional
$\hat{k}_{vi}$	i -ésimo parámetro adaptable de ganancia derivativa
$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Lagrangiano
$\mathcal{L}_n$	Norma $\mathcal{L}_n$
m_i	Masa del i -ésimo eslabón
q_i	Posición de la i -ésima articulación
$\dot{q}_i$	Velocidad de la i -ésima articulación
r	Relación de reducción de los engranes
R_a	Resistencia de armadura
$\mathcal{U}(\mathbf{q})$	Energía potencial
$\mathcal{U}_a(\mathbf{K}_p, \tilde{\mathbf{q}})$	Energía potencial articular de diseño
v	Voltaje de armadura

Matrices

B	Matriz diagonal de coeficientes de fricción viscosa
$C(q, \dot{q})$	Matriz de Coriolis y fuerzas centrípeta
F_c	Matriz diagonal de coeficientes de fricción de Coulomb
K_v	Matriz de ganancia derivativa
$\hat{K}_v$	Matriz diagonal de ganancias derivativas estimadas
K_p	Matriz de ganancia proporcional
$\hat{K}_p$	Matriz diagonal de ganancias proporcional estimadas
$M(q)$	Matriz de masas e inercias

Vectores

f_e	Vector de fuerzas o pares de fricción estática
$f_f(\dot{q})$	Vector general de fuerzas o pares de fricción
$f_v(K_p, \dot{q})$	Vector de amortiguamiento o freno mecánico
$g(q)$	Vector de par gravitacional
$\hat{k}_a$	Vector de parámetros adaptables
$\hat{k}_p$	Vector de parámetros adaptables de K_p
$\hat{k}_v$	Vector de parámetros adaptables de K_v
q	Vector de posición en coordenadas articulares
q_d	Vector de posición deseada en coordenadas articulares
$\dot{q}$	Vector de velocidad en coordenadas articulares
q_r	Vector de posición articular de referencia
$\tilde{q}$	Vector de error de posición en coordenadas articulares
$\tilde{q}_a$	Vector de error de adaptación
$\hat{\theta}$	Vector de parámetros estimados
τ	Vector de pares o torques aplicados
v_i	Vector de velocidad lineal del centro de masa del i -ésimo eslabón

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

El control de robots manipuladores ha sido uno de los temas de mayor investigación en los últimos años. Existen varias tareas que requieren capacidades de seguimiento de trayectoria eficaz tales como soldadura con plasma, corte laser u operaciones de alta velocidad en la presencia de obstáculos. En este caso, el empleo de esquemas locales requiere moverse lentamente a través de una serie de consignas intermedias, retrasando considerablemente la finalización de la tarea. Por lo tanto, para mejorar el desempeño de seguimiento de la trayectoria, los controladores deben tener en cuenta el modelo dinámico del manipulador a través de una técnica similar a un par calculado [1–4] .

Existen diferentes técnicas y metodologías de control que se pueden aplicar al control de manipuladores. El método de control particular elegido, así como la forma en que se implementa, puede tener un impacto significativo en el rendimiento del manipulador y, en consecuencia, en el rango de sus posibles aplicaciones. Además, el diseño mecánico del propio manipulador influirá en el tipo de esquema de control necesario. Continuamente se realizan mejoras tecnológicas en el diseño mecánico de los robots, lo que a su vez mejora su potencial de rendimiento y amplía su gama de aplicaciones. Sin embargo, darse cuenta de este mayor rendimiento requiere enfoques de control más sofisticados. Como es el caso de un robot manipulador de transmisión directa que utiliza motores de alto par sin reducción de engranajes. Con esta tecnología se eliminan los problemas de contragolpe, fricción y flexibilidad debido a los engranajes que poseen los motores con engranajes. Sin embargo, el acoplamiento entre los eslabones ahora es significativo y la dinámica de los servomotores puede ser más compleja. El resultado es que para lograr un alto rendimiento de este tipo de manipulador, se debe abordar un conjunto diferente de problemas de control [5, 6].

Varios trabajos relacionados al control de trayectoria carecen de una prueba de estabilidad asintótica global en el punto de equilibrio. En la literatura se encuentra reportada la demostración de estabilidad global en el punto de equilibrio del controlador PD+, la cual se caracteriza por su simplicidad, por eso la principal motivación de realizar el presente trabajo, es diseñar y analizar un algoritmo basado en funciones hiperbólicas acotadas, las cuales permitan controlar el movimiento del efector final de un robot de 3 grados de libertad (gdl). Para ello, es necesario saber diseñar nuevas estrategias de control basadas en funciones hiperbólicas acotadas y analizar matemáticamente las funciones estrictas de

Lyapunov.

1.2. Antecedentes

Hoy en día el interés de la comunidad científica en robótica y control se ubica en utilizar robots manipuladores para realizar movimientos de alta velocidad y con un alto grado de exactitud y precisión [7]. Los robots manipuladores representan sistemas dinámicos con un comportamiento no lineal, multivariable y fuertes acoplamientos dinámicos. Estas características coadyuvan a ser considerados como plantas de análisis y estudio en la formulación de nuevos problemas abiertos para la comunidad científica [8, 9] .

El problema de control de trayectoria o control de movimiento es de los temas más importantes en robótica, consiste en mover al extremo final del robot desde cualquier condición inicial siguiendo trayectorias deseadas variantes en el tiempo en posición y velocidad, sin interactuar con su entorno. La estructura matemática de los algoritmos de control de movimiento incluye la dinámica completa del robot manipulador, por lo que su exactitud, desempeño y robustez dependen de qué tan completa se la metodología de modelado dinámico, así como el grado de posición con que se conozcan los parámetros del robot [10, 11].

Sin embargo, el desempeño del algoritmo de control dependerá del modelo dinámico del robot manipulador. En el caso de tener un desconocimiento parcial o completo en algunos fenómenos de la dinámica del robot, entonces se puede causar inexactitud en el posicionamiento del robot, obteniendo errores de posición $\tilde{\mathbf{q}}$ muy grandes o inaceptables, provocando que inclusive el error de posición $\tilde{\mathbf{q}}$ pueda ser no acotado. Otros escenarios de la incertidumbre paramétrica pueden conducir a la inestabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado.

Los controladores de trayectoria clásicos son los esquemas PD+ y el Par-Calculado. Dentro de estos dos tipos de controles, el mas simple PD+ fue propuesto en [12] y posteriormente analizado con mayor profundidad en [13] y [14]. Por otro lado, el algoritmo de control Par-Calculado fue presentado en [5, 15, 16] y analizado por [17].

En las décadas de los años 1980, 1990 y 2000 hubo modestas modificaciones en los esquemas PD+ y par-calculado, no se reformó de manera importante la estructura de esos algoritmos de control. Lo anterior se debe principalmente a que ambos controladores utilizaron en el lazo de retroalimentación el modelo dinámico completo del robot manipulador, por lo que incrementa su complejidad. Además, la implementación requiere tener acceso a las variables de estado (posición y movimiento), así como necesariamente conocer los valores numéricos de los parámetros estructurales [18, 19].

No obstante, en los últimos años, el tema de control de trayectoria ha recobrado un enorme interés en la comunidad científica usando diversas herramientas modernas de control lineal; al mismo tiempo, con el avance de la tecnología en microprocesadores de alto desempeño en cálculos numéricos y bajo costo, como los sistemas empujados o embebidos que trabajan en tiempo real, hace que las aplicaciones de control de trayectoria sean mucho más extensas [20–22].

En [23], se propone una red neuronal basada en propagación hacia atrás para el control de trayectoria de un robot de 2 gdl a través de un modelo de incertidumbre de un manipulador de n gdl basado en un estudio profundo de control de rechazo de perturbación activa; y el algoritmo de control empleado es PID. Por otro lado en [24] se plantea un control de movimiento de un robot de 2 gdl usando un PID y un controlador con optimización de colonia de hormigas. Si bien en ambos casos se sigue la trayectoria deseada, no se lleva a cabo un análisis de estabilidad asintótica en el punto de equilibrio, lo cual es de vital importancia ya que asegura que el error de posición y velocidad convergen a cero.

Se simula un esquema de control adaptativo en [2], el cual aprovecha la completa ventaja de los parámetros conocidos mientras que los desconocidos son estimados, dicha investigación fue aplicada a un robot cortador manipulador e implementada en MATLAB®/Simulink®. En [25] se desarrolla el control de trayectoria de un robot de 3 gdl basado en modos deslizantes, el modelado dinámico se realiza a través de la metodología de Denavit-Hartenberg. Un controlador de trayectoria de un robot de 3 gdl planar basado en un PD no lineal y modos deslizantes es propuesto en [26] y en [27] se desarrolla un control de trayectoria basado en optimización de enjambres e interferencia del sistema neuro-lógica difusa adaptativa para un robot de 3 gdl planar, al igual que en [28] para un robot de 2 gdl se implementa un control de trayectoria en presencia de gravedad y fricción. El problema de control de trayectoria de un robot manipulador es abordado en [29] mediante el uso de un controlador con modos deslizantes junto con el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov para un robot de 2 gdl.

De acuerdo a la revisión de la literatura no se ha reportado el diseño de esquemas de control de trayectoria utilizando una combinación adecuada de funciones hiperbólicas con acciones acotadas. Por lo que, la naturaleza del presente trabajo de investigación se centra en aspectos abiertos de interés para la comunidad científica; consecuentemente, el objetivo principal de este trabajo es abordar el problema de control de trayectoria para robots manipuladores, a través del diseño de algoritmos de control con estructura hiperbólica y con análisis formal de estabilidad asintótica del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado. Adicionalmente el modelo dinámico se realiza a través de la mecánica analítica de Euler y se propone un estimador de la velocidad a partir de la posición también basado en una función hiperbólica. El desempeño de los algoritmos de control de trayectoria será evaluado en un robot de transmisión directa de 3 grados de libertad.

La motivación del presente trabajo se ubica en la no linealidad y fuertes acoplamientos dinámicos del esquema de control de trayectoria, no hay herramientas adecuadas para analizar su desempeño como en el caso lineal. Sin embargo, en la normas $\mathcal{L}_2$, pueden darse argumentos similares para el margen de fase y estado estacionario único (posiblemente variante en el tiempo).

1.3. Formulación del problema

1.3.1. Hipótesis

Se diseña un algoritmo para controlar la trayectoria de un robot antropomórfico de 3 grados de libertad basado en funciones acotados, las cuales eviten que el controlador sature los motores, a

través de la demostración de estabilidad asintótica global en el punto de equilibrio y el cálculo del índice de desempeño del controlador.

1.3.2. Alcances

El problema del control de trayectoria consiste en encontrar el torque necesario, el cual es entregado por los actuadores de cada articulación con el propósito de seguir la trayectoria deseada. Este problema es bastante complejo, ya que un robot manipulador es un sistema articulado y como tal el movimiento de uno de los eslabones influye en el movimiento de los otros, por lo tanto se dice que las ecuaciones de movimiento del manipulador revelan la presencia de efectos de dinámicas acopladas entre las articulaciones [5].

El torque necesario para seguir una trayectoria no puede ser calculado a través de un solo conocimiento de el modelo dinámico ya que este no llega a describir la dinámica completa real del manipulador. Por lo tanto, la tarea de control es realizada mediante un control en lazo cerrado, el cual realimenta el error que existe entre la referencia y la información suministrada ya sea por los sensores o por observadores.

Por otro lado los actuadores no son capaces de suministrar torques ilimitados, por eso se debe asegurar que cuando el efector final intente seguir la trayectoria y se genere un error, el controlador de acuerdo al error obtenido no inyecte mas energía de la que un actuador pueda entregar, este fenómeno se conoce como saturación de un motor. Al considerar un arreglo adecuado de funciones hiperbólicas se consigue que dicho torque requerido para que el error converja a cero, es decir esté acotado.

En el presente trabajo se aborda el problema de control de trayectoria en un robot manipulador de tres grados de libertad a través de un algoritmo de control basado en funciones hiperbólicas acotadas. Con la ecuación de lazo cerrado y una función estricta de Lyapunov propuesta se demuestra estabilidad asintótica global. Los experimentos se llevarán a cabo en el robot antropomórfico Rotradi, el cual posee 3 servomotores de transmisión directa, cuyo espacio de trabajo corresponde a una esfera de radio de 1 metro. En el control de movimiento se debe conocer no solo la posición sino también la velocidad, por lo tanto a través de una extensión dinámica para cerrar el lazo únicamente con retroalimentación de la posición se obtiene la velocidad. Finalmente con la norma $\mathcal{L}_2$ se evalúa el desempeño del algoritmo de control propuesto para seguir una trayectoria específica.

Es importante señalar que en el control de movimiento de robots manipuladores pueden ser aquellos que interactúan con el entorno a través de sensores, lo cual se conoce como control de impedancia y aquellos que no interactúan con el entorno. En este trabajo se considera la segunda forma de control, la cual solo se busca seguir una trayectoria específica, es decir que puede ser implementado para aplicaciones de alta precisión como corte con laser o soldadura con plasma.

El objetivo principal de la tesis es diseñar un algoritmo de control de trayectoria para un robot de 3 grados de libertad y compararlo con otros esquemas de control para determinar que es mejor o es competitivo, mas no probarlo en alguna aplicación.

1.4. Contribuciones

- Diseño de una familia extensa de algoritmos de control de trayectoria basados en funciones hiperbólicas con acciones acotadas.
- Propuesta de una función estricta de Lyapunov que permita la demostración de estabilidad asintótica global.
- Desarrollo de un ambiente de co-simulación entre las plataformas MSC-Adams y Matlab para Robot Manipulador Rotradi.
- Presentación del modelo dinámico de un robot manipulador de 2 grados de libertad a través de la mecánica analítica de Euler.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo general

Abordar el problema de control de trayectoria o control de movimiento de robots manipuladores a través del diseño de un nuevo esquema de control con estructura hiperbólica.

1.5.2. Objetivos particulares

1. Estudiar el estado del arte en control de trayectoria de robots manipuladores.
2. Diseñar un esquema de control de trayectoria con estructura hiperbólica
3. Demostración de estabilidad asintótica en el punto de equilibrio de la ecuación de lazo cerrado formada por la: dinámica del robot manipulador y el algoritmo de control.
4. Análisis del transitorio y estado estacionario del sistema en lazo cerrado mediante la norma $\mathcal{L}_2$, respectivamente.
5. Análisis y mejora del desempeño del sistema en lazo cerrado.
6. Análisis de una extensión dinámica, para cerrar el lazo únicamente con retroalimentación de la posición.
7. Resultados de simulación y experimentos del esquema de control propuesto.
8. Publicación de los resultados de tesis en revista (arbitrada/indexada) y/o congreso arbitrado.

Capítulo 2

Preliminares matemáticos

En este capítulo se presentan las herramientas matemáticas que serán empleadas en los capítulos posteriores. Este capítulo se divide en tres apartados: cinemática, dinámica y control de trayectoria de robots manipuladores.

2.1. Cinemática

Cinemática es la ciencia del movimiento de un sistema sin considerar las fuerzas que lo causan. Con el estudio de la cinemática, uno puede estudiar la posición, la velocidad, la aceleración, y derivadas de mayor orden a partir de la posición (con respecto al tiempo o alguna otra variable) [16]. Por lo tanto, específicamente la cinemática directa proporciona a los robots manipuladores los elementos para analizar y diseñar el desplazamiento de trayectorias del robot, así como la orientación de las herramientas de trabajo. Existen varios tipos de robots manipuladores industriales dependiendo del tipo de articulación que incluyan (lineales o rotacionales), estos también pueden ser clasificados como antropomórficos, esféricos, cilíndricos, SCARA y cartesiano [30].

2.1.1. Cinemática directa

El problema de la cinemática directa consiste en la relación entre las articulaciones individuales de un robot manipulador y la posición y orientación del efector final. En otras palabras, la cinemática directa es determinar la posición y orientación final a partir de las variables de cada articulación del robot. Específicamente las variables de las articulaciones son los ángulos entre cada eslabón, en el caso de articulaciones rotacionales y extensión de cada eslabón para el caso de articulaciones prismáticas [5].

La cinemática directa 2.1 es un mapeo vectorial $\mathbf{f}_R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \theta \\ \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \mathbf{f}_R(l_i, \mathbf{q}) \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{f}_R$ es una función continua en el vector de posiciones o desplazamiento articular $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, representa el número de grados de libertad y la dimensión del vector de posiciones o desplazamiento articular, $x, y, z \in \mathbb{R}$ son las coordenadas cartesianas asociadas al extremo final del robot y θ, ϕ, ψ son los ángulos de Euler, los cuales serán vistos a detalle mas adelante, que representan la orientación de la herramienta colocada en el extremo final con respecto al sistema de referencia fijo en la base del robot manipulador, m es la dimensión de la función vectorial $\mathbf{f}_R(l_i, \mathbf{q})$.

2.1.2. Geometría del robot

Una gran parte de la cinemática está relacionada con establecer varios sistemas de referencia para representar las posiciones y orientaciones de objetos rígidos, así como también las transformaciones entre sistemas de coordenadas. Por lo tanto, la geometría de el espacio tridimensional y de un movimiento rígido forman un rol importante en todos los aspectos de manipulación. Se empieza por examinar las representaciones de los puntos y vectores en un espacio Euclidiano el cual está formado por varios sistemas de referencia. Después se introduce el concepto de matriz de rotación para representar orientaciones relativas entre sistemas de coordenadas [5].

2.1.2.1. Representación de posición

Para asignar coordenadas es necesario un sistema de referencia. Un sistema de referencia está formado por un origen (un solo punto en el espacio), y dos o tres ejes ortogonales para espacios bidimensionales o tridimensionales, respectivamente. Se podría especificar las coordenadas de un punto p con respecto a un sistema de referencia $\sum_0(x_0, y_0, z_0)$ o bien con respecto a $\sum_0(x_1, y_1, z_1)$.

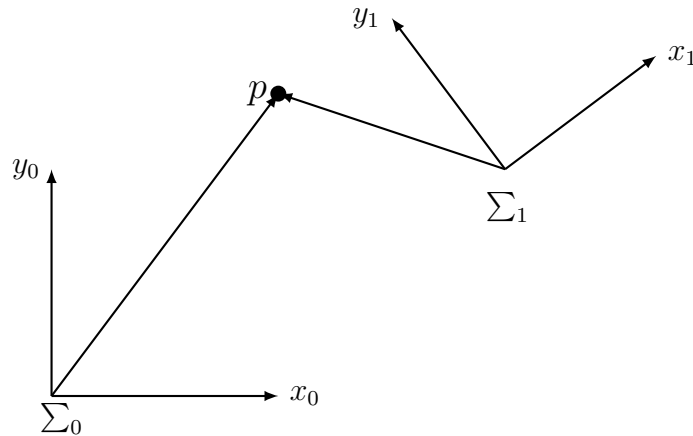


Figura 2.1: Representación de un punto en el espacio bidimensional desde dos sistemas de referencia distintos.

Al observar la imagen 2.1, se podría considerar que el vector $\mathbf{p}$ tiene las coordenadas (3,4) o también (-2,2) por poner un ejemplo. Para que quede claro en que sistema de referencia el vector se describe, se considera la siguiente notación:

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Debido a que el origen de cada uno de los sistemas de referencia Σ_0 y Σ_1 son puntos en el espacio, estos también pueden ser expresados uno con respecto al otro. De la figura 2.1 podemos tener que:

$$\Sigma_1^0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_0^1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Entonces, Σ_1^0 especifica las coordenadas del sistema de referencia Σ_1 con respecto al sistema de referencia Σ_0 , de igual forma Σ_0^1 especifica las coordenadas del sistema de referencia Σ_0 con respecto al sistema de referencia Σ_1 . La forma de expresar un punto en el espacio de dos dimensiones también se extiende para un espacio tridimensional. Se debe tener en cuenta la diferencia entre la representación de un punto p como un punto en el espacio y como un vector asociado a un sistema de referencia específico. Esto es considerado como un mecanismo que nos permite poder transformar coordenadas de un punto desde un sistema de coordenadas a otro sistema de coordenadas. Tales transformaciones son el siguiente tema que se aborda.

2.1.2.2. Representación de rotación

Para representar la posición relativa y orientación de un cuerpo rígido con respecto a otra, se relaciona un sistema de coordenadas a cada cuerpo y se describe la relación que existe entre estas coordenadas. Primero se muestra el caso de rotaciones en un plano y luego para un espacio tridimensional.

En la figura 2.2, se observan dos sistemas de referencia $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ y $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$, el cual es obtenido al rotar Σ_0 un ángulo θ .

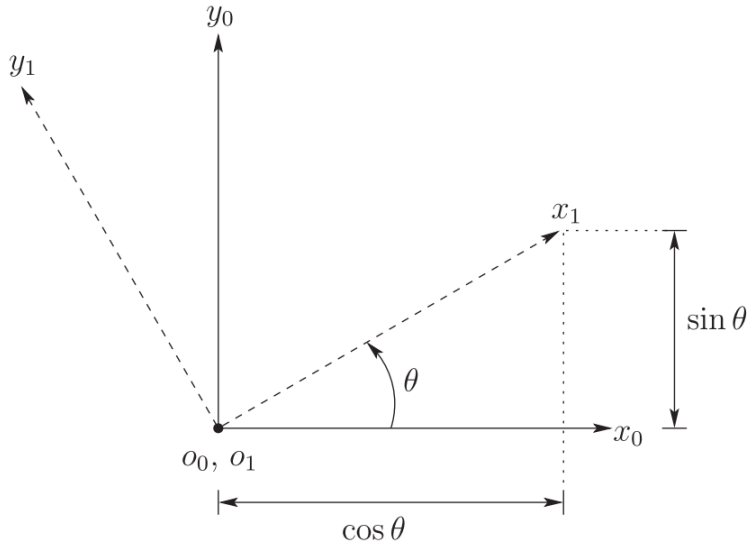


Figura 2.2: Rotación de sistemas de referencia en un plano.

Una forma de poder representar algún punto del sistema de referencia $\sum_1$ con respecto a $\sum_0$, es a través de una matriz de rotación 2.4. Esta es fácilmente obtenida de la figura 2.2, es decir:

$$R_0^1 = [\mathbf{x}_1^0 | \mathbf{y}_1^0] \quad (2.4)$$

donde $\mathbf{x}_1^0$ y $\mathbf{y}_1^0$ son las coordenadas en $\sum_0$ de las vectores unitarios $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{y}_1$ respectivamente. Para el caso de dos dimensiones la matriz está compuesta por:

$$\mathbf{x}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_1^0 = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Entonces, se tiene:

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

De igual forma para el caso de rotaciones en un espacio tridimensional se describe un punto p en $\sum_1(x_1, y_1, z_1)$, el cual se desea describir con respecto a $\sum_0(x_0, y_0, z_0)$ como se observa en la figura 2.3.

El punto $\mathbf{p}$ forma parte de un cuerpo rígido, el cual posee dos coordenadas, $\mathbf{p}_0 = [x_0, y_0, z_0]^T$, con respecto a $\sum_0$ y $\mathbf{p}_1 = [x_1, y_1, z_1]^T$ con respecto a $\sum_1$. Se desea encontrar la relación que existe entre cada una de las coordenadas del punto. Considere los vectores bases para cada sistema de referencia $\sum_0$ y $\sum_1$ sean $\{\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0\}$ vectores unitarios en los ejes x_0, y_0, z_0 respectivamente. Es decir, $\mathbf{i}_0 = [1, 0, 0]^T$, $\mathbf{j}_0 = [0, 1, 0]^T$, $\mathbf{k}_0 = [0, 0, 1]^T$, de igual forma se definen los vectores unitarios $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1\}$ para el sistema de referencia $\sum_1$ [31].

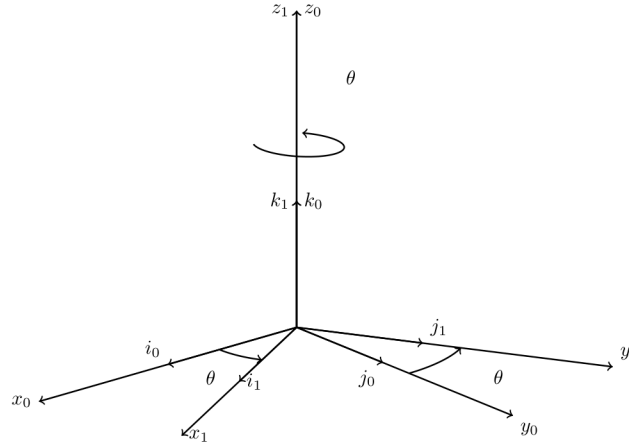


Figura 2.3: Rotación de sistemas de referencia en 3 dimensiones.

Se tiene un sistema de referencia $\sum_1(x_1, y_1, z_1)$ el cual se encuentra rotado un ángulo θ alrededor del eje z_0 del sistema $\sum_0(x_0, y_0, z_0)$. Empleando la regla de la mano derecha se asume que un ángulo positivo es aquel cuyo sentido de rotación es contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

De acuerdo a la figura 2.3, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_0 &= \cos(\theta), & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_0 &= \sin(\theta) \\ \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_0 &= \cos(\theta), & \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_0 &= \sin(\theta) \\ \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{k}_1 &= 1 \end{aligned}$$

los productos punto restantes son igual a cero debido a que entre ellos forman un ángulo de 90° . Es decir: $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_0 = \cos(90^\circ) = 0$, $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_0 = \cos(90^\circ) = 0$, $\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_0 = \cos(90^\circ) = 0$ y $\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_0 = \cos(90^\circ) = 0$.

Entonces la matriz de Rotación con respecto al eje z_0 es:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

De igual forma se puede rotar el sistema de referencia $\sum_1(x_1, y_1, z_1)$ con respecto a $\sum_0(x_0, y_0, z_0)$ un ángulo θ en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del eje x_0 . Dicha rotación está representada por:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Finalmente para el caso donde el sistema de referencia $\sum_1(x_1, y_1, z_1)$ con respecto a $\sum_0(x_0, y_0, z_0)$ un ángulo θ aplicando la regla de la mano derecha alrededor del eje y_0 , se tiene la siguiente matriz de rotación:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

2.1.3. Cinemática analítica de Euler

Para una mínima representación, la orientación del sistema de referencia $\sum_1(x_1, y_1, z_1)$ respecto a el sistema de referencia $\sum_2(x_2, y_2, z_2)$ puede ser denotado como un vector de tres ángulos (ϕ, θ, ψ) . Estos son conocidos como los ángulos de Euler, cada uno de estos representa una rotación con respecto a un eje del sistema de coordenadas. Entonces, la ubicación del eje de cada rotación sucesiva depende de las rotaciones anteriores, por lo que el orden de las rotaciones deben acompañar a los tres ángulos para definir el orientación.

Ahora considere el sistema de referencia $\sum_0(x_0, y_0, z_0)$ y los sistemas de referencia $\sum_1(x_1, y_1, z_1)$, $\sum_2(x_2, y_2, z_2)$ y $\sum_3(x_3, y_3, z_3)$, todos los sistemas de referencia comparten el mismo origen. Inicialmente el movimiento del sistema $\sum_1$ puede rotar con respecto a $\sum_0$. La figura 2.4 muestra la composición de rotaciones zyz empleando los ángulos de Euler tomando en cuenta que:

- Primero se rota un ángulo ϕ respecto al eje fijo z_0 a través de la matriz $R_{z_0}(\phi)$.
- Luego se rota un ángulo θ respecto al eje fijo y_1 a través de la matriz $R_{y_1}(\theta)$.
- Finalmente se rota un ángulo ψ respecto al eje fijo z_2 a través de la matriz $R_{z_2}(\psi)$.

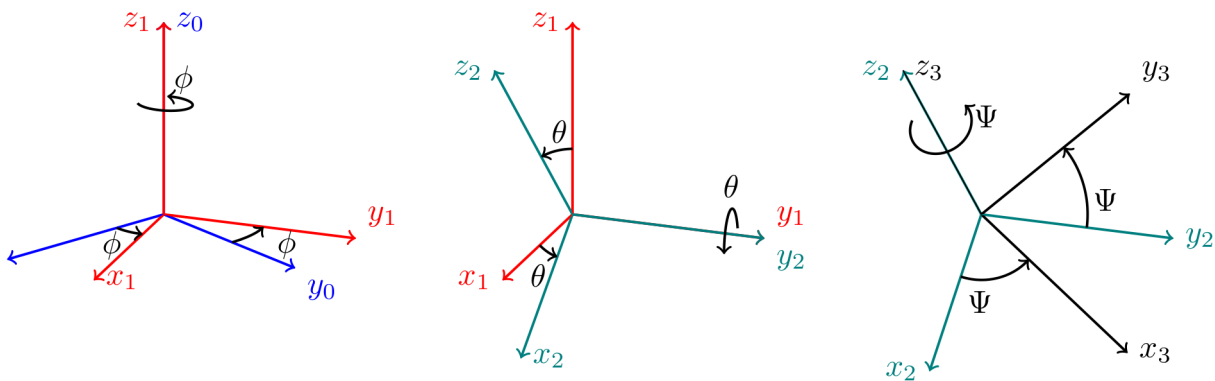


Figura 2.4: Composición de tres rotaciones sucesivas.

Considérese un sistema de referencia fijo $\sum_0(x_0, y_0, z_0)$ y un sistema de referencia móvil $\sum_1(x_1, y_1, z_1)$, donde sus orígenes se encuentran desplazados. El origen de $\sum_1$ está desplazado una distancia d_0^1 con respecto al origen de $\sum_0$ como se observa en la figura 2.5.

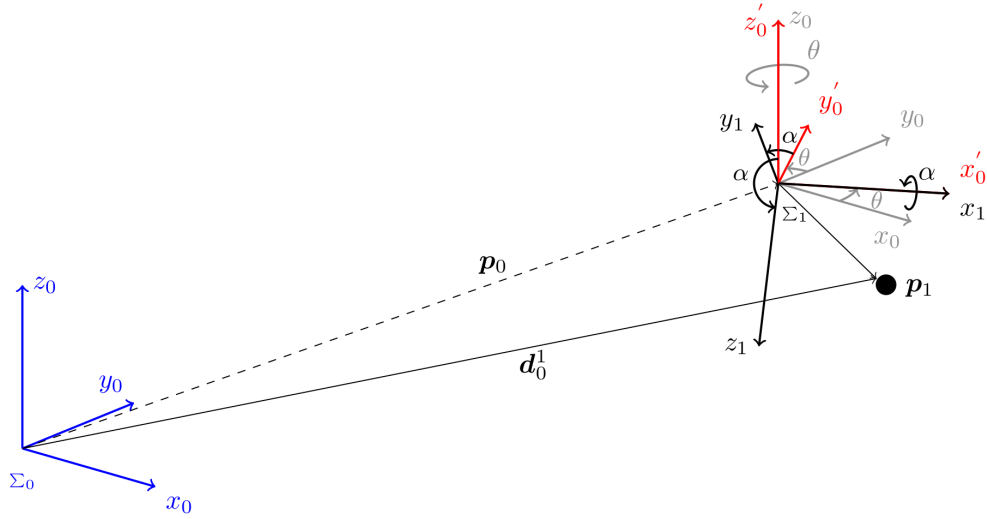


Figura 2.5: Composición de traslación y rotación.

El vector $\mathbf{d}_0^1$ es expresado en coordenadas de el sistema Σ_0 : $\mathbf{d}_0^1 = [d_{0x}^1, d_{0y}^1, d_{0z}^1]^T$, entonces cualquier punto $\mathbf{p}$ tiene una representación $\mathbf{p}_0$ y $\mathbf{p}_1$. La relación general entre los sistemas de referencia Σ_0 y Σ_1 incluyendo una matriz de rotación y un vector traslación $\mathbf{d}_0^1$ queda representada en la ecuación 2.10:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= \mathbf{d}_0^1 + R_0^1(\phi, \theta, \psi)\mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_0 &= \mathbf{d}_0^1 + R_z(q_1)R_x(\alpha_1)R_x(0)\mathbf{p}_1 \\ \begin{bmatrix} p_{0x} \\ p_{0y} \\ p_{0z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} d_{0x}^1 \\ d_{0y}^1 \\ d_{0z}^1 \end{bmatrix} + R_z(q_1)R_x(\alpha_1)\mathbf{I} \begin{bmatrix} p_{1x} \\ p_{1y} \\ p_{1z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.10)$$

A continuación son presentadas las propiedades usadas para obtener el modelo dinámico de un robot manipulador a través de la mecánica analítica de Euler, así como también las nuevas propiedades que relacionan una matriz antisimétrica y una matriz de rotación.

Propiedad 1. [30] Una matriz antisimétrica $\mathbf{S}(\mathbf{p})$ satisface $\forall \mathbf{p} = [p_x, p_y, p_z]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$.

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}) + \mathbf{S}^T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p_z & -p_y \\ -p_z & 0 & p_x \\ p_y & -p_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

■

Propiedad 2. [30] El producto de $\mathbf{S}(\mathbf{p})\mathbf{S}^T(\mathbf{p})$ es conmutativo, $\mathbf{S}(\mathbf{p})\mathbf{S}^T(\mathbf{p}) = \mathbf{S}^T(\mathbf{p})\mathbf{S}(\mathbf{p})$, el resultado es una matriz simétrica; además:

$$\mathbf{S}(\mathbf{p})\mathbf{S}^T(\mathbf{p}) = -\mathbf{S}^2(\mathbf{p})$$

■

Propiedad 3. [30] *Propiedad de escalamiento de $\mathbf{S}(\mathbf{p})$: dada una matriz antisimétrica $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, el vector $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, y el escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple:*

$$\mathbf{S}(\alpha \mathbf{p}) = \alpha \mathbf{S}(\mathbf{p})$$

■

Propiedad 4. [30] *Derivada parcial de una matriz de rotación: $\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{R}(\theta) = \mathbf{S}(\mathbf{n}) \mathbf{R}(\theta)$, donde $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es un vector base unitario, θ es un ángulo.*

■

Propiedad 5. [30] *Derivada temporal de una matriz de rotación: $\frac{d}{dt} \mathbf{R}(\theta) = \mathbf{S}(\dot{\theta} \mathbf{n}) \mathbf{R}(\theta)$, donde $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es un vector base unitario, $\mathbf{w}_0 = \dot{\theta} \mathbf{n}$ es la velocidad angular, θ es un ángulo.*

■

Propiedad 6. *La matriz antisimétrica $\mathbf{S}(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ cumple la siguiente equivalencia:*

$$\mathbf{S}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_z(\frac{\pi}{2}) & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{donde } \mathbf{o} = [0 \quad 0]^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$$

■

Propiedad 7. *Sea la matriz antisimétrica $\mathbf{S}(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y la matriz de rotación $\mathbf{R}_z(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, entonces :*

$$\mathbf{S}(\mathbf{k}) \mathbf{R}_z(q) = \mathbf{R}_z(q) \mathbf{S}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_z(\frac{\pi}{2} + q) & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{o} = [0 \quad 0]^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ es un vector de ceros y $q \in \mathbb{R}$ es un ángulo expresado en radianes.

■

Propiedad 8. *Sea la matriz antisimétrica $\mathbf{S}(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y la matriz de rotación $\mathbf{R}_z(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, entonces :*

$$[\mathbf{S}(\mathbf{k}) \mathbf{R}_z(q)]^T \mathbf{S}(\mathbf{k}) \mathbf{R}_z(q) = \mathbf{R}_z(q) \mathbf{S}^2(-\mathbf{k}) \mathbf{R}_z(q) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{o} = [0 \quad 0]^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ es un vector de ceros, $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es la matriz identidad y $q \in \mathbb{R}$ es un ángulo expresado en radianes.

■

Propiedad 9. Sea la matriz antisimétrica $\mathbf{S}(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y la matriz de rotación $\mathbf{R}_z(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, entonces :

$$[\mathbf{S}(\mathbf{k})\mathbf{R}_z(q)]^T \mathbf{S}(\mathbf{k})\mathbf{R}_z(q) = \mathbf{R}_z(q)\mathbf{S}^2(-\mathbf{k})\mathbf{R}_z(q) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{o} = [0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ es un vector de ceros, $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es la matriz identidad y $q \in \mathbb{R}$ es un ángulo expresado en radianes. ■

Propiedad 10. Sea la matriz antisimétrica $\mathbf{S}(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y la matriz de rotación $\mathbf{R}_z(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, entonces :

$$[\mathbf{S}(\mathbf{k})\mathbf{R}_z(q)]^T \mathbf{S}(\mathbf{k})\mathbf{R}_z(q) = \mathbf{R}_z(q)\mathbf{S}^2(-\mathbf{k})\mathbf{R}_z(q) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{o} = [0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ es un vector de ceros, $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es la matriz identidad y $q \in \mathbb{R}$ es un ángulo expresado en radianes. ■

Propiedad 11. Sea la matriz antisimétrica $\mathbf{S}(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y la matriz de rotación $\mathbf{R}_z(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, entonces :

$$[\mathbf{S}(\mathbf{k})\mathbf{R}_z(q)]^T \mathbf{S}(\mathbf{k})\mathbf{R}_z(q) = \mathbf{R}_z(q)\mathbf{S}^2(-\mathbf{k})\mathbf{R}_z(q) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{o} = [0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ es un vector de ceros, $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es la matriz identidad y $q \in \mathbb{R}$ es un ángulo expresado en radianes. ■

Propiedad 12. Sea la matriz antisimétrica $\mathbf{S}(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y la matriz de rotación $\mathbf{R}_z(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, entonces :

$$[\mathbf{S}(\mathbf{k})\mathbf{R}_z(q)]^T \mathbf{S}(\mathbf{k})\mathbf{R}_z(q) = \mathbf{R}_z(q)\mathbf{S}^2(-\mathbf{k})\mathbf{R}_z(q) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{o} = [0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ es un vector de ceros, $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es la matriz identidad y $q \in \mathbb{R}$ es un ángulo expresado en radianes. ■

Propiedad 13. Sea la matriz antisimétrica $\mathbf{S}(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y la matriz de rotación $\mathbf{R}_z(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, entonces :

$$[\mathbf{S}(\mathbf{k})\mathbf{R}_z(q)]^T \mathbf{S}(\mathbf{k})\mathbf{R}_z(q) = \mathbf{R}_z(q)\mathbf{S}^2(-\mathbf{k})\mathbf{R}_z(q) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{o} = [0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ es un vector de ceros, $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es la matriz identidad y $q \in \mathbb{R}$ es un ángulo expresado en radianes. ■

2.2. Dinámica

En este capítulo se trata la dinámica del robot manipulador. Mientras las ecuaciones de la cinemática describen el movimiento del robot sin considerar las fuerzas y torques que producen el movimiento, las ecuaciones de la dinámica describen explícitamente la relación que existe entre la fuerza y movimiento. La obtención del modelo dinámico de un robot manipulador juega un rol importante en aspectos de simulación de movimiento, análisis de la estructura del manipulador y el diseño de algoritmos de control. La simulación de movimiento permite desarrollar esquemas de control, así como también planear trayectorias, las cuales pueden ser probadas sin necesidad de contar con el sistema físico. De igual forma el análisis de el modelo dinámico puede ser de gran ayuda para diseños de nuevos prototipos de brazos manipuladores. El objetivo de este capítulo es sentar las bases para obtener las ecuaciones de movimiento de un manipulador en su espacio articular a través de la formulación de Lagrange [5] [32].

2.2.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Como se menciona anteriormente, el modelo dinámico de un robot manipulador brinda una descripción de la relación entre el torque del servomotor asociado a una articulación y el movimiento de la estructura. Con la formulación de Lagrange, las ecuaciones de movimiento pueden ser obtenidas en una forma sistemática independientemente de el sistema de referencia [32].

Por la segunda Ley de Newton, la ecuación de movimiento de una partícula es:

$$m\ddot{y} = f - mg \tag{2.11}$$

El término de la derecha de la ecuación (2.11) se puede escribir como:

$$m\ddot{y} = \frac{d}{dy}(m\dot{y}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2 \right) = \frac{d}{dy} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{y}} \tag{2.12}$$

donde $\mathcal{K} = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$ es la energía cinética. Se usa la notación de la derivada parcial en la expresión de arriba para ser consistentes con los sistemas considerados mas tarde cuando la energía cinética sea una función de varias variables. De igual forma se puede expresar la fuerza gravitacional de la ecuación (2.11) como:

$$mg = \frac{\partial}{\partial y}(mgy) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} \quad (2.13)$$

donde $\mathcal{U} = mgy$ es la energía potencial debido a la gravedad. Si definimos

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy \quad (2.14)$$

y note que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{y}}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} \quad (2.15)$$

Por lo tanto, la ecuación (2.11) se puede reescribir como:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = f \quad (2.16)$$

La función $\mathcal{L}$, la cual es la diferencia de la energía cinética y la energía potencial, es conocido como Lagrangiano del sistema, y la ecuación (2.16) es llamada la ecuación Euler-Lagrange.

Cuando se establece el número de variables $q_i = 1, \dots, n$, las cuales describen los grados de libertad del manipulador, el lagrangiano puede ser definido como:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (2.17)$$

y las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{v}(\dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\tau}) \quad (2.18)$$

donde $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de posiciones articulares o coordenadas generalizadas, $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de velocidades articulares, $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares aplicados, donde el i -ésimo par τ_i se encuentra asociado con la i -ésima coordenada generalizada q_i , y $\mathbf{v}(\dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\tau}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas o pares de fricción que depende de la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$ y de fricción estática $\mathbf{f}_e$ que se encuentra presente en las articulaciones del mismo; $t \in \mathbb{R}_+$ representa el tiempo, $n \in \mathbb{N}$ es el número de grados de libertad [30].

La energía cinética tiene una estructura matemática cuadrática bien definida en función de la velocidad articular:

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.19)$$

donde $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia del manipulador, y es una matriz definida positiva (por lo tanto simétrica). Por otro lado, la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ no tiene una forma específica. Sin embargo, tiene una dependencia exclusivamente del vector de posición $\mathbf{q}$, ya que se considera su presencia a campos conservativos como la fuerza de gravedad.

Con esta forma del lagrangiano, las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange pueden escribirse en forma compacta como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.20)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] = M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (2.22)$$

El modelo dinámico de un manipulador brinda una descripción completa entre los pares aplicados a los servomotores y el movimiento de la estructura mecánica. Con la formulación Euler-Lagrange las ecuaciones de movimiento pueden ser obtenidas de manera sistemática independientemente del sistema de referencia coordinado. Al reemplazar las ecuaciones (2.20), (2.21) y (2.22) en (2.18) se obtiene el modelo de un robot de n grados de libertad de forma compacta [30] [19]:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (2.23)$$

La metodología aplicada para obtener el modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad, a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange se reduce en 6 pasos:

P1. Obtener la cinemática directa con respecto al centro de masa de cada uno de los eslabones. Para el eslabón i -ésimo, se toman en consideración las longitudes anteriores l_{i-1} y ángulos q_i y q_{i-1} .

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \mathbf{f}_R(l_i, l_{i-1}, l_{ci}, q_{i-1}, q_i) \quad (2.24)$$

P2. Calcular la cinemática diferencial (velocidad) del i -ésimo eslabón:

$$\mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

P3. Calcular la rapidez lineal del centro de masa de cada eslabón, la cual se obtiene de aplicar la norma Euclidiana a la velocidad:

$$\|\mathbf{v}_i\|^2 = \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \quad (2.26)$$

P4. Calcular la energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$

P5. Obtener el lagrangiano

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (2.27)$$

P6. Aplicar las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange e incluir el modelo de fricción:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (2.28)$$

2.2.2. Propiedades del modelo dinámico

2.2.2.1. Matriz de inercia

La matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ es de vital importancia para el diseño de algoritmos de control para robots manipuladores. Se encuentra relacionada a la energía cinética (2.19), esta cuenta también cuenta con propiedades las cuales son empleadas para propósitos de estabilidad de sistemas de control de robots.

Propiedad 14. [19] *Existe una constante real positiva α tal que:*

$$M(\mathbf{q}) > \alpha I \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \quad (2.29)$$

donde I denota la matriz identidad de dimensión $n \times n$. La matriz $M(\mathbf{q})^{-1}$ existe y es definida positiva. ■

Propiedad 15. [19] *Solo para robots provistos únicamente con articulaciones rotacionales, existe una constante $\beta > 0$ tal que:*

$$\lambda_{M(\mathbf{q})}^{Max} \leq \beta \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \quad (2.30)$$

Una manera sencilla de calcular β es la dada por:

$$\beta \geq n [\max_{i,j,q} |M_{ij}(\mathbf{q})|] \quad (2.31)$$

donde $M_{ij}(\mathbf{q})$ denota al ij -ésimo elemento de la matriz $M(\mathbf{q})$. ■

Propiedad 16. [19] *Solo para robots provistos únicamente con articulaciones rotacionales, existe una constante $k_M > 0$ tal que:*

$$\|M(\mathbf{x})\mathbf{z} - M(\mathbf{y})\mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|\|\mathbf{z}\| \quad (2.32)$$

para todo vector $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. Una manera sencilla de determinar k_M es:

$$k_M \geq n^2 \left[\max_{i,j,q} \left| \frac{\partial M_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right| \right] \quad (2.33)$$

■

Propiedad 17. [19] *Para robots provistos únicamente con articulaciones rotacionales, existe una constante $k'_M > 0$ tal que:*

$$\|M(\mathbf{x})\mathbf{y}\| \leq k'_M \|\mathbf{y}\| \quad (2.34)$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

■

2.2.2.2. Fuerzas centrípetas y de Coriolis

Propiedad 18. [19] *La matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ puede no ser única, pero el vector $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ es único.* ■

Propiedad 19. [19] *$C(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = 0$ para todo vector $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.* ■

Propiedad 20. [19] *Para todo vector $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ y escalar α , se tiene que:*

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y} = C(\mathbf{q}, \mathbf{y})\mathbf{x}, \quad (2.35)$$

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{z} + \alpha\mathbf{x})\mathbf{y} = C(\mathbf{q}, \mathbf{z})\mathbf{y} + \alpha C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y} \quad (2.36)$$

■

Propiedad 21. [19] *El vector $C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}$ puede expresarse en la forma:*

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T C_1(\mathbf{q})\mathbf{y} \\ \mathbf{x}^T C_2(\mathbf{q})\mathbf{y} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T C_n(\mathbf{q})\mathbf{y} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

donde $C_k(\mathbf{q})$ son matrices simétricas de dimensión n para todo $k = 1, 2, \dots, n$.

■

Propiedad 22. [19] *Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k_{C_1} > 0$ tal que:*

$$\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\| = k_{C_1} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad (2.38)$$

para todo $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. ■

Propiedad 23. [19] *Para robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k_{C_1} > 0$ y $k_{C_2} > 0$ tal que:*

$$\|C(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{w}C(\mathbf{y}, \mathbf{v})\mathbf{w}\| = k_{C_1} \|\mathbf{z} - \mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| + k_{C_2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{w}\| \|\mathbf{z}\| \quad (2.39)$$

para todo vector $\mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. ■

Propiedad 24. [19] *La matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ está relacionada con la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ por la expresión:*

$$\mathbf{x}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.40)$$

y de hecho, $\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es una matriz antisimétrica. En forma análoga la matriz $\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es antisimétrica, y también resulta cierto que:

$$\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T. \quad (2.41)$$

Independientemente de la manera en la que se obtenga $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, ésta siempre satisface:

$$\mathbf{q}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \mathbf{q} = 0 \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n \quad (2.42)$$
■

2.2.2.3. Par gravitacional

Propiedad 25. [19] *El vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ y el vector de velocidad $\dot{\mathbf{q}}$ pueden relacionarse mediante:*

$$\int_0^t \mathbf{g}(\mathbf{q})^T \dot{\mathbf{q}} dt = \mathcal{U}(\mathbf{q}(t)) - \mathcal{U}(\mathbf{q}(0)) \quad (2.43)$$

para todo vector $t \in \mathbb{R}_+$. ■

Propiedad 26. [19] *Para robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k_{\mathcal{U}}$ tal que:*

$$\int_0^t \mathbf{g}(\mathbf{q})^T \dot{\mathbf{q}} dt + \mathcal{U}(\mathbf{q}(0)) \geq k_{\mathcal{U}} \quad (2.44)$$

para todo vector $t \in \mathbb{R}_+$ y donde $k_{\mathcal{U}} = \min_q [\mathcal{U}(\mathbf{q})]$. ■

Propiedad 27. [19] *Para robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, el vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es Lipschitz, i.e., existe una constante $k_g > 0$ tal que:*

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (2.45)$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Una forma sencilla de calcular k_g es como:

$$k_g > n \left[\max_{i,j,q} \left| \frac{\partial g_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right| \right] \quad (2.46)$$

Además, k_g satisface:

$$k_g \geq \left\| \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{g}} \right\| \geq \lambda_{Max} \left[\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{g}} \right] \quad (2.47)$$
■

Propiedad 28. [19] *Para robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante k' tal que:*

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{q})\| \leq k' \quad (2.48)$$

para todo $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$. ■

A continuación se presentan propiedades adicionales y teoremas, los cuales son empleadas para la demostración de estabilidad para los distintos esquemas de control propuestos.

Propiedad 29. [30] *La desigualdad del triángulo puede ser empleada con la norma euclidiana de un vector:*

$$\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad (2.49)$$
■

Teorema 1. [30] Rayleigh-Ritz

El teorema de Rayleigh-Ritz establece que:

$$\lambda_A^{\min} \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq \lambda_A^{\max} \|\mathbf{x}\|^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.50)$$

donde los valores propios máximo y mínimo de A están denotados por $\lambda_A^{\max}$ y $\lambda_A^{\min}$, respectivamente.

El teorema de Rayleigh-Ritz es ampliamente utilizado en el diseño de algoritmos de control de Robots manipuladores, particularmente se emplea en el problema de control de posición para acotar la norma del error.

Una generalización del teorema de Rayleigh-Ritz es para el siguiente caso:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{y} \leq \lambda_A^{\max} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.51)$$

■

Propiedad 30. [30] Supóngase que $\mathbf{f}_x$ es una función acotada, entonces:

$$\|A \mathbf{f}_x(\tilde{\mathbf{x}})\| \leq \lambda_A^{\max} \|\tilde{\mathbf{x}}\| \quad (2.52)$$

De la generalización del teorema 1, se tiene:

$$\|\mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}})\|^2 \lambda_{K_p}^{\min} \leq \mathbf{f}_p^T(\tilde{\mathbf{q}}) K_p \mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}}) \leq \|\mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}})\|^2 \lambda_{K_p}^{\max} \leq \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \lambda_{K_p}^{\max} \quad (2.53)$$

■

2.3. Control

2.3.1. Introducción

La mayor dificultad de controlar un robot manipulador se debe a la complejidad de la dinámica no lineal y acoplada del sistema, así como también la incertidumbre en el sistema. El control de posición o también llamado regulación es un caso particular del control de movimiento, ya que el efector final del manipulador sigue una posición deseada constante el tiempo. Sin embargo, muchas de las aplicaciones de robots y manipuladores, se requiere que la posición del efector final siga una trayectoria específica, es decir que se controla la posición y velocidad.

El control de trayectoria de un robot manipulador es una de las tareas mas importantes debido a sus aplicaciones, ha sido ampliamente estudiado por muchas décadas. Muchos de los algoritmos de control, desde el simple control PID hasta el control adaptativo robusto, fueron desarrollados para mejorar el rendimiento del seguimiento de trayectoria [33]. Sin embargo, en contraste con el control

PD, el procedimiento de sintonía del control PID, por ejemplo., la elección de las matrices definidas positivas K_p, K_v, K_i , dista mucho de ser trivial. El algoritmo de control PID no genera un punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado con características de estabilidad asintótica global, únicamente tiene estabilidad asintótica local siempre y cuando las ganancias de control puedan satisfacer ciertas condiciones de sintonía muy complicadas [19, 30].

La teoría de estabilidad es de vital importancia cuando se refiere a la teoría de control de sistemas, específicamente al control de trayectoria de robots manipuladores. Existen varios tipos de problemas de estabilidad que surgen en el estudio de sistemas dinámicos. La estabilidad en el punto de equilibrio está representada en el sentido de Lyapunov. Es posible asociar una descripción basada en la energía con sistemas dinámicos autónomos y, para cada estado del sistema con la excepción del estado de equilibrio, la razón del tiempo de tal energía es negativa, entonces decrece a lo largo de cualquier trayectoria del sistema hasta que se alcance el mínimo estado de equilibrio; dicho argumento justifica estabilidad [5]. Debido a la no linealidad del modelo dinámico de un robot manipulador es conveniente usar el método directo de Lyapunov para propósitos de estabilidad en el punto de equilibrio.

Los algoritmos de control de movimiento incluyen la dinámica completa del robot manipulador en la estructura matemática del controlador, es decir se basan en el modelo dinámico del robot. La exactitud, desempeño y robustez de esos controladores dependen del grado de precisión con que se conozcan los parámetros dinámicos que describen el modelo [30].

En esta sección se aborda el estudio de los controladores de movimiento que han mostrado un mejor desempeño: el control por calculado que emplea la dinámica de compensación en el lazo de realimentación para linealizar y desacoplar la dinámica no lineal del robot manipulador y PD+, el cual incluye el control proporcional del error de posición, control proporcional del error de velocidad mas la dinámica completa del robot.

2.3.2. Teoría de estabilidad en el sentido de Lyapunov

Dado un sistema de control, la primera mas importante pregunta acerca de sus propiedades es si es estable, ya que un sistema de control inestable típicamente no tiene ninguna aplicación y podría ser potencialmente peligroso. Cualitativamente, un sistema es descrito como estable si comenzando de cualquier lugar cercano a su punto de operación deseado este se mantendrá alrededor de ese punto. Los movimientos de un péndulo comenzando cerca a sus dos puntos de equilibrio, verticalmente hacia arriba y verticalmente hacia abajo, son frecuentemente usados para ilustrar un comportamiento de la dinámica del sistema estable e inestable. Cada sistema de control, ya sea lineal o no lineal, está relacionado a un problema de estabilidad, el cual debe ser estudiado cuidadosamente [34]. El concepto de estabilidad dentro de la ingeniería tiene varias facetas, por ejemplo, estabilidad exponencial, clásica, absoluta Popov, entrada-salida, $\mathcal{L}$, y el sentido de Lyapunov. No obstante, de todos los conceptos de estabilidad, la que mayor ventaja ofrece es la teoría de estabilidad de Lyapunov debido a que proporciona varias propiedades matemáticas que facilitan el análisis y diseño de los esquemas de control [30].

El teorema de estabilidad de Lyapunov da suficientes condiciones de estabilidad, estabilidad asintótica, y así sucesivamente. La teoría de estabilidad de Lyapunov tiene como principal objetivo estudiar

el comportamiento de sistemas dinámicos lineales y no lineales descritos por ecuaciones diferenciales de la forma [30]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \geq 0 \quad (2.54)$$

donde el vector $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ se refiere al estado del sistema dinámico representado por la ecuación (2.54) y $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ se denomina la condición inicial o estado inicial. La función $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua en t y $\mathbf{x}(t)$ [19].

Esta teoría establece que para toda condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ que se encuentra dentro del atractor, el sistema tiene un estado de equilibrio asintóticamente estable, la energía acumulada del sistema dentro del dominio de atracción cae al evolucionar el tiempo, hasta un valor mínimo en su punto de equilibrio.

Definición 1. [30] *El concepto de atractor o región de atracción significa que para cada solución de la trayectoria $\mathbf{x}(t)$ que empieza suficientemente cercana a cero, a partir de t_0 se aproxima al origen $\mathbf{0}$ como el tiempo evoluciona, es decir:*

$$t_0 + t \rightarrow \infty \quad (2.55)$$

■

Suposición 1. [30] *Se considera que el sistema es dinámico autónomo, es decir:*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \geq 0 \quad (2.56)$$

- El punto de equilibrio existe: $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.
- La función $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ es continua Lipschitz sobre $\mathbb{R}^n$.
- Existe una solución $\mathbf{x}(t)$ y es continua en t y diferenciable con respecto al tiempo.
- La función $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ es continua para toda condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ y continuamente diferenciable en t .

■

Definición 2. [35] *Función continua Lipschitz La función f se dice que es localmente continua Lipschitz continuous en $\mathbf{x}$ si para algún $h > 0$ existe $l \geq 0$ tal que:*

$$|\mathbf{f}(x_1, t) - \mathbf{f}(x_2, t)| \leq l|x_1 - x_2| \quad (2.57)$$

para todo $x_1, x_2 \in B(0, h), t \geq 0$. La constante l es llamada la constante Lipschitz. Una definición para funciones continuas globalmente Lipschitz sigue requiriendo la ecuación (2.57) para mantener $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. La definición de funciones continuas semiglobales también requiere que la ecuación (2.57) se mantenga en $B(0, h)$ para cualquier h pero con l como función de h . La propiedad Lipschitz se supone que es uniforme en t .

■

Se presentan los conceptos de estabilidad para equilibrios de ecuaciones diferenciales.

Definición 3. [30] *Un punto de equilibrio estable (en el sentido de Lyapunov) si para cada $t_0 \geq 0$, y $\epsilon > 0$ se puede encontrar un número $\gamma(t_0, \epsilon) > 0$ tal que:*

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{0}\| < \gamma(t_0, \epsilon) \rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{0}\| \leq \epsilon \quad \forall t \geq 0 \quad (2.58)$$

donde $\mathbf{x}(t)$ es la solución de (2.54), la cual empieza desde $\mathbf{x}(0)$ en t_0 . En la definición anterior la constante $\gamma(t_0, \epsilon) \leq \epsilon$ no es única. Debe interpretarse que en la definición de estabilidad requiere la existencia de un $\delta(t_0, \epsilon) > 0$ para cada $\epsilon > 0$ y no para algún $\epsilon > 0$. ■

La definición 3 fácilmente puede ser interpretada con la figura 2.6, la cual muestra un caso para $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^2$ donde el origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ es un equilibrio estable y, por aspectos de simplicidad solo se muestra la trayectoria $\mathbf{x}(t)$ que corresponde a una condición inicial $\mathbf{x}(0)$. También se observa un ϵ y un δ los cuales satisfacen la condición de la definición de estabilidad, es decir, $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$.

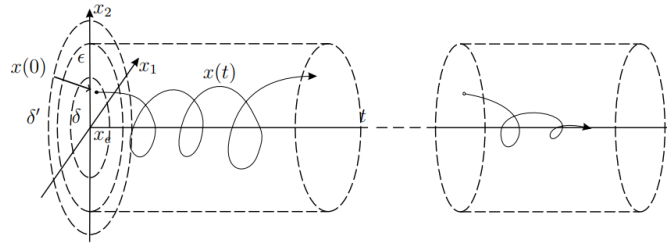


Figura 2.6: Estabilidad asintótica [36] .

Por otro lado, la estabilidad asintótica queda definida como:

Definición 4. [30] *Estabilidad uniforme está definida cuando el punto de equilibrio $\mathbf{x} = 0$, entonces este es llamado punto de equilibrio estable uniformemente de (2.54) si $\gamma = \gamma(\epsilon)$ no depende de t_0 .* ■

Definición 5. [30] *Se presenta estabilidad asintóticamente estable en el origen de (2.54) si:*

- El origen es estable.
- El origen es atractivo, es decir, existe un número $\gamma' > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \gamma' \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty \quad (2.59)$$

En la figura 2.6 se observa con facilidad el concepto de estabilidad asintótica para el caso de $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^2$

2.3.3. Método directo de Lyapunov

Se presenta una serie de conceptos relacionados para poder abordar el análisis de estabilidad en el punto de equilibrio de un sistema mediante el método directo de Lyapunov.

Definición 6. [19] Una función $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una **función candidata de Lyapunov** para el equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ de la ecuación $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ si:

- $V(t, \mathbf{x})$ es una función definida positiva localmente.
- $\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t}$ es una función continua con respecto a t y $\mathbf{x}$.
- $\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ es una función continua con respecto a t y $\mathbf{x}$.

■

En otras palabras, una función candidata de Lyapunov para el equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ es una función definida Lipschitz.

Por otro lado, la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov es de vital importancia para concluir que tipo de estabilidad existe en el punto de equilibrio. A continuación se presenta la siguiente definición:

Definición 7. [19] Sea $V(t, \mathbf{x})$ una función candidata de Lyapunov para la ecuación (2.54). La derivada de $V(t, \mathbf{x})$ a lo largo de las trayectorias de (2.54), denotada por $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ está dada por:

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) = \frac{d}{dt}V(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial V(t, \mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (2.60)$$

■

De la definición 7, se infiere que si $V(\mathbf{x})$ no depende explícitamente del tiempo, y la ecuación (2.54) es autónoma, entonces:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(t, \mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.61)$$

Una vez vistos los conceptos anteriores, se pueden abordar los teoremas de la teoría de Lyapunov.

Teorema 2. [19] Estabilidad

El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un estado de equilibrio estable de la ecuación (2.54), si existe una función candidata de Lyapunov $V(t, \mathbf{x})$ tal que su derivada temporal satisfaga:

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0, \quad \forall t \geq 0 \quad \text{al menos para } \|\mathbf{x}\| \text{ pequeña} \quad (2.62)$$

■

El teorema 2.62 da las condiciones necesarias para la estabilidad del equilibrio en el sentido de Lyapunov. Dicha conclusión se cumple si y solo si $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0$ para todo $t \geq 0$ y para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, o si la función candidata de Lyapunov $V(t, \mathbf{x})$ es definida positiva globalmente.

Teorema 3. [19] *Estabilidad asintótica global*

El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un estado de equilibrio asintóticamente estable de la ecuación (2.54), si existe una función candidata de lyapunov $V(t, \mathbf{x})$ definida positiva globalmente, radialmente desacotada, y menguante, tal que su derivada temporal satisfaga:

- $\dot{V}(t, \mathbf{0}) = 0 \quad \forall t \geq 0.$
- $\dot{V}(t, \mathbf{x}) < 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$

■

La condición del teorema 3 sobre $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ equivale a requerir que $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ sea una función definida negativa(globalmente).

Teorema 4. [19] *Considere la ecuación diferencial autónoma:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \quad \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \geq 0 \quad (2.63)$$

La existencia de un único estado de equilibrio es una condición necesaria para que éste sea asintóticamente estable en forma global.

■

2.3.4. Control con acciones acotadas

El control con acciones acotadas es un tipo de algoritmos que se relacionas directamente con el problema de saturación de robots manipuladores. La saturación es un fenómeno no lineal que es frecuente en control de robots manipuladores; causa que los servomotores operen dentro de sus limites físicos, conocidos como región de saturación. Este problema se presenta cuando los algoritmos de control demandan señales grandes de control; el resultado de esta no linealidad cuando la amplitud de la salida del algoritmo de control $\boldsymbol{\tau}$ sale de la región lineal del servomotor el torque suministrado es diferente al requerido por el controlador, es aquí donde aparecen fenómenos no lineales adicionales a los naturales propios de la dinámica no modelada del robot [30].

El problema de saturación en la practica, puede verse reflejado en problemas como degradación del sistema de control, fallas mecánicas y cascabeleo, perdida de estabilidad, oscilaciones y errores de posición. La figura 2.7 muestra el perfil típico del par aplicado por un servo-amplificador versus el par solicitado por el controlador. La característica principal de dicho perfil es que tiene una parte lineal y otra no lineal (zona de saturación). Bajo este escenario, es por eso que se plantea el diseño de algoritmos de control con acciones acotadas que conduzcan a la estabilidad asintótica global en el punto de equilibrio y con alto desempeño.

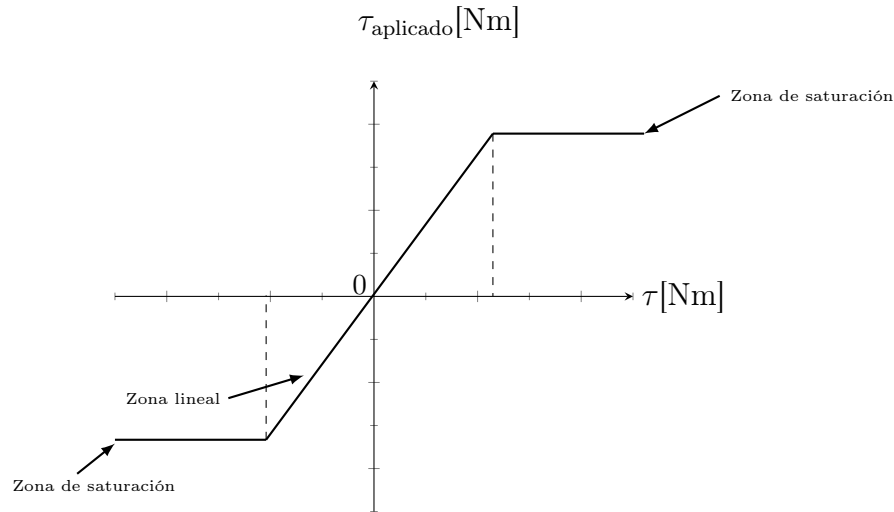


Figura 2.7: Perfil típico de un servo-amplificador electrónico.

El servo-amplificador no puede suministrar mas energía (par) de lo que sus limites normales de diseño se lo permite, es decir esta acotado por los limites de saturación $\pm\tau_{\max}$. Cuando la ley de control requiere mas del par que el servo-amplificador es capaz de suministrar se dice que entra en saturación. Dicho efecto se busca evitar debido a que el manipulador podría trabajar fuera de la región lineal, donde aparece efectos de la dinámica no modelada.

2.3.5. Control de trayectoria

El problema del control de trayectoria o control de movimiento se plantea de la siguiente forma. Considere el modelo dinámico de un manipulador de n grados de libertad

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (2.64)$$

además $\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d \in \mathbb{R}^n$ un conjunto de funciones vectoriales acotadas, las cuales representan la posición, velocidad y aceleración deseadas, respectivamente. El control de movimiento de un robot manipulador consiste en determinar una función vectorial $\boldsymbol{\tau}$ tal que las posiciones y velocidades asociadas a las articulaciones del robot sigan con exactitud a las posiciones y velocidades deseadas, respectivamente. Dicho de otra forma, el objetivo del control de trayectoria es encontrar $\boldsymbol{\tau}$ tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \quad (2.65)$$

donde $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \in \mathbb{R}^n$ representan el error de posición definido como la diferencia entre la posición o trayectoria deseada $\mathbf{q}_d$ y la posición actual del robot $\mathbf{q}(t)$, es decir $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q}(t)$ y el error de velocidad definido como $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}_d(t) - \dot{\mathbf{q}}(t)$, es decir la diferencia entre la velocidad deseada de movimiento $\dot{\mathbf{q}}_d$ y la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}(t)$.

Para propósitos de comparación se presentan los esquemas de control de trayectoria, y como caso particular el de posición. Existe una gran diferencia entre los dos esquemas de control.

El esquema de control PD+ es el algoritmo mas general de control de movimiento. Obsérvese que cuando la posición deseada $\mathbf{q}_d$ es una constante, entonces la velocidad deseada $\dot{\mathbf{q}}_d$ y la aceleración deseada $\ddot{\mathbf{q}}_d$ son vectores cero. Es decir, el error de velocidad cumple: $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = -\dot{\mathbf{q}}$. En este caso el regulador simple PD (proporcional derivativo) con compensación de gravedad se obtiene como caso particular a partir del esquema de control PD+ para trayectoria:

$$\tau = K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (2.66)$$

En contraste, en el problema de trayectoria se controla el error de posición $\tilde{\mathbf{q}}$ y el error de velocidad $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$. Además, se requiere del conocimiento completo de la dinámica del robot manipulador, es decir la matriz de masas e inercias, la matriz de coriolis y fuerzas centrípetas, el vector de par gravitacional y los pares de fricción.

$$\tau = \tau(K_p, K_v, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, M(\mathbf{q}), C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), B, \mathbf{g}(\mathbf{q})) \quad (2.67)$$

La ecuación en lazo cerrado queda expresada de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [\tau(K_p, K_v, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, M(\mathbf{q}), C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), B, \mathbf{g}(\mathbf{q})) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - B\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

la ecuación (2.68) es una ecuación diferencial ordinaria no lineal, no autónoma. Esto se debe a que al incorporar término $\mathbf{q}_d(t)$ hace que su naturaleza sea no autónoma.

2.3.5.1. Control PD+

El controlador PD+ es uno de los controladores mas simples que pueden ser aplicados en el control de trayectoria. Este algoritmo de control incluye el error de posición y error de velocidad, así como también la dinámica del robot manipulador. De igual forma la trayectoria deseada, velocidad y aceleración deseada son incluidas en dicho esquema de control como se observa en la figura 2.8.

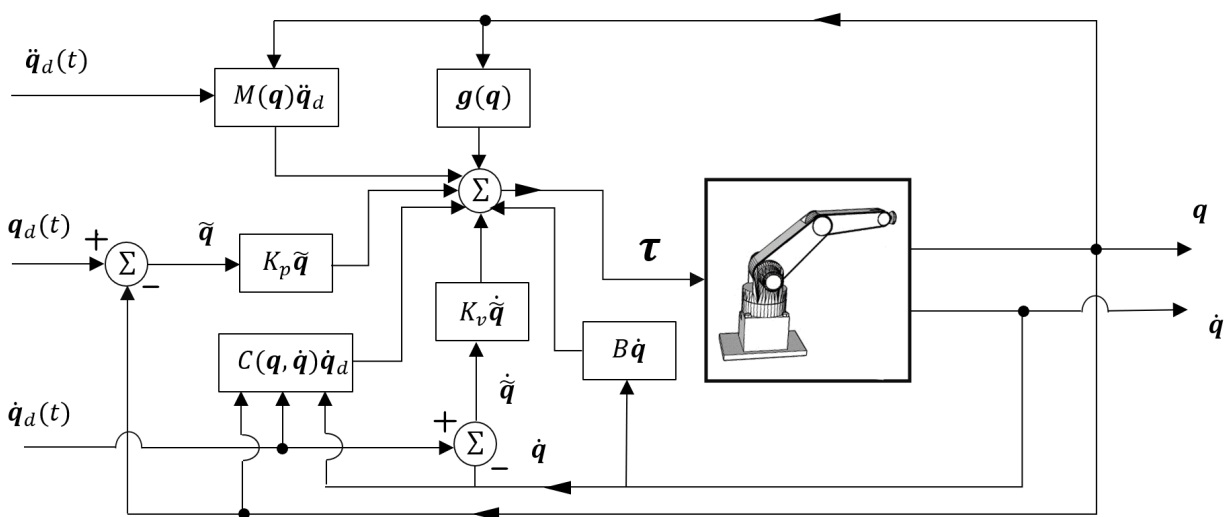


Figura 2.8: Diagrama de bloques PD+.

El control PD+ se encuentra descrito de la siguiente forma:

$$\tau_{pd} = K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_d + B \dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (2.69)$$

Como se ha mencionado anteriormente, el esquema de control PD+ (2.69) requiere del conocimiento exacto del manipulador, así como también los valores numéricos de sus parámetros dinámicos, esto se logra con identificación paramétrica.

La ecuación en lazo cerrado considerando el esquema de control PD+ adquiere la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ -M(\mathbf{q}_d(t) - \tilde{\mathbf{q}}(t))^{-1} [K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + C(\mathbf{q}_d(t) - \tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}_d(t) - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + B \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

entonces se obtiene una ecuación diferencial no lineal de primer orden, no autónoma como se puede observar en la ecuación (2.70), cuyo punto de equilibrio es el origen $[\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$. La naturaleza no autónoma se evidencia ya que la matriz $M(\mathbf{q})$ se encuentra expresada en función de la trayectoria $\mathbf{q}_d(t)$, así como la matriz de coriolis y fuerzas centrípetas queda también expresada en función de la trayectoria y velocidad deseada $\mathbf{q}_d(t)$ y $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$, respectivamente.

Para demostrar existencia y unicidad del punto de equilibrio $[\tilde{\mathbf{q}} \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^T = [\mathbf{0} \ \mathbf{0}]^T$ se procede de la siguiente forma:

- El primer elemento de la ecuación en lazo cerrado (2.70) $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{I} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \leftrightarrow \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$, puesto que la matriz identidad $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal definida positiva.

Para el segundo elemento de la ecuación (2.70) se tiene:

- Empleando la propiedad (14), la matriz de masas e inercias $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva, por lo que también resulta que la matriz inversa $M(\mathbf{q})^{-1}$ existe y es definida positiva.
- Las ganancias proporcional K_p y derivativa K_v son matrices definidas positivas propuestas por el usuario.
- Se observa también que $C(\mathbf{q}_d(t) - \tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}_d(t) - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ debido a que en el primer elemento de la ecuación (2.70) $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$. De igual forma, $B \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \leftrightarrow \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$, debido a que la matriz de coeficientes de fricción viscosa B es definida positiva y diagonal.
- Finalmente se tiene que $K_p \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, debido a que la ganancia proporcional es una matriz definida positiva.

Por lo tanto, se determina que el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (2.70) existe y es único, con la condición que las ganancias proporcional y derivativa del control PD sean diseñadas de tal forma que sean definidas positivas.

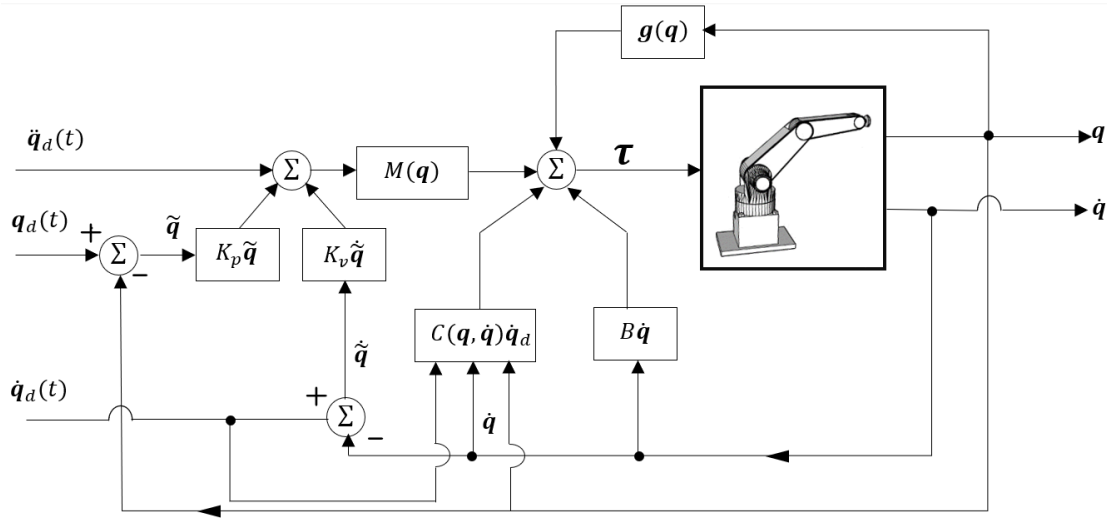


Figura 2.9: Diagrama de bloques Par calculado.

2.3.5.2. Control par calculado

El algoritmo par calculado es un esquema de control de movimiento, el cual emplea la dinámica de compensación en lazo de realimentación con el objetivo de hacer el sistema lineal y desacoplar la dinámica no lineal del robot manipulador. En la figura 2.9 se muestra el diagrama a bloques del esquema de control par calculado. El estudio de estabilidad asintótica en el punto de equilibrio se encuentra demostrado en [19].

El control de par calculado denotado por τ_{pc} , queda expresado de la siguiente forma:

$$\tau_{pc} = M(q)[\ddot{q}_d + K_p\tilde{q} + K_v\dot{\tilde{q}}] + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + g(q) + B\dot{q} \quad (2.71)$$

La ecuación en lazo cerrado se obtiene mediante la sustitución de la acción de control τ_{pc} en la ecuación del modelo dinámico del robot manipulador, de tal forma que existe una cancelación exacta del modelo dinámico el cual interviene en el lazo de realimentación, con esto se consigue desacoplar la dinámica de cada una de las articulaciones del manipulador, lo cual resulta en un sistema lineal de la siguiente forma:

$$\ddot{\tilde{q}} + K_v\dot{\tilde{q}} + K_p\tilde{q} = 0 \quad (2.72)$$

en términos del vector de estado $[\tilde{q}^T \ \dot{\tilde{q}}^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ la ecuación (2.72) queda expresada de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

donde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad.

La ecuación (2.73) representa una ecuación diferencial lineal y autónoma, donde el único estado de equilibrio es el origen $[\tilde{\mathbf{q}} \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$, el cual tiene estabilidad exponencial si las matrices K_p y K_v son simétricas y definidas positivas. El estudio de estabilidad se demuestra en [19].

2.4. Índice de desempeño

Un criterio académico para medir el desempeño de una ley de control es a través de la obtención del índice de desempeño determinado por la norma $\mathcal{L}_2$ como se observa en la ecuación 2.74, el cual se define como:

$$\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}] = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\tilde{\mathbf{q}}(t)\|^2 dt}. \quad (2.74)$$

donde T representa el tiempo del experimento. El desempeño de un algoritmo de control es inversamente proporcional a los valores obtenidos al calcular la norma $\mathcal{L}_2$.

2.5. Estimadores

Históricamente, la teoría de sistemas ha estado relacionado con una amplia gama de sistemas como, lineales, bilineales, analíticos, etc. Debido a que la principal herramienta para el estudio de problemas de sistemas teóricos son las matemáticas, las cuales son universales, es decir que un sistema teórico puede ser aplicado a sistemas biológicos o económicos. Entonces las matemáticas a través de la abstracción en diferentes niveles, provee las herramientas necesarias para penetrar en la complejidad de muchos de los problemas de hoy en día [37].

El mayor influyente en la teoría de sistemas en los últimos 30 años, es Rudolf E. Kalman. Su mayor contribución fue su tesis de maestría, seguido de un artículo acerca de control adaptativo. El propuso un regulador autoajutable, el cual es ampliamente usado en la práctica hoy en día. Kalman escribió un conjunto de investigaciones, entre ellos uno relacionado con un nuevo enfoque para el problema de filtrado, denominado Filtro Kalman [38, 39]. Entonces los conceptos de controlabilidad y observabilidad fueron propuestos [40, 41]. Estas ideas fueron primordiales en el tratamiento de Kalman de problemas cuadráticos lineales en control óptimo. Por otro lado, el concepto de observabilidad es muy importante porque, en la práctica, la dificultad que se encuentra con el control mediante realimentación del estado es que algunas de las variables de estado no son accesibles para una medición directa, por lo que se hace necesario estimar las variables de estado no medibles para construir las señales de control. Considere el sistema sin excitación descrito mediante las siguientes ecuaciones [42, 43]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.75)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2.76)$$

donde:

- $\mathbf{x}$ es el vector de estado $\mathbb{R}^n$
- $\mathbf{y}$ es el vector de salida $\mathbb{R}^n$
- A es el vector de salida $\mathbb{R}^{n \times n}$
- C es el vector de salida $\mathbb{R}^{m \times n}$

Se dice que el sistema es completamente observable si el estado $\mathbf{x}(t_0)$ se determina a partir de la Observacion de $\mathbf{y}(t)$ durante un intervalo de tiempo finito, $t_0 \leq t \leq t_1$. Por lo tanto, el sistema es completamente observable si todas las transiciones del estado afectan eventualmente a todos los elementos del vector de salida.

Capítulo 3

Modelado dinámico

El modelo dinámico de un robot manipulador permite explicar todos los fenómenos físicos que se encuentran en su estructura mecánica, tales como efectos inerciales, fuerzas centrípetas y de coriolis, par gravitacional y fricción los cuales son fenómenos físicos intrínsecos o propios de la naturaleza dinámica del robot [30]. Existe una variedad de métodos para obtener el modelo dinámico de un robot manipulador. En la presente tesis se obtiene el modelo de un robot manipulador partiendo de lo mas esencial de la física moderna, la mecánica analítica.

La metodología empleada para la obtención del modelo dinámico a través de la mecánica analítica es descrita por el diagrama de flujo de la figura 3.1 .

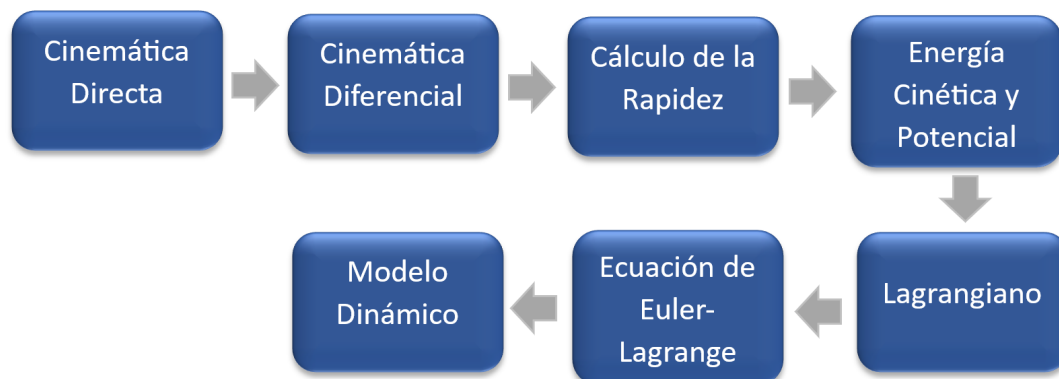


Figura 3.1: Metodología para modelado dinámico a través de la mecánica analítica de Euler.

Primero se establece la cinemática directa, esta es la encargada de describir en que ubicación en coordenadas cartesianas se encuentra el efector final con respecto al primer sistema de referencia. Luego se obtiene la cinemática diferencial, la cual básicamente consiste en derivar lo anterior. Después se obtiene la rapidez, que para el caso escalar es elevar al cuadrado y para el vectorial es aplicar la norma euclidiana y luego elevar al cuadrado. El siguiente paso es obtener la energía cinética y potencial, la primera tiene una forma cuadrática ya definida y la energía potencial no es estándar, sino que depende la configuración del robot, es decir si este está sometido a la acción de la gravedad. Con estas dos energías calculadas se obtiene el Lagrangiano y posteriormente se obtienen las Ecuaciones

de Euler-Lagrange. Finalmente al despejar y separar componentes, se obtiene el modelo dinámico de un robot manipulador.

A continuación, se desarrolla el modelo dinámico de un robot manipulador de un grado de libertad (péndulo), luego para un robot de dos grados de libertad y finalmente para un robot manipulador de tres grados de libertad.

3.1. Robot de 1 grado de libertad (Péndulo)

En la figura 3.2 se muestra un péndulo simple compuesto por un servomotor, el cual tiene acoplado una barra metálica de longitud l_1 y esta sometido a la acción de la gravedad. El péndulo simple, el cual consiste de una base anclada al suelo, una base para el servomotor, el servomotor y una barra metálica (eslabón) anclada al rotor y al estator del servomotor para generar el movimiento rotacional (positiva en sentido contrario a las manecillas del reloj).

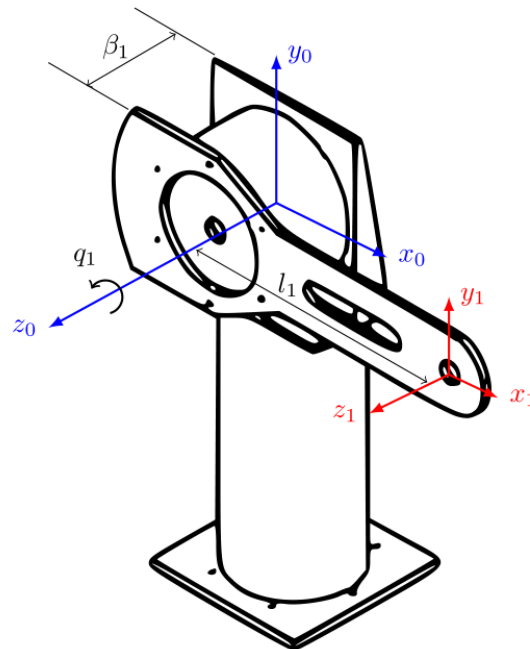


Figura 3.2: Sistemas de referencia de un robot manipulador de 1 gdl.

Se observa también que el péndulo se encuentra en su posición de casa. Los dos sistemas de referencia $\sum_0(x_0, y_0, z_0)$ y $\sum_1(x_1, y_1, z_1)$ separados por una distancia l_1 en el eje x_1 y una distancia β_1 en el eje z_0 .

3.1.1. Cinemática directa analítica de Euler

Empleando la mecánica analítica de Euler, las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange y tomando en cuenta la figura 3.3, se obtuvo el siguiente modelo dinámico del Péndulo con la componente de fricción.

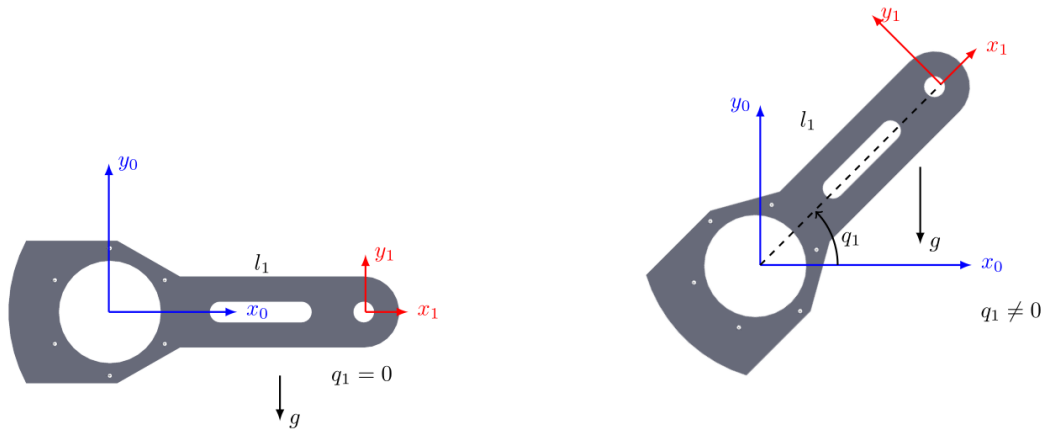


Figura 3.3: Sistemas de referencia con el eslabón rotado.

Partiendo de la ecuación fundamental de la cinemática

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) \mathbf{p}_1 \quad (3.1)$$

Dado que no existe ninguna herramienta asociada al extremo final del péndulo, entonces $\mathbf{p}_1 = [0 \ 0 \ 0]^T$. Por lo tanto, la cinemática directa para el péndulo queda definida cómo:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 = \mathbf{R}_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

3.1.2. Cálculo de la velocidad

La velocidad se obtiene derivando (3.2):

$$\mathbf{v}_1 = \frac{d}{dt} \mathbf{p}_0 = \dot{\mathbf{R}}_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \mathbf{S}(\dot{q}_1 \mathbf{k}) \mathbf{R}_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

3.1.3. Cálculo de la rapidez lineal

La rapidez se define como $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{v}$, entonces:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \mathbf{R}_{z_0}^T(q_1) \mathbf{S}^2(-\mathbf{k}) \mathbf{R}_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 \quad (3.4)$$

donde $\mathbf{S}(\dot{q}_1 \mathbf{k})^T \mathbf{S}(\dot{q}_1 \mathbf{k}) = -\mathbf{S}^2(\dot{q}_1 \mathbf{k}) = \mathbf{S}^2(-\dot{q}_1 \mathbf{k})$, además $\mathbf{S}^2(\dot{q}_1 \mathbf{k}) = \mathbf{S}^2(\mathbf{k}) \dot{q}_1^2 = \dot{q}_1^2 \mathbf{S}^2(\mathbf{k})$.

3.1.4. Cálculo de las energías

3.1.4.1. Energía cinética

La energía cinética para el péndulo se define como $\mathcal{K} = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2 + \frac{1}{2}I_p\dot{q}_1^2$, entonces:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \left[m \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \mathbf{R}_{z_0}^T(q_1) \mathbf{S}^2(-\mathbf{k}) \mathbf{R}_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + I_p \right] \dot{q}_1^2 \quad (3.5)$$

3.1.4.2. Energía potencial

La energía potencial $\mathcal{U}(q_1)$ en el caso del péndulo es:

$$\mathcal{U}(q_1) = ml_{c_1}g[1 - \cos(q_1)] \quad (3.6)$$

3.1.5. Cálculo del Lagrangiano

El lagrangiano se define como $\mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1) = \mathcal{K}(q_1, \dot{q}_1) - \mathcal{U}(q_1)$; entonces, de (3.5) y (3.6) se tiene:

$$\mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1) = \frac{1}{2} \left[m \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \mathbf{R}_{z_0}^T(q_1) \mathbf{S}^2(-\mathbf{k}) \mathbf{R}_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + I_p \right] \dot{q}_1^2 - ml_{c_1}g[1 - \cos(q_1)] \quad (3.7)$$

3.1.6. Ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1)}{\partial \dot{q}_1} = \left[m \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \mathbf{R}_{z_0}^T(q_1) \mathbf{S}^2(-\mathbf{k}) \mathbf{R}_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + I_p \right] \dot{q}_1 \quad (3.8)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1)}{\partial \dot{q}_1} \right] = + \left[m \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \mathbf{R}_{z_0}^T(q_1) \mathbf{S}^2(-\mathbf{k}) \mathbf{R}_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + I_p \right] \ddot{q}_1 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1)}{\partial q_1} = -ml_{c_1}g \sin(q_1) \quad (3.10)$$

3.1.7. Modelo dinámico

Por último de las ecuaciones (3.9) y (3.10) se tiene:

$$\tau = \left[m \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \mathbf{R}_{z_0}^T(q_1) \mathbf{S}^2(-\mathbf{k}) \mathbf{R}_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + I_p \right] \ddot{q}_1 + ml_{c1}g \sin(q_1) + b\dot{q}_1 + f_c \text{signo}(\dot{q}_1) + f_e[1 - |\text{signo}(\dot{q}_1)|] \quad (3.11)$$

3.2. Robot de 2 grados de libertad

3.2.1. Cinemática directa analítica de Euler

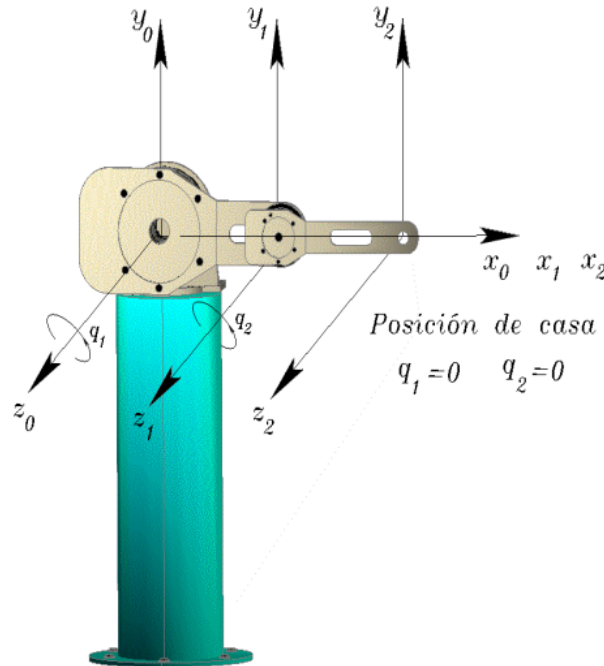


Figura 3.4: Sistemas de referencia de un robot manipulador de 2gdl.

Partiendo de la ecuación fundamental de la cinemática y considerando a figura 3.4 se cumple:

- Para el **primer eslabón** se sabe que, $\mathbf{d}_0^1 = \mathbf{R}_{z_0}[l_1 \ 0 \ \beta_1]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$. Hay una rotación de $\phi = q_1$ respecto a z_0 , no hay rotaciones respecto al eje x_0 ni al eje y_0 por lo que $\theta = \psi = 0$. Por lo tanto:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + \mathbf{R}_0^1(\phi, 0, 0)\mathbf{p}_1 = \mathbf{R}_{z_0}(q_1) \left[\begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \mathbf{p}_1 \right] \quad (3.12)$$

- Dado que para el **segundo eslabón** no existe ninguna herramienta asociada al extremo final del robot, entonces $\mathbf{p}_2 = [0 \ 0 \ 0]^T$, además $\mathbf{d}_0^2 = \mathbf{R}_{z_0}[l_2 \ 0 \ \beta_2]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$; por lo tanto:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{d}_1^2 + \mathbf{R}_1^2(\phi, \theta, \psi)\mathbf{p}_2 = \mathbf{R}_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Reemplazando (3.12) en (3.13) se tiene:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

3.2.2. Cálculo de la velocidad

Para obtener los vectores de la velocidad articular $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ se procede a calcular la cinemática diferencial. La velocidad $\mathbf{v}_1$ se obtiene de derivar $\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + \mathbf{R}_0^1(\phi, \theta, \psi)\mathbf{p}_1$ cuando $\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$. Es decir, cuando $\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1$

$$\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{d}}_0^1 = \mathbf{S}(\mathbf{k}_0)\mathbf{R}_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \quad (3.15)$$

La velocidad $\mathbf{v}_2$ se obtiene derivando $\mathbf{p}_0$ de la ecuación (3.14):

$$\mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{p}}_0 = \left[\mathbf{S}(\mathbf{k}_0)\mathbf{R}_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \mathbf{S}(\mathbf{k}_0)\mathbf{R}_{z_0}(q_1 + q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right] \dot{q}_1 + \mathbf{S}(\mathbf{k}_1)\mathbf{R}_{z_0}(q_1 + q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2 \quad (3.16)$$

3.2.3. Cálculo de la rapidez

La rapidez del primer eslabón $\|\mathbf{v}_1\|^2$ se obtiene:

$$\|\mathbf{v}_1\|^2 = \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 \quad (3.17)$$

La rapidez del segundo eslabón $\|\mathbf{v}_2\|^2$ se obtiene:

$$\|\mathbf{v}_2\|^2 = \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 = \left[\begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \mathbf{R}_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \mathbf{R}_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2 \right]^T \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \mathbf{R}_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \mathbf{R}_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2 \right] \quad (3.18)$$

3.2.4. Cálculo de las energías

3.2.4.1. Energía cinética

La energía cinética para el robot de 2gdl se obtiene de (3.17) y (3.18) :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = & \frac{1}{2} \left[I_1 + I_2 + m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + m_1 \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ & + \left[m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ + I_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & + \frac{1}{2} \left[m_2 \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ + I_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2^2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

3.2.4.2. Energía potencial

La energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ en el caso del robot de 2gdl es:

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}) = m_1 g l_{c_1} [1 - \cos(q_1)] + m_2 g [l_1 + l_{c_2}] - [l_1 \cos(q_1) + l_{c_2} \cos(q_1 + q_2)] \quad (3.20)$$

3.2.5. Cálculo del Lagrangiano

El lagrangiano queda definido como $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q})$, entonces:

$$\begin{aligned} \partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = & \frac{1}{2} \left[I_1 + I_2 + m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + m_1 \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ & + \left[m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ + I_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & + \frac{1}{2} \left[m_2 \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ + I_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$- m_1 g l_{c_1} [1 - \cos(q_1)] - m_2 g [l_1 + l_{c_2}] - [l_1 \cos(q_1) + l_{c_2} \cos(q_1 + q_2)] \quad (3.22)$$

3.2.6. Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1} = & \left[I_1 + I_2 + m_1 \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right] \dot{q}_1 + \left[m_2 \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + I_2 \right] \dot{q}_2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1} \right] &= \left[I_1 + I_2 + m_1 \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \right. \\
&\quad \left. \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right] \ddot{q}_1 + 2m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{k}) \mathbf{R}_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{k}) \mathbf{R}_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2^2 \\
&\quad + \left[m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + I_2 \right] \ddot{q}_2
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2} = \left[I_2 + m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right] \dot{q}_2 + \left[m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right] + I_2 \dot{q}_1 \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2} \right] &= \left[I_2 + m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right] \ddot{q}_2 + \left[m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right] + I_2 \ddot{q}_1 \\
&\quad + m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{k}) \mathbf{R}_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_1} = -m_1 g l_{c1} \sin(q_1) - m_2 g [l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)] \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_2} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \tag{3.28}$$

3.2.7. Modelo dinámico

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 + I_2 + m_1 \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \\ + 2m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + I_2 \\ I_2 + m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}(\mathbf{q})} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} \\
&\quad + \underbrace{\begin{bmatrix} 2m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{k}) \mathbf{R}_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2 & m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{k}) \mathbf{R}_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2 \\ m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{k}) \mathbf{R}_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\
&\quad + \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 g l_{c1} \sin(q_1) + m_2 g [l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)] \\ m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(\mathbf{q})} + \underbrace{\mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_c \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_e [1 - |\text{sgn}(\dot{\mathbf{q}})|]}_{\mathbf{f}_f}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

donde $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de posición, velocidad y aceleración en coordenadas articulares, respectivamente. $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, la cual es cuadrada, simétrica y definida positiva; $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de Coriolis y fuerzas centrípetas; $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el par gravitacional; $\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de pares de fricción presente en cada articulación del robot, $\mathbf{B}, \mathbf{F}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales de coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb, respectivamente. La fricción estática $\mathbf{f}_e \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ está representada por $\mathbf{f}_e = [f_{e1}, f_{e2}, \dots, f_{en}]^T$ que es el vector de fricción estática que contiene los coeficientes de fricción estática de cada uno de los servomotores del robot manipulador.

3.3. Robot de 3 grados de libertad

Siguiendo la metodología de la mecánica analítica de Euler, se sigue el mismo procedimiento para obtener el modelo de un robot de 3 gdl. En la figura 3.5 se observa el robot de tres grados de libertad y los ejes de referencia de cada eslabón. A continuación se describen los símbolos de cada parámetro del robot manipulador de 3 gdl en la tabla 3.1.

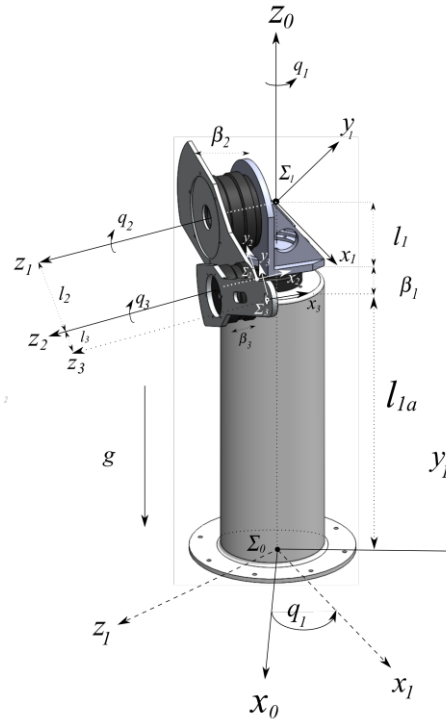


Figura 3.5: Sistemas de referencia de un robot de 3 gdl.

Eslabón	Significado	Notación
(1)BASE	Masa	m_1
	Longitud del servomotor	β_1
	Longitud del eslabón 1	l_1
	Inercia del eslabón 1	$\mathcal{I}_1$
	Centro de masa del eslabón 1	l_{c1}
	Coefficiente de fricción viscosa	b_1
	Coefficiente de fricción de Coulomb	f_{c1}
	Coefficiente de fricción estática	f_{e1}
	Posición articular	q_1
(2)HOMBRO	Masa	m_2
	Longitud del servomotor	β_2
	Longitud del eslabón 2	l_2
	Inercia del eslabón 2	$\mathcal{I}_2$
	Centro de masa del eslabón 2	l_{c2}
	Coefficiente de fricción viscosa	b_2
	Coefficiente de fricción de Coulomb	f_{c2}
	Coefficiente de fricción estática	f_{e2}
	Posición articular	q_2
(3)CODO	Masa	m_3
	Longitud del servomotor	β_3
	Longitud del eslabón 3	l_3
	Inercia del eslabón 3	$\mathcal{I}_3$
	Centro de masa del eslabón 3	l_{c3}
	Coefficiente de fricción viscosa	b_3
	Coefficiente de fricción de Coulomb	f_{c3}
	Coefficiente de fricción estática	f_{e3}
	Posición articular	q_3

Tabla 3.1: Parámetros del robot manipulador de 3gdl.

3.3.1. Cinemática directa analítica de Euler

3.3.1.1. Eslabón 1

Partiendo de la ecuación fundamental de la cinemática

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + R(\phi, \theta, \psi)\mathbf{p}_1 \quad (3.30)$$

Entonces el efector final del robot manipulador queda expresado como:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= R_{z_0}(q_1) \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 + \beta_1 + l_{1a} \end{pmatrix} + R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{p}_1 \right] \\ &= R_{z_0}(q_1) \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 + \beta_1 + l_{1a} \end{pmatrix} + R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)R_{z_1}(q_2) \left[\begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \mathbf{p}_2 \right] \right] \\ &= R_{z_0}(q_1) \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 + \beta_1 + l_{1a} \end{pmatrix} + R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)R_{z_1}(q_2) \left[\begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + R_{z_2}(q_3) \left[\begin{pmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \mathbf{p}_3 \right] \right] \right] \\ &= \begin{bmatrix} [\beta_2 + \beta_3]\text{sen}(q_1) + \cos(q_1)[l_2\cos(q_2) + l_3\cos(q_2 + q_3)] \\ -[\beta_2 + \beta_3]\cos(q_1) + \text{sen}(q_1)[l_2\cos(q_2) + l_3\cos(q_2 + q_3)] \\ l_{1a} + \beta_1 + l_1 + l_2\text{sen}(q_2) + l_3\text{sen}(q_2 + q_3) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.31)$$

3.3.2. Cinemática diferencial

La derivada con respecto al tiempo de cada uno de los términos del modelo de la cinemática directa del robot manipulador, queda expresada como:

$$\frac{d}{dt} \left[R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{1a} + \beta_1 + l_1 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

La derivada del segundo término queda expresada como:

$$\frac{d}{dt} \left[R_{z_0}(q_1)R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \beta_2\cos(q_1) - l_2\cos(q_2)\text{sen}(q_1) & l_2\cos(q_1)\text{sen}(q_2) & 0 \\ \beta_2\text{sen}(q_1) + l_2\cos(q_1)\cos(q_2) & -l_2\text{sen}(q_1)\text{sen}(q_2) & 0 \\ 0 & l_2\cos(q_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

La derivada con respecto al tiempo del tercer término queda expresada como:

$$\frac{d}{dt} \left[R_{z_0}(q_1)R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)\underbrace{R_{z_1}(q_2)R_{z_2}(q_3)}_{R_{z_1}(q_2+q_3)} \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \beta_3\cos(q_1) - l_3\cos(q_2 + q_3)\text{sen}(q_1) & l_3\cos(q_1)\text{sen}(q_2 + q_3) & l_3\cos(q_1)\text{sen}(q_2 + q_3) \\ \beta_3\text{sen}(q_1) + l_3\cos(q_1)\cos(q_2 + q_3) & -l_3\text{sen}(q_1)\text{sen}(q_2 + q_3) & l_3\text{sen}(q_1)\text{sen}(q_2 + q_3) \\ 0 & l_3\cos(q_2 + q_3) & l_3\cos(q_2 + q_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Sumando los términos 3.33 y 3.34, se obtiene el jacobiano:

$$J_r(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} [\beta_2 + \beta_3]\cos(q_1) - \sin(q_1)[l_2\cos(q_2) + l_3\cos(q_2 + q_3)] & \cos(q_1)[l_2\sin(q_2) - l_3\sin(q_2 + q_3)] & -l_3\cos(q_1)\sin(q_2 + q_3) \\ [\beta_2 + \beta_3]\sin(q_1) + \cos(q_1)[l_2\cos(q_2) + l_3\cos(q_2 + q_3)] & -\sin(q_1)[l_2\sin(q_2) - l_3\sin(q_2 + q_3)] & -l_3\sin(q_1)\sin(q_2 + q_3) \\ 0 & l_2\cos(q_2) + l_3\cos(q_2 + q_3) & l_3\cos(q_2 + q_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

3.3.3. Cálculo de la rapidez

La rapidez de a velocidad $\mathbf{v}_1$ se obtiene como, $\|\mathbf{v}_1\|^2 = \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1$:

$$\|\mathbf{v}_1\|^2 = \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

La rapidez de a velocidad $\mathbf{v}_2$ se obtiene como, $\|\mathbf{v}_2\|^2 = \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_2\|^2 = \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 &= \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T R_{z_1}^T(q_2) R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}^T(q_1) S^T \begin{pmatrix} \dot{q}_2 \sin(q_1) \\ -\dot{q}_2 \cos(q_1) \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} \dot{q}_2 \sin(q_1) \\ -\dot{q}_2 \cos(q_1) \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix} \\ &= R_{z_0}(q_1) R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ &= [\beta_2^2 + l_{c2} \cos^2(q_2)] \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 - 2l_{c2} \beta_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \end{aligned} \quad (3.37)$$

La rapidez de a velocidad $\mathbf{v}_3$ se obtiene como, $\|\mathbf{v}_3\|^2 = \mathbf{v}_3^T \mathbf{v}_3$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_3\|^2 = \mathbf{v}_3^T \mathbf{v}_3 &= \left[S \begin{pmatrix} \dot{q}_2 \sin(q_1) \\ -\dot{q}_2 \cos(q_1) \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix} R_{z_0}(q_1) R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \right. \\ & \quad \left. S \begin{pmatrix} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(q_1) \\ -(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \cos(q_1) \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix} R_{z_0}(q_1) R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2 + q_3) \begin{bmatrix} l_{c3} \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \right]^T \\ &= \left[S \begin{pmatrix} \dot{q}_2 \sin(q_1) \\ -\dot{q}_2 \cos(q_1) \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix} R_{z_0}(q_1) R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \right. \\ & \quad \left. S \begin{pmatrix} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(q_1) \\ -(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \cos(q_1) \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix} R_{z_0}(q_1) R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2 + q_3) \begin{bmatrix} l_{c3} \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \right]^T \\ &= [\beta_2^2 + \beta_3^2 + 2\beta_2\beta_3 + 2l_2l_{c3}\cos(q_2 + q_3)\cos(q_2) + l_2^2\cos^2(q_2) + l_{c3}^2\cos^2(q_2 + q_3)] \dot{q}_1^2 + \\ & \quad [l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_2l_{c3}\cos(q_3)] \dot{q}_2^2 + l_{c3}^2 \dot{q}_3^2 [2(\beta_2 + \beta_3)l_{c3}\sin(q_2 + q_3)] \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\ & \quad - [2l_2(\beta_2 + \beta_3)\sin(q_2) + 2l_{c3}(\beta_2 + \beta_3)] \dot{q}_1 \dot{q}_2 + [2l_2l_{c3}\cos(q_3) + 2l_{c3}^2] \dot{q}_2 \dot{q}_3 \end{aligned} \quad (3.38)$$

3.3.4. Cálculo de las Energías

3.3.4.1. Cálculo de la Energía cinética

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathcal{K}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{K}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{K}_3(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\
&= \frac{1}{2}m_1\|\mathbf{v}_1\|^2 + \frac{1}{2}\mathbf{w}_1^T \mathcal{I}_1 \mathbf{w}_1 + \frac{1}{2}m_2\|\mathbf{v}_2\|^2 + \frac{1}{2}\mathbf{w}_2^T \mathcal{I}_2 \mathbf{w}_2 + \frac{1}{2}m_3\|\mathbf{v}_3\|^2 + \frac{1}{2}\mathbf{w}_3^T \mathcal{I}_3 \mathbf{w}_3 \\
&= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

donde:

$$\begin{aligned}
&\left[\underbrace{\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 + m_2[\beta_2^2 + l_{c2}^2 \cos^2(q_2)] + m_3[\beta_2^2 + \beta_3^2 + 2\beta_2\beta_3 + 2l_2l_{c3}\cos(q_2 + q_3)\cos(q_3) + l_2^2 \cos^2(q_2) + l_{c3}^2 \cos^2(q_2 + q_3)]}_{m_{11}} \right. \\
&\quad \left. - \underbrace{\left[\begin{array}{c} m_2l_{c2}\beta_2 \sin(q_2) + \\ m_3(\beta_2 + \beta_3)[l_2 \sin(q_2) + \\ 2l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] \end{array} \right]}_{m_{12}} \right. \\
&\quad \left. \underbrace{-m_3(\beta_2 + \beta_3)l_{c3} \sin(q_2 + q_3)}_{m_{13}} \right] \\
&\quad \left[\underbrace{- \left[\begin{array}{c} m_2l_{c2}\beta_2 \sin(q_2) + \\ m_3(\beta_2 + \beta_3)[l_2 \sin(q_2) + \\ 2l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] \end{array} \right]}_{m_{21}} \right. \\
&\quad \underbrace{\mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 + m_2l_{c2}^2 + m_3[l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_2l_{c3}\cos(q_3)]}_{m_{22}} \\
&\quad \underbrace{m_3[l_2l_{c3}\cos(q_3) + l_{c3}^2] + \mathcal{I}_3}_{m_{23}} \left. \right] \\
&\quad \left[\underbrace{-m_3(\beta_2 + \beta_3)l_{c3} \sin(q_2 + q_3)}_{m_{31}} \right. \\
&\quad \underbrace{m_3[l_2l_{c3}\cos(q_3) + l_{c3}^2] + \mathcal{I}_3}_{m_{32}} \\
&\quad \underbrace{\mathcal{I}_3 + m_3l_{c3}^2}_{m_{33}} \left. \right] \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{M(\mathbf{q})}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

3.3.4.2. Cálculo de la Energía potencial

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}) = m_1g[l_{1a} + \beta_1 + l_{c1}] + m_2gl_{c2}[1 - \cos(q_2)] + m_3g[[l_2 + l_{c3}] - [l_2\cos(q_2) + l_{c3}\cos(q_2 + q_3)]] \tag{3.41}$$

3.3.5. Cálculo del Lagrangiano

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \\
&= \frac{1}{2}[\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 m_2[\beta_2^2 + l_{c2}^2 \cos^2(q_2)] + m_3[\beta_2^2 + \beta_3^2 + 2\beta_2\beta_3 + 2l_2l_{c3}\cos(q_2 + q_3)\cos(q_2) + \\
&\quad l_2^2 \cos^2(q_2) + l_{c3}^2 \cos^2(q_2 + q_3)]]\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}[\mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 + m_2l_{c2}^2 + m_3[l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_2l_{c3}\cos(q_3)]]\dot{q}_2^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}[\mathcal{I}_3 + m_3l_{c3}^2]\dot{q}_3^2 - \frac{1}{2}[m_22l_{c2}\beta_2 \sin(q_2) + 2m_3(\beta_2 + \beta_3)[l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)]]\dot{q}_1\dot{q}_2 \\
&\quad - \frac{1}{2}m_32(\beta_2 + \beta_3)l_{c3} \sin(q_2 + q_3)\dot{q}_1\dot{q}_3 + \frac{1}{2}[m_3[2l_2l_{c3}\cos(q_3) + 2l_{c3}^2] + 2\mathcal{I}_3]\dot{q}_2\dot{q}_3 \\
&\quad - m_1g[l_{1a} + \beta_1 + l_{c1}] - m_2gl_{c2}[1 - \cos(q_2)] - m_3g[l_2 + l_{c3}][1 - \cos(q_2 + q_3)]
\end{aligned} \tag{3.42}$$

3.3.6. Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

Se emplean las ecuaciones de Euler-Lagrange, las cuales están definidas por:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} \quad (3.43)$$

3.3.7. Modelo dinámico

Finalmente se hace la factorización de las ecuaciones de Euler-Lagrange, se separan los términos $\ddot{\mathbf{q}}$, $\dot{\mathbf{q}}$ de tal forma que se obtenga las matrices de inercia $M(\mathbf{q})$, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, adicionalmente se agrega el par gravitacional y coeficiente de fricción viscosa, de coulomb y estática.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 + m_2[\beta_2^2 + l_{c2}^2 \cos^2(q_2)] + m_3[\beta_2^2 + \beta_3^2 + 2\beta_2\beta_3 + 2l_2l_{c3}\cos(q_2 + q_3)\cos(q_3) + l_2^2 \cos(q_2) + l_{c3}^2 \cos^2(q_2 + q_3)]}_{m_{11}} & - \underbrace{\begin{bmatrix} m_2l_{c2}\beta_2\sin(q_2) + m_3(\beta_2 + \beta_3)l_2\sin(q_2) + 2l_{c3}\sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix}}_{m_{12}} & \underbrace{-m_3(\beta_2 + \beta_3)l_{c3}\sin(q_2 + q_3)}_{m_{13}} \\ - \underbrace{\begin{bmatrix} m_2l_{c2}\beta_2\sin(q_2) + m_3(\beta_2 + \beta_3)l_2\sin(q_2) + 2l_{c3}\sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix}}_{m_{21}} & \underbrace{\mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 + m_2l_{c2}^2 + m_3[l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_2l_{c3}\cos(q_3)]}_{m_{22}} & \underbrace{m_3[l_2l_{c3}\cos(q_3) + l_{c3}^2] + \mathcal{I}_3}_{m_{23}} \\ \underbrace{-m_3(\beta_2 + \beta_3)l_{c3}\sin(q_2 + q_3)}_{m_{31}} & \underbrace{m_3[l_2l_{c3}\cos(q_3) + l_{c3}^2] + \mathcal{I}_3}_{m_{32}} & \underbrace{\mathcal{I}_3 + m_3l_{c3}^2}_{m_{33}} \end{bmatrix}}_{M(\mathbf{q})} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} \\ + & \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{-[m_2l_{c2}^2 + m_3l_2^2]\cos(q_2)\sin(q_2)\dot{q}_2 - m_3l_2l_{c3}\sin(q_2 + q_3)\cos(q_2)[\dot{q}_2 + \dot{q}_3] - m_3l_2l_{c3}\cos(q_2 + q_3)\sin(q_2)\dot{q}_2 - m_3l_{c3}^2\cos(q_2 + q_3)\sin(q_2 + q_3)[\dot{q}_2 + \dot{q}_3]}_{c_{11}} & \underbrace{-[m_2l_{c2}\beta_2l_{c2} + m_3(\beta_2 + \beta_3)l_2]\cos(q_2)\dot{q}_2 - m_3(\beta_2 + \beta_3)l_{c3}\cos(q_2 + q_3)\dot{q}_2}_{c_{12}} & \underbrace{-m_3(\beta_2 + \beta_3)l_{c3}\cos(q_2 + q_3)\dot{q}_2}_{c_{13}} \\ \underbrace{-m_3(\beta_2 + \beta_3)l_{c3}\cos(q_2 + q_3)\dot{q}_3}_{c_{21}} & \underbrace{-m_3l_2l_{c3}\sin(q_3)\dot{q}_3}_{c_{22}} & \underbrace{-m_3l_2l_{c3}\sin(q_3)\dot{q}_3}_{c_{23}} \\ \underbrace{-m_3(\beta_2 + \beta_3)l_{c3}\cos(q_2 + q_3)\dot{q}_3}_{c_{31}} & \underbrace{-m_3l_2l_{c3}\sin(q_3)\dot{q}_3}_{c_{32}} & \underbrace{0}_{c_{33}} \end{bmatrix}}_{C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \\ + & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ m_2gl_{c2}\sin(q_2) + m_3gl_2\sin(q_2) + m_3gl_{c3}\sin(q_2 + q_3) \\ m_3gl_{c3}\sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(\mathbf{q})} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1\dot{q}_1 + f_{c1}\text{signo}(\dot{q}_1) + f_{e1}[1 - |\text{signo}(\dot{q}_1)|] \\ b_2\dot{q}_2 + f_{c2}\text{signo}(\dot{q}_2) + f_{e2}[1 - |\text{signo}(\dot{q}_2)|] \\ b_3\dot{q}_3 + f_{c3}\text{signo}(\dot{q}_3) + f_{e3}[1 - |\text{signo}(\dot{q}_3)|] \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_f} \end{aligned} \quad (3.44)$$

donde:

- $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.
- $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cuadrada, simétrica y definida positiva.
- $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
- $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.
- $\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

Capítulo 4

Algoritmos de control

4.1. Esquema de control de trayectoria

Se considera una familia de funciones saturadas la cuales son descritas en (4.1), cuya respuesta es saturada. El valor de m es un número entero positivo, $\eta, \alpha \in \mathbb{R}_+$. En las figura 4.1 se observa la respuesta de la función cuando m varía y en 4.2 cuando η varía. hiperbólicas.

$$f(x) = \frac{\sinh(\eta x) \cosh(\eta x)^{2m-1} \left[1 - \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta x)^{2m}} \right]}{\cosh(\eta x)^{2m} + e^{-\cosh(\eta x)^{2m}}} \quad (4.1)$$

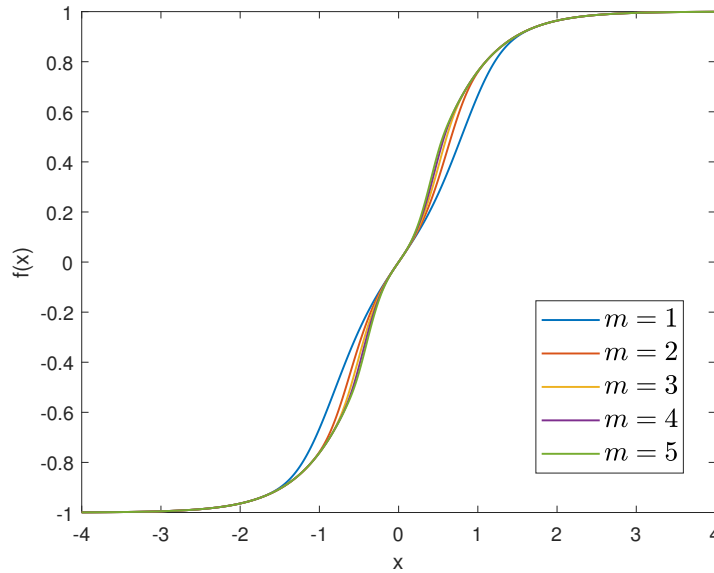


Figura 4.1: Función vectorial hiperbólica con distintos valores de m .

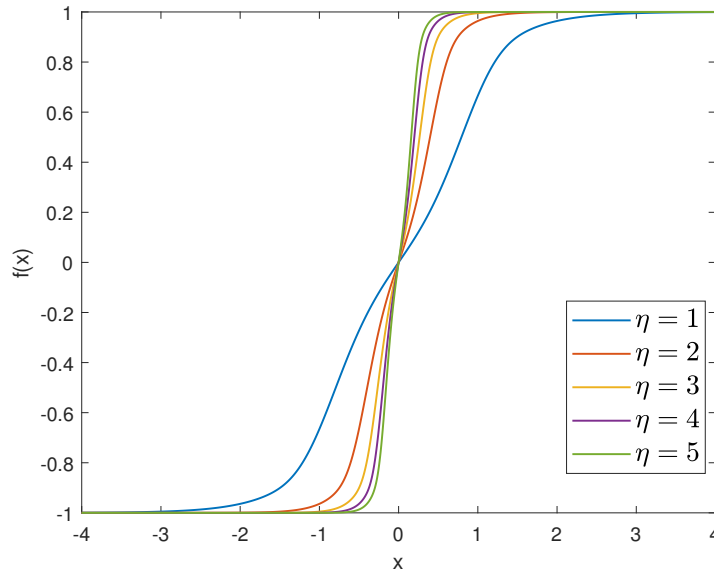


Figura 4.2: Función vectorial hiperbólica con distintos valores de η .

4.2. Control PD+ hiperbólico

En base a la función vectorial hiperbólica presentada anteriormente, se propone el siguiente esquema de control basado en funciones hiperbólicas y de la forma PD+.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & K_p \frac{\sinh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}}) \cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m-1} \left[1 - \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m}} \right]}{\cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m} + \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m}}} + K_v \frac{\sinh(\eta_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \cosh(\eta_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m-1} \left[1 - \beta e^{-\beta \cosh(\eta_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m}} \right]}{\cosh(\eta_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m} + \beta e^{-\beta \cosh(\eta_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m}}} \\ & + M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + B\dot{\mathbf{q}}_d + F_c \text{signo}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde, $\mathbf{K}_p$ y $\mathbf{K}_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales definidas positivas de las ganancias proporcional y derivativa respectivamente. Por cuestiones de simplicidad de términos las funciones vectoriales del controlador serán consideradas como:

$$\mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \frac{\sinh(\eta_1 \tilde{q}_1) \cosh(\eta_1 \tilde{q}_1)^{2m-1} [1 - \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{q}_1)^{2m}}]}{\cosh(\eta_1 \tilde{q}_1)^{2m} + \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{q}_1)^{2m}}} \\ \frac{\sinh(\eta_1 \tilde{q}_2) \cosh(\eta_1 \tilde{q}_2)^{2m-1} [1 - \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{q}_2)^{2m}}]}{\cosh(\eta_1 \tilde{q}_2)^{2m} + \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{q}_2)^{2m}}} \\ \vdots \\ \frac{\sinh(\eta_1 \tilde{q}_n) \cosh(\eta_1 \tilde{q}_n)^{2m-1} [1 - \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{q}_n)^{2m}}]}{\cosh(\eta_1 \tilde{q}_n)^{2m} + \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{q}_n)^{2m}}} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{f}_v(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \begin{bmatrix} \frac{\sinh(\eta_2 \dot{\tilde{q}}_1) \cosh(\eta_2 \dot{\tilde{q}}_1)^{2m-1} [1 - \beta e^{-\beta \cosh(\eta_2 \dot{\tilde{q}}_1)^{2m}}]}{\cosh(\eta_2 \dot{\tilde{q}}_1)^{2m} + \beta e^{-\beta \cosh(\eta_2 \dot{\tilde{q}}_1)^{2m}}} \\ \frac{\sinh(\eta_2 \dot{\tilde{q}}_2) \cosh(\eta_2 \dot{\tilde{q}}_2)^{2m-1} [1 - \beta e^{-\beta \cosh(\eta_2 \dot{\tilde{q}}_2)^{2m}}]}{\cosh(\eta_2 \dot{\tilde{q}}_2)^{2m} + \beta e^{-\beta \cosh(\eta_2 \dot{\tilde{q}}_2)^{2m}}} \\ \vdots \\ \frac{\sinh(\eta_2 \dot{\tilde{q}}_n) \cosh(\eta_2 \dot{\tilde{q}}_n)^{2m-1} [1 - \beta e^{-\beta \cosh(\eta_2 \dot{\tilde{q}}_n)^{2m}}]}{\cosh(\eta_2 \dot{\tilde{q}}_n)^{2m} + \beta e^{-\beta \cosh(\eta_2 \dot{\tilde{q}}_n)^{2m}}} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

4.2.1. Ecuación en lazo cerrado

La ecuación en lazo cerrado que define el problema de control de trayectoria, formada por el modelo dinámico (3.29) y el controlador PD+ hiperbólico (4.2) queda expresada de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ -M(\mathbf{q}_d(t) - \tilde{\mathbf{q}}(t))^{-1} [K_p \mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}}) + K_v \mathbf{f}_v(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + C(\mathbf{q}_d(t) - \tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}_d(t) - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + B \dot{\tilde{\mathbf{q}}}] \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

4.2.2. Análisis de estabilidad asintótica

4.2.2.1. Existencia y unicidad del punto de equilibrio

El análisis de existencia y unicidad del punto de equilibrio $[\tilde{\mathbf{q}} \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^T = [\mathbf{0} \ \mathbf{0}]^T$ para el esquema de control PD+ hiperbólico, se lleva a cabo de la siguiente forma:

- Considerando la primera componente de (4.5), se tiene que $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{I} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$, debido a que la matriz identidad $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal definida positiva.

En la segunda componente de la ecuación (4.5) se considera lo siguiente:

- La matriz de inercia $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva, entonces su inversa también es definida positiva.

- Las ganancias proporcional K_p y K_v son matrices definidas positivas propuestas por el usuario.

- La matriz de coriolis $C(\mathbf{q}_d(t) - \tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}_d(t) - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ debido a que en la primera componente de la ecuación en lazo cerrado (4.5). También para el caso de la matriz de coeficientes de

fricción viscosa se tiene que: $B\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$, ya que la matriz B es definida positiva.

- $\mathbf{f}_p(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$, debido a que la ganancia K_v es una matriz diagonal definida positiva.
- $\mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, debido a que la ganancia K_p es una matriz diagonal definida positiva.

Entonces, se dice que el punto de equilibrio en la ecuación en lazo cerrado (4.5) existe y es único con la condición de que las matrices de ganancias proporcional y derivativa del control PD+ hiperbólico (4.2) sean definidas positivas.

4.2.2.2. Función de Lyapunov candidata

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov para el análisis de estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación el lazo cerrado (4.5).

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \underbrace{\frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_{\text{I}} + \underbrace{\left[\sqrt{\ln(\cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m} + \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m}})} \right]^T K_p \left[\sqrt{\ln(\cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m} + \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m}})} \right]}_{\text{II}} + \underbrace{\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_{\text{III}} \quad (4.6)$$

donde:

$$\sqrt{\ln(\cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m} + \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m}})} = \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\eta_1 \tilde{q}_1)^{2m} + \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{q}_1)^{2m}})} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\eta_1 \tilde{q}_2)^{2m} + \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{q}_2)^{2m}})} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\eta_1 \tilde{q}_n)^{2m} + \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{q}_n)^{2m}})} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ es una función definida positiva, debido a que la matriz de inercia $M > 0$. Se sabe que por diseño K_p es definida positiva, entonces $K_p \mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}})$ es definida positiva.

Se derivan los elementos I, II y III. Entonces se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q})\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \left[\frac{\sinh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}}) \cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m-1} [1 - \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m}}]}{\cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m} + \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m}}} \right]^T K_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &+ \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \frac{\epsilon_0}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &+ \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

• Se emplean las propiedades que relaciona la matriz de masas e inercias y la matriz de fuerzas centrífugas y coriolis [30].

$$\frac{1}{2} \left[\dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \right] \equiv 0 \quad (4.9)$$

$$\dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \equiv C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}^T \quad (4.10)$$

• Finalmente, después de emplear la propiedad de antisimetría y eliminar algunos términos, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = & -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T B \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T K_v \left[\frac{\sinh(\eta_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \cosh(\eta_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m-1} \left[1 - \beta e^{-\beta \cosh(\eta_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m}} \right]}{\cosh(\eta_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m} + \beta e^{-\beta \cosh(\eta_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m}}} \right] + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ & + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \frac{\epsilon_0}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ & - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \left[\frac{\sinh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}}) \cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m-1} \left[1 - \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m}} \right]}{\cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m} + \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m}}} \right] \\ & - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T K_v \left[\frac{\sinh(\eta_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \cosh(\eta_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m-1} \left[1 - \beta e^{-\beta \cosh(\eta_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m}} \right]}{\cosh(\eta_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m} + \beta e^{-\beta \cosh(\eta_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m}}} \right] - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T B \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (4.11) \end{aligned}$$

Entonces, la derivada de la función de Lyapunov, queda expresada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = & - \underbrace{\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T B \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_1 + \underbrace{\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_2 + \underbrace{\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_3 - \underbrace{\frac{\epsilon_0}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_4 \\ & - \underbrace{\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T B \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_5 - \underbrace{\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T K_v \mathbf{f}_v(\dot{\tilde{\mathbf{q}}})}_6 - \underbrace{\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}})}_7 - \underbrace{\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T K_v \mathbf{f}_v(\dot{\tilde{\mathbf{q}}})}_8 \quad (4.12) \end{aligned}$$

Cada uno de los elementos de 4.19 son enumerados para trabajarlos por separado, de tal forma que $\dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ quede expresado por componentes cuadráticas y a la vez sea una función definida negativa. Al aplicar las propiedades descritas anteriormente, la derivada de la función de Lyapunov resulta:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) & < - [\lambda_B^{\min} - \epsilon_0 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} - \epsilon_0 k_c] \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + \epsilon_0 [k_c \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + \lambda_B^{\max}] \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \\ & - \lambda_{K_v}^{\min} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\mathbf{f}_v(\dot{\tilde{\mathbf{q}}})\| - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_p}^{\min} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}})\| - \epsilon_0 \lambda_{K_v}^{\max} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \\ & < - [\lambda_{K_v}^{\min} + \lambda_B^{\min} - \epsilon_0 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} - \epsilon_0 k_c] \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + \epsilon_0 [-\lambda_{K_v}^{\max} k_c \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + \lambda_B^{\max}] \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \\ & - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_p}^{\min} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \quad (4.13) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ expresada de forma matricial, resulta:

$$\dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) < - \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_0}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_p}^{\min} & -\frac{\epsilon_0}{2} [-\lambda_{K_v}^{\max} k_c \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + \lambda_B^{\max}] \\ -\frac{\epsilon_0}{2} [-\lambda_{K_v}^{\max} k_c \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + \lambda_B^{\max}] & \lambda_{K_v}^{\min} + \lambda_B^{\min} - \epsilon_0 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} - \epsilon_0 k_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Si y solo si existe:

$$0 < \epsilon_0 \leq \frac{\lambda_B^{\min} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + \lambda_{K_v}^{\min} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2}{\lambda_{K_p}^{\min} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + 2\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 - \lambda_{K_v}^{\max} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + k_c \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\tilde{\mathbf{q}}\| - \lambda_B^{\max} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|} \quad (4.15)$$

lo cual demuestra estabilidad asintótica en el punto de equilibrio.

4.3. Control Par calculado hiperbólico

En base a la función vectorial hiperbólica presentada anteriormente, se propone el siguiente esquema de control basado en funciones hiperbólicas y de la forma Par calculado.

$$\begin{aligned} \tau = M(\mathbf{q}) & \left[\ddot{\mathbf{q}}_d K_p \frac{\sinh(\eta_1 \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \cosh(\eta_1 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m-1} [1 - \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m}}]}{\cosh(\eta_1 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m} + \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m}}} - K_v \frac{\sinh(\eta_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \cosh(\eta_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m-1} [1 - \beta e^{-\beta \cosh(\eta_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m}}]}{\cosh(\eta_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m} + \beta e^{-\beta \cosh(\eta_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m}}} \right] \\ & + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + B \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.3.1. Ecuación en lazo cerrado

La ecuación en lazo cerrado que define el problema de control de trayectoria, formada por el modelo dinámico (3.29) y el controlador PD+ hiperbólico (4.2) queda expresada de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ -[K_p \mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}}) + K_v \mathbf{f}_p(\dot{\tilde{\mathbf{q}}})] \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

4.3.2. Análisis de estabilidad asintótica

4.3.2.1. Existencia y unicidad del punto de equilibrio

El análisis de existencia y unicidad del punto de equilibrio $[\tilde{\mathbf{q}} \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^T = [\mathbf{0} \ \mathbf{0}]^T$ para el esquema de control Par calculado hiperbólico, se lleva a cabo de la siguiente forma:

- Considerando la primera componente de (4.17), se tiene que $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{I} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$, debido a que la matriz identidad $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal definida positiva.

En la segunda componente de la ecuación (4.17) se considera lo siguiente:

- Las ganancias proporcional K_p y K_v son matrices definidas positivas propuestas por el usuario.
- $\mathbf{f}_v(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$, debido a que la ganancia K_v es una matriz diagonal definida positiva.
- $\mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, debido a que la ganancia K_p es una matriz diagonal definida positiva.

Entonces, se dice que el punto de equilibrio en la ecuación en lazo cerrado (4.17) existe y es único con la condición de que las matrices de ganancias proporcional y derivativa del control Par calculado hiperbólico sean definidas positivas.

4.3.2.2. Función de Lyapunov candidata

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov para el análisis de estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación el lazo cerrado (4.17).

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \underbrace{\frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{I} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_{\text{I}} + \underbrace{\left[\sqrt{\ln(\cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m} + \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m}})} \right]^T K_p \left[\sqrt{\ln(\cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m} + \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m}})} \right]}_{\text{II}} + \underbrace{\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{I} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_{\text{III}} \quad (4.18)$$

Los elementos I y II de $V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ son positivos debido a sus elementos cuadráticos. Se sabe que por diseño K_p es definida positiva, entonces el elemento III es positivo.

Al igual que en el análisis de estabilidad para el caso del controlador PD+, se usan las mismas propiedades, las cuales permiten expresar la derivada de la función estricta de Lyapunov $\dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ en términos cuadráticos. Entonces,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &< -\lambda_{K_v}^{\min} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\mathbf{f}_v(\dot{\tilde{\mathbf{q}}})\| + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_p}^{\min} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}})\| - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_v}^{\max} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\mathbf{f}_v(\dot{\tilde{\mathbf{q}}})\| \\ &\quad - \frac{\epsilon_0}{\|\tilde{\mathbf{q}}\|} \frac{\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Considerando que las funciones son acotadas, es decir $\|\mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}})\| \leq \|\tilde{\mathbf{q}}\|$ y $\|\mathbf{f}_v(\dot{\tilde{\mathbf{q}}})\| \leq \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|$ entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &< - \left[\lambda_{K_v}^{\min} - \epsilon_0 + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \right] \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_v}^{\max} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \\ &\quad - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_p}^{\min} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Por lo tanto, se cumple:

$$\dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) < - \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_0}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_p}^{\min} & -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_v}^{\max} \\ -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_v}^{\max} & \left[\lambda_{K_v}^{\min} + \epsilon_0 + \frac{\epsilon_0}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

si existe algún ϵ_0 que cumpla:

$$0 < \epsilon_0 < \frac{\lambda_{K_v}^{\min} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]}{\lambda_{K_v}^{\max} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|] + \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 - \lambda_{K_p}^{\min} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2} \quad (4.22)$$

lo cual demuestra estabilidad asintótica en el punto de equilibrio $[\tilde{\mathbf{q}} \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^T = [\mathbf{0} \ \mathbf{0}]^T$

Capítulo 5

Análisis de estimadores

El problema de estimación de estados de un sistema dinámico desde las medidas de salidas y entradas, es un problema de vital importancia en la teoría de sistemas. Para sistemas lineales, han sido extensamente estudiados, y han mostrado que son extremadamente usados, especialmente para las aplicaciones de control tales como el diseño de controladores basados en observadores [44, 45].

Hoy en día, en el área de robótica ya existen manipuladores con alta precisión en la medida de las posiciones de las articulaciones. En contraste, la medida de velocidad se obtiene a través de tacómetros u otros sensores de velocidad, los cuales conllevan a una serie de desventajas tales como, la contaminación por el ruido debido a la discretización o la propia medida, por otro lado se tiene el aspecto del costo de manufactura del manipulador, por lo que en muchos casos no siempre es conveniente aumentar costos en sensores de velocidad [46–50]. De hecho en experimentos recientes han sugerido que los observadores en las leyes de control tienen un mejor desempeño [51]. A continuación, se presentará el análisis de convergencia a cero de un estimador exponencial y uno propuesto basado en una función hiperbólica.

5.1. Estimador exponencial

Una forma de estimar la derivada de una señal $u(t)$ es por medio de un estimador exponencial.

Al incluir el estimador en la dinámica del robot manipulador, la ecuación en lazo cerrado queda expresada de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \underbrace{\mathbf{q}_e}_{\tilde{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}}_e - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_e) \mathbf{q}_e] \\ \underbrace{-\lambda \mathbf{q}_e + \lambda \mathbf{q}}_{-\lambda \tilde{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Para demostrar la convergencia a cero del error de estimación, se propone la siguiente función de

Lyapunov:

$$\begin{aligned}
 V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \mathbf{q}_e) = & \underbrace{\frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_{\text{I}} + \underbrace{\left[\sqrt{\ln(\cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m} + \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m}})} \right]^T K_p \left[\sqrt{\ln(\cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m} + \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m}})} \right]}_{\text{II}} \\
 & + \underbrace{\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_{\text{III}} + \underbrace{\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^T \mathcal{I} \tilde{\mathbf{x}}}_{\text{IV}}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

En la sección 4.2.2 se demuestra estabilidad asintótica en el punto de equilibrio, es decir que considerando los elementos I, II y III se muestra que $V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \mathbf{q}_e)$ es definida positiva y su derivada $\dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \mathbf{q}_e)$ es una función definida negativa. Por lo tanto, debido a que el elemento IV se sumó a la función de Lyapunov original, es correcto hacer un análisis independiente.

Empleando la teoría de estabilidad de Lyapunov, el análisis de estabilidad para el elemento IV, es inmediato. Debido a que el elemento IV es una función cuadrática, entonces se asegura que la función de Lyapunov es definida positiva $V(\tilde{\mathbf{x}}) > 0$.

La derivada de la función de Lyapunov considerando solo el elemento IV queda expresada como:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}) &= \tilde{\mathbf{x}}^T \mathcal{I} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \\
 &= \tilde{\mathbf{x}}^T \mathcal{I} [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_e] \\
 &= \tilde{\mathbf{x}}^T \mathcal{I} [\dot{\mathbf{q}} - [-\lambda \mathbf{q}_e - \lambda \mathbf{q}]] \\
 &= \tilde{\mathbf{x}}^T \mathcal{I} [\dot{\mathbf{q}} - \lambda \tilde{\mathbf{x}}]
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Debido a que para el caso de control de posición, la velocidad articular converge a cero, entonces:

$$\begin{aligned}
 V(\tilde{\mathbf{x}}) &= \cancel{\tilde{\mathbf{x}}^T \mathcal{I} \dot{\mathbf{q}}} - \tilde{\mathbf{x}}^T \mathcal{I} \lambda \tilde{\mathbf{x}} \\
 &= -\tilde{\mathbf{x}}^T \mathcal{I} \lambda \tilde{\mathbf{x}} < 0
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Por lo tanto se demuestra la convergencia del error de estimación considerando la dinámica extendida exponencial para obtener la velocidad a partir de la posición.

La forma recursiva del estimador es la siguiente:

$$q_{e_k} = e^{-h\lambda} q_{e_{k-1}} + (1 - e^{-h\lambda}) q_{k-1} \tag{5.5}$$

Por lo tanto, la estimación de la derivada de q es representada:

$$\dot{q}_{e_k} = -\lambda q_{e_k} + \lambda q_k \tag{5.6}$$

donde $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

5.2. Estimador hiperbólico

5.2.1. Demostración de convergencia asintótica del error de estimación

5.2.1.1. Regulación

Una nueva propuesta para obtener la velocidad articular a partir de la posición es a través de un estimador hiperbólico. La ecuación en lazo cerrado queda expresado de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \tilde{\mathbf{q}}_e \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ -M(\mathbf{q})^{-1}[K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + B \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})] \\ \underbrace{-\lambda \sinh(-\lambda \mathbf{q}_e + \lambda \mathbf{q})}_{-\lambda \sinh(\lambda \tilde{\mathbf{x}})} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Para demostrar la convergencia a cero del error de estimación, se hace un análisis similar al estimador anterior, entonces se propone la siguiente función de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \mathbf{q}_e) = & \underbrace{\frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_{\text{I}} + \underbrace{\left[\sqrt{\ln(\cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m} + \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m}})} \right]^T K_p \left[\sqrt{\ln(\cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m} + \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m}})} \right]}_{\text{II}} \\ & + \underbrace{\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_{\text{III}} + \underbrace{\cosh(-\lambda \mathbf{q}_e + \lambda \mathbf{q}) - 1}_{\text{IV}} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Se asume que la estabilidad asintótica considerando los tres primeros elementos de la función de Lyapunov está asegurada, el cual se hizo en la sección 4.2.2, entonces tomando en cuenta solo el elemento IV, se dice que la función de Lyapunov es definida positiva $V(\tilde{\mathbf{x}}) = \cosh(\lambda \tilde{\mathbf{x}}) - 1 > 0$ y su derivada queda expresada como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}) &= \sinh^T(\tilde{\mathbf{x}}) \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \\ &= \sinh^T(\tilde{\mathbf{x}}) \mathcal{I}[\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_e] \\ &= \sinh^T(\tilde{\mathbf{x}}) \mathcal{I}[\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \lambda \sinh(\tilde{\mathbf{x}})] \\ &= \cancel{\sinh^T(\tilde{\mathbf{x}}) \mathcal{I} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}} - \sinh^T(\tilde{\mathbf{x}}) \mathcal{I} \lambda \sinh(\tilde{\mathbf{x}}) \\ &= -\sinh^T(\tilde{\mathbf{x}}) \mathcal{I} \lambda \sinh(\tilde{\mathbf{x}}) < 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Por lo tanto se demuestra la convergencia del error de estimación considerando la dinámica extendida hiperbólica para obtener la velocidad articular a partir de la posición.

La forma recursiva del estimador está expresada como:

$$F_{q_{e_k}} = F_{q_{e_{k-1}}} + h \sinh(-\lambda F_{q_{e_{k-1}}} + \lambda q_{k-1}) \quad (5.10)$$

Por lo tanto, la estimación de la derivada de q es representada por q_{e_k} , y se encuentra dada por:

$$\dot{q}_{e_k} = \lambda \sinh(-\lambda F_{q_{e_k}} + \lambda q_k) \quad (5.11)$$

donde $k = 1, 2, 3, \dots, n$

5.2.1.2. Trayectoria

$$\dot{\tilde{q}}_e = -\lambda \sinh(-\lambda \tilde{q}_e + \lambda \tilde{q}) \quad (5.12)$$

Se propone la siguiente función de Lyapunov

$$V(\tilde{q}_e, \tilde{q}) = \cosh(-\lambda \tilde{q}_e + \lambda) - 1 \quad (5.13)$$

Al derivar la función de Lyapunov se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}_e, \tilde{q}) &= \sinh(-\lambda \tilde{q}_e + \lambda \tilde{q})(-\lambda \dot{\tilde{q}}_e + \lambda \dot{\tilde{q}}) \\ &= -\sinh^2(-\lambda \tilde{q}_e + \lambda \tilde{q}) + \lambda \dot{\tilde{q}} \sinh(-\lambda \tilde{q}_e + \lambda \tilde{q}) \\ \dot{V}(\tilde{q}_e, \tilde{q}) &< -\sinh^2(-\lambda \tilde{q}_e + \lambda \tilde{q}) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Se demuestra la convergencia a cero del error de estimación

Capítulo 6

Plataforma experimental

En este capítulo se describe la plataforma experimental (Robot manipulador de 3 gdl) y los complementos necesarios para llevar a cabo los experimentos de control de posición y trayectoria.

6.1. Robot manipulador

Actualmente se cuenta con varias definiciones de robots manipuladores industriales, que a decir verdad, han causado cierta polémica [19]. De acuerdo con la definición adoptada por la Federación Internacional de Robótica bajo la norma ISO/TR 8373, un robot manipulador se define de la siguiente manera: Un robot manipulador industrial es una maquina manipuladora con varios grados de libertad controlada automáticamente, representable y de múltiples usos, pudiendo estar en un lugar fijo o móvil para su empleo en aplicaciones industriales.

Dichas aplicaciones encuentran en fundidoras, fabricas ensambladoras automotrices, empresas textiles, procesos de soldadura de arco y de punto, corte de materiales por laser, traslado y pintado de objetos, estibado de cajas, ensamble de productos electrónicos y mecánico, inspección y prueba de calidad del producto, mantenimiento y reparación de camiones de carga pulido y esmerilado, entre otras [30].

En la figura 6.1 se muestra el una representación en 3d del robot manipulador donde se llevan a cabo los experimentos de la presente tesis. Este cuenta con movimiento tridimensional, cuyo espacio de trabajo es de 1 metro. Dicho manipulador se encuentra en el laboratorio de Robótica de la Facultad de Ciencias de la Electrónica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Una de las ventajas de usarlo como plataforma experimental es que cuenta con servomotores de transmisión directa, es decir que son de arquitectura abierta, esto facilita la evaluación de distintos algoritmos y filosofías de control. En la tabla 6.1 se muestran las características técnicas de los tres servomotores que forman parte del manipulador rotradi.

6.1.1. Servomotores de transmisión directa

Un servomotor de transmisión directa es una fuente de par, es decir, el par que proporciona como salida se mantiene en magnitud y signo independientemente de la carga que desplace. Los actuado-

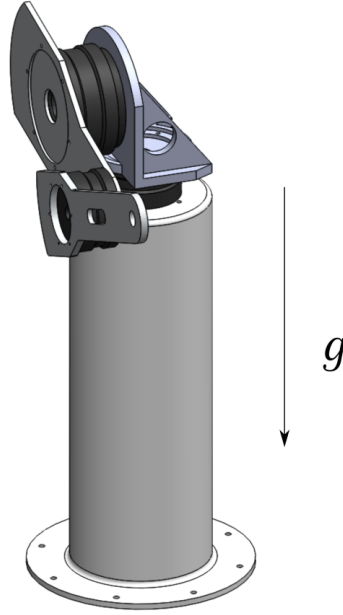


Figura 6.1: Robot manipulador de 3 gdl.

Articulación	Modelo	Torque máximo [Nm]	Encoder [p/rev]	Velocidad
Base	DM-1015	15	655360	2 rps
Hombro	DM-1050	50	1024000	1 rps
Codo	DM-1004	4	655360	2.5 rps

Tabla 6.1: Características de servomotores de robot experimental.

res que conforman el manipulador Rotradi son de la marca Yokogawa. Cuando un servomotor se le acondiciona mecánicamente una barra metálica para formar un manipulador de n grados de libertad, al sistema resultante se le denomina servomecanismo. Un servomotor esta compuesto por un motor eléctrico de corriente directa, un sensor de posición articular o lineal, el cual se encuentra por lo general al interior del servomotor, y un servoamplificador electrónico como se observa en la figura 6.2 .

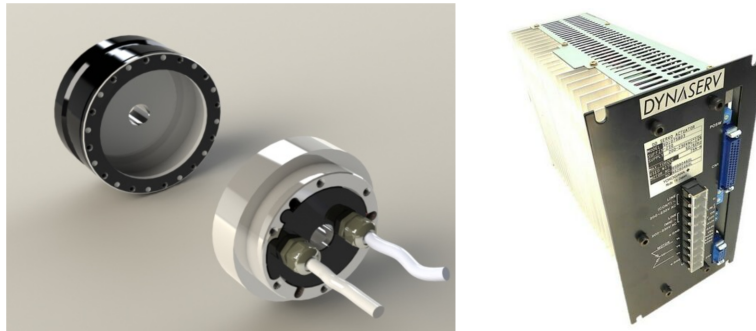


Figura 6.2: Servomotor y servoamplificador.

Las ecuaciones de Maxwell permiten deducir una ley fundamental para servomotores que determina la relación entre el campo electromagnético y el par (torque) aplicado. En general la generación de movimiento rotacional con respecto a su eje de giro es producido por el par aplicado, esta simple ley es la base del desarrollo de la robótica y esta planteada en la siguiente ecuación:

$$\tau = kv \quad (6.1)$$

donde τ representa el par aplicado al servomotor y sus unidades de medición son Nm (Newton-metro), k es una constante que representa la ganancia del amplificador electrónico y tiene unidades de $\frac{\text{Nm}}{\text{V}}$ (Newton-metro/volt) y la variable v es el voltaje que proviene del controlador que el usuario programa para que el robot lleve a cabo una tarea en específico. Es importante mencionar que no todos los motores eléctricos cumplen con la ecuación 6.1, como por ejemplo los motores de corriente alterna y los motores de pasos, por esta razón no forman parte de la estructura del sistema mecánico del robot, pueden ser empleados en la construcción de garras mecánicas o de herramientas específicas que se colocan en el robot para diversas aplicaciones.

El servoamplificador es un sofisticado sistema electrónico cuya función es controlar los campos electromagnéticos y procesar comandos secuenciales para la etapa de potencia, la cual se encarga de proporcionar la señal trifásica de alimentación directamente de la fuente de alimentación de corriente directa, con el suministro correspondiente requerido por el motor. El servoamplificador es el encargado de llevar a cabo la ecuación 6.1.

6.1.2. Encoders

En robótica los sensores de posición mas utilizados son los potenciómetros, tacómetros, resolvers y encoders. Como se menciona anteriormente, el manipulador rotradi esta compuesto por un sensor de

posición de tipo encoder. Estos están contruidos con tecnología optoelectrónica y se les denomina encoders ópticos, los cuales a su vez se clasifican en incrementales y absolutos. Un encoder óptico básicamente consta de una fuente de luz conformada por un arreglo de diodos LEDs que se encuentran enfrente de un disco giratorio con ranuras como se observa en la figura 6.3. En la parte posterior de este disco se coloca una tarjeta con rendijas que hacen la función de guía de luz. La posición de las rendijas sirve como código de la luz para ser detectada por elementos fotosensibles. El disco giratorio esta acoplado en el rotor del servomotor para que gire de la misma forma y por lo tanto el encoder óptico produce como señal de salida un tren de pulsos proporcional al ángulo de giro del rotor.

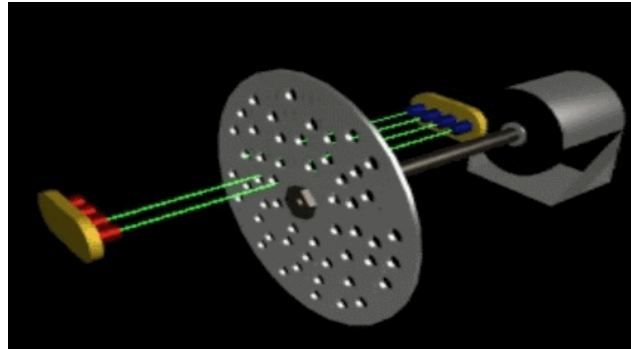


Figura 6.3: Encoder.

La resolución del encoder esta determinada en función de los ciclos por revolución (CPR). Entre mas alta sea la resolución mucho mejor será la calidad del encoder. La alta resolución mejora la exactitud del encoder, lo que significa que el encoder puede ser muestreado a mayor frecuencia, y el sistema de control es capaz de responder mas rápido y con mayor exactitud. A continuación se enlistan algunas de las ventajas que representa usar encoders ópticos:

- Alta resistencia a las condiciones ambientales tales como humedad, vibraciones e impactos.
- Se puede usar en un rango amplio de temperaturas.
- Capacidad de transmitir señales a grandes distancias.
- Miniaturizable o tamaño apropiado para las características del servomotor.
- Alta resolución en la lectura de la posición a medir.

El robot Rotradi cuenta con encoders ópticos incrementales para cada articulación. Enfrente del disco giratorio se encuentra el arreglo de diodos LED cuya luz emitida pasa a través de las ranuras del disco rotatorio; los rayos resultantes pasan por las rendijas A, B y Z para ser detectados por los elementos fotosensibles. La luz que pasa por las rendijas A y B tiene una diferencia de fase de 90 grados. La salida es una onda rectangular con la misma diferencia de fase de 90 grados como se muestra en la figura 6.4.

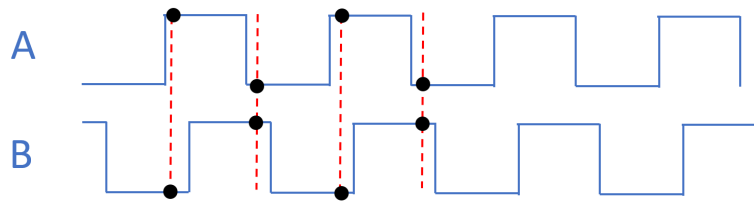


Figura 6.4: Señales A y B de encoder.

6.2. Plataforma de control

La plataforma encargada de llevar a cabo las tareas del robot manipulador por ejemplo, el control de posición de trayectoria, identificación paramétrica o lectora de encoders fue desarrollada en el laboratorio de robótica como parte de una investigación para actualizar el hardware con el que el robot manipulador funciona. Dicha plataforma esta compuesta por una placa de desarrollo llamada MKR vidor 4000 y toda su etapa de acondicionamiento de señales de entrada y salida, las cuales son implementadas en una tarjeta electrónica.

6.2.1. Arduino MKR vidor 4000

Las características de la placa Arduino MKR vidor 4000, se encuentran disponibles en la página principal; sin embargo las mas importantes se muestran en la figura 6.5. Estas son:

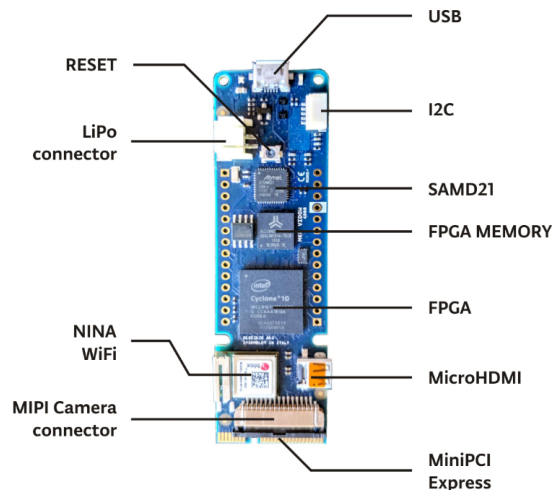


Figura 6.5: Placa MKR vidor 4000 [52].

- 5V (USB/VIN).
- Voltaje de operación en los pines: 3.3V.
- 22 pines compartidos (SAMD21 y Cyclone FPGA).
- Puerto USB B micro.

- conector micro HDMI.
- conector de cámara MIPI.
- Miniconector PCI Express con hasta 25 pines programables por el usuario.
- conector para baterías LiPo de 3.7 V.
- Módulo Wi-Fi.
- BLE (Bluetooth Low Energy).

6.2.1.1. Especificaciones técnicas

Una de las ventajas mas importantes es el hecho de poder controlar el manipulador en tiempo real, para ello es necesario contar con una herramienta adecuada para sensar la posición articular de cada uno de los servomotores y en un tiempo menor al de muestreo se pueda enviar acciones de control a los servoamplificadores, justamente el FPGA implementada en el Arduino MKR vidor 4000 soluciona esta problemática. Por otro lado se tiene un microcontrolador el cual puede ser programado con el entorno ampliamente conocido de arduino, esto facilita la tarea de modificar los algoritmos de control. En la tabla 6.2 se muestran algunas especificaciones adicionales del microcontrolador ARM y el FPGA.

SAMD21	FPGA
- SAM21 Cortex-M0 + MCU ARM - u-blox NINA-W102 - 8 pines digitales - 1 DAC de 10 bits - 7 ADC 8/10/12 bits - 10 interrupciones - 1 UART/1SPI/1 I2C - 32,768 kHz (RTC), 48 MHz	- Intel Cyclone 10CL16 - 16K E/L - 504Kbit de RAM - 56 multiplicadores - Puerto Mini PCI Express - Conector de cámara: MIPI - 48 MHz - hasta 200 MHz

Tabla 6.2: Características técnicas de Arduino MKR vidor 4000.

6.2.1.2. Programación en placa Arduino MKR vidor 4000

La programación de la FPGA se realiza en Quartus, mediante lenguaje AHDL, VHDL, Verilog u otros. Luego se compila el diseño y se convierte el bistream generado .tbf a un archivo .h, finalmente en el IDE de arduino se carga a la tarjeta el diseño en FPGA junto con el sketch como se observa en el diagrama de flujo de la figura 6.6. El sketch contiene el algoritmo de control, el cual es implementado mediante líneas de código, luego es cargado a la placa mediante el puerto serial.

6.2.2. Servoamplificador - Tarjeta

Una forma de visualizar la implementación de la plataforma es a través de la figura 6.7. En esta se muestra como el servomotor (motor eléctrico y servo amplificador), la placa Arduino MKR Vidor

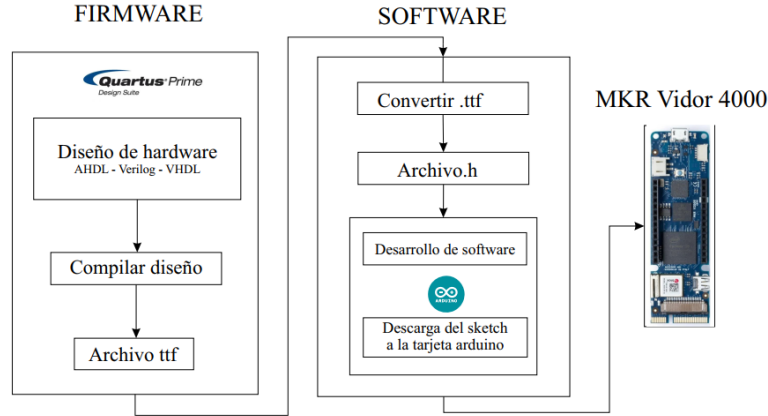


Figura 6.6: Flujo de programación para Arduino MKR vidor 4000 [52].

4000(FPGA y ARM) y la etapa de acondicionamiento de señales. La posición es obtenida por un decodificador y la velocidad se estimada dentro de la FPGA. Los distintos algoritmos de control son implementados en el ARM(microcontrolador).

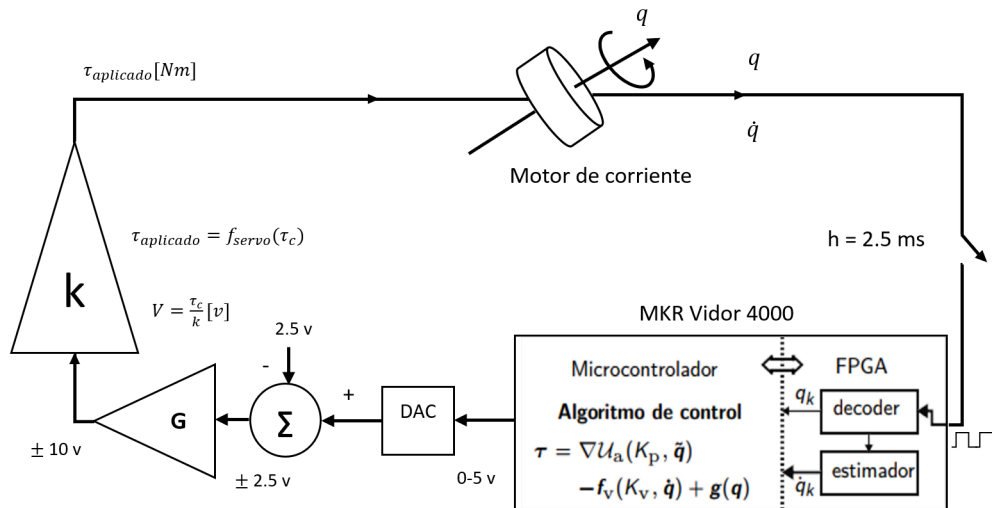


Figura 6.7: Diagrama de bloques de la plataforma experimental.

6.2.3. Etapa de acondicionamiento de señales

Una etapa importante es el acondicionamiento de señales para la salida hacia los servoamplificadores. Dicha etapa consiste en un arreglo de condensadores y resistencias de tal forma que el voltaje que entregan los tres módulos DAC MCP4725 de 0-5v sea transformado a un voltaje de $\pm 2.5v$. Esto se logra al diseñar un sumador-amplificador como el que se muestra en la figura 6.8. Con un seguidor de voltaje y un circuito divisor de voltaje se obtiene la salida descrita en la ecuación 6.2.

$$V_{offset} = V_{12} - \left(\frac{R_{20} + R_{16pot}}{R_{20} + R_{16} + R_{14}} \right) \quad (6.2)$$

donde $V_{offset} = -2.5v$, $V_{12} = -12v$, $R_{14} = 10K\Omega$, $R_{16pot} = 100\Omega$ y $R_{20} = 2.6K\Omega$.

El circuito sumador-amplificador se encarga de llevar la señal desplazada hasta un nivel de voltaje de ± 10 , de acuerdo con la ecuación (4.2):

$$V_{in} = -(R_6 + R_{7pot}) \left(\frac{V_{DAC}}{R_8} + \frac{V_{offset}}{R_9} \right) \quad (6.3)$$

donde $R_6 = R_8 = R_9 = 1K\Omega$ y R_{7pot} es un potenciómetro de $10K\Omega$ el cual es usado para modificar la ganancia del circuito amplificador. Esta ultima parte del circuito se realiza ya que la entrada de los servoamplificadores es de $\pm 10v$.

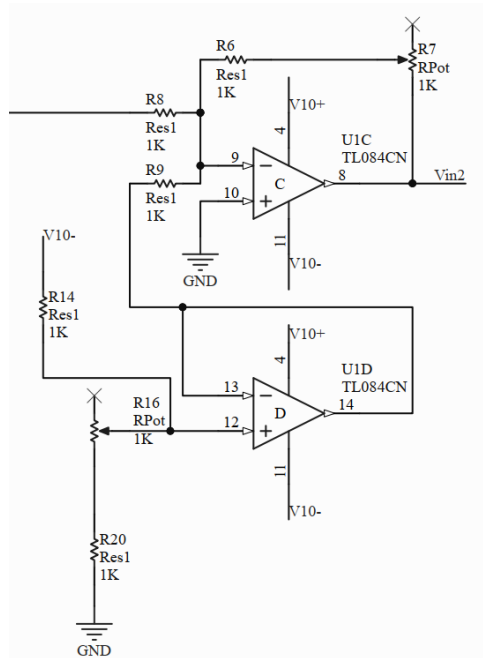


Figura 6.8: Circuito de acondicionamiento de señal.

6.3. Interfaz gráfica

La interfaz gráfica esta desarrollada en Python. Desde esta se pueden modificar distintos parámetros como: la ganancias derivativas, proporcionales, ingresar factores para controladores, leer los encoders de cada servomotor, obtener las gráficas de posición velocidad o par aplicado, almacena datos entre otras. En la figura 6.9 se presenta la ventana principal, la cual contiene un menú y opciones que pueden ser desplegadas tales como “Control” y “Encoder”.



Figura 6.9: Ventana principal de interfaz gráfica.

Al seleccionar “Encoder” se abre la ventana como se muestra en la figura 6.10. Este paso es de vital importancia ya que en un desafortunado escenario donde el manipulador no este funcionando adecuadamente, permita descartar algún problema de lectura de la posición de los servomotores. Para obtener la lectura de los tres sensores primero se selecciona el puerto y luego se pulsa el botón “Conectar”.

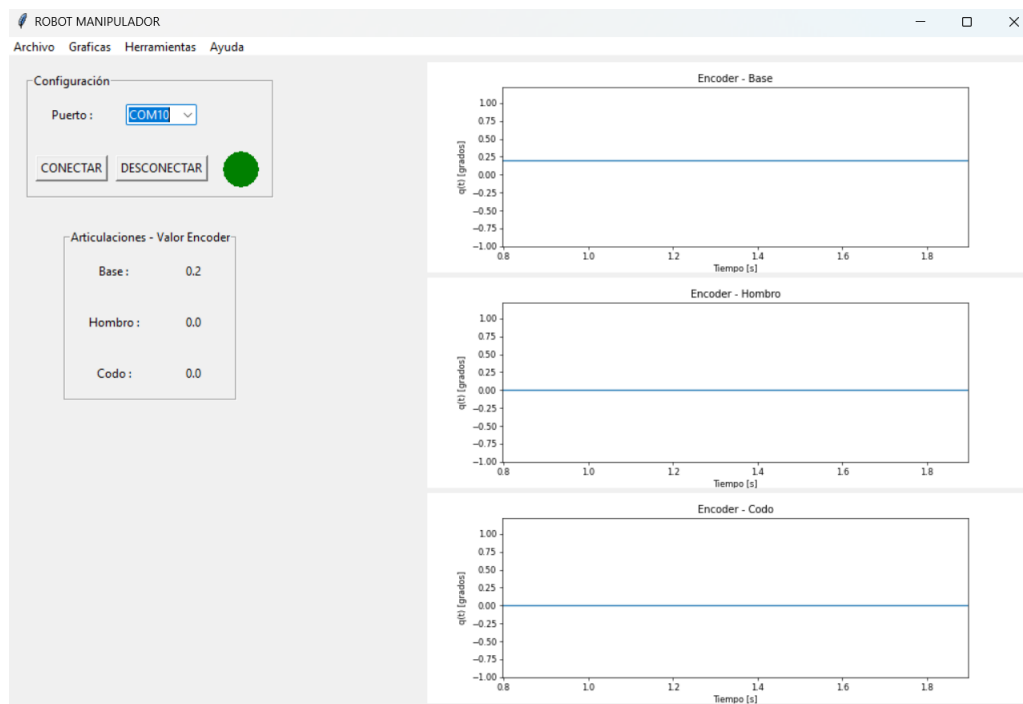


Figura 6.10: Ventana de interfaz gráfica “Encoder”.

Nuevamente partiendo desde la ventana principal, ahora se pulsa “Control” y se abre la ventana como se observa en la figura 6.11. Nuevamente los dos primeros pasos son seleccionar el puerto y luego se

pulsa el botón “*Conectar*”. Después, de acuerdo a lo requerido por el usuario, se pueden dar diversas configuraciones, estas son: la selección de cada una de las posiciones deseadas, las tres ganancias proporcionales, las tres ganancias derivativas, también se tiene la opción de guardar los datos y ingresar el nombre del archivo. Una vez que se ingresaron los datos, se pulsa el botón “*ENVIAR*” y luego “*Control On*”.

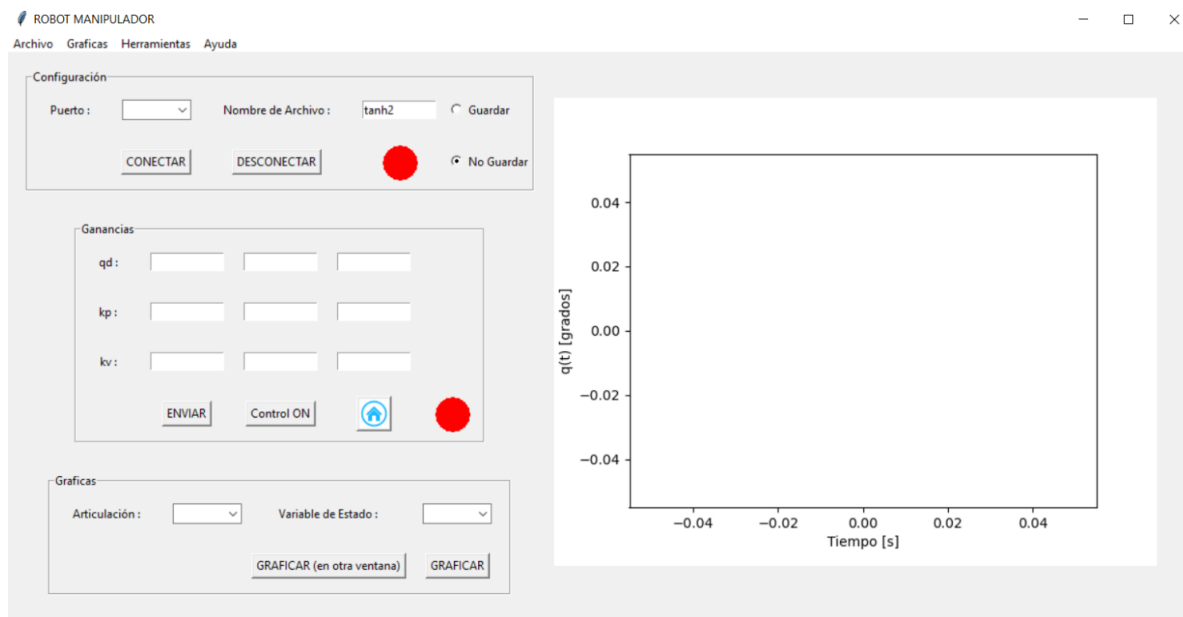


Figura 6.11: Ventana para control de posición.

Capítulo 7

Resultados

7.1. Control de posición

El experimento consiste en mover cada una de las articulaciones a una posición articular deseada. Se presentan los resultados correspondientes para las posiciones deseadas: $[q_{d1}, q_{d2}, q_{d3}]^T = [45, 45, 90]^T$ grados, os cuales representan a la base, hombro y codo respectivamente. Las posiciones y velocidades fueron establecidas en cero, por ejemplo, en la posición de casa: $[q_{d1}(0), q_{d2}(0), q_{d3}(0)]^T = [0, 0, 0]^T$ grados y $[\dot{q}_{d1}(0), \dot{q}_{d2}(0), \dot{q}_{d3}(0)]^T = [0, 0, 0]^T$ grados/seg.

El esquema de control PD+ es el algoritmo mas general de control de movimiento. Obsérvese que cuando la posición deseada $\mathbf{q}_d$ es una constante, entonces la velocidad deseada $\dot{\mathbf{q}}_d$ y la aceleración deseada $\ddot{\mathbf{q}}_d$ son vectores cero. Es decir, el error de velocidad cumple: $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = -\dot{\mathbf{q}}$. En este caso el regulador simple PD (proporcional derivativo) con compensación de gravedad se obtiene como caso particular a partir del esquema de control PD+ para trayectoria:

Primero se obtienen los resultados experimentales cuando la posición deseada es constante, es decir empleando la versión en regulación PD del algoritmo de control hiperbólico. Así mismo, dichos experimentos de regulación serán empleados para validar el diseño de una extensión dinámica para obtener la velocidad a partir de la posición.

7.1.1. Regulación con PD

1. La ley de control PD para regulación, se encuentra descrita por:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (7.1)$$

donde, $\tilde{\mathbf{q}}$, $\dot{\mathbf{q}}$ son el error de posición y velocidad articular respectivamente. Por otro lado K_p y $K_v \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ son matrices diagonales definidas positivas de las ganancias proporcional y derivativa respectivamente, y $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es el vector de par gravitacional.

Debido a la naturaleza del controlador PD, la regla de sintonía para las ganancias se establece como: $k_i < \frac{\tau_i^{\max}}{\dot{q}_i(0)}$, es decir que las ganancias proporcionales están en función de el par máximo y

la posición articular deseada. Esto con el objetivo de que los servomotores no se saturen. En la tabla 7.1 se encuentran descritas las ganancias que se tomaron en cuenta para el experimento de regulación para cada articulación.

Controlador	Base	Hombro	Codo
Control PD	$k_{p_1} = 18 \left[\frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \right]$	$k_{p_2} = 48 \left[\frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \right]$	$k_{p_3} = 2 \left[\frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \right]$
	$k_{v_1} = 3.6 \left[\frac{\text{Nm-sec}}{\text{rad}} \right]$	$k_{v_2} = 4.176 \left[\frac{\text{Nm-sec}}{\text{rad}} \right]$	$k_{v_3} = 1.3 \left[\frac{\text{Nm-sec}}{\text{rad}} \right]$
	$\tau_1^{\max} = 15 \text{ [Nm]}$	$\tau_2^{\max} = 50 \text{ [Nm]}$	$\tau_3^{\max} = 4 \text{ [Nm]}$

Tabla 7.1: Ganancias de controlador PD

2. Características de respuesta

En la figura 7.1 se muestran los resultados experimentales de la posición articular de cada una de las articulaciones empleando un controlador PD. Se observa que cada articulación llega a la posición deseada sin sobreimpulsos ni oscilaciones. El estado estacionario de la respuesta mas lenta es alcanzado en 0.51 segundos. Las posiciones de cada articulación en estado estacionario son $[q_1(t), q_2(t), q_3(t)]^T = [44.96^\circ, 45.35^\circ, 89.85^\circ]^T$. Los errores de posición se deben a la fricción estática de cada servomotor, sin embargo estos son aceptables.

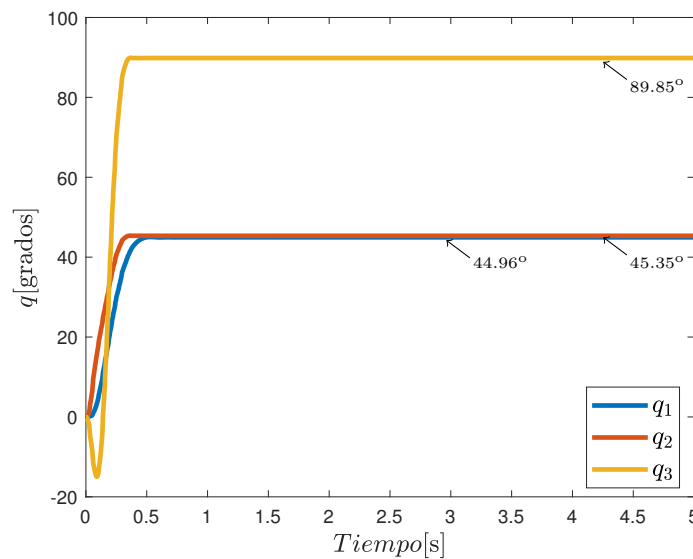


Figura 7.1: Posiciones articulares del control PD.

En la figura 7.2 se muestra la velocidad de cada articulación. En el estado transitorio se observan picos los cuales corresponden al freno mecánico aplicado para alcanzar las posiciones deseadas.

Conforme transcurre el tiempo del experimento dichas velocidades convergen asintóticamente a cero.

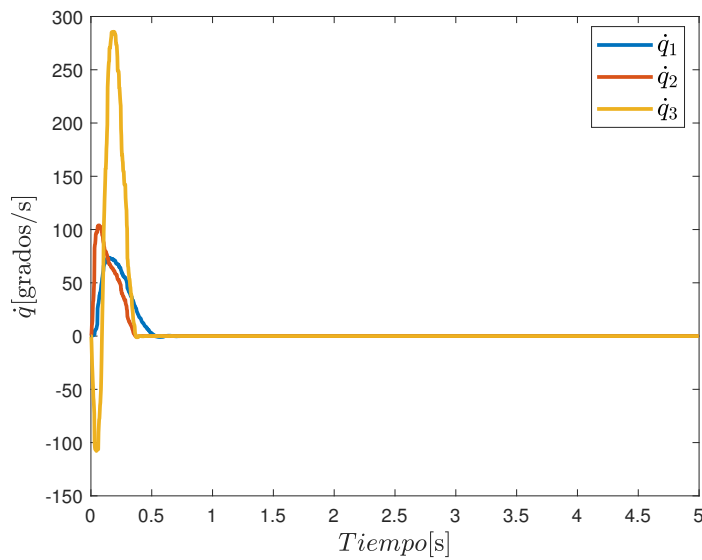


Figura 7.2: Velocidades articulares del control PD.

Se observa en la figura 7.3 se muestra el par requerido para cada una de las articulaciones alcance la posición deseada. Dichos valores son $[\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T = [14.27, 37.70, 3.89]^T$ Nm. Entonces se dice que con el controlador PD, ningún servomotor se satura.

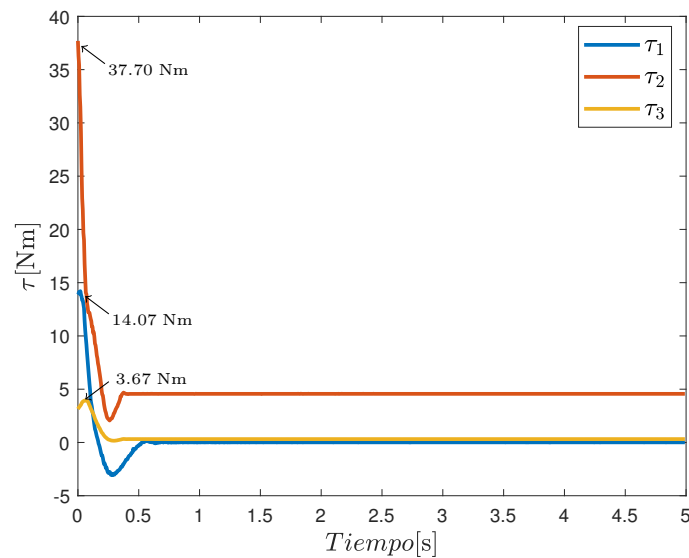


Figura 7.3: Par aplicado de control PD.

7.1.2. Regulación con controlador hiperbólico

1. La ley de control hiperbólico para regulación, se encuentra descrita por:

$$\tau = K_p \mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}}) - K_v \mathbf{f}_v(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (7.2)$$

Por cuestiones de simplicidad de términos las funciones vectoriales del controlador serán consideradas como:

$$\mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \frac{\sinh(\eta_1 \tilde{q}_1) \cosh(\eta_1 \tilde{q}_1)^{2m-1} [1 - \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{q}_1)^{2m}}]}{\cosh(\eta_1 \tilde{q}_1)^{2m} + \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{q}_1)^{2m}}} \\ \frac{\sinh(\eta_1 \tilde{q}_2) \cosh(\eta_1 \tilde{q}_2)^{2m-1} [1 - \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{q}_2)^{2m}}]}{\cosh(\eta_1 \tilde{q}_2)^{2m} + \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{q}_2)^{2m}}} \\ \frac{\sinh(\eta_1 \tilde{q}_3) \cosh(\eta_1 \tilde{q}_3)^{2m-1} [1 - \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{q}_3)^{2m}}]}{\cosh(\eta_1 \tilde{q}_3)^{2m} + \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{q}_3)^{2m}}} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

$$\mathbf{f}_v(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \frac{\sinh(\eta_2 \dot{q}_1) \cosh(\eta_2 \dot{q}_1)^{2m-1} [1 - \beta e^{-\beta \cosh(\eta_2 \dot{q}_1)^{2m}}]}{\cosh(\eta_2 \dot{q}_1)^{2m} + \beta e^{-\beta \cosh(\eta_2 \dot{q}_1)^{2m}}} \\ \frac{\sinh(\eta_2 \dot{q}_2) \cosh(\eta_2 \dot{q}_2)^{2m-1} [1 - \beta e^{-\beta \cosh(\eta_2 \dot{q}_2)^{2m}}]}{\cosh(\eta_2 \dot{q}_2)^{2m} + \beta e^{-\beta \cosh(\eta_2 \dot{q}_2)^{2m}}} \\ \frac{\sinh(\eta_2 \dot{q}_3) \cosh(\eta_2 \dot{q}_3)^{2m-1} [1 - \beta e^{-\beta \cosh(\eta_2 \dot{q}_3)^{2m}}]}{\cosh(\eta_2 \dot{q}_3)^{2m} + \beta e^{-\beta \cosh(\eta_2 \dot{q}_3)^{2m}}} \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

donde $m, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{N}_+$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Los valores de $\alpha, \beta < 1$.

A continuación se muestran en la tabla 7.2 las ganancias empleadas en las distintas versiones del algoritmo de control hiperbólico.

2. Características de respuesta

En la figura 7.4 se muestran los resultados experimentales de la posición articular de cada una de las articulaciones empleando el controlador propuesto con $m = 1$. Se observa que cada articulación llega a la posición deseada con un mínimo sobreimpulso. El estado estacionario de la respuesta mas lenta, es decir la articulación del hombro, es alcanzado en 0.71 segundos. Las posiciones de cada articulación en estado estacionario son $[q_1(t), q_2(t), q_3(t)]^T = [44.85^\circ, 44.25^\circ, 89.01^\circ]^T$.

En la figura 7.5 se muestra la velocidad de cada articulación. Conforme transcurre el tiempo del experimento dichas velocidades convergen asintóticamente a cero.

Controlador	Base	Hombro	Codo
Control Hiperbólico para $m = 1$	$k_{p1} = 7.62$ [Nm] $k_{v1} = 4.9$ [Nm] $\tau_1^{\max} = 15$ [Nm] $\eta_p = 2$ $\eta_v = 1$ $\alpha = 0.5$	$k_{p2} = 29.3$ [Nm] $k_{v2} = 10.6$ [Nm] $\tau_2^{\max} = 50$ [Nm] $\eta_p = 2$ $\eta_v = 1$ $\alpha = 0.75$	$k_{p3} = 1.28$ [Nm] $k_{v3} = 0.49$ [Nm] $\tau_3^{\max} = 4$ [Nm] $\eta_p = 2$ $\eta_v = 1$ $\alpha = 0.75$
Control Hiperbólico para $m = 2$	$k_{p1} = 7.51$ [Nm] $k_{v1} = 5.03$ [Nm] $\tau_1^{\max} = 15$ [Nm] $\eta_p = 2$ $\eta_v = 1$ $\alpha = 0.75$	$k_{p2} = 29.0$ [Nm] $k_{v2} = 10.44$ [Nm] $\tau_2^{\max} = 50$ [Nm] $\eta_p = 2$ $\eta_v = 1$ $\alpha = 0.75$	$k_{p3} = 1.26$ [Nm] $k_{v3} = 0.497$ [Nm] $\tau_3^{\max} = 4$ [Nm] $\eta_p = 2$ $\eta_v = 1$ $\alpha = 0.75$
Control Hiperbólico para $m = 3$	$k_{p1} = 7.4$ [Nm] $k_{v1} = 4.92$ [Nm] $\tau_1^{\max} = 15$ [Nm] $\eta_p = 2$ $\eta_v = 1$ $\alpha = 0.75$	$k_{p2} = 28.5$ [Nm] $k_{v2} = 9.69$ [Nm] $\tau_2^{\max} = 50$ [Nm] $\eta_p = 2$ $\eta_v = 1$ $\alpha = 0.75$	$k_{p3} = 1.24$ [Nm] $k_{v3} = 0.49$ [Nm] $\tau_3^{\max} = 4$ [Nm] $\eta_p = 2$ $\eta_v = 1$ $\alpha = 0.75$

Tabla 7.2: Ganancias de controlador hiperbólico.

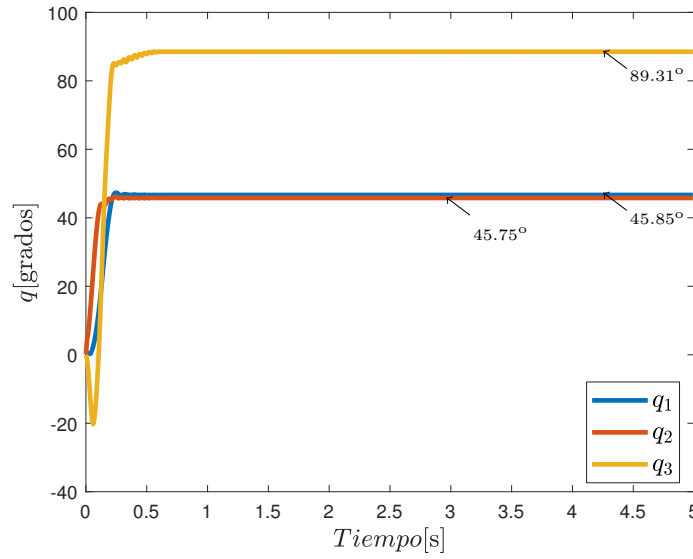


Figura 7.4: Posición articular de control hiperbólico con $m = 1$.

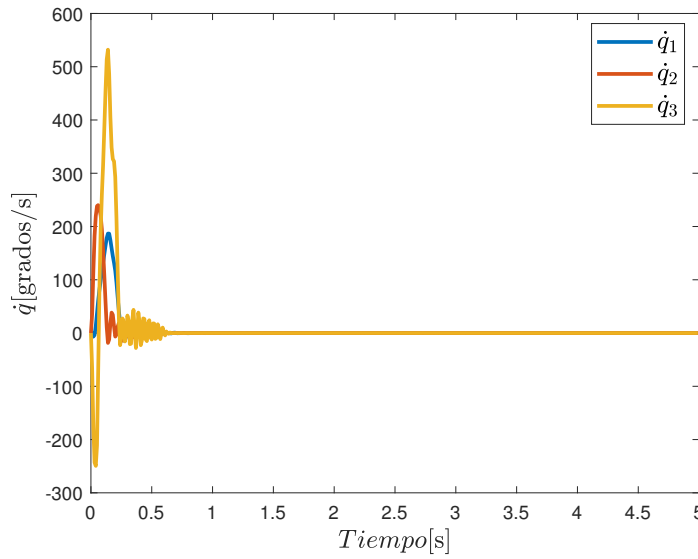


Figura 7.5: Velocidad articular de algoritmo hiperbólico con $m = 1$.

Se observa en la figura 7.6 se muestra el par requerido para cada una de las articulaciones alcance la posición deseada. Dichos valores son $[\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T = [8.27, 26.4, 2.83]^T$ Nm.

En la figura 7.7 y 7.10 se muestran los resultados experimentales de la posición articular para los casos cuando $m = 2$ y $m = 3$, respectivamente. Para el caso del algoritmo de control cuando $m = 2$, la respuesta de la articulación 1 alcanza el estado estacionario en 0.39 segundos, para la articulación 2 en 0.31 segundos, y para la articulación 3 en 0.41 segundos. Las posiciones de

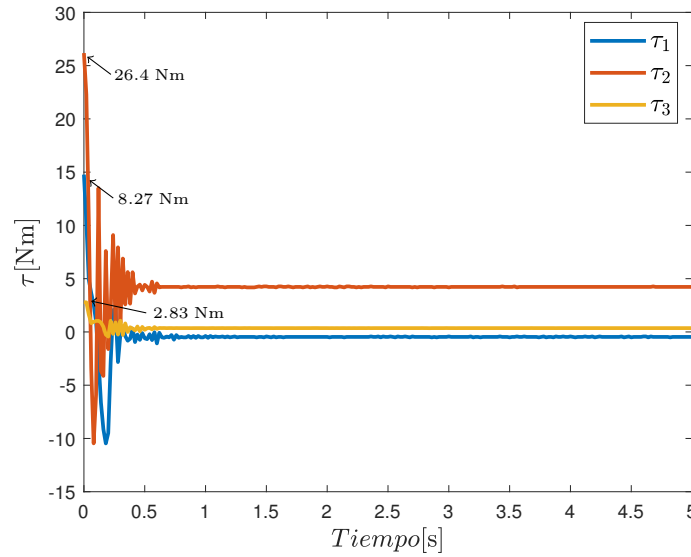


Figura 7.6: Par aplicado de control hiperbólico con $m = 1$.

cada articulación en estado estacionario son $[q_1(t), q_2(t), q_3(t)]^T = [45.11^\circ, 45.35^\circ, 89.84^\circ]^T$. De igual forma, para el caso cuando $m = 3$ en el algoritmo de control hiperbólico, la articulación 1 alcanza su estado estacionario en 0.34 segundos, la articulación 2 en 0.35 segundos y la 3 en 0.37 segundos. Las posiciones alcanzadas son $[q_1(t), q_2(t), q_3(t)]^T = [44.98^\circ, 45.15^\circ, 89.85^\circ]^T$. En las figuras 7.8 y 7.11 se presenta la velocidad articular alcanzada por cada articulación, para los casos $m = 2$ y $m = 3$. En ambos casos dicha velocidad converge a cero conforme transcurre el tiempo del experimento. Finalmente en las figuras 7.6 y 7.9 se presentan los pares aplicados para ambas versiones del algoritmo de control hiperbólico ($m = 2$ y $m = 3$). Ninguno de los servomotores de cada articulación en ambos casos se saturan.

En la figura 7.8 se muestra la velocidad de cada articulación. En el estado transitorio se observan picos los cuales corresponden al freno mecánico aplicado para alcanzar las posiciones deseadas. Conforme transcurre el tiempo del experimento dichas velocidades convergen asintóticamente a cero.

7.1.3. Índice de desempeño

Para llevar a cabo un correcto análisis cuantitativo de los distintos algoritmos de control, el índice de desempeño es medido para estado transitorio y estado estacionario, es decir que el tiempo de experimentación T variará para cada algoritmo de control.

1. Índice de desempeño - Estado transitorio

En la sección previa se presentaron los tiempos para alcanzar el estado estacionario para cada versión de controlador. Se elige el tiempo de la respuesta de la articulación mas lenta para

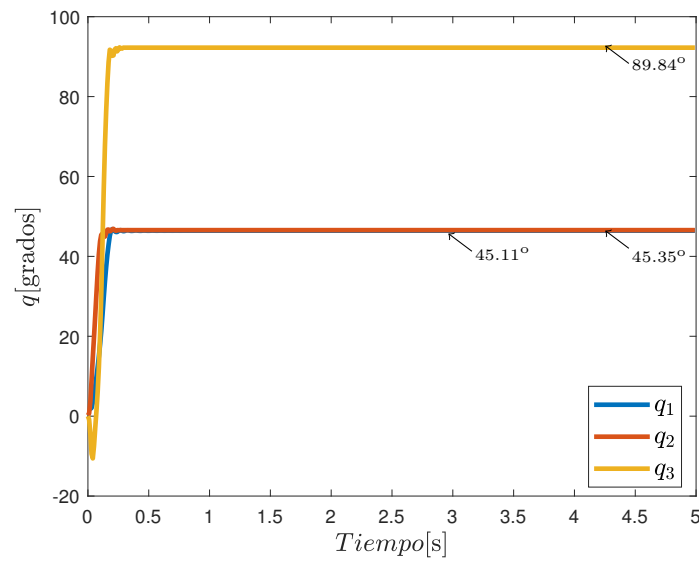


Figura 7.7: Posición articular de control hiperbólico con $m = 2$.

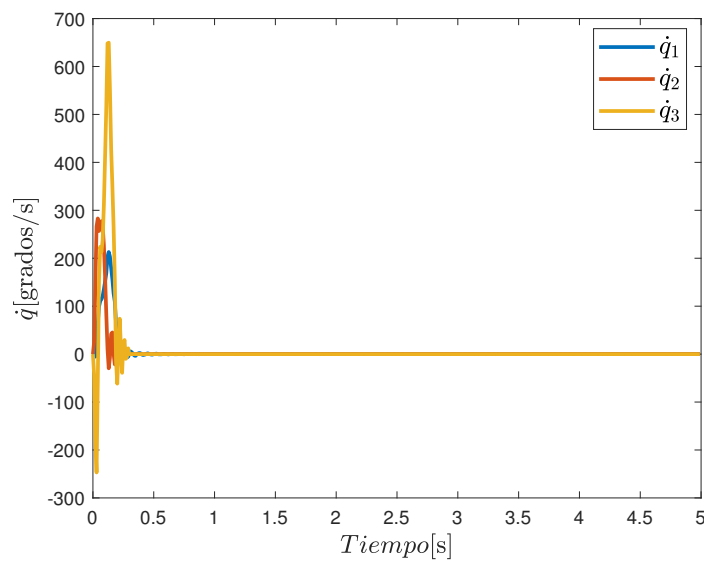


Figura 7.8: Velocidad articular de algoritmo hiperbólico con $m = 2$.

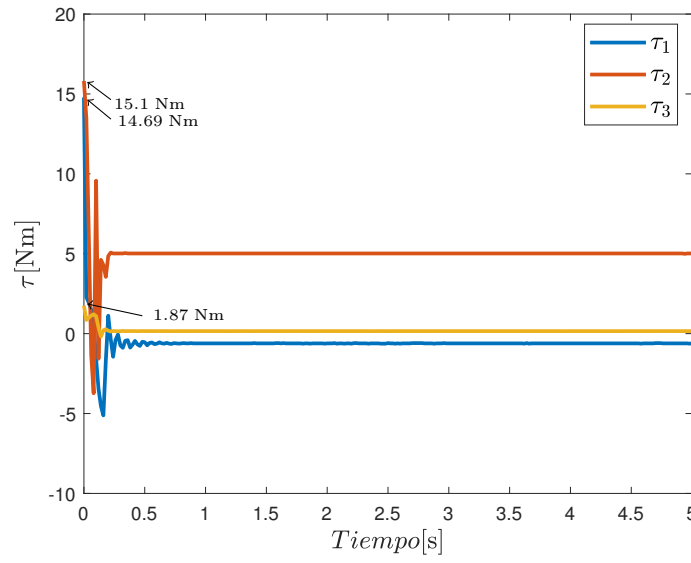


Figura 7.9: Par aplicado de control hiperbólico con $m = 2$.

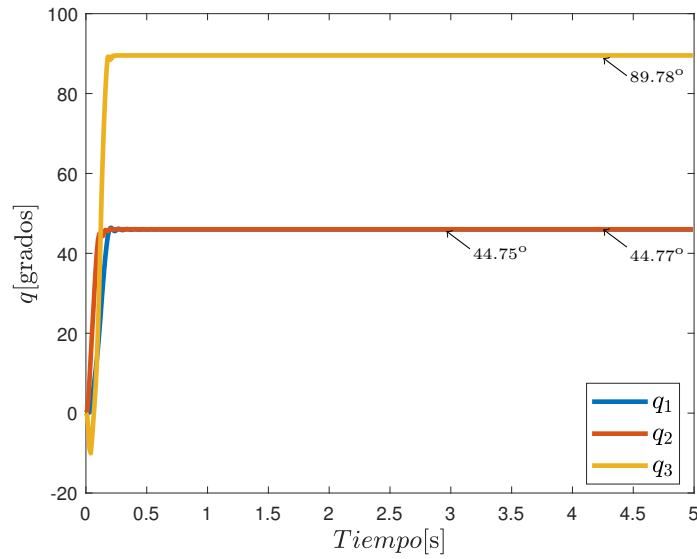


Figura 7.10: Posición articular de control hiperbólico con $m = 3$.

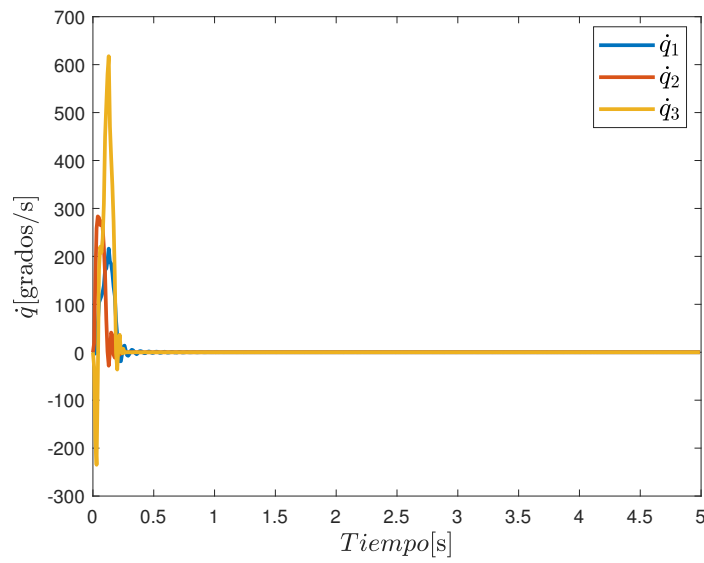


Figura 7.11: Velocidad articular de algoritmo hiperbólico con $m = 3$.

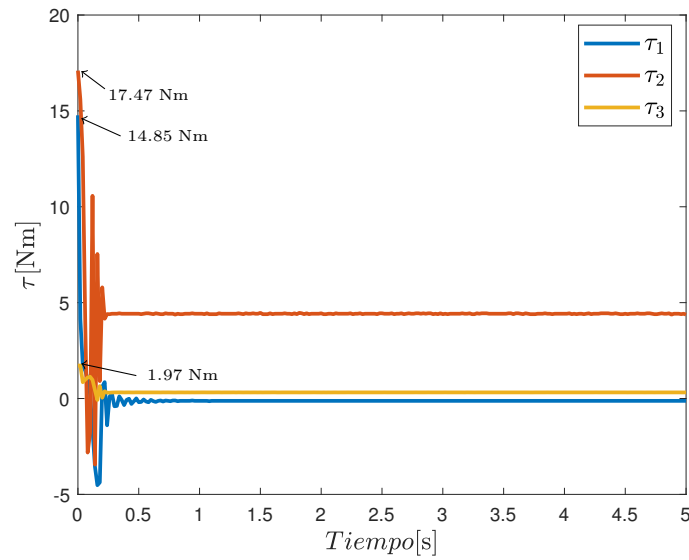


Figura 7.12: Par aplicado de control hiperbólico con $m = 3$.

establecer el estado transitorio y estacionario. Empleando la ecuación 2.74 se obtiene la comparación del desempeño de los distintos algoritmos de control.

Los resultados generales en estado transitorio se encuentran resumidos en la figura 7.13. El algoritmo de control PD tiene una $\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}(t)]_{\text{PD}} = 100\%$, para $m = 1$ $\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}(t)]_{m=1} = 87.79\%$, cuando $m = 2$ la norma es $\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}(t)]_{m=2} = 87.01\%$, y para $m = 3$ $\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}(t)]_{m=3} = 85.96\%$. El desempeño del esquema de control cuando $m = 3$ supera al controlador PD, el cual fue el que mostró menor desempeño en estado transitorio, en 14.04%.

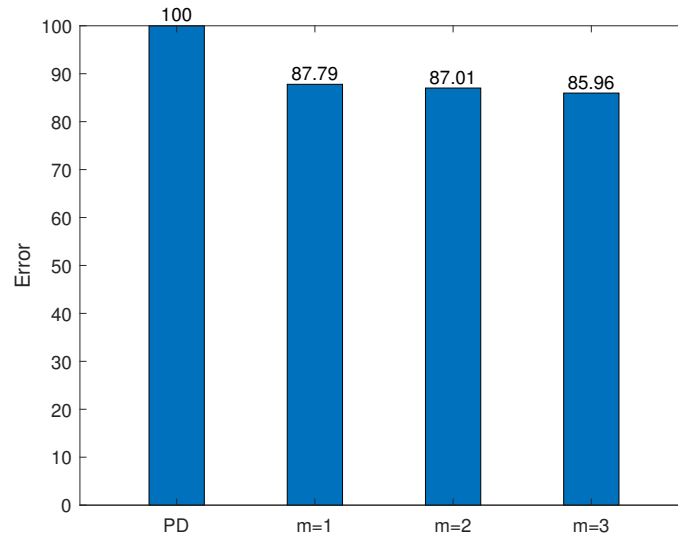


Figura 7.13: Índice de desempeño en estado transitorio.

2. Índice de desempeño - Estado estacionario

En la figura 7.14, se presenta . El algoritmo de control PD tiene una $\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}(t)]_{\text{PD}} = 47.93\%$, para $m = 1$ $\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}(t)]_{m=1} = 100\%$, cuando $m = 2$ la norma es $\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}(t)]_{m=2} = 85.68\%$, y para $m = 3$ $\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}(t)]_{m=3} = 58.72\%$. El desempeño del esquema de control PD supera a las tres distintas versiones del controlador hiperbólico. Sin embargo, al aumentar el coeficiente m en el algoritmo de control hiperbólico, se observa que supera al controlador PD en estado estacionario.

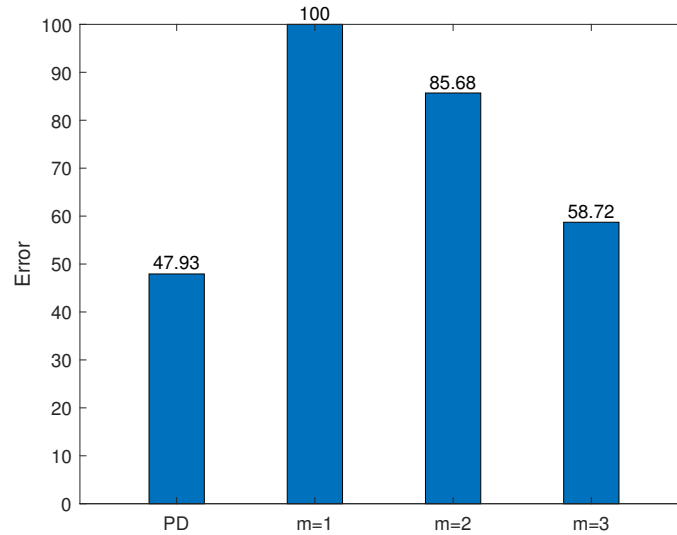


Figura 7.14: Índice de desempeño en estado estacionario.

Si bien, se ha mostrado cualitativamente que la respuesta del algoritmo de control PD no muestra oscilaciones, el algoritmo hiperbólico en sus diferentes versiones, muestra un mejor desempeño que el esquema de control PD en estado estacionario. Dicho resultado se debe a que la acción de control del algoritmo hiperbólico es mas rápida, con la habilidad de poder hacer con la adecuada selección de parámetros del controlador mas o menos rápida la respuesta. Por otro lado se tienen los resultados de la norma $\mathcal{L}_2$ para el estado estacionario, aquí se muestra que los algoritmos de control hiperbólicos muestran un menor desempeño, sin embargo se observa que los errores de posición articular son menor a 1.5 grados, lo cual es aceptable. Adicionalmente, es importante recalcar la habilidad del controlador al mantener el error acotado conforme transcurre el tiempo del experimento.

7.2. Control de posición con extensión dinámica para obtener la velocidad

7.2.1. Control de posición con estimador

A continuación se muestran en la tabla 7.3 las ganancias empleadas para el algoritmo de control PD, el esquema de control tangente hiperbólico $\tanh(\cdot)$ y el algoritmo de control hiperbólico cuando $m = 3$, en ambos casos implementando una extensión dinámica para obtener la velocidad a partir de la posición.

Controlador	Base	Hombro	Codo
Control PD	$k_{p1} = 18.3 \left[\frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \right]$ $k_{v1} = 1.35 \left[\frac{\text{Nm} - \text{sec}}{\text{rad}} \right]$ $\tau_1^{\max} = 15 \text{ [Nm]}$	$k_{p2} = 52.5 \left[\frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \right]$ $k_{v2} = 1.8 \left[\frac{\text{Nm} - \text{sec}}{\text{rad}} \right]$ $\tau_2^{\max} = 50 \text{ [Nm]}$	$k_{p3} = 4.1 \left[\frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \right]$ $k_{v3} = 0.2 \left[\frac{\text{Nm} - \text{sec}}{\text{rad}} \right]$ $\tau_3^{\max} = 4 \text{ [Nm]}$
Control $\tanh$	$k_{p1} = 13.7 \text{ [Nm]}$ $k_{v1} = 4.8 \text{ [Nm]}$ $\tau_1^{\max} = 15 \text{ [Nm]}$ $\gamma_p = 0.9$ $\gamma_v = 0.9$	$k_{p2} = 60.5 \text{ [Nm]}$ $k_{v2} = 5.5 \text{ [Nm]}$ $\tau_2^{\max} = 50 \text{ [Nm]}$ $\gamma_p = 0.9$ $\gamma_v = 0.9$	$k_{p3} = 6.7 \text{ [Nm]}$ $k_{v3} = 2.01 \text{ [Nm]}$ $\tau_3^{\max} = 4 \text{ [Nm]}$ $\gamma_p = 0.9$ $\gamma_v = 0.9$
C. Hiper. para $m = 3$	$k_{p1} = 13.5 \text{ [Nm]}$ $k_{v1} = 4.73 \text{ [Nm]}$ $\tau_1^{\max} = 15 \text{ [Nm]}$ $\eta_p = 2$ $\eta_v = 1$ $\alpha = 0.75$	$k_{p2} = 59.5 \text{ [Nm]}$ $k_{v2} = 5.36; \text{ [Nm]}$ $\tau_2^{\max} = 50 \text{ [Nm]}$ $\eta_p = 2$ $\eta_v = 1$ $\alpha = 0.75$	$k_{p3} = 6.4 \text{ [Nm]}$ $k_{v3} = 1.88 \text{ [Nm]}$ $\tau_3^{\max} = 4 \text{ [Nm]}$ $\eta_p = 2$ $\eta_v = 1$ $\alpha = 0.75$

Tabla 7.3: Ganancias de controladores con extensión dinámica para obtener la velocidad.

En la figura 7.15 se muestran los resultados experimentales de la posición articular de cada una de las articulaciones empleando el controlador PD. Se observa que cada articulación llega a la posición deseada con un mínimo sobreimpulso. El estado estacionario de la respuesta mas lenta, es decir la articulación del hombro, es alcanzado en 0.51 segundos. Las posiciones de cada articulación en estado estacionario son $[q_1(t), q_2(t), q_3(t)]^T = [44.48^\circ, 44.55^\circ, 89.92^\circ]^T$.

Se observa en la figura 7.17 se muestra el par requerido para cada una de las articulaciones alcance la posición deseada. Dichos valores son $[\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T = [14.93, 41.5, 3.74]^T \text{ Nm}$. Entonces se dice que con el controlador PD, ningún servomotor se satura.

En la figura 7.18 se muestran los resultados experimentales de la posición de cada una de las articulaciones empleando el controlador $\tanh(\cdot)$. Se observa que cada articulación llega a la posición deseada con un mínimo sobreimpulso, sin embargo el codo o articulación 3, describe una vibración finita y acotada, para después entrar en estado estacionario. El estado estacionario de la respuesta mas lenta, es decir la articulación del hombro, es alcanzado en 0.37 segundos. Las posiciones de cada articulación en estado estacionario son $[q_1(t), q_2(t), q_3(t)]^T = [44.12^\circ, 44.55^\circ, 88.92^\circ]^T$.

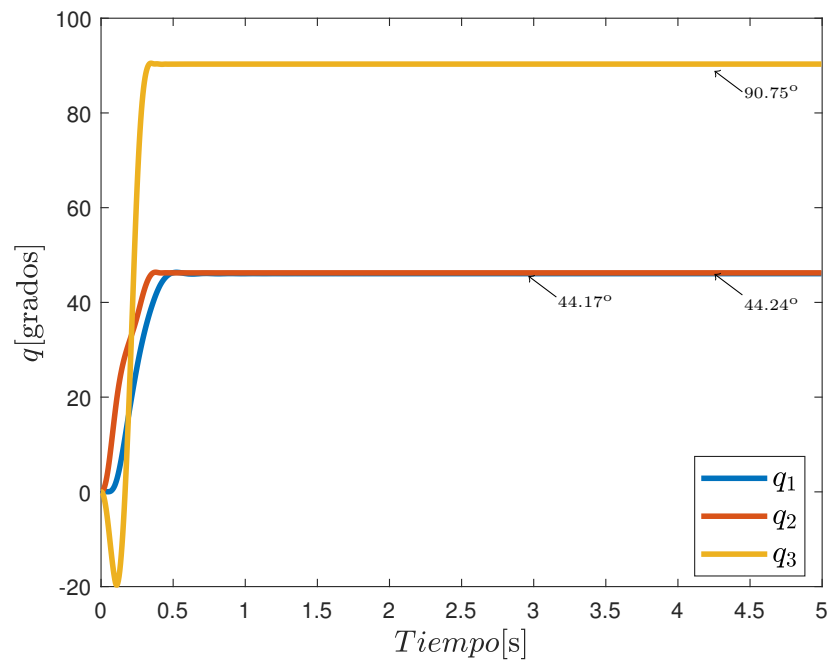


Figura 7.15: Posición articular - Control PD con extensión dinámica.

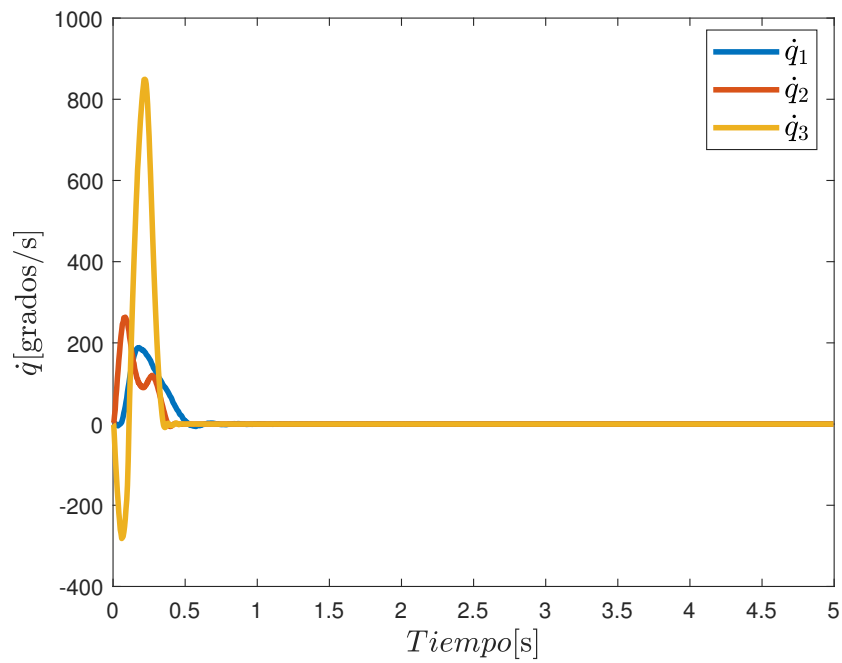


Figura 7.16: Velocidad articular - Control PD con extensión dinámica.

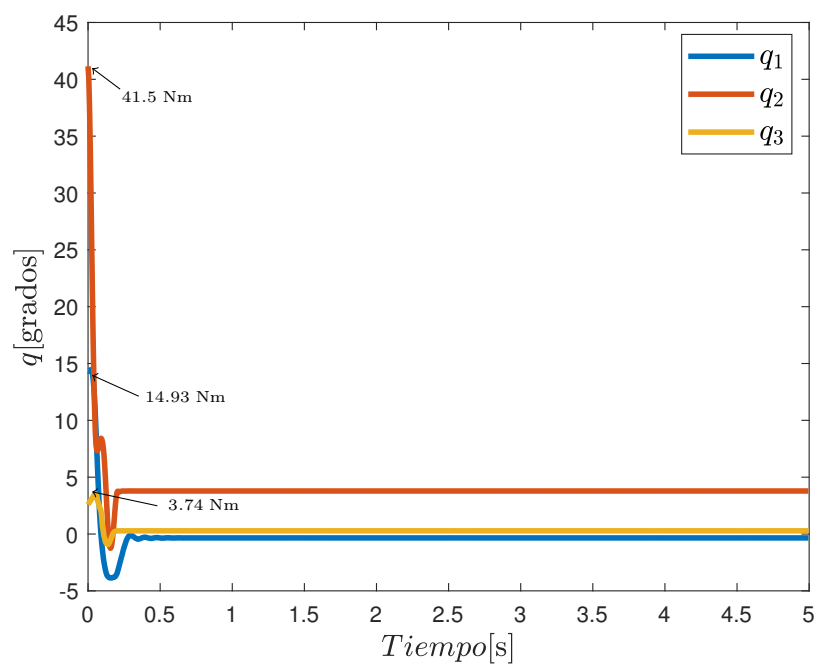


Figura 7.17: Par aplicado - Control PD con extensión dinámica.

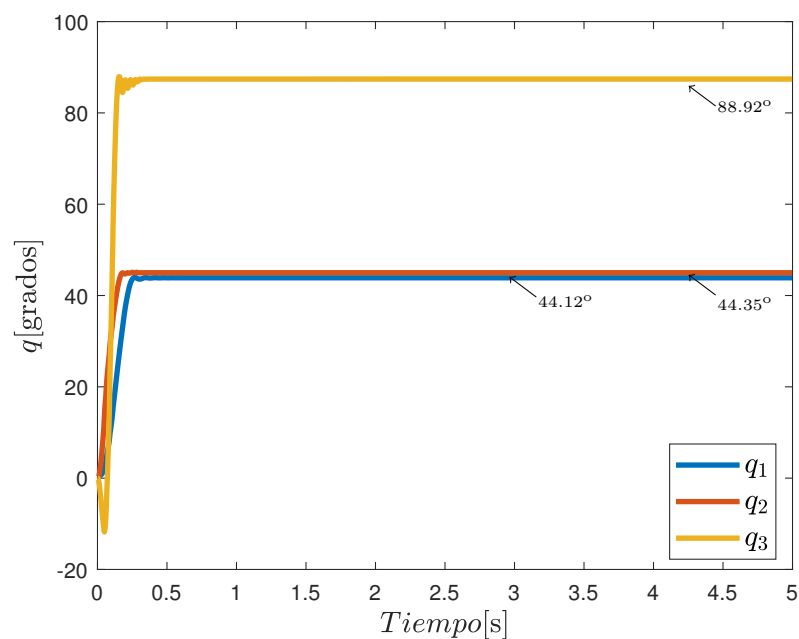


Figura 7.18: Posición articular - Control Tanh con extensión dinámica.

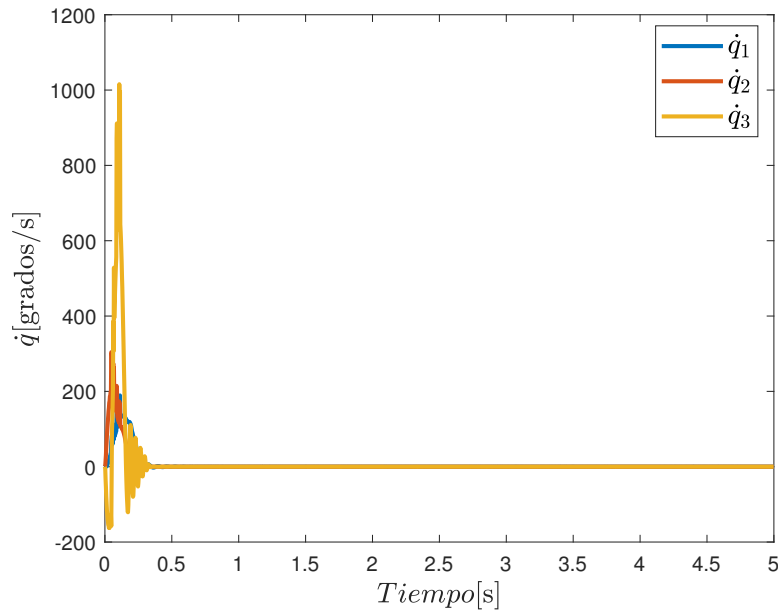


Figura 7.19: Velocidad articular - Control Tanh con extensión dinámica.

Se observa en la figura 7.20 se muestra el par requerido para cada una de las articulaciones alcance la posición deseada. Dichos valores son $[\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T = [26.3, 26.3, 3.89]^T$ Nm. Entonces se dice que con el controlador tangente hiperbólico, ningún servomotor se satura.

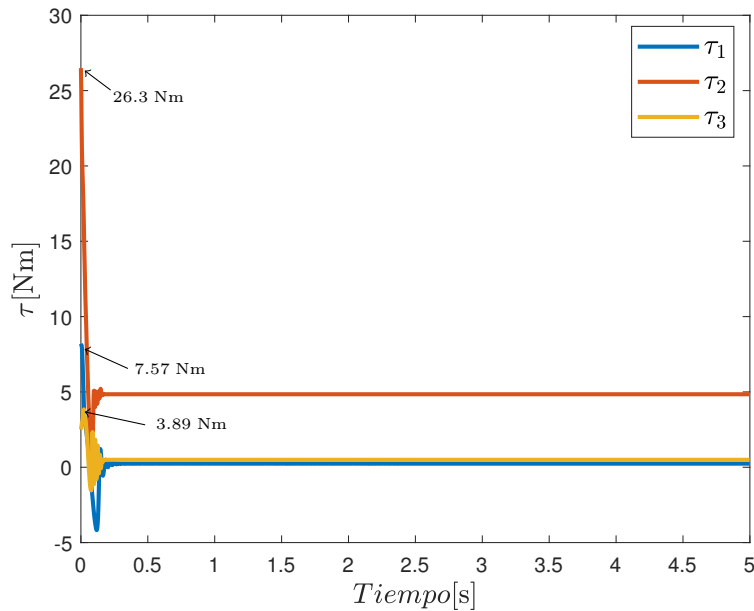


Figura 7.20: Par aplicado - Control Tanh con extensión dinámica.

En la figura 7.21 se muestran los resultados experimentales de la posición de cada una de las arti-

culaciones empleando el controlador hiperbólico. Se observa que cada articulación llega a la posición deseada, al igual que el esquema de control tangente hiperbólico con un mínimo sobreimpulso y una vibración acotada en el codo. El estado estacionario de la respuesta mas lenta, es decir la articulación del hombro, es alcanzado en 0.36 segundos. Las posiciones de cada articulación en estado estacionario son $[q_1(t), q_2(t), q_3(t)]^T = [43.97^\circ, 44.33^\circ, 89.91^\circ]^T$.

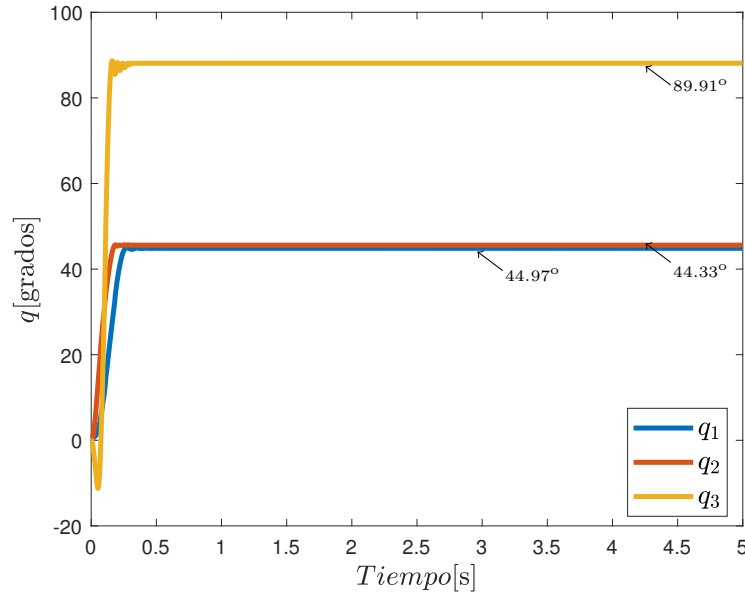


Figura 7.21: Posición articular - Control Hiperbólico con extensión dinámica.

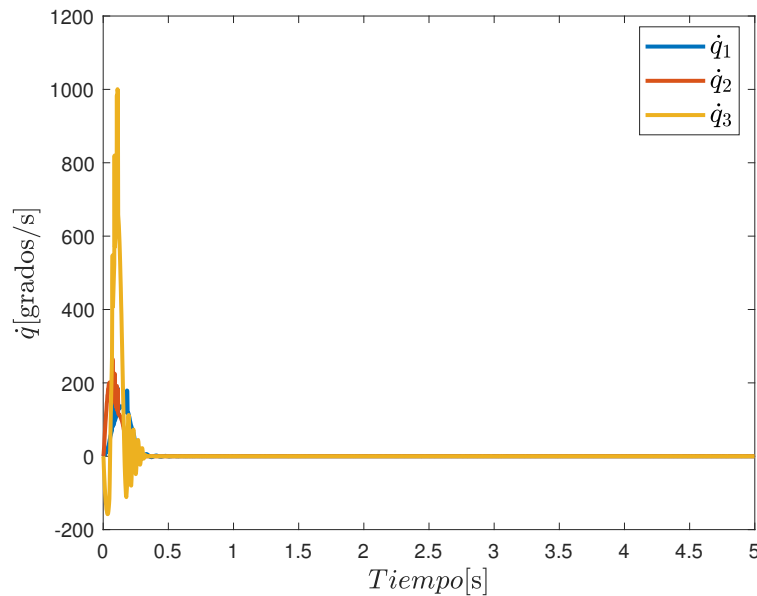


Figura 7.22: Velocidad articular - Control Hiperbólico con extensión dinámica.

Se observa en la figura 7.23 se muestra el par requerido para cada una de las articulaciones alcance la posición deseada. Dichos valores son $[\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T = [26.3, 26.3, 3.89]^T$ Nm. Entonces se dice que con el controlador tangente hiperbólico, ningún servomotor se satura.

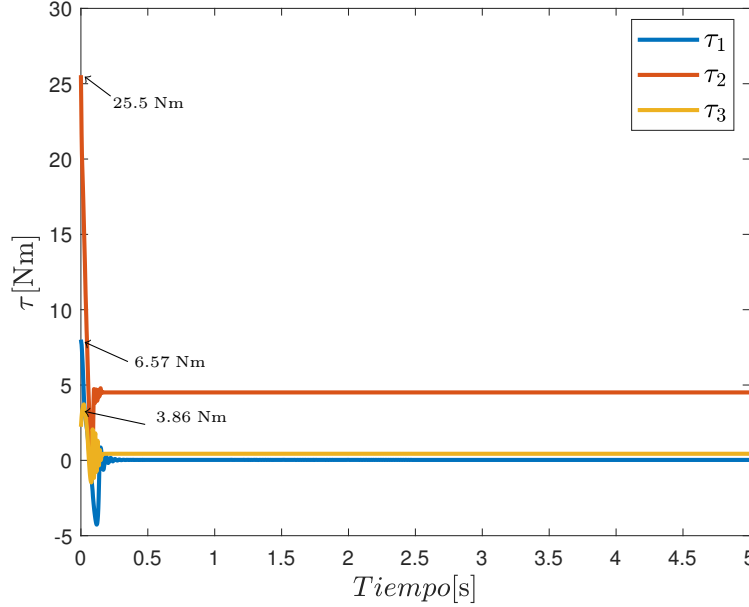


Figura 7.23: Par aplicado - Control Hiperbólico con extensión dinámica.

En las figuras 7.16, 7.19 y 7.22 se muestran las velocidades de cada articulación para cada esquema de control. En el estado transitorio se observan picos los cuales corresponden al freno mecánico aplicado para alcanzar las posiciones deseadas. Conforme transcurre el tiempo del experimento dichas velocidades, en los 3 algoritmos de control, convergen asintóticamente a cero.

1. Índice de desempeño - Estado transitorio

Los resultados en estado transitorio se encuentran resumidos en la figura 7.24. El algoritmo de control PD tiene una $\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}(t)]_{PD} = 77.9\%$, el esquema de control $\tanh(\cdot)$ tiene una $\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}(t)]_{\tanh} = 100\%$ y el esquema de control propuesto tiene una $\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}(t)]_{\text{hiperbólico}} = 99.5\%$. El desempeño del esquema de control PD supera en 22.1 % al controlador tangente hiperbólico.

2. Índice de desempeño - Estado estacionario

En la figura 7.25, se presenta . El algoritmo de control PD tiene una $\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}(t)]_{PD} = 96.33\%$, el esquema de control $\tanh(\cdot)$ tiene una $\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}(t)]_{\tanh} = 100\%$ y la norma el esquema de control propuesto $\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}(t)]_{\text{hiperbólico}} = 88.3\%$. El desempeño del esquema de control hiperbólico propuesto supera al control tangente hiperbólico en 11.7 % .

Al igual que en los experimentos anteriores de posición, cuando se implementa una extensión dinámica para obtener la velocidad a partir de la posición, el controlador PD muestra un buen desempeño en estado transitorio. Esto se debe básicamente a que el esquema de control PD

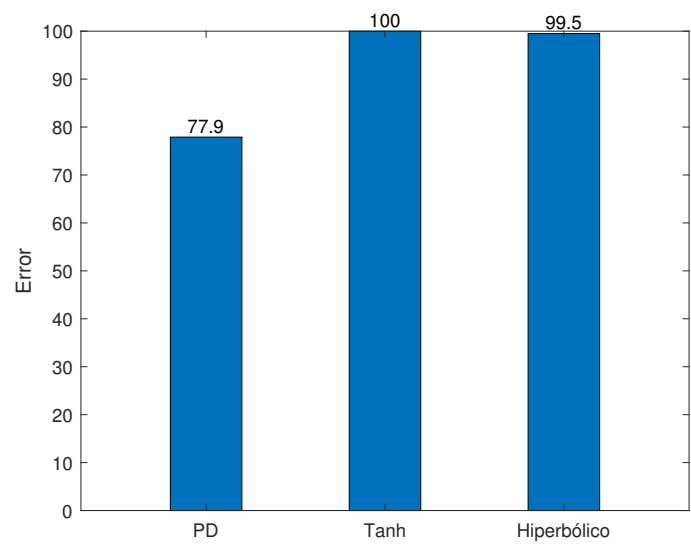


Figura 7.24: Índice de desempeño en estado transitorio con extensión dinámica.

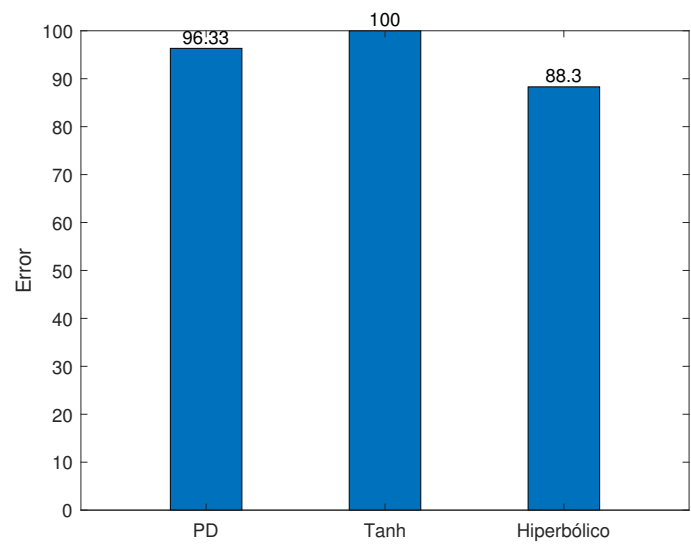


Figura 7.25: Índice de desempeño en estado estacionario con extensión dinámica.

Controlador	Base	Hombro	Codo
Control PD	$k_{p1} = 18.5 \left[\frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \right]$ $k_{v1} = 3.67 \text{ [Nm]}$ $\tau_1^{\max} = 15 \text{ [Nm]}$	$k_{p2} = 47.15; \left[\frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \right]$ $k_{v2} = 4.72 \text{ [Nm]}$ $\tau_2^{\max} = 50 \text{ [Nm]}$	$k_{p3} = 4.1 \left[\frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \right]$ $k_{v3} = 2.01 \text{ [Nm]}$ $\tau_3^{\max} = 4 \text{ [Nm]}$
Control $\tanh$	$k_{p1} = 12.25 \text{ [Nm]}$ $k_{v1} = 4.2 \text{ [Nm]}$ $\tau_1^{\max} = 15 \text{ [Nm]}$ $\eta_p = 0.9$ $\eta_v = 0.9$	$k_{p2} = 43.16 \text{ [Nm]}$ $k_{v2} = 6.5 \text{ [Nm]}$ $\tau_2^{\max} = 50 \text{ [Nm]}$ $\eta_p = 0.9$ $\eta_v = 0.9$	$k_{p3} = 1.36 \text{ [Nm]}$ $k_{v3} = 0.52 \text{ [Nm]}$ $\tau_3^{\max} = 4 \text{ [Nm]}$ $\eta_p = 0.9$ $\eta_v = 0.9$
Control Hiperbólico para $m = 3$	$k_{p1} = 11.9 \text{ [Nm]}$ $k_{v1} = 4.15 \text{ [Nm]}$ $\tau_1^{\max} = 15 \text{ [Nm]}$ $\eta_p = 2$ $\eta_v = 1$ $\alpha = 0.75$	$k_{p2} = 41.15 \text{ [Nm]}$ $k_{v2} = 6.26 \text{ [Nm]}$ $\tau_2^{\max} = 50 \text{ [Nm]}$ $\eta_p = 2$ $\eta_v = 1$ $\alpha = 0.75$	$k_{p3} = 1.54 \text{ [Nm]}$ $k_{v3} = 0.61 \text{ [Nm]}$ $\tau_3^{\max} = 4 \text{ [Nm]}$ $\eta_p = 2$ $\eta_v = 1$ $\alpha = 0.75$

Tabla 7.4: Ganancias de controladores con extensión dinámica propuesta para obtener la velocidad.

casi no presenta oscilaciones, a diferencia de los controladores $\tanh(\cdot)$ y el propuesto hiperbólico. Por otro lado, se tiene la evaluación del desempeño en estado estacionario donde aquel controlador que muestra mejor desempeño, es el propuesto.

7.2.2. Control de posición con estimador propuesto

Se muestran en la tabla 7.4 las ganancias empleadas para el algoritmo de control PD, el esquema de control tangente hiperbólico $\tanh(\cdot)$ y el algoritmo de control hiperbólico cuando $m = 3$ usando la extensión dinámica hiperbólica propuesta para obtener la velocidad a partir de la posición.

En la figura 7.26 se muestran los resultados experimentales de la posición de cada una de las articulaciones empleando el controlador PD con extensión dinámica. Se observa que cada articulación llega a la posición deseada con un mínimo sobreimpulso. Se observa un sobreimpulso negativo en el codo, esto se debe a las acciones de control rápidas que el algoritmo ejerce sobre el hombro y a su vez afecta al codo. Sin embargo un resultado importante es el hecho de obtener el error acotado en estado estacionario. El estado estacionario de la respuesta mas lenta es alcanzado en 0.53 segundos. Las posiciones de cada articulación en estado estacionario son $[q_1(t), q_2(t), q_3(t)]^T = [43.51^\circ, 43.63^\circ, 89.12^\circ]^T$.

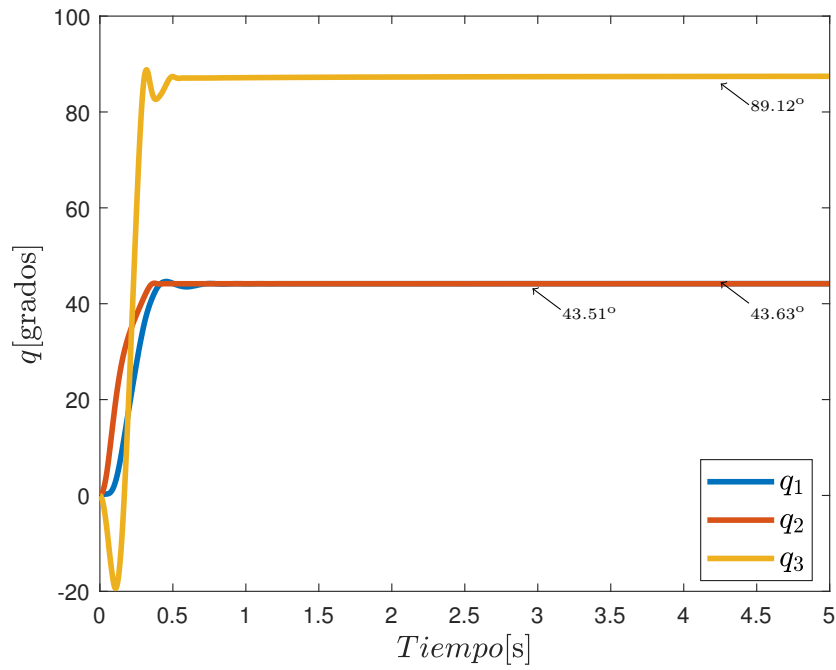


Figura 7.26: Posición articular - Control PD con extensión dinámica hiperbólica.

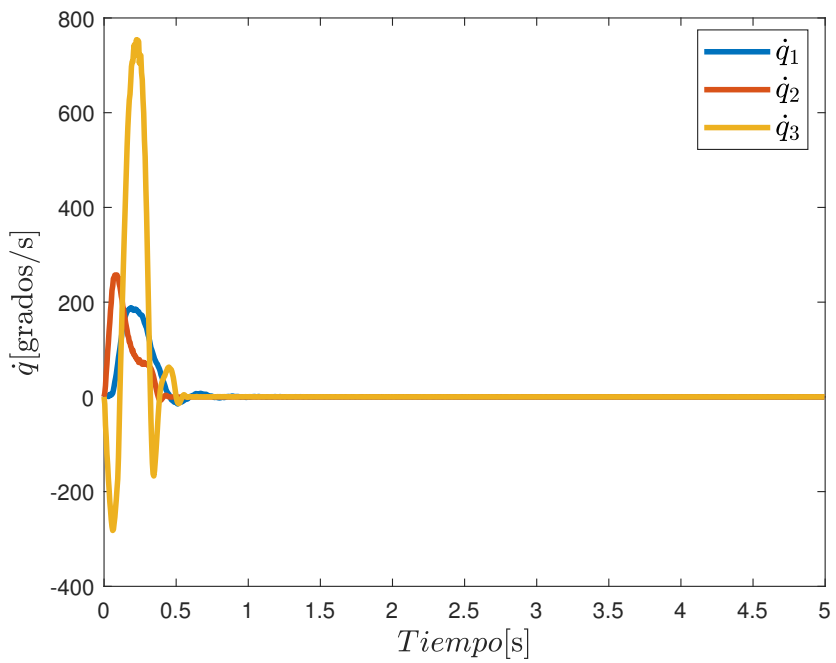


Figura 7.27: Velocidad articular - Control PD con extensión dinámica hiperbólica.

Se observa en la figura 7.28 se muestra el par requerido para cada una de las articulaciones. Dichos

valores son $[\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T = [14.9, 36.5, 3.87]^T$ Nm. Entonces se dice que con el controlador tangente hiperbólico, ningún servomotor se satura.

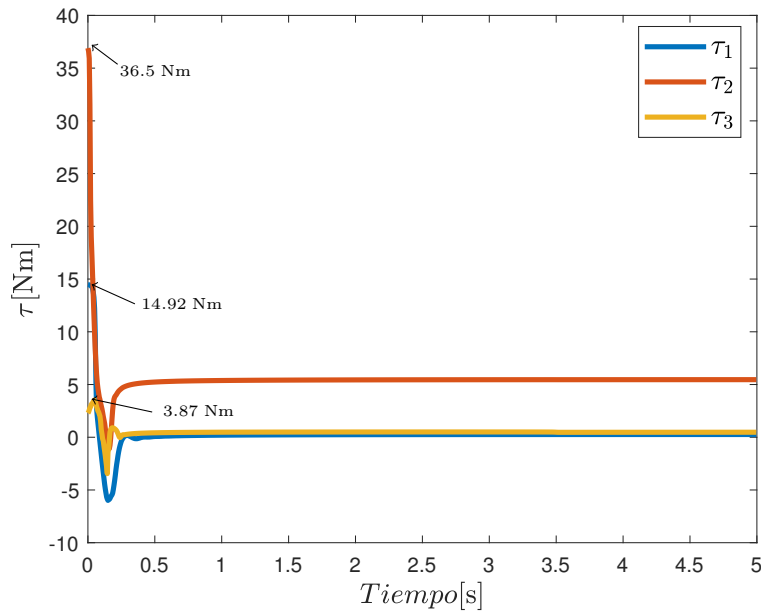


Figura 7.28: Par aplicado - Control PD con extensión dinámica hiperbólica.

En la figura 7.29 se muestran los resultados experimentales de la posición de cada una de las articulaciones empleando el controlador $\tanh(\cdot)$. Se observa que cada articulación llega a la posición deseada con un mínimo sobreimpulso. Se observa un sobreimpulso negativo en la base, esto se debe a las acciones de control rápidas que el algoritmo ejerce sobre el hombro el codo. El estado estacionario de la respuesta mas lenta es alcanzado en 0.41 segundos. Las posiciones de cada articulación en estado estacionario son $[q_1(t), q_2(t), q_3(t)]^T = [44.01^\circ, 44.31^\circ, 89.63^\circ]^T$.

Se observa en la figura 7.31 se muestra el par requerido para cada una de las articulaciones. Dichos valores son $[\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T = [11.57, 37.5, 2.2]^T$ Nm. Entonces se dice que con el controlador tangente hiperbólico, ningún servomotor se satura.

En la figura 7.32 se muestran los resultados experimentales de la posición de cada una de las articulaciones empleando el controlador PD. Se observa que cada articulación llega a la posición deseada con un mínimo sobreimpulso. Se observa un sobreimpulso negativo en la base, al igual que el esquema de control tangente hiperbólico, esto se debe a las acciones de control rápidas que el algoritmo ejerce sobre el hombro y el codo. Sin embargo un resultado también importante es el hecho de obtener el error acotado en estado estacionario. El estado estacionario de la respuesta mas lenta es alcanzado en 0.39 segundos. Las posiciones de cada articulación en estado estacionario son $[q_1(t), q_2(t), q_3(t)]^T = [43.66^\circ, 43.85^\circ, 89.03^\circ]^T$.

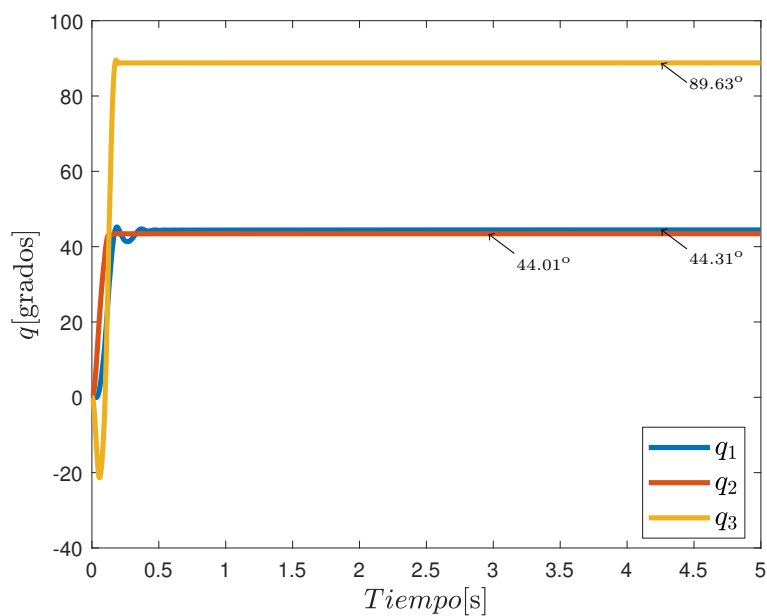


Figura 7.29: Posición articular - Control Tanh con extensión dinámica hiperbólica.

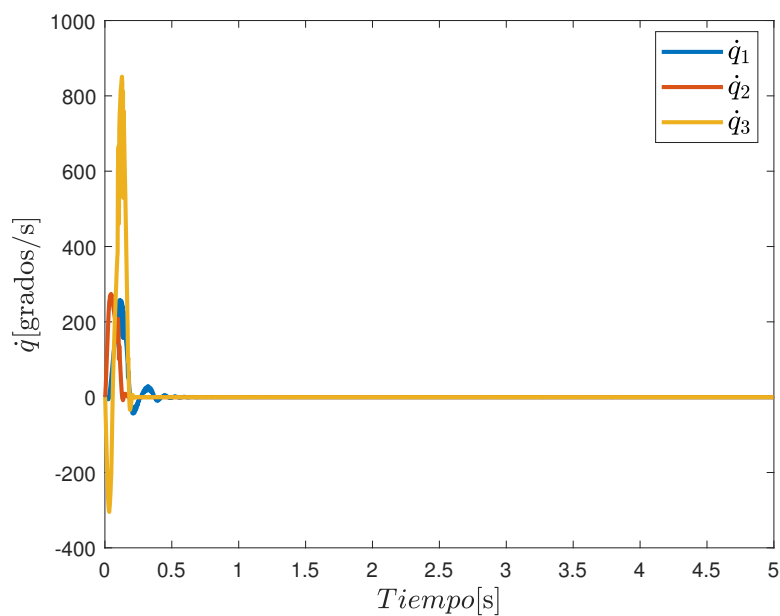


Figura 7.30: Velocidad articular - Control Tanh con extensión dinámica hiperbólica.

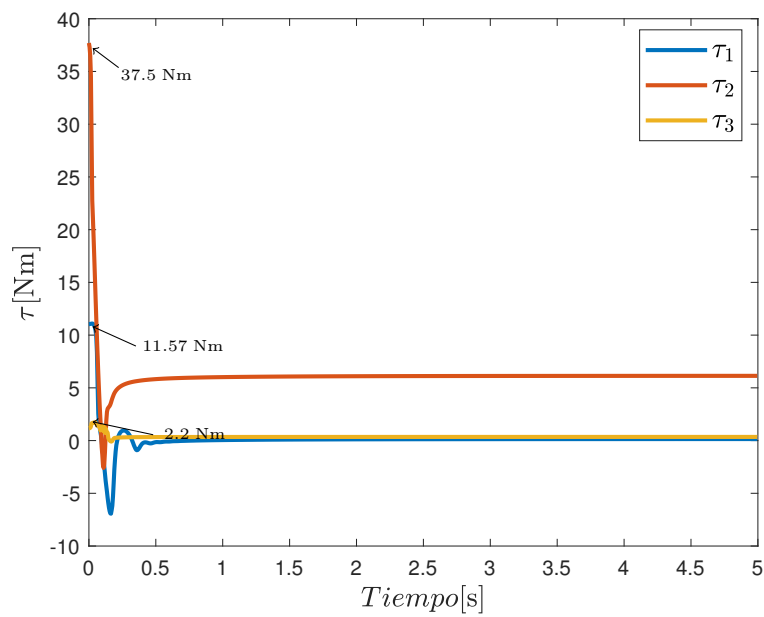


Figura 7.31: Par aplicado - Control Tanh con extensión dinámica hiperbólica.

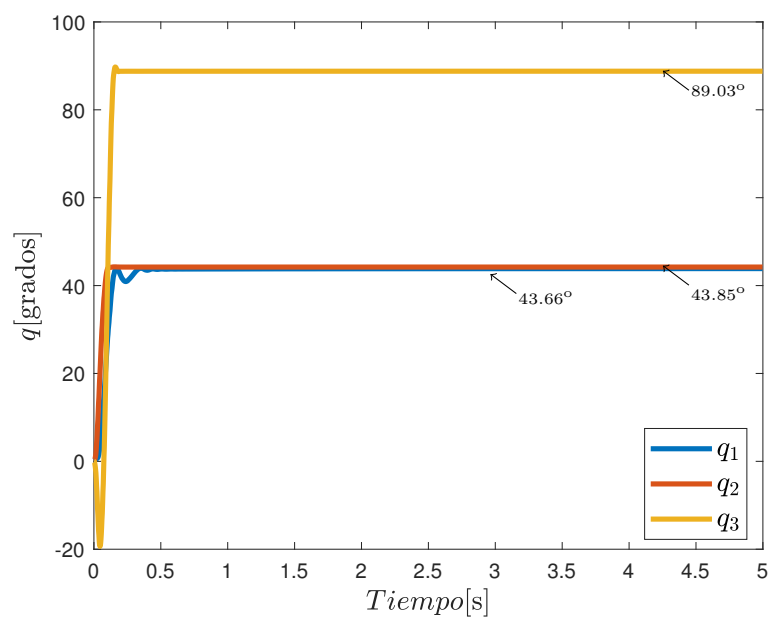


Figura 7.32: Posición articular - Control Hiperbólico con extensión dinámica hiperbólica

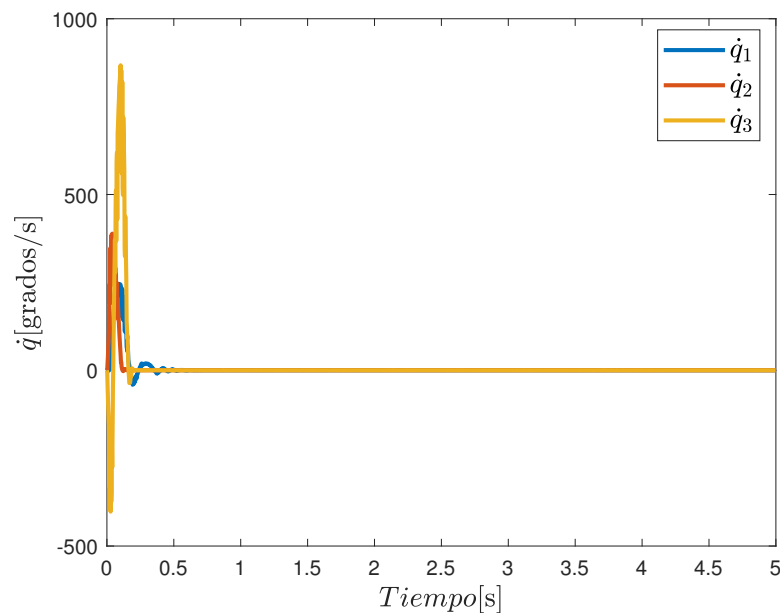


Figura 7.33: Velocidad articular - Control Hiperbólico con extensión dinámica hiperbólica.

Se observa en la figura 7.34 se muestra el par requerido para cada una de las articulaciones. Dichos valores son $[\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T = [12.5, 35.7, 2.5]^T$ Nm. Entonces se dice que con el controlador tangente hiperbólico, ningún servomotor se satura.

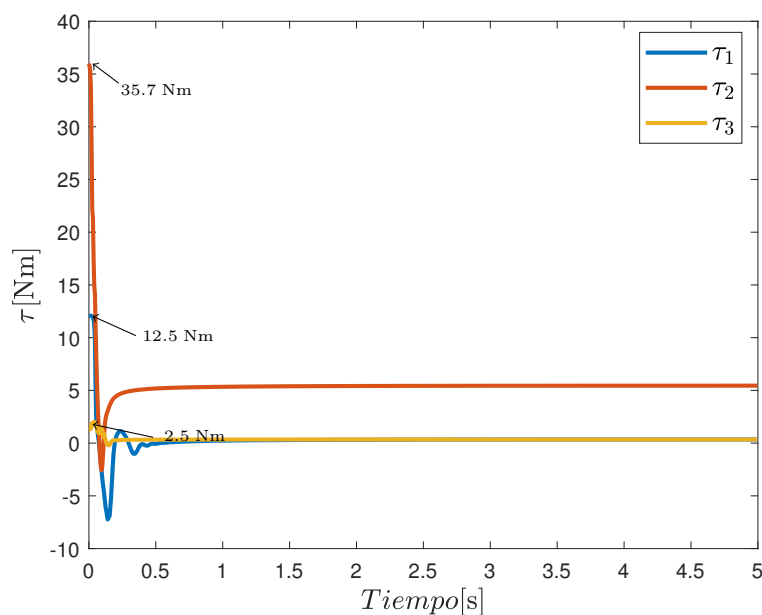


Figura 7.34: Par aplicado - Control Hiperbólico con extensión dinámica hiperbólica.

En las figuras 7.27, 7.30 y 7.33 se muestran las velocidades de cada articulación para cada esquema

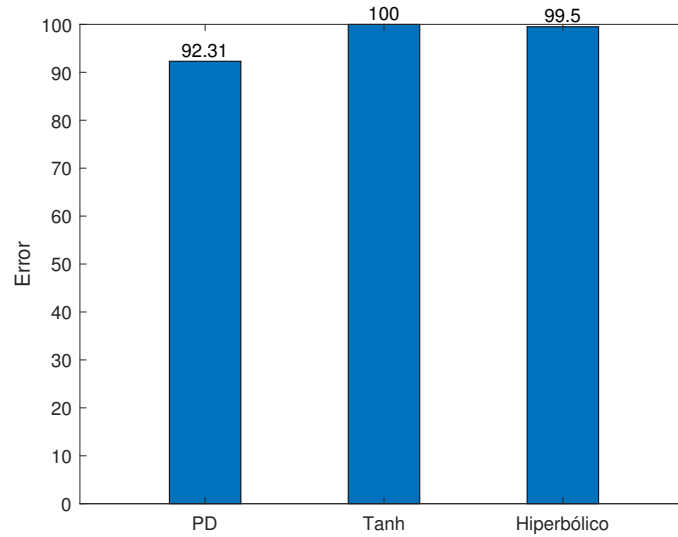


Figura 7.35: Índice de desempeño en estado transitorio con extensión dinámica hiperbólica.

de control. En el estado transitorio se observan picos los cuales corresponden al freno mecánico aplicado para alcanzar las posiciones deseadas. Conforme transcurre el tiempo del experimento dichas velocidades, en los 3 algoritmos de control, convergen asintóticamente a cero.

1. Índice de desempeño - Estado transitorio

Los resultados en estado transitorio se encuentran resumidos en la figura 7.35. El algoritmo de control PD tiene una $\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}(t)]_{\text{PD}} = 92.31\%$, el esquema de control $\tanh(\cdot)$ es $\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}(t)]_{\tanh} = 100\%$ y el esquema de control propuesto $\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}(t)]_{\text{hiperbólico}} = 99.5\%$. El desempeño del esquema de control PD supera en 7.69 % al controlador tangente hiperbólico.

2. Índice de desempeño - Estado estacionario

En la figura 7.36, se presenta. El algoritmo de control PD tiene una $\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}(t)]_{\text{PD}} = 100\%$, el esquema de control $\tanh(\cdot)$ tiene una $\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}(t)]_{\tanh} = 70.9\%$ y el esquema de control propuesto $\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}(t)]_{\text{hiperbólico}} = 76.5\%$. El desempeño del esquema de control tangente hiperbólico supera al control PD hiperbólico en 29.1 % .

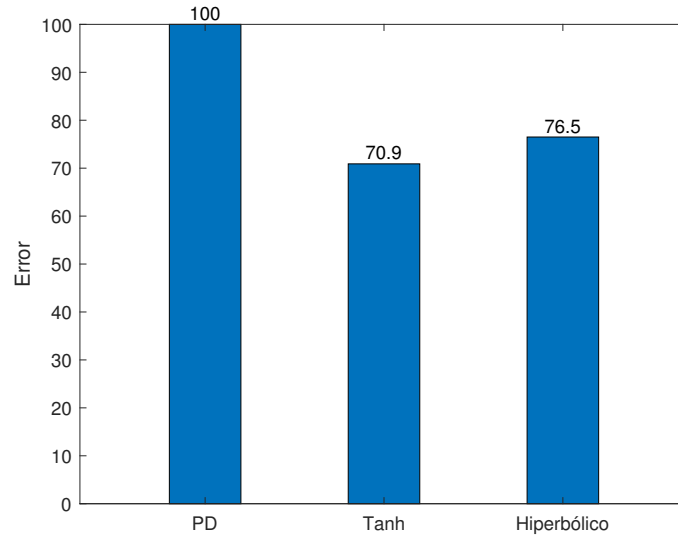


Figura 7.36: Índice de desempeño en estado estacionario con extensión dinámica hiperbólica.

Después de obtener los resultados experimentales empleando una extensión dinámica y comparar el desempeño en estado transitorio y estacionario para cada esquema de control. Se observó que para cada articulación se alcanza la posición deseada con errores menores a 1.5 grados. Otro detalle a resaltar es el hecho de que al incluir una dinámica en la ecuación en lazo cerrado, las ganancias del controlador varían con respecto a las consideradas en los experimentos sin extensión dinámica. En especial las ganancias derivativas son las que se ven mas modificadas debido a que con la extensión dinámica se estima la velocidad. Una característica a resaltar de los experimentos, es la estabilidad en estado estacionario con un error acotado, adicionalmente se dice que en estado estacionario un error menor a 1.5 grados se considera aceptable para la mayoría de aplicaciones.

7.3. Control de trayectoria

Una vez hechas las pruebas del caso particular de trayectoria cuando la posición deseada es constante, entonces se realizan las pruebas experimentales de control de trayectoria continua. Para describir la trayectoria deseada en coordenadas cartesianas, es necesario el cálculo de la transformación de dichas coordenadas a las coordenadas articulares, esto se logra con la cinemática inversa. Sin embargo, para ello se necesita hacer el computo de la función $\arcsin(\cdot)$, lo cual se le dificulta al controlador. Por ello, la propuesta es establecer una posición deseada variante en el tiempo directamente en coordenadas rotacionales. Se elige una señal sinusoidal, la cual se encuentra descrita como:

$$q_{d_i} = e^{-4t} + \frac{\pi}{4} \sin(3t)$$

$$\dot{q}_{d_i} = -4e^{-4t} + \frac{3\pi}{4} \cos(3t)$$

donde $i = 1, 2, 3$.

En las pruebas de control de posición con los distintos algoritmos de control empleando el estimador hiperbólico propuesto, se muestra que este es competitivo, es por ello que en las siguientes pruebas de control de trayectoria los experimentos se realizan con dicho estimador hiperbólico para distintas leyes de control. De igual forma, para el caso del algoritmo de control propuesto hiperbólico en control de movimiento se emplean valores específicos de los parámetros $m, \eta_p, \eta_v, \alpha, \beta$, debido a que fueron las respuestas con un mejor índice de desempeño.

7.3.1. Cosimulación

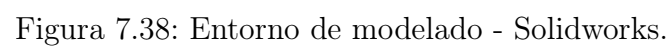
Para la validación del controlador de trayectoria propuesto se emplea un entorno de co-simulación interactivo multisoftware. Después del modelado dinámico en 3D del robot manipulador, este es exportado al Software de modelado dinámico. Para esta tesis se usa como software para el modelado mecánico del robot Solidworks, para la simulación y animación se usa ADAMS y para la simulación como complemento y control de trayectoria se usa Matlab/Simulink.

Desarrollado por la compañía MDI, Adams como software provee de un potente entorno de modelado y simulación así como también cuenta con una buena función de análisis con respecto a la dinámica y cinemática, la cual es popular en el campo de proyectos mecánicos. Mientras que Matlab/Simulink se vuelve un software indispensable utilidad durante la investigación científica debido a su poderosa potencia de cómputo, visualización de programación y resultados de cálculo y su alta eficiencia en programación [53].

En la figura 7.37 se muestra diagrama de flujo para realizar la co-simulación. La primera etapa consiste en realizar el modelo en 3D en Solidworks, esto implica tener las medidas de cada una de las partes del robot manipulador real. En la figura 7.38 se muestra el entorno de modelado en 3D del robot manipulador. Es necesario especificar la textura y material de cada parte para que el software sea capaz de calcular sus centros de masa y masa de cada parte. Luego se ensambla cada pieza y se establecen las restricciones de movimiento, ya que es necesario para importar a ADAMS hacer una previa animación de movimiento, en este caso solo de las partes móviles, es decir cada servomotor.

Luego en ADAMS se importa el modelo en 3D como se observa en la figura 7.39, después se ajustan las restricciones de las piezas. Se establecen las entradas y salidas del modelo, es decir un par aplicado para cada servomotor y una posición articular para cada parte móvil de cada servomotor. Se establecen 3 motores rotatorios que simulen los 3 servomotores, luego se hace una simulación de unos segundos y luego se exporta el modelo a MATLAB. En el proceso de establecer entradas, salidas o componentes para la simulación es importante tener en cuenta cuales son los markers correspondiente a cada pieza, debido a que una mala selección de estos hará que no refleje el movimiento que el robot manipulador haría en la realidad.

Finalmente, una vez importado el modelo de ADAMS en MATLAB/SIMULINK se implementa los bloques necesarios para el control de trayectoria como se observa en la figura 7.40, tales como la propia ley de control, estimador de la velocidad a partir de la posición, la trayectoria deseada y los bloques necesarios para graficar la respuesta.



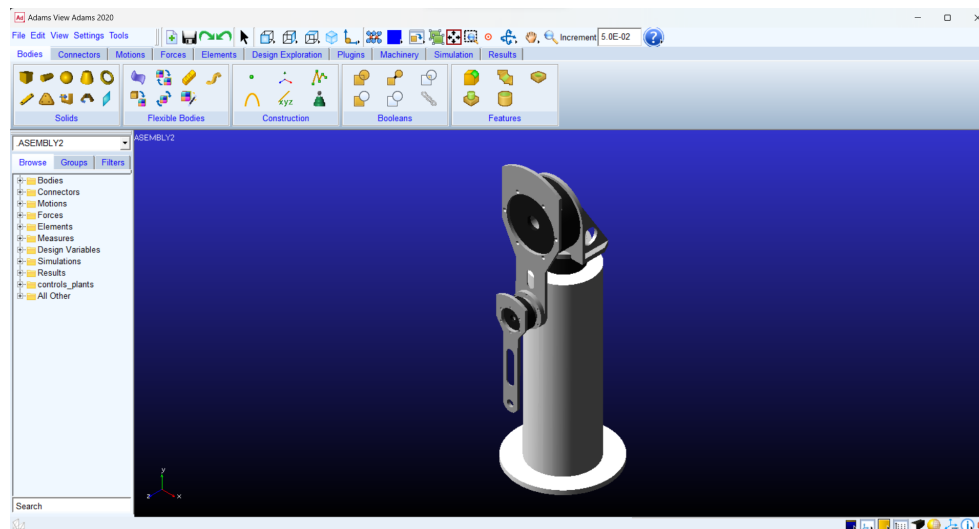


Figura 7.39: Entorno de animación - Adams MSC.

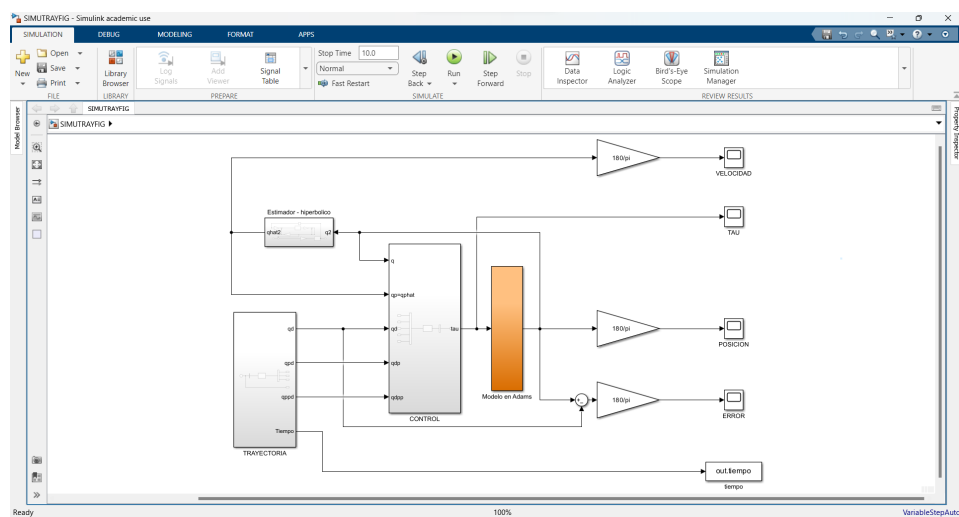


Figura 7.40: Entorno de simulación - Simulink.

7.3.2. Resultados de cosimulación

Se realizan experimentos de cosimulación en Matlab y MSC Adams de trayectorias variantes en el tiempo de tipo sinusoidal como se describen anteriormente. Se compara el desempeño del algoritmo PD+, $\tanh(\cdot)$ y el control hiperbólico propuesto para el control de posición y velocidad articular. En la tabla 7.5 se muestran cada una de las ganancias de las distintas leyes de control.

Controlador	Base	Hombro	Codo
PD+	$k_{p_1} = 22.1$ [Nm] $k_{v_1} = 29.5$ [Nm] $\tau_1^{\max} = 15$ [Nm]	$k_{p_2} = 39.3$ [Nm] $k_{v_2} = 42$ [Nm] $\tau_2^{\max} = 50$ [Nm]	$k_{p_3} = 4.1$ [Nm] $k_{v_3} = 4.2$ [Nm] $\tau_3^{\max} = 4$ [Nm]
$\tanh(\cdot)$	$k_{p_1} = 22.1$ [Nm] $k_{v_1} = 29.5$ [Nm] $\tau_1^{\max} = 15$ [Nm] $\alpha = 2$ $\beta = 1$	$k_{p_2} = 39.3$ [Nm] $k_{v_2} = 42$ [Nm] $\tau_2^{\max} = 50$ [Nm] $\alpha = 2$ $\beta = 1$	$k_{p_3} = 4.1$ [Nm] $k_{v_3} = 4.2$ [Nm] $\tau_3^{\max} = 4$ [Nm] $\alpha = 2$ $\beta = 1$
Control hiperbólico propuesto	$k_{p_1} = 22.1$ [Nm] $k_{v_1} = 29.5$ [Nm] $\tau_1^{\max} = 15$ [Nm] $\eta_p = 2$ $\eta_v = 1$ $\alpha = 1 = \beta = 1$	$k_{p_2} = 39.3$ [Nm] $k_{v_2} = 42$ [Nm] $\tau_2^{\max} = 50$ [Nm] $\eta_p = 2$ $\eta_v = 1$ $\alpha = \beta = 1$	$k_{p_3} = 4.1$ [Nm] $k_{v_3} = 4.2$ [Nm] $\tau_3^{\max} = 4$ [Nm] $\eta_p = 2$ $\eta_v = 1$ $\alpha = \beta = 1$

Tabla 7.5: Ganancias de los algoritmos de control de trayectoria.

7.3.2.1. Controlador PD+

Como se describió en la sección 2.3.5.1, la ley de control PD+ es:

$$\tau_{PD+} = K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_d + B \dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (7.5)$$

En la figura 7.42a se observa la posición articular de las tres articulaciones y la deseada. La respuesta describe un transitorio hasta los 4 segundos, donde la primera articulación (base) presenta un pico de -60.41° . A partir de los 4 segundos la respuesta entra en estado estacionario hasta los 20 segundos que dura el experimento. En la figura 7.41b se muestra el error de posición de las tres articulaciones, este se encuentra acotado conforme transcurre el tiempo del experimento. En estado estacionario el máximo error es de $\pm 6.3^\circ$ en la tercera articulación (codo).

Al igual que la respuesta de posición, la respuesta de velocidad en la figura 7.42a describe un transitorio y un estacionario. En el estado transitorio se observa un pico máximo de 146.05 grados/seg

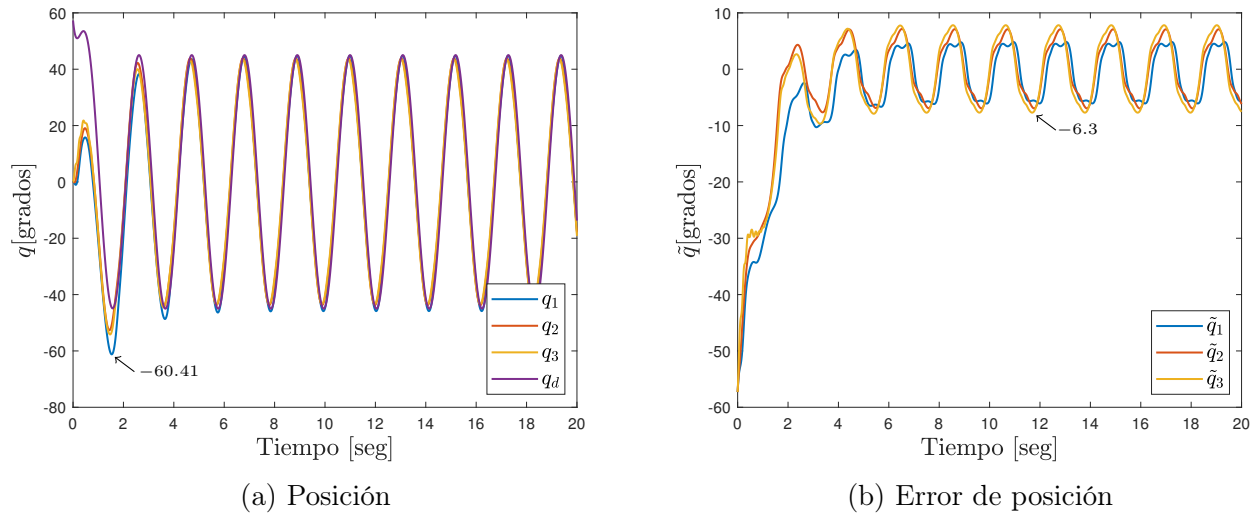


Figura 7.41: Posición articular - Controlador PD+.

para la base. Por otro lado, el error de velocidad se encuentra acotado con un error máximo para la base de ± 30.40 grados/seg. Dicho error se debe principalmente al desfase al momento de estimar la velocidad a partir de la posición.

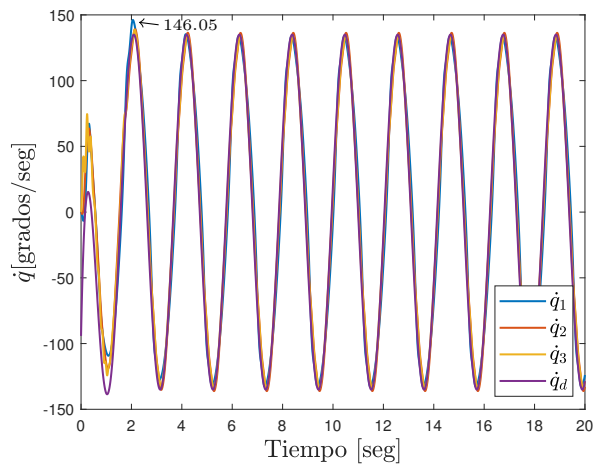
Finalmente en la tabla 7.5 se muestran los pares máximos que cada servomotor asociado a su articulación puede suministrar. Entonces de acuerdo a la figura 7.46 que ninguna de los tres servomotores se satura.

7.3.2.2. Controlador $\tanh(\cdot)$

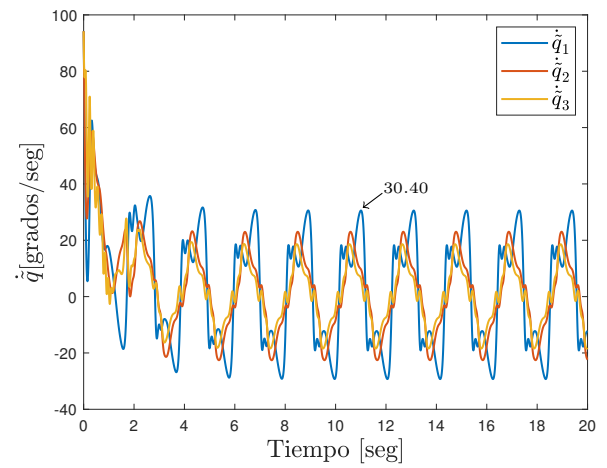
La ley de control $\tanh(\cdot)$ en su versión para control de trayectoria se describe como:

$$\tau_{PD+} = K_p \tanh(\tilde{\mathbf{q}}) + K_v \tanh(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + B\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (7.6)$$

En la figura 7.44a se observa un pico en la posición articular en el estado transitorio de -59.43 grados en la base. La respuesta del error de posición en 7.44b se encuentra acotado para las tres articulaciones, donde en error en estado estacionario el máximo error se presenta en el codo con ± 8.05 grados.



(a) Velocidad



(b) Error de velocidad

Figura 7.42: Velocidad articular - Controlador PD+.

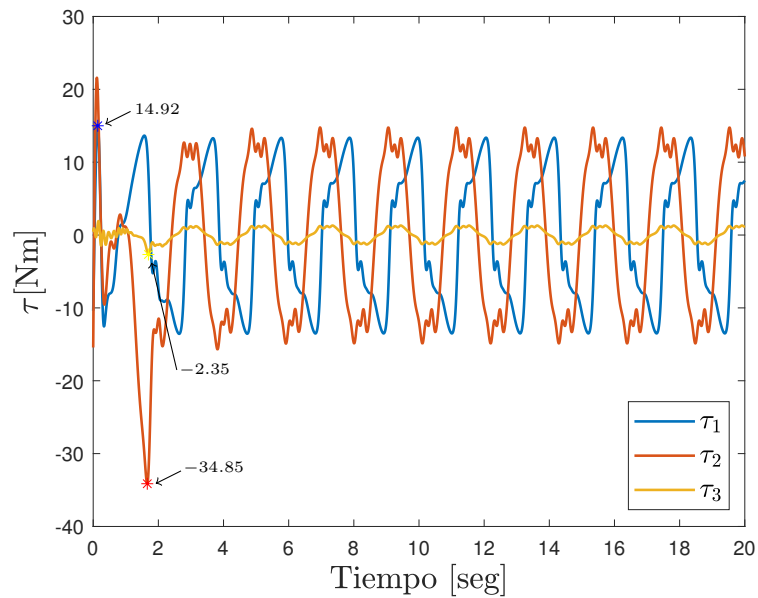
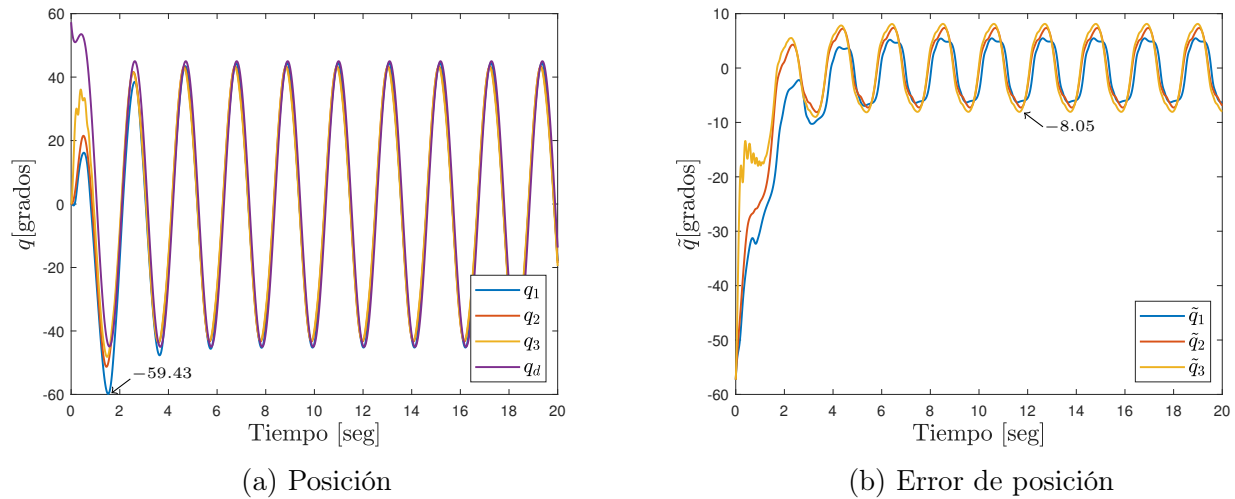
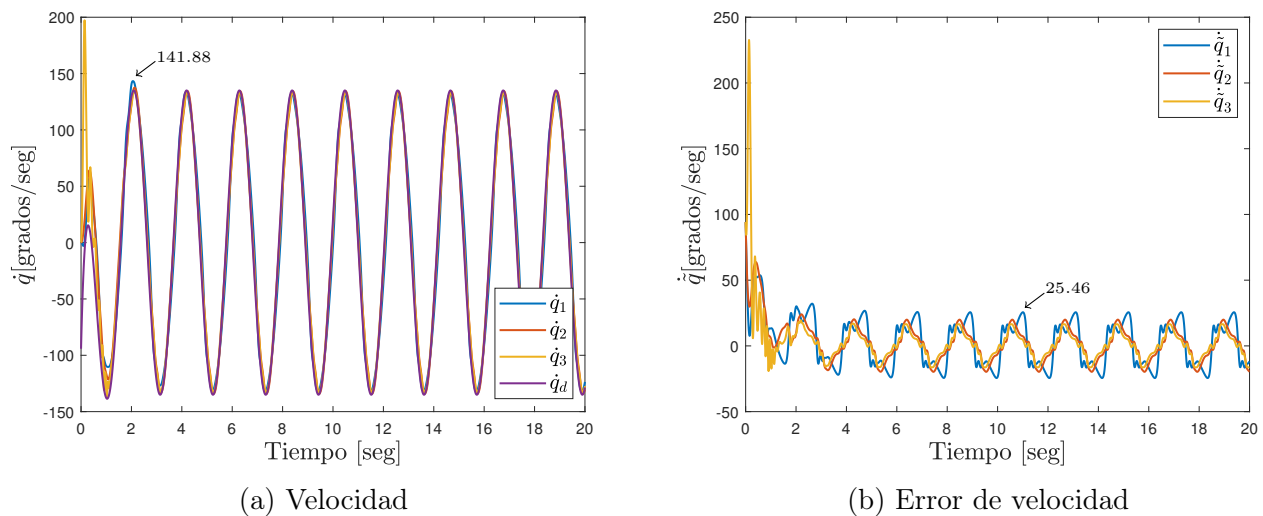


Figura 7.43: Par aplicado - PD+.

Figura 7.44: Posición articular - Controlador $\tanh(\cdot)$.

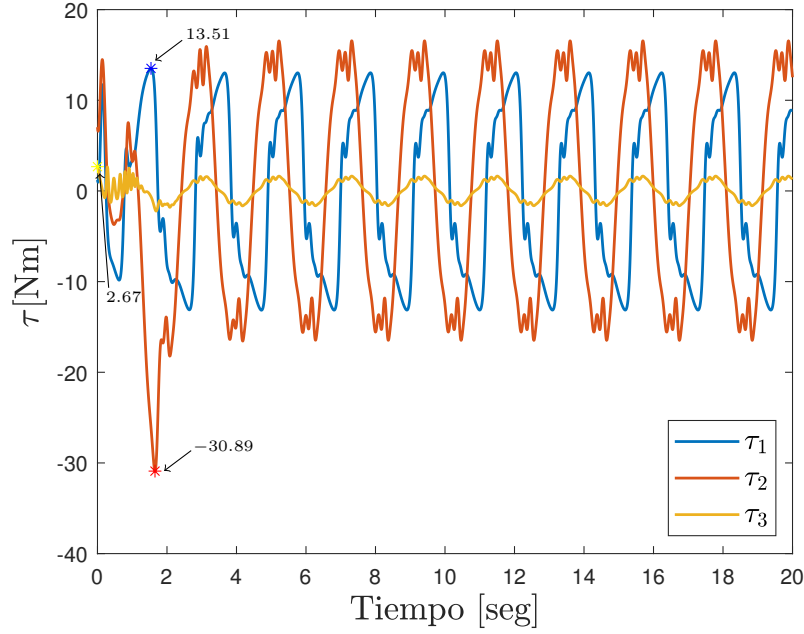
En la figura 7.45a se muestra la respuesta de velocidad de las 3 articulaciones, donde la base presenta un pico máximo en estado transitorio de 141.88 grados/seg. Al igual que el error de posición, el error de velocidad se encuentra acotado conforme el tiempo del experimento transcurre. Se observa un error de velocidad máximo de 25.46 grados/seg en la base.

Figura 7.45: Velocidad articular - Controlador $\tanh(\cdot)$.

Se observa en la figura 7.46 que ningún servomotor se satura conforme transcurre el tiempo del experimento.

7.3.2.3. Controlador Hiperbólico propuesto

En la sección 4.2 se presenta la ley de control propuesta para el problema de movimiento. Esta se describe como:

Figura 7.46: Par aplicado - $\tanh(\cdot)$.

$$\begin{aligned} \tau = K_p \frac{\sinh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}}) \cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m-1} \left[1 - \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m}} \right]}{\cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m} + \alpha e^{-\alpha \cosh(\eta_1 \tilde{\mathbf{q}})^{2m}}} + K_v \frac{\sinh(\eta_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \cosh(\eta_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m-1} \left[1 - \beta e^{-\beta \cosh(\eta_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m}} \right]}{\cosh(\eta_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m} + \beta e^{-\beta \cosh(\eta_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m}}} \\ + M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + B\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (7.7)$$

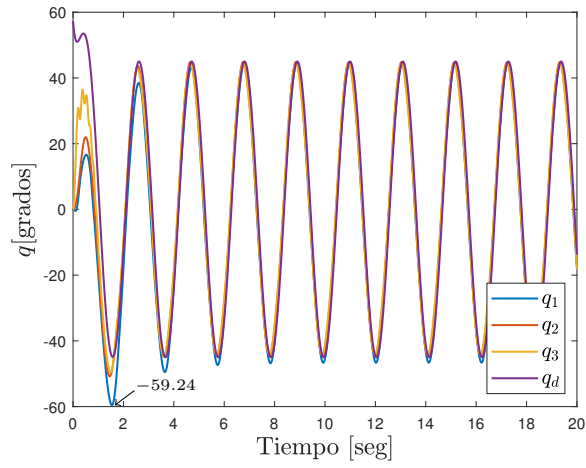
En la figura 7.47a se observan las posiciones articulares de cada articulación empleando el algoritmo de control hiperbólico propuesto, así como también la posición deseada de cada articulación. La base presenta un pico de -59.24 grados. El error de posición se mantiene acotado conforme transcurre el tiempo del experimento. El máximo error es de ± 7.06 grados en la base.

En la figura 7.48a se presenta la velocidad de las tres articulaciones y la velocidad deseada. Se observa un pico en estado transitorio en la base de magnitud 144.57 grados/seg. El error de velocidad se encuentra acotado conforme transcurre el tiempo del experimento como se observa en la figura 7.48b.

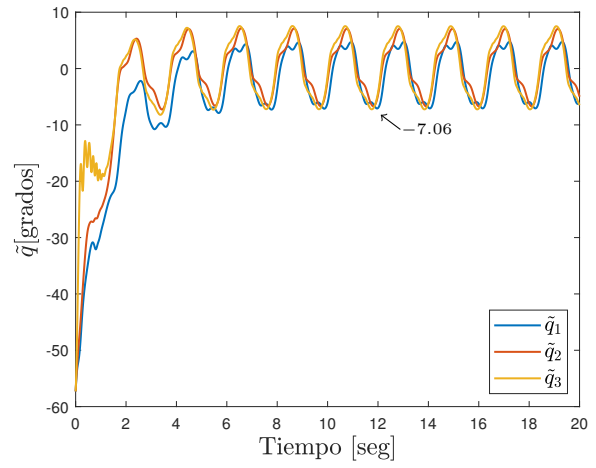
Finalmente, cuando se gráfica los pares aplicados por cada servomotor y tomando en cuenta los pares máximos, se observa en la figura 7.49 que ningún servomotor se satura.

7.3.2.4. Norma $\mathcal{L}_2$

Se calcula la norma $\mathcal{L}_2$ para el error de posición y el error de velocidad para cada algoritmo de control. Al igual que para el análisis de desempeño en regulación, este fue calculado por separado para el estado transitorio y estado estacionario. En la figura 7.50 se muestra el índice de desempeño para posición, en la figura 7.50a se observa que en estado transitorio el algoritmo de control con mejor

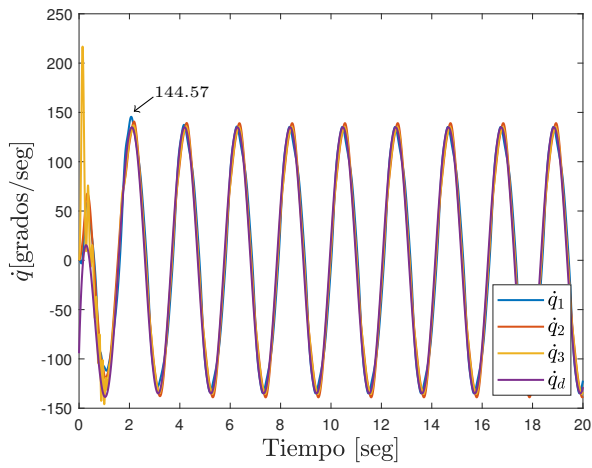


(a) Posición

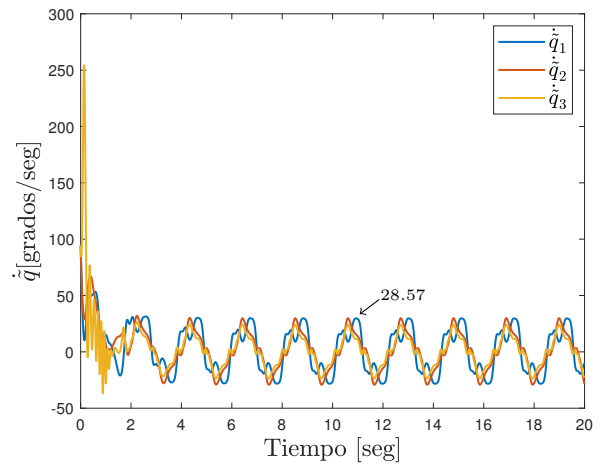


(b) Error de posición

Figura 7.47: Posición articular - Controlador propuesto hiperbólico.



(a) Velocidad



(b) Error de velocidad

Figura 7.48: Velocidad articular - Controlador propuesto hiperbólico.

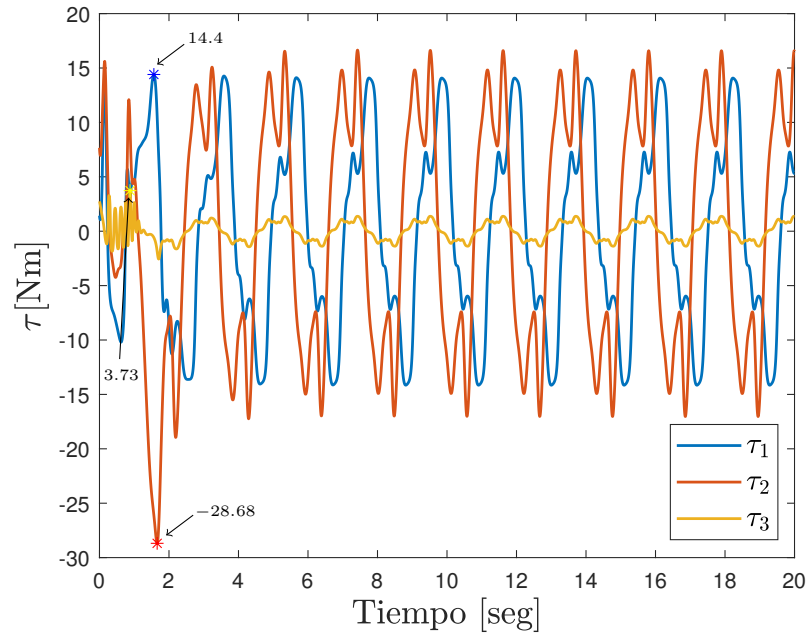
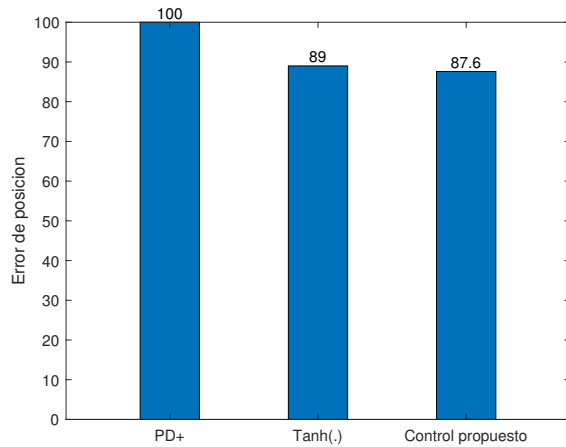
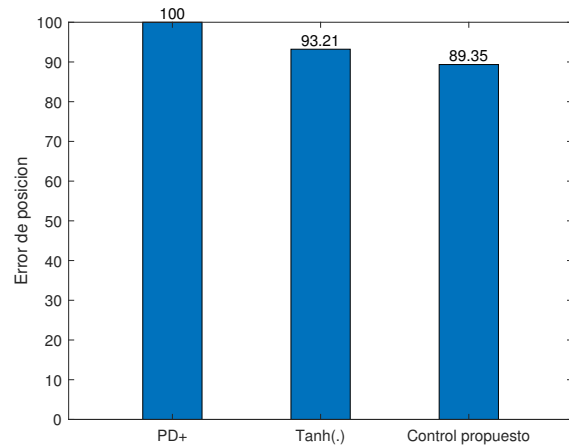


Figura 7.49: Par aplicado - Controlador propuesto hiperbólico.

desempeño es el control propuesto, el cual mejora al PD+ en un 12.4 %. En estado estacionario, en la figura 7.50b la ley de control propuesta también mejora al PD+ en 10.65 %.



(a) Comparación de error en estado transitorio

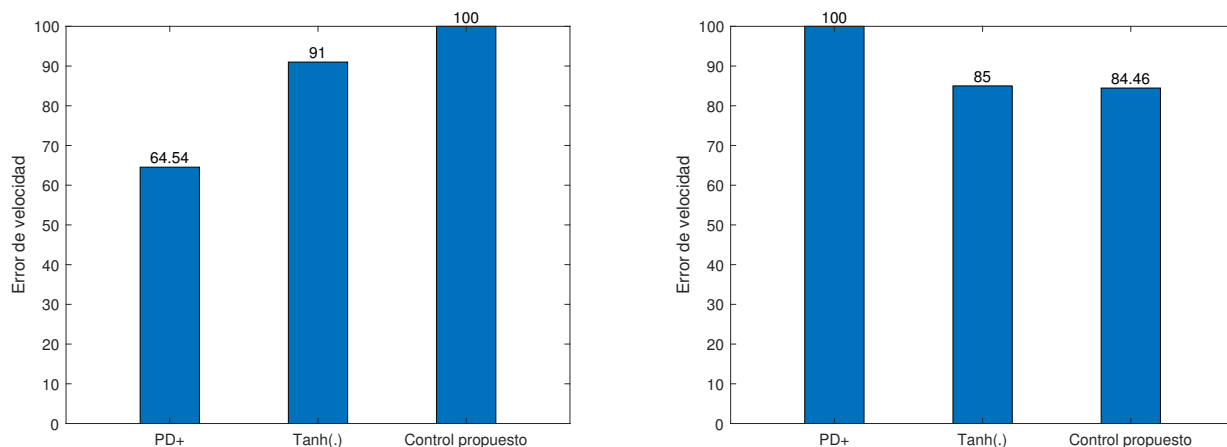


(b) Comparación de error en estado estacionario

Figura 7.50: Norma $\mathcal{L}_2$ - Posición - Control de trayectoria.

En la figura 7.51 se presenta el índice de desempeño de la velocidad para cada uno de los tres controladores. En la figura 7.51a se muestra la norma $\mathcal{L}_2$ en estado transitorio, el algoritmo de control PD+ tiene un índice de desempeño de 64.54 %, lo cual quiere decir que es mejor al control

propuesto en un 35.46 %. Por otro lado en estado estacionario en la figura 7.51b el control propuesto mejora en un 15.54 % al PD+.



(a) Comparación de error en estado transitorio

(b) Comparación de error en estado estacionario

Figura 7.51: Norma $\mathcal{L}_2$ - Velocidad - Control de trayectoria.

El controlador PD+ tiene la limitante que no se puede modificar ningún parámetro mas que las ganancias proporcionales y derivativas, a diferencia de los controladores con acciones acotadas, como son $\tanh(\cdot)$ y el controlador hiperbólico propuesto, estos cuentan con parámetros los cuales pueden ser modificados para dar una respuesta mas o menos rápida para la posición y velocidad. Es por ello que con la correcta selección de ganancias, y considerando las mismas para cada controlador, se obtiene un mejor desempeño en estado transitorio y estado estacionario cuando se calcula el índice de desempeño en posición. Por otro lado, para el índice de desempeño de la velocidad, específicamente en estado transitorio, el controlador PD+ describe un mejor índice de desempeño debido a que los otros dos controladores presentan picos. Esto se debe a la estimación de la velocidad a partir de la posición, es decir los picos que se muestran en estado transitorio afectan la medida del desempeño de los algoritmos de control $\tanh(\cdot)$ y el propuesto. Ya se mostró que ninguno de los servomotores se satura de acuerdo a las gráficas de par aplicado mostradas, adicionalmente haciendo una comparación cualitativa del par aplicado empleando cada uno de los tres controladores se observa que los pares máximos se presentan en el estado transitorio, con distintos valores para cada una de las articulaciones y empleando los tres esquemas de control. Los controladores con acciones acotadas son los que describen menos par para las dos primeras articulaciones, a diferencia de la articulación del codo, esto ocurre debido a que la respuesta de los controladores con acciones acotadas es mas rápida, lo cual conduce a tener pequeñas vibraciones. Por otro lado en estado estacionario, se obtienen gráficas de par similares, es decir picos de igual magnitud al emplear distintos controladores.

CONCLUSIONES

- A través de la mecánica analítica de Euler se obtuvo el modelo dinámico de un manipulador de uno, dos y tres grados de libertad. Para ello fue necesario emplear propiedades ya conocidas, así como también deducir nuevas propiedades, las cuales simplifiquen la factorización para obtener el modelo dinámico de un robot manipulador. Dicha metodología da un formalismo matemático a la metodología para hallar el modelo dinámico ya existentes, partiendo desde la descripción de sistemas de referencia con respecto a otros, empleando la mecánica analítica de Euler, luego se encuentran las componentes de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange y finalmente se obtiene el modelo dinámico. Esta metodología también permite formar nuevos regresores lineales, descritos directamente en función de los parámetros del robot, los cuales son empleados en identificación paramétrica.
- Se propuso una ley de control basada en funciones hiperbólicas y se llevo a cabo el análisis de estabilidad asintótica en el punto de equilibrio del controlador propuesto. En la literatura se encuentra reportado el análisis de estabilidad en controladores conocidos como el PD+ o $\tanh(\cdot)$, los cuales son simples debido a la estructura de dichos esquemas de control. Esto fue una de las motivaciones de proponer un nuevo esquema de control con acciones acotadas, debido a su complejidad se emplearon una serie de propiedades, las cuales permiten simplificar términos para el proceso de demostración de estabilidad asintótica al proponer una función estricta de Lyapunov.
- Se desarrolló un estimador de velocidad, el cual está basado en una función hiperbólica. Se demuestra la convergencia del error de estimación a cero a través de la teoría de Lyapunov, lo cual se comprueba en los experimentos de regulación y trayectoria, empleando dicha extensión dinámica propuesta.
- Se realizaron las pruebas de los distintos algoritmos de control en la plataforma experimental. Específicamente para el problema de regulación se probaron los controladores PD, $\tanh(\cdot)$ y el controlador propuesto con sus distintas versiones. Dichos experimentos demostraron que el error de posición está acotado, es menor a 0.5 grados y no se saturan ninguno de los servomotores. Empleando los tres controladores se obtienen gráficas de par aplicado similares, en frecuencia y amplitud, en estado estacionario. En estado transitorio igualmente se obtienen respuestas similares, sin embargo se observa que solo para las dos primeras articulaciones el par suministrado son menores en los esquemas de control con acciones acotadas.
- Finalmente se realizó la cosimulación en Matlab-MSC Adams del control de trayectoria. Se comparan los algoritmos de control de trayectoria y se obtiene como resultado que el esquema de control propuesto muestra un mejor desempeño solo en tres escenarios, es decir el control

hiperbólico propuesto es el que describe un mejor desempeño en estado estacionario para el control de posición y velocidad y en transitorio para la posición. Para el caso del transitorio en el control de velocidad, el PD+ es aquel que describe un mejor desempeño, esto es debido a los picos que describe la respuesta al comienzo del experimento.

- El modelo virtual del robot manipulador en MSC Adams permitió validar distintos esquemas de control de trayectoria, lo que a su vez se puede extender a experimentos de posición o control de trayectoria punto a punto u otras áreas como el control adaptable, identificación paramétrica, etc, cuando no se cuente con la plataforma física para llevar a cabo los experimentos. Por otro lado, realizar previamente la cosimulación facilita la mayor parte del trabajo hecho en los experimentos en la plataforma física, tales como sintonización de ganancias de los algoritmos de control y evitar saturación de servomotores y comparación de diversas leyes de control.

Apéndice

Apéndice A

La tarjeta de control de la figura 7.52 desarrollada para el manipulador ROTRADI, consiste en una tarjeta Arduino MKR Vidor 4000 empleada para la lectura de los encoders de cada servomotor, la ejecución de las leyes de control y la comunicación serial con una computadora. Adicionalmente se tiene una fuente de voltaje simétrica de $\pm 12\text{v}$.

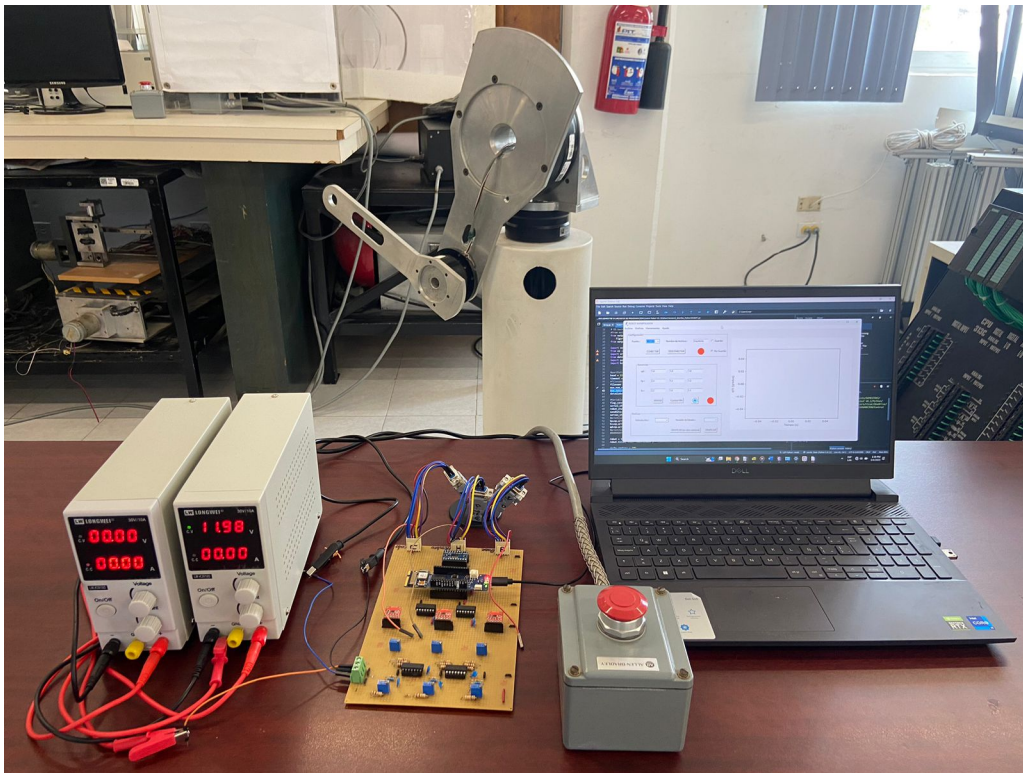


Figura 7.52: Plataforma experimental.

Apéndice B

En este apéndice se presenta parte de los resultados obtenidos durante la realización del presente trabajo de tesis, en materia de partición de eventos científicos y artículos realizados. Estos artículos fueron presentados en el Congreso Internacional de Ingeniería CONIIN 2022 realizado en la Universidad Autónoma de Querétaro. Se presenta la constancia de exposición en dicho congreso.



Apéndice C

Primera página del artículo presentado en las memorias del congreso Internacional de Ingeniería en la Universidad Autónoma de Queretaro.



DYNAMIC MODEL OF A MANIPULATOR ROBOT WITH TWO DEGREES OF FREEDOM USING EULER'S ANALYTICAL MECHANICS

Fabrizio R. Cahuas-Talledo

Facultad de Electrónica, Benemérita Universidad
Autónoma de Puebla. Puebla, México
fabrizio.cahuas@alumno.buap.mx

Pablo Sánchez- Sánchez

Facultad de Electrónica, Benemérita Universidad
Autónoma de Puebla. Puebla, México
pablo.sanchez@correo.buap.mx

Fernando Reyes-Cortés

Facultad de Electrónica, Benemérita Universidad
Autónoma de Puebla. Puebla, México
fernando.reyes@correo.buap.mx

Rodolfo Reyes-Baez

University of Groningen, Holanda
r.reyes-baez@ieee.org

Abstract— In the present work, the dynamic model of a manipulator robot with two degrees of freedom is obtained through Euler's analytical mechanics. The modelling starts with assigning the reference frames, then describing the orientation and position of the end effector with respect to the initial frame through analytic kinematics. The differential kinematics and velocity of each joint are then obtained using properties of the relation of a skew matrix with a rotation matrix. Then the energy model is calculated, formed by the subtraction of the potential and kinetic energy. Finally, with the Euler-Lagrange equations of motion, the dynamic model is obtained with new properties and mathematical representation. With this new dynamic structure of a robot with two degrees of freedom, it is possible to obtain a linear regressor with respect to the parameters of the dynamic model. This advantage affects parametric identification applications and the design of trajectory control algorithms.

Keywords—Euler's analytical mechanics; robot manipulators; energy models; Euler-Lagrange motion equations.

I. INTRODUCTION

Robots today are making a considerable impact on many framaspects of modern life, from industrial manufacturing to healthcare, transportation, and exploration of the deep space and sea. Tomorrow, robots will be as pervasive and personal as personal computers [1]. There are several types of robots with different geometry, these can be classified as: mobile, humanoid and industrial. Specifically, in the group of industrial robots are manipulator robots, which are the best known due to

the wide number of applications they have. Mechanically, a manipulator robot is made up of a series of elements or links joined by joints that allow relative movement between each two consecutive links. The physical constitution of most industrial robots has a certain similarity to the anatomy of the human arm, which is why, sometimes, to refer to the different elements that make up the robot, terms such as body, arm, elbow and wrist are used [2].

Analytic mechanics is the study of (Newtonian) mechanics in its mathematical formalism. It was developed during the 18th-19th century by physicists and mathematicians, such as Euler (1707-1783), D'Alembert (1717-1783), Lagrange (1736-1813), and Hamilton (1805-1865). Analytic mechanics marks an important chapter in the history of physics, since what it does is embed the mechanics of Galilei and Newton in a mathematical formalism, thus giving a more rigorous basis to Newtonian mechanics. Many of the formalisms developed in analytic mechanics turned out to be essential for the advancement of modern physics.

Kinematics today in robotics has been extensively developed thanks to the concepts proposed by Euler. Such is the case where Euler in 1765 shows that 6 coordinates of an object in its three-dimensional space are required, three of position and three of orientation. Three orientation coordinates the minimum representation to understand, develop and analyse the orientation of a rigid body respect to a reference system, this methodology is known as the Euler angles.

Whereas the Euler's kinematic equations describe the motion of the robot without consideration of the forces and

Apéndice D

Se presenta el certificado del examen TOEFL ITP.

TOEFL ITP Score Report			
Name of Institution: BUAP FACULTAD DE LENGUAS		Student Number: 4366	
Name: CAHUAS, FABRIZIO		Times Taken TOEFL: 1	
DOB: 23 May 1995	Sex: M		
Native Country: Peru		Test Date: 08 May 2023	
Native Language: SPA - Spanish		Form: TOEFL ITP Level 1	
Scaled Scores:	Listening Comprehension:	48	
	Structure & Written Expression:	51	
	Reading Comprehension:	58	
	Total Score:	523	

TOEFL ITP

Each page of this document has a security background. The back contains a watermark. Hold at an angle to view.

TOEFL® ITP Assessment Series is designed to be used for placement, progress monitoring, exit purposes. TOEFL® ITP scores can also be used for admissions to programs and institutions where English is not the dominant language of instruction for content courses. Learn more at www.ets.org/toefl_itp/use.

39-16573 • FB122R150 • Printed in U.S.A. I.N. 770462

Copyright © 2012 by Educational Testing Service.

**Student's File Copy
Do Not Copy**

NS = No Score

Bibliografía

- [1] B. Siciliano, O. Khatib, and T. Kröger, *Springer handbook of robotics*, vol. 200. Springer, 2008.
- [2] R. Deotalu and S. Chiddarwar, “Trajectory tracking of the manipulator using adaptive computed torque control,” in *2020 IEEE International Conference for Innovation in Technology (INOCON)*, pp. 1–6, IEEE, 2020.
- [3] S. J. Abbasi, H. Khan, and M. C. Lee, “Robust control design for the accurate trajectory tracking of multi degree of freedom robot manipulator,” in *2021 18th International Conference on Ubiquitous Robots (UR)*, pp. 375–379, 2021.
- [4] T. L. V., S. Huang, Y. V. T., and P. Cuong, “Adaptive trajectory neural network tracking control for industrial robot manipulators with deadzone robust compensator,” *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 18, pp. 2423–2434, 2020.
- [5] M. W. Spong and M. Vidyasagar, *Robot dynamics and control*. John Wiley & Sons, 2008.
- [6] Y. Chunyu, W. Xiao, Z. Xin, and Z. Linna, “Safe trajectory tracking of manipulator based on sliding mode control,” in *2020 7th International Conference on Information, Cybernetics, and Computational Social Systems (ICCSS)*, pp. 353–358, 2020.
- [7] J. Charaja, E. Muñoz-Panduro, O. E. Ramos, and R. Canahuire, “Trajectory tracking control of ur5 robot: a pd with gravity compensation and sliding mode control comparison,” in *2020 International Conference on Control, Automation and Diagnosis (ICCAD)*, pp. 1–5, 2020.
- [8] A. Welabo and G. Tesfamariamr, “Trajectory tracking control of ur5 robot manipulator using fuzzy gain scheduling terminal sliding mode controller,” *Journal of Mechatronics and Robotics*, vol. 4, no. 1, pp. 113–135, 2020.
- [9] X. Ma, Y. Zhao, and Y. Di, “Trajectory tracking control of robot manipulators based on u-model,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2020, pp. 1–10, 2020.
- [10] P. Tomei, “Robust adaptive friction compensation for tracking control of robot manipulators,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 11, pp. 2164–2169, 2000.
- [11] C. Y. W, E. S. Kim, K. C. Lee, and M. , “Tracking control of a robot manipulator using a direct model reference adaptive fuzzy control,” *Proceedings 1999 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Human and Environment Friendly Robots with High Intelligence and Emotional Quotients (Cat. No.99CH36289)*, vol. 1, pp. 100–105 vol.1, 1999.

- [12] D. Koditschek, “Natural motion for robot arms,” in *The 23rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 733–735, IEEE, 1984.
- [13] B. Paden and R. Panja, “Globally asymptotically stable pd+ controller for robot manipulators,” *International Journal of Control*, vol. 47, no. 6, pp. 1697–1712, 1988.
- [14] L. L. Whitcomb, A. A. Rizzi, and D. E. Koditschek, “Comparative experiments with a new adaptive controller for robot arms,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 9, no. 1, pp. 59–70, 1993.
- [15] K. S. Fu, R. Gonzalez, and C. G. Lee, *Robotics: Control Sensing. Vis.* Tata McGraw-Hill Education, 1987.
- [16] J. J. Craig, *Introduction to robotics: mechanics and control*. Pearson Educacion, 2005.
- [17] J. T. Wen and D. S. Bayard, “New class of control laws for robotic manipulators part 1. non-adaptive case,” *International Journal of Control*, vol. 47, no. 5, pp. 1361–1385, 1988.
- [18] S. Gorji and M. J. Yazdanpanah, “A novel robust adaptive trajectory tracking in robot manipulators,” *Journal of Computer & Robotics*, vol. 10, no. 2, pp. 1–10, 2017.
- [19] R. Kelly and V. Santibaez, *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Madrid, España: Pearson Educacion, S. A., 2003.
- [20] G. I. Zamora-Gómez, A. Zavala-Río, E. Vázquez-Ramírez, F. Reyes, and V. Santibáñez, “A robustness study of a finite-time/exponential tracking continuous control scheme for constrained-input mechanical systems: Analysis and experiments,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 30, no. 10, pp. 3923–3944, 2020.
- [21] L. V. Truong, S. D. Huang, V. T. Yen, and P. V. Cuong, “Adaptive trajectory neural network tracking control for industrial robot manipulators with deadzone robust compensator,” *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 18, no. 9, pp. 2423–2434, 2020.
- [22] T. Salloom, X. Yu, W. He, and O. Kaynak, “Adaptive neural network control of underwater robotic manipulators tuned by a genetic algorithm,” *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 97, no. 3, pp. 657–672, 2020.
- [23] M. Cong and T. Zhao, “Active disturbance rejection trajectory tracking control of manipulator based on neural network,” in *2020 Chinese Control And Decision Conference (CCDC)*, pp. 1732–1737, IEEE, 2020.
- [24] R. Singh and L. B. Prasad, “Optimal trajectory tracking of robotic manipulator using ant colony optimization,” in *2018 5th IEEE Uttar Pradesh Section International Conference on Electrical, Electronics and Computer Engineering (UPCON)*, pp. 1–6, IEEE, 2018.
- [25] J. Ohri *et al.*, “Trajectory tracking in a 3-dof robotic manipulator using sliding mode controller,” in *2020 First IEEE International Conference on Measurement, Instrumentation, Control and Automation (ICMICA)*, pp. 1–6, IEEE, 2020.

- [26] J. Tang, P. R. Ouyang, W. Yue, and H. Kang, “Nonlinear pd sliding mode control for robotic manipulator,” in *2017 IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, pp. 1004–1008, IEEE, 2017.
- [27] K. Zeng, M. Wu, X. Lai, *et al.*, “Trajectory tracking for a 3-dof robot manipulator based on pso and adaptive neuro-fuzzy inference system,” in *2016 35th Chinese Control Conference (CCC)*, pp. 973–977, IEEE, 2016.
- [28] E. D. Markus, J. T. Agee, and A. A. Jimoh, “Trajectory control of a two-link robot manipulator in the presence of gravity and friction,” in *2013 Africon*, pp. 1–5, IEEE, 2013.
- [29] S. Gorji and M. J. Yazdanpanah, “A novel robust adaptive trajectory tracking in robot manipulators,” *Journal of Computer & Robotics*, vol. 10, no. 2, pp. 1–10, 2017.
- [30] F. Reyes, *Control de Robots Manipuladores*. 2011.
- [31] F. Reyes, *Matlab aplicado Robotica y Mecatronica*. 2012.
- [32] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, and G. Oriolo, *Robotics-Modelling, Planning nad Control*. Springer, 2009.
- [33] W. Yue, P. R. Ouyang, and M. Tummalapalli, “Pd with terminal sliding mode control for trajectory tracking,” in *2020 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, pp. 1400–1405, IEEE, 2020.
- [34] J. J. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*. New Jersey, USA.: Prentice Hall, 1991.
- [35] S. Sastry, *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*. New York, USA.: Springer Verlag, 1999.
- [36] J. C. Sernaque-Julca, “Control adaptable de robots manipuladores,” Master’s thesis, BUAP, Mexico, 2022.
- [37] A. C. Antoulas, *Mathematical system theory: the influence of RE Kalman*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [38] R. E. Kalman, “A new approach to linear filtering and prediction problems,” 1960.
- [39] G. J. Bierman, “A comparison of discrete linear filtering algorithms,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, no. 1, pp. 28–37, 1973.
- [40] R. E. Kalman and J. Bertram, “General synthesis procedure for computer control of single-loop and multiloop linear systems (an optimal sampling system),” *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part II: Applications and Industry*, vol. 77, no. 6, pp. 602–609, 1959.
- [41] R. E. Kalman, “On the general theory of control systems,” in *Proceedings First International Conference on Automatic Control, Moscow, USSR*, pp. 481–492, 1960.
- [42] K. Ogata *et al.*, *Modern control engineering*, vol. 5. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2010.

- [43] L. L. Torkel Glad, *Control Theory: Multivariable and Nonlinear Methods*. CRC Press, 1 ed., 2000.
- [44] J. Primbs, “Survey of nonlinear observer design techniques,” *Penn State Notes*, vol. 1, no. 1, pp. 1–18, 1996.
- [45] E. Cruz-Zavala, J. A. Moreno, and L. M. Fridman, “Diferenciador robusto exacto y uniforme,” *sign ($\sigma 0$)*, vol. 2, no. 3, p. 2, 2010.
- [46] C. Canudas de Wit and J.-J. Slotine, “Sliding observers for robot manipulators,” *Automatica*, vol. 27, no. 5, pp. 859–864, 1991.
- [47] A. Alcocer, A. Robertsson, A. Valera, and R. Johansson, “Force estimation and control in robot manipulators,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 36, no. 17, pp. 55–60, 2003.
- [48] J. C. Martínez-Rosas, M. A. Arteaga, and A. M. Castillo-Sánchez, “Decentralized control of cooperative robots without velocity–force measurements,” *Automatica*, vol. 42, no. 2, pp. 329–336, 2006.
- [49] J. Moreno and R. Kelly, “On motor velocity control by using only position measurements: two case studies,” *International Journal of Electrical Engineering Education*, vol. 39, no. 2, pp. 118–127, 2002.
- [50] P. Sánchez-Sánchez, A. Gutierrez-Giles, J. Pliego-Jimenez, and M. Arteaga-Perez, “Seguimiento de trayectorias con incertidumbre del modelo usando un diferenciador robusto,” *Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica.*, vol. 16, no. 4, pp. 423–434, 2019.
- [51] J. C. Martinez-Rosas and M. A. Arteaga, “Force and velocity observers for the control of cooperative robots1,” *Robotica*, vol. 26, no. 1, pp. 85–92, 2008.
- [52] E. Ortis-Ortis, “Identificación paramétrica de robots manipuladores,” Master’s thesis, BUAP, Mexico, 2022.
- [53] L. Haitao, L. Yuwang, C. Zhengcang, and Y. Leng, “Co-simulation control of robot arm dynamics in adams and matlab,” *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology*, vol. 6, pp. 3778–3783, 10 2013.