BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

POSGRADO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

RUINA EN UN PROCESO DE RIESGO CON BARRERA CONSTANTE

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

PRESENTA

YESENIA ELIZABETH ORTIZ MARTÍNEZ

DIRECTOR DE TESIS

DR. FRANCISCO SOLANO TAJONAR SANABRIA

PUEBLA, PUEBLA. 2015

Pour le plaisir de la verité parfaite que seul les mathématiques donnent.
Pour le risque de s´enfoncer trop profondément.
Pour la probabilité de finir où on a commencé.
Pour le dévouement que j´ai mis à cette thèse et à la réalisation de mes rêves.
À ma santé!

Agradecimientos

A Dios, por protegerme en mi camino y guiarme a este momento especial en mi vida.

A mi mamá, Pilar, por ser un gran ejemplo y brindarme su apoyo para lograr mis objetivos.

A mi novio, Jesús, por ser mi compañero en cada aventura y creer en mí más que nadie.

A mis amigas, Fran y Mariana, por escucharme atentamente y comprender mi sentir.

A el CONACYT, por el apoyo brindado durante la realización de este proyecto.

A todos aquellos que no me enseñaron lo que debían, pero que sin querer me mostraron lo que como ser humano y profesional no quiero ser.

A quien con un vistazo reconoció mis cualidades y me hizo sentir orgullosa de quién soy.

A todos ustedes, gracias.

Introducción

El concepto de riesgo es importante en la economía debido a la necesitad de emplear adecuadamente el capital de las compañías aseguradoras y otras instituciones; puede decirse, que la teoría de riesgo se ocupa de modelos estocásticos cuya aplicación sirve para estudiar distintos aspectos del riesgo relacionados con la operación de una empresa.

El estado de una compañía aseguradora puede describirse, en términos muy generales, por el balance de sus ingresos (pagos de primas) y egresos (pagos por cobertura de seguros), y un proceso de riesgo, en su forma más simple, puede formularse en términos de un modelo estocástico que involucra la evolución en el tiempo de dos variables: ingresos y egresos. Si bien, la operación de una empresa incorpora más variables y relaciones entre ellas, no obstante, el modelo clásico de riesgo sirve para comprender los principios fundamentales del proceso y, a su vez, es la base para formular modelos más complejos. En este trabajo se presenta una extensión del modelo clásico de riesgo, se estudian las probabilidades de ruina y las cantidades relacionadas, mediante un análisis a través de la función de penalidad de Gerber-Shiu y se considera la presencia de una barrera de dividendos constante.

En la literatura actuarial se ha estudiado el efecto en la probabilidad de ruina con la introducción de diversos tipos de barreras. De Finetti fue el primero en sugerir el proceso de superávit de riesgo bajo el supuesto de que los dividendos son pagados cuando el proceso alcanza una barrera b. Bühlmann en [3], analiza las diferentes políticas de dividendos para el proceso de superávit a tiempo discreto. Para el tiempo continuo presenta una ecuación íntegro-diferencial para el pago esperado de dividendos descontados hasta la ruina para la estrategia de barrera fija. Obtiene una solución explícita de la ecuación para el caso donde el tamaño de las reclamaciones se distribuye de manera exponencial.

Gerber en [9], también discute una ecuación íntegro-diferencial para el valor esperado acumulado del pago de dividendos descontados, con el uso de cierta martingala consiguió una expresión para la transformada de Laplace del tiempo de ruina. Presenta resultados explícitos cuando el tamaño de las reclamaciones tiene una distribución exponencial.

Por otro lado, las funciones de penalidad, consideradas como funciones del superávit, satisfacen ciertas ecuaciones íntegro-diferenciales que pueden ser resueltas para producir ecuaciones de renovación defectuosas. Tales ecuaciones, tienen una interpretación probabilística que depende, en gran medida,como se mostrará, de las raíces de la ecuación generalizada de Lundberg, para la que se tendrá en cuenta una martingala exponencial elegida apropiadamente.

En la presente tesis se considera la función de penalidad de Gerber-Shiu con el objetivo de estudiar las ecuaciones de renovación defectuosa, que satisfacen en general las funciones de penalidad, pues éstas permiten el uso de técnicas de la teoría de renovación; pueden ser utilizadas, como se presentará, para examinar diversas cantidades asociadas al tiempo de ruina, tales como expresiones explícitas, aproximaciones, fórmulas asintóticas para la probabilidad de ruina, transformadas de Laplace, entre otras, y que en este trabajo conducen a una generalización del modelo clásico de riesgo, cuya utilidad radica en el hecho de poder interpretar de manera más completa la dependencia de la ruina con los parámetros del proceso, con el propósito de ponderar las consecuencias del riesgo.

La estructura de este trabajo de tesis es la siguiente:

En el capítulo 1, se presentan los conceptos fundamentales de la teoría de riesgo y algunas de sus propiedades y modelos más utilizados, así como la definición de un operador para las funciones integrables sobre $\mathbb{R}$ y las diferencias divididas.

En el capítulo 2, se estudia la evalución de la función de penalidad con descuento de Gerber-Shiu para una clase de modelos de renovación en la que los tiempos de inter-arribo de las reclamaciones están K_n distribuídos, para $n \in \mathbb{N}$.

En el capítulo 3, se desarrolla una generalización para el modelo clásico de riesgo, estudiando la función esperada de penalidad con descuento para un proceso de riesgo generalizado Erlang(n) con una barrera de dividendos constante, y se presentan ejemplos numéricos que muestran cómo conseguir resultados explícitos cuando el tamaño de las reclamaciones está distribuído racionalmente.

Finalmente, se presentan las conclusiones obtenidas.

Índice general

Capítulo 1

Matemática preliminar

En este capítulo se presenta una revisión de la literatura sobre el modelo clásico de riesgo y el modelo Sparre Andersen. En la teoría de ruina, ambos modelos de riesgo son usados requiriendo distintos análisis y herramientas.

1.1. Modelo clásico de riesgo

Sean W_n, $n \in \mathbb{N}$, los tiempos de inter-ocurrencia que forman una sucesión de variables aleatorias independientes que tienen una distribución común exponencial con parámetro $\lambda > 0$. Entonces, el proceso contador del número de reclamamaciones $\{N(t) : t \geq 0\}$ es llamado **proceso de Poisson homogéneo con intensidad** λ, un tipo especial de proceso de renovación. Una propiedad básica del proceso de Poisson es que tiene incrementos independientes y estacionarios, con distribución

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = \frac{(\lambda\, t)^n\, e^{-\lambda\, t}}{n!},\ para\ s, t > 0,\ n = 0,\, 1,\, 2, ... \quad (1.1)$$

Por lo tanto, $E[N(t)] = Var[N(t)] = \lambda\, t$, para todo $t \geq 0$, y la función generadora de momentos $M_{N(t)}(s) = E\left[e^{s\, N(t)}\right] = e^{\lambda\, t (e^s - 1)}$.

Sean X_i, $i \in \mathbb{N}$, variables aleatorias no negativas i.i.d., independientes de $N(t)$, con función de distribución acumulada común P y correspondiente función de densidad de probabilidad p, las reclamaciones individuales. Suponga que el k-ésimo momento $\mu_k = E\left[X^k\right]$ es finito para $k \in \mathbb{N}$, y denote la transformada de Laplace de p como $\hat{p}(s)$.

Sea

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & \text{si } N(t) > 0, \\ 0, & \text{si } N(t) = 0, \end{cases}$$

la pérdida acumulada en $[0, t)$. El proceso $\{S(t);\, t \geq 0\}$ es llamado un **proceso de Poisson compuesto**. La distribución de $S(t)$ está dada por

$$P(S(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\, t)^n\, e^{-\lambda\, t}}{n!} P^{*n}(x),\ t,\ x \geq 0, \tag{1.2}$$

donde $P^{*n}(x)$ denota la n-ésima convolución de P consigo misma en x, con $P^{*0}(x) = I(x \geq 0)$ y $P^{*1} = P$.

Ahora considere el proceso de superávit

$$U(t) = u + c\, t - S(t),\ t \geq 0, \tag{1.3}$$

donde $u \geq 0$ es el capital inicial y $c > 0$ es la tasa de la prima constante sobre el período de tiempo $[0, t]$. Así, puede reescribirse $c = (1 + \theta)\, \lambda\, \mu_1$, donde $\theta > 0$, es interpretado como un factor de seguridad relativo. Defina

$$T = \text{ínf}\{t \geq 0;\, U(t) < 0\},\ \ (\infty, en\, otro\, caso),$$

el **tiempo de ruina**, y

$$\begin{aligned} \Psi(u, t) = P\left(T < t \mid U(0) = u\right) &= P\left(\bigcup_{s \leq t} [U(s) < 0] \mid U(0) = u\right),\ u,\ t \geq 0, \\ \Psi(u) = P\left(T < \infty \mid U(0) = u\right) &= P\left(\bigcup_{t < \infty} [U(t) < 0] \mid U(0) = u\right),\ u \geq 0, \end{aligned}$$

la probabilidad finita y la probabilidad de ruina última, respectivamente. Note que,

$$\Psi(u) = \lim_{t \to \infty} \Psi(u, t).$$

1.2. Principales resultados de la probabilidad de ruina

Teorema 1.1 *(Ecuaciones íntegro-diferenciales). La probabilidad de ruina antes del tiempo* t*, con capital inicial* u*, satisface la siguiente ecuación íntegro-diferencial parcial para* $u,\ t \geq 0$*:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(u,t) = c\frac{\partial}{\partial u}\Psi(u,t) + \lambda\,\bar{P}(u) - \lambda\,\Psi(u,t) + \lambda\int_0^u \Psi(u-x)\,p(x)\,dx, \quad (1.4)$$

mientras la probabilidad de ruina última $\Psi(u)$ *satisface la siguiente ecuación íntegro-diferencial:*

$$\Psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\Psi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Psi\,(u-x)\,p(x)\,dx - \frac{\lambda}{c}\bar{P}(u),\ u \geq 0, \qquad (1.5)$$

con $\Psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$.

Demostración:

Si se caracteriza según el tiempo t y el monto de la primera reclamación x , se tiene que

$$\begin{aligned}\Psi(u) &= \lambda\,dt\int_0^{u+c\,dt} p(x)\,\Psi(u+c\,dt-x)\,dx + \lambda\,dt\,[1-P(u+c\,dt)] + \\ &\quad (1-\lambda\,dt)\,\Psi(u+c\,dt) + o(dt).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{\Psi(u+c\,dt)-\Psi(u)}{c\,dt} &= -\frac{\lambda}{c}\int_0^{u+c\,dt} p(x)\,\Psi(u+c\,dt-x)\,dx - \\ &\quad \frac{\lambda}{c}\,[1-P(u+c\,dt)] + \frac{\lambda}{c}\Psi(u+c\,dt) + \frac{o(dt)}{c\,dt}.\end{aligned}$$

Haciendo que $dt \to 0$, se obtiene (1.5). Análogamente se obtiene (1.4).

■

Los resultados siguientes muestran que la probabilidad de ruina última $\Psi(u)$ satisface una ecuación de renovación defectuosa y admite una representación geométrica compuesta.

Defina

$$P_1(x) = \frac{\int_0^x \bar{P}(y)\,dy}{\mu},$$

y

$$\bar{P}_1(x) = 1 - P_1(x).$$

P_1 es llamada la **distribución ladder-height**.

Teorema 1.2 *(Ecuación de renovación defectuosa). La probabilidad de ruina Ψ satisface la siguiente ecuación de renovación defectuosa:*

$$\Psi(u) = \frac{1}{1+\theta}\int_0^u \Psi(u-y)\,dP_1(y) + \frac{\bar{P}_1(u)}{1+\theta},\ u \geq 0. \tag{1.6}$$

Demostración:

Caracterizando de acuerdo al tiempo t y al monto de la primera relamación y, la ley de probabilidad total produce la ecuación:

$$\Psi(x) = \int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda\, t} \int_0^x \Psi(x + c\,t - y)\,dP(y)\,dt,$$

con el entendimiento de que $\Psi(z) = 1$, para $z < 0$.

Haciendo un cambio de variable tal que $s = x + c\,t$, la ecuación anterior se convierte en:

$$\Psi(x) = \frac{\lambda}{c}\int_x^\infty e^{-\frac{\lambda}{c}(s-c)} \int_0^\infty \Psi(s-y)\,dP(y)\,ds.$$

Tomando la derivada en ambos lados,

$$\Psi'(x) = \frac{\lambda}{c}\Psi(x) - \frac{\lambda}{c}\int_0^x \Psi(x-y)\,dP(y) - \frac{\lambda}{c}\left[1 - P(x)\right], \tag{1.7}$$

válida para $x > 0$.

Si se integra la ecuación (1.7) sobre x, de 0 a t, resulta que

$$\Psi(x) = \frac{\lambda}{c}\int_0^t \Psi(x)\,dx - \frac{\lambda}{c}\int_0^t \int_0^x \Psi(x-y)\,dP(y)\,dx - \frac{\lambda}{c}\int_0^t \left[1 - P(x)\right]dx,$$

entonces

$$\int_0^t \int_0^x \Psi(x-y)\,dP(y)\,dx = \int_0^t \Psi(x)\,dx - \frac{c}{\lambda}\Psi(x) - \int_0^t [1-P(x)]\,dx.$$

Para resolver la integral iterada, se cambia el orden de integración y se integra por partes como sigue,

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_0^x \Psi(x-y)\,dP(y)\,dx &= \int_0^t \int_y^t \Psi(x-y)\,dx\,dP(y)\\ &= \Psi(0)\int_0^t P(y)\,dy + \int_0^t \int_y^t \Psi'(x-y)\,dx\,P(y)\,dy\\ &= \int_0^t \Psi(t-y)\,P(y)\,dy. \qquad (1.8)\end{aligned}$$

Por otro lado, integrando la ecuación (1.7) término a término, de 0 a t,

$$\Psi(t) = \frac{\lambda}{c}\int_0^t \Psi(x)\,dx - \frac{\lambda}{c}\int_0^t \int_0^x \Psi(x-y)\,dP(y)\,dx - \frac{\lambda}{c}\int_0^t [1-P(x)]\,dx.$$

Usando (1.8),

$$\Psi(t) = \frac{\lambda}{c}\int_0^t \Psi(x)\,dx - \frac{\lambda}{c}\int_0^t \Psi(t-y)\,P(y)\,dy - \frac{\lambda}{c}\int_0^t [(1-P(x)]\,dx.$$

Note que, si consideramos a $x = t-y$, entonces $\int_0^t \Psi(x)\,dx = \int_0^t \Psi(t-y)\,dy$, por lo tanto,

$$\Psi(t) = \frac{\lambda}{c}\int_0^t \Psi(t-y)\,dy - \frac{\lambda}{c}\int_0^t \Psi(t-y)\,P(y)\,dy - \frac{\lambda}{c}\int_0^t [(1-P(x)]\,dx.$$

La ecuación,

$$\Psi(t) = \frac{\lambda}{c}\int_0^t \Psi(t-y)\,[(1-P(y)]\,dy + \frac{\lambda}{c}\int_t^\infty [(1-P(x)]\,dx, \qquad (1.9)$$

válida para $t \geq 0$, es una **ecuación de renovación defectuosa**.

Luego, de la ecuación (1.9), se obtiene que

$$\begin{aligned}\Psi(u) &= \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Psi(u-y)\,[(1-P(y)]\,dy + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty [(1-P(u)]\,du - \\ &\quad \frac{\lambda}{c}\int_0^u [(1-P(u)]\,du.\end{aligned}$$

Por la definición de P_1, y como $\Psi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty [(1-P(x)]\,dx$,

$$\begin{aligned}
\Psi(u) &= \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Psi(u-y)\,[(1-P(y)]\,dy + \frac{\lambda}{c}\mu\,[(1-P_1(u)] \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty [(1-P(u)]\,du \int_0^u \frac{\Psi(u-y)\,[(1-P(y)]\,dy}{\int_0^\infty [(1-P(u)]\,du} + \Psi(0)\,\bar{P}_1(u) \\
&= \Psi(0)\frac{\int_0^u \Psi(u-y)\,[(1-P(y)]\,dy}{\mu} + \Psi(0)\,\bar{P}_1(u) \\
&= \Psi(0)\int_0^u \Psi(u-y)d\left(\frac{\int_0^y [(1-P(y)]\,dy}{\mu}\right) + \Psi(0)\,\bar{P}_1(u) \\
&= \Psi(0)\int_0^u \Psi(u-y)\,dP_1(y) + \Psi(0)\,\bar{P}_1(u) \\
&= \frac{1}{1+\theta}\int_0^u \Psi(u-y)\,dP_1(y) + \frac{\bar{P}_1(u)}{1+\theta}.
\end{aligned}$$

■

Teorema 1.3 *(Fórmula de convolución de Beekman). Ψ está dada por la cola de la distribución de una suma geométrica compuesta, esto es,*

$$\Psi(u) = \frac{\theta}{1-\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n \bar{P}_1^{*n}(u). \tag{1.10}$$

Demostración:

Sea X una variable aleatoria con distribución geométrica compuesta, es decir, una variable aleatoria de la forma:

$$X = \sum_{j=1}^{N} U_j,$$

donde N tiene distribución $geo(1-p)$, y las variables U_1, U_2, ..., son no negativas, independientes e idénticamente distribuídas, con función de distribución definida por

$$H(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \bar{P}(y)\,dy,$$

donde $\bar{P}(y)$ es una función de distribución de una variable aleatoria no negativa, con media finita μ, y corresponde a la función de distribución del monto de una reclamación. Sea $G(x)$ la función de distribución de X. La transformada de Laplace de $\bar{G}(x)$ es:

$$\int_0^{\infty} e^{-s\,x}\,\bar{G}(x)\,dx = \frac{p}{s} - \frac{(1-p)}{s}\frac{p\,L_{\bar{P}}(s)}{\mu - p\,L_{\bar{P}}(s)}.$$

La probabilidad de ruina satisface la siguiente ecuación integral,

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= \frac{\lambda}{c}\left[\int_u^{\infty} \bar{P}(y)\,dy + \int_0^u \Psi(u-y)\,\bar{P}(y)\,dy\right] \\ &= \frac{\lambda}{c}\left[\int_0^{\infty} \bar{P}(y)\,dy - \int_0^u \bar{P}(y)\,dy + \int_0^u \Psi(u-y)\,\bar{P}(y)\,dy\right]. \end{aligned}$$

Luego, para dos funciones integrables f_1 y f_2 definidas sobre $[0,\infty)$, la **convolución** de f_1 y f_2 es la función

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_0^x f_1(y)\,f_2(x-y)\,dy,\ x \geq 0. \tag{1.11}$$

Por lo tanto,

$$\Psi(u) = \frac{\lambda}{c}\left[\mu - \int_0^u \bar{P}(y)\,dy + (\Psi * \bar{P})(u)\right].$$

Tomando la transformada de Laplace de esta función, se tiene que

$$L_{\Psi}(s) = \frac{\lambda}{c}\left[\frac{\mu}{s} - \frac{1}{s}L_{\bar{P}}(s) + L_{\Psi}(s)\,L_{\bar{P}}(s)\right],$$

entonces

$$\begin{aligned} L_{\Psi}(s) &= \frac{\frac{\lambda}{cs}\,(\mu - L_{\bar{P}}(s))}{1 - \frac{\lambda}{c}L_{\bar{P}}(s)}. \\ &= \frac{\frac{\lambda}{cs}\,(\mu - [p + (1-p)]\,L_{\bar{P}}(s))}{1 - \frac{\lambda}{c}L_{\bar{P}}(s)}. \end{aligned}$$

Si se denota $p = \frac{\lambda\mu}{c}$ y se multiplica el numerador y denominador de la ecuación anterior por μ, entonces

$$\begin{aligned} L_{\Psi}(s) &= \frac{\frac{p}{s}\,(\mu - (p + (1-p))L_{\bar{P}}(s))}{\mu - p\,L_{\bar{P}}(s)} \\ &= \frac{p}{s} - \frac{(1-p)}{s}\frac{p\,L_{\bar{P}}(s)}{(\mu - p\,L_{\bar{P}}(s))}. \end{aligned}$$

La ecuación anterior, es la transformada de Laplace de la probabilidad de ruina, que coincide con la transformada de Laplace de $\bar{G}(x)$. Luego, por la unicidad de la transformada de Laplace, ambas funciones son iguales, entonces

$$\begin{aligned}
\Psi(u) &= \bar{G}(u) \\
&= p - (1-p)\sum_{n=1}^{\infty} p^n \, H^{*n}(x) \\
&= p - (1-p)\sum_{n=1}^{\infty} p^n \, (1 - 1 + H^{*n}(x)) \\
&= p - (1-p)\sum_{n=1}^{\infty} p^n \, \big(1 - \bar{H}^{*n}(u)\big) \\
&= p - (1-p)\left(\frac{1}{1-p} - 1\right) + (1-p)\sum_{n=1}^{\infty} p^n \, \bar{H}^{*n}(u) \\
&= (1-p)\sum_{n=1}^{\infty} p^n \, \bar{H}^{*n}(u) \\
&= 1 - \frac{1}{1+\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n \left(\frac{1}{\mu}\int_0^u \bar{P}(y)\, dy\right)^{*n}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\Psi(u) = \frac{\theta}{1+\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n \bar{P_1}^{*}(u).$$

■

En el modelo clásico de riesgo, el **coeficiente de ajuste**, $R > 0$, es la solución, si existe, para la ecuación de Lundberg:

$$\int_0^{\infty} e^{Rx} \, \bar{P}(x)\, dx = \frac{c}{\lambda}, \tag{1.12}$$

o equivalentemente,

$$\int_0^{\infty} e^{Rx} \, dP_1(x) = 1 + \theta. \tag{1.13}$$

Aunque Ψ satisface una ecuación de renovación defectuosa y admite una representación como en (1.10), usualmente es difícil obtener una expresión explícita para situaciones prácticas, siendo la excepción quizá, algunas distribuciones especiales de las reclamaciones, por ejemplo, la distribución exponencial o la mezcla de distribuciones exponenciales. Resultados explícitos pueden ser obtenidos si la distribución del tamaño de las reclamaciones admite una transformada de Laplace racional . En este caso, la transformada de Laplace de la probabilidad de ruina puede ser invertida por la fórmula de fracciones parciales.

Teorema 1.4 *(Desigualdad de Lundberg). Para el modelo clásico de riesgo definido antes,*

$$\Psi(u) \leq e^{-Ru},\ u \geq 0, \tag{1.14}$$

donde R es el coeficiente de ajuste definido en (1.12).

Demostración:

Sea τ el tiempo de paro correspondiente al tiempo de ruina. Como el proceso $\{e^{-RC_t}\}$ es una martingala, se tiene que el proceso $\{e^{-RC_{t\wedge\tau}}\}$ también es una martingala, que inicia en e^{-Ru}.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
e^{-Ru} &= e^{-RC_0} \\
&= E\left[e^{-RC_{t\wedge\tau}}\right] \\
&= E\left[e^{-RC_{t\wedge\tau}} \mid \tau \leq t\right] P(\tau \leq t) + E\left[e^{-RC_{t\wedge\tau}} \mid \tau > t\right] \\
&\geq E\left[e^{-RC_{t\wedge\tau}} \mid \tau \leq t\right] P(\tau \leq t) \\
&= E\left[e^{-RC_{\tau}} \mid \tau \leq t\right] P(\tau \leq t) \\
&= \left(\int e^{-RC_{\tau}}\, I(\tau \leq t)\, dP\right) P(\tau \leq t).
\end{aligned}$$

Haciendo $t \to 0$ monótonamente, el evento $(\tau \leq t)$ converge crecientemente al evento $(\tau < \infty)$. Luego, por el Teorema de Convergencia Monótona se sigue que

$$\begin{aligned}
e^{-Ru} &\geq E\left[e^{-RC_{\tau}} \mid \tau < \infty\right] P(\tau < \infty) \\
&> E\left[1 \mid \tau < \infty\right] P(\tau < \infty) \\
&= P(\tau < \infty) \\
&= \Psi(u).
\end{aligned}$$

■

Esta es la primera cota para la probabilidad de ruina Ψ. Pero el coeficiente de ajuste no existe para muchas distribuciones, como las de cola pesada. Varias aproximaciones han sido propuestas para derivar límites generales para la probabilidad de ruina. Un método, es evitar la referencia del coeficiente de ajuste, otra aproximación es considerar la ecuación de Lundberg truncada, esto es, para $t > 0$ dado, existe una raíz $R(t)$ que satisface:

$$\int_0^t e^{R(t)\,y}\,\bar{P}(y)\,dy = \mu\,(1+\theta). \tag{1.15}$$

Otros resultados sobre probabilidades de ruina se relacionan con aproximaciones, métodos numéricos y simulaciones.

1.3. Función de penalidad de Gerber-Shiu

Recientemente, la investigación se ha centrado sobre otros dos componentes relacionados al tiempo de ruina: el **superávit antes de la ruina** $U(T^-)$ y el **déficit en la ruina** $\mid U(T) \mid$. Gerber y Shiu analizan estas variables aleatorias para evaluar la función esperada de penalidad con descuento. Esto generaliza y ofrece una mejor comprensión de la teoría de ruina clásica, ya que muchos de los primeros resultados son casos particulares de la función esperada de penalidad con descuento, cuando el factor de descuento es cero.

Para el proceso clásico de riesgo, definido en la primera sección, defina

$$F_3(x, y, t \mid u) = P(U(T^-) \leq x,\ \mid U(T) \mid \leq y,\ T \leq t \mid U(0) = u),$$

para x, y, $t \geq 0$, y su correspondiente función de densidad de probabilidad conjunta $f_3(x, y, t \mid u)$, del superávit antes de la ruina, el déficit en la ruina y el tiempo de ruina.

Sea $\delta \geq 0$ constante, el factor de descuento sobre un período, y sea

$$f_2(x, y \mid u) = \int_0^\infty e^{-\delta\,t}\,f_3(x, y, t \mid u)\,dt,$$

una función de densidad de probabilidad conjunta con descuento de $U(T^-)$ y $\mid U(T) \mid$. Si $f_1(x \mid u) = \int_0^\infty f_2(x, y \mid u)\,dy$ se sigue que

$$f_2(x, y \mid u) = f_1(x \mid u)\frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)},\ x,\ y \geq 0. \tag{1.16}$$

Sean $\omega(x, y)$, para $x, y \geq 0$, los valores no negativos de una función de penalidad. Para $\delta > 0$, defina

$$\phi(u) = E\left[e^{-\delta T}\omega(U(T^-), \mid U(T) \mid) \, I(T < \infty) \mid U(0) = u\right], \; u \geq 0. \quad (1.17)$$

La cantidad $\omega(U(T^-), \mid U(T) \mid)$ puede ser interpretada como la **penalidad al tiempo de ruina para el superávit** $U(T^-)$ **y el déficit** $\mid U(T) \mid$. Entonces $\phi(u)$ es la **penalidad con descuento esperada** si δ es vista como la fuerza de interés.

Diversas cantidades relacionadas a la ruina pueden ser analizadas por la elección apropiada de funciones de penalidad convenientes, por ejemplo, si

$$\omega(x_1, x_2) = I(x_1 = x, y_1 = y),$$

entonces $\phi(u)$ da la función de densidad conjunta con descuento de $U(T^-)$ y $\mid U(T) \mid$; si

$$\omega(x_1, x_2) = {x_1}^n \, {x_2}^m,$$

entonces $\phi(u)$ da los momentos conjuntos con descuento de $U(T^-)$ y $\mid U(T) \mid$; si

$$\omega(x_1, x_2) = 1,$$

entonces $\phi(u)$ da la transformada de Laplace de T con respecto a δ, y aún más, si $\delta = 0$, $\phi(u)$ se simplifica a la probabilidad de ruina $\Psi(u)$.

Como la probabilidad de ruina, ϕ también satisface una ecuación íntegro-diferencial:

$$c\,\phi'(u) - (\delta + \lambda)\,\phi(u) + \lambda \int_0^u \phi(u - x)\,p(x)\,dx + \lambda\,w(u) = 0, \quad (1.18)$$

donde $w(u) = \int_u^\infty \omega(u, x - u)\,p(x)\,dx$.

Una ecuación de renovación defectuosa satisfecha por ϕ es obtenida usando una técnica de factores de integración en el siguiente teorema.

Teorema 1.5 *Para $\delta > 0$, ϕ satisface la siguiente ecuación de renovación defectuosa:*

$$\phi(u) = \int_0^u \phi(u - y)\,g(y)\,dy + G(u), \; u \geq 0, \quad (1.19)$$

donde $g(y) = \int_y^\infty e^{-\beta(x-y)}\, p(x)\, dx$*,* $G(u) = \int_u^\infty e^{-\rho(x-u)}\, w(x)\, dx$*, y* $\rho > 0$ *es la única raíz positiva de la ecuación:*

$$l(s) := \delta + \lambda - c\, s = \lambda\, \hat{p}(s), \tag{1.20}$$

donde la pendiente de la recta $l(s)$ *es negativa.*

Esta ecuación es una versión generalizada de la ecuación fundamental de Lundberg. Tiene una única raíz positiva ρ *cuando* $\delta > 0$*, y una posible raíz negativa* $-R$ *(con* $R > 0$*), si* p *es suficientemente regular (continua, de clase* C^1 *o analítica). Si* $\delta = 0$*, entonces* $\rho = 0$*, y* R *es el coeficiente de ajuste.*

Demostración:

Sea

$$\phi_\rho(u) = e^{-\rho\, u}\, \phi(u), \tag{1.21}$$

donde ρ es un número no negativo. Luego, ϕ satisface la ecuación de renovación defectuosa (1.18):

$$0 = c\, \phi'(u) - (\delta + \lambda)\, \phi(u) + \lambda \int_0^u \phi(u - x)\, p(x)\, dx + \lambda\, w(u),$$

multiplicándola por $e^{-\rho\, u}$ resulta que

$$\begin{aligned} 0 &= c\, \phi'(u)\, e^{-\rho\, u} - (\delta + \lambda)\, e^{-\rho\, u}\, \phi(u) + \lambda \int_0^u \phi(u - x)\, p(x)\, e^{-\rho\, u}\, dx + \\ &\quad \lambda\, e^{-\rho u}\, w(u) \\ &= c\, \phi_\rho'(u) - (\delta + \lambda)\, \phi_\rho(u) + c\, \rho\, \phi_\rho(u) + \lambda \int_0^u \phi_\rho(u - x)\, e^{-\rho\, x}\, p(x)\, dx + \\ &\quad \lambda\, e^{-\rho\, u}\, w(u). \end{aligned}$$

Entonces

$$c\, \phi_\rho'(u) = (\delta + \lambda - c\, \rho)\, \phi_\rho(u) - \lambda \int_0^u \phi_\rho(u - x)\, e^{-\rho\, x}\, p(x)\, dx - \lambda\, e^{-\rho\, u}\, w(u). \tag{1.22}$$

Note que, el coeficiente de $\phi_\rho(u)$ es $l(\rho)$. La ecuación $l(s) = \lambda\, \hat{p}(s)$ tiene una única raíz no negativa, suponga que se trata de ε_1. La estratagema para resolver la ecuación (1.22) es escoger $\rho = \varepsilon_1$, así que (1.22) se convierte en:

$$\begin{aligned} c\,\phi'_\rho(u) &= \lambda\left[\hat{p}(\rho)\,\phi_\rho(u) - \int_0^u \phi_\rho(u-x)\,e^{-\rho\,x}\,p(x)\,dx - e^{-\rho\,u}\,w(u)\right] \\ &= \lambda\left[\hat{p}(\rho)\phi_\rho(u) - \int_0^u \phi_\rho(x)\,e^{-\rho(u-x)}\,dx - e^{-\rho\,u}\,w(u)\right]. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Para $z > 0$, integre (1.23) de 0 a z con respecto a u,

$$\begin{aligned} c\int_0^z \phi'_\rho(u) &= \lambda\left[\hat{p}(\rho)\int_0^z \phi_\rho(u)\,du - \int_0^z e^{-\rho\,u}\,w(u)\,du - \right. \\ &\qquad \left. \int_0^z\left[\int_0^u \phi_\rho(x)\,e^{-\rho\,(u-x)}\,p(u-x)\,dx\right]du\right]. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \lambda^{-1}\,c\,[\phi_\rho(z)-\phi_\rho(0)] &= \hat{p}(\rho)\int_0^z \phi_\rho(u)\,du - \int_0^z e^{-\rho\,u}\,w(u)\,du - \\ &\qquad \int_0^z\left[\int_0^u \phi_\rho(x)\,e^{-\rho\,(u-x)}\,p(u-x)\,dx\right]du \\ &= \hat{p}(\rho)\int_0^z \phi_\rho(u)\,du - \int_0^z e^{-\rho\,u}\,w(u)\,du - \\ &\qquad \int_0^z\left[\int_x^z e^{-\rho\,(u-x)}\,p(u-x)\,du\right]\phi_\rho(x)\,dx. \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable tal que $y = u - x$, resulta:

$$\lambda^{-1}\,c\,[\phi_\rho(z)-\phi_\rho(0)] = \int_0^z \phi_\rho(x)\left[\int_{z-x}^\infty e^{-\rho\,y}\,p(y)\,dy\right]dx - \int_0^z e^{-\rho\,u}\,w(u)\,du. \tag{1.24}$$

Para $z \to \infty$, los primeros términos de ambos lados de la ecuación anterior desaparecen, lo que muestra que

$$-\lambda^{-1}\,c\phi_\rho(0) = -\int_0^\infty e^{-\rho\,u}\,w(u)\,du.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \phi_\rho(0) &= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-\rho\,u}\,w(u)\,du \\ &= \frac{\lambda\,\hat{w}(\rho)}{c}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Finalmente, sustituyendo (1.25) en la ecuación (1.24) y simplificando, se obtiene:

$$\lambda^{-1}\, c\left[\phi_\rho(z) - \frac{\lambda}{c}\hat{w}(\rho)\right] = \int_0^z \phi_\rho(x)\left[\int_{z-x}^\infty e^{-\rho\, y}\, p(y)\, dy\right] dx - \int_0^z e^{-\rho\, u}\, w(u)\, du.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\phi_\rho(z) &= \frac{\lambda}{c}\left[\int_0^z \phi_\rho(x)\left(\int_{z-x}^\infty e^{-\rho\, y}\, p(y)\, dy\right) dx - \right.\\
&\quad \left.\int_0^z e^{-\rho\, u}\, w(u)\, du + \int_0^\infty e^{-\rho\, u}\, w(u)\, du\right]\\
&= \frac{\lambda}{c}\left[\int_0^z \phi_\rho(x)\left(\int_{z-x}^\infty e^{-\rho\, y}\, p(y)\, dy\right) dx + \right.\\
&\quad \left.\int_z^\infty e^{-\rho\, u}\, w(u)\, du\right].
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Multiplicando (1.27) por $e^{\rho\, z}$ y aplicando (1.21), resulta:

$$\begin{aligned}
\phi(z) &= \frac{\lambda}{c}\left[\int_0^z \phi(x)\left(\int_{z-x}^\infty p(y)\, dy\right) dx + \int_z^\infty e^{\rho(z-u)}\, w(u)\, du\right]\\
&= \frac{\lambda}{c}\left[\int_0^z \phi(x)\left(\int_{z-x}^\infty e^{-\rho\,(z-x-y)}\, p(y)\, dy\right) dx + \right.\\
&\quad \left.\int_z^\infty e^{\rho\,(z-u)}\, w(u)\, du\right],
\end{aligned} \tag{1.27}$$

pues por el cambio de variable, cuando $u = z$, $y = z - x$.

Luego, puede usarse la definición de la convolución de dos funciones integrables definidas sobre $[0, \infty)$, ver ecuación (1.11), si se consideran

$$g(x) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-\rho\, z}\, p(z+x)\, dz,\ x \geq 0$$

y

$$G(x) = \frac{\lambda}{c}\int_x^\infty \int_0^\infty e^{-\rho\,(u-x)}\, \omega(u,y)\, p(u+y)\, dy\, du,\ x \geq 0,$$

entonces la ecuación (1.27) puede ser escrita como $\phi(u) = (\phi * g)(u) + G(u)$, para $u \geq 0$.

■

Note que, $\phi(0) = G(0) = \hat{w}(\rho)$, y especialmente,

$$\begin{aligned} f_2(x, y \mid 0) &= \frac{\lambda}{c} e^{-\rho x}\, p(x+y), \\ f_1(x \mid 0) &= \frac{\lambda}{c} e^{-\rho x}\, \bar{P}(x), \end{aligned}$$

$$E\left[e^{-\delta T}\, I(T < \infty) \mid U(0)\right] = \int_0^\infty g(y)\, dy = 1 - \frac{\delta}{c\rho}.$$

Similarmente, si $\omega(x_1, x_2) = I(x_1 = x, x_2 = y)$, ó, $\omega(x_1, x_2) = I(x_1 = x)$, para $0 < x < \infty$, entonces $\phi(u)$ da $f_2(x, y \mid u)$ y $f_1(x \mid u)$, respectivamente, i.e., satisfacen ambas una ecuación de renovación defectuosa como sigue.

Corolario 1.6 *Para $u, x, y \geq 0$,*

$$\begin{aligned} f_2(x, y \mid u) &= \int_0^u f_2(x, y \mid u - z)\, g(z)\, dz + \frac{\lambda}{c} e^{-\rho\,(x-u)}\, p(x+y)\, I(x > u), \\ f_1(x \mid u) &= \int_0^u f_1(x \mid u - z)\, g(z)\, dz + \frac{\lambda}{c} e^{-\rho\,(x-u)}\, \bar{P}(x)\, I(x > u). \end{aligned}$$

Para estas ecuaciones de renovación defectuosa, la densidad conjunta con descuento y la densidad marginal con descuento, $f_2(x, y \mid u)$ y $f_1(x \mid u)$, respectivamente, pueden ser resueltas explícitamente. Para el caso $\delta = 0$, Dickson en [5] ha encontrado el siguiente resultado:

$$f_1(x \mid u) = \begin{cases} f_1(x \mid 0)\frac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)}, & x > u \geq 0, \\ f_1(x \mid 0)\frac{\psi(u-x)-\psi(u)}{1-\psi(0)}, & 0 < x \leq u. \end{cases} \tag{1.28}$$

Aquí,

$$f_1(x \mid 0) = \lambda\, c^{-1} \left[1 - P(x)\right]. \tag{1.29}$$

Resulta que la definición adecuada para extender a $\psi(0)$ es:

$$\psi(u) = E\left[e^{-\delta\, T + \rho\, U(T)}\, I(T < \infty) \mid U(0) = u\right],\ u \geq 0. \tag{1.30}$$

Así, $\psi(u) = \phi(u)$, con $\omega(x, y) = e^{-\rho\, y}$. Entonces la fórmula de Dickson puede ser generalizada como se hace ver en el siguiente teorema.

Teorema 1.7

$$f_1(x \mid u) = \begin{cases} f_1(x \mid 0)\frac{e^{\rho\,x}\,\psi(u-x)-\psi(u)}{1-\psi(0)}, & 0 < x \leq u, \\ f_1(x \mid 0)\frac{e^{\rho\,x}-\psi(u)}{1-\psi(0)}, & x > u, \end{cases} \tag{1.31}$$

donde $f_1(x \mid 0) = \lambda\, c^{-1}\, e^{-\rho\, x}\, \bar{P}(x)$ *y* $\psi(u)$ *está definida como:*

$$\psi(u) = E\left[e^{-\delta\,T+\rho\,U(T)}\, I(T<\infty) \mid U(0)=u\right].$$

Demostración:

El propósito de esta demostración es generalizar (1.28) para el caso en el que $\delta \geq 0$. Para probar (1.31), se necesitan algunos conceptos más; se comenzará por extender la Función del Tiempo de Paro

$$T_x = \text{mín}\{t \mid U(t) = x\}. \tag{1.32}$$

Para un número real x, sea, ahora T_x, que denota el tiempo del primer cruce por arriba del proceso de superávit a través del nivel x; sea $T_x = \infty$, si el superávit nunca cruza por arriba a través del nivel x. Para $x > U(0)$, esto es lo mismo que en (1.32), para $x < U(0)$, el superávit tiene que caer por debajo del nivel x antes de que alguna vez cruce por arriba a través de x.

Se llamará al tiempo de paro T_0 el **tiempo de recuperación**, que es el primer instante en el que el superávit alcanza el cero antes de la ruina. Luego, para $a < b$,

$$E\left[e^{-\delta(T_b-T_a)} \mid T_a < T_b\right] = e^{-\rho(b-a)}. \tag{1.33}$$

Así,

$$E\left[e^{-\delta(T_0-T)} \mid T < \infty\right] = e^{\rho\,U(T)}, \tag{1.34}$$

a partir de la cual y de la propiedad de las esperanzas iteradas, se sigue que

$$\begin{aligned} E\{e^{-\delta\,T_0}\, I(T<\infty) \mid U(0)=u\} &= E\left[e^{-\delta\,(T_0-T)}\, e^{-\delta\,T}\, I(T<\infty) \mid U(0)=u\right] \\ &= E\left[e^{\rho\,U(T)} e^{-\delta T} I(T<\infty) \mid U(0)=u\right] \\ &= \psi(u). \end{aligned} \tag{1.35}$$

Esta fórmula muestra que la función $\psi(u)$ generalizada puede ser interpretada como el **valor esperado presente de un pago de una unidad** que se realiza en el momento de la recuperación, si se produce la ruina.

Para $a \leq u \leq b$,

$$P(T_a < \infty \mid U(0) = u) < 1, \tag{1.36}$$

y

$$P(T_b < \infty \mid U(0) = u) < 1. \tag{1.37}$$

Ahora, defina el tiempo de paro

$$T_{a,b} = \text{mín}(T_a, T_b), \tag{1.38}$$

y considere las funciones

$$\begin{aligned} A(a,b \mid u) &= E\left[e^{-\delta T_{a,b}}\, I(U(T_{a,b}) = a) \mid U(0) = u\right] \\ &= E\left[e^{-\delta T_a}\, I(T_a < T_b) \mid U(0) = u\right], \end{aligned} \tag{1.39}$$

y

$$\begin{aligned} B(a,b \mid u) &= E\left[e^{-\delta T_{a,b}}\, I(U(T_{a,b}) = b) \mid U(0) = u\right] \\ &= E\left[e^{-\delta T_b}\, I(T_a > T_b) \mid U(0) = u\right]. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Con δ interpretada como una fuerza de interés, $A(a, b \mid u)$ es el valor esperado presente de un pago de una unidad, que es hecho cuando el superávit cruza por arriba del nivel a por primera vez, siempre y cuando el superávit no haya alcanzado el nivel b mientras tanto.

Similarmente, $B(a, b \mid u)$ es el valor esperado presente de un pago de una unidad, que es hecho cuando el superávit alcanza el nivel b por primera vez, siempre y cuando el superávit no haya caído por debajo del nivel a mientras tanto.

Note que, para cada constante c,

$$A(a,b \mid u) = A(a+c, b+c \mid u+c) \tag{1.41}$$

y

$$B(a,b \mid u) = B(a+c, b+c \mid u+c). \tag{1.42}$$

Se sigue de (1.35) que, para $u \geq a$,

$$\begin{aligned} A(a,\infty \mid u) &= \lim_{b\to\infty} A(a,b \mid u) \\ &= \lim_{b\to\infty} A(0, b-a \mid u-a) \\ &= E\left[e^{-\delta T_0}\, I(T_0 < \infty) \mid U(0) = u-a\right] \\ &= \psi(u-a). \end{aligned} \tag{1.43}$$

De manera análoga, se sigue de (1.37) que, para $u < b$,

$$\begin{aligned} B(-\infty, b \mid u) &= \lim_{a\to\infty} B(s, b \mid u) \\ &= E\left[e^{-\delta T_0} I(T_b < \infty) \mid U(0) = u - a\right] \\ &= E\left[e^{-\delta T_b} \mid U(0) = u\right] \\ &= e^{-\rho(b-u)}. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Note que, con $\delta = 0$ y $0 \leq u < b$,

$$A(0, b \mid u) = E\left[e^{-\delta T_0} I(T_0 < T_b) \mid U(0) = u\right]$$

es la probabilidad de ruina con superávit inicial u en presencia de una barrera absorbente superior b.

Para $a' < a \leq b < b'$, considerando que $T_a < T_b$ ó $T_a > T_b$, se obtienen las siguientes identidades:

$$A(a, b' \mid u) = A(a, b \mid u) + B(a, b \mid u)\, A(a, b' \mid b) \tag{1.45}$$

y

$$B(a', b \mid u) = A(a, b \mid u)\, B(a', b \mid a) + B(s, b \mid u). \tag{1.46}$$

Con $a = 0$, $b = x$, $b' = \infty$ y a causa de (1.43), se sigue que (1.45) se convierte en:

$$A(0, \infty \mid u) = A(0, x \mid u) + B(0, x \mid u)\, A(0, \infty \mid x).$$

Entonces

$$\psi(u) = A(0, x \mid u) + B(0, x \mid u)\, \psi(x). \tag{1.47}$$

Con $a' = -\infty$, $a = 0$, $b = x$, $b' = \infty$ y a causa de (1.44), se sigue que (1.46) se transforma en:

$$B(-\infty, u \mid u) = A(0, x \mid u)\, B(-\infty, x \mid 0) + B(0, x \mid u).$$

Entonces

$$e^{-\rho(x-u)} = A(0, x \mid u)\, e^{-\rho x} + B(0, x \mid u). \tag{1.48}$$

Para $0 \leq u < x$, las expresiones (1.47) y (1.48) son dos ecuaciones lineales de $A(0, x \mid u)$ y $B(0, x \mid u)$; su solución es:

$$A(0, x \mid u) = \frac{e^{\rho x}\, \psi(u) - e^{\rho u}\, \psi(x)}{e^{\rho x} - \psi(x)} \tag{1.49}$$

y
$$B(0,x \mid u) = \frac{e^{\rho\, u} - \psi(u)}{e^{\rho\, x} - \psi(x)}. \tag{1.50}$$

A través de (1.50) puede obtenerse (1.31) para $x > u$. Si la ruina debe ocurrir con $U(0) = 0$ tal que el superávit inmediatamente antes de la ruina es x, entonces el proceso de superávit debe alcanzar el nivel u antes de la ruina. Así,
$$f(x \mid 0) = B(0,u \mid 0)\, f(x \mid u), \tag{1.51}$$
lo que implica que

$$\begin{aligned} f(x \mid u) &= \frac{f(x \mid 0)}{B(0,u \mid 0)} \\ &= f(x \mid 0)\frac{e^{\rho\, u} - \psi(u)}{1 - \psi(0)}, \end{aligned}$$

que es (1.31) para $x > u$. La fórmula para $0 < x \leq u$ es más complicada porque la condición $U(0) = u \geq x = U(T^-)$ significa que el proceso de superávit cae por debajo del nivel x algún tiempo antes de que ocurra la ruina. La ecuación que se desea demostrar se sigue de la identidad

$$B(0,u \mid 0) = \int_0^\infty e^{-\rho\, y}\frac{p(x+y)}{1-P(x)}dy = g(x)\, A(-u,0 \mid -x)\, e^{-\rho\, u}, \tag{1.52}$$

válida para $0 < x \leq u$.

Resolviendo para $f(x \mid u)$ y usando el hecho de que $\int_0^\infty f(x,y \mid 0)\, dx = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-\rho\, x}\, p(x+y)\, dx = g(y)$ y (1.41) se obtiene:

$$\begin{aligned} f(x \mid u) &= \frac{g(x)\, A(-u,0 \mid -x)\, e^{-\rho\, u}}{B(0,u \mid 0)\int_0^\infty e^{-\rho\, y}\, \frac{p(x+y)}{1-P(x)}dy} \\ &= \frac{g(x)}{\int_0^\infty e^{-\rho\, y}\, \frac{p(x+y)}{1-P(x)}dy} e^{-\rho\, u}\, \frac{A(0,u \mid u-x)}{B(0,u \mid 0)} \\ &= \lambda\, c^{-1}\, [1 - P(x)]\, e^{-\rho\, u}\, \frac{A(0,u \mid u-x)}{B(0,u \mid 0)}. \end{aligned} \tag{1.53}$$

Aplicando las ecuaciones (1.49) y (1.50) a (1.53) resulta que

$$\begin{aligned} f(x \mid u) &= \lambda\, c^{-1}\,[1-P(x)]\,\frac{\psi(u-x)-e^{-\rho\, x}\psi(u)}{1-\psi(0)} \\ &= \lambda\, c^{-1}\, e^{-\rho\, x}\,[1-P(x)]\,\frac{e^{\rho\, x}\psi(u-x)-\psi(u)}{1-\psi(0)} \\ &= f(x \mid 0)\frac{e^{\rho\, x}\,\psi(u-x)-\psi(u)}{1-\psi(0)}, \end{aligned}$$

que es (1.31) para $0 < x \leq u$.

■

Hay una interpretación probabilística para $\psi(u)$, que es el valor esperado presente de un pago de una unidad, que es hecho en el tiempo de recuperación, si la ruina ocurre.

Como en [16], puede reescribirse (1.19) como:

$$\phi(u) = \frac{1}{1+\xi}\int_0^u \phi(u-x)\, v(x)\, dx + \frac{1}{1+\xi}H(u),\ u \geq 0, \tag{1.54}$$

donde ξ es tal que

$$\frac{1}{1+\xi} = \int_0^\infty g(y)\, dy = 1 - \frac{\delta}{c\rho},$$

$v(x) = (1+\xi)\, g(x)$ es una función de densidad apropiada y $H(u) = (1+\xi)\, G(u)$.

En particular, si $\omega(x_1, x_2) = 1$ en (1.17), entonces $\phi(u)$ simplifica a la transformada de Laplace del tiempo de ruina T con respecto a δ. Para simplificar notación, defina

$$\phi_T(u) := E\left[e^{-\delta\, T}\, I(T<\infty) \mid U(0)=u\right],$$

que satisface la siguiente ecuación de renovación defectuosa:

$$\phi_T(u) = \frac{1}{1+\xi}\sum_{n=1}^{\infty} \phi_T(u-y)\, v(y)\, dy + \frac{1}{1+\xi}\int_u^\infty v(y)\, dy. \tag{1.55}$$

Usando transformadas de Laplace, se obtiene que $\phi(u)$ también puede ser expresada como la cola de una distribución compuesta, i.e.,

$$\phi_T(u) = \frac{\xi}{1+\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\xi} \right)^n \bar{V}^{*n}(u), \; u \geq 0, \tag{1.56}$$

donde $\bar{V}(u) = \int_u^\infty v(y)\, dy$ es una función de supervivencia. Además, si $\delta = 0$, $\phi_T(u)$ simplifica a la probabilidad de ruina $\Psi(u)$, y por lo tanto, las ecuaciones (1.55) y (1.56) se simplifican a (1.6) y (1.10), respectivamente.

Note que si se define un operador T_r con respecto al parámetro r tal que

$$T_r\, p(x) = \int_0^\infty e^{-r(y-x)}\, p(y)\, dy, \; x \geq 0, \; r \in \mathbb{C},$$

entonces

$$v(x) = \frac{T_\rho\, p(x)}{T_\rho\, P(0)} = (1+\xi)\, T_\rho\, p(x)$$

y

$$\bar{V}(x) = T_0\, v(x) = \frac{T_\rho\, \bar{P}(x)}{T_\rho\, \bar{P}(0)} = (1+\xi)\, T_\rho\, \bar{P}(x).$$

El operador T_r con respecto a un número complejo r desempeña un papel importante en el objetivo de esta tesis; sus propiedades serán discutidas más adelante.

1.4. Modelo de riesgo de Sparre Andersen

Andersen supuso reclamaciones de acuerdo a un proceso de renovación más general y derivó una ecuación integral para la probabilidad de ruina correspondiente. Desde entonces, las caminatas aleatorias y la teoría de colas han proporcionado un marco más general en la teoría de riesgo, que ha conducido a resultados explícitos en el caso donde los tiempos de espera o las severidades de las reclamaciones tienen distribuciones relacionadas a la distribución de Erlang (ver [2]).

Se define como modelo de riesgo de Sparre Andersen al proceso

$$U(t) = u + c\, t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \; t \geq 0, \tag{1.57}$$

donde todos los parámetros son iguales como en el modelo clásico de riesgo, excepto que el proceso $\{N(t);\ t \geq 0\}$ es un proceso contador más general, definido como

$$\text{máx}\{n:\ W_1 + W_2 + ... + W_n \leq t\},$$

donde los W_i, que son los tiempos de espera de las reclamaciones, son asumidos i.i.d. con función de densidad $k(t)$, para $t \geq 0$. Además, suponga que $\{W_i;\ i \in \mathbb{N}^+\}$ y $\{X_i;\ i \in \mathbb{N}^+\}$ son independientes y $c\,E\,[W_i] > E\,[X_i]$, proporcionando un factor de seguridad positivo.

Malinovskii en [17] presenta la transformada de Laplace de la probabilidad de no ruina $\Phi(u) = 1 - \Psi(u)$, si el tamaño de las reclamaciones está distribuído exponencialmente con parámetro α, para una distribución general k de tiempos de espera, como:

$$\delta \int_0^\infty e^{-\delta\, t}\, \Phi(u) = 1 - \rho\, e^{-\alpha\, u\,(1-\rho)},\ \delta > 0,$$

donde ρ es la única solución de la siguiente ecuación:

$$\rho = \hat{k}\,[\delta + c\,\alpha\,(1-\rho)]\,,\ \delta > 0.$$

Wang y Liu en [19] extienden este resultado al caso en el que el tamaño de las reclamaciones puede estar distribuído por una mezcla de dos distribuciones exponenciales. La transformada de Laplace de la probabilidad de no ruina es deducida en términos de dos raíces positivas de una ecuación generalizada de Lundberg, Dickson en [6] discute la probabilidad de no ruina $\Phi(u)$ para un modelo de riesgo de Sparre Andersen, donde los tiempos de espera de las reclamaciones tienen distribución Erlang(2).

1.5. Modelos de riesgo a tiempo discreto

En modelos de riesgo a tiempo discreto, el superávit es examinado al final de un número de períodos de igual longitud (usualmente un año).

Considere un proceso de riesgo a tiempo discreto, donde el número de reclamaciones se rige por un proceso binomial $N(n)$, para $n \in \mathbb{N}$. En cada período de tiempo, la probabilidad de una reclamación es $q \in (0,1)$, mientras que la probabilidad de no reclamación es $1-q$. Las ocurrencias de las reclamaciones en diferentes períodos de tiempo son eventos independientes y sus montos individuales X_1, $X_2, ...$, son variables aleatorias positivas con valores enteros, mutuamente independientes e idénticamente distribuídas. Sea $p(x)$, $x \in \mathbb{N}^+$, su función de probabilidad común y $\mu = E[X]$. Si u denota el superávit inicial, entonces el superávit al tiempo n está dado por

$$U(n) = u + n - \sum_{i=1}^{N(n)} X_i, \; u \in \mathbb{N}. \tag{1.58}$$

El modelo de riesgo a tiempo discreto (1.58) es llamado **modelo de riesgo binomial compuesto**, que puede ser usado también para modelar el caso donde más de una reclamación puede ocurrir en cada período de tiempo. Entonces se supone que las reclamaciones totales en cada período son variables aleatorias i.i.d. que toman valores enteros no negativos.

Sea Y_j la suma de las reclamaciones en el período j, entonces el proceso $U(n)$, con $U(0) = u$,

$$U(n) = u + n - \sum_{j=1}^{n} Y_j, \; u \in \mathbb{N}, \tag{1.59}$$

que puede ser visto como la segunda versión del modelo binomial compuesto, simplemente tomando a $Y_j = I_j\, X_j$, donde las variables aleatorias I_j son i.i.d. con $P(I_j = 0) = P(Y_j = 0) = 1 - q$ y $P(I_j = 1) = P(Y_j > 0) = q$, mientras que $X_j = Y_j$, dado que $Y_j > 0$.

1.6. Un operador para funciones integrables

Como en [8], se introduce un operador complejo de una función integrable con valores reales f:

$$T_r\, f(x) = \int_x^{\infty} e^{-r(u-x)}\, f(u)\, du, \; r \in \mathbb{C}, \; x \geq 0. \tag{1.60}$$

Por ejemplo, si $r = a + i\,b$, se tiene que

$$\begin{aligned} T_r\, f(x) &= \int_x^\infty e^{-(a+i\,b)\,(u-x)}\, f(u)\, du \\ &= \int_x^\infty e^{-a\,(x-u)} \cos b\,(u-x)\, f(u)\, du - \\ & \quad i \int_x^\infty e^{-a\,(u-x)}\, sen\, b\,(u-x)\, f(u)\, du. \end{aligned}$$

El operador T_r satisface las siguientes propiedades para $r,\ r_1,\ r_2 \in \mathbb{C}$,

1. $T_r\, f(0) = \int_0^\infty e^{-r\,u}\, f(u)\, du = \hat{f}(r)$, es la transformada de Laplace de f.

2. $T_{r_1}\, T_{r_2}\, f(x) = T_{r_2}\, T_{r_1}\, f(x) = \frac{T_{r_1}\, f(x) - T_{r_2}\, f(x)}{r_2 - r_1}$, $r_1 \neq r_2$, $x \geq 0$.

3. Si $r = a + i\,b$ (denote por $\bar{r} = a - i\,b$, para $b \neq 0$), entonces

$$T_{\bar{r}}\, T_r\, f(x) = \frac{1}{b} \int_x^\infty e^{-a\,(u-x)}\, sen\, b\,(u-x)\, f(u)\, du,\ x \geq 0,$$

   es un número real.

4. $T_r\,[f * g(x)] = f * [T_r\, g(x)] + [T_r\, g(0)]\,[T_r\, f(x)]$, $x \geq 0$.

5. Para $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} T_r\, T_r\, f(x) &= \int_x^\infty e^{-r\,(u-x)}\,(u-x)\, f(u)\, du \\ &= -\frac{d}{dr} T_r\, f(x) \\ &= \lim_{s\to r} \frac{T_r\, f(x) - T_s\, f(x)}{s-r} \\ &= \lim_{s\to r} T_s\, T_r\, f(x). \end{aligned}$$

6. Para $s \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} T_r^n\, f(x) &= \lim_{s \to r} T_s\, T_r^{n-1}\, f(x) \\ &= \int_x^\infty e^{-r\,(u-x)} \frac{(u-x)^{n-1}}{(n-1)!} f(u)\, du \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dr^{n-1}} T_r\, f(x), \end{aligned}$$

mientras que,

$$T_s\, T_r^n\, f(0) = \frac{\hat{f}(s)}{(r-s)^n} - \sum_{j=1}^{n} \frac{T_r^j\, f(0)}{(r-s)^{n+1-j}},$$

es la correspondiente transformada de Laplace.

7. Si r_1, $r_2, ..., r_l$ son números complejos distintos, entonces

$$\begin{aligned} T_{r_l} \cdots T_{r_2}\, T_{r_1}\, f(x) &= \int_x^\infty e^{-r_l\,(x_l - x)} \cdots \int_{x_2}^\infty e^{-r_1\,(x_1 - x_2)}\, f(x_1)\, dx_1 \cdots dx_l \\ &= (-1)^{l-1} \sum_{i=1}^{l} \frac{T_{r_i}\, f(x)}{\pi_l'(r_i)},\ x \geq 0, \end{aligned} \tag{1.61}$$

donde $\pi_l(r) = \prod_{i=1}^{l}(r - r_i)$. La transformada de Laplace es:

$$T_s\, T_{r_l} \cdots T_{r_2}\, T_{r_1}\, f(0) = (-1)^l \left[\frac{\hat{f}(s)}{\pi_l(s)} - \sum_{i=1}^{l} \frac{\hat{f}(r_i)}{(s - r_i)\, \pi_l'(r_i)} \right],\ s \in \mathbb{C}.$$

8. Para r_1, $r_2, ..., r_l$, y enteros positivos n_1, $n_2, ..., n_l$,

$$\begin{aligned} T_{r_l}^{n_l}\, T_{r_{l-1}}^{n_{l-1}} \cdots T_{r_1}^{n_1}\, f(x) &= \sum_{i=1}^{l} \sum_{m=1}^{n_i} a_{i,m} \int_x^\infty \frac{e^{r_i\,(u-x)}\, (u-x)^{m-1}}{(m-1)!} f(u)\, du \\ &= \sum_{i=1}^{l} \sum_{m=1}^{n_i} a_{i,m}\, T_{r_i}^m\, f(x),\ x \geq 0, \end{aligned}$$

donde los coeficientes $\{a_{i,m};\, 1 \leq i \leq l,\, 1 \leq m \leq n_i\}$ están determinados por,

$$\prod_{i=1}^{l} \frac{1}{(s + r_i)_i^n} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{m=1}^{n_i} \frac{a_{i,m}}{(s + r_i)^m},\ s \in \mathbb{C}. \tag{1.62}$$

Note que, las propiedades 1 a 6 no son complicadas y su demostración se sigue de aplicar la definición del operador T_r.

La propiedad 7 se prueba por inducción sobre l: la propiedad se mantiene para $l = 1$, suponga que es válida también para un l arbitrario y vea para $l+1$,

$$\begin{aligned} T_{r_{l+1}} \cdots T_{r_1} f(x) &= (-1)^{l-1} \sum_{i=1}^{l} \frac{T_{r_{l+1}} T_{r_i} f(x)}{\pi_l'(r_i)} \\ &= (-1)^{l-1} \sum_{i=1}^{l} \frac{T_{r_{l+1}} f(x) - T_{r_i} f(x)}{(r_i - r_{l+1})\, \pi_l'(r_i)} \\ &= (-1)^{l-1} T_{r_{l+1}} f(x) \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{(r_i - r_{l+1})\, \pi_l'(r_i)} + \\ &\quad (-1)^{l} \sum_{i=1}^{l} \frac{T_{r_i} f(x)}{\pi_{l+1}'(r_i)} \\ &= (-1)^{l} \sum_{i=1}^{l+1} \frac{T_{r_i} f(x)}{\pi_{l+1}'(r_i)},\ x \geq 0, \end{aligned}$$

donde el último paso es por la propiedad:

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{\pi(s)}{(s - r_i)\pi_l'(r_i)} = 1,$$

correspondiente a los polinomios de Lagrange.

Para demostrar la propiedad 8, note que,

$$T_{r_l}^{n_l} T_{r_{l-1}}^{n_{l-1}} \cdots T_{r_1}^{n_1} f(x) = \frac{1}{r_l^{n_l} \cdots r_1^{n_1}} \int_x^{\infty} f(u)\, \Gamma_{(r_l,n_l)} * \cdots * \Gamma_{(r_1,n_1)}\, (u - x)\, du, \tag{1.63}$$

donde $\Gamma_{(r_l,n_l)}(x) = \frac{r_l^{n_l}\, x^{n_l - 1}\, e^{-x r_l}}{\Gamma(n_l)}$, y $*$ denota el producto convolución.

Por otro lado, por propiedades de las funciones racionales, se tiene que:

$$\prod_{i=1}^{l} \frac{(r_i)^{n_i}}{(s + r_i)^{n_i}} = \left(\prod_{i=1}^{l} (r_i)^{n_i} \right) \sum_{i=1}^{l} \sum_{m=1}^{n_i} \frac{a_{i,m}}{(s + r_i)^{m}},\ s \in \mathbb{C},$$

donde los coeficientes $a_{i,m}$ están dados en (1.62). Luego, invirtiendo la transformada,

$$\Gamma_{(r_l,n_l)} * \Gamma_{(r_{l-1},n_{l-1})} * \cdots * \Gamma_{(r_1,n_1)}(x) = \left(\prod_{i=1}^{l} r_i^{n_i}\right) \sum_{i=1}^{l} \sum_{m=1}^{n_i} a_{i,m} \frac{e^{-r_i x}\, x^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Sustituyendo en la ecuación (1.63) se completa la prueba.

1.7. Diferencias divididas

Definición 1.8 *La n-ésima diferencia dividida $f[x_0, x_1, ..., x_n]$ sobre $n+1$ puntos distintos de una función $f(x)$ está definida recursivamente por:*

$$\begin{aligned} f[x_0] &= f(x_0), \\ f[x_0, x_1] &= \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}, \\ f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2}, \\ f[x_0, x_1, ..., x_n] &= \frac{f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}] - f[x_1, x_2, ..., x_n]}{x_0 - x_n}. \end{aligned}$$

Para números distintos x_1, x_2, ..., x_n, defina $\pi_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$, entonces por inducción, la $(n-1)$-ésima diferencia dividida puede ser expresada explícitamente como

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{\pi_n'(x_i)}. \tag{1.64}$$

Si alguno de los valores de x_i coincide, las diferencias divididas con respecto a puntos repetidos en una colección, pueden ser evaluadas como una derivada. Por ejemplo, si a, b, c son tres números distintos, entonces

$$f[a, a, a, b, b, c] = \frac{1}{(3-1)!} \frac{1}{(2-1)!} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \frac{\partial}{\partial b} f[a, b, c].$$

La siguiente identidad, que puede ser demostrada por diferencias divididas, será usada durante el desarrollo de este trabajo.

Lema 1.9 *Para cualquier* $n \in \mathbb{N}^+$, x_0, $x_1, ..., x_n$ *números complejos distintos, y* $m \in \mathbb{Z}$*:*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_0)^m}{\pi_n'(x_i)} = \begin{cases} -\frac{1}{\pi_n(x_0)}, & m = -1, \\ 0, & m = 0, 1, ..., n-2, \\ 1, & m = n-1, \end{cases}$$

donde $\pi_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$*.*

Demostración:

Note que $\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_0)^m}{\pi_n'(x_i)}$ es la $(n-1)$-ésima diferencia dividida de un polinomio $(x - x_0)^m$, con respecto a los puntos en la colección x_1, $x_2, ..., x_n$.

■

Hay una estrecha relación entre el operador T_r y las diferencias divididas, como se indica en el teorema siguiente.

Teorema 1.10 *Para una colección de puntos* x_1, $x_2, ..., x_n$*,*

$$T_{x_n} T_{x_{n-1}} \cdots T_{x_1} f(y) = (-1)^{n-1} h_y [x_1, x_2, ..., x_n], \tag{1.65}$$

donde $h_y(x) = T_x f(y) = \int_y^\infty e^{-x(z-y)} f(z)\, dz$ *es una función en* x *para un parámetro fijo* y*. En particular, si* $y = 0$*, entonces*

$$T_{x_n} T_{x_{n-1}} \cdots T_{x_1} f(0) = (-1)^{n-1} \hat{f} [x_1, x_2, ..., x_n], \tag{1.66}$$

donde $\hat{f}(x)$ *es la transformada de Laplace de* f*.*

Demostración:

Se sigue de la fórmula (1.64) y la propiedad 7 del operador T_r de la sección anterior.

■

Capítulo 2

Procesos de renovación

En este capítulo se considera la evaluación de la función de penalidad de Gerber-Shiu para una clase de procesos de renovación donde los tiempos de inter-arribos de las reclamaciones están K_n-distribuídos. Esta clase general de distribuciones incluye, como casos particulares, las distribuciones Erlang y tipo fase, así somo mezclas de éstas; de manera que el modelo presentado extiende al modelo clásico de riesgo, al modelo Erlang(2) de Dickson [6], Dickson y Hipp [7] y [8], Cheng y Tang [4] y Lin [15], y el modelo de riesgo generalizado Erlang(n) estudiado por Gerber y Shiu en [11], [12] y [13].

Se considerarán dos clases de distribuciones continuas sobre $\mathbb{R}^+$. La primera, es la clase de distribuciones K_n, para $n \in \mathbb{N}^+$, mientras la segunda clase, es la familia de distribuciones R_f^+. La primera clase es una subclase de la segunda.

2.1. La clase de distribuciones K_n

Definición 2.1 *Se dice que una distribución de probabilidad pertenece a la clase K_n, $n \in \mathbb{N}^+$, si la transformada de Laplace $\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-s\,t} f(t)dt$ de su función de densidad f tiene la siguiente forma:*

$$\hat{f}(s) = \frac{\lambda^* + s\,\beta(s)}{\prod_{i=1}^n (s+\lambda_i)},\ \Re(s) > max\{-\lambda_1,\, -\lambda_2, ..., \, -\lambda_n\}, \tag{2.1}$$

donde $\lambda_i > 0$ para $i = 1, 2, ..., n$, $\lambda^* = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ y $\beta(s) = \sum_{i=0}^{n-2} \beta_i\, s^i$ es un polinomio de grado menor o igual que $n-2$.

La clase de distribuciones K_n es usada en modelos de probabilidad aplicada. Los siguientes ejemplos proporcionan algunas distribuciones especiales en la familia K_n.

Ejemplo 2.2 *La distribución exponencial con función de densidad*

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda\, x}\, I(x \geq 0),\ \lambda > 0,$$

es el único elemento de la familia K_1, ya que

$$\hat{f}(s) = \frac{\lambda}{(s+\lambda)}.$$

Ejemplo 2.3 *La mezcla de dos distribuciones exponenciales con función de densidad*

$$f(x) = \left[\theta\, \lambda_1\, e^{-\lambda_1\, x} + (1-\theta)\, \lambda_2\, e^{-\lambda_2\, x}\right] I(x \geq 0),$$

es un elemento de la familia K_2, ya que

$$\hat{f}(s) = \frac{\lambda_1\, \lambda_2 + s\, [\theta\, \lambda_1 + (1-\theta)\, \lambda_2]}{(s+\lambda_1)\, (s+\lambda_2)}.$$

Ejemplo 2.4 *Las distribuciones tipo fase (2) con funciones de densidad f satisfacen*

$$\begin{aligned} f(x) + A_1\, f'(x) + A_2\, f''(x) &= 0,\ A_2 > 0, \\ A_1\, f(0) + A_2\, f'(0) &= 1, \end{aligned}$$

son elementos de la familia K_2, ya que

$$\hat{f}(s) = \frac{[1 + s\, A_2\, f(0)]}{[s^2\, A_2 + s\, A_1 + 1]}.$$

Ejemplo 2.5 *La distribución Erlang con función de densidad*

$$f(x) = \frac{\lambda^n\, x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda\, x}\, I(x \geq 0),\ \lambda > 0,\, n \in \mathbb{N}^+,$$

es un elemento de la familia K_n, ya que

$$\hat{f}(s) = \frac{\lambda^n}{(s+\lambda)^n}.$$

Ejemplo 2.6 *La distribución generalizada Erlang(n) es la convolución de n distribuciones exponenciales, con posibles parámetros diferentes, positivos, $\lambda_1,\ \lambda_2, ...,\ \lambda_n$, con función de densidad*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} \right) \lambda_i\, e^{-\lambda_i\, x}\, I(x \geq 0), \tag{2.2}$$

es un elemento de la familia K_n, ya que

$$\hat{f}(s) = \frac{\lambda^*}{\prod_{i=1}^{n}(s+\lambda_i)}.$$

En general, la función de densidad f de una distribución K_n puede ser obtenida invirtiendo la ecuación (2.1). Se distinguen dos casos:

1. Si $\lambda_1,\ \lambda_2, ...,\ \lambda_n$ son distintos, por fracciones parciales se obtiene:

$$\hat{f}(s) = \frac{\lambda^* + s\,\beta(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s+\lambda_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(s+\lambda_i)},$$

donde $a_i = \frac{\lambda^* - \lambda_i\,\beta(-\lambda_i)}{\prod_{j=1,\, j\neq i}(\lambda_j - \lambda_i)}$.

Invirtiendo, resulta:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, e^{-\lambda_i\, x}\, I(x \geq 0). \tag{2.3}$$

2. Si por el contrario, algunos λ_i son iguales, i.e.,

$$\hat{f}(s) = \frac{\lambda^* + s\,\beta(s)}{\prod_{i=1}^{k}(s+\lambda_i)^{n_i}},$$

donde $\lambda_1,\ \lambda_2, ...,\ \lambda_k$ son distintos y $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, entonces por fracciones parciales,

$$\hat{f}(s) = \frac{\lambda^* + s\,\beta(s)}{\prod_{i=1}^{k}(s+\lambda_i)^{n_i}} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{ij}}{(s+\lambda_i)^{j}},$$

y así

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} \frac{x^{j-1}\, e^{-\lambda_i x}}{(j-1)!} I(x \geq 0), \tag{2.4}$$

donde, aquí $\lambda^* = \prod_{l=1}^{k} {\lambda_l}^{n_l}$, y

$$a_{ij} = \frac{1}{(n_i - j)!} \frac{d^{n_i - j}}{ds^{n_i - j}} \prod_{m=1,\, m \neq i}^{k} \frac{\lambda^* + s\,\beta(s)}{(s + \lambda_m)^{n_m}},\ s = -\lambda_i,\ s \in \mathbb{C}.$$

2.2. Distibuciones racionales sobre $\mathbb{R}^+$

Definición 2.7 *Se dice que una distribución de probabilidad F sobre $\mathbb{R}^+$ pertenece a R_f^+, que denota al conjunto de distribuciones racionales sobre $\mathbb{R}^+$, si la transformada de Laplace de su función de densidad f es una función racional, i.e.,*

$$\hat{f}(s) = \frac{\left(\prod_{i=1}^{n} q_i\right) + s\,\beta(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s + q_i)},\ \Re(s) > \text{máx}\{-\Re(q_i); i = 1, 2, ..., n\}, \tag{2.5}$$

donde $q_1, q_2, ..., q_n$ son tales que $\Re(q_i) > 0$ y $\beta(s) = \sum_{i=0}^{n-2} \beta_i\, s^i$ es un polinomio de grado menor o igual que n-2.

R_f^+ es una amplia clase de distribuciones, que incluye la familia K_n, con todos los ejemplos anteriores. También incluye funciones seno y coseno como en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.8 *La distribución con función de densidad*

$$f(x) = \frac{17}{13} e^{-x} \left[1 - sen(4x)\right] I(x \geq 0), \tag{2.6}$$

tiene una transformada de Laplace racional

$$\hat{f}(s) = \frac{17}{13} \frac{(s^2 - 2s + 13)}{(s+1)\left[(s+1)^2 + 16\right]},$$

de manera que pertenece a la clase R_f^+.

Ejemplo 2.9 *La distribución con función de densidad*

$$f(x) = \frac{(a^2+b^2)\,R}{(a-R)^2+b^2}\left[e^{-R\,x} - e^{-a\,x}\cos(b\,x) + \frac{R-a}{b}e^{-a\,x}\,sen(bx)\right] I(x \geq 0),$$

donde $R > 0$*,* $\Re(a) > 0$*, y* $b \neq 0$*, tiene una transformada de Laplace racional*

$$\hat{f}(s) = \frac{R\,(a^2+b^2)}{(s+R)\left[(s+a)^2+b^2\right]},$$

de manera que pertenece a la clase R_f^+*.*

2.3. Proceso del número de reclamaciones

Definición 2.10 *Considere los tiempos,* W_i*, de inter-arribo de reclamaciones i.i.d, con función de distribución común* K *y función de densidad* k *sobre* $\mathbb{R}^+$*, con* $\tau_n = \sum_{i=1}^n W_i$ *el tiempo de arribo de la* n*-ésima reclamación (*$\tau_0 = 0$*). Entonces* $\{N(t);\, t \geq 0\}$ *es un proceso de renovación, donde*

$$N(t) = \sup\{n \geq 0; \tau_n \leq t\},\ t \geq 0. \tag{2.7}$$

$\{N(t);\, t \geq 0\}$ *es llamado el* ***proceso del número de reclamaciones****.*

La distribución $N(t)$ para $t \geq 0$ fijo, puede ser expresada como

$$P(N(t) = n) = K^{*n}(t) - K^{*(n+1)}(t),\ n = 0,\, 1, ..., \tag{2.8}$$

donde K^{*n} denota la n-ésima convolución de K consigo misma.

Usualmente, la distribución de $N(t)$ no tiene una fórmula explícita, excepto para algunas distribuciones especiales de tiempos de inter-arribo de las reclamaciones.

Ejemplo 2.11 *Si los tiempos de inter-arribo de las reclamaciones están distribuídos exponencialmente con* $k(x) = \lambda\, e^{-\lambda\, x}$*, entonces* $N(t)$ *es llamado* ***Proceso de Poisson****, y*

$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda\, t)^n\, e^{-\lambda\, t}}{n!},\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

En algunas situaciones, es conveniente convertir (2.8) en una ecuación para la función generadora de probabilidad de $N(t)$. Sea

$$G(t,\, z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\, P(N(t) = n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}\,(z-1)\, K^{*n}(t),\ -1 < z < 1,$$

la función generadora de $N(t)$.

Tomando la transformada de Laplace en ambos lados se obtiene:

$$\begin{aligned}\hat{G}(s,z) &= \int_0^{\infty} e^{-s\,t}\, G(t,z)\, dt = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}\,(z-1)\,\widehat{K^{*n}}(s),\ s \in \mathbb{C}, \\ &= \frac{1-\hat{k}(s)}{s\left[1 - z\,\hat{k}(s)\right]}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Se sigue de (2.10) que: siempre que $\hat{k}(s)$ sea una función racional, la transformada de Laplace de la función generadora puede ser usada en funciones parciales y por tanto, invertida en términos de funciones elementales.

Los momentos, especialmente el valor de la media de $N(t)$, desempeñan un rol importante en la teoría de renovación. La función de renovación $m(t)$, definida como $m(t) = E\,[N(t)]$, para $t \geq 0$, está dada por

$$m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P(N(t) = n) = \sum_{n=0}^{\infty} n\left[K^{*n}(t) - K^{*(n+1)}(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} K^{*n}(t). \tag{2.11}$$

La función $m(t)$ también satisface una ecuación de renovación propia:

$$m(t) = K(t) + \int_0^t m(t-x)\, k(x)\, dx,\ t \geq 0. \tag{2.12}$$

Tomando la transformada de Laplace en ambos lados se obtiene que

$$\hat{m}(s) = \frac{\hat{k}(s)}{s\left[1-\hat{k}(s)\right]},\ s \in \mathbb{C}. \tag{2.13}$$

La transformada de Laplace en (2.13) puede ser invertida por fracciones parciales si $\hat{k}$ es una función racional.

Ejemplo 2.12 *Si* $\hat{k}(s) = \frac{\lambda}{(s+\lambda)}$*, entonces*

$$\hat{m}(s) = \frac{\lambda}{s^2}.$$

Invirtiendo, $m(t) = \lambda\, t$.

Ejemplo 2.13 *Si los tiempos de inter-arribo de las reclamaciones están distribuídos como una mezcla de dos distribuciones exponenciales, con transformada de Laplace*

$$\hat{k}(s) = \theta \left(\frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} \right) + (1-\theta) \left(\frac{\lambda_2}{s+\lambda_2} \right),$$

entonces, por fracciones parciales,

$$\hat{m}(s) = \frac{1}{s^2\, \mu} + \frac{1}{s}\frac{(\sigma^2 - \mu^2)}{2\mu^2} - \frac{\theta\,(1-\theta)\,(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{\left[\theta\,\lambda_2 + (1-\theta)\,\lambda_1\right]^2 [s - (\theta\,\lambda_2 + (1-\theta)\,\lambda_1)]}, \tag{2.14}$$

y así,

$$m(t) = \frac{t}{\mu} + \frac{(\sigma^2 - \mu^2)}{2\mu^2} - \frac{\theta\,(1-\theta)\,(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(1-\theta)\,\lambda_1 + \theta\,\lambda_2} e^{-[(1-\theta)\,\lambda_1 + \theta\,\lambda_2]\,t},\ t \geq 0, \tag{2.15}$$

donde $\mu = \frac{\theta}{\lambda_1} + \frac{(1-\theta)}{\lambda_2}$ *es la media de los tiempos de inter-arribo* W *y* $\sigma^2 = \frac{\theta}{{\lambda_1}^2} + \frac{(1-\theta)}{{\lambda_2}^2} + \theta\,(1-\theta)\Big(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\Big)^2$ *es la varianza correspondiente.*

Ejemplo 2.14 *Si los tiempos de inter-arribo de las reclamaciones tienen distribución Erlang(n) con transformada de Laplace*

$$\hat{k}(s) = \frac{\lambda^n}{(s+\lambda)^n},$$

entonces

$$\begin{aligned} \hat{m}(s) &= \frac{\lambda^n}{s\left[(s+\lambda)^n - \lambda^n\right]} = \frac{\lambda^n}{s^2 \prod_{i=1}^{n-1}(s - r_i)} \\ &= \frac{1}{\mu s^2} + \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2\, s} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{v_i}{(s - r_i)}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

donde $r_i = \lambda \left[e^{\frac{2\pi k i}{n}} - 1 \right]$, *para* $i = 1, 2, ..., n-1$, *son* $n-1$ *raíces, diferentes de cero, de* $(\lambda + s)^n = \lambda^n$, *la media de la distribución Erlang(n) es* $\mu = \frac{n}{\lambda}$ *y* $\sigma^2 = \frac{n}{\lambda^2}$ *es su varianza, mientras* $v_i = \frac{\lambda^n}{{r_i}^2 \prod_{j=1,\, j\neq i}^{n-1} (r_j - r_i)}$. *Por lo tanto, invirtiendo la ecuación (2.16),* $m(t)$ *está dada por*

$$m(t) = \frac{t}{\mu} + \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2} + \sum_{i=1}^{n-1} v_i\, e^{r_i\, t},\ t \geq 0. \tag{2.17}$$

En particular, si $n = 2$, *entonces*

$$\hat{m}(s) = \frac{\lambda^2}{s^2\,(s + 2\,\lambda)},$$

de donde, invirtiendo, resulta que

$$m(t) = \frac{t}{\mu} + \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2} + \frac{1}{4} e^{-2\,\lambda\, t} = \frac{\lambda\, t}{2} - \frac{1}{4}\left[1 - e^{2\,\lambda\, t}\right]. \tag{2.18}$$

Si $n = 3$, $m(t)$ *puede ser simplificada a:*

$$m(t) = \frac{\lambda\, t}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{3}} e^{-\frac{3\,\lambda\, t}{2}} \left[sen\left(\frac{\sqrt{3}\,\lambda\, t}{2}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,\lambda\, t}{2}\right)\right]. \tag{2.19}$$

2.4. Una clase de modelos de renovación

Considere un proceso a tiempo continuo Sparre Andersen

$$U(t) = u + c\, t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,\ t \geq 0.$$

En esta sección se considera que el proceso del número de reclamaciones

$$N(t) = \text{máx}\{n : W_1 + W_2 + ... + W_n \leq t\}$$

es un proceso contador más general en el que los tiempos de espera de las reclamaciones, W_i, son asumidos i.i.d con función de distribución K y función de densidad k.

Sea $\tau_j = \sum_{i=1}^{j} W_i$ el tiempo de arribo de la j-ésima reclamación. Considere el superávit $U_j = U(\tau_j)$ inmediatamente después de la j-ésima reclamación. Definiendo $\tau_0 = 0$, se tiene $U_0 = u$,

$$\begin{aligned} U_j &= U(\tau_j) = u + c\,\tau_j - \sum_{i=1}^{j} X_i,\ j \in \mathbb{N}^+ \\ &= u + \sum_{i=1}^{j} \left[c\,W_i - X_i\right],\ j \in \mathbb{N}^+. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Se busca una función v tal que el proceso

$$\{e^{-\delta\,\tau_j}\, v(U_j);\ j \in \mathbb{N}\} \tag{2.21}$$

forme una martingala. Defina $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\, \Omega\}$, y

$$\mathcal{F}_j = \sigma\{W_1,\, W_2, ...,\, W_j,\, X_1,\, X_2, ...,\, X_j\},\ j \in \mathbb{N}^+,$$

una sucesión creciente de σ-álgebras, que representa la información del proceso inmediatamente después de la j-ésima reclamación. Entonces, por definición de una martingala discreta,

$$E\left[e^{-\delta\,\tau_{j+1}}\, v(U_{j+1}) \mid \mathcal{F}_j\right] = e^{-\delta\,\tau_j}\, v(U_j),\ j \in \mathbb{N}. \tag{2.22}$$

Por la definición de τ_j, la ecuación anterior es equivalente a:

$$E\left[e^{-\delta\,(\tau_j + W_{j+1})}\, v(U(\tau_j + W_{j+1})) \mid \mathcal{F}_j\right] = e^{-\delta\,\tau_j}\, v(U_j),$$

o

$$e^{-\delta\,\tau_j} E\left[e^{-\delta\,W_{j+1}}\, v\left(u + \sum_{i=1}^{j+1} \left[c\,W_i - X_i\right]\right) \mid \mathcal{F}_j\right]$$

$$= e^{-\delta\,\tau_j} E\left[e^{\delta\,W_{j+1}}\, v\left(u + \sum_{i=1}^{j} \left[c\,W_i - X_i\right] + (c\,W_{j+1} - X_{j+1})\right) \mid \mathcal{F}_j\right]$$

que puede ser simplificada a:

$$E\left[e^{-\delta\,W_{j+1}}\, v(U_j + (c\,W_{j+1} - X_{j+1})) \mid \mathcal{F}_j\right] = v(U_j),\ j \in \mathbb{N}. \tag{2.23}$$

Finalmente, la ecuación (2.23) es equivalente a:

$$\begin{aligned} v(u) &= E\left[e^{-\delta W}\, v(u + c\,W - X)\right], && (2.24)\\ &= \int_0^{\infty} e^{-\delta\, t}\, k(t)\, E\left[v(u + c\,t - X)\right] dt. && (2.25) \end{aligned}$$

Como todos los W_i son i.i.d, se hará referencia a ellos, por simplicidad, como W. La ecuación (2.25) es la condición suficiente y necesaria para que el proceso en (2.21) sea una martingala.

Eligiendo $v(u) = e^{s\,u}$ tal que $\{e^{-\delta\,\tau_j + s\,U_j};\ j \in \mathbb{N}\}$ es una martingala, (2.25) se simplica a:

$$\gamma(s) = \frac{1}{\hat{k}(\delta - cs)} = \hat{p}(s),\ s \in \mathbb{C}, \tag{2.26}$$

que es una **ecuación de Lundberg generalizada**.

Ahora puede afirmarse que $\{e^{-\delta\,\tau_j}\,\phi(U_j);\ j \in \mathbb{N}\}$ es una martingala. Para mostrar esto, sea

$$D = e^{-\delta\, T}\,\omega\left((U(T^-), |\, U(T)\, |)\right) I(T < \infty),$$

y defina $M_j = E\left[D \mid \mathcal{F}_j\right]$, para $j \in \mathbb{N}$, $\{M_j;\ j \in \mathbb{N}\}$ es una martingala. Como $P(W_1 < \infty) = 1$, por el Teorema de Muestreo Opcional y la propiedad de renovación de U_j, se obtiene:

$$\begin{aligned} \phi(u) &= E\left[M_0\right] = E\left[M_1\right] = E\left[E\left[D \mid \mathcal{F}_1\right]\right]\\ &= E\left[e^{-\delta\, W_1}\,\phi(U_1)\right]\\ &= E\left[e^{-\delta\, W_1}\,\phi(u + c\,t - X_1)\right]\\ &= \int_0^{\infty} e^{-\delta\, t}\, k(t)\, E\left[\phi(u + c\,t - X_1)\right] dt. && (2.27) \end{aligned}$$

Así que, $\{e^{-\delta\,\tau_j}\,\phi(U_j);\ j \in \mathbb{N}\}$ es una martingala.

En el resto del capítulo, se asume que k pertenece a la familia de distribuciones K_n de la sección 2.1. En este caso, la ecuación generalizada de Lundberg (2.26) se simplifica a:

$$\gamma(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(\delta - cs + \lambda_i)}{\lambda^* + (\delta - cs)\,\beta(\delta - cs)} = \hat{p}(s),\ s \in \mathbb{C}. \tag{2.28}$$

El siguiente teorema muestra que la ecuación (2.28) tiene exactamente n raíces en la mitad derecha del plano complejo.

Teorema 2.15 *Para $\delta > 0$ y $n \in \mathbb{N}^+$, la ecuación de Lundberg en (2.28) tiene sólo n raíces, suponga que estas son: $\rho_1(\delta), \rho_2(\delta), ..., \rho_n(\delta)$, con parte real positiva $\Re(\rho_i) > 0$.*

Demostración:

En el medio círculo en el plano complejo dado por $z = r$, para $r > 0$ fijo, y $\Re(z) \geq 0$, se tiene que $| \gamma(s) |> 1$, para r suficientemente grande. Para s sobre el eje imaginario ($\Re(s) = 0$),

$$| \gamma(s) |\geq \frac{1}{| \hat{k}(\delta - cs) |} > 1.$$

Esto es, en el límite del contorno del medio círculo y el eje imaginario, se tiene que $| \gamma(s) |>| \hat{p}(s) |$. Entonces, en el medio plano derecho, el número de raíces para la ecuación de Lundberg es igual al número de raíces de $\gamma(s) = 0$. Ya que esta última tiene exactamente n raíces positivas, puede decirse que la ecuación (2.28) tiene exactamente n raíces con parte real positiva, $\rho_1(\delta), \rho_2(\delta), ..., \rho_n(\delta)$.

$\blacksquare$

Observaciones:

1. Defina $l(s) := \hat{p}(s) - \gamma(s)$. Como $l(0) < 0$ y $\lim_{s \to -\infty} l(s) = +\infty$, entonces para $p(x)$ suficientemente regular, hay una raíz negativa para $l(0) = 0$, denominada por $-R(\delta)$. Se llama a $-R(\delta) > 0$ un **coeficiente de ajuste generalizado**.

2. Si $\delta \to 0^+$, entonces $-R(\delta) \to -R(0)$ y $\rho_j(\delta) \to \rho_j(0)$, para $1 \leq j \leq n$, con $\rho_n(0) = 0$, donde $-R(0)$ y $\rho_j(0)$ son raíces de la ecuación

$$\gamma_0(s) := \frac{\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - cs)}{\lambda^* - cs\,\beta(-cs)} = \hat{p}(s),\ s \in \mathbb{C}.$$

3. Por simplicidad, escriba $-R$ y ρ_j en lugar de $-R(\delta)$ y $\rho_j(\delta)$, para $1 \leq j \leq n$, cuando $\delta > 0$.

2.5. Transformada de Laplace de la función v

En esta sección se considera la transformada de Laplace de cualquier función v tal que el proceso $\{e^{-\delta\,\tau_j}\,v(U(\tau_j));\ j\in\mathbb{N}\}$ sea una martingala cuando los tiempos de espera de las reclamaciones están K_n distribuídos, lo que después dará lugar a la transformada de Laplace $\hat{\phi}(s)=\int_0^\infty e^{-s\,u}\,\phi(u)\,du$ de la función de penalidad esperada con descuento $\phi(u)$.

De la ecuación (2.25) se tiene que

$$v(u)=\int_0^\infty e^{-\delta\,t}\,k(t)\,E\left[v(u+c\,t-X)\right]dt.$$

Considerando $y=u+c\,t$, se obtiene:

$$c\,v(u)=\int_0^\infty e^{-\frac{\delta\,(y-u)}{c}}k\left(\frac{y-u}{c}\right)E\left[v(y-X)\right]dy. \tag{2.29}$$

Luego, tomando la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación anterior e invirtiendo el orden de integración, se sigue que

$$\begin{aligned}
c\,\hat{v}(s) &= \int_0^\infty e^{-s\,u}\int_u^\infty e^{-\frac{\delta\,(y-u)}{c}}k\left(\frac{y-u}{c}\right)E\left[v(y-X)\right]dy\,du\\
&= \int_0^\infty e^{-\frac{\delta\,y}{c}}\,E\left[v(y-X)\right]\int_0^y e^{-\left(\frac{cs-\delta}{c}\right)u}\,k\left(\frac{y-u}{c}\right)du\,dy. \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Primero, si $\lambda_1,\ \lambda_2,...,\ \lambda_n$ en la ecuación (2.1) son distintos, entonces por fracciones parciales,

$$\hat{k}(s)=\frac{\lambda^*+s\,\beta(s)}{\prod_{i=1}^n(s+\lambda_i)}=\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{(s+\lambda_i)}, \tag{2.31}$$

con $a_i=\frac{\lambda^*-\lambda_i\,\beta(-\lambda_i)}{\prod_{j=1,\,j\neq i}(\lambda_j-\lambda_i)}$, de donde $k(t)=\sum_{i=1}^n a_i\,e^{-\lambda_i\,t}\,I(t\geq 0)$. Entonces, la ecuación (2.30) se convierte en:

$$\begin{aligned}
c\,\hat{v}(s) &= \int_0^\infty e^{-\frac{\delta\,y}{c}}\,E\left[v(y-X)\right]\int_0^y e^{-\left(\frac{cs-\delta}{c}\right)u}\,\sum_{i=1}^n a_i\,e^{-\lambda_i\left(\frac{y-u}{c}\right)}du\,dy\\
&= \int_0^\infty e^{-\frac{\delta\,y}{c}}\,E\left[v(y-X)\right]\sum_{i=1}^n a_i\int_0^y e^{-\left(\frac{cs-\delta}{c}\right)u}\,e^{-\lambda_i\left(\frac{y-u}{c}\right)}du\,dy.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
c\,\hat{v}(s) &= \sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\infty} e^{-\left(\frac{\delta+\lambda_i}{c}\right)y}\, E\left[v(y-X)\right]\int_{0}^{y} e^{-\left(\frac{cs-\delta-\lambda_i}{c}\right)u} du\, dy \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{c\,a_i}{(cs-\delta-\lambda_i)}\int_{0}^{\infty} e^{-\left(\frac{\delta+\lambda_i}{c}\right)y} E\left[v(y-X)\right]\left[1-e^{-\left(\frac{cs-\delta-\lambda_i}{c}\right)y} dy\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{c\,a_i}{(cs-\delta-\lambda_i)}\left\{\int_{0}^{\infty} e^{-\left(\frac{\delta+\lambda_i}{c}\right)y}\, E\left[v(y-X)\right] dy - \right. \\
&\quad \left. \int_{0}^{\infty} e^{-s\,y}\, E\left[v(y-X)\right] dy\right\}.
\end{aligned}$$

Equivalentemente, de la ecuación (2.31),

$$\hat{v}(s) = \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i\, e_i}{(cs-\delta-\lambda_i)}\hat{k}(\delta-cs)\int_{0}^{\infty} e^{-s\,y}\, E\left[v(y-X)\right] dy, \tag{2.32}$$

donde $e_i = \int_0^\infty e^{-\frac{\delta+\lambda_i}{c}y}\, E\left[v(y-X)\right] dy$, para $i = 1, 2, ..., n$. Como

$$E\left[v(y-X)\right] = \int_{0}^{y} v(y-x)\, p(x)\, dx + \int_{y}^{\infty} v(y-x)\, p(x)\, dx,$$

la ecuación (2.32) se convierte en:

$$\hat{v}(s) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i\, e_i}{(cs-\delta-\lambda_i)} + \hat{k}(\delta-cs)\int_0^\infty e^{s\,y}\int_y^\infty v(y-x)\, p(x)\, dx\, dy}{\left[1-\hat{k}(\delta-cs)\,\hat{p}(s)\right]}. \tag{2.33}$$

Luego, si algunos λ_i en la ecuación (2.1) no son distintos,

$$\hat{k}(s) = \frac{\lambda^* + s\,\beta(s)}{\prod_{i=1}^{l}(s+\lambda_i)^{n_i}},$$

donde sólo λ_1, λ_2, ..., λ_l son distintos y $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$, entonces por fracciones parciales,

$$\hat{k}(s) = \frac{\lambda^* + s\,\beta(s)}{\prod_{i=1}^{l}(s+\lambda_i)^{n_i}} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{a_{ij}}{(s+\lambda_i)^{j}},$$

y así,

$$k(t) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} \frac{t^{j-1}\, e^{\lambda_i t}}{(j-1)!},$$

donde

$$a_{ij} = \frac{1}{(n_i - n_j)!} \frac{d^{n_i - j}}{ds^{n_i - j}} \prod_{m=1,\, m\neq i}^{k} \frac{\lambda^* + s\,\beta(s)}{(s+\lambda_m)^{n_m}},\ s = -\lambda_i,\ s \in \mathbb{C}.$$

Por un argumento similar,

$$\begin{aligned} \hat{v}(s) \quad &= \quad \frac{-\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{m=0}^{j-1} \frac{a_{ij}\, e_{im}}{c^m\, m!\, (\delta+\lambda_i - cs)^{j-m}}}{\left[1 - \hat{k}(\delta - cs)\, \hat{p}(s)\right]} \\ &+ \frac{\hat{k}(\delta - cs) \int_0^\infty e^{s\,y} \int_0^\infty v(y-x)\, p(x)\, dx\, dy}{\left[1 - \hat{k}(\delta - cs)\, \hat{p}(s)\right]}, \end{aligned} \tag{2.34}$$

donde $e_{im} = \int_0^\infty y^m\, e^{-\left(\frac{\delta+\lambda_i}{c}\right) y}\, E\left[v(y-X)\right] dy$, para $i = 1,\ 2, ..., l < n$.

Una expresión explícita para $\hat{v}(s)$ puede ser obtenida eligiendo adecuadamente a v; el siguiente teorema muestra que en ambos casos anteriores, esto puede realizarse escogiendo a v como ϕ.

Teorema 2.16 *Si la función de densidad k es una distribución K_n, con $\hat{k}(s)$ de la forma expresada en (2.1), entonces la transformada de Laplace de ϕ está dada por*

$$\hat{\phi}(s) = \frac{\hat{w} - \left[\frac{q(s)}{\lambda^* + (\delta - cs)\,\beta(\delta - cs)}\right]}{\left[\gamma(s) - \hat{p}(s)\right]}, \tag{2.35}$$

donde $\hat{w}(s)$ es la transformada de Laplace de $w(y) = \int_y^\infty \omega(y, x-y)\, p(x)\, dx$, $\gamma(s)$ está dada como en la ecuación (2.28) y $q(s)$ es un polinomio de grado menor o igual que $(n-1)$ que está determinado por las condiciones:

$$q(\rho_j) = \hat{w}(\rho_j)\left[\lambda^* + (\delta - c\rho_j)\,\beta(\delta - c\rho_j)\right],\ j = 1,\ 2, ..., n. \tag{2.36}$$

Además, si $\rho_1,\ \rho_2, ...,\ \rho_n$ son distintos, entonces

$$q(s) = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \hat{w}(\rho_j)\left[\lambda^* + (\delta - c\rho_j)\,\beta(\delta - c\rho_j)\right] \left[\prod_{i=1,\, i\neq j}^{n} \frac{(s-\rho_i)}{(\rho_j - \rho_i)}\right] \right\}. \tag{2.37}$$

Demostración:

Por simplicidad, defina $w(y) = \int_y^{\infty} w(y, x-y)\, p(x)\, dx$, entonces, por la definición de ϕ,

$$E\left[\phi(y-X)\right] = \int_0^y \phi(y-x)\, p(x)\, dx + w(y).$$

Se sigue que:

1. Si $\hat{k}(s)$ está dada por (2.1), donde λ_1, $\lambda_2, ...,$ λ_n son distintos,

$$\hat{\phi}(s) = \frac{\sum\left[\frac{a_i\, e_i}{\delta+\lambda_i - cs}\right] + \hat{k}(\delta - cs)\, \hat{w}(s)}{\left[1 - \hat{k}(\delta - cs)\, \hat{p}(s)\right]}. \tag{2.38}$$

   Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $\gamma(s) = \frac{1}{\hat{k}(\delta - cs)}$ se obtiene (2.35), con

$$q(s) = \left[\prod_{i=1}^{n}(\delta+\lambda_i - cs)\right]\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i\, e_i}{\delta+\lambda_i - cs}\right],$$

   un polinomio de grado menor o igual que $(n-1)$.

   Debido a que $\hat{\phi}(s)$ es finita para toda s con $\Re(s) > 0$ y los ρ_j con $\Re(\rho_j) > 0$, $j = 1, 2, ..., n$ son ceros del denominador en (2.35), entonces deben ser también los ceros del numerador, es decir, la condición (2.36) se mantiene. Asimismo, si ρ_1, $\rho_2, ...,$ ρ_n son distintas, entonces puede obtenerse la ecuación (2.37) a través de la fórmula de interpolación de Lagrange.

2. Por otro lado, si

$$\hat{k}(s) = \frac{\lambda^* + s\,\beta(s)}{\prod_{i=1}^{l}(s+\lambda_i)^{n_i}},$$

   con $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$, entonces la transformada de ϕ puede ser obtenida a través de (2.34),

$$\hat{\phi}(s) = \frac{-\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{m=0}^{j-1}\left[\frac{a_{ij}\, e_{im}}{c^m\, m!\,(\delta+\lambda_i - cs)^{j-m}}\right] + \hat{k}(\delta - cs)\, \hat{w}(s)}{\left[1 - \hat{k}(\delta - cs)\, \hat{p}(s).\right]} \tag{2.39}$$

De nuevo, multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $\gamma(s) = \frac{1}{\hat{k}(\delta - cs)}$ se obtiene (2.35), pero esta vez

$$q(s) = \left[\prod_{i=1}^{l} (\delta + \lambda_i - cs)^{n_i}\right] \left[\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{m=0}^{j-1} \frac{a_{ij}\, e_{im}}{c^m\, m!\, (\delta + \lambda_i - cs)^{j-m}}\right],$$

un polinomio de grado menor o igual que $(n-1)$, que puede también ser determinado por las condiciones en (2.36), y determinado explícitamente por (2.37), si $\rho_1,\ \rho_2, ...,\ \rho_n$ son distintas.

■

2.6. Análisis de ϕ cuando $u = 0$

Ahora se resolverán problemas relacionados con la ruina cuando $u = 0$. Por simplicidad, asuma que $\rho_1,\ \rho_2, ...,\ \rho_n$ en el Teorema 2.15 son distintas. Primero, aplicando el Teorema del Valor Inicial y usando la ecuación (2.35),

$$\begin{aligned}
\phi(0) &= \lim_{s\to\infty} s\,\hat{\phi}(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s\left(\hat{w}(s) - \frac{q(s)}{\lambda^* + (\delta - cs)\,\beta(\delta - cs)}\right)}{[\gamma(s) - \hat{p}(s)]} \\
&= \lim_{s\to\infty} \frac{\hat{w}(s) - \frac{\sum_{j=1}^{n}\left\{\hat{w}(\rho_j)[\lambda^* + (\delta - c\,\rho_j)\,\beta(\delta - c\rho_j)]\prod_{i=1,\,i\neq j}^{n} \frac{s-\rho_i}{\rho_j - \rho_i}\right\}}{\lambda^* + (\delta - cs)\,\beta(\delta - cs)}}{\left[\frac{\prod_{i=1}^{n}(\delta + \lambda_i - cs)}{s[\lambda^* + (\delta - cs)\,\beta(\delta - cs)]} - \frac{\hat{p}(s)}{s}\right]} \\
&= \frac{-\sum_{j=1}^{n}\left\{\hat{w}(\rho_j)\,[\lambda^* + (\delta - c\rho_j)\,\beta(\delta - c\rho_j)]\prod_{i=1,\,i\neq j}^{n} \frac{1}{\rho_j - \rho_i}\right\}}{(-c)^n} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \hat{w}(\rho_j) \left[\frac{\lambda^* + (\delta - c\rho_j)\,\beta(\delta - c\rho_j)}{c^n \prod_{i=1,\,i\neq j}^{n}(\rho_i - \rho_j)}\right].
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Como $\hat{w}(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s\,x}\,\omega(x,y)\,p(x+y)\,dx\,dy$, entonces $\phi(0)$ puede ser reescrita como:

$$\phi(0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda^* + (\delta - c\rho_j)\,\beta(\delta - c\rho_j)}{c^n \prod_{i=1,\,i\neq j}^{n}(\rho_i - \rho_j)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\rho_j\,x}\,\omega(x,y)\,p(x+y)\,dx\,dy.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\phi(0) &= E\left[e^{-\delta T}\,\omega(U(T^-), \mid U(T) \mid) I(T<\infty) \mid U(0)=0\right] \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \omega(x,y)\, f_2(x,y \mid 0)\, dy\, dx,\end{aligned}$$

donde f_2 está dada como en la ecuación (1.16). Comparando estas dos fórmulas para $\phi(0)$,

$$f_2(x,y \mid 0) = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\lambda^* + (\delta - c\rho_j)\,\beta(\delta - c\rho_j)}{c^n \prod_{i=1,\, i\neq j}^{n} (\rho_i - \rho_j)} \right] e^{-\rho_j\, x}\, p(x+y), \qquad (2.41)$$

entonces

$$\begin{aligned}f_1(x \mid 0) &= \int_0^\infty f_2(x,y \mid 0)\, dy \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\lambda^* + (\delta - c\rho_j)\,\beta(\delta - c\rho_j))}{c^n \prod_{i=1,\, i\neq j}^{n} (\rho_i - \rho_j)} \right] e^{-\rho_j\, x}\, \bar{P}(x), \qquad (2.42)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}g(y) : &= g(y \mid 0) = \int_0^\infty f_2(x,y \mid 0)\, dx \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\lambda^* + (\delta - c\rho_j)\,\beta(\delta - c\rho_j)}{c^n \prod_{i=1,\, i\neq j} (\rho_i - \rho_j)} \right] \int_0^\infty e^{-\rho_j\, x}\, p(x+y)\, dy \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\lambda^* + (\delta - c\rho_j)\,\beta(\delta - c\rho_j)}{c^n \prod_{i=1,\, i\neq j} (\rho_i - \rho_j)} \right] T_{\rho_j}\, p(y), \qquad (2.43)\end{aligned}$$

donde T_r es un operador definido como:

$$T_r\, p(x) = \int_x^\infty e^{-r(y-x)}\, p(y)\, dy = \int_0^\infty e^{-r\,x}\, p(x+y)\, dx. \qquad (2.44)$$

La función $g(y)$ es una densidad defectuosa que desempeña un papel importante en este trabajo, su transformada de Laplace está dada por

$$
\begin{aligned}
\hat{g}(s) &= \int_0^\infty e^{-s\,y}\, g(y \mid 0)\, dy = T_s\, g(0) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\lambda^* + (\delta - c\rho_j)\,\beta(\delta - c\rho_j)}{c^n \prod_{i=1,\, i\neq j}^{n} (\rho_i - \rho_j)} \right] T_s\, T_{\rho_j}\, p(0) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\lambda^* + (\delta - c\rho_j)\,\beta(\delta - c\rho_j)}{c^n \prod_{i=1,\, i\neq j}^{n} (\rho_i - \rho_j)} \right] \left[\frac{T_{\rho_j}\, p(0) - T_s\, p(0)}{s - \rho_j} \right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\lambda^* + (\delta - c\rho_j)\,\beta(\delta - c\rho_j)}{c^n \prod_{i=1,\, i\neq j}^{n} (\rho_i - \rho_j)} \right] \left[\frac{\hat{p}(\rho_j) - \hat{p}(s)}{s - \rho_j} \right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\prod_{i=1}^{n} (\delta + \lambda_i - c\rho_j)}{c^n\,(s - \rho_j) \prod_{i=1,\, i\neq j}^{n} (\rho_i - \rho_j)} \right] \\
&\quad - \hat{p}(s) \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\prod_{i=1}^{n} (\delta + \lambda_i - c\rho_j)}{c^n\,(s - \rho_j) \prod_{i=1,\, i\neq j}^{n} (\rho_i - \rho_j)} \right].
\end{aligned}
$$

Usando la definición de $\beta(s)$ se sigue que

$$
\begin{aligned}
\hat{g}(s) &= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\prod_{i=1}^{n} [(\delta + \lambda_i - cs) + c(s - \rho_j)]}{c^n\,(s - \rho_j) \prod_{i=1,\, i\neq j}^{n} (\rho_i - \rho_j)} \right] \\
&\quad - \hat{p}(s) \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\lambda^* + \sum_{m=0}^{n-2} \beta_m [(\delta - cs) + c(s - \rho_j)]^m}{c^n\,(s - \rho_j) \prod_{i=1,\, i\neq j}^{n} (\rho_i - \rho_j)} \right],
\end{aligned}
$$

donde ρ_0, $\rho_1, ...,$ ρ_{n-2} son los coeficientes del polinomio $\beta(s)$ en (2.1).

Luego, como

$$
\prod_{i=1}^{n} [(\delta + \lambda_i - cs) + c(s - \rho_j)] = \sum_{l=0}^{n} \sigma_l\, c^{n-l}\, (s - \rho_j)^{n-l},
$$

con

$$
\begin{aligned}
\sigma_0 &= 1, \\
\sigma_1 &= \sum_{i=1}^{n} (\delta + \lambda_i - cs),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_2 &= \sum_{1 \le i < j \le n} (\delta + \lambda_i - cs)\,(\delta + \lambda_j - cs), ..., \\
\sigma_n &= \prod_{i=1}^{n} (\delta + \lambda_i - cs),
\end{aligned}
$$

entonces el primer término se simplifica a:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\prod_{i=1}^{n} [(\delta + \lambda_i - cs) + c\,(s - \rho_j)]}{c^n\,(s - \rho_j) \prod_{i=1,\, i \ne j}^{n} (\rho_i - \rho_j)} \right] \\
= & \sum_{l=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_l\, c^{n-l}\,(s - \rho_j)^{n-l}}{c^n\,(s - \rho_j) \prod_{i=1,\, i \ne j}^{n} (\rho_i - \rho_j)} \\
= & \; 1 - \frac{\prod_{i=1}^{n} (\delta + \lambda_i - cs)}{c^n \prod_{i=1}^{n} (\rho_i - s)},
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

donde la ecuación (2.45) se sigue de las siguientes identidades de interpolación, (para $n \ge 2$),

$$
\sum_{j=1}^{n} \frac{(s - \rho_j)^m}{\prod_{i=1,\, i \ne j} (\rho_i - \rho_j)} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad m = \; n-1, \\ 0, & \text{si} \quad m = \; 0,\; 1, \quad ..., \quad n-2, \\ -\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} (\rho_i - s)}, & \text{si} \quad m = \; -1. \end{cases}
\tag{2.46}
$$

Similarmente,

$$
\begin{aligned}
& -\hat{p}(s) \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\lambda^* + \sum_{m=0}^{n-2} \beta_m [(\delta - cs) + c\,(s - \rho_j)]^m}{c^n\,(s - \rho_j) \prod_{i=1,\, i \ne j}^{n} (\rho_i - \rho_j)} \right] \\
= & -\hat{p}(s) \left[\frac{\lambda^* + \sum_{m=0}^{n-2} \beta_m\,(\delta - cs)^m}{c^n \prod_{i=1}^{n} (\rho_i - s)} \right] \\
= & -\hat{p}(s) \left[\frac{\lambda^* + (\delta - cs)\,\beta(\delta - cs)}{c^n \prod_{i=1}^{n} (\rho_i - s)} \right].
\end{aligned}
$$

Finalmente, la transformada de Laplace de g es:

$$
\hat{g}(s) = 1 - \left[\frac{\prod_{i=1}^{n} (\delta + \lambda_i - cs) - \hat{p}(s)\,[\lambda^* + (\delta - cs)\,\beta(\delta - cs)]}{c^n \prod_{i=1}^{n} (\rho_i - s)} \right].
\tag{2.47}
$$

Elegir a $\omega(x, y) = 1$ implica que

$$\begin{aligned}
\phi(0) &= E\left[e^{-\delta T}\, I(T < \infty) \mid U(0) = 0\right] \\
&= \int_0^\infty g(y \mid 0)\, dy = \lim_{s \to 0} \hat{g}(s) \\
&= 1 - \left[\frac{\prod_{i=1}^n (\lambda_i + \delta) - [\lambda^* + \delta\, \beta(\delta)]}{c^n\, \rho_1\, \rho_2 \cdots \rho_n}\right].
\end{aligned}$$

Usando (2.1),

$$\begin{aligned}
\phi(0) &= 1 - \left[\frac{\prod_{i=1}^n (\lambda_i + \delta) - \prod_{i=1}^n (\delta + \lambda_i)\, \hat{k}(\delta)}{c^n\, \rho_1\, \rho_2 \cdots \rho_n}\right] \\
&= 1 - \left[\frac{\left(1 - \hat{k}(\delta)\right) \prod_{i=1}^n (\lambda_i + \delta)}{c^n\, \rho_1\, \rho_2 \cdots \rho_n}\right] < 1. \qquad (2.48)
\end{aligned}$$

Así, puede concluirse que

$$\begin{aligned}
\Psi(0) &= \lim_{\delta \to 0} E\left[e^{-\delta T}\, I(T < \infty) \mid U(0) = 0\right] \\
&= \lim_{\delta \to 0} \left[1 - \frac{\prod_{i=1}^n (\lambda_i + \delta) - \lambda^*}{c^n\, \rho_1\, \rho_2 \cdots \rho_n} + \frac{\sum_{m=0}^{n-2} \beta_m\, \delta^m}{c^n\, \rho_1\, \rho_2 \cdots \rho_n}\right] \\
&= 1 - \lim_{\delta \to 0} \left[\frac{\frac{\prod_{i=1}^n (\lambda_i + \delta) - \lambda^*}{\delta}}{\rho^*(0)\, \rho_n'(0)}\right] + \frac{\beta(0)}{\rho^*(0)\, \rho_n'(0)} \\
&= 1 - \frac{\lambda^* \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i}\right) - \beta(0)}{\rho^*(0)\, \rho_n'(0)} \\
&= 1 - \frac{\lambda^*\, [c\, E\,[W] - E\,[X]]}{\rho^*(0)} < 1, \qquad (2.49)
\end{aligned}$$

donde $\rho^*(0) = \prod_{i=1}^{n-1} \rho_i(0)$.

El último paso se sigue del hecho de que

$$E\,[W] = -\hat{k}'(0) = \frac{\left[\lambda^* \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i}\right) - \beta(0)\right]}{\lambda^*},$$

y que

$$\rho_n'(0) = \frac{E[W]}{[c\,E\,[W] - E\,[X]]},$$

por diferenciación con respecto a δ en ambos lados de

$$\frac{1}{\hat{k}(\delta - c\,\rho_n(\delta))} = \hat{p}(\rho_n(\delta)),$$

haciendo $\delta \to 0$ y notando que $\lim_{\delta\to 0} \rho_n(\delta) \to 0$.

2.7. Ecuación de Renovación Defectuosa

En esta sección se presenta una ecuación de renovación defectuosa para el caso general en el que, si se condiciona con respecto al primer momento donde el superávit cae por debajo del nivel inicial $u \geq 0$, resulta que

$$\begin{aligned}
\phi(0) &= \int_0^u \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta\,t}\,\phi(u-y)\,f_3(x,y,t \mid 0)\,dt\,dx\,dy + \\
&\quad \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta\,t}\,\omega(x+u,y-u)\,f_3(x,y,t \mid 0)\,dt\,dx\,dy \\
&= \int_0^u \int_0^\infty \phi(u-y)\,f_2(x,y \mid 0)\,dx\,dy + \\
&\quad \int_u^\infty \int_0^\infty \omega(x+u,y-u)\,f_2(x,y \mid 0)\,dx\,dy \\
&= \int_0^u \phi(u-y)\,g(y)\,dy + H(u), \qquad (2.50)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
H(u) &= \int_u^\infty \int_0^\infty \omega(x+u,y-u)\,f_2(x,y \mid 0)\,dx\,dy,\ u \geq 0, \\
&= \int_0^\infty \int_u^\infty \omega(s,t)\,f_2(s-u,t+u \mid 0)\,ds\,dt.
\end{aligned}$$

Luego, sustituyendo el valor de $f_2(s-u,t+u \mid 0)$,

$$
\begin{aligned}
H(u) &= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\lambda^{*}+(\delta-c\rho_j)\,\beta(\delta-c\rho_j)}{c^{n}\prod_{i=1,\,i\neq j}^{n}(\rho_i-\rho_j)}\right]\int_{u}^{\infty}e^{-\rho_j(s-u)}\\
&\quad \int_{0}^{\infty}\omega(s,t)\,f(s+t)\,dt\,ds\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\lambda^{*}+(\delta-c\rho_j)\,\beta(\delta-c\rho_j)}{c^{n}\prod_{i=1,\,i\neq j}^{n}(\rho_i-\rho_j)}\right]T_{\rho_j}\,w(u).
\end{aligned}
$$

Considerando nuevamente $\omega(x,y)=1$, se obtiene:

$$
w(u)=\int_{u}^{\infty}\omega(u,x-u)\,p(x)\,dx=\bar{P}(u)=T_0\,p(u),
$$

y

$$
\begin{aligned}
H(u) &= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\lambda^{*}+(\delta-c\rho_j)\,\beta(\delta-c\rho_j)}{c^{n}\prod_{i=1,\,i\neq j}(\rho_i-\rho_j)}\right]T_{\rho_j}\,T_0\,p(u)\\
&= T_0\,g(u)=\int_{u}^{\infty}g(y)\,dy,
\end{aligned}
$$

así, la transformada de Laplace de T,

$$
\phi_T(u):=E\left[e^{-\delta T}\,I(T<\infty)\mid U(0)=u\right],
$$

satisface la siguiente ecuación de renovación defectuosa:

$$
\phi_T(u)=\int_{0}^{u}\phi_T(u-y)\,g(y)\,dy+\int_{u}^{\infty}g(y)\,dy,\ u\geq 0, \tag{2.51}
$$

además, si $\delta=0$, esta última ecuación produce:

$$
\Psi(u)=\int_{0}^{u}\Psi(u)\,g_0(y)\,dy+\int_{u}^{\infty}g_0(y)\,dy,\ u\geq 0, \tag{2.52}
$$

donde $g_0(y)$ puede ser obtenida tomando límites. Como consecuencia de que $\lim_{\delta_i\to 0}\rho_i(\delta)\to\rho_i(0)$ y $\lim_{\delta_i\to 0}\rho_n(\delta)\to\rho_n(0)=0$, entonces

$$
\begin{aligned}
g_0(y) &= \lim_{\delta\to 0} g(y) = \lim_{\delta\to 0} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\lambda^* + (\delta - c\rho_j)\,\beta(\delta - c\rho_j)}{c^n \prod_{i=1,\, i\neq j}^{n} (\rho_i - \rho_j)} \right] T_{\rho_j}\, p(y) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{\lambda^* - c\,\rho_j(0)\,\beta(-c\,\rho_j(0))}{c^n\,(-\rho_j(0)) \prod_{i=1,\, i\neq j}^{n-1} [\rho_i(0) - \rho_j(0)]} \right] T_{\rho_j(0)}\, p(y) + \frac{\lambda^*\, T_0\, p(y)}{c^n\, \rho^*(0)} \\
&= -\frac{\lambda^*}{c^n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{T_{\rho_j(0)}\, p(y)}{\rho_j(0) \prod_{i=1,\, i\neq j}^{n-1} [\rho_i(0) - \rho_j(0)]} + \frac{\lambda^*\, T_0\, p(y)}{c^n\, \rho^*(0)} \\
&\quad + \frac{1}{c^{n-1}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\beta(-c\rho_j)\, T_{\rho_j(0)}\, p(y)}{\prod_{i=1,\, i\neq j}^{n-1} [\rho_i(0) - \rho_j(0)]} \\
&= \frac{\lambda^*}{c^n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\left[\frac{T_0\, p(y) - T_{\rho_j(0)}\, p(y)}{\rho_j(0)} \right]}{\prod_{i=1,\, i\neq j}^{n-1} [\rho_i(0) - \rho_j(0)]} + \frac{1}{c^{n-1}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\beta(-c\rho_j)\, T_{\rho_j(0)}\, p(y)}{\prod_{i=1,\, i\neq j}^{n-1} [\rho_i(0) - \rho_j(0)]} \\
&= \frac{\lambda^*}{c^n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{T_{\rho_j(0)}\, \bar{P}(y)}{\prod_{i=1,\, i\neq j}^{n-1} [\rho_i(0) - \rho_j(0)]} + \frac{1}{c^{n-1}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\beta(-c\rho_j)\, T_{\rho_j(0)}\, p(y)}{\prod_{i=1,\, i\neq j}^{n-1} [\rho_i(0) - \rho_j(0)]},
\end{aligned}
$$

donde el penúltimo paso se sigue de (2.46). Note que $T_{\rho_j(0)}\, T_0\, p(y) = T_{\rho_j(0)}\, \bar{P}(y)$, mientras que $\int_0^\infty g_0(y)\, dy = \Psi(0) < 1$ está dada por (2.49).

2.8. Distribuciones con Descuento

En esta sección se consideran, la distribución conjunta con descuento y la distribución marginal con descuento de $U(T^-)$ y $\mid U(T) \mid$, empleando la ecuación de renovación defectuosa (2.50).

Teorema 2.17 *Para $x \geq 0$, $y \geq 0$, $u \geq 0$,*

$$
f_2(x, y \mid u) = \int_0^u f_2(x, y \mid u - z)\, g(z)\, dz + I(u < x)\, f_2(x - u, u + y \mid 0), \quad (2.53)
$$

donde $f_2(x - u, u + y \mid 0)$ puede deducirse de (2.41).

Demostración:

De la ecuación (2.50) se tiene que

$$\phi(u) = \int_0^u \phi(u-y)\, g(y)\, dy + \int_u^\infty \int_0^\infty \omega(x+u, y-u)\, f_2(x, y \mid 0)\, dx\, dy.$$

Escogiendo $\omega(x_1, x_2) = I(x_1 = x, x_2 = y)$, se ha visto en el Capítulo 1 que, $\phi(u)$ da $f_2(x, y \mid u)$, y que, ésta última, satisface una ecuación de renovación:

$$f_2(x, y \mid u) = \int_0^u f_2(x, y \mid u-z)\, g(z)\, dz + \frac{\lambda}{c} e^{-\beta(x-u)}\, p(x+y)\, I(x > u).$$

Note que, el segundo sumando puede ser reescrito en términos de $f_2(x_1, y_1 \mid 0)$, donde

$$f_2(x_1, y_1 \mid 0) = \frac{\lambda}{c} e^{-\beta\, x_1}\, p(x_1 + y_1),$$

y en este caso, $x_1 = x - u$ y $y_1 = u + y$. Por lo tanto,

$$f_2(x, y \mid u) = \int_0^u f_2(x, y \mid u-z)\, g(z)\, dz + I(u < x)\, f_2(x-u, u+y \mid 0).$$

■

Por conveniencia de notación , sea ξ_δ tal que

$$\frac{1}{1+\xi_\delta} = \int_0^\infty g(y)\, dy = \phi_T(0),$$

y ξ_0 tal que

$$\frac{1}{1+\xi_0} = \int_0^\infty g_0(y)\, dy = \Psi(0).$$

Teorema 2.18

$$f_1(x \mid u) = \begin{cases} \frac{1+\xi_\delta}{\xi_\delta} \sum_{j=1}^{n} b_j\, e^{-\rho_j\, x}\, \bar{P}(x) \left[e^{\rho_j\, x}\, \Psi_j(u-x) - \Psi_j(u) \right], & 0 \le x < u, \\ \frac{1+\xi_\delta}{\xi_\delta} \sum_{j=1}^{n} b_j\, e^{-\rho_j\, x}\, \bar{P}(x) \left[e^{\rho_j\, x}\, \Psi_j(u) \right], & x \ge u, \end{cases} \tag{2.54}$$

donde

$$b_j = \frac{\lambda^* + (\delta - c\rho_j)\, \beta(\delta - c\rho_j)}{c^n \prod_{i=1,\, i\neq j}^{n} (\rho_i - \rho_j)},$$

y

$$\Psi_j(u) := \phi_T(u) + \int_0^u \phi_T(u-t)\, \rho_j\, e^{\rho_j\, t}\, dt.$$

Demostración:

Si $\omega(x,y) = e^{-s\,x}$, entonces

$$\phi(u) = E\left[e^{-\delta\, T}\, e^{-s\, U(T^-)}\, I(T<\infty) \mid U(0)=u\right]$$

es la transformada de Laplace con descuento de $U(T^-)$ en s. Entonces

$$w(x) = \int_x^\infty \omega(x, y-x)\, p(y)\, dy = \int_x^\infty e^{-s\,x}\, p(y)\, dy = e^{-s\,x}\, \bar{P}(x),$$

y así, por (2.50) se tiene que

$$\phi(u) = \frac{1}{(1+\xi_\delta)} \int_0^u \phi(u-y)\, [(1+\xi_\delta)\, g(y)]\, dy + \frac{1}{(1+\xi_\delta)}\, [(1+\xi_\delta)\, H(u)]\,,$$

donde

$$H(u) = \sum b_j\, e^{\rho_j\, u} \int_u^\infty e^{-(\rho_j+s)\, x}\, \bar{P}(x)\, dx.$$

Usando el Teorema 2.1 de Lin y Willmot [16],

$$\phi(u) = \frac{1}{\xi_\delta} \int_0^u [1-\phi_T(u-x)]\, dH(x) + \frac{1}{1+\xi_\delta}\, [1-\phi_T(u)]\,,\ u \geq 0.$$

Como $\phi(u) = \int_0^\infty e^{-s\,x}\, f_1(x \mid u)\, dx$, sustituyendo $H(u)$ se obtiene el resultado.

■

2.9. Tamaño de las Reclamaciones

En esta sección, se asume que la función de densidad p del tamaño de la reclamación pertenece a R_f^+, i.e., para $m \in \mathbb{N}^+$,

$$\hat{p}(s) = \frac{Q_{m-1}(s)}{Q_m(s)}, \tag{2.55}$$

con $Q_m(0) = Q_{m-1}(0)$, y $\Re(s) \in (h_X, \infty)$, donde la abscisa de la función holomorfa h_X de la variable aleatoria del tamaño de la reclamación X está definida como:

$$h_X := \text{ínf}\{s \in \mathbb{R} : E\left[e^{-s\,X}\right] < \infty\}.$$

Q_m es un polinomio de grado m con coeficiente principal 1 y Q_{m-1} es un polinomio de grado menor o igual que $m-1$. Además, como $\hat{p}(s)$ es finita para toda s, con $\Re(s) > 0$, la ecuación $Q_m(s) = 0$ no tiene raíces con partes reales negativas.

Ahora es turno de derivar $\phi_T(u)$. Tomando la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación de renovación defectuosa (2.51) y usando (2.47) se obtiene:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_T(s) &= \frac{\phi_T(0) - \hat{g}(s)}{s\,[1 - \hat{g}(s)]} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n}(\delta + \lambda_i - cs) - \hat{p}(s)\,[\lambda^* + (\delta - cs)\,\beta(\delta - cs)]}{s\{\prod_{i=1}^{n}(\delta + \lambda_i - cs) - \hat{p}(s)\,[\lambda^* + (\delta - cs)\,\beta(\delta - cs)]\}} - \\ &\quad \frac{c^n\,[1 - \phi_T(0)]\prod_{i=1}^{n}(\rho_i - s)}{s\{\prod_{i=1}^{n}(\delta + \lambda_i - cs) - \hat{p}(s)\,[\lambda^* + (\delta - cs)\,\beta(\delta - cs)]\}}.\end{aligned} \tag{2.56}$$

Cuando p es una densidad racional como en (2.55), $\hat{\phi}_T(s)$ puede ser transformada en una expresión racional y se tienen los siguientes resultados.

Denote por

$$q_{m-1}(s) = \frac{[\prod_{i=1}^{m}(s + R_1) - \phi_T(0)\,Q_m(s)]}{s},$$

un polinomio de grado $m-1$, y sea

$$r_i = \frac{q_{m-1}(-R_i)}{\prod_{j=1,\,j\neq i}^{m}(R_j - R_i)} = \frac{Q_m(-R_i)}{Q_m(0)}\prod_{j=1,\,j\neq i}^{m}\frac{R_j}{(R_j - R_i)},\ \textit{para}\ i = 1,\,2, ...,\,m,$$

donde los valores $-R_i$, con $\Re(R_i) > 0$, son todas las raíces con parte real negativa de la ecuación $Q_{m,n}(s) = 0$, donde

$$Q_{m,n}(s) := Q_m(s)\left[\prod_{i=1}^{n}(\delta + \lambda_i - cs)\right] - Q_{m-1}(s)\,[\lambda^* + (\delta - cs)\,\beta(\delta - cs)]\,.$$

Teorema 2.19 *Si la transformada de Laplace $\hat{p}(s)$ de la densidad de la reclamación está definida como en (2.55), entonces*

$$\hat{\phi}_T(s) = \frac{q_{m-1}(s)}{(s+R_1)\,(s+R_2)\cdots(s+R_m)}. \tag{2.57}$$

Más aún, si $R_1,\ R_2, ...,\ R_m$ son distintos, entonces

$$\hat{\phi}_T(s) = \sum_{i=1}^{m} \frac{r_i}{(s+R_i)}, \tag{2.58}$$

y,

$$\phi_T(u) = \sum_{i=1}^{m} r_i\, e^{-R_i\, u}. \tag{2.59}$$

Demostración:

Sustituyendo $\hat{p}(s) = \frac{Q_{m-1}(s)}{Q_m(s)}$ en (2.56) y multiplicando numerador y denominador por $Q_m(s)$, entonces

$$\hat{\phi}_T(s) = \frac{Q_{m,n}(s) - c^n\,[1-\phi_T(0)]\,Q_m(s)\prod_{i=1}^{n}(\rho_i - s)}{s\,Q_{m,n}(s)},$$

donde $Q_{m,n}(s)$ es un polinomio de grado $n+m$ con coeficiente principal $(c)^n$. En este caso, la ecuación de Lundberg:

$$\frac{\prod_{i=1}^{m}(\delta+\lambda_i - cs)}{[\lambda^* + (\delta - cs)\,\beta(\delta - cs)]} = \frac{Q_{m-1}(s)}{Q_m(s)},$$

es equivalente a $Q_{m,n}(s)=0$, para $\Re(s) > h_X$. Ésta tiene n raíces con parte real positiva y una raíz con parte real negativa, suponga que se trata de $\rho_1,\ \rho_2, ...,\ \rho_n,\ -R$, respectivamente, y donde $h_X < -R < 0$. Mientras que la ecuación $Q_{m,n}(s) = 0$ tiene $n+m$ raíces, que son ρ_i, con $\Re(\rho_i) > 0$, para $i = 1,\ 2, ...,\ n$, y $-R_i$, con $\Re(R_i) > 0$, para $i = 1,\ 2, ...,\ m$, donde $R = \min\{\Re(R_i);\ i = 1,\ 2, ...,\ m\}$. Ahora $Q_{m,n}(s)$ puede expresarse como:

$$Q_{m,n}(s) = c^n \prod_{i=1}^{m}(s+R_i)\prod_{j=1}^{n}(\rho_j - s),$$

sustituyendo en la expresión de $\hat{\phi}_T(s)$ y anulando factores comunes se obtiene:

$$\hat{\phi}_T(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(s+R_i) - [1-\phi_T(0)]\, Q_m(s)}{s\prod_{i=1}^{m}(s+R_i)}.$$

Ya que $s = 0$ es una singularidad evitable, el numerador anterior debe ser ser cero si $s = 0$, i.e., $1 - \phi_T(0) = \frac{R_1 R_2 \cdots R_m}{Q_m(0)}$ y por lo tanto,

$$q_{m-1}(s) := \frac{\prod_{i=1}^{m}(s+R_i) - [1-\phi_T(0)]\; Q_m(s)}{s}$$

es un polinomio de grado menor o igual que $m - 1$.

Si R_1, $R_2, ...,$ R_m son distintas, entonces por fracciones parciales,

$$\hat{\phi}_T(s) = \frac{q_{m-1}(s)}{\prod_{i=1}^{m}(s+R_i)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{r_i}{(s+R_i)},$$

donde r_i es considerado como antes.

Invirtiendo la transformación, resulta que $\phi_T(u) = \sum\limits_{i=1}^{m} r_i\, e^{-R_i\, u}$.

■

Observación:
Si $\hat{p}(s)$ está definida como en (2.55), $\hat{g}(s)$ se simplifica de la misma manera como:

$$\hat{g}(s) = \frac{Q_m(s) - \prod_{i=1}^{n}(s+R_i)}{Q_m(s)}. \tag{2.60}$$

Entonces puede observarse que g es el mismo tipo de función que p, la densidad de la reclamación, por fracciones parciales.

Capítulo 3

Una generalización del proceso clásico de riesgo

En este capítulo se consideran cantidades relacionadas con la ruina usando la función de Gerber-Shiu, funciones de penalidad esperada con descuento en el modelo clásico de riesgo, y se estudia una clase del modelo de Sparre Andersen, con tiempos de espera con distribución generalizada Erlang(n) en la presencia de una barrera de dividendos constante. El análisis está enfocado en la evaluación de la función de penalidad esperada con descuento en la ruina, $\phi(u)$, donde u es la reserva inicial.

La definición del modelo de riesgo de Sparre Andersen está dado en la sección (1.4). En este Capítulo se asume que los tiempos de espera de las reclamaciones tienen distribución generalizada Erlang(n), con función de densidad k dada por (2.2).

3.1. Una ecuación íntegro-diferencial para la función $\phi(u)$

El propósito de esta sección es presentar una ecuación íntegro-diferencial para la función $\phi(u)$. Suponga que cada una de las variables aleatorias de los tiempos de inter-reclamaciones $\{V_j\}$ es la suma de n variables aleatorias i.i.d. Entonces

$$V = W_1 + W_2 + ... + W_n,$$

donde las W_i están distribuídas exponencialmente con parámetro $\lambda_i = \lambda$.

Defina

$$\phi_j(u) = E\left[e^{-\delta T}\omega(U(T^-), \mid U(T) \mid) I(T < \infty) \mid \Lambda_j, U(0) = u\right], \, u \geq 0, \quad (3.1)$$

para $j = 0, 1, ..., n-1$ y

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \{W_1 > \tau\} \\ \Lambda_j &= \{W_1 + W_2 + ... + W_j \leq \tau < W_1 + W_2 + ... + W_{j+1}\}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

para $j = 1, 2, ..., n-1$.

Note que la función $\phi(u)$ es la misma que $\phi_0(u)$ definida por (3.1) debido a la propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial de W_1.

Dado el evento Λ_j definido por (3.2), se calcula la esperanza condicional de la penalidad con descuento por condicionar sobre el valor de $W_1 + W_2 + ... + W_{j+1} - \tau$. A causa de que la distribución condicional de esta variable aleatoria es idéntica a la distribución exponencial de W_{j+1}, puede observarse que

$$\phi_j(u) = \lambda_{j+1} \int_0^\infty e^{-(\lambda_{j+1}+\delta)t} \, \phi_{j+1}(u + c\,t) \, dt, \; j = 1, 2, ..., n-2. \quad (3.3)$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \phi_{n-1}(u) &= \lambda_n \int_0^\infty e^{-(\lambda_n+\delta)t} \left[\int_0^{u+c\,t} \phi(u + c\,t - x) \, p(x) \, dx\right] dt + \\ & \quad \lambda_n \int_0^\infty e^{-(\lambda_n+\delta)t} \left[\int_{u+c\,t}^\infty \omega(u + c\,t, x - u - c\,t) \, p(x) \, dx\right] dt, \end{aligned}$$

que debe ser comparada con (3.3).

Con $z = u + c\,t$, las ecuaciones (3.3) y (3.4) se convierten, respectivamente, en:

$$\phi_j(u) = \frac{\lambda_{j+1}}{c} \int_u^\infty e^{-(\lambda_{j+1}+\delta)\left(\frac{z-u}{c}\right)} \, \phi_{j+1} \, dz, \quad (3.4)$$

y

$$\begin{aligned}\phi_{n-1}(u) &= \frac{\lambda_n}{c}\int_u^{\infty} e^{-(\lambda_n+\delta)\left(\frac{z-u}{c}\right)}\left[\int_0^z \phi(z-x)\,p(x)\,dx\right]dz + \\ &\quad \frac{\lambda_n}{c}\int_u^{\infty} e^{-(\lambda_n+\delta)\left(\frac{z-u}{c}\right)}\left[\int_z^{\infty} \omega(z,x-z)\,p(x)\,dx\right]dz. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Diferenciando las ecuaciones (3.4) y (3.5) con respecto a u,

$$\phi_j'(u) = \frac{\lambda_{j+1}+\delta}{c}\phi_j(u) - \frac{\lambda_{j+1}}{c}\phi_{j+1}(u), \tag{3.6}$$

y

$$\phi_{n-1}'(u) = \frac{\lambda_n+\delta}{c}\phi_{n-1}(u) - \frac{\lambda_n}{c}\int_0^u \phi(u-x)\,p(x)\,dx - \frac{\lambda_n}{c}\int_u^{\infty}\omega(u,x-u)\,p(x)\,dx, \tag{3.7}$$

respectivamente. Así, se tiene un sistema de n ecuaciones para n funciones $\phi(u)$, $\phi_1(u), ..., \phi_{n-1}(u)$. Luego, (3.6) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned}\lambda_{j+1}\,\phi_{j+1}(u) &= (\lambda_{j+1}+\delta)\,\phi_j(u) - c\,\phi_j'(u) \\ &= [(\lambda_{j+1}+\delta)\,I - cD]\,\phi_j(u),\end{aligned}$$

o bien,

$$\phi_{j+1}(u) = \left[\left(1+\frac{\delta}{\lambda_{j+1}}\right)I - \frac{c}{\lambda_{j+1}}D\right]\phi_j(u), \tag{3.8}$$

donde I y D denotan el **operador identidad** y el **operador diferencial**, respectivamente.

Se sigue de la sustitución sucesiva que, para $0 \leq h \leq k \leq n-1$,

$$\phi_k(u) = \left\{\prod_{j=h}^{k-1}\left[\left(1+\frac{\delta}{\lambda_{j+1}}\right)I - \frac{c}{\lambda_{j+1}}D\right]\right\}\phi_h(u). \tag{3.9}$$

Aplicando (3.9), con $h=0$, y $k=n-1$, a la ecuación (3.7), se produce la ecuación íntegro-diferencial deseada,

$$\gamma(D)\,\phi(u) = \int_0^u \phi(u-x)\,p(x)\,dx + \int_u^{\infty}\omega(u,x-u)\,p(x)\,dx,\ u>0, \tag{3.10}$$

donde

$$\gamma(\xi) = \prod_{j=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{\delta}{\lambda_j} \right) - \frac{c}{\lambda_j} \xi \right],$$

es el n-ésimo grado polinomial de γ.

Considere

$$w(u) \int_u^{\infty} \omega(u, x-u)\, p(x)\, dx = \int_0^{\infty} \omega(u, y)\, p(u+y)\, dy, \tag{3.11}$$

entonces la ecuación íntegro-diferencial (3.10) puede ser escrita como:

$$\gamma(D)\, \phi(u) = \phi * p + w. \tag{3.12}$$

Con $n = 2$ y $\lambda_1 = \lambda = 2$, la ecuación anterior corresponde a la ecuación (2.2) presentada en [4] y a la ecuación (2.1) de [8], entre otras. Gerber y Shiu en [13], muestran que la ecuación íntegro-diferencial (3.12) puede ser resuelta a través de una ecuación de renovación defectuosa usando dos métodos diferentes: un argumento de renovación de una fórmula clave, procedente de las transformadas de Laplace, o por el uso de diferencias divididas y el operador T_r definido en la sección (1.6) del capítulo 1.

3.2. Modelo de riesgo generalizado Erlang(n) con una barrera de dividendos constante

En esta sección se considera la función esperada de penalidad con descuento para un modelo de riesgo de Sparre Andersen, cuyos tiempos de espera de las reclamaciones tienen distribución generalizada Erlang(n), bajo una barrera de dividendos constante en el nivel $b \geq u$. Si el proceso alcanza este nivel b, entonces los dividendos son pagados continuamente de las primas, hasta que ocurra una nueva reclamación.

Sea U_b el proceso de riesgo bajo esta estrategia de barrera y suponga que $U_b(0) = u$. Entonces

$$dU_b(t) = \begin{cases} c\, dt - dS(t), & U_b(t) < b, \\ -dS(t), & U_b(t) = b. \end{cases} \tag{3.13}$$

Defina $T_b = \text{ínf}\{t : U_b(t) < 0\}$, el tiempo de ruina correspondiente al proceso U_b, y para una función de penalidad no negativa $\omega(x,y)$, con $0 \leq x, y < \infty$, defina, para $\delta > 0$,

$$\phi_b(u) = E\left[e^{-\delta T_b}\,\omega(U(T_b^-), |\,U(T)\,|)\,I(T_b < \infty) \mid U_b(0) = u\right],\ 0 \leq u < b,$$

la función de penalidad con descuento de Gerber-Shiu. En particular, si $\omega(x,y) = 1$, defina la función

$$\phi_{T_b}(u) = E\left[e^{-\delta T_b}\,I(T_b < \infty) \mid U_b(0) = u\right],\ 0 \leq u \leq b, \tag{3.14}$$

la transformada de Laplace del tiempo de ruina T_b con respecto a δ.

El primer resultado muestra que la ecuación íntegro-diferencial (1.64) para el modelo clásico de riesgo con una barrera de dividendos constante, puede ser extendida para el proceso de riesgo generalizado Erlang.

Sea $k_n(t;\,\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, la función de densidad generalizada Erlang(n) con parámetros $\lambda_1,\ \lambda_2, ...,\ \lambda_n$. Entonces

$$k_n(t;\,\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n}\left[\prod_{j=1,\,j\neq i}\frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i}\right]\lambda_i\,e^{-\lambda_i\,t}. \tag{3.15}$$

Note que,

$$k_n'(t;\,\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \lambda_1\left[k_{n-1}(t;\,\lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n) - k_n(t;\,\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)\right], \tag{3.16}$$

en efecto, por inducción sobre n se tiene que

para $n = 1$,

$$\begin{aligned} k_1(t;\,\lambda_1) &= \lambda_1\,e^{-\lambda_1\,t}, \\ k_1'(t;\,\lambda_1) &= \lambda_1\left[-\lambda_1\,e^{-\lambda_1\,t}\right], \end{aligned}$$

y supongamos que $k_0(t;\,\emptyset) = 0$.

Para $n = 2$,

$$k_2(t;\,\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\lambda_1\,e^{-\lambda_1\,t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_2\,e^{-\lambda_2\,t},$$

$$\begin{aligned} k_2'(t;\,\lambda_1,\lambda_2) &= \lambda_1 \left[-\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\lambda_1\, e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_2\, e^{-\lambda_2 t} \right] \\ &= \lambda_1 \left[k_1(t;\,\lambda_2) - k_2(t;\,\lambda_1,\lambda_2) \right]. \end{aligned}$$

Suponga que la fórmula (3.16) es válida para n, observe ahora que, para $n+1$,

$$\begin{aligned} k_{n+1}(t;\,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1}\left[\prod_{j=1,\,j\neq i}^{n+1}\frac{\lambda_j}{\lambda_j-\lambda_i}\right]\lambda_i\, e^{-\lambda_i t}, \\ k_{n+1}'(t;\,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{n+1}) &= \lambda_1 \left\{ \sum_{i=2}^{n+1}\left[\prod_{j=2,\,j\neq i}^{n+1}\frac{\lambda_j}{\lambda_j-\lambda_i}\right]\lambda_i\, e^{-\lambda_i t} + \right. \\ & \left[\prod_{j=2}^{n+1}\frac{\lambda_j}{\lambda_j-\lambda_1}\right]\lambda_1\, e^{-\lambda_1 t} - \\ & \sum_{i=2}^{n+1}\left[\prod_{j=2,\,j\neq i}^{n+1}\frac{\lambda_j}{\lambda_j-\lambda_i}\right]\lambda_i\, e^{-\lambda_i t} + \\ & \left. \left[\prod_{j=1,\,j\neq i}^{n+1}\frac{\lambda_j}{\lambda_j-\lambda_1}\right]\lambda_1\, e^{-\lambda_1 t} \right\} \\ &= \lambda_1 \left[k_n(t;\,\lambda_2,\lambda_3,...,\lambda_{n+1}) - \right. \\ & \left. k_{n+1}(t;\,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{n+1}) \right], \end{aligned}$$

como se quería demostrar. Análogamente, también se cumple que

$$k_{n-1}'(t;\,\lambda_2,\lambda_3,...,\lambda_n) = \lambda_2 \left[k_{n-2}(t;\,\lambda_3,\lambda_4,...,\lambda_n) - k_{n-1}(t;\,\lambda_2,\lambda_3,...,\lambda_n) \right]. \tag{3.17}$$

El siguiente teorema muestra que la función de penalidad $\phi_b(u)$ satisface una ecuación íntegro-diferencial de n-ésimo orden con ciertas condiciones de frontera.

Teorema 3.1 *Sean* I *y* D*, que denotan los operadores identidad y diferencial, respectivamente. Entonces, bajo la suposición de que los tiempos de espera de las reclamaciones tienen distribución generalizada Erlang(n),* $\phi_b(u)$ *satisface la siguiente ecuación para* $0 \le u \le b < \infty$*:*

$$\left\{ \prod_{j=1}^{n} \left[\left(1+\frac{\delta}{\lambda_j}\right)\mathrm{I} - \frac{c}{\lambda_j}\mathrm{D} \right] \right\} \phi_b(u) = \int_0^u \phi_b(u-x)\, p(x)\, dx + w(u), \tag{3.18}$$

donde $w(u) = \int_u^\infty \omega(u, x-u)\, p(x)\, dx$ *y con condiciones frontera,*

$$\phi_b^{(k)}(u) = 0,\ k = 1,\ 2, ...,\ n. \tag{3.19}$$

Demostración:

Condicionando sobre el tiempo y el monto de la primera reclamación, se tiene, para $0 \leq u \leq b$, que

$$\begin{aligned} \phi_b(u) &= \int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-\delta\, t}\, \gamma_b(t)\, k_n(t;\ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)\, dt + \\ & \int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-\delta\, t}\, \gamma_b(b)\, k_n(t;\ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)\, dt, \end{aligned} \tag{3.20}$$

donde

$$\gamma_b(t) = \int_0^t \phi_b(t-y)\, p(y)\, dy + w(t),\ 0 \leq t \leq b. \tag{3.21}$$

Renombrar a la variable t en la primera integral en (3.20) como $t = \frac{t-u}{c}$ implica que

$$\begin{aligned} \phi_b(u) &= \frac{1}{c}\int_u^b e^{-\left(\frac{\delta}{c}\right)(t-u)}\, k_n\left(\frac{t-u}{c};\ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right) \gamma_b(t)\, dt + \\ & \gamma_b(b) \int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-\delta t}\, k_n(t;\ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)\, dt. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Sea $\lambda^* = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ y

$$\tilde{k}_n(t;\ \lambda_1+\delta, \lambda_2+\delta, ..., \lambda_n+\delta) = \sum_{i=1}^n \left[\prod_{j=1,\, j\neq i} \frac{(\lambda_j+\delta)}{\lambda_j - \lambda_i}\right] (\lambda_i+\delta)\, e^{-(\lambda_i+\delta)\, t},$$

que es una nueva densidad generalizada Erlang(n) con parámetros $\lambda_1+\delta,\ \lambda_2+\delta, ...,\ \lambda_n+\delta$, entonces

$\frac{\lambda^*}{\prod_{i=1}^n(\lambda_i+\delta)} \tilde{k}_n(t;\ \lambda_1+\delta, \lambda_2+\delta, ..., \lambda_n+\delta)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \left[\prod_{j=1,\, j\neq i}^n \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i}\right] \lambda_i\, e^{-(\lambda_i+\delta)\, t} \\ &= e^{-\delta\, t}\, k_n(t;\ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n). \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación (3.22) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} c\,\phi_b(u) &= \frac{\lambda^*}{\prod_{i=1}^n(\lambda_i+\delta)}\left\{\int_u^b \tilde{k}_n\left(\frac{t-u}{c};\,\lambda_1+\delta,\lambda_2+\delta,...,\lambda_n+\delta\right)\gamma_b(t)\,dt\right. \\ &\quad \left.+\,c\,\gamma_b(b)\left[1-\tilde{K}_n\left(\frac{b-u}{c};\,\lambda_1+\delta,\lambda_2+\delta,...,\lambda_n+\delta\right)\right]\right\}, \qquad (3.23) \end{aligned}$$

donde $\tilde{K}_n$ es la función de distribución de $\tilde{k}_n$. Luego, note que,

$c\left[D-\left(\frac{\lambda_1+\delta}{c}\right)I\right]\phi_b(u)$

$$\begin{aligned} &= \left[\prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\delta}\right]\left\{\left(-\frac{\lambda_1+\delta}{c}\right)\right. \\ &\quad \int_u^b \tilde{k}_{n-1}\left(\frac{t-u}{c};\,\lambda_2+\delta,\lambda_3+\delta,...,\lambda_n+\delta\right)\gamma_b(t)\,dt - \\ &\quad \left.\gamma_b(t)\,(\lambda_1+\delta)\left[1-\tilde{K}_n\left(\frac{b-u}{c};\,\lambda_2+\delta,\lambda_3+\delta,...,\lambda_n+\delta\right)\right]\right\}. \qquad (3.24) \end{aligned}$$

Procediendo de manera recursiva, para $1\le k\le n-1$,

$c\left\{\prod_{i=1}^k\left[D-\left(\frac{\lambda_1+\delta}{c}\right)I\right]\right\}\phi_b(u)$

$$\begin{aligned} &= \left[\prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\delta}\right]\left\{\prod_{i=1}^k\left(-\frac{\lambda_1+\delta}{c}\right)c\,\gamma_b(t)\right. \\ &\quad \left[1-\tilde{K}_{n-k}\left(\frac{b-u}{c};\,\lambda_{k+1}+\delta,\lambda_{k+2}+\delta,...,\lambda_n+\delta\right)\right]+\prod_{i=1}^k\left(-\frac{\lambda_1+\delta}{c}\right) \\ &\quad \left.\int_u^b \tilde{k}_{n-k}\left(\frac{t-u}{c};\,\lambda_{k+1}+\delta,\lambda_{k+2}+\delta,...,\lambda_n+\delta\right)\gamma_b(t)\,dt\right\}. \qquad (3.25) \end{aligned}$$

En particular, para $k=n-1$,

$c\left\{\prod_{i=1}^{n-1}\left[D-\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}\right)I\right]\right\}\phi_b(u)$

$$= \left[\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\delta}\right]\left\{(-1)^{n-1}\frac{1}{c^{n-2}}\gamma_b(t)\left[1-\tilde{K}_1\left(\frac{b-u}{c};\,\lambda_n+\delta\right)\right]+\right.$$
$$\left.\prod_{i=1}^{n-1}\left(-\frac{\lambda_i+\delta}{c}\right)\int_u^b \tilde{k}_1\left(\frac{t-u}{c};\,\lambda_n+\delta\right)\gamma_b(t)\,dt\right\}. \tag{3.26}$$

Aplicando el operador $\left[D-\left(\frac{\lambda_n+\delta}{c}\right)I\right]$ en ambos lados de (3.26), finalmente resulta que

$$\left\{\prod_{i=1}^{n}\left[D-\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}\right)I\right]\right\}\phi_b(u)=(-1)^n\frac{\lambda^*}{c^n}\gamma_b(u), \tag{3.27}$$

que es equivalente a (3.18).

Para verificar las condiciones de frontera (3.19), considere $u=b$ en la ecuación (3.23), entonces

$$\phi_b(b)=\frac{\lambda^*}{\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+\delta)}\,\gamma_b(b),$$

mientras que tomando $u=b$, sucesivamente para $k=1,\,2,...,\,n-1$ en (3.25) y para $k=n$ en (3.27), se obtienen las condiciones de frontera $\phi_b^{(k)}(b)=0$ para $k=1,\,2,...,\,n$.

■

Si $\lambda_i=\lambda$, para $i=1,\,2,...,\,n$, i.e., los tiempos de espera de las reclamaciones tienen distribución Erlang(n) y densidad $k_n(t,\lambda)=\frac{\lambda^n t^{n-1}e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$, entonces se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.2 *Si los tiempos de espera de las reclamaciones tienen distribución Erlang(n) con parámetro λ, entonces $\phi_b(u)$ satisface la siguiente ecuación para $0\le u\le b<\infty$:*

$$\sum_{k=0}^{n}\phi_b^{(k)}(u)\left[\frac{-(\lambda+\delta)}{c}\right]^{n-k}\binom{n}{n-k}$$
$$=\left(\frac{-\lambda}{c}\right)^n\left[\int_0^u\phi_b(u-x)\,p(x)\,dx+\int_u^\infty\omega(u,x-u)\,p(x)\,dx\right], \tag{3.28}$$

con condiciones de frontera:

$$\phi_b^{(k)}(b)=0,\ \textit{para}\ k=1,\,2,...,\,n.$$

Demostración:

Si todo $\lambda_i = \lambda$ en la ecuación (3.27), entonces

$$\left[D - \left(\frac{(\lambda_i+\delta}{c}\right) I\right]^n \phi_b(u) = (-1)^n \frac{\lambda^n}{c^n} \gamma_b(u).$$

Luego, mediante el uso de sumatorias, por el Teorema del Binomio de Newton, se tiene que,

$$\left[D - \left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right) I\right]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \quad \left[-\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)\right]^{n-k} D^k.$$

Entonces,

$\sum_{k=0}^{n} \phi_b^{(k)}(u) \big[-\big(\frac{\lambda+\delta}{c}\big)\big]^{n-k} \binom{n}{n-k}$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{\lambda}{c}\right)^n \gamma_b(u) \\
&= \left(-\frac{\lambda}{c}\right)^n \left[\int_0^u \phi_b(u-x)\, p(x)\, dx + w(u)\right] \\
&= \left(-\frac{\lambda}{c}\right)^n \left[\int_0^u \phi_b(u-x)\, p(x)\, dx + \int_u^\infty \omega(u, u-x)\, p(x)\, dx\right].
\end{aligned}$$

■

La solución de la ecuación (3.18) con las condiciones de frontera en (3.19), depende en gran medida de la solución a la ecuación homogénea asociada en v:

$$B(D)\, v(s) = \int_0^u v(u-x)\, p(x)\, dx,\ u \geq 0, \tag{3.29}$$

donde

$$B(D) = \prod_{j=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{\delta}{\lambda_j}\right) I - \frac{c}{\lambda_j} D\right] = \sum_{k=0}^{n} B_k\, D^k$$

es un operador diferencial lineal de n-ésimo orden.

Se sigue, de la teoría general de ecuaciones, que cada solución para la ecuación no homogénea puede ser expresada como una solución particular más un combinación lineal de n soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada. Entonces la solución general de la ecuación (3.18) es de la forma:

$$\phi_b(u) = \phi(u) + \sum_{i=1}^{n} \eta_i \, v_i(u), \; u \geq 0, \tag{3.30}$$

donde $\phi(u)$ es la función de Gerber-Shiu para el modelo de riesgo generalizado Erlang(n) sin una barrera, que ha sido estudiado por Gerber y Shiu en [11], [12] y [13].

3.3. Análisis de la función $v(u)$

La solución de la ecuación homogénea dada anteriormente está determinada únicamente por las condiciones iniciales $v^{(k)}(0)$, para $k = 0, 1, ..., n-1$, y puede ser resuelta mediante transformadas de Laplace.

Tomando la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación (3.29), se obtiene:

$$\hat{v}(s) = \frac{d(s)}{B(s) - \hat{p}(s)}, \; s \in \mathbb{C}, \tag{3.31}$$

donde

$$d(s) := \sum_{j=0}^{n-1} s^j \sum_{k=j+1}^{n} B_k \, v^{(k-1-j)}(0) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j(s) \, s^j$$

es un polinomio de grado $n-1$.

Por el Teorema (2.15), de todas las raíces de la ecuación $B(s) = \hat{p}(s)$, hay exactamente n raíces con parte real positiva, suponga que éstas son: $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$. Si las ρ_i son distintas, por interpolación,

$$d(s) = \sum_{j=1}^{n} d(\rho_j) \left[\prod_{k=1,\, k \neq j}^{n} \frac{(s-\rho_k)}{(\rho_j - \rho_k)} \right],$$

y por diferencias divididas,

$$\begin{aligned} B(s) - \hat{p}(s) &= \prod_{j=1}^{n}(s-\rho_j)\,\{B[s,\rho_1,\rho_2,...,\rho_n] - \hat{p}[s,\rho_1,\rho_2,...,\rho_n]\} \\ &= (-1)^n \prod_{j=1}^{n}(s-\rho_j)\left[\frac{c}{\lambda^*} - T_s\,T_{\rho_n}\,T_{\rho_{n-1}}\cdots T_{\rho_1}\,p(0)\right] \quad (3.32) \end{aligned}$$

donde el último paso se sigue de la relación (1.66), entre las diferencias divididas y el operador T_r. Entonces, la ecuación (3.31) puede ser escrita como:

$$\hat{v}(s) = \frac{\lambda^*}{c^n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(s-\rho_j)}\frac{-d(\rho_j)}{\prod_{k=1,\,k\neq j}^{n}(\rho_k-\rho_j)}\left[1 - \frac{\lambda^*}{c^n}T_s\,T_{\rho_n}\,T_{\rho_{n-1}}\cdots T_{\rho_1}\,p(0)\right]^{-1}, \tag{3.33}$$

invirtiendo, se sigue que

$$v(u) = \int_0^u v(u-y)\,g(y)\,dy + \sum_{j=1}^{n}\xi_j\,e^{\rho_j\,u},\ u \geq 0, \tag{3.34}$$

donde

$$g(y) = \frac{\lambda^*}{c^n}T_{\rho_n}\,T_{\rho_{n-1}}\cdots T_{\rho_1}\,p(y),$$

y

$$\xi_j = -\frac{\lambda^*}{c^n}\frac{d(\rho_j)}{\prod_{k=1,\,k\neq j}^{n}(\rho_k-\rho_j)} = -\frac{\lambda^*}{c^n}\frac{\sum_{m=0}^{n-1} v^{(m)}(0)\sum_{k=m+1}^{n} B_k\,\rho_j^{k-m-1}}{\prod_{k=1,\,k\neq j}^{n}(\rho_k-\rho_j)}.$$

La ecuación (3.34) es una ecuación de renovación defectuosa, ya que $g(y)$ es una función de densidad defectuosa. Si p está distribuída racionalmente, v tiene una transformada de Laplace racional, por lo tanto, puede ser obtenida explícitamente por fracciones parciales como sigue.

Suponga que la función de densidad p del tamaño de la reclamación pertenece a R_f^+, i.e., para $m \in \mathbb{N}^+$:

$$\hat{p}(s) = \frac{Q_{m-1}(s)}{Q_m(s)}, \tag{3.35}$$

con $Q_m(0) = Q_{m-1}(0)$, y $\Re(s) \in (h_X, \infty)$, donde h_X está definida como:

$$h_X = \text{ínf}\{s \in \mathbb{R} :\ E[e^{-sX}] < \infty\},$$

Q_m es un polinomio de grado m con coeficiente principal 1, y Q_{m-1} es un polinomio de grado menor o igual que $m-1$. Además, como $\hat{p}(s)$ es finita para toda s, con $\Re(s) > 0$, la ecuación $Q_m(s) = 0$, no tiene raíces con parte real negativa.

Sustituyendo, la ecuación (3.35) en (3.31) se produce:

$$\hat{v}(s) = \frac{d(s)Q_m(s)}{B(s)Q_m(s) - Q_{m-1}(s)},\ s \in \mathbb{C}, \tag{3.36}$$

donde $B(s)\,Q_m(s) - Q_{m-1}(s)$ es un polinomio de grado $(n+m)$ con coeficiente principal $(-1)^n \frac{c^n}{\lambda^*}$. Por tanto, se puede factorizar como

$$B(s)\,Q_m(s) - Q_{m-1}(s) = (-1)^n \frac{c^n}{\lambda^*} \left[\prod_{i=1}^{n}(s-\rho_i)\right] \left[\prod_{i=1}^{m}(s+R_i)\right], \tag{3.37}$$

donde $\rho_1,\ \rho_2, ...,\ \rho_n$ son todas las raíces con parte real positiva de la ecuación de Lundberg $B(s) - \hat{p}(s)$, aquí $R_1,\ R_2, ..., R_m$ denotan las raíces con parte real negativa de la ecuación $B(s)\,Q_m(s) - Q_{m-1}(s) = 0$. Entonces la ecuación (3.36) puede ser reescrita como:

$$\hat{v}(s) = \frac{\lambda^*}{c^n} \frac{d(s)\,Q_m(s)}{\prod_{i=1}^{n}(\rho_i - s)\prod_{i=1}^{m}(s+R_i)}. \tag{3.38}$$

Si $\rho_1,\ \rho_2, ...,\ \rho_n$ y $R_1,\ R_2, ...,\ R_m$ son todas distintas, entonces, por fracciones parciales, se tiene que

$$\hat{v}(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{(s-\rho_i)} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\zeta_j}{(s+R_j)},\ s \in \mathbb{C}, \tag{3.39}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\lambda^*}{c^n} \frac{d(\rho_i)\,Q_m(\rho_i)}{\prod_{j=1}^{m}(R_j+\rho_i)\prod_{k=1,\,k\neq i}^{n}(\rho_k-\rho_i)}, \\ \zeta_j &= \frac{\lambda^*}{c^n} \frac{d(-R_j)\,Q_m(-Rj)}{\prod_{i=1}^{n}(R_j+\rho_i)\prod_{k=1,\,k\neq j}^{m}(R_k-\rho_j)}. \end{aligned}$$

Entonces, invirtiendo,

$$v(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, e^{\rho_i\, u} + \sum_{j=1}^{m} \zeta_j\, e^{-R_j\, u},\ u \geq 0. \tag{3.40}$$

La fórmula (3.40) es la solución general a la ecuación íntegro-diferencial (3.29), que está determinada únicamente por las condiciones iniciales:

$$\{v^{(k)}(0)\}_{k=0}^{n-1}.$$

Se pueden encontrar n soluciones linealmente independientes $v_i(u)$, $i = 1, 2, ..., n$ mediante la especificación de las condiciones iniciales

$$v_i^{(k)}(0) = I\{k = i - 1\},$$

para $k = 0, 1, ..., n - 1$. Entonces

$$\hat{v}_i(s) = \frac{d_i(s)\, Q_m(s)}{B(s)\, Q_m(s) - Q_{m-1}(s)},\ s \in \mathbb{C}, \tag{3.41}$$

donde

$$d_i(s) = \sum_{k=i}^{n} B_k\, s^{k-i} = \sum_{m=0}^{n-i} B_{m+i}\, s^m,$$

para $1, 2, ..., n$. Para estos $d_i(s)$ especiales, se puede usar (3.40) para obtener $v_i(u)$.

Para demostrar que los $v_i(u)$ son linealmente independientes asuma que hay constantes $c_1, c_2, ... c_n$ tales que $\sum_{i=1}^{n} c_i\, v_i(u) \equiv 0$, para cualquier $u \geq 0$. Entonces $\sum_{i=1}^{n} c_i\, v_i^{(k)}(u) \equiv 0$, para $k = 0, 1, ..., n - 1$, y cualquier $u \geq 0$. Tomando $u = 0$ y notando que $v_i^{(k)} = I\{k = i - 1\}$, para $k = 0, 1, ..., n - 1$, puede demostrarse que $c_i = 0$, para todo $i = 1, 2, ..., n$.

3.4. Ejemplos

Los siguientes ejemplos muestran cómo obtener resultados explícitos cuando los tamaños de las reclamaciones están distribuídos racionalmente.

Ejemplo 3.3 *En este ejemplo, asuma que los tamaños de las reclamaciones están distribuídas exponencialmente con parámetro β, i.e., su función de densidad $p(x) = \beta e^{-\beta x}$ y transformada de Laplace $\hat{p}(s) = \frac{\beta}{(s+\beta)}$.*

Los tiempos de espera de las reclamaciones tienen distribución generalizada Erlang(2) con parámetros λ_1 y λ_2. Entonces la ecuación generalizada de Lundberg se simplifica a:

$$(\lambda_1 + \delta - cs)\,(\lambda_2 + \delta - cs)\,(s + \beta) = \lambda_1\,\lambda_2\,\beta, \tag{3.42}$$

que tiene tres raíces, suponga, $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$ y $-R < 0$.

Sean $v_1(u)$, $v_2(u)$ tales que

$$\begin{aligned} v_1(0) &= 1,\ v_1'(0) = 0, \\ v_2(0) &= 0,\ v_2'(0) = 1, \end{aligned}$$

dos soluciones linealmente independientes a la ecuación homogénea íntegro-diferencial (3.29). Por (3.40) se tiene que

$$\begin{aligned} v_1(u) &= \frac{[c\rho_1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\delta)]\,(\rho_1 + \beta)}{c\,(R + \rho_1)\,(\rho_2 - \rho_1)} e^{\rho_1 u} + \\ & \quad \frac{[c\rho_2 - (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\delta)]\,(\rho_2 + \beta)}{c\,(R + \rho_2)\,(\rho_1 - \rho_2)} e^{\rho_2 u} - \\ & \quad \frac{(c\,R + \lambda_1 + \lambda_2 + 2\delta)\,(\beta - R)}{c\,(\rho_1 + R)\,(\rho_2 + R)} e^{-R u},\ u \geq 0, \end{aligned} \tag{3.43}$$

y

$$\begin{aligned} v_2(u) &= \frac{\rho_1 + \beta}{(R + \rho_1)\,(\rho_2 - \rho_1)} e^{\rho_1 u} + \frac{\rho_2 + \beta}{(R + \rho_2)\,(\rho_1 - \rho_2)} e^{\rho_2 u} + \\ & \quad \frac{\beta - R}{(\rho_1 + R)\,(\rho_2 + R)} e^{-R u},\ u \geq 0. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Los resultados para el correspondiente modelo de riesgo generalizado Erlang(2) sin una barrera, están dados por el Teorema 2.19,

$$\phi_T(u) = \frac{\beta - R}{\beta} e^{-R u},\ u \geq 0,$$

y para $0 \leq x < u$,

$$\begin{aligned} f_1(x \mid u) &= \frac{\lambda_1\,\lambda_2\,(\beta - R)}{c^2\,(\rho_2 - \rho_1)\,(R + \rho_1)\,(R + \rho_2)} e^{-R u} \left[(\rho_2 - \rho_1)\,e^{-(\beta - R)\,x} + \right. \\ & \quad \left. (R + \rho_1)\,e^{-(\rho_2 + \beta)\,x} - (R + \rho_2)\,e^{-(\rho_1 + \beta)\,x}\right], \end{aligned} \tag{3.45}$$

y para $x \geq u$,

$$\begin{aligned} f_1(x \mid u) \;\; = \;\; & \frac{\lambda_1\,\lambda_2}{c^2\,(\rho_2-\rho_1)}\left[\frac{\beta+\rho_1}{R+\rho_1}e^{-(\rho_1+\beta)\,x}\,e^{\rho_1\,u}-\frac{\beta-R}{R+\rho_1}e^{-(\rho_1+\beta)\,x}\,e^{-R\,u}-\right. \\ & \left.\frac{\beta+\rho_2}{R+\rho_2}e^{-(\rho_2+\beta)\,x}\,e^{\rho_2\,u}+\frac{\beta-R}{R+\rho_2}e^{-(\rho_2+\beta)\,x}\,e^{-R\,u}\right]. \end{aligned} \tag{3.46}$$

La relación

$$f_2(x,y \mid u) = f_1(x \mid u)\frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)} = \beta\,e^{-\beta\,y}\,f_1(x \mid u)$$

proporciona:

$$g(y \mid u) = \int_0^\infty f_2(x,y \mid u)\,dx = \beta\,e^{-\beta\,y}\,\phi_T(u) = (\beta-R)\,e^{-(R\,u+\beta\,y)}. \tag{3.47}$$

Entonces

$$\phi_{T_b}(u) = \phi_T(u) + c_1\,v_1(u) + c_2\,v_2(u), \tag{3.48}$$

donde c_1, c_2 están determinadas por la solución de las ecuaciones:

$$c_1\,v_1^{(i)}(b) + c_2\,v_2^{(i)}(b) = -\phi_T^{(i)}(b),\; i = 1,\,2.$$

Sea $f_{b,1}(x \mid u)$ la distribución marginal con descuento de $U_b(T_b)$, y $g_b(y \mid u)$ la función de densidad del déficit en la ruina $\mid U_b(T_b) \mid$. Entonces

$$f_{b,1}(x \mid u) = f_1(x \mid u) + z_1\,v_1(u) + z_2\,v_2(u),\; 0 \leq u,\; x \leq b, \tag{3.49}$$

donde z_1, z_2 están determinadas por la solución de las ecuaciones:

$$z_1\,v_1^{(i)}(b) + z_2\,v_2^{(i)}(b) = -\frac{\partial^i f_1(x \mid u)}{\partial u^i},\; u = b,\; i = 1,\,2,$$

y

$$g_b(y \mid u) = g(y \mid u) + \zeta_1\,v_1(u) + \zeta_2\,v_2(u),\; 0 \leq u \leq b, \tag{3.50}$$

donde ζ_1, ζ_2 están determinadas por la solución de las ecuaciones:

$$\zeta_1\,v_1^{(i)}(b) + \zeta_2\,v_2^{(i)}(b) = \frac{\partial^i g(x \mid u)}{\partial u^i},\; u = b,\; i = 1,\,2.$$

Considere $c = 1.1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.0$, $\beta = 0.5$ y $\delta = 0.03$. La ecuación generalizada de Lundberg se reduce a:

$$(1.03\text{-}1.1s)^2\ (s+0.5)=0.5,$$

que tiene tres raíces, $\rho_1 = 0.1199$*,* $\rho_2 = 1.4024$ *y* $-R = -0.1496$*. Entonces*

$$\begin{aligned} v_1(u) &= -3.1437\, e^{0.1199\, u} + 1.6469\, e^{1.4024\, u} - 1.6942\, e^{-0.1496\, u} \\ v_2(u) &= 1.7935\, e^{0.1199\, u} - 0.9557\, e^{1.4024\, u} + 0.8377\, e^{-0.1496\, u},\ u \geq 0, \end{aligned}$$

mientras que

$$\phi_T(u) = 0.7008\, e^{-0.1496\, u},\ u \geq 0. \qquad (3.51)$$

Para $0 \leq x < u$*,*

$$f_1(x \mid u) = e^{-0.1496\, u} \left[0.6923\, e^{-0.3504\, x} + 0.1454\, e^{-1.9024\, x} - 0.8378\, e^{-0.6199\, x}\right],$$

y cuando $x \geq u$*,*

$$\begin{aligned} f_1(x \mid u) &= e^{-0.6199\, x} \left[3.5694\, e^{0.1199\, u} - 2.0176\, e^{-0.1496\, u}\right] + \\ & \quad e^{-1.9024\, x} \left[0.3503\, e^{-0.1496\, u} - 1.9021\, e^{1.4024\, u}\right]. \end{aligned}$$

Considerando una barrera de dividendos constante $b = 10$ *y resolviendo las condiciones de frontera, se obtiene* $c_1 = 0.0293$*,* $c_2 = 0.0138$*, y para* $0 \leq u \leq 10$*,*

$$\begin{aligned} \phi_{T_b}(u) &= 0.7008\, e^{-0.1496\, u} + \left[-0.0921\, e^{0.1199\, u} + 0.0482\, e^{1.4024\, u} - 0.0496\, e^{-0.1496\, u}\right] + \\ & \quad 0.0138 \left[0.0247\, e^{0.1199\, u} - 0.0131\, e^{1.4024\, u} + 0.0115\, e^{-0.1496\, u}\right]. \qquad (3.52) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.4 *En este ejemplo, asuma que los tiempos de espera de las reclamaciones tienen distribución generalizada Erlang con parámetros* $n = 3$*,* $\lambda_1 = \lambda_1 = 0.5$ *y* $\lambda_3 = 2$*. Con estos valores, la función de densidad de los tiempos de espera de las reclamaciones está dada por*

$$k_3(t) = \frac{2}{9}e^{-2\, t} - \frac{2}{9}e^{-0.5\, t} + \frac{1}{3}te^{-0.5\, t},\ t \geq 0,$$

con media $E\left[W\right] = 4.5$ *y* $\hat{k}_3 = \frac{0.5}{(s+0.5)^2\,(s+2)}$*.*

Suponga que los tamaños de las reclamaciones están distribuídos como una mexcla de dos distribuciones exponenciales con

$$\begin{aligned} p(x) &= (0.5)\, 0.2\, e^{-0.2\, x} + (0.5)\, 0.25\, e^{-0.25\, x} \\ \hat{p}(s) &= \frac{Q_1(s)}{Q_2(s)} = \frac{0.05 + 0.225\, s}{(s+0.2)\,(s+0.25)} \end{aligned} \qquad (3.53)$$

y $\mu = 4.5$. *Suponiendo además, que* $c = 1.1$ *se obtiene un factor de seguridad positivo de* $\theta = 0.1$.

Primero, la ecuación generalizada de Lundberg:

$$B(s)\,Q_2(s) - Q_1(s) = (1-2.2\,s)^2\,(1-0.55\,s)\,(s+0.2)\,(s+0.25) - 0.225\,s - 0.05, \tag{3.54}$$

tiene cinco raíces sobre todo el plano complejo,

$$\rho_1 = 0,\ \rho_2 = 0.7393,\ \rho_3 = 1.7949,\ -R_1 = -0.0278 \text{ y } -R_2 = -0.2291.$$

Ahora, sean $v_i(u)$ *con* $v_i^{(k)}(0) = I(k = i-1)$, *para* $i = 1,\, 2,\, 3$ *y* $k = 0,\, 1,\, 2$, *tres soluciones linealmente independientes para la ecuación homogénea (3.29). Entonces, invirtiendo (3.41),*

$$\begin{aligned}
v_1(u) &= 1.0999 + 0.3107\,e^{-R_1 u} - 1.3063\,e^{-R_2 u} - 0.1152\,e^{\rho_2 u} + 0.0109\,e^{\rho_3 u},\\
v_2(u) &= -1.6233 - 0.4421\,e^{-R_1 u} + 1.5224\,e^{-R_2 u} + 0.5876\,e^{\rho_2 u} - 0.0545\,e^{\rho_3 u},\\
v_3(u) &= 0.5916 + 0.1604\,e^{-R_1 u} - 0.5149\,e^{-R_2 u} - 0.2956\,e^{\rho_2 u} + 0.0585\,e^{\rho_3 u}.
\end{aligned}$$

Por el Teorema 2.19, $\Psi(0) = 1 - \frac{R_1 R_2}{Q_2(0)} = 0.8726$, *y*

$$\Psi(u) = 0.0870\,e^{-R_1 u} + 0.0017\,e^{-R_2 u},\ u \geq 0.$$

Por el Teorema 3.7.2 de Shuanming Li (ver [14]), se puede determinar a $f_1(x \mid u)$. *Para* $0 \leq x < u$,

$$\begin{aligned}
f_1(x \mid u) &= \bar{P}(x)\left[-0.9275\,e^{\rho_2 u}\,e^{-\rho_2 x} + 0.3904\,e^{\rho_3 u}\,e^{-\rho_3 x} + \right.\\
&\quad e^{-R_1 u}\left(-0.2825 + 0.2682\,e^{-R_1 x} - 0.0174\,e^{-\rho_2 x} + 0.003\,e^{-\rho_3 x}\right) +\\
&\quad e^{-R_2 u}\left(-0.00055 + 0.00037\,e^{-R_2 x} - 0.00022\,e^{-\rho_2 x} + \right.\\
&\quad \left.\left. 0.000044\,e^{-\rho_3 x}\right)\right],
\end{aligned}$$

y para $x \geq u$,

$$\begin{aligned}
f_1(x \mid u) &= \bar{P}(x)\left[0.3244 + 0.4224\,e^{-\rho_3(x-u)} - 0.9924\,e^{-\rho_2(x-u)} - \right.\\
&\quad e^{-R_1 u}\left(0.2825 + 0.0174\,e^{-\rho_2 x} - 0.0029\,e^{-\rho_3 x}\right) -\\
&\quad \left. e^{-R_2 u}\left(0.00055 + 0.000218\,e^{-\rho_2} - 0.0000435\,e^{-\rho_3 x}\right)\right].
\end{aligned}$$

Luego, como se ha visto anteriormente, $f_1(x \mid u)$, $f_2(x, y \mid u)$ y $g(y \mid u)$ están relacionadas, por lo tanto, es posible calcular $g(y \mid u)$, de modo que

$$
\begin{aligned}
g(y \mid u) \;=\;& e^{-0.25\,y}\big(0.1195\,e^{-0.25\,u} - 0.2825\,e^{-0.2778\,u} - 0.000056\,e^{-1.2184\,u} - \\
& 0.00439\,e^{-1.0171\,u} + 0.0003689\,e^{-2.0727\,u} - 0.0005515\,e^{-0.4291\,u} + \\
& +5.34 \times 10^{-5}\,e^{-2.274\,u}\big) + \\
& e^{-0.2\,y}\big(0.1056\,e^{-0.2\,u} - 0.2825\,e^{-0.2778\,u} - 0.003707\,e^{-0.9671\,u} - \\
& 0.0005525\,e^{-0.4291\,u} + 0.0003026\,e^{-2.0227\,u} - 4.72 \times 10^{-5}\,e^{-1.1684\,u} + \\
& 0.438 \times 10^{-5}\,e^{-2.224\,u}\big)\,.
\end{aligned}
$$

Considerando la barrera de dividendos constante en $b = 10$, entonces, para $0 \leq x < u$ y para $u \leq x < 10$, respectivamente,

$$
\begin{aligned}
f_{b,1}(x \mid u) \;=\;& \bar{P}(x)\big[e^{-\rho_2\,x}\big(0.00104\,e^{\rho_2\,u} + 0.5 \times 10^{-11}\,e^{\rho_3\,u} - 0.7429\,e^{-R_1\,u} + \\
& 2.4679\,e^{-R_2\,u} - 2.6396\big) + \\
& e^{-\rho_3\,x}\big(0.8643 \times 10^{-5}\,e^{\rho_2\,u} + 0.0486\,e^{-R_1\,u} - 0.0074\,e^{-R_2\,u} + \\
& 0.1816) + \\
& e^{R_1\,x}\big(0.2995 \times 10^{-5}\,e^{\rho_2\,u} - 0.3 \times 10^{-11}\,e^{\rho_3\,u} + 0.3014\,e^{-R_1\,u} - \\
& 0.1426\,e^{-R_2\,u} + 0.1171\big) + \\
& e^{R_2\,x}\big(0.2807 \times 10^{-8}\,e^{\rho_2\,u} + 0.0000714\,e^{-R_1\,u} + \\
& 0.0000067\,e^{-R_2\,u} + 0.0002516\big)\big] + \\
& \bar{P}(x)\big[-0.316 \times 10^{-5}\,e^{\rho_2\,u} - 0.3177\,e^{-R_1\,u} + 0.1501\,e^{-R_2\,u} - \\
& 0.1237\big]\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{b,1}(x \mid u) \;=\;& \bar{P}(x)\big[e^{-\rho_2\,x}\big(-0.0869\,e^{\rho_2\,u} + 0.5 \times 10^{-9}\,e^{\rho_3\,u} - 0.7403\,e^{-R_1\,u} + \\
& 2.4679\,e^{-R_2\,u} - 2.6396\big) + \\
& e^{-\rho_3\,x}\big(0.864 \times 10^{-5}\,e^{\rho_2\,u} + 0.032\,e^{\rho_3\,u} + 0.0486\,e^{-R_1\,u} - \\
& 0.00748\,e^{-R_2\,u} + 0.1816\big) + \\
& e^{R_1\,x}\big(0.2995 \times 10^{-5}\,e^{\rho_2\,u} - 0.3 \times 10^{-11}\,e^{\rho_3\,u} + 0.03324\,e^{-R_1\,u} - \\
& 0.1426e^{-R_2\,u} + 0.1171\big) + \\
& e^{R_2\,x}\big(0.2807 \times 10^{-8}\,e^{\rho_2\,u} + 0.000071\,e^{-R_1\,u} + 0.00031\,e^{-R_2\,u} + \\
& 0.00025)] + \\
& \bar{P}(x)\big[-0.316 \times 10^{-5}\,e^{\rho_2\,u} + 0.7 \times 10^{-11}\,e^{\rho_3\,u} - 0.3177\,e^{-R_1\,u} + \\
& 0.1501\,e^{-R_2\,u} + 0.2007\big]\,.
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
g_b(y \mid u) \;=\;& e^{0.25y}\big(0.0963\, e^{-0.2291\, u} - 0.0224\, e^{-0.0278\, u} - 0.00055\, e^{-0.4791\, u} - \\
& 0.2825\, e^{-0.2778\, u} - 0.000056\, e^{-1.2184\, u} - 0.0044\, e^{-1.0171\, u} + \\
& 0.00037\; e^{-2.0727\, u} + 0.1195\, e^{-0.25\, u} - 0.0791\big) + \\
& e^{-0.2\, y}\big(0.0953\, e^{-0.2291\, u} - 0.0222\, e^{-0.0278\, u} + 0.1506\, e^{-0.2\, u} - \\
& 0.00371\, e^{-0.9671\, u} - 0.2825\, e^{-0.2278\, u} - 0.00055\, e^{-0.4291\, u} + \\
& 0.0003\, e^{-2.0227\, u} - 0.000047\, e^{-1.1684\, u} - 0.07827\big)\,.
\end{aligned}
$$

Estos ejemplos exhiben la teoría presentada en las secciones anteriores como una metodología para hallar la distribución marginal con descuento de $U_b(T_b)$ y la función de densidad del déficit en la ruina.

Conclusiones

En este trabajo de tesis, se ha estudiado la función de penalidad de Gerber-Shiu y su relación con el tiempo de ruina, el superávit antes de la ruina y el déficit en la ruina. Se ha mostrado también que las probabilidades de ruina y otras cantidades relacionadas, pueden ser analizadas a través de esta función de penalidad.

Se ha presentado primeramente que la transformada de Laplace de la función de penalidad esperada está dada por medio de una fórmula integral procedente de un argumento de martingalas, y con la consideración de la función de penalidad esperada con descuento para un modelo de Sparre Andersen se presentó una extensión del modelo clásico de riesgo: el modelo de riesgo generalizado Erlang(n) con una barrera de dividendos constante, que ayuda a interpretar de manera más completa un modelo de riesgo, involucrando el pago de dividendos y su relación como variable a los ingresos y egresos de la compañía aseguradora.

En segunda instancia, se ha expuesto que la función de penalidad esperada con descuento satisface una ecuación de n-ésimo orden con ciertas condiciones de frontera y que su solución puede ser expresada como una función esperada de penalidad con descuento para el modelo de riesgo generalizado Erlang(n) sin barrera más una combinación lineal de n soluciones linealmente independientes de la ecuación íntegro-diferencial homogénea asociada, cuya solución está determinada únicamente por las condiciones iniciales y, además, satisface una ecuación de renovación defectuosa.

Finalmente, se han dado ejemplos numéricos para el caso en que la distribución del tamaño de las reclamaciones es de tipo racional, mostrando así, cómo obtener resultados explícitos haciendo uso de: la ecuación de renovación defectuosa que satisface el modelo generalizado y los resultados teóricos procedentes del análisis de ésta.

Pueden incluirse consideraciones que compliquen el modelo utilizado en esta tesis (gastos en los que incurre el asegurador, otro tipo de barrera, montos de reclamaciones dependientes), lo que representa un trabajo a futuro, así como el estudio de otros modelos de riesgo (binomial negativo con componente común, perturbado por una difusión).

Bibliografía

[1] Asmussen, S. *Ruin Probabilities.* Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability (Book 2). World Scientific. 2nd ed. (2000).

[2] Borovkov, A. A. *Stochastic Processes in Queuing Theory.* Stochastic Modelling and Applied Probability (Book 4). Springer-Verlag, New York. 1st ed. (1976).

[3] Bühlmann, H. *Mathematical Methods in Risk Theory.* Springer-Verlag, New York. (1970).

[4] Cheng, Y. y Tang, Q. *Moments of surplus before ruin and deficit at ruin in the Erlang(2) risk process.* North American Acturial Journal, **7**(1), pp. 1-12. (2003).

[5] Dickson, D. C. M. *On the distribution of surplus prior to ruin.* Insurance: Mathematics and Economics, **11**(3), pp. 191-207. (1992).

[6] Dickson, D. C. M. *On a class of renewal risk process.* North American Acturial Journal, **2**(3), pp. 60-68. (1992).

[7] Dickson ,D.C.M. y Hipp, C. *Ruin probabilities for Erlang(2) risk process.* Insurance: Mathematics and Economics, **22**(3), pp. 251-262. (1998).

[8] Dickson ,D.C.M. y Hipp, C. *On the time to ruin for Erlang(2) risk process.* Insurance: Mathematics and Economics, **29**(3), pp. 333-344. (2001).

[9] Gerber , H. U. *Introduction to Mathematical Risk Theory.* Huebner Foundation, Monogragh Series 8, Philadelphia. 1st ed. (1979).

[10] Gerber , H. U. y Shiu, E. S. W. *On the time value of ruin.* North American Acturial Journal, **2**(1), pp. 48-78. (1998).

[11] Gerber , H. U. y Shiu, E. S. W. *Discussion of Yebin Cheng and Qihe Tang's "Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin".* North American Acturial Journal, **7**(3), pp. 117-119. (2003a).

[12] Gerber , H. U. y Shiu, E. S. W. *Discussion of Yebin Cheng and Qihe Tang's "Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin".* North American Acturial Journal, **7**(4), pp. 96-101. (2003b).

[13] Gerber , H. U. y Shiu, E. S. W. *The time value of ruin in a Sparre Andersen model.* Pre-print. (2004).

[14] Li, S. *On The Time Value of Ruin for Insurance Risk Models.* Tesis de doctorado. Concordia University. (2004).

[15] Lin, X. S. *Discussion of Yebin Cheng and Qihe Tang's "Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin".* North American Acturial Journal, **7**(3), pp. 119-122. (2003).

[16] Lin, X. y Willmot, G. E. *Analysis of a defective renewal arising in ruin theory.* Insurance: Mathematics and Economics, **27**(1), pp. 19-44. (1999).

[17] Malinovskii, V. K. *Non-Poissonian claims arrivals and calculation of the probability of ruin.* Insurance: Mathematics and Economics, **22**(2), pp. 123-138. (1998).

[18] Panjer, H. H. y Willmot, G. E. *Insurance Risk Models.* Society of Actuaries. (1992).

[19] Wang R. and Liu, H. *On the ruin probability under a class of risk processes.* ASTIN Bulletin, **32**(1), pp. 81-90. (2002).