



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"

**"RAZÓN DE EVAPORACIÓN DE GOTAS
LEIDENFROST"**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN CIENCIAS
(FÍSICA)**

PRESENTA

JESÚS ISRAEL MORÁN CORTÉS

DIRECTORES DE TESIS
**DR. FELIPE PACHECO VÁZQUEZ
DR. RENÉ LEDESMA ALONSO**

No. de CVU: 1079089

OCTUBRE DE 2022

Universidad Autónoma de Puebla
Instituto de Física “Luis Rivera Terrazas”

Razón de evaporación de gotas Leidenfrost

Tesis presentada por

Jesús Israel Morán Cortés

para obtener el grado de

**Maestría en Ciencias
(Física)**

Dirigida por

Dr. Felipe Pacheco Vázquez y Dr. René Ledesma Alonso

Puebla, México

Octubre 2022

©2022 - Jesús Israel Morán Cortés

Derechos Reservados

Agradecimientos

Agradezco a Dios por colmarme con tantas bendiciones.

Agradezco a mi mamá Rocío Cortés y a mi papá Héctor Morán por su gran amor y apoyo incondicional durante toda mi vida, y a mi querido hermano Miguel Morán por su afecto, confianza y lealtad.

Agradezco a mis amigos por su motivación, su confianza, su apoyo y por haber compartido estos años de vida conmigo, en particular a mi colega Martín Aguilar por su apoyo en las discusiones sobre este trabajo.

Agradezco a mis profesores a lo largo de mi vida estudiantil por compartir sus conocimientos, en particular a mis asesores Dr. Felipe Pacheco y Dr. René Ledesma por guiarme en el presente trabajo y por su continua motivación.

Agradezco a CONACyT por la beca otorgada para realizar mis estudios de maestría y a los trabajadores del ISSSTEP por atenderme y permitirme seguir con mi vida.

Dedico este trabajo a mi familia.

Razón de evaporación de gotas Leidenfrost

Resumen

Este trabajo abordó el tema del efecto Leidenfrost que ha tenido gran interés en los últimos años, debido a la controversia en la literatura sobre el comportamiento de la razón de evaporación en gotas Leidenfrost y a la ausencia de experimentos para mostrar su evolución completa.

El propósito principal fue conocer la razón de evaporación analítica y experimentalmente. Por tal motivo, se planteó una metodología enfocada en determinar la dinámica del volumen y radio máximo a través del tiempo de gotas Leidenfrost estacionarias. La explicación de la perspectiva teórica se basó en un modelo realizado en nuestro grupo para estudiar la evaporación de una gota Leidenfrost estacionaria con base en la temperatura del plato caliente y las propiedades termofísicas del fluido y, por otro lado, el diseño y desarrollo experimentales fueron realizados en laboratorios ubicados en Ecocampus BUAP; mientras que el método de análisis se basó en códigos de ImageJ y MATLAB, donde hacemos uso de una técnica de extracción de fondo en el procesamiento de imágenes en videos de la evolución completa de las gotas.

De acuerdo con nuestros resultados, se determinó una expresión analítica de la razón de evaporación y, las funciones de volumen y radio máximo se calcularon de manera numérica y experimental para seis líquidos. Sin embargo, a diferencia de las gotas Leidenfrost de agua y cloroformo, únicamente la evaporación de las gotas Leidenfrost de acetona, etanol, hexano y metanol se asemejan al modelo teórico.

Evaporation rate of Leidenfrost drops

Abstract

In this work we addressed the Leidenfrost effect which has had great interest in the last years, due to controversy in the literature about the evaporation rate behavior of Leidenfrost drops and the absence of experiments in order to show the complete evolution.

The central objective was to study the evaporation rate analytically and experimentally. For this reason, it was proposed a methodology focused on determine the dynamics of volume and maximum radius of stationary Leidenfrost drops through time. The theoretical interpretation was constructed on a model made in our work group to study the evaporation of a stationary Leidenfrost drop based on the hot plate temperature and the thermophysical properties of the fluid. In addition, the experimental design was made on laboratories located in Ecocampus BUAP; whereas the method of analysis was based on programming codes of ImageJ and MATLAB, where we make use of a background extraction technique in the image processing of videos of the complete evolution of drops.

According to our results, an analytic expression of evaporation rate was determined, whereas functions of volume and maximum radius were calculated numerically and experimentally. However, except for water and chloroform drops on Leidenfrost state, the evaporation of acetone, ethanol, hexane and methanol are close to the theoretical model.

Contenido

Lista de Figuras	xii
Lista de Tablas	xiv
Introducción	1
1 Conceptos fundamentales	5
1.1 Tensión superficial	5
1.2 Presión de Laplace	7
1.3 Longitud capilar	8
1.4 Contacto entre gota y sustrato	8
1.4.1 Ángulo de contacto	8
1.4.2 Ecuación de Young-Laplace	9
1.4.3 Tamaños de gotas	10
1.5 Ecuaciones de conservación	11
1.5.1 Ecuación de conservación de masa	12
1.5.2 Ecuación de conservación de cantidad de movimiento	12
1.5.3 Ecuación de conservación de energía	13
2 Antecedentes	15
2.1 Temperatura de Leidenfrost	16
2.2 Perfil transversal de gota Leidenfrost	17
2.3 La razón de evaporación	18
2.3.1 Mecanismos de evaporación	19
2.3.2 Modelos y experimentos previos	20
3 Marco teórico	23
3.1 Gota sésil con humectación nula	23
3.2 Sistema de ecuaciones adimensionales	25
3.3 Sistema con transformadas de Hankel	29
3.4 Solución del sistema	31
3.5 Evaporación	35
3.5.1 Capa de vapor	36
3.5.2 Hemisferio inferior	37
3.5.3 Hemisferio superior	38

3.6	Peso de la gota y la presión del vapor	40
3.7	Evolución del volumen a través del tiempo	41
4	Experimentos	43
4.1	Diseño y desarrollo experimental	43
4.2	Procesamiento de imágenes	46
4.2.1	Vista superior	46
4.2.2	Vista lateral	48
4.3	Resultados experimentales	51
4.3.1	Vista superior	51
4.3.2	Vista lateral	58
5	Comparación entre modelo y experimento	68
	Conclusiones	73
A	Ecuación de Young - Laplace	75
B	Ecuaciones de conservación	80
B.1	Ecuación de conservación de masa	80
B.1.1	Teorema de Transporte de Reynolds	81
B.1.2	Ecuación del flujo de masa	82
B.2	Ecuación de conservación de cantidad de movimiento	82
B.3	Ecuación de la energía mecánica	85
B.4	Ecuación de conservación de la energía interna	85
C	Propiedades de transformada de Hankel	88
D	Número de Sherwood	90
D.1	Difusión pura	90
D.2	Difusión mas flujo de Stefan por convección	92
E	Programas	94
E.1	Macro en ImageJ	94
E.2	Función <i>medicion.m</i>	95
E.3	Programa principal <i>evaporacion.m</i>	96
F	Experimentos con la vista superior	100
G	Experimentos con la vista lateral	105
	Bibliografía	108

Lista de Figuras

1.1	Fuerzas intermoleculares en tensión superficial	6
1.2	Sobrepresión en gota esférica	7
1.3	Ángulo de contacto	9
1.4	Regímenes de gotas cuasi estacionarias	10
1.5	Radio de contacto	10
2.1	Gota cilíndrica de Leidenfrost (panqué)	15
2.2	Tiempo de vida contra la temperatura (Biance et al.)	16
2.3	Tiempo de vida contra la temperatura (Pacheco et al.)	16
2.4	Perfil transversal de gota Leidenfrost	18
2.5	Evaporación en dos regímenes de gotas Leidenfrost	19
2.6	$R(t)$ de gota Leidenfrost de agua (Biance, et al.)	20
2.7	$A(t)$ y $D(t)$ de gota Leidenfrost de agua (Orzechowski)	21
2.8	$D(t)$ de gota Leidenfrost para diferentes líquidos (Pacheco et al.)	22
3.1	Esquema de gota Leidenfrost	24
3.2	Diagrama de evaporación sobre toda la superficie.	35
4.1	Diagrama del plato metálico	43
4.2	Diseño del arreglo experimental	44
4.3	Interfaz de Calculator Plus	46
4.4	Vista superior de gota Leidenfrost de agua	47
4.5	Vista lateral de gota Leidenfrost de agua	48
4.6	División de contorno del perfil de una gota	49
4.7	$P(t)$, $A(t)$ y $r(t)$ de gotas Leidenfrost para seis líquidos	52
4.8	Vista superior de gotas Leidenfrost para cinco líquidos	53
4.9	$r(t)$ de gota Leidenfrost de metanol con ajustes de datos	54
4.10	$P(t)$, $A(t)$, A_T , $r(t)$ y R_T de gotas Leidenfrost de etanol	55
4.11	Radio de transición R_T de etanol	56
4.12	Evaporación de gota Leidenfrost de agua	58
4.13	$r_{\max}(t)$ y $r_{\max}(V)$ de gota Leidenfrost de agua	59
4.14	$Bo(t)$ de gotas Leidenfrost para seis líquidos	61
4.15	$\eta_b(t)$ y $\xi_{\max}(t)$ de gotas Leidenfrost para seis líquidos	61
4.16	$r_{\max}(t)$ de gotas Leidenfrost para cinco líquidos con ajustes de datos	63

4.17	$V(t)$, $r_{\max}(t)$ y $(z_H - z_h)(t)$ de gota Leidenfrost de acetona	64
4.18	$V(t)$, $r_{\max}(t)$ y $(z_H - z_h)(t)$ de gota Leidenfrost de etanol	64
4.19	Perfiles de gotas Leidenfrost para seis líquidos	65
4.20	Vista lateral y superior. Evaporación de gota Leidenfrost de isopropanol a $T_p = 300^\circ \text{C}$	66
4.21	Perfil transversal y vista superior de una gota de isopropanol	67
4.22	$r(t)$ de gota Leidenfrost de isopropanol	67
5.1	Comparación. Modelo y experimento de acetona	70
5.2	Comparación. Modelo y experimento de agua	70
5.3	Comparación. Modelo y experimento de cloroformo	71
5.4	Comparación. Modelo y experimento de etanol	71
5.5	Comparación. Modelo y experimento de hexano	72
5.6	Comparación. Modelo y experimento de metanol	72
D.1	Difusión pura	90
D.2	Difusión mas un flujo de Stefan convectivo	92
F.1	Vista superior. Evaporación de gota Leidenfrost de acetona	100
F.2	Vista superior. Evaporación de gota Leidenfrost de agua	100
F.3	Vista superior. Evaporación de gota Leidenfrost de cloroformo	101
F.4	Vista superior. Evaporación de gota Leidenfrost de etanol	101
F.5	Vista superior. Evaporación de gota Leidenfrost de hexano	101
F.6	Vista superior. Evaporación de gota Leidenfrost de metanol	101
F.7	Vista superior. Evaporación de gotas Leidenfrost de etanol a $T_p = 150^\circ \text{C}$.	102
F.8	Vista superior. Evaporación de gotas Leidenfrost de etanol a $T_p = 250^\circ \text{C}$.	103
F.9	Vista superior. Evaporación de gotas Leidenfrost de etanol a $T_p = 350^\circ \text{C}$.	104
G.1	Vista lateral. Evaporación de gota Leidenfrost de acetona a $T_p = 250^\circ \text{C}$. .	105
G.2	Vista lateral. Evaporación de gota Leidenfrost de cloroformo a $T_p = 250^\circ \text{C}$.	105
G.3	Vista lateral. Evaporación de gota Leidenfrost de etanol a $T_p = 250^\circ \text{C}$. . .	106
G.4	Vista lateral. Evaporación de gota Leidenfrost de hexano a $T_p = 250^\circ \text{C}$. .	106
G.5	Vista lateral. Evaporación de gota Leidenfrost de metanol a $T_p = 250^\circ \text{C}$. .	106
G.6	Vista lateral. Evaporación de gota Leidenfrost de acetona a $T_p = 300^\circ \text{C}$. .	106
G.7	Vista lateral. Evaporación de gota Leidenfrost de etanol a $T_p = 300^\circ \text{C}$. .	107
G.8	Vista lateral. Evaporación de gota Leidenfrost de hexano a $T_p = 300^\circ \text{C}$. .	107

Lista de Tablas

4.1	Propiedades termofísicas de algunos líquidos	51
4.2	Vista superior. Tiempo de vida y valores de ajuste $r(t)$ de seis líquidos . . .	54
4.3	Vista lateral. Tiempos de vida y valores de ajuste $r(t)$ de etanol para tres temperaturas	57
4.4	Vista lateral. Tiempos de vida y valores de ajuste $r(t)$ de seis líquidos . . .	62

Introducción

El efecto Leidenfrost consiste en la levitación de una gota sobre una fina capa de vapor cuando un líquido volátil entra en contacto con un sólido caliente a una temperatura mayor a la temperatura de Leidenfrost. Las primeras observaciones de este efecto se realizaron hace más de 250 años, pero en la actualidad, se conocen varios fenómenos relacionados con las gotas en estado Leidenfrost, ya que las gotas tienen oscilaciones que modifican su forma, presentan un movimiento autopropulsado cuando el sólido tiene una textura asimétrica o puede existir la coalescencia entre dos gotas Leidenfrost.

La dinámica de gotas Leidenfrost con un enfoque cuasiestático para el radio y el grosor de la capa de vapor fue desarrollado por primera vez en el estudio de Biance et al. [1].

$$R(t) = R_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n, \quad h(t) = h_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^m,$$

donde τ es el tiempo de vida de la gota y h_0 es el grosor inicial de la capa de vapor, los cuales están relacionados con el radio inicial de la gota R_0 , la temperatura del sólido caliente T_p y las propiedades termofísicas del líquido. Si el radio es superior a la longitud capilar, entonces $n = 2$ y $m = n/2$, pero si el radio es inferior a la longitud capilar, esto implica que $n = 1/2$ y $m = 4n/3$. No obstante, el tiempo de vida τ y el grosor inicial h_0 de la capa de vapor tienen definiciones diferentes según el tamaño de la gota.

El estudio del efecto Leidenfrost ha sido de gran interés en los últimos años, debido a muchas de las aplicaciones para reducir la fricción, la microfluídica o las técnicas de enfriamiento, pero carece de un modelo preciso de la evolución completa de las gotas. Por tal motivo, conocer la razón de evaporación de los líquidos es esencial para su estudio, el cual tiene lugar por medio de la dinámica del volumen o del radio máximo con respecto al tiempo de gotas Leidenfrost estacionarias.

Objetivos generales

El presente trabajo está enfocado en determinar una expresión analítica de la razón de evaporación, la cual está dada por el cambio de masa con respecto al tiempo ($-\dot{m}$) donde el signo negativo representa pérdida de masa y, a partir de su solución numérica, calcular las funciones de volumen (V) y radio máximo (r_{\max}) para compararlas con datos experimentales de diferentes líquidos.

Objetivos particulares

Los objetivos particulares son los siguientes: 1) realizar una investigación sobre los conceptos generales de la Física de Fluidos y la bibliografía existente acerca del efecto Leidenfrost, 2) desarrollar el modelo teórico elaborado en nuestro grupo y comprender qué nos dice sobre el análisis de la dinámica de evaporación de gotas Leidenfrost, 3) construir un arreglo experimental para obtener videos de diferentes vistas de la gota con siete líquidos diferentes, 4) medir el perímetro $P(t)$, el área $A(t)$, el volumen $V(t)$ y el radio máximo $r_{\max}(t)$ de las gotas Leidenfrost usando el análisis de imágenes que nos brindan programas como ImageJ o MATLAB y 5) comparar el modelo con los datos experimentales.

Hipótesis

La velocidad de retracción difiere en cada uno de los distintos regímenes de las gotas Leidenfrost; a saber, cuando tiene modos de oscilación o cuando está estacionaria sin modos de oscilación aparentes, donde se ha diferenciado entre gotas en forma de panqué y gotas semi-esféricas.

Entonces una función de tipo ley de potencias no es suficiente para predecir la evolución completa de las gotas Leidenfrost a través del tiempo y, como resultado, se pretende dar una solución numérica con base en un modelo teórico y experimentos con distintos líquidos solo en el régimen cuasi estacionario de gotas Leidenfrost; ya que estas pueden presentar modos de oscilación en forma de estrellas e inclusive autopropulsarse.

Todo esto debido a la controversia en la literatura por la ausencia de un modelo preciso y datos experimentales para mostrar su comportamiento completo en periodos prolongados de tiempo.

Estructura

Nuestro estudio consta de cinco grandes bloques. En el primer capítulo presentamos una revisión de los conceptos fundamentales de la Física de Fluidos como la tensión superficial, la presión de Laplace, la longitud capilar, el contacto entre una gota y un sustrato, y las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos. En el segundo capítulo se introducen los antecedentes del efecto Leidenfrost, así como los mecanismos de evaporación en el perfil transversal de las gotas y, algunos modelos y experimentos previos.

En el tercer capítulo se expone el marco teórico donde se deduce el modelo elaborado en nuestro grupo desde las consideraciones de gotas no humectantes y fluidos incompresibles en el régimen estacionario aplicadas a las ecuaciones de conservación. Aquí, se propone una solución en términos de cantidades adimensionales utilizando las condiciones de frontera necesarias para obtener los diferentes mecanismos de evaporación en toda la superficie de la gota y, finalmente, conseguir una evolución completa del volumen a través del tiempo y la razón de evaporación de gotas Leidenfrost estacionarias.

En el cuarto capítulo se muestran los experimentos, el diseño y el desarrollo experimental, el algoritmo del procesamiento de imágenes de las diferentes vistas de la gota, así como los resultados experimentales tanto de la vista superior (perímetro, área y radios efectivos, funciones de ajuste, radio de transición) como de la vista lateral (volumen, posiciones radiales, posiciones axiales, funciones de ajuste) y se incluyen imágenes para ilustrar la forma de la gota en cada vista de cada líquido utilizado. Finalmente, el quinto capítulo consta de la comparación entre el modelo y el experimento por dos medios, usando un número adimensional en términos del volumen (llamado número de Bond) contra un tiempo adimensional y, por otro lado, usando el radio máximo como función del tiempo. Sin embargo, la razón de evaporación está implícita en el comportamiento del número de Bond y no se añade en las gráficas del último capítulo.

En los apéndices se incluye información complementaria útil para una mejor comprensión del trabajo desarrollado en esta tesis. En el Apéndice A se deriva la ecuación de Young-Laplace, la cual es fundamental para conocer la geometría de la gota no humectante. En el Apéndice B se obtienen cada una de las ecuaciones de conservación desde el teorema de transporte de Reynolds. En el Apéndice C se verifican algunas propiedades de la transformada de Hankel que son útiles para resolver el sistema de ecuaciones en derivadas parciales del modelo presentado en el Capítulo 3. En el Apéndice D se deduce el número

de Sherwood en términos del número de Spalding utilizado en la evaporación del hemisferio superior de la gota por difusión en el aire escrito en el Capítulo 3. En el Apéndice E se escriben los programas realizados en ImageJ y MATLAB para analizar los videos de gotas Leidenfrost. Por último, los datos experimentales se muestran explícitamente en los Apéndices F y G.

Capítulo 1

Conceptos fundamentales

El tema principal de esta tesis está directamente relacionada con la capilaridad (propiedad física de fluidos inmiscibles que estudia las interfaces entre líquido-líquido o líquido-gas, pero estas son deformables con la finalidad de minimizar su energía superficial, [2]), la dinámica de fluidos y fenómenos de transferencia de calor y, por tal motivo, en este capítulo inicial se hace una revisión sintetizada de algunos conceptos fundamentales y relevantes para este trabajo.

1.1 Tensión superficial

Considere la interfaz líquido-gas y dos moléculas como se muestran en la Figura 1.1. En términos de fuerzas intermoleculares, se puede analizar las fuerzas actuando sobre las moléculas de la superficie y en el interior del líquido. Las fuerzas intermoleculares en el interior del líquido se contrarrestan entre sí y esto provoca que cada una de las moléculas esté sometida a una fuerza resultante nula, pues ejerce y recibe una fuerza en todas direcciones debido a sus demás moléculas vecinas del mismo líquido. No obstante, si la molécula se encuentra en la vecindad de la interfaz líquido-gas, pierde aproximadamente la mitad de sus interacciones cohesivas y la fuerza de cohesión neta es perpendicular a la superficie con dirección hacia el interior del líquido; ya que las fuerzas de atracción entre las moléculas líquido-gas son despreciables comparadas con las fuerzas de cohesión entre las moléculas del líquido. El origen puede comprenderse a escala microscópica en vista de las fuerzas intermoleculares en el líquido, pero la tensión superficial es un parámetro macroscópico y una medida directa del déficit de energía por unidad de área superficial, [2].

Claramente, las moléculas en la vecindad de la interfaz líquido-gas y las moléculas en el interior del líquido tienen condiciones diferentes de energía, pero las primeras tienen una energía promedio mayor que las segundas. Entonces, la energía superficial se define como la diferencia entre la energía de todas las moléculas en la capa superficial y la energía que tendrían si estuvieran en el interior del líquido. Por esta razón, el número de moléculas en la interfaz tiende a disminuir de tal manera que adaptan una forma específica para minimizar la energía total. En consecuencia, la tensión superficial σ es la cantidad de

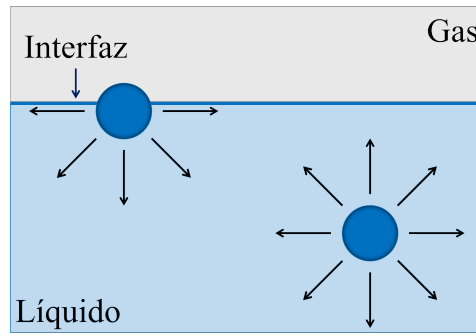


Figura 1.1: Fuerzas actuando sobre moléculas en la vecindad de la interfaz líquido-gas y en el interior del líquido, respectivamente.

energía suministrada para aumentar la superficie en una unidad de área y, puede escribirse en términos de la energía libre F y el área superficial A , la cual está dada por:

$$\sigma = \left(\frac{\partial F}{\partial A} \right) \Big|_{T,V,n}, \quad (1.1)$$

donde n es el número de moléculas, V es el volumen total y T es la temperatura.

Asimismo, si consideramos un sistema caracterizado por su área superficial A y su volumen V , entonces conviene utilizar el gran potencial canónico Ω escrito de la siguiente manera:

$$\Omega = F - n\mu = -pV + \sigma A, \quad (1.2)$$

donde F es la energía libre y μ es un potencial químico fijo. La ecuación (1.2) se cumple al considerar la contribución del trabajo requerido para aumentar la superficie de un líquido, $W = \sigma A$.

Por consiguiente, el gran potencial canónico será de utilidad para sistemas caracterizados por su área superficial A y su volumen V , donde la tensión superficial σ es relevante para las propiedades termofísicas de los fluidos consideradas en este estudio.

1.2 Presión de Laplace

En el interior de las gotas, existe una sobrepresión originada por la tensión superficial. Un cambio de presión se produce al atravesar una superficie curva y su generalización para cualquier superficie está dado por el *Teorema de Laplace*: *el incremento en la presión hidrostática ΔP producido al atravesar el límite entre dos fluidos es igual al producto de la tensión superficial σ y la curvatura de la superficie $C = R_1^{-1} + R_2^{-1}$, [2]. Este teorema está dado por:*

$$\Delta P = \sigma C = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (1.3)$$

donde R_1 y R_2 son los radios de curvatura.

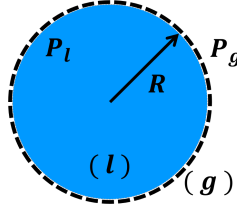


Figura 1.2: Sobrepresión en el interior de gota esférica de un líquido rodeada por algún gas.

Un caso particular es una gota de algún líquido rodeado por un gas como se muestra en la Figura 1.2, donde la interfaz líquido-gas se representa con la línea punteada en color negro. En ciertas condiciones, que discutiremos en capítulos posteriores, una gota de algún líquido puede adoptar una forma esférica de radio R , y cuando $R_1 = R_2 = R$, entonces la ecuación (1.3) se reduce a la siguiente expresión:

$$\Delta P = P_l - P_g = \frac{2\sigma_{lg}}{R}, \quad (1.4)$$

donde σ_{lg} es la tensión superficial entre el líquido y el gas. Note que la relación (1.4) se puede obtener minimizando el gran potencial $\Omega_{lg} = \sigma_{lg}A - p_l V_l - p_g V_g$ y dicha relación nos dice que la sobrepresión aumenta al disminuir el radio R en gotas esféricas.

En consecuencia, se debe obtener la curvatura de la superficie C de una gota para aplicar el teorema de Laplace y poder relacionarla con las propiedades termofísicas de los fluidos como la sobrepresión ΔP y la tensión superficial σ .

1.3 Longitud capilar

La longitud capilar, denotada por λ_c , surge cuando la presión hidrostática y la presión de Laplace están en equilibrio entre sí. Si la curvatura de la superficie es $C = R^{-1}$, entonces la presión de Laplace (1.3) se reduce a $\Delta P_L = \sigma R^{-1}$ donde σ es la tensión superficial; mientras que la presión hidrostática es $\Delta P_h = \rho g R$ donde ρ es la densidad, g es la aceleración de la gravedad y R es la altura del fluido.

De esta manera, la longitud capilar está definida cuando se igualan ambas presiones evaluadas en $R = \lambda_c$, es decir, cuando las presiones son del mismo orden de magnitud.

$$\Delta P_L (R = \lambda_c) = \Delta P_h (R = \lambda_c) \quad (1.5)$$

Entonces

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}, \quad (1.6)$$

donde σ es la tensión superficial, ρ es la densidad y g es aceleración de la gravedad.

En general, la longitud (1.6) es del orden de milímetros. Observamos que si el objeto es más grande que la longitud capilar ($R > \lambda_c$), entonces la fuerza debida a la gravedad vence sobre las fuerzas superficiales; en cambio, las fuerzas debidas a la tensión superficial dominan sobre el peso cuando el objeto es más pequeño a la longitud capilar del líquido ($R < \lambda_c$). Así, la longitud capilar λ_c funciona como un parámetro de comparación para los diferentes tamaños de las gotas.

1.4 Contacto entre gota y sustrato

Imagine un líquido cualquiera y deposite una gota sobre un sustrato. Evidentemente, el gas alrededor de la gota interactúa con el líquido en su superficie, pero la gota tendrá diferentes comportamientos dependiendo de la cantidad del líquido depositado, el material y el ángulo de inclinación del sustrato.

1.4.1 Ángulo de contacto

El ángulo de contacto surge en la línea de contacto entre tres fases y ayuda a entender los diferentes regímenes de humectación entre el sustrato (sólido) y dos fluidos inmiscibles (líquido-gas). Ver Figura 1.3.

Así, hay tres posibles situaciones de mojado que pueden presentarse de acuerdo con el ángulo de contacto. Entre ellas se encuentran las siguientes: la humectación total es un buen mojado que ocurre cuando la gota se propaga casi por completo ($\theta > \pi/2$), la humectación nula surge cuando la gota tiene una mínima superficie de contacto ($\theta = 0$) y la humectación parcial se presenta en un mal mojado ($\theta < \pi/2$).

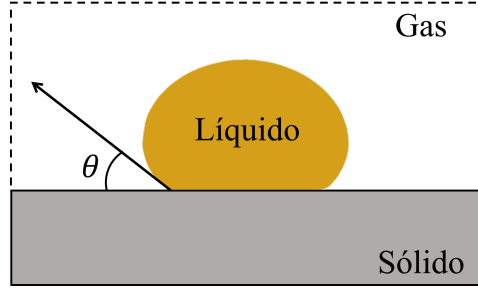


Figura 1.3: Esquema del ángulo de contacto para una gota sobre un sustrato.

1.4.2 Ecuación de Young-Laplace

Incluso en la situación de la humectación nula, el peso de la gota, el gas alrededor de ella y la tensión superficial del líquido utilizado influyen en la forma de la gota. Pero en equilibrio, la energía superficial de la gota debe ser mínima, mientras que su volumen está restringido a un valor fijo, V . El perfil de la gota puede describirse en términos de la coordenada radial $r(z)$ como función de la coordenada vertical z de la gota para deducir la llamada *Ecuación de Young-Laplace* que es obtenida en el Apéndice A utilizando un sistema de coordenadas cilíndricas (donde se ha seguido el procedimiento descrito en [2]). Esta ecuación está dada por:

$$\frac{1}{r [1 + (\dot{r})^2]^{1/2}} - \frac{\ddot{r}}{[1 + (\dot{r})^2]^{3/2}} = \frac{\Delta P_0}{\sigma} + \frac{z_H - z}{\lambda_c^2}, \quad (1.7)$$

donde λ_c es la longitud capilar, σ es la tensión superficial del fluido y ΔP_0 es la sobrepresión dentro de la gota en su parte superior, z_H . En el Apéndice A, también se deduce la ecuación de Young-Laplace en términos de cantidades adimensionales que está dada por:

$$\frac{1}{\xi [1 + (\dot{\xi})^2]^{1/2}} - \frac{\ddot{\xi}}{[1 + (\dot{\xi})^2]^{3/2}} = \kappa_0 + \eta, \quad (1.8)$$

donde $r = \lambda_c \xi$ y $z_H - z = \lambda_c \eta$ con una constante $\kappa_0 = (\lambda_c \Delta P_0) / \sigma$ para imponer el volumen de la gota.

1.4.3 Tamaños de gotas

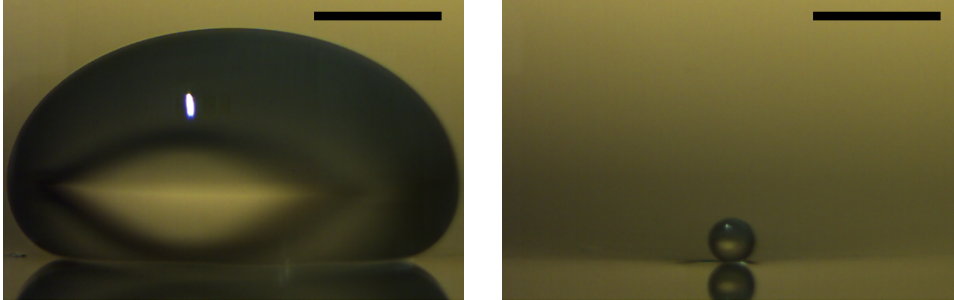
(a) Gota grande ($R \gg \lambda_c$).(b) Gota pequeña ($R \ll \lambda_c$).

Figura 1.4: Vista lateral de los tamaños de gotas de agua cuasi estacionarias en estado Leidenfrost. La barra de escala mide 2.5 mm.

Claramente la gota de agua en la Figura 1.4a tiene un tamaño mucho mayor a su longitud capilar, entonces adopta una forma de "panqué" debido a que su peso vence a las fuerzas superficiales. Sin embargo, la gota de agua en la Figura 1.4b tiene un tamaño mucho menor a su longitud capilar y, mantiene una forma semi-esférica porque la energía superficial domina sobre su energía potencial. (El agua tiene una longitud capilar de $\lambda_c = 2.52$ mm.)

Sin embargo, las Figuras 1.4 están aplanadas en su base debido a su propio peso, el cual desplaza su centro de masa una distancia δ y, en el régimen no humectante, Mahadevan and Pomeau propusieron que el radio de contacto (r_b) está relacionado con el radio efectivo de la gota (R) de acuerdo con la relación $r_b \sim \sqrt{R\delta}$, [3].

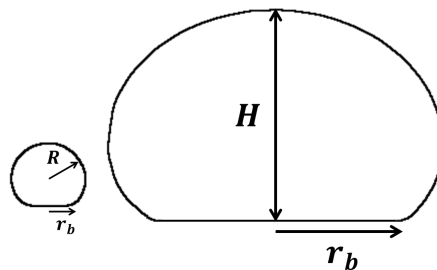


Figura 1.5: Diagramas de gotas no humectantes con radio de contacto r_b en los regímenes cuasi estacionarios $R \ll \lambda_c$ y $R \gg \lambda_c$, respectivamente.

La Figura 1.5 muestra los diagramas de dos gotas no humectantes donde se señala la ubicación de sus radios de contacto en los regímenes semi-esférico con un radio efectivo R y en forma de panqué con un grosor H de la gota, respectivamente. Al considerar la

gota como una esfera de radio R aplanada sobre una superficie de radio r_b en el régimen no humectante, se ha demostrado que $r_b = r_b(R)$ está dado por:

$$r_b = \begin{cases} \alpha R^2 \lambda_c^{-1} & \text{si } R < \lambda_c \\ \alpha (R^3 \lambda_c^{-1})^{1/2} & \text{si } R > \lambda_c \end{cases}, \quad (1.9)$$

donde $\alpha = (1.5)^{-1/2} \approx 0.81$ teóricamente indicado en [3–6], pero $\alpha = 0.79$ obtenido experimentalmente usando gotas de glicerol ($\lambda_c \sim 2.27$ mm) reportado en [4].

Por otro lado, si la gota se considera cilíndrica para radios $R > \lambda_c$, entonces tendrá un volumen $V \approx \pi R^2 H$ donde H es el grosor de la gota y su energía total (E) es la contribución de su energía potencial (E_g) en su centro de masa más su energía superficial (E_s). Poniendo $E = E(H)$, se tiene que:

$$E = E_g + E_s \approx \frac{1}{2} \rho g V \left(H + \frac{4\lambda_c^2}{H} \right) \quad (1.10)$$

y, al minimizar la energía (1.10) respecto al grosor de la gota, se encuentra que su tamaño es aproximadamente constante $H \approx 2\lambda_c$, el cual es un resultado mostrado en [5] para $R > \lambda_c$.

Por lo tanto, las propiedades termofísicas del fluido como la sobrepresión ΔP_0 , la tensión superficial σ y la longitud capilar λ_c influyen en la ecuación de Young-Laplace (1.7) para describir el perfil de una gota no humectante con un volumen fijo V , en particular, el radio de contacto r_b y el grosor máximo H de las gotas están directamente relacionadas con la longitud capilar λ_c . Sin embargo, la ecuación adimensional (1.8) no permite una solución analítica y, por ende, se opta por resolverla utilizando aproximaciones o mediante métodos numéricos para encontrar la forma de la gota, [7–11, 13, 14].

1.5 Ecuaciones de conservación

Las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos para describir el movimiento de un fluido viscoso son un conjunto de ecuaciones no lineales acopladas en derivadas parciales llamadas *ecuaciones de Navier-Stokes* (cuyas deducciones pueden consultarse en el Apéndice B, donde se ha seguido el procedimiento de [15]), las cuales están en términos de la densidad del fluido $\rho = \rho(\vec{x}, t)$, el campo de velocidades en el fluido $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$, la aceleración de la gravedad \vec{g} y, los campos escalares de presión $P = P(\vec{x})$ y temperatura $T = T(\vec{x})$. Asimismo, dichas ecuaciones utilizan la definición de *derivada material* para

simplificar sus expresiones:

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}}(\cdot) \quad \text{donde} \quad \vec{v} \equiv \dot{\vec{x}}. \quad (1.11)$$

1.5.1 Ecuación de conservación de masa

Si se considera una subregión B de un fluido en algún instante de tiempo, entonces la masa de B es

$$m(B) = \int_B \rho(\vec{x}', t) d^3x', \quad (1.12)$$

donde $\rho = \rho(\vec{x}', t)$ es la densidad. Por otra parte, el *teorema de transporte de Reynolds* aplicado a cualquier campo escalar $f = f(\vec{x}', t)$ es

$$\frac{d}{dt} \int_B f d^3x' = \int_B \frac{\partial f}{\partial t} d^3x' + \int_{\partial B} f(\vec{v}' \cdot \hat{n}) dS'. \quad (1.13)$$

Así, la primera ecuación de conservación es una ecuación escalar que se obtiene cuando este campo escalar es la densidad del fluido y, al aplicar el teorema, el lado izquierdo de (1.13) se convierte en el flujo de masa. Por lo tanto, la *ecuación de conservación de la masa* sostiene que si el flujo de masa es nulo, entonces se satisface la siguiente ecuación de continuidad:

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\vec{x}} \cdot (\rho \vec{v}) \quad \text{ó} \quad 0 = \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{v}, \quad (1.14)$$

donde $\rho = \rho(\vec{x}, t)$ es la densidad y $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$ es el campo de velocidad. (Ver la sección B.1 para más detalles.) Si el fluido es incompresible, es decir, si la densidad del fluido es constante $\rho = \rho_0$, entonces la derivada material de la densidad es igual a cero en la ecuación de la derecha en (1.14).

$$0 = \nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{v} \quad (1.15)$$

1.5.2 Ecuación de conservación de cantidad de movimiento

La segunda ecuación de conservación son las ecuaciones de Navier-Stokes, la cual es una ecuación vectorial para describir la dinámica de un fluido viscoso causada por la acción de fuerzas y, desde la segunda ley de Newton, se tiene que:

$$\frac{d}{dt} \int_B \rho \vec{v}' d^3x' = \int_B \rho \vec{g} d^3x' + \int_{\partial B} \vec{f} dS', \quad (1.16)$$

donde ρ es la densidad, \vec{v}' es el campo de velocidad, \vec{g} es la aceleración de la gravedad y $\vec{f} = \vec{\sigma} \cdot \hat{n}$ es una fuerza superficial definida en términos de un tensor de esfuerzos inhomogéneo

$\vec{\sigma}$ en un fluido. Nuevamente, si se aplica el teorema de Reynolds (1.13) y la ecuación de conservación de la masa (1.14), entonces se consigue la *ecuación de movimiento de Cauchy* dada por:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{g} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{\sigma}. \quad (1.17)$$

Sin embargo, aún es necesario establecer las componentes de la *ecuación constitutiva*: $\sigma_{ij} = \tau_{ij} - \delta_{ij} P$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker, $P = P(\vec{x})$ es un campo escalar de presión y $\tau_{ij} = \mu_{ijkl} \partial_l v_k$ es el tensor de tensiones, un tensor simétrico e isotrópico de viscosidad implementado para fluidos newtonianos.

De esta manera, es posible obtener la *ecuación de conservación de cantidad de movimiento*:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \rho \vec{g} + \nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{\tau} - \nabla_{\vec{x}} P \\ &= \rho \vec{g} + \mu \nabla_{\vec{x}}^2 \vec{v} + \left(\mu_v + \frac{1}{3} \mu \right) \nabla_{\vec{x}} (\nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{v}) - \nabla_{\vec{x}} P, \end{aligned} \quad (1.18)$$

donde μ y μ_v son coeficientes de viscosidad. (Ver la sección B.2 para más detalles.) Si el fluido es incompresible, entonces se cumple que la divergencia de la velocidad es nula (1.15).

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} + \mu \nabla_{\vec{x}}^2 \vec{v} - \nabla_{\vec{x}} P \quad (1.19)$$

1.5.3 Ecuación de conservación de energía

Desde la primera ley de la termodinámica, se sabe que un sistema macroscópico intercambia energía con sus alrededores mediante trabajo y calor. La última ecuación de conservación es otra ecuación escalar que se consigue con la conservación de la energía en un fluido:

$$\frac{d}{dt} \int_B \rho \left(e + \frac{1}{2} \|\vec{v}'\|^2 \right) d^3x' = \int_B \rho \vec{g} \cdot \vec{v}' d^3x' + \int_{\partial B} \left(\vec{f} \cdot \vec{v}' - \vec{q} \cdot \hat{n} \right) dS', \quad (1.20)$$

donde e es la energía interna por unidad de masa, ρ es la densidad, \vec{v}' es la velocidad, \vec{g} es la aceleración de la gravedad, \vec{f} es la fuerza superficial y \vec{q} es el flujo de calor en el sistema.

Por última vez, se aplica el teorema de transporte de Reynolds (1.13) al lado izquierdo de la fórmula integral (1.20) que se simplifica con la ecuación de continuidad (1.14). Pero, al resultado, se le sustrae la *ecuación de la energía mecánica* obtenida con el producto escalar de la ecuación de conservación de momento (1.18) por el campo de velocidades \vec{v} . Finalmente, si se aplica la *ley de Fourier*, se obtiene la tercera ecuación

para describir cómo se transporta la energía en el fluido. La *ecuación de conservación de la energía* está dada por:

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p (\nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{v}) + 2\mu \left(\vec{S} - \frac{1}{3} (\nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{v}) \vec{I} \right)^2 + \mu_v (\nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{v})^2 + \nabla_{\vec{x}} \cdot (k \nabla_{\vec{x}} T), \quad (1.21)$$

donde \vec{S} es el tensor de velocidad de deformación, \vec{I} es el tensor identidad, $T = T(\vec{x})$ es el campo escalar de temperaturas, k es la conductividad térmica y, μ y μ_v son coeficientes de viscosidad. (Ver la sección B.3 para más detalles.) Si el fluido es incompresible, se cumple la ecuación (1.15) y las componentes del tensor \vec{S} son iguales a cero.

$$\rho \frac{De}{Dt} = \nabla_{\vec{x}} \cdot (k \nabla_{\vec{x}} T) \quad (1.22)$$

Por lo tanto, las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos describen el movimiento de un fluido viscoso en términos de las propiedades termofísicas del fluido (densidad ρ , coeficiente de viscosidad μ y conductividad térmica k), la aceleración de la gravedad \vec{g} , la velocidad \vec{v} , la presión P y la temperatura T .

Capítulo 2

Antecedentes

El fenómeno conocido como el *efecto Leidenfrost*, descubierto y descrito por el médico alemán Johann G. Leidenfrost en 1756, consiste en la levitación de una gota sobre una fina capa de vapor cuando un líquido volátil entra en contacto con un sólido caliente a una temperatura suficientemente mayor al punto de ebullición de dicho líquido. Esto también recibe el nombre de *gota Leidenfrost* (ver Figura 2.1) y la temperatura mínima de la superficie a la que se produce el fenómeno se denomina *temperatura de Leidenfrost*.



Figura 2.1: Una gran gota cilíndrica de Leidenfrost (panqué) sobre una superficie de silicio a 200°C. Imagen de [1].

Una gota hierve y desaparece rápidamente si es depositada sobre un sólido caliente con temperatura cercana al punto de ebullición del líquido. En cambio, el proceso de evaporación de una gota Leidenfrost es más lento, es decir, tarda en evaporarse varias decenas de segundos o algunos minutos dependiendo de la cantidad del líquido depositado, el cual está aislado del sustrato debido a la presencia de la capa de vapor con un grosor en torno a 100 μm , entonces solo estará sujeta a interacciones con su vapor y la gravedad; por

tales motivos, la gota en estado Leidenfrost tiene bordes orbiculares, no hace contacto con el sustrato y es superhidrofóbica. En consecuencia, la periferia de estos glóbulos tienen la forma de las gotas sin humectación.

2.1 Temperatura de Leidenfrost

El tamaño de la gota en estado Leidenfrost disminuye naturalmente por su evaporación debida a la alta temperatura de la superficie metálica y, evidentemente, esto nos conduce a la existencia de un tiempo de vida de la gota Leidenfrost definido como el tiempo transcurrido desde el depósito de la gota hasta su completa evaporación. Por otro lado, Mozumber et al. [16] notaron que sobre un plato caliente de aluminio, el tiempo de vida de una gota de agua es más prolongado que para el encontrado ante el etanol y el metanol, mismo que comprobaremos en el presente trabajo.

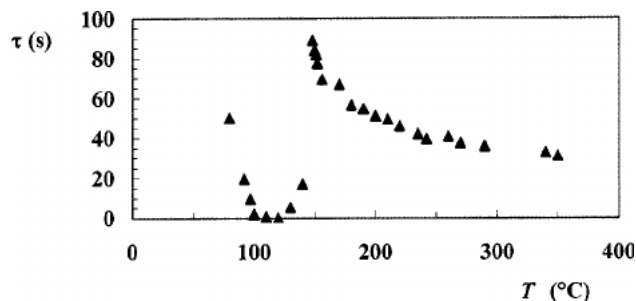


Figura 2.2: Tiempo de vida $\tau(s)$ contra la temperatura $T(^{\circ}C)$ de una gota de agua de radio $R = 1$ mm. La temperatura T es de la placa de duraluminio donde la gota es depositada. Figura de [1].

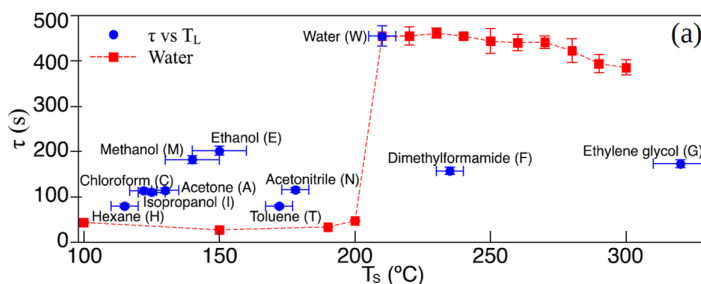


Figura 2.3: Tiempo de vida $\tau(s)$ contra la temperatura $T(^{\circ}C)$ de gotas de 0.5 ml de diferentes líquidos sobre un plato de aluminio. $\tau(T_s)$ (cuadrados rojos) y $\tau(T_L)$ (puntos azules). Figura de [17].

La temperatura de Leidenfrost, denotada por T_L , está definida como un máximo agudo en la gráfica del tiempo de vida τ en segundos contra la temperatura T en grados Celsius del sustrato. Ver las Figuras 2.2 y 2.3.

La Figura 2.2 muestra los resultados del tiempo de vida de una gota de agua ($R = 1$ mm) sobre una superficie plana de duraluminio calentada a diferentes temperaturas. Según los experimentos de Bianco et al. [1], la temperatura de Leidenfrost se encuentra al rededor de los $T_L \sim 150^\circ\text{C}$ donde la gota milimétrica tiene un máximo tiempo de vida de casi $\tau = 100$ s. En cambio, la Figura 2.3 muestra los resultados obtenidos por Pacheco et al. [17] en forma de cuadrados rojos obtenidos para una gota de agua (0.5 ml) sobre un sustrato cónico de aluminio, cuyo máximo tiempo de vida asciende hasta casi los $\tau = 500$ s para una temperatura de Leidenfrost en torno a $T_L \sim 200^\circ\text{C}$, así como las temperaturas de Leidenfrost para diferentes líquidos en forma de puntos azules.

Si la temperatura del sustrato T está en el intervalo $T > T_L$, entonces es claro que el tiempo de vida de las gotas Leidenfrost disminuye conforme aumentamos la temperatura del sustrato, pero el tiempo de vida aumenta si la temperatura del sustrato se acerca a la temperatura de Leidenfrost ($T \rightarrow T_L$). Sin embargo, el valor de la temperatura de Leidenfrost T_L puede verse afectado primordialmente por el procedimiento de depósito del líquido en el sustrato y a las propiedades del líquido y del sustrato. Note que la cantidad de líquido depositado y los materiales de los sustratos de las Figuras 2.2 y 2.3 son diferentes.

Por consiguiente, la gota debe depositarse sobre un plato caliente a una temperatura T mayor a la temperatura de Leidenfrost T_L de los líquidos en este trabajo, por ejemplo, una temperatura para el plato de aluminio de $T = 250^\circ\text{C}$ está por arriba de la temperatura de Leidenfrost de varios líquidos. Entonces, se garantiza la producción de gotas en estado Leidenfrost, pero su tiempo de vida τ dependerá del volumen y el tipo de líquido.

2.2 Perfil transversal de gota Leidenfrost

Dada la forma de las gotas de Leidenfrost, Bianco et al. [1] las clasificó en gotas grandes cilíndricas (*panqués* afectados por fuerza de gravedad) y gotas pequeñas semiesféricas (como las observamos en la Figura 1.4), donde proponen que la altura máxima del *panqué* es dos veces la longitud capilar λ_c definida en (1.6) y, para estados cuasi estacionarios, el grosor de la capa de vapor es del orden de $100 \mu\text{m}$ para un radio R de la gota cercano a

10 mm, pero la película de vapor evita el contacto del líquido con la superficie sólida (ver Figura 2.4) y, en consecuencia, el comportamiento no humectante de la gota en estado Leidenfrost le genera un mayor tiempo de vida y una extrema movilidad debida a su escasa fricción con la superficie, [8, 10].

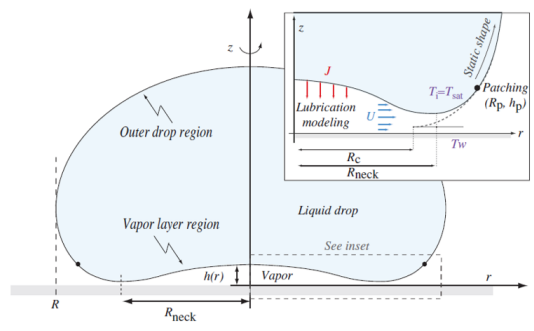


Figura 2.4: Esquema de gota Leidenfrost que levita sobre una capa de vapor de grosor no uniforme, compuesto por una bolsa rodeada por un cuello anular. Figura de [8, 10].

Sin embargo, la capa de vapor se puede volver inestable para gotas Leidenfrost suficientemente grandes, expulsando el vapor de manera ascendente y generando *chimeneas* en la gota. Snoeijer et al. [11] mostraron que el tamaño máximo de las gotas Leidenfrost estables tienen una extensión radial alrededor de $R \approx 3.95\lambda_c$ (antes de la aparición de las *chimeneas*). Por otro lado, Ma et al. [12] reportaron diferentes modos de oscilación en forma de estrellas en las gotas Leidenfrost con radios en el intervalo $R \gtrsim 1.5\lambda_c$.

De modo que el grosor de la capa de vapor es una característica importante en el comportamiento de los distintos regímenes de gotas Leidenfrost, pero en este trabajo se estudiarán gotas Leidenfrost con radios tales que $R < 3.95\lambda_c$.

2.3 La razón de evaporación

Muchas preguntas aún siguen abiertas para obtener un modelo preciso y son cruciales para la comprensión del efecto de Leidenfrost. En particular, la razón de evaporación de la gota de Leidenfrost depende de su tamaño y parece ser crucial para lograr una estimación de su tiempo de vida pues, evidentemente, la gota Leidenfrost se retrae al tiempo que se evapora hasta desaparecer.

Sin embargo, *existe controversia en la literatura sobre el comportamiento del radio a través del tiempo en gotas Leidenfrost*, [1, 7, 13, 17–20]. En buena medida, debido a la

ausencia de un modelo preciso de su comportamiento, ya que la forma de la gota y la dinámica del fluido están descritas por ecuaciones diferenciales que no tienen soluciones analíticas; por otra parte, *no se ha mostrado experimentalmente una evolución completa del volumen o radio de gotas Leidenfrost* para periodos prolongados de tiempo de hasta varias decenas de segundos, ya que la iluminación tiene un papel importante en la medición si se genera una sombra alrededor de la gota e inclusive su movimiento constante o sus modos de oscilación también pueden generar incertidumbre en el experimento.

2.3.1 Mecanismos de evaporación

Una gota en estado Leidenfrost empieza a evaporarse, desde el instante de su depósito sobre una superficie caliente a una temperatura $T > T_L$, por medio de dos mecanismos de evaporación (a través de la capa de vapor y por difusión en el aire). Sin embargo, la importancia de los mecanismos de evaporación cambia de acuerdo con el tamaño de la gota pues, como el calor permite que el líquido se evapore, esto da lugar al cambio desde el régimen de gotas grandes hasta el régimen de gotas pequeñas como se muestra en la Figuras 2.5.

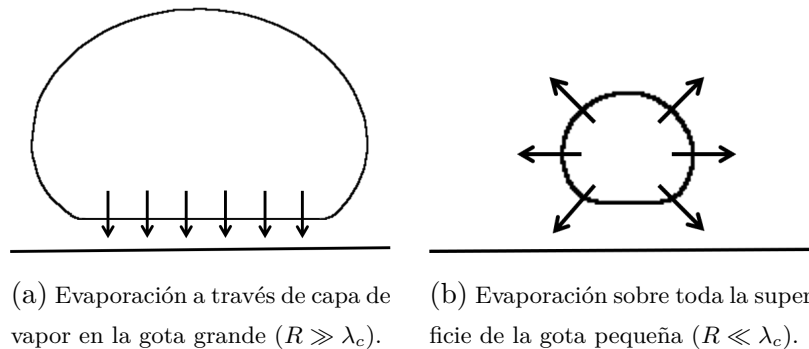


Figura 2.5: Evaporación en los dos regímenes de las gotas Leidenfrost.

La hipótesis para el régimen de gotas grandes ($R \gg \lambda_c$) radica en su superficie de contacto como principal fuente de evaporación, ya que el transporte de calor ocurre a través de la capa de vapor para llegar al líquido, pero la gota descansa sobre ella y causa una expulsión de vapor a los alrededores de dicha capa. La evaporación a través de la capa de vapor domina sobre la evaporación por difusión en el aire. Ver Figura 2.5a.

Por otro lado, la Figura 2.5b indica el régimen de gotas pequeñas ($R \ll \lambda_c$) y se caracteriza por tener una forma semi-esférica cuya hipótesis es la evaporación ante toda

su superficie, pues la superficie de contacto ahora puede considerarse despreciable y ambos mecanismos de evaporación son igualmente importantes. Por lo tanto, la velocidad de evaporación aumenta rápidamente si el tamaño de la gota es menor que su longitud capilar.

2.3.2 Modelos y experimentos previos

La suposición central de Bianco et al. [1] es que el radio de la gota Leidenfrost y el grosor de la película de vapor están relacionados, entonces deducen que el radio $R(t)$ puede ser escrito como una función cuadrática respecto del tiempo ($n = 2$) donde la gota se retrae regularmente en el régimen de gotas grandes ($R > \lambda_c$), excepto cuando la gota es más pequeña ($R < \lambda_c$) y aumenta la velocidad de retracción ($n = 1/2$) al aproximarse a su evaporación total.

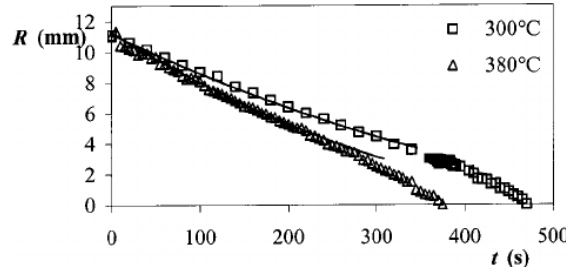


Figura 2.6: Radio respecto del tiempo de una gota de agua depositada sobre una superficie de duraluminio a $T_p = 300^\circ\text{C}$ y $T_p = 380^\circ\text{C}$. Figura de [1].

La gráfica de la Figura 2.6 muestra ajustes paramétricos de tipo ley de potencias sobre datos experimentales para el radio en función del tiempo $R(t)$ en el régimen de gotas grandes ($R > \lambda_c$ con $n = 2$), pero no muestran estos ajustes paramétricos en el régimen de gotas pequeñas ($R < \lambda_c$ con $n = 1/2$). Para Bianco et al. [1], el radio está dado por:

$$R(t) = R_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n \quad \text{con} \quad \begin{array}{ll} n = 2 & \text{si } R_0 > \lambda_c \\ n = 1/2 & \text{si } R_0 \leq \lambda_c \end{array}, \quad (2.1)$$

donde $R = R(t)$ es el radio, $R_0 = R(t = 0)$ es el radio inicial, λ_c es la longitud capilar y τ es el tiempo de vida de la gota de Leidenfrost. Nota: el tiempo de vida de las ecuación (2.1) son diferentes, pero es claro que $R(t = \tau) = 0$.

Según Bianco et al. [1] para gotas en forma de panqué (Figura 1.4a) tienen un volumen cilíndrico $V_1 = 2\pi\lambda_c r^2$ y altura $H \approx 2\lambda_c$, mientras que para gotas semi-esféricas (Figura 1.4b) tienen un volumen esférico $V_2 = (4/3)\pi r^3$.

Si $R > \lambda_c$, la variación de masa de la gota respecto del tiempo ocurre principalmente a través de su superficie de contacto y es

$$\dot{m}_1 = \frac{dm_1}{dt} = \rho_0 \frac{dV_1}{dt} = 4\pi\lambda_c\rho_0 r \frac{dr}{dt} \approx -\frac{\kappa\Delta T}{L} \left(\frac{4L\rho_v\rho_0 g\lambda_c}{3\kappa\Delta T\eta} \right)^{1/4} r^{3/2}. \quad (2.2)$$

Pero si $R \leq \lambda_c$, la variación de masa de la gota respecto del tiempo ocurre sobre toda su superficie y es

$$\dot{m}_2 = \frac{dm_2}{dt} = \rho_0 \frac{dV_2}{dt} = 4\pi\rho_0 r^2 \frac{dr}{dt} \approx -\frac{\kappa}{L} \Delta T r. \quad (2.3)$$

Por otro lado, sus tiempos de vida están dados por:

$$\tau_1 \sim 2\pi \left(\frac{4\rho_0\lambda_c L}{\kappa\Delta T} \right)^{3/4} \left(\frac{3\eta}{\rho_v g} \right)^{1/4} R_0^{1/2} \quad \text{y} \quad \tau_2 \sim \frac{2\pi\rho_0 L}{\kappa\Delta T} R_0^2. \quad (2.4)$$

Sustituyendo (2.4) en sus respectivas ecuaciones diferenciales (2.2) y (2.3) e integrando, se obtiene que:

$$\int_{R(t)}^{R(\tau)=0} (R_0 r)^{-1/2} dr = - \int_t^\tau \frac{2}{\tau} dt \Rightarrow R(t) = R_0 \left(1 - \frac{t}{\tau_1} \right)^2 \quad (2.5)$$

y

$$\int_{R(t)}^{R(\tau)=0} \frac{r}{R_0^2} dr = - \int_t^\tau \frac{1}{2\tau} dt \Rightarrow R(t) = R_0 \left(1 - \frac{t}{\tau_2} \right)^{1/2}, \quad (2.6)$$

las cuales son precisamente la ecuación (2.1).

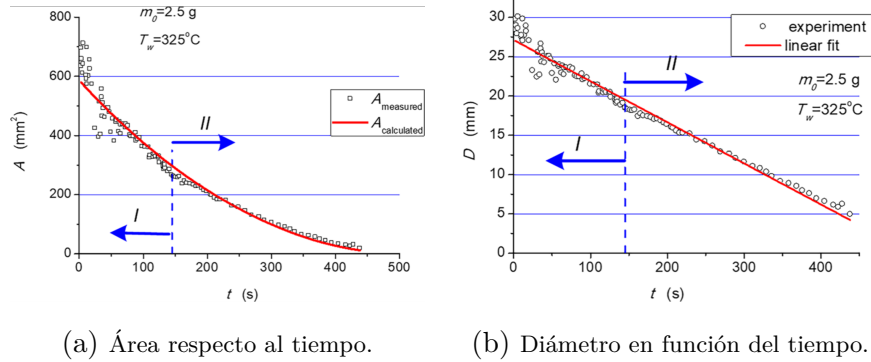


Figura 2.7: Mediciones con sus respectivos ajustes de datos de la proyección ortogonal de la gota de agua sobre una superficie a $T_p = 325^\circ \text{C}$. Figuras tomadas de [18].

En cambio en un estudio reciente, Orzechowski [18] reportó que la proyección ortogonal de la gota sobre la superficie de calentamiento, es decir, el área $A = A(t)$ de la gota Leidenfrost cambia con el tiempo como una función cuadrática. Ver Figura 2.7a. La función es

$$A = A_0 \left(1 - \frac{t}{t_0} \right)^2, \quad (2.7)$$

donde t_0 es el tiempo de vida. Por lo tanto, la fórmula (2.7) implica una relación lineal entre el diámetro y el tiempo donde b_D es una pendiente. Ver Figura 2.7b.

$$D(t) = D_0 - b_D t \quad (2.8)$$

También, la Figura 2.7 muestra ajustes paramétricos de tipo ley de potencias sobre datos experimentales para el área $A(t)$ y el radio $r(t)$ en función del tiempo en el régimen de gotas grandes $R > \lambda_c$.

Similarmente en la Figura 2.8 durante el rebote de una gota de Leidenfrost de metanol, cloroformo, etanol, hexano, isopropanol y acetronitrilo contra una gota de agua, Pacheco et al. [17] observaron que los diferentes líquidos de las gotas Leidenfrost con diámetro $D_2(t)$ tienen un comportamiento lineal durante los últimos 20 segundos de rebote antes de la coalescencia con el agua con un diámetro $D_1(t)$. No obstante, este comportamiento temporal del diámetro puede verse afectado por los rebotes repetidos antes de la coalescencia y por el tiempo de vida de la gota Leidenfrost, ya que τ puede ascender hasta casi 100 s (ver Figura 2.2) o hasta casi 500 s (ver Figura 2.3).

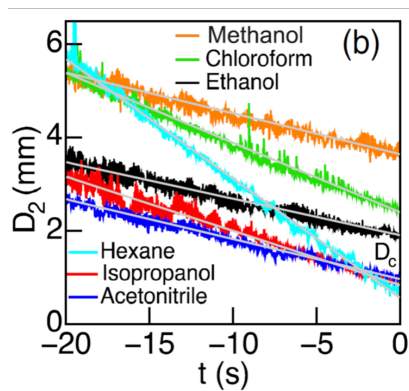


Figura 2.8: Diámetro $D_2(t)$ para diferentes gotas durante los últimos 20 s de rebote antes de la coalescencia con una gota de agua. Figura tomada de [17].

Por lo tanto, la controversia en estas referencias es clara, ya que la evolución de gotas Leidenfrost en forma de panqué ($R > \lambda_c$) para el radio a través del tiempo es una función cuadrática para Biance et al. [1], pero es una función lineal para Orzechowski [18] y Pacheco et al. [17]. Asimismo, los ajustes paramétricos a expresiones de tipo ley de potencias fueron realizados en el régimen de gotas grandes, pero no existe un modelo preciso del comportamiento de gotas Leidenfrost sin ajustes paramétricos y tampoco se ha mostrado su evolución completa de manera experimental para periodos prolongados de tiempo.

Capítulo 3

Marco teórico

Desde el perfil de una gota no humectante y las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos, nuestro grupo ha estudiado la dinámica de una gota estacionaria en estado Leidenfrost con volumen $V(t)$ que levita sobre una capa de vapor con grosor $h(t)$. Este capítulo presenta la explicación del modelo teórico, con base en la temperatura del plato caliente y las propiedades termofísicas del fluido, para estudiar la evaporación de una gota Leidenfrost desde su tamaño y forma iniciales hasta su desaparición debida a su completa evaporación.

3.1 Gota sésil con humectación nula

Una gota tiene un volumen V y su radio equivalente R está dado por una esfera con su mismo volumen $V = (4\pi/3)R^3$. Recordando las definiciones de longitud capilar λ_c y el número de Bond Bo , se tiene que:

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_l g}} \quad \text{y} \quad Bo = \left(\frac{R}{\lambda_c}\right)^2, \quad (3.1)$$

donde σ es la tensión superficial del fluido, ρ_l es la densidad del fluido en la fase líquido y g es la aceleración de la gravedad.

En equilibrio, el perfil de una gota no humectante ($\theta = 0$) se describe mediante la ecuación de Young-Laplace escrita en (1.8) para coordenadas cilíndricas con cantidades adimensionales, la cual está dada por:

$$\frac{1}{\xi [1 + (\dot{\xi})^2]^{1/2}} - \frac{\ddot{\xi}}{[1 + (\dot{\xi})^2]^{3/2}} = \kappa_0 + \eta, \quad (3.2)$$

donde $r = \lambda_c \xi$, $z_H - z = \lambda_c \eta$ y $\kappa_0 = (\lambda_c \Delta P) / \sigma$. Sin embargo, aún no se cuenta con una solución analítica de la ecuación de Young-Laplace, entonces la forma de la gota $\xi(\eta)$ estará determinada resolviendo numéricamente la ecuación (3.2). Ver la derivación de esta ecuación en el Apéndice A.

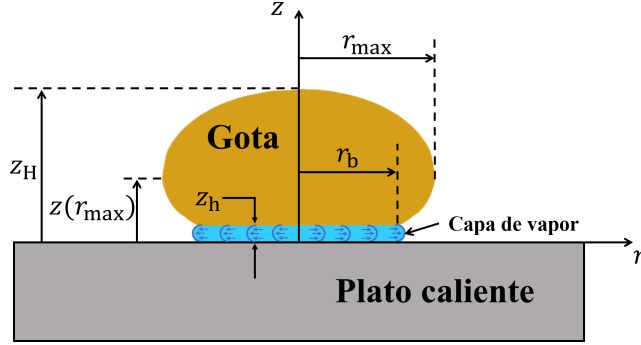


Figura 3.1: Esquema de una gota Leidenfrost y sus propiedades geométricas.

Posteriormente, la Figura 3.1 muestra las dimensiones de la gota, las cuales son el radio máximo $r_{\max} = \lambda_c \xi_{\max}$, el radio de contacto $r_b = \lambda_c \xi_b$, la altura $z_H - z_h = \lambda_c \eta_b$ y la distancia vertical desde la parte superior hasta la posición del radio máximo $z_H - z(r_{\max}) = \lambda_c \eta_{\max}$, que pueden ser determinadas con las integrales de volumen y área en términos de cantidades adimensionales.

Así, el volumen de la gota y su número de Bond asociado están dados por:

$$V = \pi \lambda_c^3 \int_0^{\eta_b} [\xi(\eta)]^2 d\eta \quad \text{y} \quad \text{Bo} = \frac{1}{\lambda_c^2} \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{2/3}. \quad (3.3)$$

Encima, el área adimensional para cada superficie de la gota se puede escribir como

$$\Lambda = \frac{A}{\pi \lambda_c^2}. \quad (3.4)$$

En consecuencia, la superficie de la gota en contacto con el vapor Λ_b , la región lateral del hemisferio inferior Λ_{lat} en $z_h \leq z \leq z(r_{\max})$ y la superficie en contacto con el aire circundante en el hemisferio superior Λ_B en $z(r_{\max}) \leq z \leq z_H$ están dadas por:

$$\Lambda_b = \xi_b^2, \quad \Lambda_{\text{lat}} = \int_{\eta_{\max}}^{\eta_b} 2\xi \sqrt{(\dot{\xi})^2 + 1} d\eta \quad \text{y} \quad \Lambda_B = \int_0^{\eta_{\max}} 2\xi \sqrt{(\dot{\xi})^2 + 1} d\eta, \quad (3.5)$$

respectivamente.

Por consiguiente, resolver la ecuación de Young-Laplace (3.2) de manera numérica es necesario para encontrar el perfil de una gota no humectante con un volumen dado, así como sus propiedades geométricas (posiciones radiales y axiales) para calcular sus diferentes superficies de contacto.

3.2 Sistema de ecuaciones adimensionales

El vapor generado entre la gota Leidenfrost y el sustrato es un fluido viscoso incompresible, esto es, la densidad del fluido es constante ($\rho = \rho_0$) e implica que la derivada material de la densidad es nula. Luego, las ecuaciones de Navier-Stokes utilizadas son (1.15), (1.19) y (1.22), las cuales están dadas por:

$$0 = \nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{v}, \quad (3.6)$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} + \mu_v \nabla_{\vec{x}}^2 \vec{v} - \nabla_{\vec{x}} (\Delta P) \quad (3.7)$$

y

$$\rho \frac{De}{Dt} = \nabla_{\vec{x}} \cdot (k_v \nabla_{\vec{x}} T), \quad (3.8)$$

ya que $\partial_i v_j = (1/3)\partial_i v_i \delta_{ij} = 0$ para fluidos incompresibles y ΔP es la sobrepresión del fluido.

Asimismo, si se considera el régimen estacionario, esto implica que las derivadas materiales del campo de velocidad y de la energía interna son iguales a cero. Más aún, dado que el grosor de la capa de vapor es pequeño, se desprecian los efectos de la gravedad, es decir, $\|\rho \vec{g}\| \sim 0$; mientras que, la conductividad térmica es constante $k_v = \text{cte}$.

Por lo tanto, las ecuaciones de Navier-Stokes de nuestro interés son:

$$0 = \nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{v}, \quad 0 = \mu_v \nabla_{\vec{x}}^2 \vec{v} - \nabla_{\vec{x}} (\Delta P) \quad \text{y} \quad 0 = \nabla_{\vec{x}}^2 T, \quad (3.9)$$

donde μ_v es el coeficiente de viscosidad dinámica.

Por otra parte, debido a la forma de la gota sin humectación, se considera una simetría axial. Entonces, el campo de velocidades y el campo escalar de temperatura solo dependen de sus coordenadas radial y vertical, es decir, $\vec{v} = \vec{v}(r, z)$ y $T = T(r, z)$. Así, las ecuaciones de conservación de la masa y energía son

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.10)$$

y

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (3.11)$$

respectivamente. En el caso de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento, se debe tomar en cuenta la siguiente identidad del laplaciano de un campo vectorial en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 \vec{v} = \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) \hat{r} + \left(\nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) \hat{\phi} + \nabla^2 v_z \hat{z} \quad (3.12)$$

para un campo de velocidades $\vec{v} = (v_r, v_\phi, v_z)$. Además, la componente angular de la velocidad es nula, $v_\phi = 0$, entonces la identidad (3.12) se reduce a

$$\nabla^2 \vec{v} = \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} \right) \hat{r} + \nabla^2 v_z \hat{z}. \quad (3.13)$$

Note ahora que

$$\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}. \quad (3.14)$$

Sustituyendo (3.14) en (3.13) y, al resultado, puede ser reemplazado en la ecuación vectorial en (3.9) para obtener el siguiente par de ecuaciones:

$$\frac{\partial(\Delta P)}{\partial r} = \mu_v \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right\} \quad (3.15)$$

y

$$\frac{\partial(\Delta P)}{\partial z} = \mu_v \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right]. \quad (3.16)$$

Por tales motivos, las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas que describen la dinámica de una gota Leidenfrost están dadas por (3.10), (3.11), (3.15) y (3.16) para las respectivas ecuaciones de conservación de masa, energía y cantidad de movimiento radial y axial; la cuales deben resolverse considerando condiciones de frontera.

La velocidad radial del vapor debe satisfacer las condiciones de no deslizamiento y la velocidad axial del vapor debe cumplir la condición de no penetración en la superficie del sustrato caliente, pero existe una velocidad de vapor expulsado en la superficie de la gota en contacto con la capa de vapor. Por otro lado, la temperatura del sustrato es constante, pero tiene una dependencia radial en la interfaz entre la capa de vapor y la gota.

En $z = 0$,

$$v_r = 0 = v_z \quad \text{y} \quad T = T_p. \quad (3.17)$$

En $z = z_h$,

$$v_r = 0, \quad v_z = -v_0 f_v(r) \quad \text{y} \quad T = T_p - (T_p - T_l) f_{\theta, \text{sup}}(r), \quad (3.18)$$

donde $z_h = h$ es el grosor de la capa de vapor, v_0 es la velocidad característica del vapor (expulsado desde el fondo de la gota en el origen $r = 0$) y, T_p y T_l son las temperaturas del sustrato y del líquido, respectivamente. Por otro lado, $f_v(r)$ es una función de velocidad adimensional que describe la distribución radial de la generación de vapor, mientras que $f_{\theta, \text{sup}}(r)$ es una función de temperatura adimensional que describe la variación de temperatura en el límite superior.

Las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas deducidas anteriormente se pueden expresar de la siguiente manera usando la regla de la cadena:

$$0 = \frac{r_b}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{r}{r_b} \frac{v_r}{v_0} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_z}{v_0} \right) \cdot \frac{\partial y}{\partial z}, \quad (3.19)$$

$$\frac{1}{\mu_V v_0} \frac{\partial(\Delta P)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{r_b}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{r}{r_b} \frac{v_r}{v_0} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial r} \right] \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{v_r}{v_0} \right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2, \quad (3.20)$$

$$\frac{1}{\mu_V v_0} \frac{\partial(\Delta P)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{r_b}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{r}{r_b} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_z}{v_0} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial r} \right] \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{v_z}{v_0} \right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 \quad (3.21)$$

y

$$0 = \frac{r_b}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{r}{r_b} \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2. \quad (3.22)$$

A continuación, se escribirán estas ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas como un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de cantidades adimensionales. Con este fin, se definen las respectivas distancias, velocidades y momento adimensionales:

$$x = \frac{r}{r_b}, \quad y = \frac{z}{h}, \quad u = \frac{h v_r}{r_b v_0}, \quad w = \frac{v_z}{v_0} \quad \text{y} \quad p = \frac{h^3 \Delta P}{\mu_V v_0 r_b^2}. \quad (3.23)$$

Por otra parte, se define una temperatura adimensional en términos de las temperaturas constantes T_p y T_l del plato y líquido, respectivamente.

$$\theta = \frac{T_p - T}{T_p - T_l} \quad (3.24)$$

Sustituyendo (3.23) en (3.19), (3.20) y (3.21), se consiguen las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento (radial y axial) en términos de cantidades adimensionales. De la misma manera, se sustituyen (3.23) y (3.24) en (3.22) para obtener una ecuación de energía adimensional. Entonces, se produce un conjunto de ecuaciones de Navier-Stokes en términos de cantidades adimensionales que describen la dinámica de una gota en estado Leidenfrost:

$$0 = \frac{1}{x} \frac{\partial(xu)}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = H^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{x} \frac{\partial(xu)}{\partial x} \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3.26)$$

$$\frac{1}{H^2} \frac{\partial p}{\partial y} = H^2 \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (3.27)$$

$$0 = H^2 \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad (3.28)$$

donde se ha definiendo la relación de aspecto:

$$H = \frac{h}{r_b}. \quad (3.29)$$

Además, las respectivas funciones adimensionales de velocidad $f_v(r)$ y de temperatura $f_{\theta, \text{sup}}(r)$ se convierten en $f_v(x)$ y $f_{\theta, \text{sup}}(x)$, las cuales están descritas por sus correspondientes expresiones:

$$f_v(x) = \mathcal{H}(1-x) \quad \text{y} \quad f_{\theta, \text{sup}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1/x & \text{si } 1 < x \end{cases}, \quad (3.30)$$

donde $\mathcal{H}(\cdot)$ es la función escalón de Heaviside. Por otro lado, si utilizamos las cantidades adimensionales (3.23) y (3.24) en las condiciones de frontera (3.17) y (3.18), entonces estas últimas se reducen a las condiciones de frontera normalizadas (3.31) y (3.32).

En $y = 0$,

$$u = 0 = w \quad \text{y} \quad \theta = 0. \quad (3.31)$$

En $y = 1$,

$$u = 0, \quad w = -f_v(x) \quad \text{y} \quad \theta = f_{\theta}(x). \quad (3.32)$$

El vapor es expulsado radialmente porque la capa de vapor sostiene el peso del líquido y se genera a partir de la evaporación debajo de la gota Leidenfrost. Por lo tanto, obtener el conjunto de ecuaciones (3.25) a (3.28) con la relación de aspecto (3.29) como único parámetro fue necesario para poder calcular una solución de la dinámica del flujo de la capa de vapor, la cual está sujeta a las condiciones de frontera (3.31) y (3.32).

3.3 Sistema con transformadas de Hankel

Debido a la forma del conjunto de ecuaciones de Navier-Stokes adimensionales obtenidas en la sección anterior, cuya solución analítica es muy complicada, será útil reducir el número de derivadas parciales en las ecuaciones mostradas de (3.25) a (3.28) con la ayuda de las transformadas de Hankel para transformarlas a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias más simples. Por tal motivo, sea $g(x, y)$ una función genérica, se introduce la *transformada de Hankel n -ésima* $\mathbb{H}_n \{g(x, y)\}$ definida como:

$$G_n(q, y) = \mathbb{H}_n \{g(x, y)\} = 2\pi \int_0^\infty g(x, y) J_n(2\pi qx) x dx, \quad (3.33)$$

donde J_n son las funciones de Bessel de n -ésimo orden, mientras que q es un factor de escala a lo largo del eje x . En cambio, sea $G_n(q, y)$ una función genérica, se define la *transformada inversa de Hankel n -ésima* $\mathbb{H}_n^{-1} \{G_n(q, y)\}$ como:

$$g(x, y) = \mathbb{H}_n^{-1} \{G_n(q, y)\} = 2\pi \int_0^\infty G_n(q, y) J_n(2\pi qx) x dx. \quad (3.34)$$

Ahora bien, se puede aplicar la transformada de Hankel de orden cero a las ecuaciones (3.25), (3.27) y (3.28), mientras que la transformada de Hankel de orden uno se aplica a la ecuación (3.26). Sin embargo, note que la transformada de Hankel es lineal, esto implica que:

$$0 = \mathbb{H}_0 \left\{ \frac{1}{x} \frac{\partial(xu)}{\partial x} \right\} + \mathbb{H}_0 \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} \right\}, \quad (3.35)$$

$$\mathbb{H}_1 \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \right\} = H^2 \mathbb{H}_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{x} \frac{\partial(xu)}{\partial x} \right] \right\} + \mathbb{H}_1 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\}, \quad (3.36)$$

$$\frac{1}{H^2} \mathbb{H}_0 \left\{ \frac{\partial p}{\partial y} \right\} = H^2 \mathbb{H}_0 \left\{ \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} + \mathbb{H}_0 \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \quad (3.37)$$

y

$$0 = H^2 \mathbb{H}_0 \left\{ \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \right\} + \mathbb{H}_0 \left\{ \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right\}. \quad (3.38)$$

Usando los respectivos casos $n = 0, 1$ en las propiedades (C.5) y (C.6) obtenidas en el Apéndice C, entonces se cumplen las siguientes igualdades:

$$\mathbb{H}_0 \left\{ \frac{1}{x} \frac{\partial(xg)}{\partial x} \right\} = 2\pi q \mathbb{H}_1 \{g(x, y)\}, \quad \mathbb{H}_1 \left\{ \frac{\partial g}{\partial x} \right\} = -2\pi q \mathbb{H}_0 \{g(x, y)\}, \quad (3.39)$$

$$\mathbb{H}_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{x} \frac{\partial(xg)}{\partial x} \right] \right\} = -2\pi q \mathbb{H}_0 \left\{ \frac{1}{x} \frac{\partial(xg)}{\partial x} \right\} = -(2\pi q)^2 \mathbb{H}_1 \{g(x, y)\} \quad (3.40)$$

y

$$\mathbb{H}_0 \left\{ \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial g}{\partial x} \right) \right\} = 2\pi q \mathbb{H}_1 \left\{ \frac{\partial g}{\partial x} \right\} = -(2\pi q)^2 \mathbb{H}_0 \{g(x, y)\}. \quad (3.41)$$

Dado que la transformada de Hankel está definida sobre la componente x , esto implica que:

$$\mathbb{H}_n \left\{ \frac{\partial^m g}{\partial y^m} \right\} = \frac{\partial^m}{\partial y^m} \mathbb{H}_n \{g(x, y)\}. \quad (3.42)$$

Sustituyendo las propiedades de (3.39), (3.40) y (3.41) para los campos escalares $v(x, y)$, $w(x, y)$ ó $p(x, y)$, junto con (3.42), en sus respectivas ecuaciones de (3.35) a (3.38); se obtienen unas ecuaciones de Navier-Stokes simplificadas en términos de la transformada de Hankel.

$$0 = 2\pi q \mathbb{H}_1 \{u(x, y)\} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbb{H}_0 \{w(x, y)\} \quad (3.43)$$

$$-2\pi q \mathbb{H}_0 \{p(x, y)\} = -(2\pi q H)^2 \mathbb{H}_1 \{u(x, y)\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathbb{H}_1 \{u(x, y)\} \quad (3.44)$$

$$\frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial y} \mathbb{H}_0 \{p(x, y)\} = -(2\pi q H)^2 \mathbb{H}_0 \{w(x, y)\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathbb{H}_0 \{w(x, y)\} \quad (3.45)$$

$$0 = -(2\pi q H)^2 \mathbb{H}_0 \{\theta(x, y)\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathbb{H}_0 \{\theta(x, y)\} \quad (3.46)$$

Por simplicidad, las transformadas de Hankel de las velocidades (radial y axial), la presión y la temperatura se escriben como:

$$\mathcal{U}_1(q, y) = \mathbb{H}_1 \{u(x, y)\}, \quad \mathcal{W}_0(q, y) = \mathbb{H}_0 \{w(x, y)\}, \quad (3.47)$$

$$\mathcal{P}_0(q, y) = \mathbb{H}_0 \{p(x, y)\} \quad \text{y} \quad \Theta_0(q, y) = \mathbb{H}_0 \{\theta(x, y)\}. \quad (3.48)$$

En consecuencia, el sistema de ecuaciones acopladas en derivadas parciales es

$$0 = \frac{\beta}{H} \mathcal{U}_1 + \frac{\partial \mathcal{W}_0}{\partial y}, \quad (3.49)$$

$$-\frac{\beta}{H} \mathcal{P}_0 = -\beta^2 \mathcal{U}_1 + \frac{\partial^2 \mathcal{U}_1}{\partial y^2}, \quad (3.50)$$

$$\frac{1}{H^2} \frac{\partial \mathcal{P}_0}{\partial y} = -\beta^2 \mathcal{W}_0 + \frac{\partial^2 \mathcal{W}_0}{\partial y^2} \quad (3.51)$$

y

$$0 = -\beta^2 \Theta_0 + \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial y^2}, \quad (3.52)$$

donde $\beta = 2\pi q H$.

Así, la transformada de Hankel (3.33) fue de gran utilidad para reducir el número de derivadas parciales y obtener el conjunto de ecuaciones (3.49) a (3.52) en términos de (3.47) y (3.48), pero partiendo de las ecuaciones (3.25) a (3.28) obtenidas en la sección anterior.

3.4 Solución del sistema

Conviene resolver primero para $\mathcal{W}_0(q, y)$. Despejando la transformada de Hankel del campo escalar de presión $\mathcal{P}_0(q, y)$ de (3.50) para sustituirlo en (3.51), donde se emplea la ecuación (3.49) para conseguir $\mathcal{U}_1(q, y)$ en términos de $\mathcal{W}_0(q, y)$, se obtiene:

$$0 = \beta^4 \mathcal{W}_0 - 2\beta^2 \frac{\partial^2 \mathcal{W}_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 \mathcal{W}_0}{\partial y^4}. \quad (3.53)$$

Proponiendo una solución de tipo $\mathcal{W}_0^{(1)} = \exp(\lambda y)$, se deduce que $\lambda = \pm\beta$. Sin embargo, la ecuación (3.53) es una ecuación diferencial de cuarto orden para $\mathcal{W}_0(q, y)$ y, por ende, existen cuatro soluciones independientes. Utilizando ahora el método de reducción de orden, se encuentra otra solución $\mathcal{W}_0^{(2)} = y \exp(\pm\beta y)$. Así, la solución general de la ecuación diferencial (3.53) es

$$\mathcal{W}_0(q, y) = [C_1(q) + C_2(q)y] e^{-\beta y} + [C_3(q) + C_4(q)y] e^{\beta y}. \quad (3.54)$$

A partir de (3.54), es sencillo obtener:

$$\mathcal{U}_1(q, y) = H \left\{ \left[C_1(q) + C_2(q) \left(y - \frac{1}{\beta} \right) \right] e^{-\beta y} - \left[C_3(q) + C_4(q) \left(y + \frac{1}{\beta} \right) \right] e^{\beta y} \right\} \quad (3.55)$$

y

$$\mathcal{P}_0(q, y) = 2H^2 \left[C_2(q) e^{-\beta y} + C_4(q) e^{\beta y} \right]. \quad (3.56)$$

Finalmente, la solución de la ecuación (3.52) es directa.

$$\Theta_0(q, y) = C_5(q) e^{-\beta y} + C_6(q) e^{\beta y} \quad (3.57)$$

Las ecuaciones de las transformadas de Hankel de (3.54) hasta (3.57) son la solución del sistema de ecuaciones acopladas en derivadas parciales mostradas de (3.49) hasta (3.52).

Ahora, se imponen las condiciones de frontera y, desde la condición de frontera (3.31), se tiene que:

$$0 = \mathcal{W}_0(q, y = 0) \Rightarrow C_3(q) = -C_1(q), \quad (3.58)$$

$$0 = \mathcal{U}_1(q, y = 0) \Rightarrow C_4(q) = 2\beta C_1(q) - C_2(q) \quad (3.59)$$

y

$$0 = \Theta_0(q, y = 0) \Rightarrow C_6(q) = -C_5(q). \quad (3.60)$$

Ahora bien, sustituyendo las relaciones entre los coeficientes (3.58) y (3.59) en la ecuación (3.55) evaluada en la condición de frontera (3.32), se sigue que:

$$0 = \mathcal{U}_1(q, y = 1) \Rightarrow C_2 = C_1 \beta \left[\frac{\sinh(\beta) + \beta e^\beta}{\beta \cosh(\beta) + \sinh(\beta)} \right]. \quad (3.61)$$

Por otro lado, la ecuación (3.54) se evalúa en la condición de frontera (3.32) donde se define una nueva función:

$$\mathcal{W}_0(q, y = 1) = \mathbb{H}_0 \{w(x, y = 1)\} = -\mathbb{H}_0 \{f_v(x)\} \equiv -\mathcal{F}_v(q) \quad (3.62)$$

y, utilizando los resultados (3.58), (3.59) y (3.61) en (3.54) evaluada en $y = 1$, se encuentra:

$$\begin{aligned} -\frac{\mathcal{F}_v(q)}{2} &= -[C_1(q) + C_2(q)] \sinh(\beta) + \beta C_1(q) e^\beta \\ &= -C_1(q) \left[\frac{\sinh(\beta) + \beta(1 + \beta)e^\beta}{\beta \cosh(\beta) + \sinh(\beta)} \right] \sinh(\beta) + \beta C_1(q) e^\beta \\ &= C_1(q) \left[\frac{\beta^2 - \sinh^2(\beta)}{\beta \cosh(\beta) + \sinh(\beta)} \right] \end{aligned}$$

o bien, una expresión para el primer coeficiente:

$$C_1(q) = -\frac{\mathcal{F}_v(q)}{2} \left[\frac{\beta \cosh(\beta) + \sinh(\beta)}{\beta^2 - \sinh^2(\beta)} \right]. \quad (3.63)$$

Similarmente, la ecuación (3.57) se evalúa en la condición de frontera (3.32) donde se define otra nueva función:

$$\Theta_0(q, y = 1) = \mathbb{H}_0 \{\theta(x, y = 1)\} = \mathbb{H}_0 \{f_\theta(x)\} \equiv \mathcal{F}_\theta(q) \quad (3.64)$$

y, usando el resultado (3.60) en (3.57) evaluada en $y = 1$, se encuentra:

$$C_5(q) = -\frac{\mathcal{F}_\theta(q)}{2 \sinh(\beta)}. \quad (3.65)$$

Por lo tanto, las soluciones del sistema de ecuaciones acopladas se pueden escribir en términos de las funciones $\mathcal{F}_v(q)$ y $\mathcal{F}_\theta(q)$, las cuales se definen como las transformadas de Hankel de orden cero de las funciones adimensionales $f_v(x)$ y $f_\theta(x)$ de velocidad y temperatura, respectivamente. Dichas funciones son resueltas numéricamente, aunque ambas transformadas de Hankel de orden cero de las funciones adimensionales tienen una solución analítica:

$$\mathcal{F}_v(q) = \frac{1}{q} J_1(2\pi q) \quad (3.66)$$

y

$$\mathcal{F}_\theta(q) = \frac{1}{q} + J_1(2\pi q) \left[\frac{1}{q} - \pi^2 H_{S_0}(2\pi q) \right] - J_0(2\pi q) \left[\frac{1}{q} - \pi^2 H_{S_1}(2\pi q) \right], \quad (3.67)$$

donde H_{S_n} es la función de Struve del n -ésimo orden y también se ha usado la propiedad:

$$\int_0^1 x^{n+1} J_n(ax) dx = \frac{1}{a} J_{n+1}(a). \quad (3.68)$$

Luego, por la forma de los coeficientes $C(q)$, conviene definir las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \Psi_1(z) &= 2 \left[z^2 - \sinh^2(z) \right], \\ \Psi_2(z) &= z \cosh(z) + \sinh(z), \\ \Psi_3(z) &= \sinh(z) + z e^z, \\ \Psi_4(z) &= \sinh(z) - z e^z. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Así, los coeficientes $C(q)$ en términos de las funciones (3.69) cuando $z = \beta$ son

$$\begin{aligned} C_3(q) &= -C_1(q) = \mathcal{F}_v(q) \frac{\Psi_3(\beta)}{\Psi_1(\beta)}, \\ C_4(q) &= \beta \mathcal{F}_v(q) \left[\frac{\Psi_3(\beta) - 2\Psi_2(\beta)}{\Psi_1(\beta)} \right]. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Sustituyendo (3.70) en las soluciones (3.54), (3.55) y (3.56), se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0(q, y) &= \frac{\mathcal{F}_v(q)}{\Psi_1(\beta)} \left\{ [-\Psi_2(\beta) - \beta y \Psi_3(\beta)] e^{-\beta y} + [\Psi_2(\beta) + \beta y (\Psi_3(\beta) - 2\Psi_2(\beta))] e^{\beta y} \right\}, \\ \frac{1}{H} \mathcal{U}_1(q, y) &= \frac{\mathcal{F}_v(q)}{\Psi_1(\beta)} \left\{ \left[-\Psi_2(\beta) - \beta \Psi_3(\beta) \left(y - \frac{1}{\beta} \right) \right] e^{-\beta y} \right. \\ &\quad \left. - \left[\Psi_2(\beta) + \beta (\Psi_3(\beta) - 2\Psi_2(\beta)) \left(y + \frac{1}{\beta} \right) \right] e^{\beta y} \right\} \end{aligned}$$

y

$$\frac{1}{2H^2} \mathcal{P}_0(q, y) = \frac{\beta \mathcal{F}_v(q)}{\Psi_1(\beta)} \left\{ -\Psi_3(\beta) e^{-\beta y} + [\Psi_3(\beta) - 2\Psi_1(\beta)] e^{\beta y} \right\}.$$

Simplificando las expresiones, se sigue que:

$$\frac{1}{2} \mathcal{W}_0(q, y) = \frac{\mathcal{F}_v(q)}{\Psi_1(\beta)} \left\{ \Psi_2(\beta) \left[\sinh(\beta y) - \beta y e^{\beta y} \right] + \beta y \sinh(\beta y) \Psi_3(\beta) \right\},$$

$$\frac{1}{2H} \mathcal{U}_1(q, y) = \frac{\mathcal{F}_v(q)}{\Psi_1(\beta)} \left\{ \Psi_2(\beta) \left[\sinh(\beta y) + \beta y e^{\beta y} \right] - \Psi_3(\beta) \left[\sinh(\beta y) + \beta y \cosh(\beta y) \right] \right\}$$

y

$$\frac{1}{(2H)^2} \mathcal{P}_0(q, y) = \frac{\beta \mathcal{F}_v(q)}{\Psi_1(\beta)} \left[\Psi_3(\beta) \sinh(\beta y) - \Psi_1(\beta) e^{\beta y} \right]. \quad (3.71)$$

Introduciendo ahora las funciones de (3.69) evaluadas en $z = \beta y$, se obtiene:

$$\mathcal{W}_0(q, y) = 2\mathcal{F}_v(q) \left[\frac{\Psi_2(\beta)\Psi_4(\beta y) + \beta y\Psi_3(\beta) \sinh(\beta y)}{\Psi_1(\beta)} \right], \quad (3.72)$$

$$\mathcal{U}_1(q, y) = 2H\mathcal{F}_v(q) \left[\frac{\Psi_2(\beta)\Psi_3(\beta y) - \Psi_3(\beta)\Psi_2(\beta y)}{\Psi_1(\beta)} \right] \quad (3.73)$$

y

$$\mathcal{P}_0(q, y) = (2H)^2\beta\mathcal{F}_v(q) \left[\frac{\Psi_3(\beta) \sinh(\beta y) - \Psi_1(\beta)e^{\beta y}}{\Psi_1(\beta)} \right]. \quad (3.74)$$

Por último, sustituyendo (3.60) y (3.65) en (3.57), se consigue:

$$\Theta_0(q, y) = -2C_5(q) \sinh(\beta y) = \mathcal{F}_\theta(q) \left[\frac{\sinh(\beta y)}{\sinh(\beta)} \right]. \quad (3.75)$$

Finalmente, si se realiza la transformada inversa de Hankel (3.34) a las correspondientes funciones (3.72), (3.73), (3.74) y (3.75), entonces se pueden encontrar ecuaciones de las componentes de la velocidad (radial y axial), la presión y la temperatura.

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \mathbb{H}_0^{-1} \{ \mathcal{W}_0(q, y) \} \\ u(x, y) &= \mathbb{H}_1^{-1} \{ \mathcal{U}_1(q, y) \} \\ p(x, y) &= \mathbb{H}_0^{-1} \{ \mathcal{P}_0(q, y) \} \\ \theta(x, y) &= \mathbb{H}_0^{-1} \{ \Theta_0(q, y) \} \end{aligned} \quad (3.76)$$

Por lo tanto, las funciones (3.72) a (3.75) son la solución analítica del sistema de ecuaciones acopladas (3.49) a (3.52) bajo las condiciones de frontera (3.31) y (3.32). En consecuencia, la transformada inversa de Hankel (3.34) recupera las cantidades adimensionales de las componentes de la velocidad, presión y temperatura (3.76). Sin embargo, esto último será conveniente calcularlo numéricamente.

3.5 Evaporación

En esta sección, vamos a distinguir tres mecanismos de evaporación en toda la superficie de la gota, es decir, la evaporación de cada porción de área superficial es impulsada por un mecanismo diferente. (A diferencia de los mecanismos de evaporación propuestos por Bianco et al. [5] para los regímenes de la gota Leidenfrost.)

$$A = \begin{cases} A_b & \text{si } r \leq r_b & \text{con } z = z_h & \text{(rojo)} \\ A_{\text{lat}} & \text{si } r_b < r \leq r_{\text{max}} & \text{con } z_h \leq z \leq z(r_{\text{max}}) & \text{(azul)} \\ A_B & \text{si } 0 < r \leq r_{\text{max}} & \text{con } z(r_{\text{max}}) < z & \text{(verde)} \end{cases} \quad (3.77)$$

La primera región A_b está situada debajo de la gota y su evaporación se debe a la transferencia de calor a través de la capa de vapor, mientras que la segunda región A_{lat} está ubicada en la región lateral del hemisferio inferior cuya evaporación se debe a la transferencia de calor ocasionada por su proximidad con el plato caliente. Sin embargo, la última región A_B se localiza en la parte superior de la gota y, como resultado, su proceso de evaporación es diferente a las demás, ya que las moléculas del líquido atraviesan por un proceso de difusión en el aire circundante a temperaturas relativamente altas.

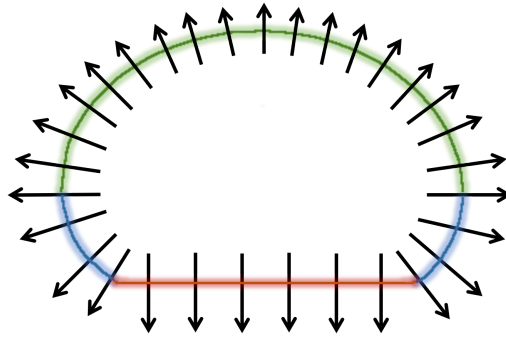


Figura 3.2: Diagrama de la evaporación sobre toda la superficie de la gota Leidenfrost. Las flechas representan el flujo de evaporación y difusión.

La evaporación Φ se define a partir de la condición de Stefan en las primeras dos regiones mencionadas anteriormente. Luego, la tasa de transferencia de calor se calcula como el flujo del campo vectorial de calor Φ_q , la cual está dada por:

$$\Phi_q = \int_A \vec{q} \cdot d\vec{S} \quad (3.78)$$

y \vec{q} se rige por la ley de Fourier de la conducción de calor:

$$\vec{q} = -k_v \nabla_{\vec{x}} T, \quad (3.79)$$

donde k_v es la conductividad térmica del vapor. Sustituyendo (3.79) en (3.78) en coordenadas cilíndricas, se puede calcular el flujo Φ_q con base en la temperatura T dado por:

$$\Phi_q = -2\pi k_v \int_{r_i}^{r_f} (\nabla_{\vec{x}} T \cdot \hat{n}) r dr, \quad (3.80)$$

donde $\nabla_{\vec{x}} T \cdot \hat{n}$ es la derivada direccional en la dirección de \hat{n} , un vector unitario normal a la superficie A en la región de integración del radio inicial r_i al radio final r_f .

Por otro lado, la tasa de transferencia de calor Φ_q es una medida de la cantidad de energía transferida por unidad de tiempo, la cual se puede expresar en términos del flujo de evaporación Φ en el área superficial A .

$$\Phi_q = \rho_l L_{lv} A \Phi \quad (3.81)$$

Sustituyendo (3.81) en (3.80), pero usando el área superficial adimensional (3.4), entonces se obtiene que el flujo de evaporación es

$$\Phi = \frac{-2k_v}{\rho_l L_{lv} \lambda_c^2 \Lambda} \int_{r_i}^{r_f} (\nabla_{\vec{x}} T \cdot \hat{n}) r dr, \quad (3.82)$$

donde k_v es la conductividad térmica del vapor, ρ_l es la densidad del líquido, L_{lv} es el calor latente entre el cambio de fase líquido-vapor y λ_c es la longitud capilar del líquido.

3.5.1 Capa de vapor

En la interfaz de la capa de vapor ($z = z_h = h$), el vector normal es $\hat{n} = \hat{z}$ y, en consecuencia, el flujo de evaporación de la primera región es

$$\Phi_b = \frac{-2k_v}{\rho_l L_{lv} \lambda_c^2 \Lambda_b} \int_0^{r_b} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=h} \right) r dr. \quad (3.83)$$

Introduciendo ahora el número de Jakob Ja_v y la difusividad térmica α_v definidas como:

$$Ja_v = \frac{c_{pv} (T_p - T_l)}{L_{lv}} \quad (3.84)$$

y

$$\alpha_v = \frac{k_v}{\rho_v c_{pv}}, \quad (3.85)$$

respectivamente, con c_{pv} siendo la capacidad calorífica específica del vapor. Entonces, el flujo (3.83) se convierte en

$$\frac{\Phi_b}{\alpha_v} = 2 \left(\frac{\rho_v}{\rho_l} \right) \frac{Ja_v}{\lambda_c^2 \Lambda_b} \int_0^{r_b} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{T_p - T}{T_p - T_l} \right) \Big|_{z=h} \right] r dr. \quad (3.86)$$

Haciendo los cambios de variable (3.23) y (3.24), la expresión anterior en términos de cantidades adimensionales es

$$\frac{h\Phi_b}{\alpha_v} = 2 \left(\frac{\rho_v}{\rho_l} \right) \text{Ja}_v G_\theta \quad (3.87)$$

donde

$$G_\theta = \int_0^1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=1} \right) x dx. \quad (3.88)$$

Para una situación cuasi-estática, la velocidad del vapor expulsado v_0 está relacionado con el flujo de evaporación Φ_b por medio de la conservación de masa:

$$v_0 = \left(\frac{\rho_l}{\rho_v} \right) \Phi_b = 2 \left(\frac{\alpha_v}{h} \right) \text{Ja}_v G_\theta. \quad (3.89)$$

Finalmente, note que la función (3.88) puede ser calculada usando (3.76), la transformada inversa de Hankel de orden cero aplicada a la ecuación (3.75).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=1} &= \mathbb{H}_0^{-1} \left\{ \frac{\partial \Theta_0}{\partial y} \Big|_{y=1} \right\} \\ &= \mathbb{H}_0^{-1} \left\{ \mathcal{F}_\theta(q) \beta \left[\frac{\cosh(\beta y)}{\sinh(\beta)} \right] \Big|_{y=1} \right\} \\ &= \mathbb{H}_0^{-1} \{ \mathcal{F}_\theta(q) \beta \coth(\beta) \} \end{aligned} \quad (3.90)$$

3.5.2 Hemisferio inferior

El hemisferio inferior de la gota es la región lateral entre el diámetro máximo de la gota y su zona de contacto con la capa de vapor, entonces el flujo de evaporación de la segunda región es

$$\Phi_{\text{lat}} = \frac{-2k_v}{\rho_l L_{lv} \lambda_c^2 \Lambda_{\text{lat}}} \int_{r_b}^{r_{\text{max}}} (\nabla_{\vec{x}} T \cdot \hat{n}) r dr. \quad (3.91)$$

En esta región, la derivada direccional es el gradiente de concentración de temperatura $\nabla_{\vec{x}} T$ en la dirección del vector normal \hat{n} y se estima mediante un perfil de temperatura lineal en la dirección perpendicular a la superficie de la gota.

$$\nabla_{\vec{x}} T \cdot \hat{n} \approx \frac{T_l - T_p}{z [1 + (\dot{z})^2]^{1/2}}, \quad (3.92)$$

donde $z = z(r)$ es la posición vertical de la gota y $\dot{z} \equiv dz/dr$.

Una vez más, se introducen el número de Jakob (3.84) y la difusividad térmica (3.85) para escribir el flujo (3.91) como

$$\frac{\Phi_{\text{lat}}}{\alpha_v} = 2 \left(\frac{\rho_v}{\rho_l} \right) \frac{\text{Ja}_v}{\lambda_c^2 \Lambda_{\text{lat}}} \int_{r_b}^{r_{\text{max}}} \left\{ z [1 + (\dot{z})^2]^{1/2} \right\}^{-1} r dr. \quad (3.93)$$

Haciendo los cambios de variable $r = \lambda_c \xi$ y $z_H - z = \lambda_c \eta$ junto con la relación de aspecto (3.29), la expresión anterior en términos de cantidades adimensionales es

$$\frac{\lambda_c \Phi_{\text{lat}}}{\alpha_v} = 2 \left(\frac{\rho_v}{\rho_l} \right) \frac{J a_v}{\Lambda_{\text{lat}}} G_\eta \quad (3.94)$$

donde

$$G_\eta = \int_{\xi_b}^{\xi_{\text{max}}} \frac{\xi d\xi}{(H\xi_b + \eta_b - \eta) [1 + (\dot{\eta})^2]^{1/2}} \quad (3.95)$$

y $\eta = \eta(\xi)$ es la posición vertical adimensional y $\dot{\eta} \equiv d\eta/d\xi$.

3.5.3 Hemisferio superior

El hemisferio superior de la gota es la zona de contacto con el aire circundante por arriba de su diámetro máximo. Luego, el flujo de evaporación de la tercera región es

$$\Phi_B = - \left(\frac{\rho_v}{\rho_l} \right) \frac{\Delta \rho_\infty}{\Delta \rho_v} K_{lv} \quad \text{con} \quad \Delta \rho \equiv \rho - \rho_{\text{int}}, \quad (3.96)$$

donde $\Delta \rho$ se calcula con respecto a la densidad del vapor en la interfaz aire-líquido ρ_{int} y K_{lv} es un coeficiente de transferencia de masa. Mientras que $\Delta \rho_v = \rho_v - \rho_{\text{int}}$ y $\Delta \rho_\infty = \rho_\infty - \rho_{\text{int}}$ siendo ρ_v la densidad del vapor y ρ_∞ es la densidad del vapor lejos de la gota.

Si se considera un esferoide achatado de un medio infinito, con semieje mayor r_{max} y semieje menor $z_H - z(r_{\text{max}})$, entonces el coeficiente de transferencia de masa K_{lv} se puede estimar tomando en consideración el número de Sherwood promedio:

$$\text{Sh} = \frac{2r_{\text{max}} K_{lv}}{\mathcal{D}_{v,\text{aire}}}, \quad (3.97)$$

donde $\mathcal{D}_{v,\text{aire}}$ es el coeficiente de difusión empíricamente dado por la correlación de Fuller.

$$\mathcal{D}_{v,\text{aire}} = \frac{(1.0112 \times 10^{-5}) [(1/M_v) + (1/M_{\text{aire}})]^{1/2} T^{1.75}}{P (\Sigma_v^{1/3} + \Sigma_{\text{aire}}^{1/3})} \quad (3.98)$$

La temperatura T y la presión P se miden en $^\circ\text{K}$ y $k\text{Pa}$, respectivamente. Asimismo, M es la masa molar y Σ es la suma de los volúmenes de difusión atómica. En consecuencia, el coeficiente de difusión $\mathcal{D}_{v,\text{aire}}$ tiene unidades de m^2/s .

También se incluye una dependencia con el número de transferencia de masa de Spalding, Bm , para tener en cuenta la convección de Stefan, el cual está dado por:

$$\text{Bm} = \frac{\gamma_{\text{int}} - \gamma_\infty}{1 - \gamma_{\text{int}}} = - \frac{\Delta \rho_\infty}{\Delta \rho_v} \quad (3.99)$$

con $\gamma_{\text{int}} = \rho_{\text{int}}/\rho_v$ y $\gamma_{\infty} = \rho_{\infty}/\rho_v$ siendo las fracciones de masa de vapor en la interfaz aire-líquido y en el ambiente, respectivamente. Utilizando los números adimensionales (3.97) y (3.99), entonces el flujo (3.96) se escribe como

$$\Phi_B = \left(\frac{\rho_v}{\rho_l}\right) \frac{\text{Bm Sh } \mathcal{D}_{v,\text{aire}}}{2r_{\text{max}}}. \quad (3.100)$$

Por otro lado, si se hace una modificación, el número de Sherwood es

$$\text{Sh} = \text{Sh}_0 \frac{\ln(1 + \text{Bm})}{\text{Bm}} \quad (3.101)$$

con

$$\text{Sh}_0 = \frac{-4}{\cosh(\omega) [2 \tan^{-1}(e^{\omega}) - \pi] \{1 + \sinh(\omega) \tanh(\omega) \ln[\coth(\omega/2)]\}}, \quad (3.102)$$

donde $\omega = \tanh^{-1}(\eta_{\text{max}}/\xi_{\text{max}})$. El número de Sherwood (3.101) se deduce en el apéndice D y el número de Sherwood (3.102) se obtiene por analogía con [22–24] para transferencias de masa-calor.

Luego, si se sustituye (3.101) en (3.100) con la relación $r = \lambda_c \xi$, entonces el flujo de evaporación del hemisferio superior en términos de cantidades adimensionales es

$$\frac{\lambda_c \Phi_B}{\alpha_v} = \left(\frac{\rho_v}{\rho_l}\right) \frac{\text{Sh}_0 \Pi_1}{2\xi_{\text{max}}}, \quad (3.103)$$

donde se introduce el primer grupo adimensional:

$$\Pi_1 = \left(\frac{\mathcal{D}_{v,\text{aire}}}{\alpha_v}\right) \ln(1 + \text{Bm}), \quad (3.104)$$

pero se asume que la densidad del vapor en la superficie de la gota es mucho mayor que la densidad del vapor lejos de ella ($\rho_{\text{int}} \gg \rho_{\infty}$) en el caso de una gota Leidenfrost, entonces el número adimensional (3.99) se aproxima al siguiente:

$$\text{Bm} \approx \frac{\gamma_{\text{int}}}{1 - \gamma_{\text{int}}}. \quad (3.105)$$

Finalmente para las diferentes regiones de la gota, el flujo de evaporación Φ se deduce de la condición de Stefan debajo de la gota, de la transferencia de calor en la región lateral del hemisferio inferior, y del flujo de evaporación convectivo de Stefan en el hemisferio superior de la gota. Por lo tanto, las respectivas expresiones (3.87), (3.94) y (3.103) indican los mecanismos de evaporación de la gota Leidenfrost a través de toda su superficie (3.77).

3.6 Peso de la gota y la presión del vapor

En condiciones cuasiestáticas, el peso de la gota es balanceada por la contribución a la presión de toda la superficie de contacto A_b en la interfaz entre el líquido y la capa de vapor.

$$m_l g = \int_{A_b} \left(\Delta \vec{P} \Big|_{z=h} \right) \cdot d\vec{S} \quad (3.106)$$

En coordenadas cilíndricas, se tiene que:

$$\rho_l g V = 2\pi \int_0^{r_b} (\Delta P|_{z=h}) r dr, \quad (3.107)$$

ya que $\Delta \vec{P}$ está en la dirección \hat{z} .

Utilizando la definición del número de Bond (3.1) en el volumen $V = (4\pi/3)R^3$ con radio característico R , la definición de momento adimensional (3.23), haciendo el cambio de variable $x = r/r_b$ y recordando la relación de aspecto (3.29), entonces la expresión anterior se convierte en

$$\frac{2}{3} \rho_l g \lambda_c^3 \text{Bo}^{3/2} = \frac{\mu_v v_0 r_b^2}{h^3} \int_0^{r_b} (p|_{y=1}) r dr = \frac{\mu_v v_0 h}{H^4} G_p \quad (3.108)$$

donde

$$G_p = \int_0^1 (p|_{y=1}) x dx. \quad (3.109)$$

Sin embargo, por la velocidad del vapor expulsado (3.89), se encuentra una ecuación que relaciona el número de Bond y la relación de aspecto por medio de cantidades adimensionales. Así,

$$\frac{1}{3} \Pi_2 \text{Bo}^{3/2} = \frac{G_\theta G_p}{H^4}, \quad (3.110)$$

donde se introduce el segundo grupo adimensional:

$$\Pi_2 = \frac{1}{\text{Ja}_v} \left(\frac{\rho_l g \lambda_c^3}{\mu_v \alpha_v} \right). \quad (3.111)$$

Note que la función (3.109) puede ser calculada usando (3.76), la transformada inversa de Hankel de orden cero aplicada a la ecuación (3.74).

$$p|_{y=1} = \mathbb{H}_0^{-1} \{ \mathcal{P}_0(q, y=1) \} = (2H) \mathbb{H}_0^{-1} \left\{ \mathcal{F}_v(q) \beta \left[\frac{\Psi_3(\beta) \sinh(\beta) - \Psi_2(\beta) e^\beta}{\Psi_1(\beta)} \right] \right\} \quad (3.112)$$

De modo que el balance entre el peso de la gota y la presión del vapor ayuda a conocer el grosor de la capa de vapor implícita en la relación de aspecto (3.29) presente en la ecuación (3.110) para un número de Bond dado y las propiedades del líquido en cuestión.

3.7 Evolución del volumen a través del tiempo

Finalmente, en esta sección, se estudia la evolución del volumen de una gota Leidenfrost a través del tiempo, ya que su volumen debe disminuir por la evaporación y la difusión producidas en sus fronteras.

$$\frac{dV}{dt} = - \sum_i A_i \Phi_i = -A_b \Phi_b - A_{\text{lat}} \Phi_{\text{lat}} - A_B \Phi_B \quad (3.113)$$

Definiendo el tiempo adimensional $\tau = t/\mathcal{T}$ donde \mathcal{T} es una *escala de tiempo característica* y recordando el número de Bond en términos del volumen de la gota (3.3), se tiene que:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{4\pi \lambda_c^3}{3} \frac{d}{d\tau} (\text{Bo}^{3/2}) = 2\pi \text{Bo}^{1/2} \frac{\lambda_c^3}{\mathcal{T}} \frac{d\text{Bo}}{d\tau}. \quad (3.114)$$

Para finalizar, recordando el área adimensional (3.4) y la relación de aspecto (3.29) y, despejando los flujos de evaporación Φ de las expresiones (3.87), (3.94) y (3.103), entonces estas cantidades se sustituyen en (3.113), junto con la derivada temporal del volumen (3.114). En consecuencia,

$$\frac{d\text{Bo}}{d\tau} = - \left(\frac{\alpha_v \rho_v \text{Ja}_v \mathcal{T}}{\rho_l \lambda_c^2} \right) \left(\frac{\xi_b G_\theta}{H} + G_\eta + \frac{\Pi_1 \text{Sh}_0 \Lambda_B}{4 \text{Ja}_v \xi_{\text{max}}} \right) \frac{1}{\text{Bo}^{1/2}}. \quad (3.115)$$

No obstante, se impone que el primer término al lado derecho de la ecuación anterior sea igual a la unidad, por razones de simplicidad y coherencia adimensional. Esto permite definir la escala de tiempo característica de la siguiente manera:

$$\frac{\alpha_v \rho_v \text{Ja}_v \mathcal{T}}{\rho_l \lambda_c^2} = 1 \Rightarrow \mathcal{T} = \frac{1}{\text{Ja}_v} \left(\frac{\rho_l \lambda_c^2}{\alpha_v \rho_v} \right). \quad (3.116)$$

Luego, la ecuación (3.115) se reduce a una ecuación diferencial en términos de cantidades adimensionales:

$$\frac{d\text{Bo}}{d\tau} = - \left(\frac{\xi_b G_\theta}{H} + G_\eta + \frac{\Pi_3 \text{Sh}_0 \Lambda_B}{\xi_{\text{max}}} \right) \frac{1}{\text{Bo}^{1/2}}, \quad (3.117)$$

donde se introduce el tercer grupo adimensional:

$$\Pi_3 = \frac{\Pi_1}{4 \text{Ja}_v}. \quad (3.118)$$

Resolviendo numéricamente la ecuación diferencial (3.117) se obtiene la evolución del número de Bond a través de un tiempo característico de un gota en estado Leidenfrost a partir de sus propiedades geométricas adimensionales $\xi_b(\text{Bo})$, $\xi_{\text{max}}(\text{Bo})$, $\Lambda_B(\text{Bo})$ y $\text{Sh}(\text{Bo})$ y de sus cantidades adimensionales $G_\theta(\text{Bo}, \Pi_2)$, $G_\eta(\text{Bo}, \Pi_2)$ y $H(\text{Bo}, \Pi_2)$. Por lo tanto, el cambio

del número de Bond (Bo) está impulsado por los valores de los grupos adimensionales Π_2 y Π_3 .

Finalmente, la razón de evaporación está dada como el cambio de la masa en función del tiempo ($-\dot{m}_l$) donde el signo menos representa pérdida de masa y, por consiguiente, también reducción del volumen o disminución del radio a través del tiempo. Por lo tanto, a partir de las expresiones (3.114) y (3.117) se consigue una razón de evaporación de manera analítica para gotas en estado Leidenfrost.

$$-\dot{m}_l = -\rho_l \frac{dV}{dt} = \frac{2\pi\rho_l\lambda_c^3}{\mathcal{T}} \left(\frac{\xi_b G_\theta}{H} + G_\eta + \frac{\Pi_3 \text{Sh}_0 \Lambda_B}{\xi_{\max}} \right) \quad (3.119)$$

Note que esta forma de describir el comportamiento no se restringe a los regímenes de las gotas, pero la principal contribución a la razón de evaporación (3.119) para gotas grandes está en su radio de contacto, mientras que su radio de contacto y radio máximo son igualmente importantes para gotas pequeñas. Esto se debe a las formas adoptadas por las gotas Leidenfrost en el régimen estacionario, las cuales son en forma de panqué ($r_{\max} > \lambda_c$) y en forma semi-esférica ($r_{\max} < \lambda_c$), respectivamente.

Por lo tanto, la evolución completa de la gota Leidenfrost está determinada con la solución numérica de la ecuación fundamental del modelo teórico (3.117) y a partir de las propiedades termofísicas del fluido y la temperatura del plato caliente.

Capítulo 4

Experimentos

En este capítulo se presentan las contribuciones principales de esta tesis donde se incluye el diseño del experimento y el desarrollo experimental. Así como el protocolo de análisis y los resultados obtenidos de las mediciones.

4.1 Diseño y desarrollo experimental

La Figura 4.1 muestra el diagrama del plato cónico de aluminio ($d_1 = 15$ cm de diámetro, $d_2 = 4$ cm de ancho y rugosidad $< 0.5 \mu m$) utilizado en los experimentos, el cual fue pulido y limpiado para disminuir sus rugosidades. Este plato fue maquinado radialmente, con un ángulo pequeño de inclinación ($\alpha = 1^\circ \pm 0.5^\circ$) medido desde su horizontal para mantener a las gotas en el centro de su superficie.

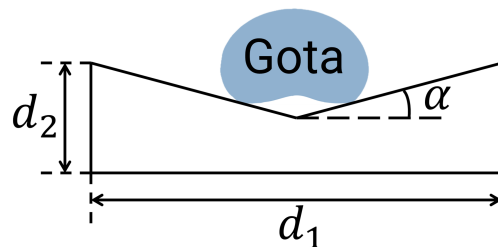


Figura 4.1: Diagrama del plato metálico.

En el arreglo experimental, el plato metálico se colocó sobre la superficie cerámica ($17.8 \text{ cm} \times 17.8 \text{ cm}$) de una plancha eléctrica Isotemp de *Fisher Scientific*. La plancha es capaz de calentar su superficie cerámica en un rango de temperaturas de 30° C a 540° C . La temperatura del plato se controló mediante un relé de estado sólido (o SSR por sus

siglas en inglés *Solid State Relay*) conectado a un controlador de temperatura a través de un termopar tipo K ATT29, el cual es un transductor formado por la unión de dos metales distintos (cromel/alumel).

También, se colocaron dos cámaras Photron UX100 y SA3 de alta velocidad en las respectivas posiciones superior y lateral. Las distancias focales de las lentes de las cámaras son de $f = 105 \text{ mm}$ cada una para detectar a la gota desde diferentes ángulos con una alta resolución en su toma de imágenes. Por otro lado, para evitar el deterioro de la lente superior, se colocó una placa transparente de vidrio entre el plato y la cámara; pero en su defecto, también se ha colocado un ventilador para evitar el sobrecalentamiento de la cámara y disipar los gases emitidos por la evaporación de la gota, mientras que la superficie del plato fue iluminada desde diferentes lugares ortogonales al mismo.

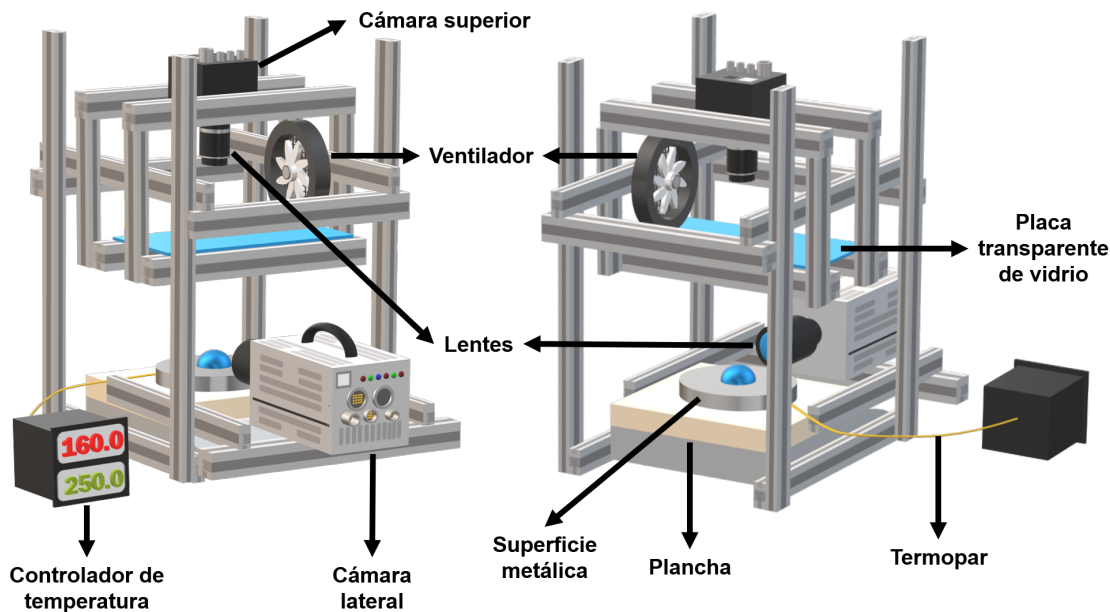


Figura 4.2: Diseño del arreglo experimental.

La Figura 4.2 muestra todo el diseño experimental usado para estudiar el efecto Leidenfrost producido cuando una gota con un volumen inicial V_0 entra en contacto sobre el plato cónico calentado a una temperatura T_p por arriba de la temperatura de Leidenfrost del líquido antes mencionado. Asimismo, cabe destacar que todo el arreglo experimental estuvo dentro de una cámara de extracción de humo encendida en la realización de estos experimentos para disminuir el peligro de intoxicación.

El procedimiento de la realización de los experimentos es sencillo. Una vez que

el arreglo experimental está nivelado con una correcta iluminación y cuyas cámaras están conectadas a una computadora, entonces cada uno de los componentes se conecta a la corriente eléctrica, se enciende y se abre el programa para grabar videos. Posteriormente, se ingresa la temperatura del sustrato deseada T_p , indicada en color verde en la Figura 4.2. Después de esperar algunos minutos, el plato de aluminio llega a la temperatura deseada T_p cuando el indicador rojo tiene el mismo valor al ingresado previamente.

Finalmente, se elige un líquido y, con una bata de laboratorio, unos guantes de látex y la ayuda de una micropipeta de volumen variable con capacidad de $100 \mu l$ hasta $1 ml$, se deposita una gota con un volumen inicial V_0 sobre el plato caliente a una temperatura T_p donde, mediante las cámaras de video, la gota es grabada en dos direcciones diferentes. La vista superior de la gota se grabó a 50 fps con una resolución espacial de 768×768 píxeles para el agua y 1280×1024 píxeles para los demás líquidos, y la vista lateral de la gota se grabó a 250 fps para gotas con tiempos de vida cortos o 125 fps en el caso contrario, pero ambas con una resolución espacial de 512×352 píxeles.

Por consiguiente, el plato cónico de aluminio puede confinar a las gotas Leidenfrost y el arreglo experimental es el adecuado para grabarlas desde diferentes posiciones (superior y lateral) a temperaturas del plato suficientemente altas.

4.2 Procesamiento de imágenes

Dependiendo de la cantidad de líquido depositado y el número de cuadros por segundo (fps), los videos capturados pueden tener una duración de hasta varias decenas de segundos inclusive estar compuestos por miles de imágenes. Analizar las imágenes una por una o, siquiera medir el área, el perímetro o el radio a mano para realizar una medición cada cierto número de imágenes habría sido muy laborioso. Por ejemplo, un video de la evaporación completa de una gota de agua cuyo tiempo de vida sea $\tau = 200\text{s}$ tendrá un total 10 mil imágenes si se graba a 50 fps.

Para economizar tiempo, se realizó una investigación para determinar un método de análisis sencillo y útil, y calcular el radio como función del tiempo experimentalmente a partir de las diferentes vistas de la geometría de la gota. Por tal motivo, fue necesario escribir un programa tanto en ImageJ como en Matlab, programas enfocados al análisis y el procesamiento de imágenes, para obtener las dimensiones de la gota Leidenfrost a lo largo del tiempo y conseguir la evolución completa de su evaporación con diferentes líquidos y para ambos proyecciones de la gota (superior y lateral). Los programas realizados están en el Apéndice E.

4.2.1 Vista superior

Suponga que se tiene un video segmentado de la vista superior de la gota, llamado *Secuencia de imágenes.avi*, el cual se abre en ImageJ seguido de una imagen del plato sin líquido, nombrada *Fondo.png*; pero manteniendo la misma iluminación y resolución espacial en ambos casos. En ocasiones, la última imagen del video sirve como fondo cuando la gota Leidenfrost ya se ha evaporado completamente.

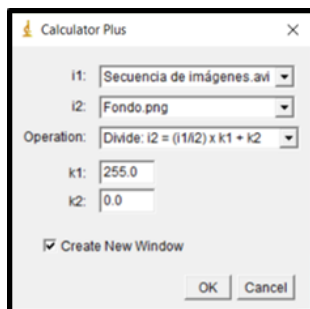


Figura 4.3: Interfaz de Calculator Plus.

Posteriormente, en la interfaz de *Calculator Plus* en ImageJ, se selecciona la operación *Dividir* junto con los valores $k_1 = 255.0$ para indicar una máxima intensidad de brillo en la secuencia de imágenes (i_1) y $k_2 = 0.0$ para indicar una intensidad nula en la imagen de fondo (i_2), como se han señalado en la Figura 4.3, ya que estas constantes están en términos de la intensidad de los colores primarios (RGB). A pesar de la baja iluminación aparente de la superficie del plato mostrado en la secuencia de imágenes de la Figura 4.4a, esta serie de comandos sustraen el fondo del plato dejando únicamente a la gota como se observa en la Figura 4.4b.

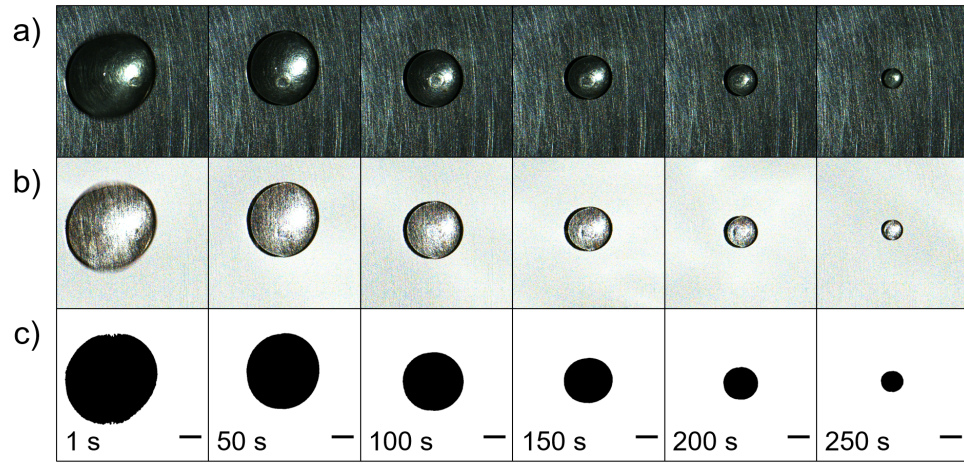


Figura 4.4: Vista superior de una gota Leidenfrost de agua ($V_0 = 250\mu\text{l}$) depositada sobre un plato a $T_p = 250^\circ\text{C}$. La barra de escala mide 2.5 mm.

Por último, la Figura 4.4c muestra la binarización de la secuencia anterior, la cual fue realizada con una macro en ImageJ para una secuencia de imágenes de la vista superior de una gota de agua y, poniendo un factor de conversión de escala en pixel/mm, se puede calcular un radio efectivo (r) con base en el área ($A = \pi r^2$) o el perímetro ($P = 2\pi r$) de la silueta de la gota. (La macro utilizada está en la sección E.1.)

En el caso de la Figura 4.4, se muestran imágenes en intervalos de 50 segundos, pues el tiempo de vida para una gota de agua en estado Leidenfrost puede ascender hasta varios minutos. Note que la barra de escala es aproximadamente la longitud capilar del agua ($\lambda_c = 2.52\text{ mm}$), entonces se observa que la forma de panqué se conserva durante sus primeros 200 s de vida si depositamos una gota de $V_0 = 250\mu\text{l}$; en cambio, se aprecia una forma semi-esférica a partir del tiempo $t = 250\text{ s}$. En la siguiente subsección, dicho comportamiento es corroborado por la secuencia de imágenes de la vista lateral.

4.2.2 Vista lateral

El análisis de los videos de la vista lateral de la gota Leidenfrost está dividido en dos partes. La primera parte se realiza de manera análoga a la vista superior, es decir, se aplica el método descrito en la subsección anterior para sustraer el fondo de la Figura 4.5a y obtener la secuencia de imágenes de la Figura 4.5b y, finalmente, se aplica la macro en ImageJ de la sección E.1 para conseguir las siluetas mostradas en la Figura 4.5c.

Por otro lado, la Figura 4.5d se obtuvo al seleccionar la pestaña *Proceso* seguida de *Encontrar bordes* en la interfaz de ImageJ, para cada imagen de la silueta de la gota, con la finalidad de analizarla como si fuera un sólido de revolución y calcular su volumen utilizando los puntos de su contorno. Sin embargo, este procedimiento si bien da mediciones precisas, también es bastante laborioso realizarlo para cada imagen.

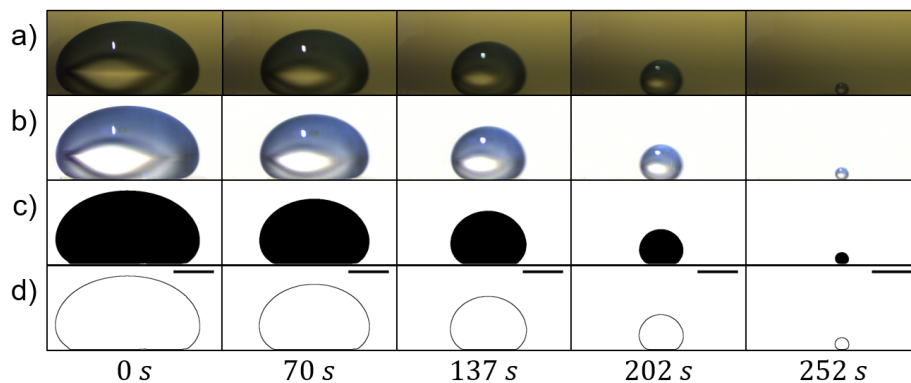


Figura 4.5: Vista lateral de una gota Leidenfrost de agua ($V_0 = 250\mu\text{l}$) depositada sobre un plato a $T_p = 250^\circ\text{C}$. La barra de escala mide 2.5 mm.

Por consiguiente, se realizó un programa en MATLAB para procesar las imágenes de las siluetas en blanco y negro y, calcular el volumen (V), las posiciones radiales (r) y las posiciones axiales ($z_H - z$) de la gota de manera automática. A continuación, se explica la segunda parte del algoritmo de cómo se analiza la secuencia de imágenes. (Los programas realizados en MATLAB están en las secciones E.2 y E.3.)

Considere mil perfiles de una gota en diferentes tiempos de la forma de las Figuras 4.5c guardadas en archivos titulados como *gota00001.png*, *gota00002.png* y, así sucesivamente, hasta *gota01000.png* junto con los programas de Matlab en una misma carpeta. El programa pide algunos datos como el factor de conversión de escala en pixeles/mm, el número de cuadros por segundo (fps) con el que se grabó el video, el tiempo de vida de la

gota medida experimentalmente (τ), la longitud capilar del líquido utilizado (λ_c), el ancho del recorte de la imagen (a) y, si hay, el salto de cada captura de imagen (s). (En videos de la evolución completa de la gota, se tendrá que $s = 1$.)

Luego, el programa principal importa y lee cada una de las imágenes de la silueta de la gota para localizar su centroide (X_c, Y_c) con base en los puntos de su contorno que guarda en la matriz $[\vec{X}, \vec{Y}]$ previamente encontrados. Posteriormente, divide y recorta a cada imagen en dos partes (izquierdo y derecho) tomando como referencia el centroide de la gota, pero gira horizontalmente al contorno izquierdo de tal manera que ambos contornos tienen la misma orientación. En seguida, detecta los conjuntos de puntos $\{(X_z, Y_z)\}$ y $\{(X_d, Y_d)\}$ para guardarlos en las matrices $[\vec{X}_z, \vec{Y}_z]$ y $[\vec{X}_d, \vec{Y}_d]$ de sus respectivos contornos izquierdo y derecho. Ver la Figura 4.6.

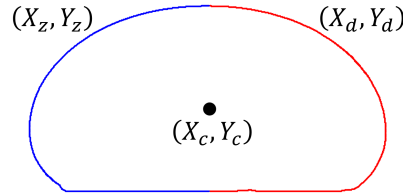


Figura 4.6: División de los contornos: izquierdo (azul) y derecho (rojo) del perfil de una gota Leidenfrost.

En forma individual, el programa principal manda a llamar una función nombrada *medicion.m* que ordena los conjuntos de vectores $\{(X_i, Y_i)\}$ normalizados a la escala para calcular el radio máximo (r_{\max}), el radio de contacto (r_b), las distancias axiales ($z_H - z_h$) y ($z_H - z(r_{\max})$) en milímetros (mm), mientras que el volumen (V) medido en microlitros ($\mu l = \text{mm}^3$) se calcula como un sólido de revolución de manera discreta.

$$V = \sum_{i < n-1} \pi \bar{X}_i^2 \Delta Y_i = \frac{\pi}{4} \sum_{i < n-1} (X_i + X_{i+1})^2 (Y_i - Y_{i+1}) \quad (4.1)$$

Una vez hecha cada una de estas mediciones para cada parte de la gota, se obtiene un promedio del volumen, radio máximo, radio de contacto y la distancia axial $z_H - z_{\max}$, pero se toma la máxima distancia en el caso de la altura de la gota, $z_H - z_h$. Asimismo, el número de Bond (Bo), las distancias adimensionales (η y ξ) y cada uno de sus logaritmos en base 10 son calculados considerando la longitud capilar del líquido (λ_c) como la longitud característica. El volumen (V), número de Bond (Bo) y las dimensiones de la gota (r y $z_H - z$) son graficados en función del tiempo, así como los datos de $\log_{10}(\xi)$ y $\log_{10}(\eta)$ son

graficados con respecto a $\log_{10}(\text{Bo})$; todos estos datos son guardados en un archivo llamado *Mediciones.xlsx*, el cual se encontrará en la misma carpeta junto con las imágenes de las siluetas y los programas en MATLAB.

Sin embargo, existen dos casos para medir el tiempo de las gotas Leidenfrost dependiendo si el video de la gota se grabó a trozos o no. Definiendo $s_0 = s/\text{fps}$ y $f_i = g_i - s_0$, el tiempo de la k -ésima imagen de la gota para cada caso está dado por:

$$t_k = \begin{cases} (k-1)s_0 & \text{si } k = 1, \dots, n_1 \text{ y } n_2 = 1 \\ (k-1)s_0 + \sum_{i=1}^{n_1} f_i & \text{si } k = 1, 2, \dots, n_1 n_2 \text{ y } n_2 \neq 1, \end{cases} \quad (4.2)$$

donde s_0 es un salto de captura de imagen (s) normalizado al número de cuadros por segundo (fps), n_1 es el número de imágenes capturadas por cada trozo, n_2 es el número de trozos de la grabación y g_i son las brechas temporales entre ellos. Note que $n_1 n_2$ es el número total de mediciones obtenidas de la gota Leidenfrost si la gráfica es a trozos. (En caso contrario, el número total de mediciones obtenidas es n_1 .)

Por lo tanto, si se tienen videos con las diferentes vistas de la evolución completa de las gotas en estado Leidenfrost, entonces las técnicas implementadas anteriormente son útiles para medir su perímetro $P(t)$, área $A(t)$ y volumen $V(t)$ como funciones del tiempo y, también pueden ser útiles para cualesquiera imágenes del perfil de un objeto sólido tridimensional con simetría cilíndrica salvo, tal vez, algunas modificaciones al programa principal según se requieran. (Por ejemplo, medir el volumen de diferentes tamaños de jarrones, balones, botellas, cables, tanques de gas, platos, lápices, entre otros objetos cuya vista superior sea circular.)

4.3 Resultados experimentales

En este trabajo, los experimentos se realizaron utilizando el arreglo experimental mostrado en la Figura 4.2, donde se depositaron gotas con un volumen inicial V_0 (μl) sobre un plato de aluminio caliente a la temperatura T_p ($^{\circ}\text{C}$), para siete líquidos diferentes. La temperatura del plato debe ser mayor a las temperaturas de Leidenfrost para estos líquidos ($T_p > T_L$). (Las temperaturas de Leidenfrost de los líquidos pueden consultarse en la Figura 2.3.) Además, algunas de las propiedades físicas de los líquidos utilizados se encuentran en la Tabla 4.1.

Las mediciones fueron obtenidas a partir de realizar el método de procesamiento de imágenes en los videos capturados de las distintas vistas de la gota, el cual fue descrito anteriormente y cuyos programas en ImageJ y Matlab están en el Apéndice E. Todos los resultados experimentales se pueden consultar en los correspondientes Apéndices F y G para la vista superior y la vista lateral de las gotas Leidenfrost de diferentes líquidos.

Líquido	Densidad ρ_l (kg/m^3)	Longitud capilar λ_c (mm)	Temperatura de ebullición T_B ($^{\circ}\text{C}$)	Calor latente L_{lv} (kJ/kg)
Agua	962.6	2.52	93	2210.6
Acetona	755.8	1.64	50	521.5
Cloroformo	1422.1	1.28	54	252.8
Etanol	741.0	1.55	72	857.8
Hexano	622.4	1.52	61	344.0
Metanol	754.9	1.60	59	1110.0
Isopropanol	729.7	1.49	76	672.2

Tabla 4.1: Algunas propiedades termofísicas de líquidos a la temperatura de ebullición local.

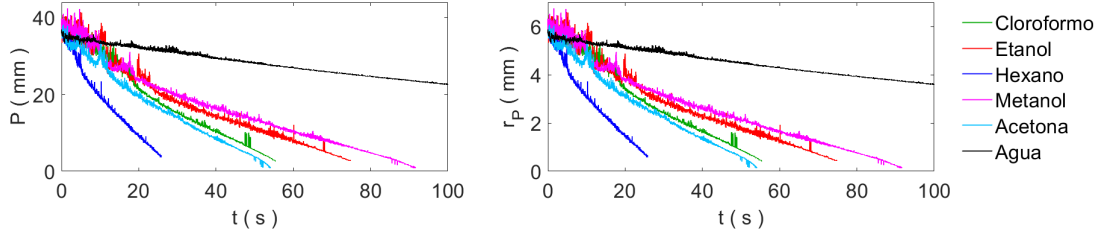
4.3.1 Vista superior

Radio efectivo

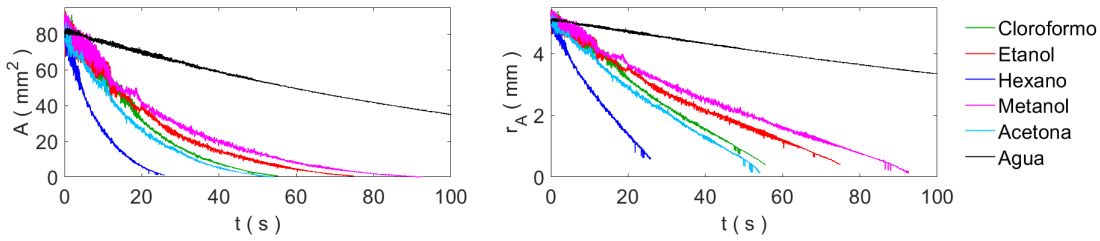
Al visualizar la gota Leidenfrost desde la cámara superior, se puede estimar un radio efectivo con la vista superior de la gota. Una vez obtenidas cada una de sus siluetas a lo largo del tiempo, el procedimiento descrito con la Figura 4.4 es bastante útil para medir la evolución completa del radio efectivo, con base en el área $A = \pi r_A^2$ o el perímetro $P = 2\pi r_P$ (donde r_A y r_P son sus respectivos radios efectivos).

Las respectivas Figuras 4.7a y 4.7b muestran el perímetro y el área junto con

sus correspondientes radios efectivos de las gotas Leidenfrost para los líquidos de la Tabla 4.1. Los datos experimentales se presentan individualmente en las gráficas F.1 a F.6 del Apéndice F, pero fueron desplazados temporalmente de tal manera que sus radios efectivos iniciales coinciden con $r_{P,0} \approx 6$ mm en la Figura 4.7a y $r_{A,0} \approx 5$ mm en la Figura 4.7b.



(a) Perímetro (P) y radio efectivo (r_P).



(b) Área (A) y radio efectivo (r_A).

Figura 4.7: Perímetro $P(t)$, área $A(t)$ y radio efectivo $r(t)$ de gotas Leidenfrost con $V_0 = 250 \mu\text{l}$ para los líquidos de la Tabla 4.1 a $T_p = 250^\circ\text{C}$.

El tiempo de vida (τ) de una gota Leidenfrost puede ascender hasta varias decenas de segundos y difiere en todos los líquidos. De acuerdo con Mozumber et al. [16], el tiempo de vida de una gota de agua es muy grande comparado con los tiempos de vida de gotas de etanol y metanol. Esto se corrobora con los tiempos de vida mostrados en la Figura 4.7 e indican que $\tau_{\text{agua}} \gg \tau_{\text{metanol}} > \tau_{\text{etanol}} > \tau_{\text{cloroformo}} > \tau_{\text{acetona}} > \tau_{\text{hexano}}$ para el mismo radio inicial aproximadamente. (En particular, $\tau_{\text{agua}} \approx 295$ s y $\tau_{\text{metanol}} \approx 92$ s.)

Por otra parte, desde el depósito de las gotas, se pueden apreciar tres regímenes. El primer régimen es el régimen oscilatorio donde aparecen modos de oscilación en forma de estrellas cuyo número de lóbulos dependen de la cantidad de líquido depositado y el ángulo de inclinación del plato, [12, 25].

Posteriormente, hay una transición entre el régimen oscilatorio y un régimen cuasi estacionario a través de un radio de transición (R_T) para dar paso al segundo régimen de gotas en forma de panqué vista de un costado, pero con forma circular vista desde arriba

(radios efectivos tales que $\lambda_c < r < R_T$) sin oscilaciones de forma.

Finalmente, existe una segunda transición en el régimen estacionario entre las gotas en forma de panqué y las gotas pequeñas (cuando la gota es del orden de la longitud capilar del líquido); en este tercer régimen, la evaporación de las gotas es igualmente importante sobre toda su superficie, entonces aumentan su velocidad de retracción y se tornan semi-esféricas con radios tales que $r < \lambda_c$. Ver Figuras 4.7.

Vistas superiores de gotas Leidenfrost

Cabe señalar que, en el caso de las Figuras 4.7a y 4.7b, el ruido al inicio de la evaporación de la gota Leidenfrost se debe al modo dos de oscilación y no por errores en su medición. Ver primeros segundos de las Figuras 4.8.

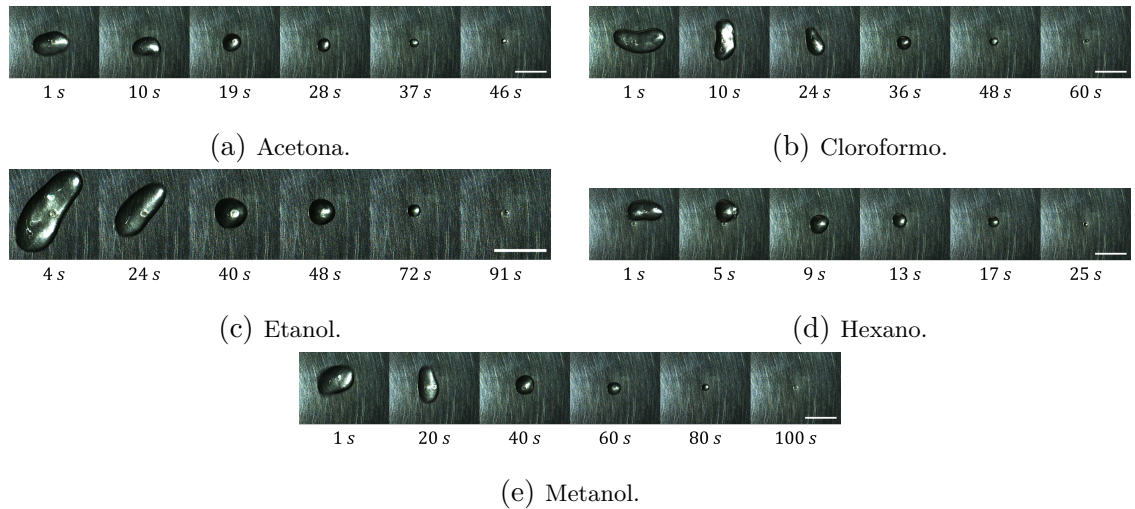


Figura 4.8: Vista superior de gotas Leidenfrost para cinco líquidos en diferentes tiempos. Las barras de escala miden 10 mm.

Funciones de ajuste

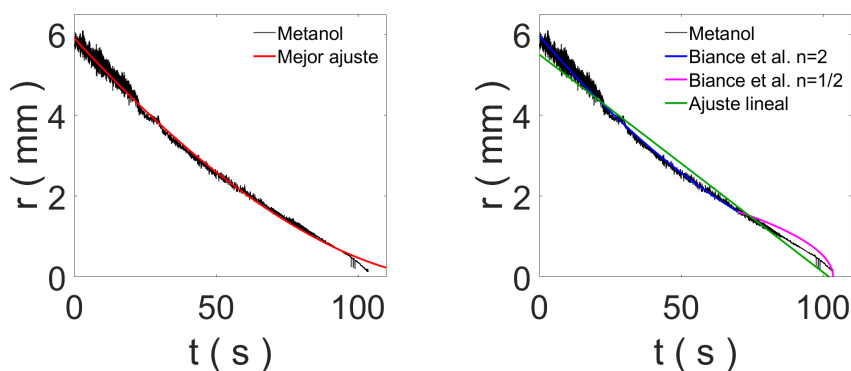
Siguiendo con el análisis de datos, la Tabla 4.2 muestra los tiempos de vida obtenidos experimentalmente de la gota Leidenfrost desde el inicio de la grabación hasta su desaparición en el video. Asimismo para el radio efectivo obtenido a partir del área, un ajuste de datos a una función tipo ley de potencias, de la forma de la expresión (2.1), fue realizada en Qtiplot para conseguir los mejores valores de ajuste del radio inicial (r_0) y el

tiempo de vida (τ) de la gota, así como el exponente (n) de la función $r = r(t)$. Ver Tabla 4.2.

Nótese que los exponentes de la función $r = r(t)$ están en el intervalo $n \in (1, 2)$, esto implica que el radio con respecto al tiempo no puede ser una función lineal o cuadrática como lo han sugerido otros autores, [1, 17, 18, 20, 21]. Además, una ley de potencias como solución analítica a la razón de evaporación no parece describir adecuadamente el proceso completo de evaporación de las gotas, pues cabe destacar que, aunque el *coeficiente de determinación* es $R^2 \geq 0.9960$ en todos los casos, la función de ajuste no describe adecuadamente el comportamiento de las gotas con radios $r \leq 1$ mm. Ver la Figura 4.9 para el caso de una gota Leidenfrost de metanol con su función de ajuste correspondiente de la Tabla 4.2.

Líquidos	Tiempo de vida experimental τ_e (s)	Función de ajuste: $r = r_0(1 - t/\tau)^n$		
		Radio inicial r_0 (mm)	Tiempo de vida τ (s)	Potencia n
Agua	307.76	5.13 ± 0.01	370.84 ± 0.34	1.27 ± 0.01
Acetona	56.20	5.03 ± 0.01	63.39 ± 0.25	1.40 ± 0.01
Cloroformo	64.40	5.89 ± 0.01	72.26 ± 0.28	1.34 ± 0.01
Etanol	93.78	5.92 ± 0.01	114.36 ± 0.69	1.75 ± 0.02
Hexano	27.38	4.97 ± 0.01	37.54 ± 0.43	1.72 ± 0.03
Metanol	107.04	5.90 ± 0.01	128.12 ± 0.59	1.66 ± 0.01

Tabla 4.2: Tiempos de vida experimentales (τ_e) y valores de ajuste (r_0 , τ , n) de los datos experimentales para $V_0 = 250 \mu\text{l}$ de distintos líquidos a $T_p = 250^\circ\text{C}$.



(a) Mejor ajuste de datos.

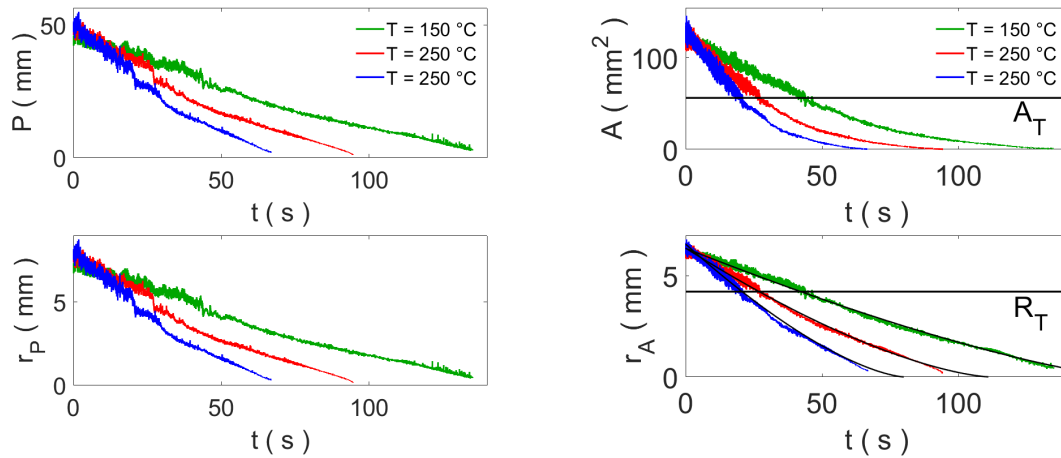
(b) Ajuste según Bianco y ajuste lineal.

Figura 4.9: Datos experimentales con (a) el mejor ajuste de datos y (b) el ajuste según Bianco et al. y un ajuste lineal del radio efectivo $r(t)$ para $V_0 = 250 \mu\text{l}$ de una gota Leidenfrost de metanol a $T_p = 250^\circ\text{C}$.

Radio de transición

En seguida, se estudia una comparación de la evolución completa de gotas con un volumen inicial de $V_0 = 250 \mu\text{l}$ de etanol en el estado Leidenfrost a diferentes temperaturas del plato de aluminio, cuyos resultados individuales se encuentran en las gráficas de las figuras F.7, F.8 y F.9 del Apéndice F.

Desde la Figura 4.10, notoriamente se exhibe que el tiempo de vida aumenta si la temperatura del sustrato disminuye y viceversa. En consecuencia, si la temperatura del sustrato aumenta, entonces la duración del régimen oscilatorio disminuye; pero el radio de transición parece ser aproximadamente constante, salvo una ligera variación con respecto a la temperatura. También, note que las gráficas en la Figura 4.10b tienen una tendencia parecida, donde se muestra que el área disminuye con el tiempo, al principio con una pendiente pronunciada, pero después la tendencia se lentifica cuando el comportamiento atraviesa el área de transición A_T correspondiente al radio de transición R_T .



(a) Perímetro (P) y radio efectivo (r_P).

(b) Área (A) y radio efectivo (r_A).

Figura 4.10: Perímetro $P(t)$, área $A(t)$ y radio efectivo $r(t)$ para $V_0 = 250 \mu\text{l}$ de gotas Leidenfrost de etanol a $T_p = 150, 250, 350^\circ\text{C}$. Las líneas negras horizontales marcan la ubicación aproximada del área A_T y radio R_T de transición, y las curvas negras son ajustes de datos a funciones tipo ley de potencias.

La anterior observación llevó a calcular el radio de transición R_T de diez gotas de etanol a diferentes temperaturas. (Estos datos experimentales están en el Apéndice F en sus respectivas Figuras F.7, F.8 y F.9.)

La Figura 4.11 muestra el radio de transición obtenido para cada temperatura $T_p = 150, 250, 350^\circ\text{C}$ del plato de aluminio, donde los radios de transición denotados por $R_{A,T}$ son obtenidos con el área de transición $A_T = \pi R_{A,T}^2$, mientras que los denotados por $R_{P,T}$ son obtenidos con el perímetro de transición $P_T = 2\pi R_{P,T}$. (En la Figura 4.11, las barras de error verticales y horizontales son las desviación media del radio de transición y del tiempo, respectivamente.)

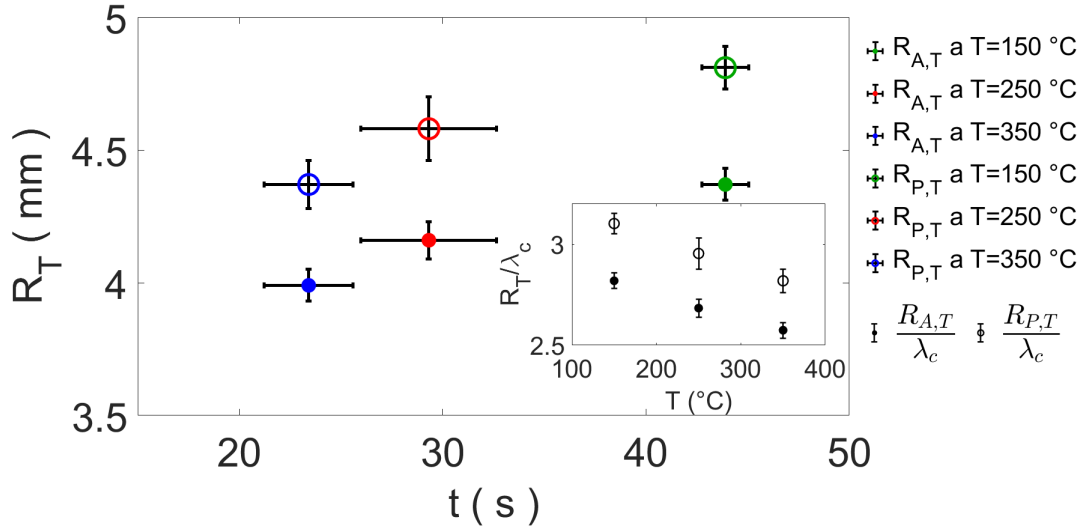


Figura 4.11: Datos experimentales del radio de transición R_T en gotas de etanol sobre un plato de aluminio a diferentes temperaturas $T_p \in \{150^\circ\text{C}, 250^\circ\text{C}, 350^\circ\text{C}\}$.

Por otro lado, Ma et al. [12] reportaron que el radio de transición para el modo de oscilación de gotas Leidenfrost está en el intervalo $1.5\lambda_c \lesssim R_T < 3\lambda_c$. Sin embargo, si comparamos los radios de transición normalizados a su longitud capilar en la miniatura de la Figura 4.11, el cálculo obtenido con el perímetro de transición $P_T = 2\pi R_{P,T}$ es menos preciso que el obtenido con el área de transición $A_T = \pi R_{A,T}^2$, ya que el radio de transición $R_{P,T}$ tiene un valor más elevado de lo esperado en el comportamiento del radio efectivo $r_P(t)$ de la proyección sobre el plato, pero el valor de $R_{A,T}$ es realmente el radio de transición de la evolución del radio efectivo a través del tiempo $r_A(t)$ para el etanol. Note que el radio de transición R_T disminuye si aumentamos la temperatura T_p del plato de aluminio.

De acuerdo con las gotas analizadas, las cantidades promedio del tiempo de vida (τ_e) y, los mejores valores de ajuste para el radio inicial (r_0), el tiempo de vida (τ) y el exponente (n) de la función $r = r(t)$ se encuentran individualmente en la Tabla 4.3 para gotas de etanol sobre un plato de aluminio caliente a diferentes temperaturas T_p .

Si bien la Tabla 4.3 contiene cantidades promedio, estas pueden ser utilizadas en la gráfica del radio r_A contra el tiempo t de la Figura 4.10b para comparar los ajustes con funciones tipo ley de potencias y los datos experimentales de las tres gotas a diferentes temperaturas del plato de aluminio, pues las funciones de ajuste tienen buena afinidad con los datos experimentales en el intervalo $r_A > 1$ mm.

T_p ($^{\circ}C$)	τ_e (s)	Función de Ajuste: $r = r_0(1 - t/\tau)^n$		
		r_0 (mm)	τ (s)	n
150	138.66 ± 1.92	6.36 ± 0.01	161.03 ± 3.67	1.35 ± 0.03
250	95.61 ± 2.14	6.37 ± 0.11	111.68 ± 0.38	1.49 ± 0.06
350	69.26 ± 1.02	6.57 ± 0.08	80.15 ± 1.40	1.48 ± 0.02

Tabla 4.3: Tiempo de vida experimentales (τ_e) y valores de ajuste (r_0 , τ , n) de los datos experimentales para $V_0 = 250 \mu l$ de etanol a $T_p = 150, 250, 350^{\circ}C$

Por otro lado, excepto por el tiempo de vida (τ) obtenido del ajuste, el radio inicial es muy similar en una gota de etanol de $V_0 = 250 \mu l$, mientras que su exponente en la función de $r = r(t)$ está alrededor de $n \sim 1.40$. Al promediar, se obtiene que

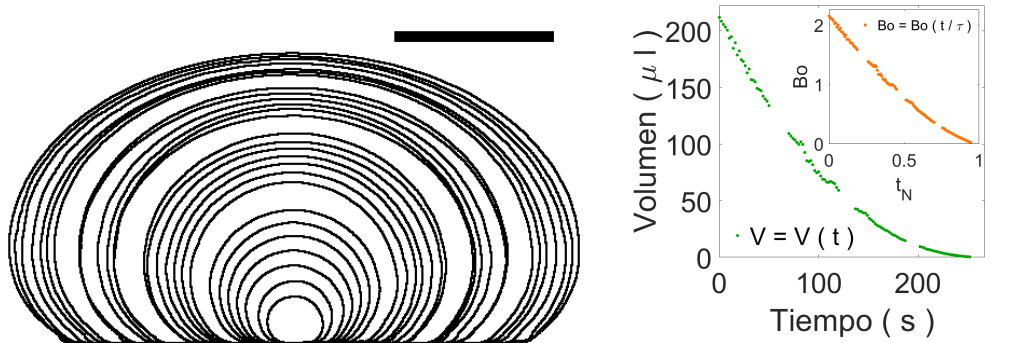
$$r(t) = \bar{r}_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{\bar{n}} = (6.43 \text{ mm} \pm 0.11 \text{ mm}) \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{1.44 \pm 0.08} \quad (4.3)$$

es una buena aproximación en el intervalo $1 \text{ mm} < r < 6.43 \text{ mm}$ para una gota Leidenfrost de etanol, ya que el coeficiente de determinación fue de $R^2 \geq 0.9916$ en todas estas gotas.

En resumen de la vista superior, se realizaron mediciones del radio efectivo $r(t)$ con base en el área $A(t)$ y el perímetro $P(t)$ de gotas Leidenfrost utilizando seis líquidos diferentes, donde se probó que el tiempo de vida de una gota de agua es muy grande comparado con los tiempos de vida en los demás líquidos. Además, en la transición entre el régimen oscilatorio y el régimen cuasi estacionario, se determinó que el radio de transición está en el intervalo $2.5\lambda_c < R_T < 3\lambda_c$ para gotas Leidenfrost de etanol. Finalmente, los exponentes de las funciones de ajuste están en el intervalo $n \in (1, 2)$, obtenidos a partir de los radios efectivos $r_A(t)$, pero evidencian no ser funciones lineales o cuadráticas y, esto implica que los ajustes paramétricos no describen la evolución completa de las gotas en estado Leidenfrost.

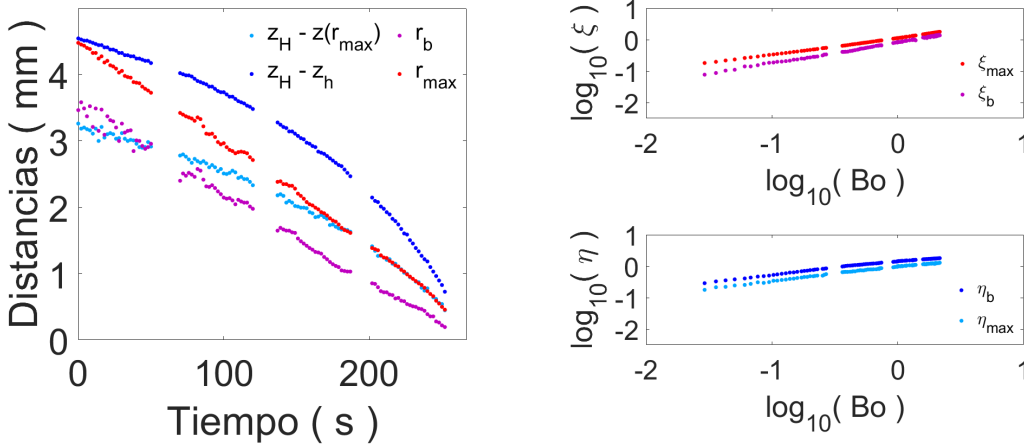
4.3.2 Vista lateral

Desde otra perspectiva, se estudia la evaporación de gotas Leidenfrost para distintos líquidos con su vista lateral en el régimen cuasi estacionario, es decir, para radios tales que $r < R_T$, donde la vista superior de la gota es circular. En este caso, una vez obtenidas cada una de sus siluetas a través del tiempo, se pueden trazar sus contornos para calcular las dimensiones (posiciones radiales y axiales) y el volumen de la gota. Aquí se sigue el procedimiento descrito con la Figura 4.5 para medir la evolución de estas cantidades con respecto al tiempo usando los puntos de su contorno. Ver Figura 4.12a.



(a) Contornos del perfil de una gota Leidenfrost de agua en 27 tiempos diferentes. (La barra de escala mide 2.5 mm.)

(b) Volumen $V(t)$ (verde) y número de Bond $Bo(t)$ (naranja).



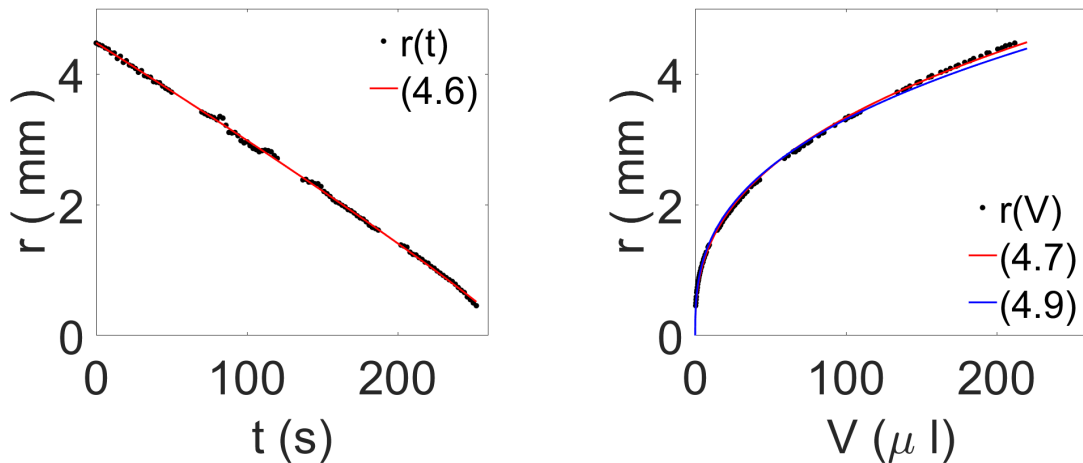
(c) Posiciones radiales $r(t)$ y axiales $(z_H - z)(t)$ como funciones del tiempo t .

(d) Posiciones radiales ξ y axiales η como función del número de Bond Bo .

Figura 4.12: Evaporación de gota Leidenfrost de agua con $V_0 = 250 \mu\text{l}$ a $T_p = 250^\circ \text{C}$, donde el tiempo de vida experimental fue $\tau_e = 267 \text{s}$.

La Figura 4.12 también muestra diferentes gráficas de interés para estudiar la evaporación en el régimen cuasi estacionario de una gota Leidenfrost de $V_0 = 250 \mu\text{l}$ de agua depositada sobre un plato de aluminio a $T_p = 250^\circ\text{C}$ y cabe recalcar que todas estas gráficas fueron obtenidas con los programas escritos en el Apéndice E. El volumen como función del tiempo y el número de Bond con respecto a su tiempo normalizado $t_N = t/\tau$ son presentados en la Figura 4.12b, respectivamente. Por otro lado, las posiciones radiales (radio máximo r_{\max} y radio de contacto r_b) y las posiciones axiales (altura $z_H - z_h$ y distancia $z_H - z(r_{\max})$) que constituyen las dimensiones de la gota Leidenfrost se muestran en la Figura 4.12c. Observe que la altura inicial de la gota está cerca de $2\lambda_c = 5.04 \text{ mm}$, la altura máxima que puede alcanzar una gota Leidenfrost de agua.

Además, cabe destacar que el radio máximo y la altura coinciden al inicio de la evaporación configurando una gota en forma de panqué, donde su radio de contacto es muy significativo; en contraposición del final de su evaporación, pues su radio máximo es menor a su altura de tal manera que la gota se vuelve semi-esférica con un radio de contacto casi imperceptible. Además, en términos de logaritmos en base 10, también se grafican las posiciones radiales y las posiciones axiales normalizadas con la longitud capilar del agua como funciones del número de Bond, es decir, $\xi(\text{Bo}) = r/\lambda_c$ y $\eta(\text{Bo}) = (z_H - z)/\lambda_c$, respectivamente. Ver Figura 4.12d.



(a) Radio máximo $r_{\max} = r_{\max}(t)$.

(b) Radio máximo $r_{\max} = r_{\max}(V)$.

Figura 4.13: Experimentos usando una gota Leidenfrost de agua para su radio máximo como función del (a) tiempo y del (b) volumen con funciones de ajuste.

En el caso particular del radio máximo, se realizó un ajuste de datos a una función tipo ley de potencias en Qtiplot para obtener el radio como función del tiempo.

$$r(t) = (4.48 \text{ mm} \pm 0.01 \text{ mm}) \left(1 - \frac{t}{278 \text{ s} \pm 2 \text{ s}}\right)^{0.91 \pm 0.01} \quad (4.4)$$

La Figura 4.13a muestra que la función (4.4) es un ajuste muy próximo a los datos obtenidos experimentalmente, ya que su coeficiente de determinación es $R^2 = 0.9994$ sobre los datos de la Figura 4.12c.

También se realizó un ajuste con los datos experimentales a una función tipo ley de potencias en términos del volumen en Qtiplot para obtener una expresión del radio máximo en términos del volumen de la gota.

$$r_{\max}(V) = (0.59 \pm 0.01) \cdot V^{0.38 \pm 0.01} \quad (4.5)$$

Por otro lado, la Figura 4.13b muestra que la función (4.5) también es un ajuste muy cercano a los datos experimentales, pues su coeficiente de determinación resulta ser de $R^2 = 0.9991$.

Aunque, observando la Figura 4.12d, note que es posible realizar un ajuste lineal para el radio normalizado en términos del número de Bond.

$$\log_{10}(\xi_{\max}) = (0.06 \pm 0.01) + (0.54 \pm 0.01) \log_{10}(\text{Bo}) \quad (4.6)$$

O bien, haciendo el cambio de base $\log_{10}(x) = \ln(x)/\ln(10)$ y utilizando la definición del número de Bond (3.1) en el volumen de la gota $V = (4\pi/3)R^3$ con radio característico R , entonces se obtiene el radio máximo en términos del volumen.

$$r_{\max}(V) = \left(\lambda_c 10^{0.06 \pm 0.01}\right) \left(\frac{3V}{4\pi\lambda_c^3}\right)^{\frac{2}{3}(0.54 \pm 0.01)}, \quad (4.7)$$

donde $\lambda_c = 2.52 \text{ mm}$ es la longitud capilar del agua y el coeficiente de determinación es $R^2 = 0.9986$. La Figura 4.13b muestra a la función (4.7) en contraste con los datos experimentales.

Finalmente, cada uno de los análisis realizados para los demás líquidos de la Tabla 4.1 están en el Apéndice G. En adelante, los datos experimentales para el volumen, el radio máximo y la altura de las gotas Leidenfrost para distintos líquidos están expresados en términos de sus correspondientes cantidades adimensionales en las Figuras 4.14 y 4.15, obtenidos a partir de desplazar temporalmente a las Figuras G.8 a G.5, de tal manera que sus respectivas cantidades iniciales coinciden en $\text{Bo}_0 \approx 1.80$, $\eta_{b0} \approx 1.5$ y $\xi_{\max 0} \approx 1.5$ para poder visualizar una comparación entre ellas.

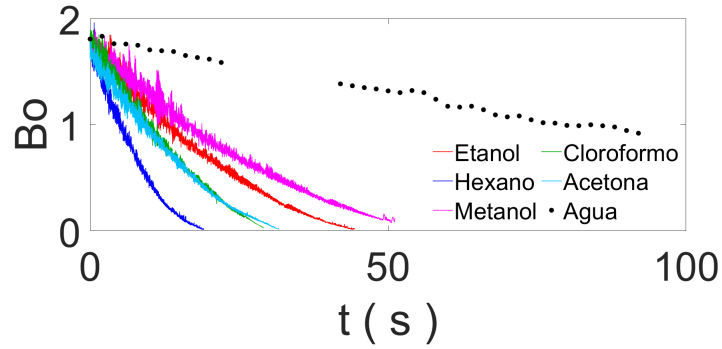


Figura 4.14: Datos experimentales del número de Bond $Bo(t)$ de gotas Leidenfrost para seis líquidos a $T_p = 250^\circ\text{C}$.

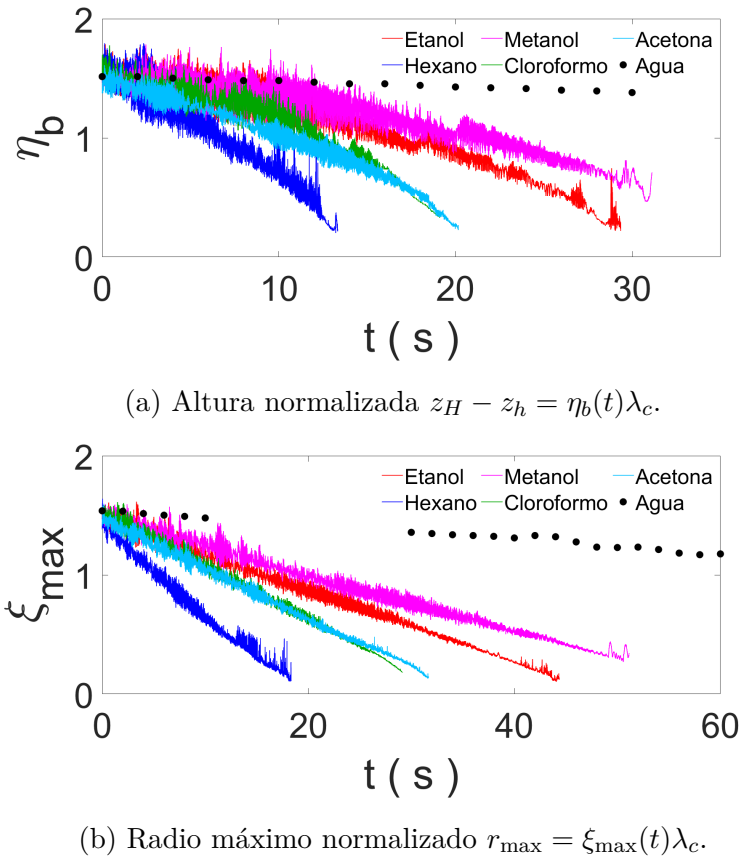


Figura 4.15: Datos experimentales de (a) la altura y (b) el radio máximo de gotas Leidenfrost para seis líquidos a $T_p = 250^\circ\text{C}$.

Funciones de ajuste

Finalizando con el análisis de datos, la Tabla 4.4 muestra los tiempos de vida obtenidos experimentalmente de gotas Leidenfrost desde el inicio de la grabación hasta su desaparición en el video. En este caso, un ajuste de datos a una función tipo ley de potencias fue realizada en Qtiplot sobre los datos del radio máximo de las gotas Leidenfrost. Note que los exponentes de las funciones de ajuste están alrededor de $n \sim 1$ y, aunque el coeficiente de determinación es $R^2 \geq 0.9895$ en todos los casos, la Figura 4.16 muestra que las funciones de ajuste se asemejan un poco más al comportamiento de la gota semi-esférica.

Líquidos	Tiempo de vida experimental τ_e (s)	Función de ajuste: $r = r_0(1 - t/\tau)$		
		Radio inicial r_0 (mm)	Tiempo de vida τ (s)	Potencia n
Agua	267	4.48 ± 0.01	278 ± 2	0.91 ± 0.01
Acetona	31.68	2.42 ± 0.01	36.37 ± 0.10	1.06 ± 0.01
Cloroformo	35.33	2.35 ± 0.01	40.33 ± 0.14	1.04 ± 0.01
Etanol	54.40	2.85 ± 0.01	60.92 ± 0.20	1.11 ± 0.01
Hexano	23.58	2.83 ± 0.01	26.69 ± 0.11	1.27 ± 0.01
Metanol	61.95	2.78 ± 0.01	78.67 ± 0.49	1.26 ± 0.01

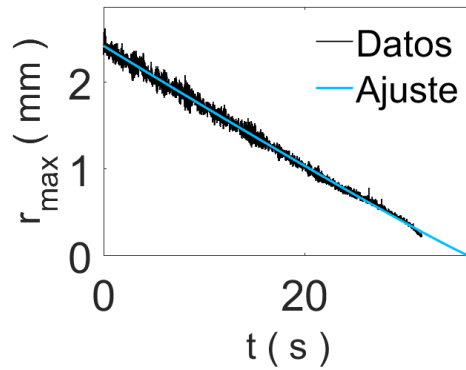
Tabla 4.4: Tiempo de vida experimentales (τ_e) y valores de ajuste (r_0 , τ , n) de los datos experimentales para $V_0 = 150 \mu l$ de distintos líquidos a $T_p = 250^\circ \text{C}$.

Por otro lado, también se realizó un ajuste con los datos experimentales a una función tipo ley de potencias en términos del volumen en Qtiplot para obtener una expresión del radio máximo en términos del volumen de la gota para los demás líquidos. Los resultados fueron muy cercanos a los obtenidos en la ecuación (4.5) para el agua con un coeficiente de determinación $R^2 \geq 0.9951$ en todos los casos. Además, haciendo un promedio de los valores de ajuste, se obtuvo que:

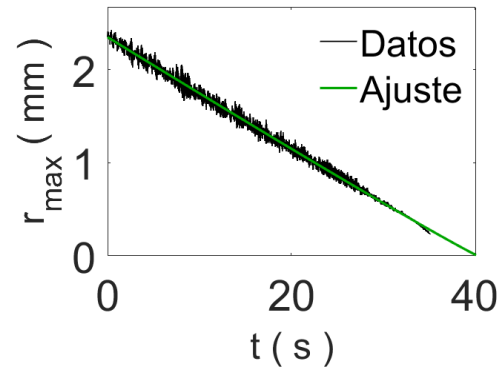
$$r_{\max}(V) = \bar{A} \cdot V^{\bar{B}} = (0.60 \pm 0.01) \cdot V^{0.38 \pm 0.01}. \quad (4.8)$$

En resumen de la vista lateral, se realizaron mediciones en el régimen cuasi estacionario ($r < R_T$) de la evaporación de gotas Leidenfrost utilizando seis líquidos diferentes. En particular, se graficaron la altura normalizada $\eta_b(t)$, el radio máximo normalizado $\xi_{\max}(t)$ y el número de Bond $\text{Bo}(t)$ como funciones del tiempo. Además, los exponentes de las funciones de ajuste están alrededor de $n \sim 1$ y se asemejan más a la evolución de las gotas en este régimen, pero coincide muy bien para el caso del agua. Por último, estos

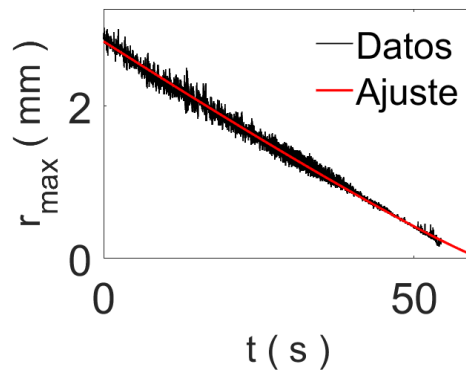
ajustes paramétricos fueron obtenidos a partir del radio máximo $r_{\max}(t)$ que a su vez puede escribirse en términos del volumen $V(t)$ de la gota.



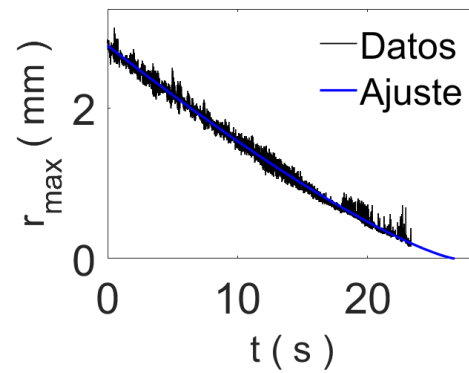
(a) Acetona.



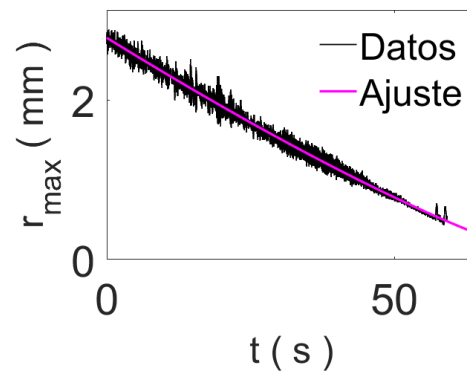
(b) Cloroformo.



(c) Etanol.



(d) Hexano.



(e) Metanol.

Figura 4.16: Datos experimentales junto con sus respectivas funciones de ajuste.

Algunos líquidos a diferentes temperaturas

De manera similar a Bianco et al. [1] para una gota de agua, las Figuras 4.17 y 4.18 presenta el volumen, el radio máximo y la altura de una gota de algunos líquidos a diferentes temperaturas. Note que el tiempo de vida disminuye si la temperatura del plato aumenta, pero es interesante apreciar cómo el comportamiento en ambos casos es similar al inicio de la evaporación.

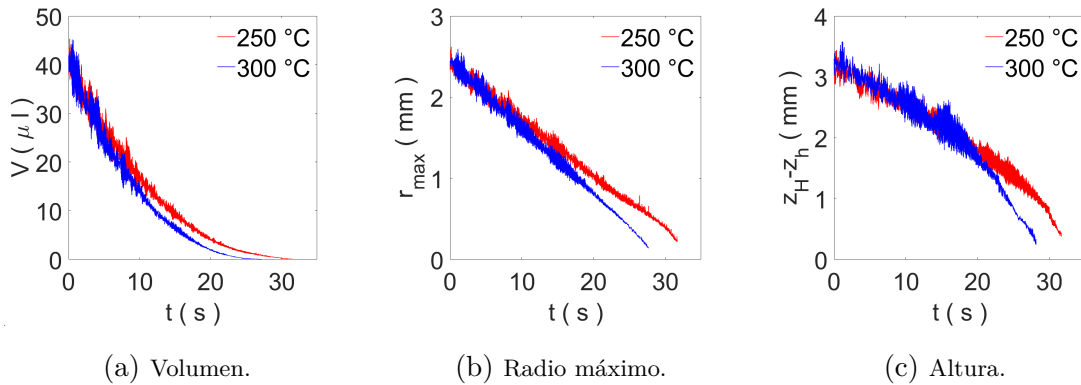


Figura 4.17: Mediciones del volumen, radio máximo y altura de una gota de acetona depositada sobre un plato de aluminio a $T_p = 250^\circ\text{C}$ y $T_p = 300^\circ\text{C}$.

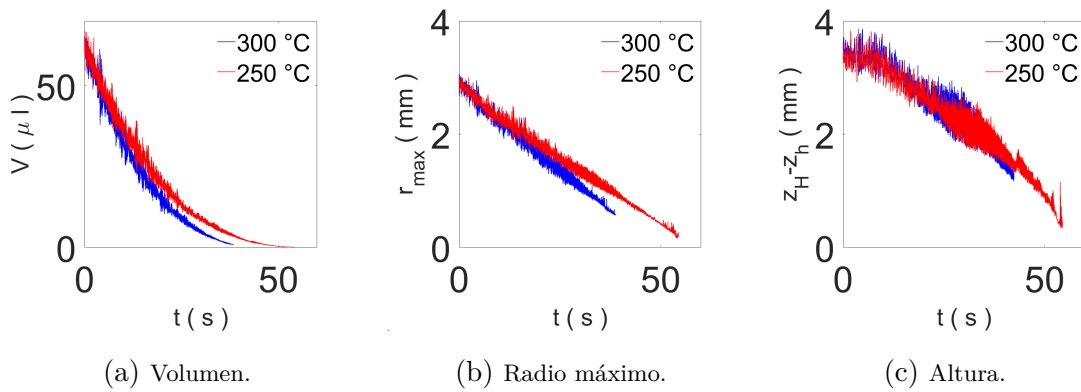


Figura 4.18: Mediciones del volumen, radio máximo y altura de una gota de etanol depositada sobre un plato de aluminio a $T_p = 250^\circ\text{C}$ y $T_p = 300^\circ\text{C}$.

Perfiles de gotas Leidenfrost

Cabe señalar que, esta vez, el ruido en las gráficas de las Figuras 4.14 y 4.15 de las respectivas cantidades adimensionales $Bo(t)$, $\eta_b(t)$ y $\xi_{\max}(t)$ no corresponden a modos de oscilación, sino a movimientos intrínsecos de las gotas Leidenfrost estacionarias tales como movimientos verticales u horizontales sobre el plato cuando la gota tiene la forma de panqué, e inclusive con saltos esporádicos o trayectorias aleatorias cuando la gota tiene una forma semi-esférica casi al acercarse a su completa evaporación. En la Figura 4.19 se aprecian estos fenómenos, los cuales ciertamente afectan la dinámica y tiempo de vida de las gotas Leidenfrost, pero este trabajo se centró en realizar un análisis de tipo general, por lo que estas peculiaridades no se tomaron en cuenta.

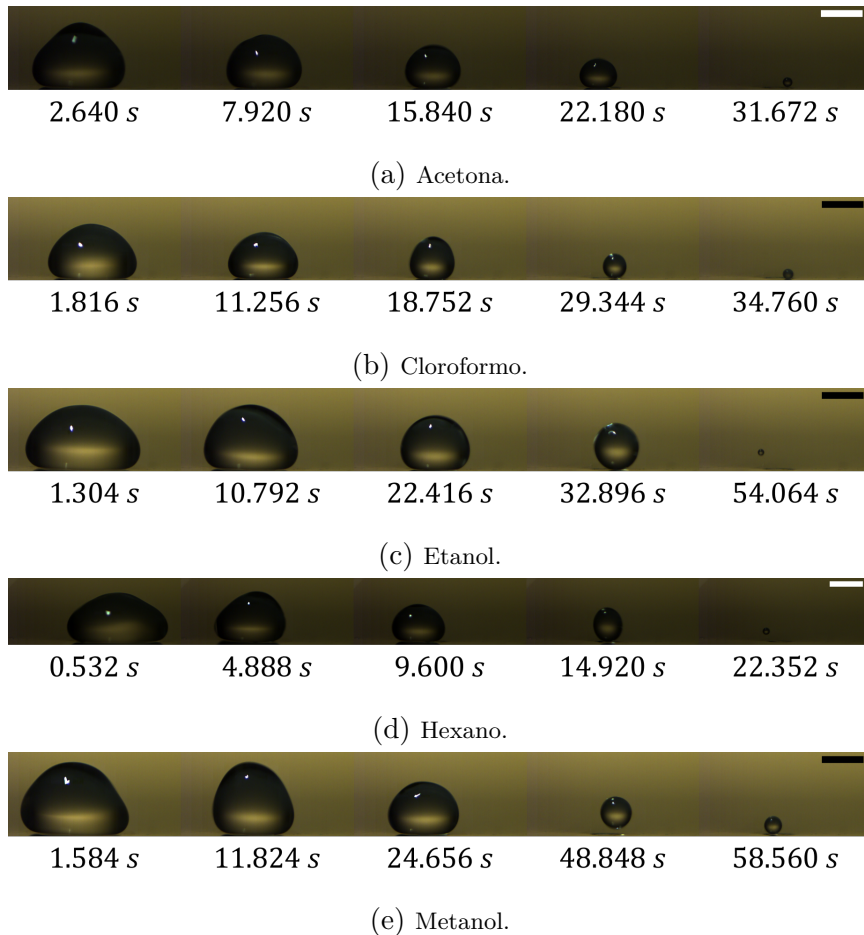


Figura 4.19: Perfil transversal de gotas Leidenfrost para seis líquidos en diferentes tiempos. Las barras de escala miden 2 mm.

Gota Leidenfrost de Isopropanol

En este último apartado del capítulo de experimentos, se muestran explícitamente las gráficas relacionadas con la evaporación de una gota Leidenfrost de isopropanol con un volumen inicial de $V_0 = 300 \mu\text{l}$ depositado sobre un plato de aluminio a $T_p = 300^\circ\text{C}$. La Figura 4.20 muestra la evolución completa del volumen $V(t)$, las posiciones radiales $r(t)$ y las posiciones axiales $(z_H - z)(t)$ a través del tiempo usando la vista lateral, así como la evolución del área $A(t)$, el perímetro $P(t)$ y los radios efectivos $r(t)$ con respecto al tiempo utilizando la vista superior. Por otro lado, la Figura 4.22 muestra la comparación entre el radio máximo $r_{\max}(t)$ y, los radios efectivos $r_A(t)$ y $r_P(t)$ obtenidos a partir del área $A(t)$ y el perímetro $P(t)$, respectivamente.

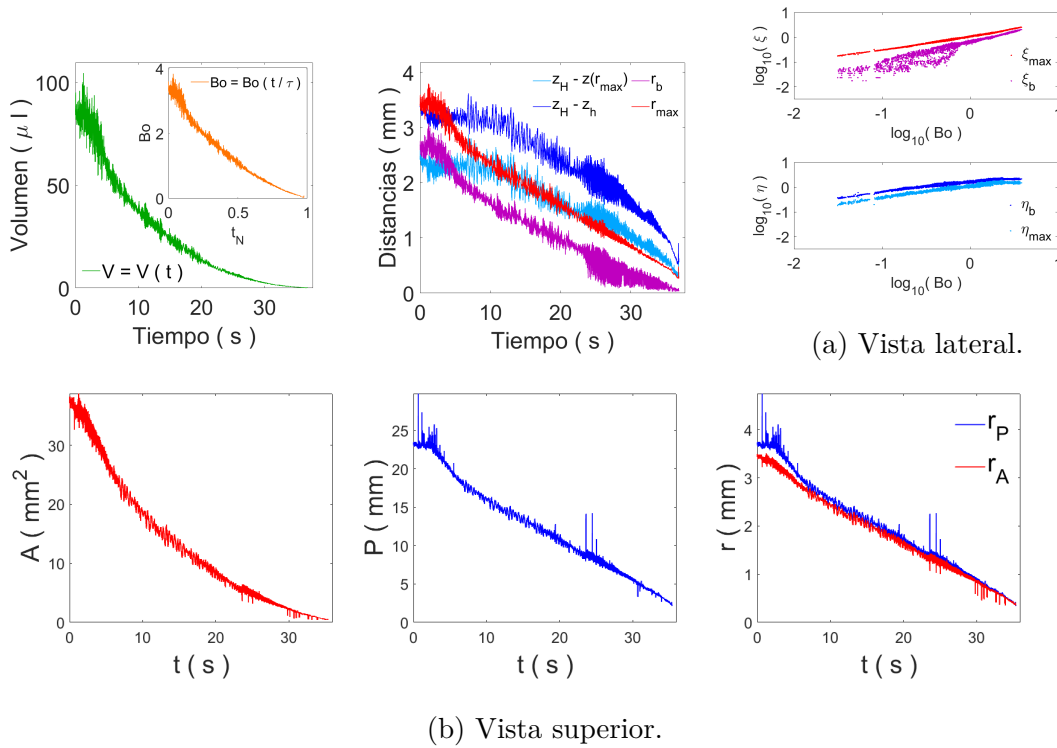
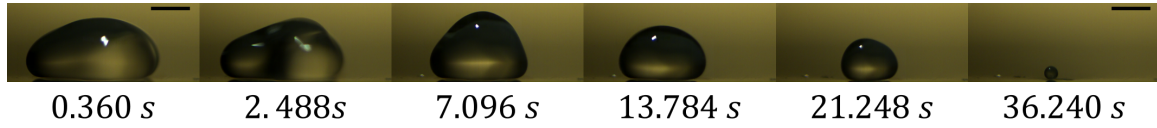
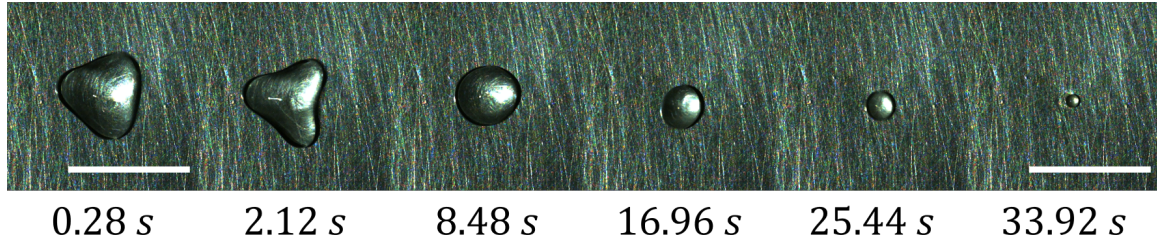


Figura 4.20: Evaporación de gota Leidenfrost de isopropanol ($V_0 = 300 \mu\text{l}$) a $T_p = 300^\circ\text{C}$.



(a) Vista lateral. Las barras de escala miden 2 mm.



(b) Vista superior. Las barras de escala miden 10 mm.

Figura 4.21: (a) Perfil transversal y (b) vista superior de una gota Leidenfrost de isopropanol en diferentes tiempos.

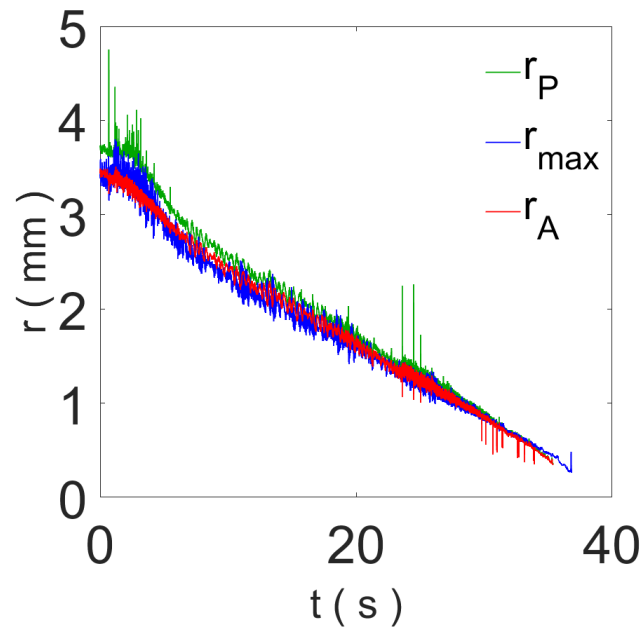


Figura 4.22: Comparación de datos experimentales del radio $r(t)$ de una gota Leidenfrost de isopropanol ($V_0 = 300 \mu\text{l}$) a $T_p = 250^\circ\text{C}$. El radio máximo $r_{\max}(t)$ es medido con la vista lateral, mientras que los radios efectivos $r_A(t)$ y $r_P(t)$ son medidos con la vista superior.

Capítulo 5

Comparación entre modelo y experimento

Nuestro grupo ha realizado programas para hacer una comparación entre el modelo teórico (escrito a detalle en el Capítulo 3) contra los datos experimentales (mostrados en el Capítulo 4, o bien de manera explícita en el apéndice F).

Desde la ecuación de Young Laplace (3.2), los programas calculan numéricamente la forma de las gotas sesiles en términos de cantidades adimensionales para diferentes valores del número de Bond, así como sus propiedades geométricas adimensionales de la gota (curvatura κ_0 , posiciones radiales ξ , posiciones axiales η y áreas superficiales Λ) son calculadas numéricamente con respecto al número de Bond (Bo).

No obstante, la razón de evaporación de gotas Leidenfrost ha sido nuestro principal interés, la cual está implícita a partir de cómo cambia el radio máximo con respecto al tiempo, o bien cómo varía el número de Bond en función del tiempo normalizado a una escala de tiempo característica definida en (3.116). Por tal motivo, este enfoque nos ha permitido seguir la dinámica de una gota Leidenfrost estacionaria desde su volumen y forma iniciales hasta su desaparición debido a su evaporación completa. Esta evolución se obtiene al resolver numéricamente la ecuación diferencial (3.117) por el método de Runge-Kutta-Fehlberg y con base en el número de Bond así conseguido, entonces se puede calcular el radio máximo de la gota Leidenfrost.

La gráficas de la Figura 5.1 hasta la Figura 5.6 muestran la comparación entre el modelo y los datos experimentales para los líquidos de la Tabla 4.1 donde el plato se calentó

a $T_p = 250^\circ\text{C}$ en todos los casos. Evidentemente, las gotas Leidenfrost de acetona (Figura 5.1), etanol (Figura 5.4), hexano (Figura 5.5) y metanol (Figura 5.6) se asemejan muy bien al comportamiento predicho por el modelo, pero la evaporación de la gota Leidenfrost de hexano es sobreestimada por el modelo al final de su evaporación. En cambio, el modelo subestima la evaporación de las gotas Leidenfrost de agua (Figura 5.2) y cloroformo (Figura 5.3) cuyos comportamientos están muy alejados entre sí.

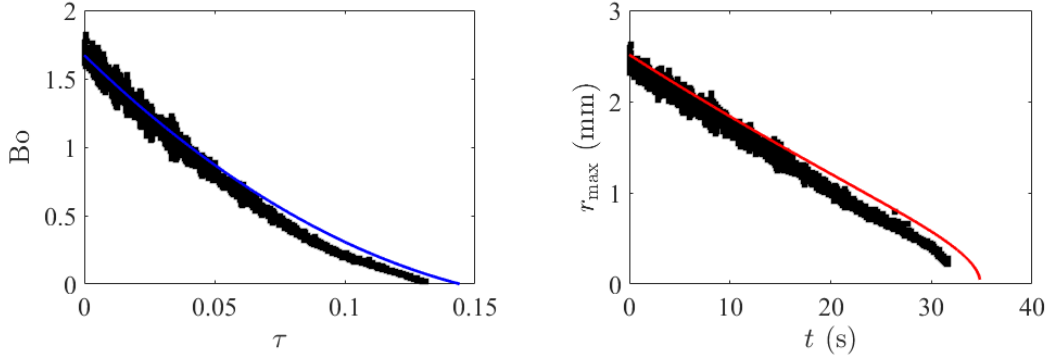
El origen de las discrepancias puede deberse a diferentes motivos, por ejemplo, la gota Leidenfrost no está estacionaria en el régimen $r_{\max} < R_T$, pues tiene movimientos intrínsecos verticales y horizontales en el experimento. Pero desde el punto de vista de los parámetros termofísicos, en particular, el calor latente de los líquidos L_{lv} parece tener un papel importante en estas diferencias. Ver Tabla 4.1.

Las gotas de etanol y metanol tienen calores latentes similares y, al igual que la gota de acetona, se comportan de acuerdo con el modelo. Aunque si se disminuye el calor latente, el modelo no parece predecir adecuadamente el comportamiento como en el caso de la gota de hexano al final de su evaporación. Por último, los valores extremos de calor latente pueden ser el por qué las gotas de agua y cloroformo se alejan mucho del modelo, es decir, el agua tiene un calor latente muy por arriba de los líquidos antes mencionados, mientras que en el cloroformo pasa todo lo contrario porque su calor latente está por debajo de todos ellos. Esto nos sugiere el por qué para ciertos líquidos funciona y para otros no.

Por otro lado, el modelo considera la aproximación (3.92) en la evaporación del hemisferio inferior de la gota, pero quizá se deba añadir una dependencia radial a esta hipótesis para acercarse más al experimento. Además, la estimación de algunos parámetros en el hemisferio superior de la gota, como el coeficiente de difusión (3.98), podrían ser otra causa de las diferencias entre el modelo y el experimento.

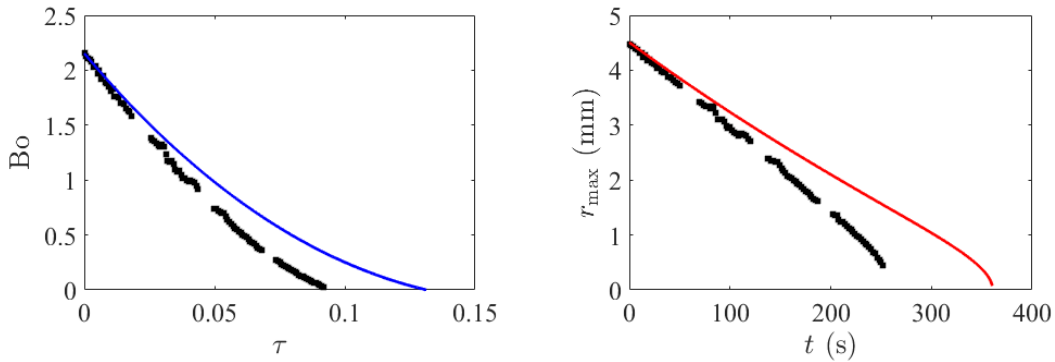
No obstante desde un criterio químico, la causa principal puede deberse al grado de solubilidad de las sustancias en el agua. Los solventes tales como algunos alcoholes (etanol y metanol) con bajo peso molecular y la acetona son sustancias solubles en agua donde el modelo sigue la evaporación completa de las gotas de acuerdo con los experimentos realizados; en cambio, los solventes hidrofóbicos, es decir, solventes insolubles en agua tales como el hexano y el cloroformo no se comportan de acuerdo con el modelo, pero tener un bajo grado de solubilidad en agua parece contribuir en la similitud entre el modelo y el experimento al inicio de la evolución del hexano. Sin embargo, esto no explica el caso de las gotas de agua, pues su diferencia principal puede deberse a su calor latente, el cual está

muy por encima de los demás.



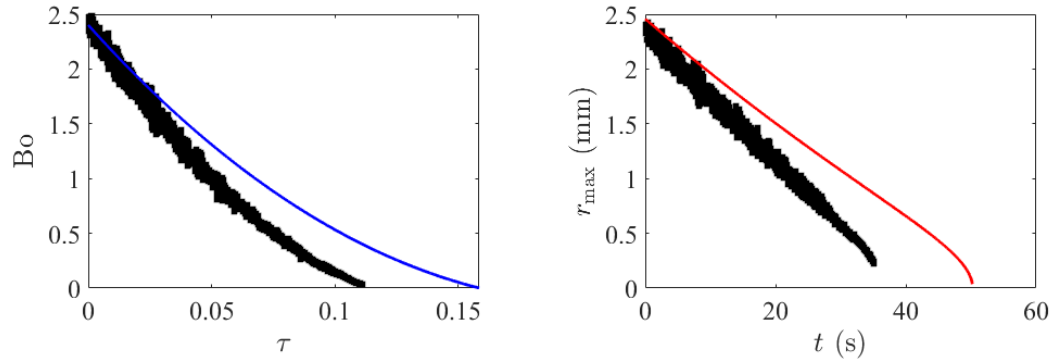
(a) Número de Bond contra un tiempo adimensional. Modelo (curva azul) y experimento (puntos negros). (b) Radio máximo contra tiempo. Modelo (curva roja) y experimento (puntos negros).

Figura 5.1: Comparación entre el modelo y los datos experimentales de una gota Leidenfrost de acetona con $V_0 = 150 \mu l$ a $T_p = 250^\circ C$.



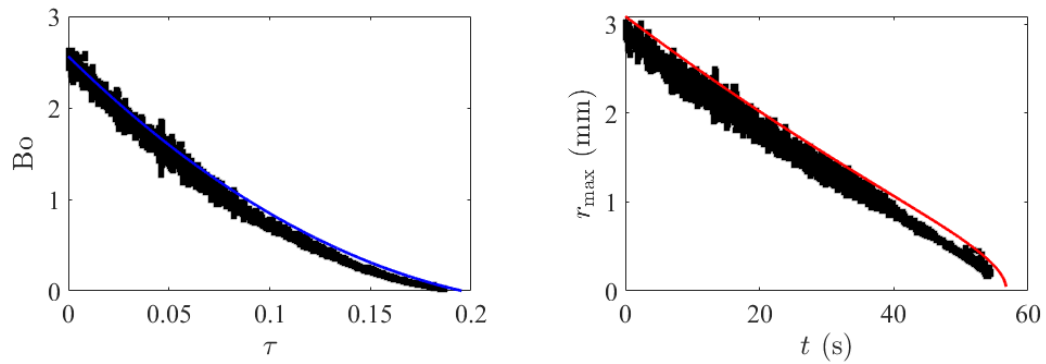
(a) Número de Bond contra un tiempo adimensional. Modelo (curva azul) y experimento (puntos negros). (b) Radio máximo contra tiempo. Modelo (curva roja) y experimento (puntos negros).

Figura 5.2: Comparación entre el modelo y los datos experimentales de una gota Leidenfrost de agua con $V_0 = 250 \mu l$ a $T_p = 250^\circ C$.



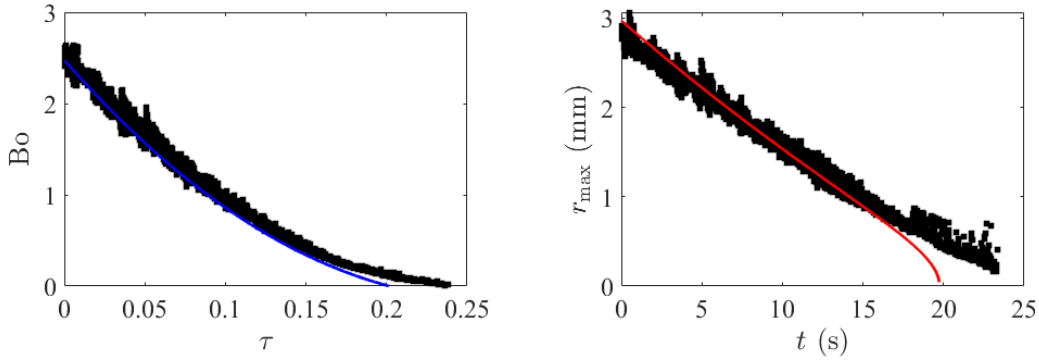
(a) Número de Bond contra un tiempo adimensional. Modelo (curva azul) y experimento (puntos negros). (b) Radio máximo contra tiempo. Modelo (curva roja) y experimento (puntos negros).

Figura 5.3: Comparación entre el modelo y los datos experimentales de una gota Leidenfrost de cloroformo con $V_0 = 150 \mu l$ a $T_p = 250^\circ C$.



(a) Número de Bond contra un tiempo adimensional. Modelo (curva azul) y experimento (puntos negros). (b) Radio máximo contra tiempo. Modelo (curva roja) y experimento (puntos negros).

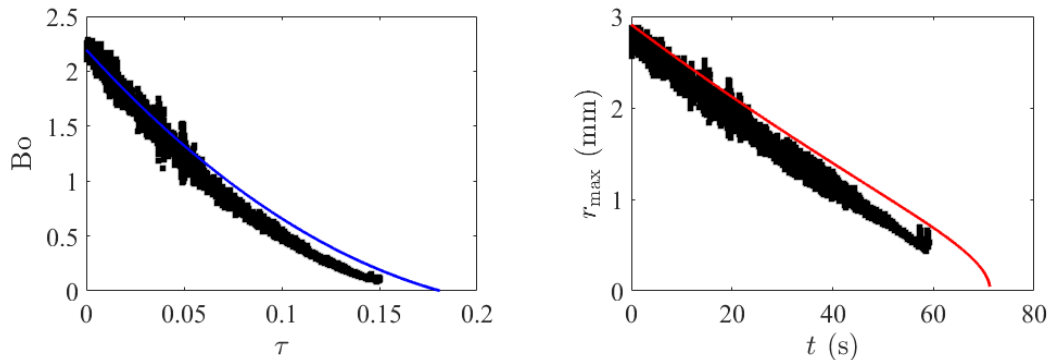
Figura 5.4: Comparación entre el modelo y los datos experimentales de una gota Leidenfrost de etanol con $V_0 = 150 \mu l$ a $T_p = 250^\circ C$.



(a) Número de Bond contra un tiempo adimensional. Modelo (curva azul) y experimento (puntos negros).

(b) Radio máximo contra tiempo. Modelo (curva roja) y experimento (puntos negros).

Figura 5.5: Comparación entre el modelo y los datos experimentales de una gota Leidenfrost de hexano con $V_0 = 150 \mu l$ a $T_p = 250^\circ C$.



(a) Número de Bond contra un tiempo adimensional. Modelo (curva azul) y experimento (puntos negros).

(b) Radio máximo contra tiempo. Modelo (curva roja) y experimento (puntos negros).

Figura 5.6: Comparación entre el modelo y los datos experimentales de una gota Leidenfrost de metanol con $V_0 = 150 \mu l$ a $T_p = 250^\circ C$.

Conclusión

En esta tesis se determinó una expresión analítica de la razón de evaporación ($-\dot{m}(t)$) escrita en (3.119) y, a partir de las soluciones numéricas para la geometría de la gota (3.2) y de la ecuación fundamental (3.117) de nuestro modelo, se calcularon las funciones de volumen ($V(t)$) y radio máximo ($r_{\max}(t)$) que fueron comparadas con los datos experimentales de seis líquidos diferentes (acetona, agua, cloroformo, etanol, hexano y metanol). Ver de la Figura 5.1 hasta la Figura 5.6 con las que se cumplieron nuestros objetivos generales.

Además, se estudiaron los conceptos fundamentales de la mecánica de fluidos y el modelo de Bianco et al. con otros experimentos recientes en los antecedentes del efecto Leidenfrost, con lo que se cumplió el primer objetivo particular. Desde los conceptos generales de la mecánica de fluidos, se desarrolló un modelo teórico elaborado en nuestro grupo y se comprendió la dinámica de evaporación de gotas Leidenfrost estacionarias, con lo que se cubrió el segundo objetivo particular.

Desde luego, el modelo teórico puede seguir la evolución completa de las gotas en estado Leidenfrost y, no se restringe a los tamaños de la gota por encima o por debajo de la longitud capilar. Asimismo, este análisis ha sido realizado desde el punto de vista físico sin parámetros de ajuste en sus ecuaciones, ya que solo se han incluido los parámetros termofísicos de los líquidos y la temperatura del plato caliente, los cuales se pueden calcular, medir o consultarse en la literatura; sin embargo, será necesario complementar este modelo desde un punto de vista químico para trabajos futuros.

También, se construyó un arreglo experimental y se midió el perímetro y el área con la vista superior de las gotas para obtener su radio efectivo donde se determinó que el radio de transición está en el intervalo $2.5\lambda_c < R_T < 3\lambda_c$ para gotas Leidenfrost de etanol sobre un plato caliente a las temperaturas $T_p = 150, 250, 350^\circ\text{C}$. Además, el volumen, las posiciones

radiales y las posiciones axiales fueron medidas con la vista lateral de las gotas, pero estas mediciones fueron logradas gracias a unos programas realizados en ImageJ y MATLAB que nos permitieron estudiar el comportamiento completo de las gotas Leidenfrost y, con esto se cubren los objetivos particulares tres y cuatro.

Finalmente, se verificó que una ley de potencias como solución analítica a la razón de evaporación no describe adecuadamente el proceso de evaporación de las gotas. Por otro lado, el modelo se comparó con los datos obtenidos experimentalmente de la vista lateral para cubrir el quinto objetivo particular y se obtuvo que las gotas Leidenfrost de acetona, etanol, hexano y metanol se asemejan muy bien al modelo, pero la evaporación es sobreestimada al final del comportamiento del hexano; en cambio, el modelo subestima la evaporación de las gotas Leidenfrost de agua y cloroformo.

Las causas principales podrían deberse a una combinación entre la estimación de los parámetros termofísicos y aspectos químicos no considerados en el modelo, ya que el calor latente de los líquidos y la solubilidad de las sustancias en el agua parecen tener papeles importantes en las diferencias entre el modelo y el experimento. Si bien el modelo solo contempla los parámetros termofísicos de los fluidos, no incluye sus factores químicos.

La acetona y los alcoholes utilizados (etanol y metanol) son sustancias solubles en agua y tienen calores latentes entre 500 kJ/kg y 1150 kJ/kg , mientras que el hexano y el cloroformo son hidrofóbicos y tienen calores latentes por debajo de 350 kJ/kg , pero con una diferencia entre ellos, el hexano tiene un grado de solubilidad en el agua de algunos ordenes de magnitud menor que la del cloroformo y esta puede ser la razón principal por la que el modelo sobreestima la evaporación del hexano al final de su comportamiento y subestima la evaporación del cloroformo en toda su evolución. Por último, el calor latente del agua es de 2210.6 kJ/kg , el cual está muy por encima de los demás líquidos y este puede ser la motivo principal del por qué el modelo subestima la evaporación del agua.

Apéndice A

Ecuación de Young - Laplace

Si el sistema tiene un potencial químico fijo μ , entonces conviene utilizar el gran potencial canónico Ω para estudiar un líquido.

$$\Omega = F - n\mu, \tag{A.1}$$

donde n es el número de moléculas y F es la energía libre que se escribe en términos de la energía interna, U .

$$F = U - TS, \tag{A.2}$$

siendo T la temperatura y S la entropía. Por otra parte, si se considera la contribución del trabajo requerido para aumentar la superficie de un líquido, entonces la energía interna del sistema es

$$U = TS - pV + n\mu + \sigma A, \tag{A.3}$$

donde p es la presión, V es el volumen, σ es la tensión superficial y A es el área superficial. Utilizando ahora la ecuación (A.3) en (A.2) y, al resultado, sustituirlo en (A.1), se sigue que el gran potencial canónico se puede escribir en términos del área superficial A y el volumen V .

$$\Omega = -pV + \sigma A \tag{A.4}$$

Las superficies mínimas se pueden calcular geoméricamente usando el teorema de Laplace (1.3) y la demostración de la ecuación de Young-Laplace se encuentra a detalle en [2]. Sin embargo, aquí vamos a minimizar la superficie, manteniendo el volumen constante, por medio de las ecuaciones de Euler-Lagrange aplicadas a la expresión obtenida en (A.4).

Continuemos entonces con la demostración para recuperar la derivación del perfil de una gota no humectante ($\theta = 0$) de radio inicial R que reposa sobre una fina capa de vapor $z_h = h$. En equilibrio, la energía superficial de la gota debe ser mínima, mientras que el volumen está restringido a un valor fijo, $V = (4\pi/3)R^3$. En consecuencia, debemos minimizar la función

$$G = \sigma A - \lambda V, \quad (\text{A.5})$$

donde A es el área superficial de la gota y λ es un multiplicador de Lagrange, el cual tiene unidades de presión. Note que la función (A.5) es similar a (A.4) y, de hecho, mostraremos que λ es en efecto la diferencia de presión entre los medios interior y exterior de la gota, $\lambda = \Delta P$.

Note que el perfil de la gota está descrita en términos del radio r como función de la altura z de la gota, $r = r(z)$. Entonces, considere la superficie parametrizada $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\phi(z, \theta) = (z, r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (\text{A.6})$$

con

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{y} \quad z_h \leq z \leq z_H. \quad (\text{A.7})$$

Luego, los vectores tangenciales a la superficie se obtienen derivando parcialmente a la función (A.6), los cuales están dados por:

$$\vec{T}_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \hat{i} + \hat{j}\dot{r} \cos \theta + \hat{k}\dot{r} \sin \theta \quad \text{y} \quad \vec{T}_\theta = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\hat{j}r \sin \theta + \hat{k}r \cos \theta, \quad (\text{A.8})$$

donde hemos definido la cantidad

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dz}. \quad (\text{A.9})$$

Por lo tanto, la norma del producto cruz de los vectores tangenciales (A.8) está en términos del radio $r(z)$ de la gota y la definición (A.9).

$$\|\vec{T}_z \times \vec{T}_\theta\| = |r(z)|\sqrt{(\dot{r})^2 + 1} \quad (\text{A.10})$$

Debido a que el área de la superficie $A(S)$ de una superficie parametrizada es

$$A(S) = \int_D \|\vec{T}_z \times \vec{T}_\theta\| dz d\theta. \quad (\text{A.11})$$

Entonces, sustituyendo (A.10) en (A.11) con los límites de integración (A.7), obtenemos que el área superficial de la gota es

$$A = \pi \int_{z_h}^{z_H} 2r\sqrt{(\dot{r})^2 + 1} dz. \quad (\text{A.12})$$

Por otro lado, sabemos que el volumen de la gota puede calcularse con la fórmula de un sólido de revolución para un función $r = r(z)$ continua en el intervalo $z_h \leq z \leq z_H$ y se obtiene rotando la región *bajo la gráfica de r* alrededor del eje z .

$$V = \int_{z_h}^{z_H} \pi [r(z)]^2 dz = \pi \int_{z_h}^{z_H} r^2 dz \quad (\text{A.13})$$

Sustituyendo ahora el área superficial (A.12) y el volumen (A.13) de la gota en la función (A.5), se produce la siguiente integral:

$$G = \int_{z_h}^{z_H} g(z, r, \dot{r}) dz \quad (\text{A.14})$$

donde

$$g(z, r, \dot{r}) = 2\pi\sigma r \sqrt{(\dot{r})^2 + 1} - \lambda\pi r^2. \quad (\text{A.15})$$

Note que la función (A.14) es una funcional y, para minimizar esta energía, el extremo de G debe satisfacer la ecuación fundamental de la dinámica de Newton, es decir, la condición que se debe cumplir es la ecuación de Euler-Lagrange para $g = g(z, r, \dot{r})$.

$$0 = \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{r}} \right) \quad (\text{A.16})$$

Aplicando (A.16) en (A.15), se sigue que:

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{1}{r [1 + (\dot{r})^2]^{1/2}} - \frac{\ddot{r}}{[1 + (\dot{r})^2]^{3/2}}. \quad (\text{A.17})$$

Como se acaba de redescubrir la fórmula de Laplace (1.3), esta prueba que $\lambda = \Delta P$. En consecuencia, la *Ecuación de Young-Laplace* en coordenadas cilíndricas se escribe de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta P}{\sigma} = \frac{1}{r [1 + (\dot{r})^2]^{1/2}} - \frac{\ddot{r}}{[1 + (\dot{r})^2]^{3/2}}, \quad (\text{A.18})$$

ya que se ha tomado en cuenta la simetría axial de la gota.

En coordenadas cilíndricas, los términos al lado derecho de la igualdad (A.18) corresponden a la forma en cómo se escribe la curvatura y debe ser igual a la sobrepresión entre el exterior (presión atmosférica) y el interior de la gota, ΔP_0 , justamente en la parte más alta de la gota, z_H ; al cual se le suma otro término correspondiente a la presión hidrostática, ΔP_H , aplicada por la cantidad de líquido que tendremos en la parte superior.

$$\frac{\Delta P}{\sigma} = \frac{\Delta P_0}{\sigma} + \frac{\Delta P_H}{\sigma} \quad (\text{A.19})$$

con

$$\frac{\Delta P_H}{\sigma} = \frac{\rho_l g}{\sigma} (z_H - z) \quad (\text{A.20})$$

donde ρ_l es la densidad del líquido y g es la aceleración de la gravedad. Recordando ahora la definición en (1.6), entonces la relación (A.20) puede escribirse como

$$\frac{\Delta P_H}{\sigma} = \frac{z_H - z}{\lambda_c^2}, \quad (\text{A.21})$$

donde λ_c es la longitud capilar del fluido.

Sustituyendo (A.21) en (A.19) e igualándolo a (A.18), entonces se consigue la ecuación de Young-Laplace en coordenadas cilíndricas para describir la forma de la gota.

$$\frac{1}{r [1 + (\dot{r})^2]^{1/2}} - \frac{\ddot{r}}{[1 + (\dot{r})^2]^{3/2}} = \frac{\Delta P_0}{\sigma} + \frac{z_H - z}{\lambda_c^2} \quad (\text{A.22})$$

Sin embargo, conviene escribir a la ecuación (A.22) con cantidades adimensionales en términos de la longitud capilar, λ_c . Por tal motivo, primero se definen el radio adimensional ξ y la altura adimensional η de la gota.

$$r = \lambda_c \xi \quad \text{y} \quad z_H - z = \lambda_c \eta \quad (\text{A.23})$$

Luego, se define la cantidad

$$\dot{\xi} \equiv \frac{d\xi}{d\eta} \quad (\text{A.24})$$

de una manera similar a \dot{r} , pero note que \dot{r} es una cantidad adimensional y las definiciones (A.9) y (A.24) conducen a las siguientes igualdades:

$$\dot{\xi} = -\dot{r} \quad (\text{A.25})$$

y

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dz} = -\frac{d\dot{\xi}}{d\eta} \frac{d\eta}{dz} = \frac{\ddot{\xi}}{\lambda_c} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\xi} = \lambda_c \ddot{r}. \quad (\text{A.26})$$

Finalmente, sustituyendo los resultados (A.25) y (A.26) con las definiciones (A.23) en la ecuación diferencial ordinaria (A.22), se obtiene una EDO que describe la forma de la gota en términos adimensionales:

$$\frac{1}{\xi [1 + (\dot{\xi})^2]^{1/2}} - \frac{\ddot{\xi}}{[1 + (\dot{\xi})^2]^{3/2}} = \kappa_0 + \eta \quad (\text{A.27})$$

con $\kappa_0 = (\lambda_c \Delta P_0)/\sigma$. De tal manera que para un valor dado de κ_0 , la forma de la gota $\xi = \xi(\eta)$ está determinada resolviendo numéricamente la ecuación (A.27). Igualmente,

utilizando las definiciones (A.23) en (A.13) y (A.12), se pueden calcular el volumen y el área superficial de la gota con las cantidades adimensionales ξ y η .

$$V = \pi \lambda_c^3 \int_0^{\eta_b} [\xi(\eta)]^2 d\eta \quad (\text{A.28})$$

$$A = \pi \lambda_c^2 \int_0^{\eta_b} 2\xi \sqrt{(\dot{\xi})^2 + 1} d\eta \quad (\text{A.29})$$

Apéndice B

Ecuaciones de conservación

En este apéndice se presentan las demostraciones de las ecuaciones de Navier-Stokes que son un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales con derivadas parciales utilizadas para describir el movimiento de un fluido viscoso.

B.1 Ecuación de conservación de masa

Considere un fluido ocupando la región estándar $A \subset \mathbb{R}^3$ en algún instante de tiempo $t \geq 0$ donde una partícula en su interior cruza por la posición $\vec{x} = \vec{x}(t)$ con una velocidad $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$. Sea $B \subseteq A$ una subregión y suponga la existencia de una densidad $\rho = \rho(\vec{x}, t)$ para todo tiempo $t \geq 0$, entonces la masa de B está dada por:

$$m(B) = \int_B \rho(\vec{x}', t) d^3x' \quad \text{para cada tiempo } t \geq 0. \quad (\text{B.1})$$

Además, el movimiento del fluido está caracterizado por $\vec{\phi} = \vec{\phi}(\vec{x}, t)$, una función llamada *flujo de fluido*, suave e invertible para todo tiempo $t \geq 0$; la cual cumple que $\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{x}')$ y $\vec{x}' = \vec{\phi}(\vec{x})$ para $\vec{x} \in A$ y $\vec{x}' \in B$ pero, según el dominio del campo, $F = F(\vec{x}, t)$ es un campo material y $G = G(\vec{x}', t)$ es un campo espacial a los cuales se asocian otro par de campos definidos como $F^s(\vec{x}', t) \doteq F(\vec{\phi}^{-1}(\vec{x}', t))$ y $G^m(\vec{x}, t) \doteq G(\vec{\phi}(\vec{x}, t))$. Sin embargo, las derivadas de los campos material y espacial son diferentes, las cuales están dadas por:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} \quad \text{y} \quad \frac{dG}{dt} = \frac{DG}{Dt} \quad (\text{B.2})$$

con la derivada material definida como

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \vec{v}' \cdot \nabla_{\vec{x}'}(\cdot) \quad \text{donde} \quad \vec{v}' \equiv \dot{\vec{x}}'. \quad (\text{B.3})$$

B.1.1 Teorema de Transporte de Reynolds

Teorema. Si $f = f(\vec{x}', t)$ es un campo escalar cualquiera, entonces

$$\frac{d}{dt} \int_B f d^3x' = \int_B \frac{\partial f}{\partial t} d^3x' + \int_{\partial B} f(\vec{v} \cdot \hat{n}) dS',$$

donde \hat{n} es el vector normal externo sobre la frontera de la subregión B , denotada por ∂B .

Demostración. Del teorema de cambio de variable para integrales de volumen, sabemos que

$$\int_B f d^3x' = \int_A f(\vec{\phi}(\vec{x}, t)) J(\vec{\phi}(\vec{x}, t)) d^3x = \int_A f^m J(\vec{\phi}(\vec{x}, t)) d^3x. \quad (\text{B.4})$$

Derivando respecto al tiempo a la igualdad (B.4) y la primera ecuación de (B.2), se sigue que:

$$\frac{d}{dt} \int_B f d^3x' = \int_A d^3x \left[\frac{\partial f^m}{\partial t} J(\vec{\phi}(\vec{x}, t)) + f^m \frac{\partial J(\vec{\phi}(\vec{x}, t))}{\partial t} \right]. \quad (\text{B.5})$$

De la relación de Euler, se tiene que:

$$\frac{\partial J(\vec{\phi}(\vec{x}, t))}{\partial t} = J(\vec{\phi}(\vec{x}, t)) (\nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{v}(\vec{\phi}(\vec{x}, t))) = J(\vec{\phi}(\vec{x}, t)) (\nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{v})^m. \quad (\text{B.6})$$

Sustituyendo (B.6) en (B.5), se obtendrá una expresión de la forma de la integral al lado derecho de (B.4) y, de esta manera, se puede regresar a una integral aplicada sobre la subregión B .

$$\frac{d}{dt} \int_B f d^3x' = \int_B \left[\frac{D}{Dt} + (\nabla_{\vec{x}'} \cdot \vec{v}') \right] f d^3x' \quad (\text{B.7})$$

Sustituyendo ahora la definición (B.3) y la identidad $\nabla_{\vec{x}} \cdot (f\vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}} f + f \nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{v}$ en (B.7), se obtiene que:

$$\frac{d}{dt} \int_B f d^3x' = \int_B \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\vec{x}'} \cdot (f\vec{v}') \right] d^3x'. \quad (\text{B.8})$$

Por otro lado, sabemos que el teorema de la divergencia es

$$\int_B \nabla_{\vec{x}} \cdot (f\vec{v}) d^3x = \int_{\partial B} f(\vec{v} \cdot \hat{n}) dS. \quad (\text{B.9})$$

Finalmente, sustituyendo (B.9) en (B.8), se consigue la *ecuación de transporte de Reynolds* dada por:

$$\frac{d}{dt} \int_B f d^3x' = \int_B \frac{\partial f}{\partial t} d^3x' + \int_{\partial B} f(\vec{v}' \cdot \hat{n}) dS', \quad (\text{B.10})$$

donde $f = f(\vec{x}', t)$ es un campo escalar.

B.1.2 Ecuación del flujo de masa

Note que la densidad $\rho = \rho(\vec{x}', t)$ es un campo escalar, entonces el teorema de transporte de Reynolds se puede convertir en una *ecuación del flujo de masa* si se sustituye (B.1) en (B.8).

$$\frac{dm(B)}{dt} = \int_B \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\vec{x}'} \cdot (\rho \vec{v}') \right] d^3x' \quad (\text{B.11})$$

Por lo tanto, solo puede perderse masa a través de ∂A , la frontera de la región A . Si $m(B)$ de cualquier subregión B de un fluido se conserva, esto implica que $\dot{m}(B) = 0$ para toda B . En consecuencia, la derivación de la *ecuación de conservación de la masa* a partir de la ecuación del flujo de masa es trivial.

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\vec{x}} \cdot (\rho \vec{v}) \quad \text{ó} \quad 0 = \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{v} \quad (\text{B.12})$$

La expresión (B.12) también es llamada la *ecuación de continuidad*.

B.2 Ecuación de conservación de cantidad de movimiento

La dinámica de un fluido viscoso es causada por la acción de fuerzas como lo son las fuerzas viscosas, las fuerzas de presión, las tensiones o la fuerza de gravedad. Desde la segunda ley de Newton, se tiene que:

$$\frac{d}{dt} \int_B \rho \vec{v}' d^3x' = \int_B \rho \vec{g} d^3x' + \int_{\partial B} \vec{f} dS', \quad (\text{B.13})$$

donde $\rho \vec{v}'$ es la cantidad de movimiento por unidad de volumen y $\rho \vec{g}$ es el peso por unidad de volumen, mientras que $\vec{f} = \vec{\sigma} \cdot \hat{n}$ es una fuerza superficial por unidad de área definido en términos del tensor de esfuerzos $\vec{\sigma}$ y el vector normal exterior \hat{n} .

En notación indicial, se aplica el teorema de Reynolds (B.10) en la componente j -ésima de (B.13) y, se obtiene que:

$$\frac{d}{dt} \int_B \rho v'_j d^3x' = \int_B \partial_t(\rho v'_j) d^3x' + \int_{\partial B} \rho v'_j (v'_i n_i) dS' = \int_B \rho g_j d^3x' + \int_{\partial B} f_j dS' \quad (\text{B.14})$$

donde

$$\partial_t(\cdot) \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}. \quad (\text{B.15})$$

Por otro lado, se utiliza el teorema de la divergencia (B.9) en notación indicial:

$$\int_B \partial_i(f v_i) d^3x = \int_{\partial B} f(v_i n_i) dS, \quad (\text{B.16})$$

para transformar a las integrales de superficie en integrales de volumen. Así, la expresión (B.14) se simplifica a la siguiente:

$$0 = \int_B [\partial_t(\rho v_j) + \partial_i(\rho v_j v_i) - \rho g_j - \partial_i \sigma_{ij}] d^3x'. \quad (\text{B.17})$$

Dado que la integral (B.17) es nula para cualquier volumen material si el integrando es cero en cada punto del espacio y, realizando las derivadas parciales, entonces se sigue que:

$$v_j [\partial_t \rho + \partial_i(\rho v_i)] + \rho \frac{Dv_j}{Dt} = \rho g_j + \partial_i \sigma_{ij}. \quad (\text{B.18})$$

Pero, observe que la cantidad dentro de los corchetes es la ecuación de continuidad (B.12). Por lo tanto, se consigue la expresión:

$$\rho \frac{Dv_j}{Dt} = \rho g_j + \partial_i \sigma_{ij} \quad \text{ó} \quad \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{g} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{\sigma}, \quad (\text{B.19})$$

conocida como la *ecuación de movimiento de Cauchy*.

En este caso particular, será útil definir el estado de tensiones en un punto del fluido por medio de un *tensor de esfuerzos* inhomogéneo denotado por $\vec{\sigma}$, el cual contiene la distribución de tensiones y esfuerzos internos en un medio continuo deformado y, por tal motivo, este tensor es una matriz simétrica porque se aplica a elementos de fluidos que cambian de forma. Continuando con el análisis, el esfuerzo es isotrópico ($-\delta_{ij} p$) en un fluido en reposo, aunque un fluido viscoso en movimiento desarrolla fuerzas de tensión adicionales (τ_{ij}). Por tales motivos, las componentes de esta *ecuación constitutiva* están dadas por:

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} - \delta_{ij} p, \quad (\text{B.20})$$

la cual representa la fuerza por unidad de superficie actuando en la dirección \hat{x}_i sobre la cara perpendicular al versor \hat{x}_j . En las componentes (B.20), los elementos diagonales son los esfuerzos normales, mientras que los elementos fuera de la diagonal son los esfuerzos tangenciales y, $\vec{\tau} \equiv [\tau_{ij}]$ es un *tensor de tensiones*, δ_{ij} es la delta de Kronecker y $p = p(\vec{x})$ un campo escalar de presión.

Sustituyendo (B.20) en (B.19), se obtiene la forma general de la *ecuación de conservación de cantidad de movimiento* dada por:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho [\partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot (\nabla_{\vec{x}} \vec{v})] = \rho \vec{g} + \nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{\tau} - \nabla_{\vec{x}} p. \quad (\text{B.21})$$

En un fluido newtoniano, los esfuerzos viscosos son proporcionales a la tasa de deformación cortante. La ley de viscosidad de Newton rige este comportamiento cuya expresión unidimensional es

$$\tau_i = \mu \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad (\text{B.22})$$

donde τ_i es el esfuerzo viscoso en la dirección \hat{x}_i y μ es el coeficiente de viscosidad. Por simplicidad, utilizando notación indicial y coordenadas cartesianas, las componentes del esfuerzo viscoso general para un fluido newtoniano puede escribirse como

$$\tau_{ij} = \mu_{ijkl} \partial_l v_k \quad (\text{B.23})$$

donde

$$\mu_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk} \quad (\text{B.24})$$

es el tensor isotrópico de viscosidad. Cuando un fluido viscoso experimenta una rotación simple de un cuerpo rígido, no pueden existir fuerzas viscosas asociadas, esto implica que solo hay dos parámetros independientes. Además, note que el tensor de tensiones es simétrico ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$) solo si el tensor de viscosidad también es simétrico ($\mu_{ijkl} = \mu_{jikl}$), entonces la condición requerida es $\beta = \gamma = \mu$. Esto implica que:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} = \mu(\partial_j v_i + \partial_i v_j) + \alpha \partial_k v_k \delta_{ij} \quad (\text{B.25})$$

y, derivando parcialmente respecto a x_i (ó x_j), se puede demostrar que

$$\partial_i \tau_{ij} = \mu \partial_i \partial_i v_j + (\mu + \alpha) \partial_j \partial_i v_i. \quad (\text{B.26})$$

Por lo tanto,

$$\nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{\tau} = \mu \nabla_{\vec{x}}^2 \vec{v} + (\mu + \alpha) \nabla_{\vec{x}} (\nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{v}). \quad (\text{B.27})$$

Sustituyendo (B.27) en (B.21), se obtiene la *ecuación de conservación de cantidad de movimiento* vectorial.

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho [\partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot (\nabla_{\vec{x}} \vec{v})] = \rho \vec{g} + \mu \nabla_{\vec{x}}^2 \vec{v} + (\mu + \alpha) \nabla_{\vec{x}} (\nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{v}) - \nabla_{\vec{x}} p \quad (\text{B.28})$$

Nota: algunos textos consideran el coeficiente de viscosidad aparente $\mu_v = \alpha + (2/3)\mu$ para expresar esta ecuación de conservación para fluidos compresibles.

B.3 Ecuación de la energía mecánica

En las secciones anteriores del apéndice, se han demostrado ecuaciones para la conservación de masa y de cantidad de momento, respectivamente. Sin embargo, el movimiento del fluido también puede deberse a su energía mecánica cuya ecuación se obtiene haciendo el producto escalar entre (B.21) y la velocidad \vec{v} .

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot \vec{v} = \left(\rho \vec{g} + \nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{\tau} - \nabla_{\vec{x}} p \right) \cdot \vec{v} \quad (\text{B.29})$$

Utilizando notación indicial, se puede probar que

$$\frac{Dv_j}{Dt} v_j = \partial_t \left(\frac{1}{2} v_j^2 \right) + \partial_j \left(\frac{1}{2} v_i^2 \right) v_j. \quad (\text{B.30})$$

Desde la expresión (B.30) y aplicando la definición de derivada material (B.3), se obtiene la siguiente igualdad

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot \vec{v} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \|\vec{v}\|^2 \right). \quad (\text{B.31})$$

De manera similar, se tiene que:

$$\partial_i \partial_i v_j v_j = \partial_i \partial_i \left(\frac{1}{2} v_j^2 \right) \Rightarrow \nabla_{\vec{x}}^2 \vec{v} \cdot \vec{v} = \nabla_{\vec{x}}^2 \left(\frac{1}{2} \|\vec{v}\|^2 \right). \quad (\text{B.32})$$

Utilizando ahora la ecuación de continuidad (B.12), se produce la identidad

$$\rho \partial_t \left(\frac{1}{2} \|\vec{v}\|^2 \right) = \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho \|\vec{v}\|^2 \right) + \frac{1}{2} \|\vec{v}\|^2 \nabla_{\vec{x}} \cdot (\rho \vec{v}). \quad (\text{B.33})$$

Finalmente, si se sustituyen la igualdades (B.31) y (B.32) junto con la identidad (B.33) en la ecuación de conservación de cantidad de movimiento multiplicada por la proyección de la velocidad sobre ella (B.29), se obtiene una ecuación conocida como la *ecuación de energía mecánica*.

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \|\vec{v}\|^2 \right) &= \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho \|\vec{v}\|^2 \right) + \nabla_{\vec{x}} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho \|\vec{v}\|^2 \vec{v} \right) \\ &= \left(\rho \vec{g} + \nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{\tau} - \nabla_{\vec{x}} p \right) \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

B.4 Ecuación de conservación de la energía interna

Por último, la conservación de la energía en un fluido está dado por:

$$\frac{d}{dt} \int_B \rho \left(e + \frac{1}{2} \|\vec{v}'\|^2 \right) d^3 x' = \int_B \rho \vec{g}' \cdot \vec{v}' d^3 x' + \int_{\partial B} \left(\vec{f}' \cdot \vec{v}' - \vec{q}' \cdot \hat{n} \right) dS', \quad (\text{B.35})$$

donde los términos de la derecha son la energía interna por unidad de masa e y la energía cinética por unidad de masa $\|\vec{v}'\|^2/2$, mientras que los términos de la izquierda son el trabajo realizado debido al peso $\rho\vec{g} \cdot \vec{v}'$ y por fuerzas superficiales $\vec{f} \cdot \vec{v}'$. Por otra parte, el vector \vec{q} es el flujo de calor por conducción y radiación térmica. Nótese que el último término tiene signo negativo porque la energía disminuye si el flujo de calor es positivo (fuera de B).

En notación indicial, utilizando el teorema de transporte de Reynolds (B.10) al lado izquierdo de la fórmula integral (B.35) y, al resultado, se aplica (B.16) a las integrales de superficie. En consecuencia,

$$0 = \int_B d^3x' \left\{ \partial_t \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} v_j v_j \right) \right] + \partial_i \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} v_j v_j \right) v_i \right] - \rho g_j v_j - \partial_i (\sigma_{ij} v_j) + \partial_i q_i \right\}. \quad (\text{B.36})$$

Dado que la integral (B.36) es igual a cero para cualquier volumen material si el integrando es nulo para cada punto del espacio y , expandiendo las derivadas, se obtiene que:

$$\left(e + \frac{1}{2} v_j v_j \right) [\partial_t \rho + \partial_i (\rho v_i)] + \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} v_j v_j \right) = \rho g_j v_j + \partial_i (\sigma_{ij} v_j) - \partial_i q_i. \quad (\text{B.37})$$

Sin embargo, note que la cantidad dentro de los corchetes es la ecuación de continuidad (B.12) y, sustituyendo la ecuación constitutiva (B.20), entonces se consigue la expresión:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} v_j v_j \right) = \rho g_j v_j + v_j \partial_i \tau_{ij} + \tau_{ij} - v_i \partial_i p - p \partial_i v_i - \partial_i q_i. \quad (\text{B.38})$$

Por otra parte, la ecuación de la energía mecánica (B.34) en notación indicial es

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v_j v_j \right) = \rho g_j v_j + v_j \partial_i \tau_{ij} - v_j \partial_j p. \quad (\text{B.39})$$

Restando (B.39) a (B.38), se consigue la forma general de la *ecuación de conservación de la energía interna* dada por:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \tau_{ij} \partial_i v_j - p \partial_i v_i - \partial_i q_i. \quad (\text{B.40})$$

Del tensor de tensiones (B.25), se tiene que:

$$\tau_{ij} \partial_i v_j = \frac{1}{2} \left[\mu (\partial_j v_i + \partial_i v_j)^2 + \alpha \partial_k v_k \delta_{ij} (\partial_j v_i + \partial_i v_j) \right], \quad (\text{B.41})$$

donde se ha usado la propiedad $2\tau_{ij} A_{ij} = \tau_{ij} (A_{ij} + A_{ji})$ para un tensor \vec{A} cualquiera y un tensor $\vec{\tau}$ simétrico.

Del coeficiente de viscosidad aparente, se sabe que $\alpha = \mu_v - (2/3)\mu$, entonces

$$\tau_{ij} \partial_i v_j = \frac{1}{2} \mu \left[(\partial_j v_i + \partial_i v_j)^2 - \frac{2}{3} \partial_k v_k \delta_{ij} (\partial_j v_i + \partial_i v_j) \right] + \mu_v (\partial_k v_k)^2, \quad (\text{B.42})$$

ya que $\delta_{ij}\partial_i v_j = \partial_i v_i$. Note ahora que la delta de Kronecker de segundo orden δ_{ij} es un tensor simétrico, entonces

$$\begin{aligned}\tau_{ij}\partial_i v_j &= 2\mu \left[\left(\frac{\partial_j v_i + \partial_i v_j}{2} \right)^2 - \frac{1}{3} \partial_k v_k \delta_{ij} \partial_i v_j \right] + \mu_v (\partial_k v_k)^2 \\ &= 2\mu \left[\left(\frac{\partial_j v_i + \partial_i v_j}{2} \right)^2 - \frac{2}{3} \partial_k v_k \delta_{ij} \left(\frac{\partial_j v_i + \partial_i v_j}{2} \right) + \frac{1}{3} (\partial_k v_k)^2 \right] + \mu_v (\partial_k v_k)^2.\end{aligned}\quad (\text{B.43})$$

Dado que $\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ii} = 3$, la cantidad entre corchetes se convierte en un binomio cuadrado perfecto. Así,

$$\tau_{ij}\partial_i v_j = 2\mu \left[\frac{1}{2} (\partial_j v_i + \partial_i v_j) - \frac{1}{3} \partial_k v_k \delta_{ij} \right]^2 + \mu_v (\partial_k v_k)^2 \quad (\text{B.44})$$

y, si definimos un *tensor de velocidad de deformación* como:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j v_i + \partial_i v_j), \quad (\text{B.45})$$

esto implica que:

$$\tau_{ij}\partial_i v_j = 2\mu \left(S_{ij} - \frac{1}{3} \partial_k v_k \delta_{ij} \right)^2 + \mu_v (\partial_k v_k)^2. \quad (\text{B.46})$$

Sustituyendo ahora (B.46) en (B.40), se obtiene:

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \partial_i v_i + 2\mu \left(S_{ij} - \frac{1}{3} \partial_k v_k \delta_{ij} \right)^2 + \mu_v (\partial_k v_k)^2 - \partial_i q_i. \quad (\text{B.47})$$

Para finalizar, la ley de Fourier de la conducción de calor nos dice que

$$\vec{q} = -k \nabla_{\vec{x}} T \quad \text{ó} \quad q_i = -k \partial_i T, \quad (\text{B.48})$$

donde T es el campo escalar de temperatura y k es la conductividad térmica.

Por último, sustituyendo (B.48) en (B.47), se consigue la *ecuación de conservación de energía*.

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p (\nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{v}) + 2\mu \left(\overleftrightarrow{S} - \frac{1}{3} (\nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{v}) \overleftrightarrow{I} \right)^2 + \mu_v (\nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{v})^2 + \nabla_{\vec{x}} \cdot (k \nabla_{\vec{x}} T). \quad (\text{B.49})$$

Note que el tensor \overleftrightarrow{S} es simétrico y el tensor \overleftrightarrow{I} es el tensor identidad.

Apéndice C

Propiedades de transformada de Hankel

En éste apéndice se mostrarán algunas propiedades de la transformada de Hankel definida en (3.33), utilizadas para reducir el conjunto de ecuaciones de Navier-Stokes para la dinámica de una gota Leidenfrost.

Las transformadas de Hankel de orden $(n + 1)$ -ésimo o de orden $(n - 1)$ -ésimo se pueden expresar en términos de la transformada de Hankel de orden n -ésimo cuyo argumento involucra la derivada de un producto de funciones. Iniciando la deducción de esta propiedad, sea $g = g(x, y)$ un campo escalar genérico y desde la definición (3.33), se tiene que:

$$\mathbb{H}_n \left\{ \frac{1}{x^{n+1}} \frac{\partial}{\partial x} [x^{n+1}g] \right\} = 2\pi \int_0^\infty x^{-n} \frac{\partial}{\partial x} [x^{n+1}g] J_n(2\pi qx) dx. \quad (\text{C.1})$$

Integrando por partes y recordando la siguiente propiedad de las funciones de Bessel:

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(2\pi qx)] = -2\pi q x^{-n} J_{n+1}(2\pi qx), \quad (\text{C.2})$$

entonces la igualdad (C.1) se convierte en:

$$\mathbb{H}_n \left\{ \frac{1}{x^{n+1}} \frac{\partial}{\partial x} [x^{n+1}g] \right\} = \lim_{a \rightarrow \infty} [xg J_n(2\pi qx)] \Big|_0^a + 2\pi q \left\{ 2\pi \int_0^\infty g J_{n+1}(2\pi qx) x dx \right\}. \quad (\text{C.3})$$

Por otra parte, el campo escalar $g = g(x, y)$ debe cumplir unas condiciones suficientes pero no necesarias en su componente horizontal x para la validez de las definiciones (3.33) y (3.34). Entre ellas están que $g(x, y) = O(x^{-k}, y)$ cuando $x \rightarrow \infty$ y $k > 3/2$, $\partial_x g$ es

continua por trozos sobre cada subintervalo acotado de $[0, \infty)$ y $g = g(x, y)$ esté definida como $[g(x_+, y) + g(x_-, y)]/2$. Por tales motivos, el límite en (C.3) es igual a cero y, por la definición (3.33), la igualdad (C.3) se reduce a la propiedad de las transformadas de Hankel antes mencionada. Por lo tanto, la propiedad es

$$\mathbb{H}_n \left\{ \frac{1}{x^{n+1}} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^{n+1} g \right] \right\} = 2\pi q \mathbb{H}_{n+1} \{g(x, y)\}. \quad (\text{C.4})$$

Note que si $n \rightarrow -n$ en (C.5), entonces se satisface esta otra propiedad:

$$\mathbb{H}_{-n} \left\{ x^{n-1} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{g}{x^{n-1}} \right] \right\} = 2\pi q \mathbb{H}_{1-n} \{g(x, y)\}. \quad (\text{C.5})$$

Sin embargo, de las propiedades de las funciones de Bessel, se sabe que $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ y, por transitividad, esto implica que $\mathbb{H}_{-n} = (-1)^n \mathbb{H}_n$. Por esta razón, la otra propiedad se puede escribir como:

$$\mathbb{H}_n \left\{ x^{n-1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g}{x^{n-1}} \right) \right\} = -2\pi q \mathbb{H}_{n-1} \{g(x, y)\}. \quad (\text{C.6})$$

Apéndice D

Número de Sherwood

En este apéndice se obtienen el número de Sherwood promedio (3.97) y el número de Sherwood en términos del número de Spalding (3.101).

D.1 Difusión pura

Considere el siguiente esquema de la Figura D.1 de una gota Leidenfrost estacionaria con simetría esférica. Donde ρ_{int} es la densidad de vapor en la interfaz aire-líquido y $\rho(a)$ es la densidad de vapor en el ambiente. (Si el ambiente es seco, entonces la densidad es nula en el infinito.)

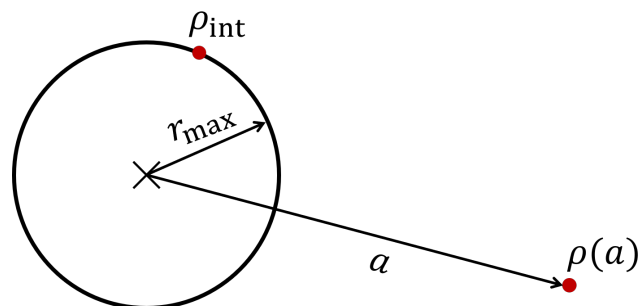


Figura D.1: Esquema de densidades en la difusión pura.

Iniciemos analizando cómo cambia la concentración del líquido debido a la difusión presente en el hemisferio superior de la gota. Desde la segunda ley de Fick, se tiene que:

$$\frac{d\rho}{dt} = D\nabla^2\rho. \quad (\text{D.1})$$

Como la densidad solo depende de la distancia radial $\rho = \rho(r)$, entonces la ecuación (D.1) se reduce a la siguiente:

$$0 = D \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) \right\}. \quad (\text{D.2})$$

Resolviendo la ecuación (D.2), se obtiene que:

$$\rho(r) = B - \frac{A}{r}, \quad (\text{D.3})$$

donde A y B son constantes de integración cuyos valores se deducen de aplicar las condiciones de frontera:

$$\rho(r = r_{\max}) = \rho_{\text{int}} \quad \text{y} \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \rho(a) = \rho_{\infty}. \quad (\text{D.4})$$

Por tal motivo, la solución de la ecuación diferencial (D.2) con condiciones de frontera (D.4) está dada por:

$$\rho(r) = \rho_{\infty} + \frac{r_{\max}}{r} (\rho_{\text{int}} - \rho_{\infty}). \quad (\text{D.5})$$

Por otro lado, la primera ley de Fick relaciona el flujo difusivo con la contracción bajo la suposición de un estado estacionario.

$$\vec{J} = -D \nabla \rho \quad (\text{D.6})$$

Note que la ecuación (D.6) es unidimensional por la simetría esférica de este problema, entonces el flujo difusivo en la frontera de la gota es

$$J_0 = J(r = r_{\max}) = -D \left. \frac{\partial \rho}{\partial r} \right|_{r=r_{\max}}. \quad (\text{D.7})$$

Sustituyendo (D.5) en (D.7), entonces se obtiene que:

$$J_0 = -\frac{D}{r_{\max}} (\rho_{\infty} - \rho_{\text{int}}). \quad (\text{D.8})$$

Si el flujo difusivo promedio es $J_0 = -K_0 \Delta \rho_{\infty} = -K_0 (\rho_{\infty} - \rho_{\text{int}})$, entonces $K_0 = D/r_{\max}$ es un coeficiente de transferencia de masa sin flujo de Stefan.

En consecuencia, el número de Sherwood promedio sin considerar el flujo de Stefan está dado por:

$$\text{Sh}_0 = \frac{K_0 L}{D} = \frac{K_0 (2r_{\max})}{D} = 2, \quad (\text{D.9})$$

donde $L = 2r_{\max}$ es una longitud característica de la gota y D es un coeficiente de difusión.

donde C es una constante de integración cuyo valor se deduce sustituyendo (D.13) en (D.11) e integrando en sus respectivos intervalos.

$$C \cdot \lim_{a \rightarrow \infty} \int_r^a \frac{1}{r^2} dr = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\rho(r)}^{\rho(a)} \frac{\rho_v D}{\rho' - \rho_v} d\rho' \quad (\text{D.14})$$

Resolviendo las integrales (D.14) para la constante de integración, se sigue que:

$$C = r \rho_v D \ln \left\{ \frac{\rho_v - [\lim_{a \rightarrow \infty} \rho(a)]}{\rho_v - \rho(r)} \right\}. \quad (\text{D.15})$$

Por lo que el flujo total es

$$N(r) = \frac{\rho_v D}{r} \ln \left\{ \frac{\rho_v - [\lim_{a \rightarrow \infty} \rho(a)]}{\rho_v - \rho(r)} \right\}. \quad (\text{D.16})$$

Note que es posible conseguir otra expresión para el flujo total promedio N_0 si desde la expresión (D.16) se evalúa en $r = r_{\max}$ y se usan las condiciones de frontera (D.4). Así,

$$N_0 = N(r = r_{\max}) = \frac{\rho_v D}{r_{\max}} \ln \left(\frac{\rho_v - \rho_{\infty}}{\rho_v - \rho_{\text{int}}} \right). \quad (\text{D.17})$$

Por un lado, el flujo difusivo promedio es $J_0 = -K \Delta \rho_{\infty} = -K (\rho_{\infty} - \rho_{\text{int}})$, pero se puede obtener otra expresión para el flujo difusivo promedio J_0 igualando los flujos totales promedio (D.12) y (D.17). Luego,

$$J_0 = -K (\rho_{\infty} - \rho_{\text{int}}) = \frac{\rho_v D}{r_{\max}} \left(1 - \frac{\rho_{\text{int}}}{\rho_v} \right) \ln \left(\frac{\rho_v - \rho_{\infty}}{\rho_v - \rho_{\text{int}}} \right). \quad (\text{D.18})$$

Esto implica que el coeficiente de transferencia de masa es

$$K = \frac{D}{r_{\max}} \left(\frac{\rho_v - \rho_{\text{int}}}{\rho_{\text{int}} - \rho_{\infty}} \right) \ln \left(\frac{\rho_v - \rho_{\infty}}{\rho_v - \rho_{\text{int}}} \right). \quad (\text{D.19})$$

En consecuencia, el número de Sherwood considerando el flujo de Stefan está dado por:

$$\text{Sh} = \frac{KL}{D} = \frac{K(2r_{\max})}{D} = 2 \left(\frac{\rho_v - \rho_{\text{int}}}{\rho_{\text{int}} - \rho_{\infty}} \right) \ln \left(\frac{\rho_v - \rho_{\infty}}{\rho_v - \rho_{\text{int}}} \right). \quad (\text{D.20})$$

donde $L = 2r_{\max}$ es una longitud característica de la gota y D es un coeficiente de difusión.

Introduciendo ahora el número de Spalding (3.99), note que:

$$\frac{1}{\text{Bm}} = \frac{\rho_v - \rho_{\text{int}}}{\rho_{\text{int}} - \rho_{\infty}} \quad \text{y} \quad 1 + \text{Bm} = \frac{\rho_v - \rho_{\infty}}{\rho_v - \rho_{\text{int}}}. \quad (\text{D.21})$$

Por lo tanto, si se comparan (D.20) y (D.21), entonces el número de Sherwood es

$$\text{Sh} = 2 \frac{\ln(1 + \text{Bm})}{\text{Bm}} = \text{Sh}_0 \frac{\ln(1 + \text{Bm})}{\text{Bm}}, \quad (\text{D.22})$$

donde Sh_0 es el número de Sherwood promedio (D.9).

Apéndice E

Programas

En este apéndice se muestran los programas realizados para calcular las mediciones experimentales con base en los videos capturados de la gota Leidenfrost.

E.1 Macro en ImageJ

La *macro* generada en ImageJ, para realizar la binarización de las secuencias de imágenes mostradas en las figuras 4.4c y 4.5c, se muestra a continuación.

```
1 makeRectangle(a1, a2, a3, a4);
2 run("Crop");
3 run("8-bit");
4 setMinAndMax(b1, b2);
5 run("Apply LUT");
6 setAutoThreshold("Default");
7 //run("Threshold...");
8 setOption("BlackBackground", false);
9 run("Convert to Mask", "method=Default background=Light calculate");
10 run("Remove Outliers...", "radius = c1 threshold = d which = Dark stack");
11 run("Close-", "stack");
12 run("Fill Holes", "stack");
13 run("Open", "stack");
14 run("Remove Outliers...", "radius = c2 threshold = d which = Dark stack");
15 run("Remove Outliers...", "radius = c3 threshold = d which = Dark stack");
16 run("Analyze Particles...", "size = g-Infinity circularity = e-1.00 display
    exclude clear stack");
```

Nota: se debe asegurar que la escala esté introducida en ImageJ antes de correr la macro en el caso del análisis con la vista superior. Sin embargo, se debe eliminar la línea 16 de la macro para el análisis con la vista frontal.

E.2 Función *medicion.m*

La función realizada en Matlab para calcular el volumen, el radio máximo, el radio de contacto y la altura de la gota a partir de la matriz $[\vec{X}, \vec{Y}]$, se muestra en el siguiente cuadro.

```

1 function [V, Xmax, Dz, Xb, Dzm] = medicion(X,Y,sc)
2 Xi = X/sc; Yi = Y/sc;
3 Z1 = [Yi, Xi];
4 [~, s] = sort(Z1(:, 1), 'descend');
5 Z2=Z1(s, :);
6 Z2(:, [1 2])=Z2(:, [2 1]);
7 Xf = Z2(:,1); Yf = Z2(:,2);
8 [~, s] = sort(Z2(:, 2), 'ascend');
9 Z3=Z2(s, :);
10 Z3(:, [1 2])=Z3(:, [2 1]);
11 Xff = Z3(:,2); Zff = Z1(:,1);
12 n=length(Xf); i=1;
13     while (i<=n-1)
14         c(i)= (pi/4)*(Yf(i)-Yf(i+1))*((Xf(i+1)+Xf(i))^2);
15         V=norm(sum(c));
16         i=i+1;
17     end
18 Xmax = max(Xf); Dz = max(Yf)-min(Yf);
19 Xb = Xff(end); zrmax = Zff(end);
20 Dzm = zrmax-min(Yf);
21 end

```

E.3 Programa principal *evaporacion.m*

El programa principal realizado en Matlab para graficar la razón de evaporación del volumen, radio máximo, el radio de contacto y la altura de la gota Leidenfrost con respecto al tiempo se muestra a continuación.

```

1 clc; clear all; close all; format long;
2 sc = 59.20653; % ( pixel / mm )
3 fps = 125; tau = 267; lc = 2.52; a = 500; skip = 250; n0=skip/fps;
4 g1 = 4; g2 = 26; sg = 0; gap(1)=0; gap(2)=20-n0; gap(3)=17-n0; gap(4)=15-n0;
   gap(3)=17; gap(4)=15;
5 nombre = 'Mediciones.xlsx';
6 pngFiles = dir ('*.png');
7 numfiles = length(pngFiles);
8 mydata = cell(1, numfiles);
9 for i = 1: numfiles
10  t(i) = (skip*(i-1))/fps;
11  mydata{i} = imread(pngFiles(i).name);
12  F = mydata{i};
13  % F = rgb2gray(F);
14  EF = edge(F, 'Prewitt');
15  BF = not(EF);
16  [Y,X] = find(~BF);
17  polyin = polyshape(X,Y);
18  [xc,yc] = centroid(polyin);
19  RFD = imcrop(BF,[xc, 0, a, a]); RFI = imcrop(BF,[0, 0, xc, a]);
20  RFII = flipdim(RFI ,2);
21  [Yd,Xd] = find(~RFD) ; [Yz,Xz] = find(~RFII) ;
22  [Vd, Xmaxd, Dzd, Xbd, Dzmd] = medicion(Xd,Yd,sc);
23  [Vz, Xmaxz, Dzz, Xbz, Dzmz] = medicion(Xz,Yz,sc);
24  V = [Vd Vz]; Xmax = [Xmaxd Xmaxz]; Xb = [Xbd Xbz];
25  Dz = [Dzd Dzz]; Dzm = [Dzmd Dzmz];
26  V_prom(i) = sum(V)/length(V);
27  Xmax_prom(i) = sum(Xmax)/length(Xmax); Xb_prom(i) = sum(Xb)/length(Xb);
28  Dz_b(i) = max(Dz); Dz_max(i) = sum(Dzm)/length(Dzm);
29  Bo(i) = (1/(lc ^2))*(((3*V_prom(i))/(4*pi))^(2/3));
30  eta_b(i) = Dz_b(i)/lc; eta_max(i) = Dz_max(i)/lc;
31  xi_max(i) = Xmax_prom(i)/lc; xi_b(i) = Xb_prom(i)/lc;
32  LBo(i) = log10(Bo(i));
33  Letab(i) = log10(eta_b(i)); Letam(i) = log10(eta_max(i));

```

```

34 Lxim(i) = log10(xi_max(i)); Lxib(i) = log10(xi_b(i));
35 end
36 for k=1:g1
37   sg = sg+gap(k);
38   for i=g2*(k-1)+1:g2*k
39     t(i)=t(i)+sg;
40     i=i+1;
41   end
42   k=k+1;
43 end
44 X0 = max(Xmax_prom); Dz0 = max(Dz_b);
45 V0 = max(V_prom)*1.05; Y0 = max(X0,Dz0)*1.1;
46 Bom = max(Bo)*1.05; LBomin = -2.5; LBomax=1; tN = t/tau;
47 d1=15; d2=25; d3=1;
48 c1 = [0 0.65 0]; c2 = [1 0 0]; c3 = [0 0 1];
49 c4 = [0.75 0 0.75]; c5 = [0 0.65 1]; c6 = [1 0.45 0];
50 figure(1)
51 tiledlayout(1,2);
52 hold on
53 nexttile
54 plot(t,V_prom,'.', 'MarkerSize',d1, 'MarkerEdgeColor',c1);
55 %plot(t,V_prom,'-', 'LineWidth',d3, 'Color',c1);
56 legend({'V= $V_{\text{prom}}$ '}, 'Location', 'southwest')
57 set(gca, 'FontSize', 2*d2)
58 axis([0 tau 0 V0])
59 xlabel('Tiempo ( $s$ )', 'FontSize', 2*d2)
60 ylabel('Volumen ( $\mu l$ )', 'FontSize', 2*d2)
61 nexttile
62 plot(tN,Bo,'.', 'MarkerSize',d1, 'MarkerEdgeColor',c6)
63 %plot(tN,Bo,'-', 'LineWidth',d3, 'Color',c6)
64 legend({'Bo= $Bo_{\text{prom}}/tau$ '}, 'Location', 'northeast')
65 set(gca, 'FontSize', d2)
66 axis([0 1 0 Bom])
67 xlabel('t_N', 'FontSize', d2)
68 ylabel('Bo', 'FontSize', d2)
69 hold off
70 figure(2)
71 hold on
72 plot(t,Dz_max,'.', 'MarkerSize',d1, 'MarkerEdgeColor',c5, 'DisplayName', 'z_H_
    -z(r_{max})')

```

```

73 plot(t,Dz_b, '.', 'MarkerSize',d1, 'MarkerEdgeColor',c3, 'DisplayName', 'z_H - z_h')
74 plot(t,Xb_prom, '.', 'MarkerSize',d1, 'MarkerEdgeColor',c4, 'DisplayName', 'r_{b}')
75 plot(t,Xmax_prom, '.', 'MarkerSize',d1, 'MarkerEdgeColor',c2, 'DisplayName', 'r_{max}')
76 %plot(t,Dz_max, '-', 'LineWidth',d3, 'Color',c5, 'DisplayName', 'z_H - z(r_{max})')
77 %plot(t,Dz_b, '-', 'LineWidth',d3, 'Color',c3, 'DisplayName', 'z_H - z_h')
78 %plot(t,Xb_prom, '-', 'LineWidth',d3, 'Color',c4, 'DisplayName', 'r_{b}')
79 %plot(t,Xmax_prom, '-', 'LineWidth',d3, 'Color',c2, 'DisplayName', 'r_{max}')
80 hold off
81 legend('Location','northeast','NumColumns',2)
82 set(gca, 'FontSize', d2)
83 axis([0 tau 0 Y0])
84 xlabel('Tiempo_{s}'), 'FontSize', d2)
85 ylabel('Distancias_{mm}'), 'FontSize', d2)
86 box
87 figure(3)
88 tiledlayout(1,2);
89 hold on
90 nexttile
91 hold on
92 plot(LBo,Lxim, '.', 'MarkerSize',d1, 'MarkerEdgeColor',c2)
93 plot(LBo,Lxib, '.', 'MarkerSize',d1, 'MarkerEdgeColor',c4)
94 hold off
95 legend({'\xi_{max}', '\xi_{b}'}, 'Location', 'southeast', 'FontSize', d2)
96 set(gca, 'FontSize', d2)
97 axis([LBomin LBomax LBomin LBomax])
98 xlabel('log_{10}(LBo)'), 'FontSize', d2)
99 ylabel('log_{10}(L\xi)'), 'FontSize', d2)
100 box
101 nexttile
102 hold on
103 plot(LBo,Letab, '.', 'MarkerSize',d1, 'MarkerEdgeColor',c3)
104 plot(LBo,Letam, '.', 'MarkerSize',d1, 'MarkerEdgeColor',c5)
105 hold off
106 legend({'\eta_{b}', '\eta_{max}'}, 'Location', 'southeast', 'FontSize', d2)
107 set(gca, 'FontSize', d2)
108 axis([LBomin LBomax LBomin LBomax])

```

```
109 xlabel('log_{10}(\u03b2\u0304\u0304)', 'FontSize', d2)
110 ylabel('log_{10}(\u03b2\u0304\u0304\eta\u0304\u0304)', 'FontSize', d2)
111 box
112 hold off
113 writematrix(t', nombre, 'Sheet', 1, 'Range', 'A2')
114 writematrix(V_prom', nombre, 'Sheet', 1, 'Range', 'B2')
115 writematrix(Xmax_prom', nombre, 'Sheet', 1, 'Range', 'C2')
116 writematrix(Xb_prom', nombre, 'Sheet', 1, 'Range', 'D2')
117 writematrix(Dz_b', nombre, 'Sheet', 1, 'Range', 'E2')
118 writematrix(Dz_max', nombre, 'Sheet', 1, 'Range', 'F2')
119 writematrix(Bo', nombre, 'Sheet', 1, 'Range', 'G2')
120 writematrix(xi_max', nombre, 'Sheet', 1, 'Range', 'H2')
121 writematrix(xi_b', nombre, 'Sheet', 1, 'Range', 'I2')
122 writematrix(eta_max', nombre, 'Sheet', 1, 'Range', 'J2')
123 writematrix(eta_b', nombre, 'Sheet', 1, 'Range', 'K2')
124 writematrix(LBo', nombre, 'Sheet', 2, 'Range', 'A2')
125 writematrix(Lxim', nombre, 'Sheet', 2, 'Range', 'B2')
126 writematrix(Lxib', nombre, 'Sheet', 2, 'Range', 'C2')
127 writematrix(Letam', nombre, 'Sheet', 2, 'Range', 'D2')
128 writematrix(Letab', nombre, 'Sheet', 2, 'Range', 'E2')
```

Apéndice F

Experimentos con la vista superior

En este apéndice se muestran explícitamente las gráficas relacionadas con la evaporación de gotas Leidenfrost (área, perímetro y radio efectivo), donde se ha utilizado su vista superior de distintos líquidos, cuyo volumen inicial $V_0 = 250 \mu l$ fue depositado sobre un plato de aluminio a $T_p = 250^\circ \text{C}$. Ver desde la Figura F.1 hasta la Figura F.6.

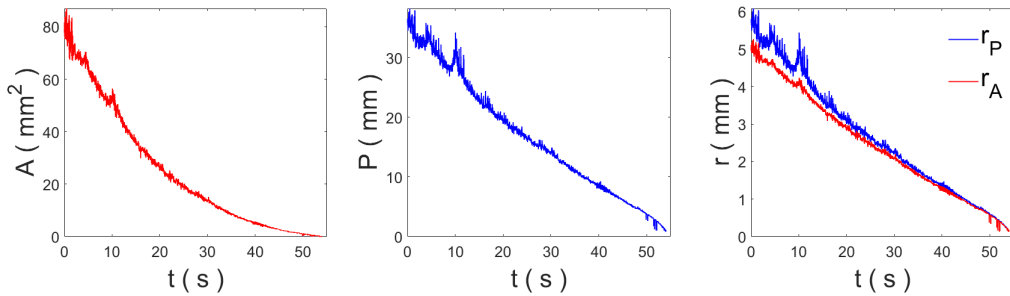


Figura F.1: Evaporación de gota Leidenfrost de acetona ($V_0 = 250 \mu l$) con $T_p = 250^\circ \text{C}$.

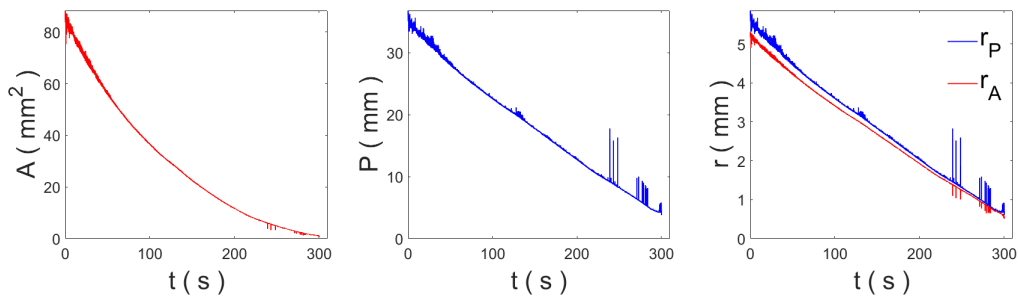


Figura F.2: Evaporación de gota Leidenfrost de agua ($V_0 = 250 \mu l$) con $T_p = 250^\circ \text{C}$.

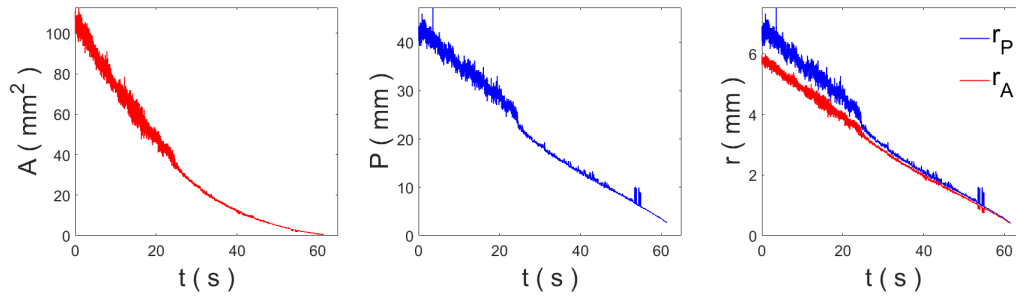


Figura F.3: Evaporación de gota Leidenfrost de cloroformo ($V_0 = 250\mu l$) con $T_p = 250^\circ C$.

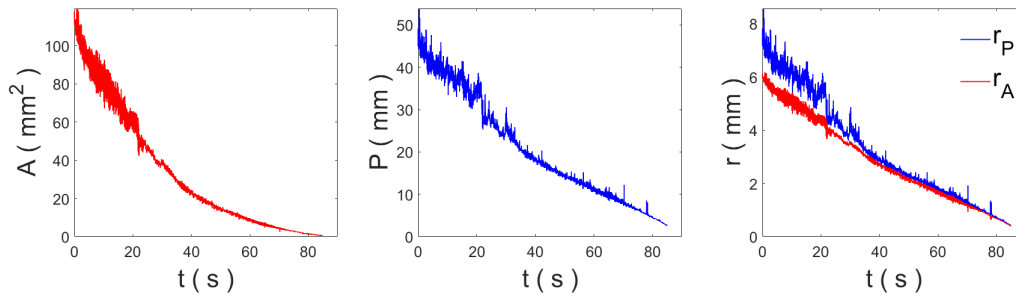


Figura F.4: Evaporación de gota Leidenfrost de etanol ($V_0 = 250\mu l$) con $T_p = 250^\circ C$.

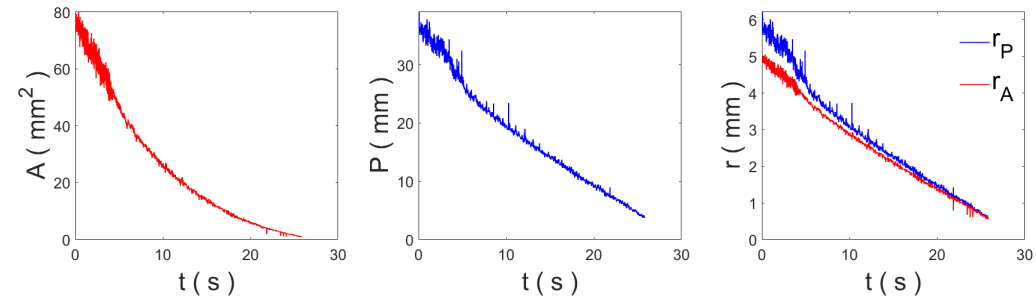


Figura F.5: Evaporación de gota Leidenfrost de hexano ($V_0 = 250\mu l$) con $T_p = 250^\circ C$.

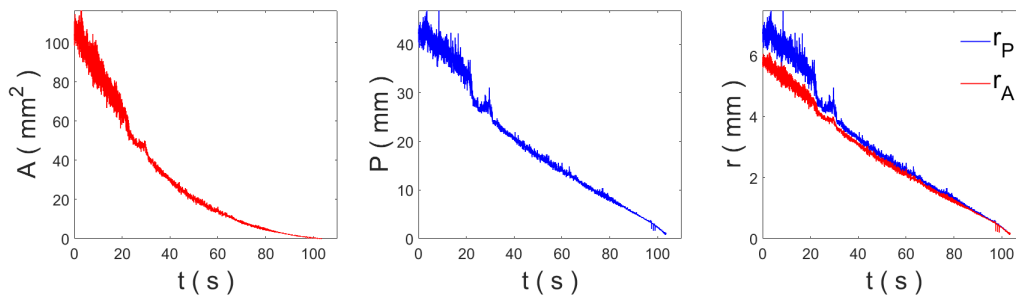
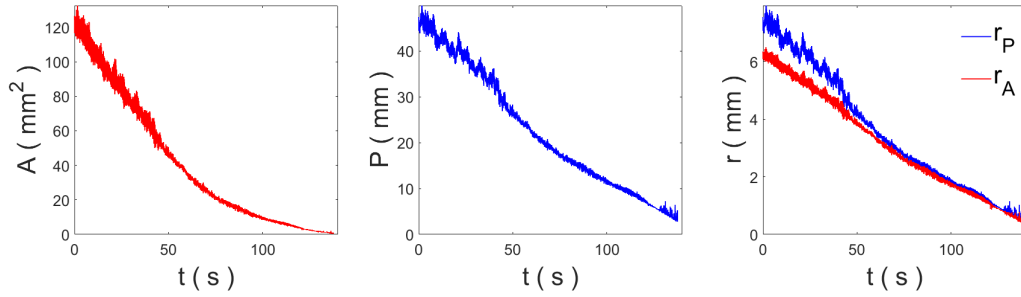
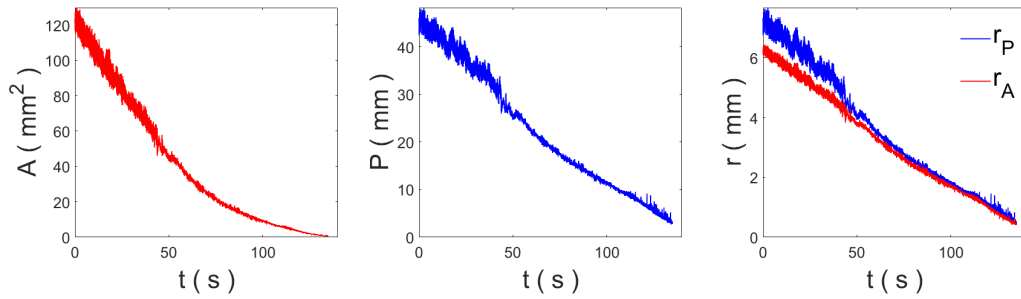


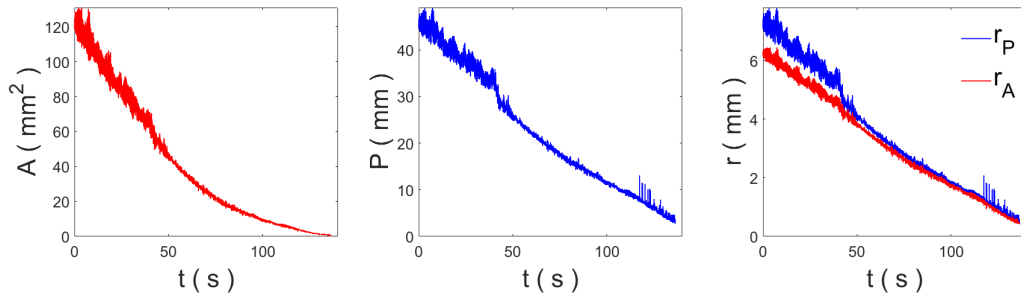
Figura F.6: Evaporación de gota Leidenfrost de metanol ($V_0 = 250\mu l$) con $T_p = 250^\circ C$.



(a) Gota 1.

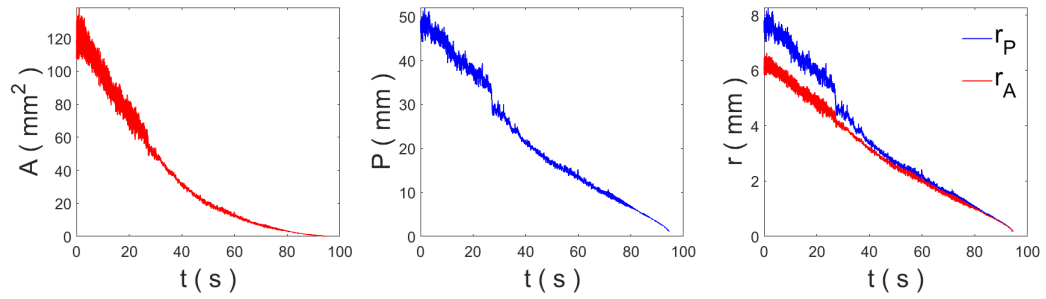


(b) Gota 2.

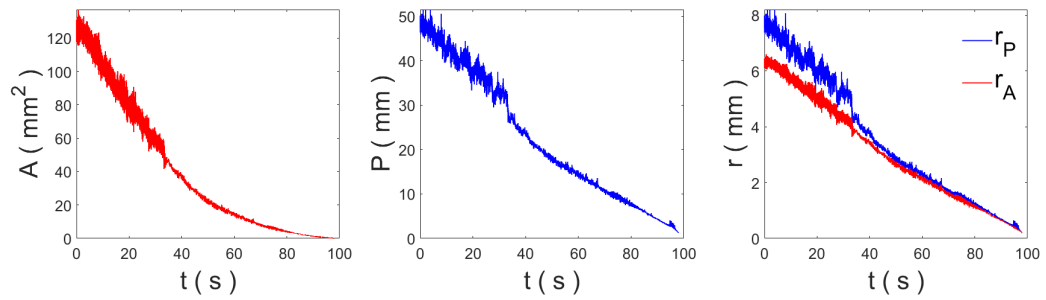


(c) Gota 3.

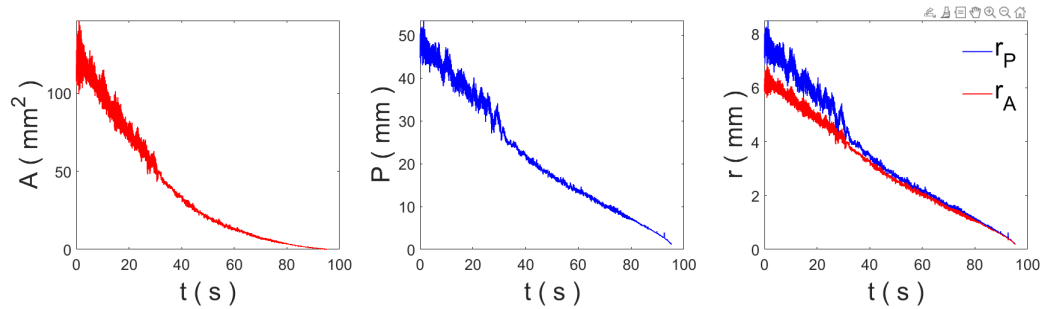
Figura F.7: Vista superior. Área $A(t)$, perímetro $P(t)$ y radio efectivo $r(t)$ en función al tiempo de la evaporación de una gota Leidenfrost de etanol ($V_0 = 250\mu\text{l}$) depositada sobre un plato a $T_p = 150^\circ\text{C}$.



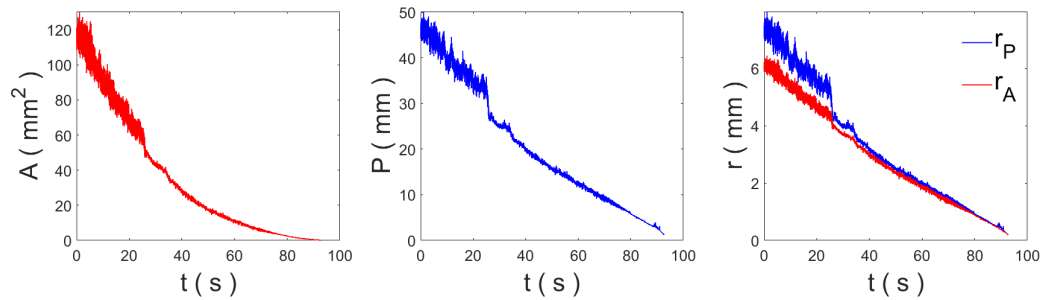
(a) Gota 1.



(b) Gota 2.

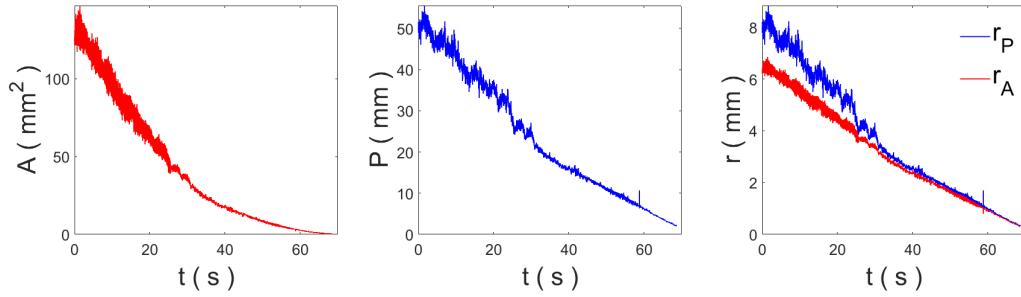


(c) Gota 3.

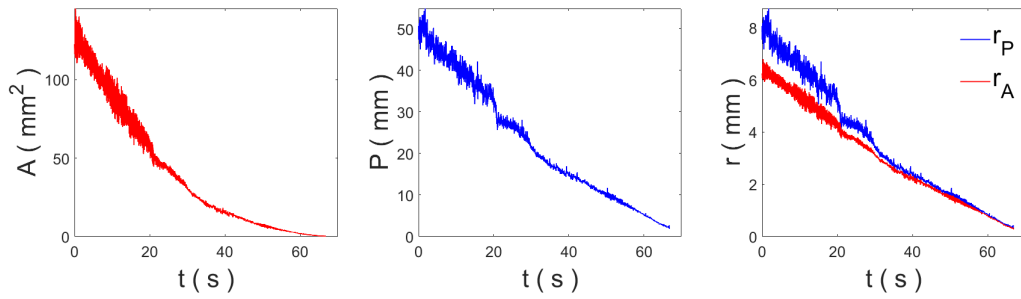


(d) Gota 4.

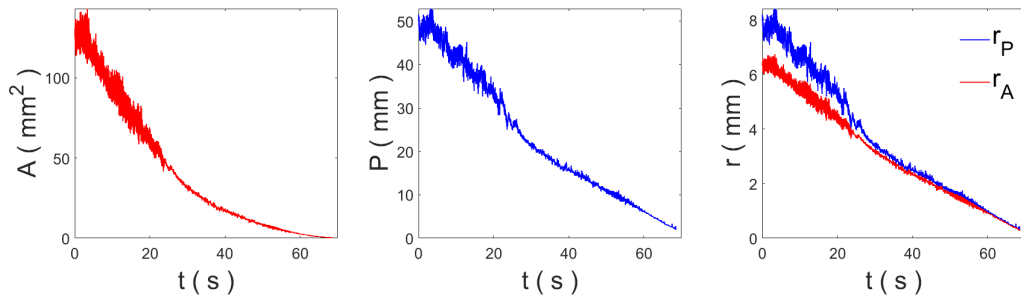
Figura F.8: Vista superior. Área $A(t)$, perímetro $P(t)$ y radio efectivo $r(t)$ en función al tiempo de la evaporación de una gota Leidenfrost de etanol ($V_0 = 250\mu\text{l}$) depositada sobre un plato a $T_p = 250^\circ\text{C}$.



(a) Gota 1.



(b) Gota 2.



(c) Gota 3.

Figura F.9: Vista superior. Área $A(t)$, perímetro $P(t)$ y radio efectivo $r(t)$ en función al tiempo de la evaporación de una gota Leidenfrost de etanol ($V_0 = 250\mu l$) depositada sobre un plato a $T_p = 350^\circ C$.

Apéndice G

Experimentos con la vista lateral

En este apéndice se muestran explícitamente las gráficas relacionadas con la evaporación de gotas Leidenfrost, donde se ha utilizado su vista lateral de cinco líquidos, cuyo volumen inicial V_0 (μl) fue depositado sobre un plato de aluminio a T_p ($^{\circ}\text{C}$).

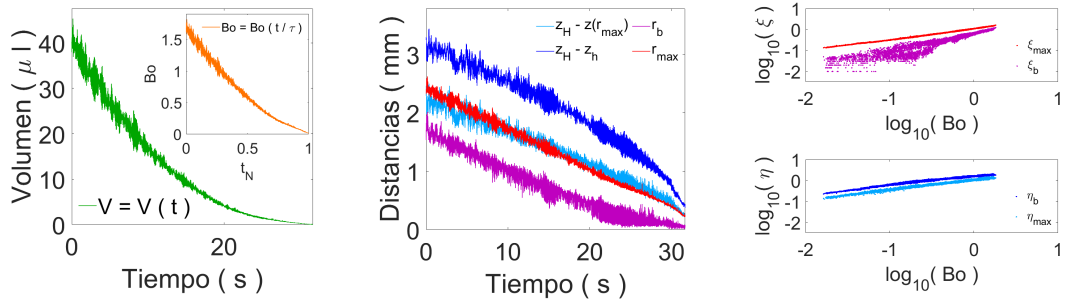


Figura G.1: Evaporación de gota Leidenfrost de acetona ($V_0 = 150 \mu\text{l}$) a $T_p = 250^{\circ}\text{C}$.

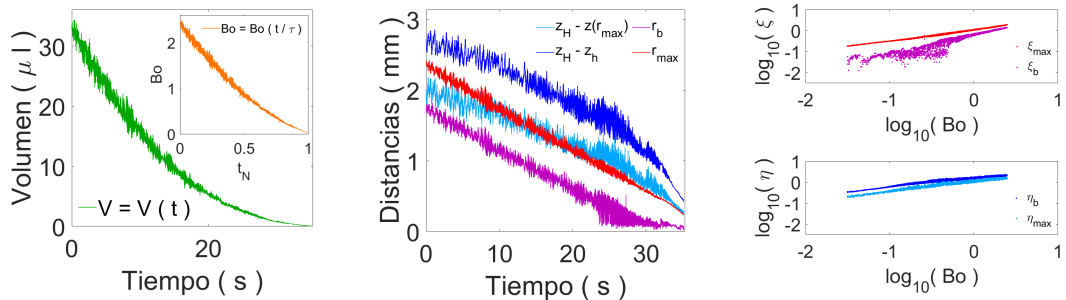


Figura G.2: Evaporación de gota Leidenfrost de cloroformo ($V_0 = 150 \mu\text{l}$) a $T_p = 250^{\circ}\text{C}$.

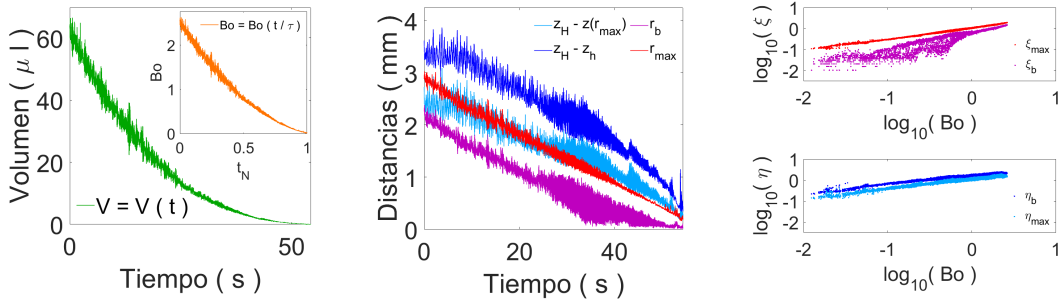


Figura G.3: Evaporación de gota Leidenfrost de etanol ($V_0 = 150 \mu\text{l}$) a $T_p = 250^\circ \text{C}$.

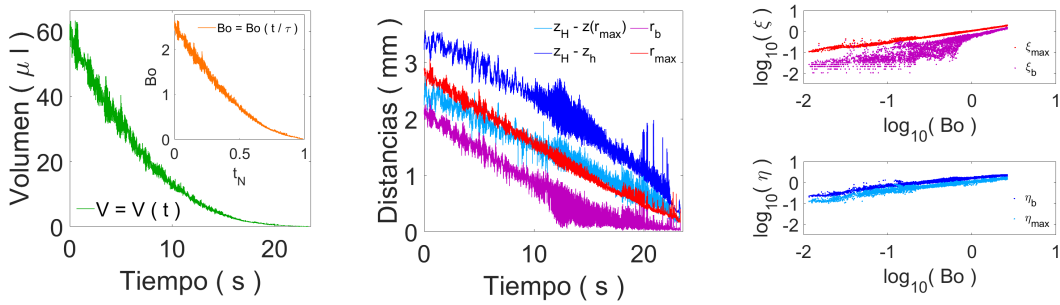


Figura G.4: Evaporación de gota Leidenfrost de hexano ($V_0 = 150 \mu\text{l}$) a $T_p = 250^\circ \text{C}$.

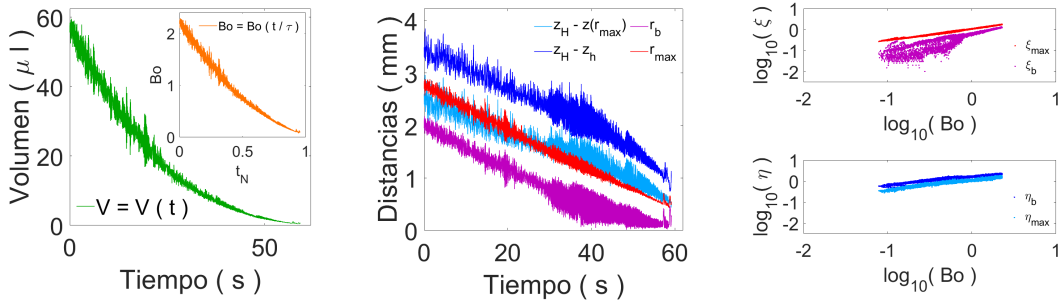


Figura G.5: Evaporación de gota Leidenfrost de metanol ($V_0 = 150 \mu\text{l}$) a $T_p = 250^\circ \text{C}$.

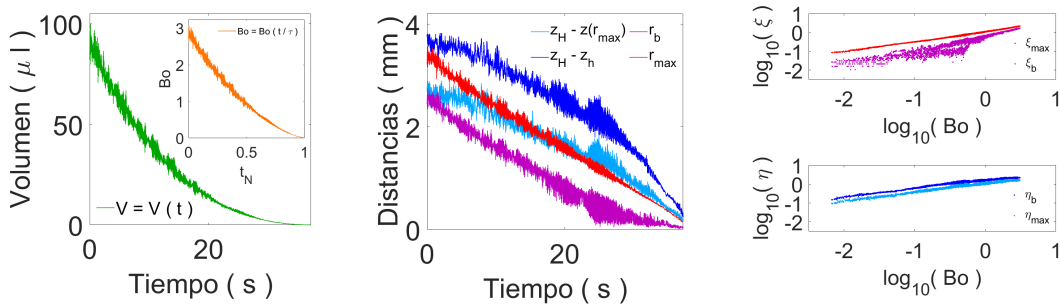


Figura G.6: Evaporación de gota Leidenfrost de acetona ($V_0 = 300 \mu\text{l}$) a $T_p = 300^\circ \text{C}$.

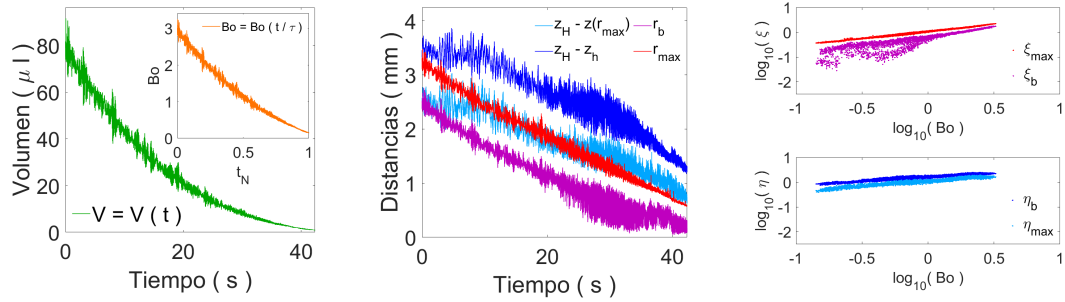


Figura G.7: Evaporación de gota Leidenfrost de etanol ($V_0 = 300 \mu\text{l}$) a $T_p = 300^\circ \text{C}$.

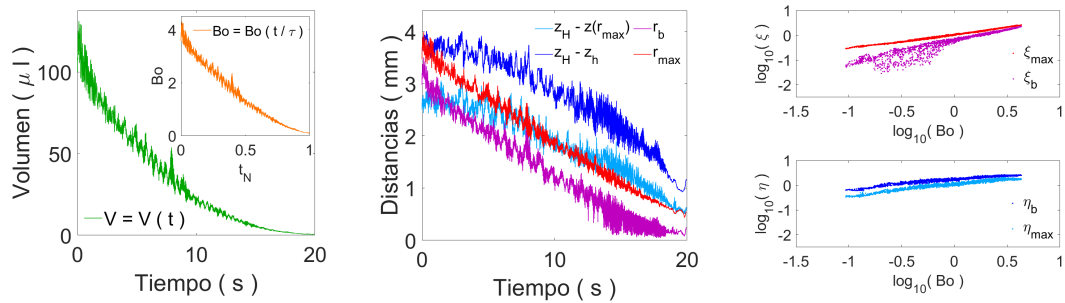


Figura G.8: Evaporación de gota Leidenfrost de hexano ($V_0 = 300 \mu\text{l}$) a $T_p = 300^\circ \text{C}$.

Bibliografía

- [1] BIANCE, A.-L., CLANET, C. & QUÉRÉ, D. *Leidenfrost drops*. Physics of Fluids 15(6), 1632-1637, 2003.
- [2] PIERRE-GILLES DE GENNES, FRANÇOISE BROCHARD-WYART, AND DAVID QUÉRÉ, *Capillarity and Wetting Phenomena: Drops, Bubbles, Pearls, Waves*. Vol. 315. New York: Springer, 2004.
- [3] MAHADEVAN, L., AND YVES POMEAU. *Rolling droplets*. : Physics of Fluids 11, 2449 (1999); <https://doi.org/10.1063/1.870107>
- [4] MEHRAN ABOLGHASEMIBIZAKI, CONNOR J. ROBERTSON, CHRISTIAN P. FERGUSON, ET AL. *Rolling viscous drops on a non-wettable surface containing both micro- and macro- scale roughness* Phys. Fluids 30, 023105 (2018); <https://doi.org/10.1063/1.5016824>
- [5] ANNE-LAURE HIMBERT-BIANCE. *Gouttes inertielles : de la caléfaction à l'étalement*. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2004. Français.
- [6] BURTON, J. C., SHARPE, A. L., VAN DER VEEN, R. C. A., FRANCO, A., & NAGEL, S. R. *Geometry of the vapor layer under a Leidenfrost drop*. Physical review letters, 109(7), 074301, 2012.
- [7] CAI, C., MUDAWAR, I., LIU, H., & SI, C. *Theoretical Leidenfrost point (LFP) model for sessile droplet*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 146, 118802, 2020.
- [8] SOBAC, B., REDNIKOV, A., DORBOLO, S., & COLINET, P. *Leidenfrost effect: Accurate drop shape modeling and refined scaling laws*. Physical Review E, 90(5), 053011, 2014.

-
- [9] SOBAC, B., REDNIKOV, A., DORBOLO, S., & COLINET, P. *Erratum: Leidenfrost effect: Accurate drop shape modeling and refined scaling laws [Phys. Rev. E 90, 053011 (2014)]*. Physical Review E, 103(3), 039901, 2021.
- [10] SOBAC, B., REDNIKOV, A., DORBOLO, S., & COLINET, P. *Leidenfrost drops. In Droplet Wetting and Evaporation*. Francia: Elsevier Inc., 85-99, 2015.
- [11] SNOEIJER, J. H., BRUNET, P., & EGGERS, J. *Maximum size of drops levitated by an air cushion*. Physical Review E, 79(3), 036307, 2009.
- [12] MA, X., LIÉTOR-SANTOS, J. J., & BURTON, J. C. *Star-shaped oscillations of Leidenfrost drops*. Physical Review Fluids, 2(3), 031602, 2017.
- [13] MAQUET, L., BRANDENBOURGER, M., SOBAC, B., BIANCE, A. L., COLINET, P., & DORBOLO, S. *Leidenfrost drops: Effect of gravity*. EPL (Europhysics Letters), 110(2), 24001, 2015.
- [14] MYERS, T. G., & CHARPIN, J. P. F. *A mathematical model of the Leidenfrost effect on an axisymmetric droplet*. Physics of Fluids, 21(6), 063101, 2009.
- [15] KUNDU, P. K., COHEN, I. M., & DOWLING, D. R. *Fluid mechanics*. Sixth Edition. Elsevier Inc., 2015.
- [16] MOZUMBER, A.K., ULLAH, M.R., HOSSAIN A. & ISLAM, M.A. *Sessile droplet evaporation and Leidenfrost phenomenon*. Am J Appl Sci 7(6):846-851, 2010.
- [17] PACHECO, F., LEDESMA, R., PALACIO, J.L. & MOREAU, F. *Triple Leidenfrost Effect: Preventing Coalescence of Drops on a Hot Plate*. Phys. Rev. Lett. 127, 204501, 2021.
- [18] ORZECOWSKI, T. *Peculiarities in Leidenfrost water droplet evaporation*. Heat and Mass Transfer, 57(3), 529-541, 2021.
- [19] PINHEIRO, A. P., & VEDOVOTO, J. M. *Evaluation of droplet evaporation models and the incorporation of natural convection effects*. Flow, Turbulence and Combustion, 102(3), 537-558, 2019.

-
- [20] VILLEGAS, L. R., ALIS, R., LEPILLIEZ, M., & TANGUY, S. *A ghost fluid/level set method for boiling flows and liquid evaporation: application to the Leidenfrost effect*. Journal of Computational Physics, 316, 789-813, 2016.
- [21] MAQUET, L., SOBAC, B., DARBOIS-TEXIER, B., DUCHESNE, A., BRANDENBOURGER, M., REDNIKOV, A., ... & DORBOLO, S. *Leidenfrost drops on a heated liquid pool*. Physical Review Fluids, 1(5), 053902, 2016.
- [22] ALASSAR, R. S. *Heat conduction from spheroids*, 1999.
- [23] ALASSAR, R. S. *Forced convection past an oblate spheroid at low to moderate Reynolds numbers*, 2005.
- [24] FENG, Z. G., & MICHAELIDES, E. E. *Unsteady heat and mass transfer from a spheroid*. AIChE journal, 43(3), 609-614, 1997.
- [25] ESCOBAR ORTEGA, Y. Y. Efecto Leidenfrost en superficies cónicas (Master's thesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla), 2016.



“HUP, 50 años de enseñanza y salud”

Oficio No. IF-SACAD282/2022

Asunto: Oficio de modalidad de titulación.

MTRO. RICARDO VALDERRAMA VALDEZ

Director de Administración Escolar

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Presente

El que suscribe, Director del Instituto de Física “Ing. Luis Rivera Terrazas”, le informo que **JESÚS ISRAEL MORÁN CORTÉS**, matrícula: **220470450**, presentará y defenderá su examen de grado de **MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)** en la **MODALIDAD DE PRESENTACION DE TESIS**, cuyo título es: **“RAZÓN DE EVAPORACIÓN DE GOTAS LEIDENFROST”**, que se llevará a cabo el día **viernes 07 de octubre de 2022 a las 12:00 horas**. Se informa que dicho **EXAMEN DE GRADO SERÁ EN LÍNEA** debido a la emergencia sanitaria por el virus SARS CoV-2 a través de la plataforma de la VIEP. El Jurado Examinador estará integrado por:

Dr. César Márquez Beltrán.	Presidente
Dr. Ulises Salazar Kuri.	Secretario
Dr. Eduardo Jonathan Torres Herrera.	Vocal
Dr. René Ledesma Alonso.	Vocal

Sin otro asunto que el particular, aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

A T E N T A M E N T E

“Pensar Bien, Para Vivir Mejor”

Puebla, Pue., a 26 de septiembre de 2022

DR. FELIPE PÉREZ RODRÍGUEZ
DIRECTOR



DR*FPR/DRA*MECR/LAE*mhr

Instituto de Física
"Luis Rivera Terrazas"

Av. San Claudio esq. 18 Sur, Edif. IF1,
Ciudad Universitaria, Col. San Manuel
Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 5610, 5611, 2008