



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS

CLASIFICACIÓN DE CÉLULAS CANCERÍGENAS
MEDIANTE DIMENSIÓN FRACTAL

T E S I S

PRESENTADA PARA OBTENER EL GRADO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

JONATHAN XOLO FISCAL

ASESORES:

DRA. ARELI MONTES PÉREZ
DR. CARLOS I. ROBLEDO SÁNCHEZ

Puebla, Pue. 2022



El recuerdo de mi querida niña Pecas

Agradecimientos

A esos amigos y familiares que nunca dejaron de creer en mí que nunca se dieron por vencidos que nunca dijeron un no por respuesta, aquellos que le encontraron lógica a todo, aquellos que siempre tenían la razón pero a pesar de todo me inculcaron valores, una de ellas y la más importante para mí humildad, sin ella no creo que pudiera haber dado respuesta a cada incognita que encuentre en el camino a cada variable que me tope, a cada argumento que creía no era válido, a todas esos conceptos que pudieran haber simples pero concretos, a aquellos que esperaron pasientemente pero que nunca dieron su brazo a torcer, que si había enojos o peleas siempre pense en ir más arriba, y que a pesar de estar abajo siempre me levantaron y decidieron no darme la espalda nunca y los comprendo y entiendo bien así, se que lo lógico no siempre es cuerdo sino todo lo contrario, en especial para ellos mis padres, hermanos, pareja, doctores y amigos que me apoyaron siempre.

Notación

Resumen

Para explicar los fenómenos geométricos de la naturaleza, la geometría euclidiana no puede dar una explicación acertada a todo, para ello la geometría fractal se encarga en gran medida de esto: da un entendimiento de la rigurosidad de la naturaleza, que también permite describir y entender estructuras más complejas. Así nace el concepto de Fractal Natural dado por el matemático Benoit Mandelbrot, trata de dar una explicación de como la geometría fractal nos ayuda a entender el entorno que nos rodea desde un punto de vista geométrico. Otro concepto importante abordado en el libro de la Geometria fractal de la naturaleza es la dimensión fractal; mientras que la dimensión euclidia es entera, también conocida como la dimensión topológica usualmente tienen el mismo valor que suele ser un número entero, es decir, denotemos D_T como la dimensión topológica, de lo cual entonces podemos expresar, $D_T = -1$ el vacío, $D_T = 0$ un punto, $D_T = 1$ un segmento, $D_T = 2$ un cuadrado, $D_T = 3$ un cubo, pero la dimensión fractal a diferencia de la dimensión topológica, es fraccionaria. Pickover en El libro de las Matemáticas, el cual aborda éste concepto que es el más utilizado en la geometría fractal, conocida como la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch, dicha dimensión es un proceso de medida, pues esta es la dimensión de semejanza que coincide con la dimensión de Hausdorff. El poder calcular la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch de un objeto geométrico, se hace bajo el sistema de Conteo Box-Counting, el cual está basado en el coteo de cajas, además es fácil de comprender. Dicho sistema es aplicable para la dimensión bidimensional o tridimensional y esta dado por $D_{box} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log(\frac{1}{r})}$, basado en esto podemos calcular la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch mediante la recta de regresión, tomando como base pares ordenados, que nos ayudaran a obtener una gráfica de dispersión y cuya pendiente es la dimensión fractal Box- Counting de Hausdorff-Besicovitch. Las aplicaciones de la geometría fractal,

así como el cálculo de la dimensión fractal han demostrado ser de gran utilidad en la ciencia. Áreas de interés que han desarrollado algoritmos mediante el uso de la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch son el medio ambiente, la economía, la informática, comunicaciones e incluso militares; Otra área de interés donde se usa la geometría y dimensión fractal es la medicina, dicho uso se correlaciona con el desarrollo de ciertas enfermedades, como lesión espinal, patologías cardíacas, análisis de mamografías y otras más, pues se considera la dimensión fractal para determinar o localizar una enfermedad puntual. Dentro del mundo moderno, el cáncer de mama es la enfermedad más común para las mujeres [1], a lo cual el riesgo de desarrollar la patología es de $\frac{1}{8}$, es decir, una de cada ocho mujeres tiene la probabilidad de desarrollar esta enfermedad, en la actualidad la mamografía es el estudio más eficaz para la detección y diagnóstico de lesiones en la mama, que mediante el uso de las CAD (por sus siglas en inglés) Diagnóstico Asistidos por Computador, ayuda a clasificar la lesión y que mediante el sistema de base de datos e informes de imágenes mamarias (BI-RADS- Breast Imaging Reporting and Date System por sus siglas en inglés), nos ayudan a clasificar el grado de desarrollo que tenga la lesión en la mama. En este contexto, en la presente tesis, se analiza la mamografía mediante el uso de algoritmos en MatLab e ImageJ, lo cual nos permitirá clasificar la lesión observada en la mamá y confirmada por el radiólogo, estos algoritmos permiten tratar a la lesión como fractal y los resultados que se obtendrán, nos indicarán la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch para poder clasificar la lesión si es maligna o benigna, esto con base en resultados ya reportados en la literatura [1].

Índice general

Agradecimientos	II
Notación	III
Resumen	IV
1 Introducción	1
§1.1 Objetivos de la tesis	4
§1.1.1 Objetivo General	4
§1.1.2 Objetivos particulares	4
§1.1.3 Metodología	4
§1.2 Contexto del trabajo	5
§1.3 Contenido de la tesis	5
2 Teoría de fractales	6
§2.1 Geometría fractal de la naturaleza	6
§2.2 Dimensión topológica	7
§2.3 Cálculo de la dimensión fractal	10
§2.3.1 Dimensión de Hausdorff-Besicovitch	11
§2.4 Sistema de Conteo Box-Counting	13
§2.4.1 Recta de regresión para el cálculo de dimensión fractal de Hausdorff- Besicovitch mediante pendiente con Conteo de Box-Counting	14
§2.5 Aplicación en la medicina	18
§2.5.1 Aplicación de la dimensión fractal	20
§2.5.2 Sistema de base de datos e informes de imágenes mamarias (BI-RADS)	22

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	VII
3 Resultados numéricos	24
§3.1 Algoritmo	24
§3.2 Análisis de resultados	31
4 Conclusiones	44
Bibliografía	45

Índice de figuras

1.1	Conjunto de cantor, proceso de itearación para obtener un conjunto de puntos.	2
1.2	Triángulo de Sierpinski	3
2.1	a) Ejemplo de una línea recta de dimensión topológica $D_T = 1$, b) la línea recta se divide en tres partes iguales, como copia de sí misma, cada una con una longitud un tercio de la línea original.	8
2.2	a) Ejemplo de un cuadrado con dimensión topológica $D_T = 2$, b) el cuadro dividido en cuatro partes iguales, como copias de sí misma, cada uno con longitud un medio.	8
2.3	a) Ejemplo de un cubo de dimensión topológica $D_T = 3$, b) cubo dividido en 8 partes iguales en el plano tridimensional, como copias de sí misma, cada uno con longitud $\frac{1}{2}$ de la medida original.	9
2.4	Curva de Koch,compuesta de cuatro copias de sí misma, con longitud un tercio.	10
2.5	a) Rectángulo, b) rectángulo formado por 9 copias de sí mismo, con una longitud de un tercio de cada lado de la figura original.	11
2.6	Recubrimiento de la orilla de la formación, con diferentes tamaños de mallas que dependen de la razón r	13
2.7	Fragmento de la curva de Koch, aplicando la ecuación (2.6).	15
2.8	Primera malla de iteración $i = 1$, con razón de cajas $r = 10$ y $N = 30$	16
2.9	Segunda malla de iteración $i=2$, con razón de cajas $r = 5$ y $N = 120$	16
2.10	Tercera malla de iteración $i=3$, con razón de cajas $r = 2.5$ y $N = 480$	16
2.11	Grafica de los puntos P_1, P_2, P_3 y la recta de regresión.	18

2.12 a) Ramificaciones utilizadas para analizar la edad de un árbol a partir de sus tallos nuevos, b) Marismas generan fractales naturales por el bajo nivel de agua, formado por plantas herbáceas. 19

2.13 a) Pulmones con bronquios sanos, sus ramificaciones izquierda y derecha con distribución homogénea, b) pulmones invadidos por el cáncer, con afectación en los broquios. 20

2.14 a) Fractal sintético generado por medio de funciones recursivas, b) Tejido mamario invadido por el cáncer. 21

3.1 Lectura de la imagen mediante `imread('mamo.jpg')`, binarización y trazo del contorno. 27

3.2 Uso del algoritmo K-vecinos para la obtención del contorno en un fondo color negro. 27

3.3 Luego de usar la función K-vecinos, se usa la función `invert` para obtener la misma imagen pero ahora con el contorno negro sobre un fondo blanco. 28

3.4 Comandos para guardar imagen obtenida en formato `.bmp` 28

3.5 Selección de la pestaña `Analyze`, se procede a seleccionar `Tools` y por último en la subsección `Fractal Box Counter`. 29

3.6 El software sugiere los tamaños de cajas predeterminado para el análisis de la imagen, es decir, el número de iteraciones. 29

3.7 a) Obtención de la tabla de resultados indicando el tamaño y número de cajas generadas por el software, b) gráfica de dispersión obtenida del número de iteraciones e indica la dimensión fractal `Box-Counting` de Hausdorff-Besicovitch. 30

3.8 a) Se muestra mama con anomalías, b) se obtiene la imagen tratada con extensión `.bmp`, c) se utiliza la imagen para el análisis mediante `ImageJ` y cuya tabla nos indica el tamaño de cajas y que corresponde al número de iteraciones realizadas, d) al analizar obtenemos también la gráfica de dispersión, así como la dimensión fractal `Box-Counting` de Hausdorff-Besicovitch $D = 1.5363$ 32

3.9 a) Se muestran mamas con anomalías, con mayor desarrollo en la mama izquierda, b) se obtiene la imagen tratada con extensión .bmp, c) se utiliza la imagen para el análisis mediante ImageJ y cuya tabla nos indica el número de iteraciones realizadas, d) al analizar obtenemos la gráfica de dispersión, así como la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch $D = 1.3956$ 34

3.10 a) Se muestran mamas con anomalías, con mayor desarrollo en la mama derecha, b) mediante MatLab se obtiene la imagen tratada con extensión .bmp, c) se utiliza la imagen para el análisis mediante ImageJ y cuya tabla nos indica el número de iteraciones realizadas, d) al analizar obtenemos la gráfica de dispersión, así como la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch $D = 1.601$ 36

3.11 a) Se muestran mamas con anomalías, con un desarrollo uniforme en ambas mamas, b) se obtiene la imagen tratada con extensión .bmp mediante el uso de MatLab c) se utiliza la imagen para el análisis mediante ImageJ y cuya tabla nos indica el número de iteraciones realizadas, d) al analizar obtenemos la gráfica de dispersión, así como la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch $D = 1.3124$ 38

3.12 a) Se muestran mamas con anomalías, estas muestra desarrollo de microcalcificaciones, b) se obtiene la imagen tratada con extensión .bmp mediante el uso de MatLab, c) se utiliza la imagen para el análisis mediante ImageJ y cuya tabla nos indica el número de iteraciones realizadas, d) al analizar obtenemos la gráfica de dispersión, así como la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch $D = 1.5323$ 40

3.13 a) Se muestran mamas con anomalías, estas muestra desarrollo casi uniforme en ambas mamas, b) se obtiene la imagen tratada con extensión .bmp mediante el uso de MatLab c) se utiliza la imagen para el análisis mediante ImageJ y cuya tabla nos indica el número de iteraciones realizadas, d) al analizar obtenemos la gráfica de dispersión, así como la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch $D = 1.1971$ 42

Capítulo 1

Introducción

El desarrollo del conocimiento matemático a lo largo de la historia, se ha tratado de conjuntos y funciones para los cuales el uso del cálculo clásico se aplica a ellos pero no así para ciertas funciones o conjuntos que no son lo suficiente suaves o que son irregulares, es decir, contienen una descripción poco entendible acerca de funciones o conjuntos irregulares y que no se tomaron en cuenta. A finales del siglo XIX surgieron conjuntos muy irregulares que poseían propiedades geométricas y analíticas diferentes a las euclidianas, construcciones irregulares con características más desarrolladas, cuya matemática desarrollada en el siglo XIX no daba indicios de la descripción geométrica presentada dentro de la naturaleza. Uno de estos conjuntos que en 1890, se describe por primera vez es el conjunto de Cantor, también conocido como polvo de Cantor (ver figura 1.1), el cual describe un subconjunto de puntos del intervalo $I_0 = [0, 1]$, que se construye partiendo de la unidad o del segmento de recta de 0 a 1 a la cual llamamos I_0 , a partir de esta dividimos en tres partes iguales la unidad es decir $\frac{1}{3}$, del cual quedarán intervalos de $I_1^1 = [0, \frac{1}{3}]$, $I_1^2 = [\frac{2}{3}, 1]$, del cual quitaremos el tercio del medio el intervalo abierto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, repitiendo el proceso para los intervalos I_1^1 e I_1^2 , de los cuales obtenemos 2^2 intervalos de longitud $\frac{1}{9}$, repitiendo este proceso de manera recursiva observamos que obtenemos 2^n intervalos cerrados en $n - \text{uplas}(i_1, \dots, i_n)$, de la siguiente manera $I_n^1, I_n^2, \dots, I_n^{2^n}$, de longitud $(\frac{1}{3})^n$, proceso infinitamente nos queda un conjunto de puntos conocidos como el Conjunto de Cantor[11], de los cuales derivaron varios conjuntos más que daban inicio al desarrollo y construcción de fractales como el triángulo de Shierpinski, la curva de Koch, etc.

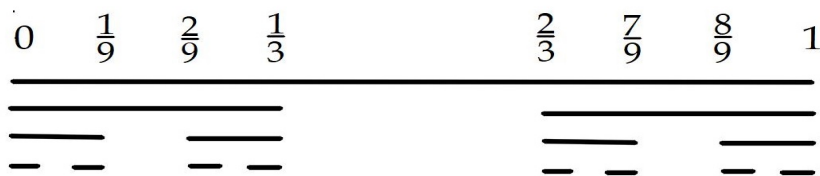


Figura 1.1: Conjunto de cantor, proceso de itearación para obtener un conjunto de puntos.

Los fundamentos en las matemáticas dieron las herramientas necesarias para el estudio de cada uno de estos conjuntos, es decir, la geometría fractal como aplicación no nació antes del siglo XX, pues para ello surgieron formas de explicación a funciones no continuas y no diferenciables cuyas construcciones eran prácticamente imposible para la época en la que se desarrollaron, aclarando que no todas cuentan con una representación geométrica. Mientras que la geometría fractal se encarga de estudiar a estos conjuntos irregulares, partiendo de las características y propiedades que procrean el uso del conocimiento matemático.

Como científicos buscamos la manera de entender y dar un razonamiento matemático euclideo a lo que llamamos enredado, arrugado, con forma de hidra, marcas tenues o incluso estilos no antes explicados con la matemática euclidea, lo cual nos lleva a un entendimiento más riguroso de fractal.

Una definición de fractal matemáticamente hablando, es una construcción puramente matemática, cuya peculiaridad reside en el patrón geométrico que se da en sus multiples repeticiones, es decir, que puede ser espacial o plana, formada por componentes infinitos, los cuales se repiten a diferentes escalas, observemos la figura 1.2 del triángulo de Shierpinski, en este triángulo Sherpinski nos describe de manera visual un fractal matemático, el cual tiene autosimilitud, es plana y es cerrada, mientras que un fractal natural Mandelbrot lo describe y lo explica de la siguiente manera, concebí y desarrollé una nueva geometría de la naturaleza y empecé a usarla en una serie de campos [6]. El fractal natural de Mandelbrot permite describir muchas de las formas irregulares y fragmentadas que nos rodean, identificando una serie de formas que llamó fractales.

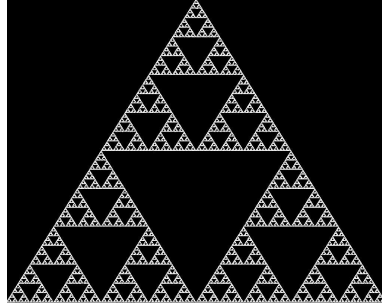


Figura 1.2: Triángulo de Sierpinski

Muchas de las ilustraciones tomadas o vistas como parte del comportamiento de la geometría fractal son complejos, pero a la vez son representantes de conceptos anteriores al surgimiento de tal geometría. Con base en esto podemos dar dos de los siguientes conceptos más comunes de fractal.

Concepto 1. La geometría fractal son los objetos matemáticos que conforman la geometría del caos, pero que surgen para el entendimiento de las formas irregulares que conforman la naturaleza, las cuales al realizar un análisis geoméricamente euclidiano, nos dan una serie de discontinuidades a las cuales no se puede dar un entendimiento adecuado, pues conforman un conjunto geoméricamente quebrado, que son explicables gracias a los avances computacionales que generan todo tipo de anomalías geométricas con algoritmos de iteración, con las que se pueden hacer comparaciones por los que son generados por la naturaleza, los cuales nos dan sistemas naturales, caóticos y dinámicos, veremos más adelante una explicación un poco más amplia.

Concepto 2. En la geometría moderna, nace el conjunto fractal de una forma rigurosa y desde una perspectiva meramente matemática, mientras que el concepto de fractal natural, que servirá para describir todo lo que nos rodea, todo lo que tiene parte de malformaciones, o incluso que parece desconocido o incoherente hablando geoméricamente. La aplicación de esta geometría dentro del desarrollo en ingeniería, así como en medicina ha dado explicación a varios estudios.

1.1. Objetivos de la tesis

1.1.1. Objetivo General

La teoría de geometría fractal y la obtención de la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch se estudia para analizar y clasificar lesiones cancerígenas en mamografías, esto mediante el software de MatLab e ImageJ.

1.1.2. Objetivos particulares

1. Revisar el estado del arte de fractales desde el punto de vista matemático, así como el desarrollo que ha tenido la geometría fractal para el entendimiento de lo que nos rodea, es decir, tratar a la naturaleza como toda una geometría, conocida como geometría fractal de la naturaleza.

2. Establecer por qué el estudio de la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch es importante en el desarrollo de áreas de la ciencias, en particular de la medicina, donde las lesiones de mamografías serán tratadas como fractales naturales .

3. Implementación del sistema de Conteo Box-Counting para la obtención de la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch.

4. Uso del modelo computacional ya reportado en la literatura, para el cálculo de la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch, esto mediante el uso del software de MatLab e ImageJ.

5. Clasificación de la lesión benigna o maligna, usando valores reportados en la literatura.

1.1.3. Metodología

La metodología utilizada en la presente tesis es la teórica y numérica.

- **Teórica:** Se revisará el estado del arte de la teoría de fractales, iniciando con antecedentes históricos, abarcando la teoría de la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch, el sistema de Conteo Box-Counting y la aplicación en la medicina.

- **Numérica:** Mediante el uso del software de MatLab e ImageJ se usará el algoritmo ya reportado en la literatura para el tratamiento de mamografías, para clasificar lesiones benignas y malignas [1].

1.2. Contexto del trabajo

El presente trabajo, forma parte de una línea de investigación del grupo de óptica, de la Facultad de Ciencia Físico Matemáticas (FCFM), de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP). La presente línea de investigación pretende dar una aplicación de los conceptos matemáticos y físicos a la medicina, tratando de resolver problemas reales de la sociedad.

1.3. Contenido de la tesis

En la presente tesis el desarrollo de la escritura se divide en 4 capítulos, esta tesis abarca conceptos fundamentales y teóricos, así como resultados obtenidos de la implementación del modelo computacional.

2^{do} capítulo: Se presenta el desarrollo teórico de la geometría fractal, así como la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch y además se presenta el marco teórico que sustenta el uso de la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch dentro de la medicina, en particular para el análisis de lesiones en mamografías.

3^{er} capítulo: Se muestra el algoritmo numérico utilizado mediante el uso de MatLab e ImageJ para el tratamiento de imágenes, para la obtención de la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch, mostrando resultados numéricos en dónde se clasifican las lesiones malignas y benignas de las mamografías estudiadas, basandose en resultados reportados en la literatura [1].

4^{to} capítulo: Se dan las conclusiones generales, así como las limitaciones en la clasificación de lesiones benignas y malignas de acuerdo a los resultados reportados en la literatura.

Capítulo 2

Teoría de fractales

2.1. Geometría fractal de la naturaleza

Para explicar los fenómenos geométricos de la naturaleza, la geometría fractal se encarga en gran medida de esto, se puede diseñar desde una simple hoja con iteraciones y recrear el crecimiento de un árbol, también permite describir y entender la estructura de una masa nubosa, contemplando el espesor que esta conlleva. Aún dentro de la naturaleza, la geometría fractal nos ofrece un componente para resolver casos en los cuales la geometría euclidiana no ofrece la suficiente información, pero describe los hechos naturales de los cuales dependemos siempre de la observación, la estructura que la compone pero sobre todo el crecimiento dinámico, pues la descripción depende de la manera en que se desarrolla, en otras palabras, la simplicidad de un proceso nos debe llevar a desdeñar sus posibles consecuencias, que a menudo pueden ser altamente complejas, esto nos indica las diferentes aplicaciones que tiene en otras ciencias y el desarrollo que ha tenido para la explicación de fenómenos naturales que con la geometría convencional no tenían alguna explicación posible desde el punto científico.

El concepto de dimensión fractal toma un ejemplo muy básico visto en el libro *La geometría Fractal de la Naturaleza* de Benoit Mandelbrot, al tratar de medir la costa de gran Bretaña, quien abordaría Clifford A. Pickover en *El libro de las Matemáticas*, el cual nos da un entendimiento simple de la dimensión, si se intentara medir una costa o límite entre dos naciones, el valor de esta medición dependerá de la longitud de la vara de medir utilizada.

Conforme la vara de medida disminuyera en longitud, la medida sería más sensible a las curvas cada vez más pequeñas del contorno y, en principio, la longitud de la costa tendería a infinito conforme la longitud de la vara se acercará a cero. El matemático Británico Lewis Richardson, consideró este fenómeno en su intento de establecer una correlación entre la aparición de guerras y la frontera que separa dos o más naciones (llegó a la conclusión de que el número de guerras de un país era proporcional al número de países con los que limita). A partir del trabajo de Richardson, el matemático Franco-Estadounidense Benoit Mandelbrot, añadió y sugirió que la relación entre la longitud de la vara de medir y la longitud total aparente de una costa, podía expresarse a través del parámetro D , la dimensión fractal [6].

2.2. Dimensión topológica

La dimensión topológica mide la habilidad para cubrir un objeto con conjuntos abiertos de radio pequeño. Una dimensión topológica cero, describe un conjunto que puede ser cubierto por pequeños conjuntos abiertos que son disjuntos. La dimensión topológica uno, describe un conjunto que puede ser cubierto por pequeños conjuntos abiertos, con sólo una intersección entre adyacentes pares de ellos. Un conjunto es considerado de dimensión topológica dos, si puede ser cubierto por pequeños conjuntos abiertos que se intersecan sólo tres veces. La dimensión topológica usualmente tiene el mismo valor que la dimensión euclídea. A partir de esto denotemos D_T como la dimensión topológica, de lo cual entonces podemos expresar, $D_T = -1$ el vacío, $D_T = 0$ un punto, $D_T = 1$ un segmento, $D_T = 2$ un cuadrado, $D_T = 3$ un cubo, observemos este concepto anterior con los siguientes 3 ejemplos [16].

Ejemplo 1. En la figura 2.1 a) se tiene una línea recta, dicha línea posee dimensión topológica $D_T = 1$, la cual dividiremos en 3 partes iguales como copias de sí misma, ver figura 2.1 b), cada una con longitud $\frac{1}{3}$ de la línea original, por lo que la razón está dada por $r = \frac{1}{3}$, en este caso con $N = 3$, donde N representará el número de copias de sí misma, cada copia con dimensión $D_T = 1$, así el número de copias se expresa como $3 = 3^1$.

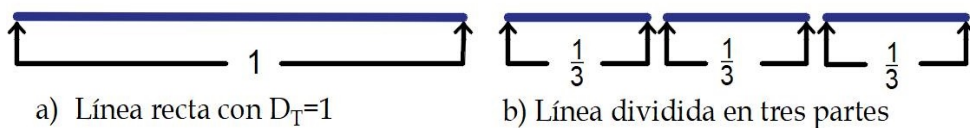


Figura 2.1: a) Ejemplo de una línea recta de dimensión topológica $D_T = 1$, b) la línea recta se divide en tres partes iguales, como copia de sí misma, cada una con una longitud un tercio de la línea original.

Ejemplo 2. La figura 2.2 a) es un cuadrado que tiene dimensión topológica $D_T = 2$, que al dividir exactamente en 4 partes iguales, se obtienen 4 copias del original, ver figura 2.2 b), cada una con lado igual a $\frac{1}{2}$. En este caso, la razón está dada por $r = \frac{1}{2}$, el número de copias $N = 4$ y la dimensión topológica $D_T = 2$, así de esta forma, podemos expresar al número de copias como $4 = 2^2$.

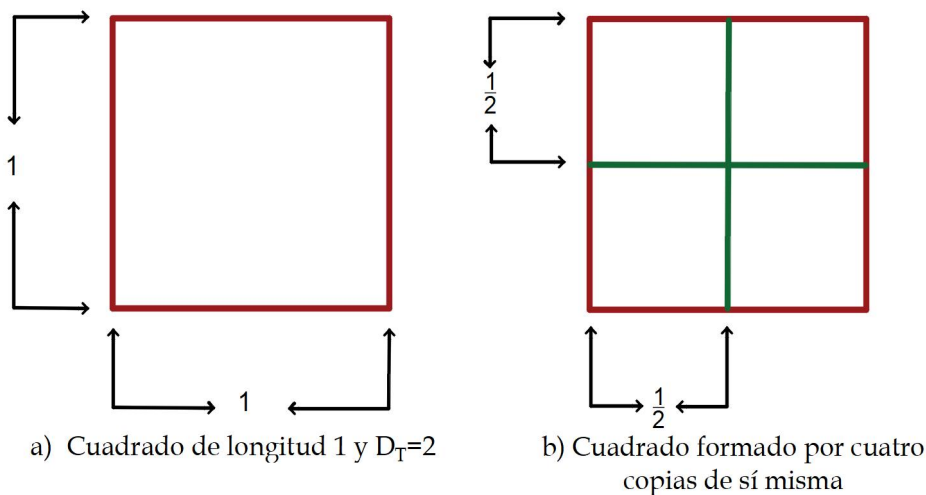


Figura 2.2: a) Ejemplo de un cuadrado con dimensión topológica $D_T = 2$, b) el cuadro dividido en cuatro partes iguales, como copias de sí misma, cada uno con longitud un medio.

Ejemplo 3. La figura 2.3 a) un cubo que tiene dimensión topológica $D_T = 3$, el cual puede ser formado por 8 copias de sí mismo, lo cual denotamos con $N = 8$, ver figura 2.3 b), cada uno de los cubos de lado $\frac{1}{2}$ de lo cual obtenemos la razón $r = \frac{1}{2}$, así expresamos el número de copias como $8 = 2^3$.

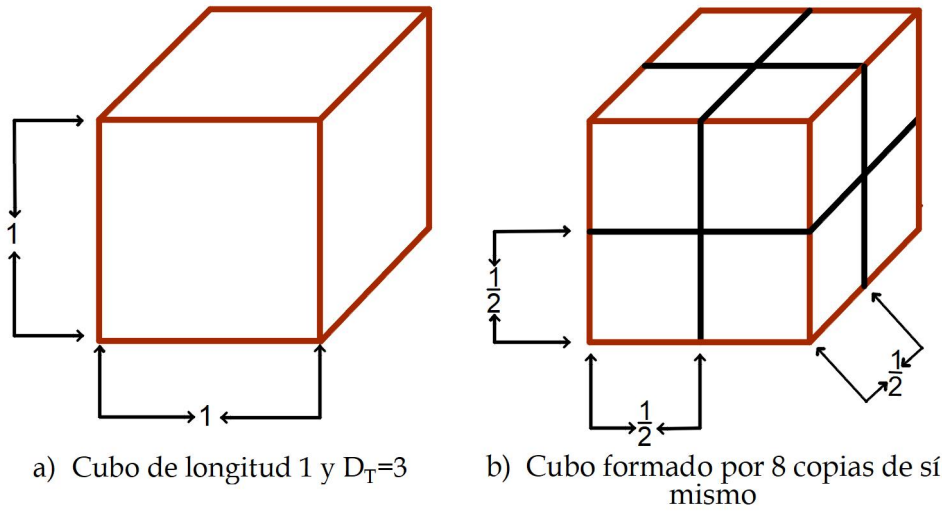


Figura 2.3: a) Ejemplo de un cubo de dimensión topológica $D_T = 3$, b) cubo dividido en 8 partes iguales en el plano tridimensional, como copias de sí misma, cada uno con longitud $\frac{1}{2}$ de la medida original.

Dado todo lo anterior podemos observar la relación siguiente, dada por la razón representada por r , N el número de copias y la dimensión topológica D_T , esto es,

$$N(r) = \left(\frac{1}{r}\right)^{D_T} = r^{-D_T}, \quad (2.1)$$

con lo cual nos indicaría que conociendo el número de copias que el objeto de estudio posea, y cuál es su razón de similitud podemos hallar su dimensión, si esta dimensión es mayor que la dimensión topológica, entonces podemos clasificarlo como un fractal, un ejemplo es la curva de Koch (ver figura 2.4), en su forma más simple, posee una dimensión topológica $D_T = 1$, la cual se compone de cuatro copias de sí misma, con longitud igual a $\frac{1}{3}$, la razón está dada por $r = \frac{1}{3}$, el número de copias $N = 4$, con dimensión topológica $D_T = 1$,

si queremos que cumpla los requisitos de la ecuación (2.1), debe existir un exponente no entero el cual al elevar el recíproco de su razón nos debe dar el número de copias, pues al efectuar las operaciones correspondientes esta no se aplica para ello, buscaremos un D tal que $D > D_T$, donde D será la dimensión de Hausdorff-Besicovitch.

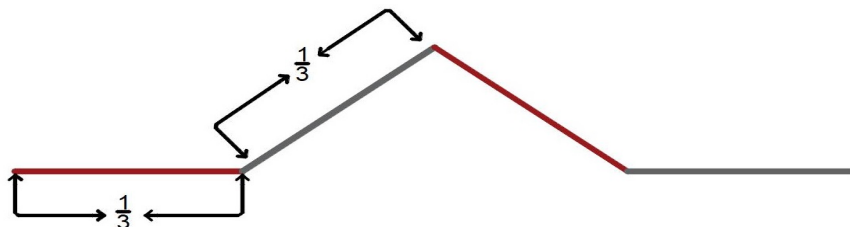


Figura 2.4: Curva de Koch, compuesta de cuatro copias de sí misma, con longitud un tercio.

2.3. Cálculo de la dimensión fractal

La dimensión es una aproximación del tamaño de un conjunto, donde un punto para el cual su dimensión es cero, una línea recta su dimensión es uno, para un plano su dimensión es dos y para un volumen su dimensión es tres, a partir de esto imaginemos un microscopio para poder observar un conjunto de puntos, si tratamos de ver el conjunto con un lente de poco aumento, no lo veremos, pero si el lente tiene demasiado aumento solo veremos borroso, para poder observar detenidamente se hace con el lente y aumento adecuado, lo cual ocurre con la dimensión, un ejemplo el conjunto de Cantor, la dimensión cero es demasiado pequeño para obtener su dimensión, pues dicho conjunto tiene puntos infinitos y si se observara en la dimensión uno, está será demasiado grande, pues no permite verlo, ya que mide cero. Por lo que en 1919, Hausdorff introdujo dimensiones fraccionarias, con lo cual da una forma de calcular y obtener estas dimensiones que actualmente se conocen como la dimensión de Hausdorff [10].

2.3.1. Dimensión de Hausdorff-Besicovitch

La definición de dimensión de Hausdorff-Besicovitch es asociado a un proceso de medida, es decir, la dimensión de semejanza que coincide con la dimensión de Hausdorff, que veremos cómo varía la medida de un conjunto cuando se hace por un número de copias contractiva por un factor r , donde esta r anteriormente en la sección 2.2 llamamos razón [16].

Ejemplo: Un rectángulo, ver figura 2.5 a), el cual lo dividimos por una razón $r = \frac{1}{3}$ por cada lado, tendremos que el rectángulo inicial se descompone en 9 rectángulos reducidos, observe la figura 2.5 b), por lo que cada uno de ellos medirá $\frac{1}{9}$ del rectángulo original, esto ocurre con conjuntos de dimensión 2, si se reducen por una razón r , su medida cambia en una razón r^2 , así cuando un conjunto de dimensión uno se reduce por un razón r , su medida cambia en la misma proporción r^1 .

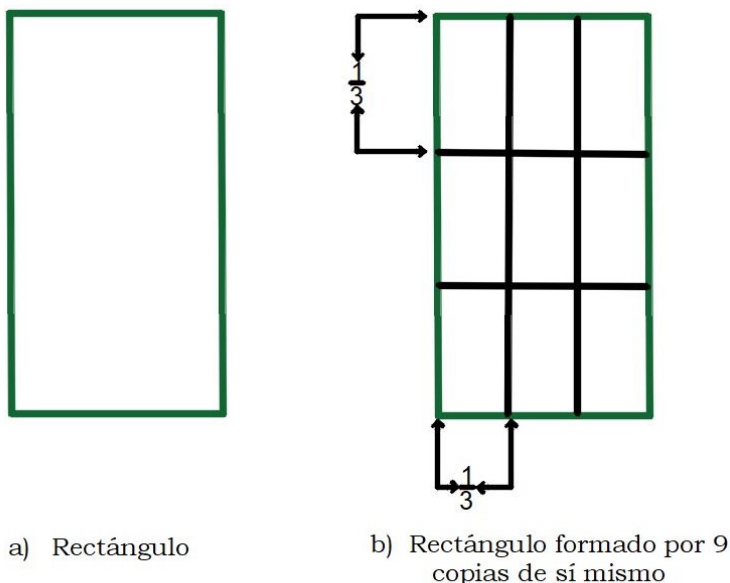


Figura 2.5: a) Rectángulo, b) rectángulo formado por 9 copias de sí mismo, con una longitud de un tercio de cada lado de la figura original.

Esto nos lleva a la dimensión de Hausdorff-Besicovitch, con lo que podemos decir que, un contenido lineal, se calcula sumando n -veces r elevados al exponente uno, que es la

dimensión de la línea recta. Un contenido de superficie se calcula sumando n -veces r (donde r es la razón de cada uno de los cuadrados que compone la superficie) elevados al exponente dos, que es la dimensión del plano. Un contenido de volumen se calcula sumando n -veces r (donde r es la razón de cada uno de los cubos que compone el volumen) elevados al exponente tres, que es la dimensión del espacio y cuya fórmula está dada por

$$D = \frac{\log N}{\log(\frac{1}{r})}, \quad (2.2)$$

donde D es la dimensión de Hausdorff-Besicovitch, N el número de copias de sí mismo, r la razón (razón de similitud), y así aplicando la función inversa de la logarítmica de ambos lados de la igualdad, obtenemos que

$$1 = Nr^D \text{ contenido} = Nr^D. \quad (2.3)$$

Recordemos que para Mandelbrot, un fractal es por definición, un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica, si tomamos el ejemplo del cubo formado por 8 copias de sí mismo (como se vio en la sección 2.2), donde $r = \frac{1}{2}$ y $N = 8$, para este ejemplo usamos la ecuación (2.2), entonces podremos hallar su dimensión de Hausdorff-Besicovitch, que está dada por la siguiente expresión

$$D = \frac{\log 8}{\log 2} = 3, \quad (2.4)$$

de este resultado, podemos asegurar que la dimensión fractal del cubo es $D = 3$.

2.4. Sistema de Conteo Box-Counting

El sistema de Conteo Box-Counting, está basado en el conteo de cajas para encontrar la dimensión de un objeto geométrico, ya que dicho sistema tiene un algoritmo fácil de entender y su aplicación es sencilla. El algoritmo el cual es aplicable para la dimensión bidimensional, al igual que la dimensión tridimensional, explicaremos de manera breve la siguiente construcción, se traza sobre un fractal plano una malla, formada por cajas de tamaño r , definida anteriormente como razón, para seguidamente contar cuántos de estas cajas son necesarios para cubrir el fractal estudiado. Se denotará como $N(r)$ a dicho número de cajas, que depende de la razón r . A continuación, se reitera el proceso con una malla cada vez más fina, es decir, con cajas cuya razón r , sea cada vez más pequeño, esquemáticamente lo podemos ver en la figura 2.6, el recubrimiento de la orilla de una pequeña formación.

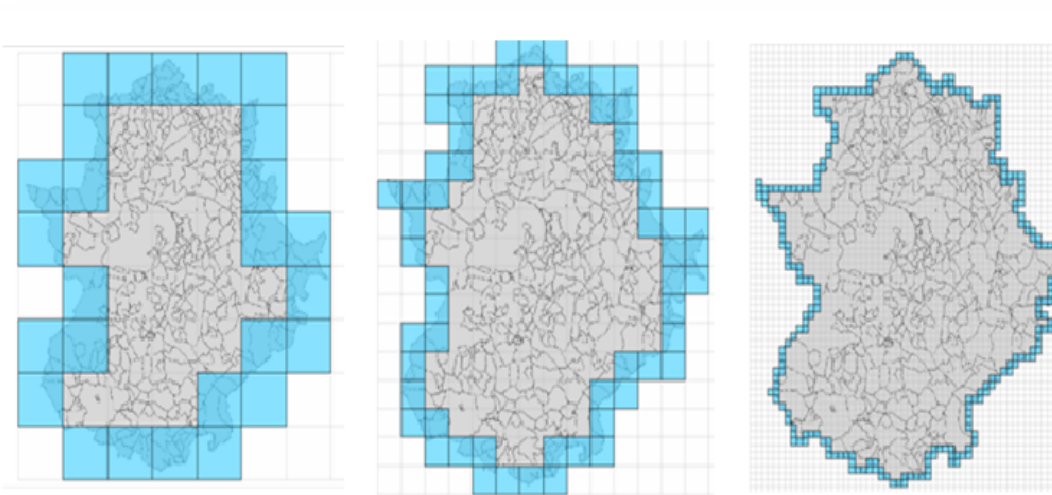


Figura 2.6: Recubrimiento de la orilla de la formación, con diferentes tamaños de mallas que dependen de la razón r .

De lo anterior, podemos deducir que la dimensión Box-Counting de un fractal se expresa de la siguiente forma

$$D_{box} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}, \quad (2.5)$$

donde, observemos que hemos tomado la definición de dimensión de Hausdorff-Besicovitch (ecuación (2.2)), para ello agregamos un subíndice (box) para referirnos a la dimensión Box-Counting [6]. Recordando el ejemplo de la curva de Koch, sección 2.2, se puede ejemplificar el cálculo de la dimensión de Box-Counting (ecuación (2.5)), tomando en cuenta que $N = 4$ el numero de copias, $r = \frac{1}{3}$ la razón, por lo cual la dimensión Box-Counting es

$$D_{box} = \frac{\log 4}{\log\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.261859507\dots,$$

así la dimensión Box-Counting $D_{box} \cong 1.2618$, con esto demostramos que la dimensión obtenida es estrictamente mayor que su dimensión topológica, ya que anteriormente se había mostrado que la dimensión topológica de la curva de Koch es $D_T = 1$.

2.4.1. Recta de regresión para el cálculo de dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch mediante pendiente con Conteo de Box-Counting

Para el cálculo de la dimensión mediante la recta de regresión, se hace basado en el algoritmo mediante iteración por conteo de cajas. Tomemos un punto de coordenadas (x, y) , donde x corresponde al tamaño de las cajas, dados por la razón r y la y le corresponde el número de $N(r)$, que es el número de copias que dependen de la razón dada por r , algunas de las cajas contienen parte del objeto cuya dimensión se quiere calcular. Se debe realizar esta iteración las veces que sea necesarias para obtener cajas más pequeñas, éstas iteraciones se realizan las veces que se requieran para que el proceso de conteo sea más eficiente [5]. Ahora, retomando el punto de coordenadas (x, y) , expresada de siguiente forma

$$(x, y) = (r, N(r)), \quad (2.6)$$

y aplicando la propiedad de logaritmo a esta ecuación, podemos obtener el método de mínimos cuadrados, por lo que cada punto se puede expresar de la siguiente forma

$$\left(\text{Log}\left(\frac{1}{x}\right), \text{Log}(y)\right) = \left(\text{Log}\left(\frac{1}{r}\right), \text{Log}(N(r))\right). \quad (2.7)$$

Por otro lado, a partir de la ecuación (2.5), nosotros podemos encontrar $N(r)$, la cual tiene la siguiente forma

$$N(r) = (r)^{-D_{box}}. \quad (2.8)$$

Observaremos este proceso de la siguiente manera, ahora tomando como ejemplo un segmento mucho mayor de la curva de Koch, como se puede ver en la figura 2.7, que cuando se aplica la ecuación (2.6) a la curva de Koch se ve fragmentado cada uno de los puntos.

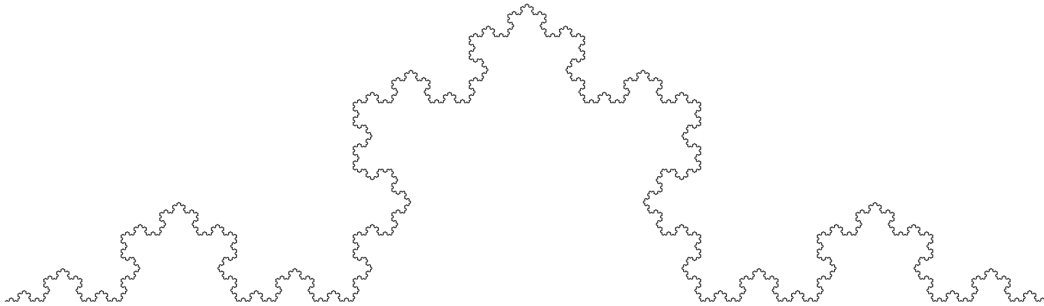


Figura 2.7: Fragmento de la curva de Koch, aplicando la ecuación (2.6).

Ahora, denotaremos a i como el número de iteraciones a realizar y registrando en puntos en la ecuación (2.6), realizamos la iteración para $i = 1$, con un tamaño de cajas $r = 10$ y $N = 30$, ver figura 2.8, aquí observamos que 16 de 30 cajas contienen parte de la curva, por lo que obtenemos el primer punto que es $P_1 = (10, 16)$.

Para la segunda iteración, sea $i = 2$, con un tamaño de cajas $r = 5$ y donde $N = 120$, ver figura 2.9, aquí podemos observar que las cajas son más pequeñas, ahora 45 de 120 cajas contienen parte de la curva, así el segundo punto es $P_2 = (5, 45)$.

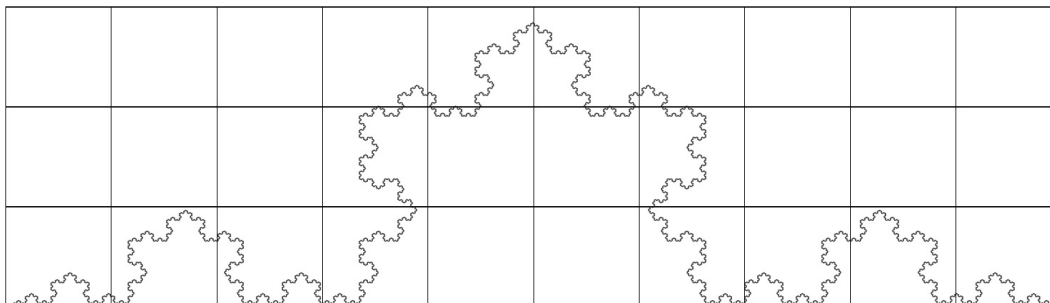


Figura 2.8: Primera malla de iteración $i = 1$, con razón de cajas $r = 10$ y $N = 30$.

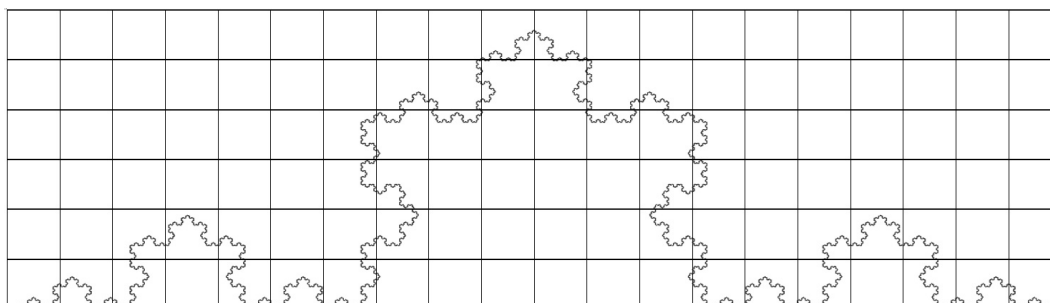


Figura 2.9: Segunda malla de iteración $i=2$, con razón de cajas $r = 5$ y $N = 120$.

Para la última iteración tomemos $i = 3$, con un tamaño de cajas $r = 2.5$ y $N = 480$, de los cuales al observar detenidamente y realizando el proceso de conteo, tenemos que 104 de 480 cajas contienen parte de la curva, por lo cual el último punto es $P_3 = (2.5, 104)$.

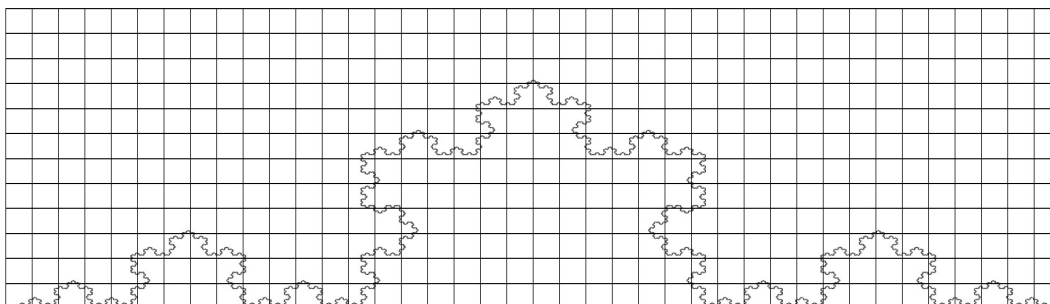


Figura 2.10: Tercera malla de iteración $i=3$, con razón de cajas $r = 2.5$ y $N = 480$.

Obtenidos los puntos para las iteraciones $i = 1$, $i = 2$, $i = 3$ respectivamente, usando la ecuación (2.7), obtenemos los siguientes resultados para cada punto P_1 , P_2 , P_3 ,

$$P_1 = \left(\log\left(\frac{1}{10}\right), \log(16) \right) = (-1, 1.204)$$

$$P_2 = (\log\left(\frac{1}{5}\right), \log(45)) = (-0.699, 1.653)$$

$$P_3 = (\log\left(\frac{1}{2.5}\right), \log(104)) = (-0.398, 2.017)$$

con estos tres resultados de P_1, P_2, P_3 , podemos calcular la recta de regresión, para esto se utilizará la ecuación punto pendiente, que tiene la siguiente forma

$$y = m(x - x_0) + y_0. \quad (2.9)$$

Al graficar los puntos P_1, P_2, P_3 y la recta de regresión, ver figura 2.11, observemos que nos arroja un valor $y = 1.3505x + 2.569$, donde y representa la estimación para un valor de x dado (cabe aclarar que esta y no es la misma de la ecuación (2.6), esta y es independiente), donde tomemos el valor de m la pendiente, $m = D_{box} = 1.3505$ y este valor será la dimensión fractal Box-Counting. Ahora recordemos que la dimensión Hausdorff-Besicovich obtenida es $D = 1.2721$, está dimensión la podemos aproximar al resultado que nos arroja la dimensión Box-Counting, es decir, $D_{box} = 1.3505 \cong D = 1.2619$, esta aproximación se obtiene solo de estas 3 iteraciones, pero se pueden aumentar el número de iteraciones y tener un valor más aproximado de la dimensión Hausdorff-Besicovich, es decir, mientras mas pequeña sea la malla, mayor será la exactitud de la dimensión Box-Counting y está sera más aproximada al valor de la dimensión de Hausdorff-Besicovich.

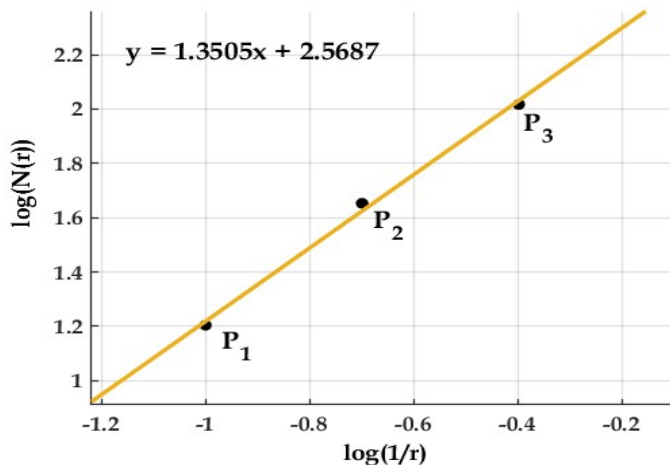


Figura 2.11: Gráfica de los puntos P_1 , P_2 , P_3 y la recta de regresión.

2.5. Aplicación en la medicina

La aplicación de la geometría fractal, así como el cálculo de la dimensión fractal ha demostrado ser de gran utilidad en la ciencia, por ejemplo, para poder determinar la edad de un árbol joven de entre 20 y 25 años, se observan las ramificaciones de manera fractal, desde el tallo principal y realizando las implementaciones pertinentes se puede calcular su edad, ver figura 2.12 a), otra área de interés es el medio ambiente, su uso más común es para la realización o reconstrucción de modelos geológicos, por ejemplo, dentro de un conjunto de árboles sembrados ordenadamente y durante un incendio, este se propaga de tal forma que crea un efecto de fractalidad, lo cual puede dar un entendimiento de cómo se extiende un incendio forestal, otras áreas como la economía, la informática, comunicaciones e incluso militares, donde se utilizó la geometría fractal para reproducir las rutas de submarinos e incluso encontrar almacenes en el fondo de lecho marino, mientras que en la hidrología se usa para determinar la trayectoria de los ríos, identificando las diferentes formaciones y formas que estos pueden tomar sus cauces, formando fractales naturales de gran escala, un claro ejemplo son las marismas, ver figura 2.12 b).



a) Ramificaciones de un árbol con tallos nuevos.



b) Marismas formadas por el bajo nivel del agua.

Figura 2.12: a) Ramificaciones utilizadas para analizar la edad de un árbol a partir de sus tallos nuevos, b) Marismas generan fractales naturales por el bajo nivel de agua, formado por plantas herbáceas.

Otra área de interés, donde se usa la geometría y dimensión fractal es la medicina, dicho uso se correlaciona con el desarrollo de ciertas enfermedades, como lesión espinal, patologías cardíacas, análisis de mamografías y otras más, pues se considera la dimensión fractal para determinar o localizar una enfermedad puntual. Consideremos el siguiente ejemplo, los pulmones, un órgano compuesto de bronquios derecho e izquierdo, cuyos vasos sanguíneos crean ramificaciones, parecidas a las ramas de un árbol, ver figura 2.13 a), lo cual crea un complejo patrón de distribución homogénea de manera fractal, basado en esto, la dimensión fractal de los vasos sanguíneos puede indicar alguna enfermedad, en particular podría indicar si el órgano de estudio, en este caso el pulmón, ver figura 2.13 b), padece alguna enfermedad pulmonar, como el cáncer. Al igual que el ejemplo anterior el cáncer de mama también crea redes e irregularidades durante su crecimiento, esto nos permite caracterizar las irregularidades de las células, tejidos y redes vasculares durante su desarrollo, lo cual nos permitirá enfocarnos en el análisis de mamografías, es decir, aquellas que padecen cáncer de mama [1].



a) Pulmones con bronquios sanos y sus ramificaciones izquierda y derecha.



b) Pulmones con patología cancerígena.

Figura 2.13: a) Pulmones con bronquios sanos, sus ramificaciones izquierda y derecha con distribución homogénea, b) pulmones invadidos por el cáncer, con afectación en los broquios.

2.5.1. Aplicación de la dimensión fractal

Dentro del mundo moderno, el cáncer de mama es la enfermedad más común para las mujeres, a lo cual el riesgo de desarrollar la patología es de $\frac{1}{8}$, es decir, una de cada ocho mujeres tiene la probabilidad de desarrollar esta enfermedad, en la actualidad la mamografía es el estudio más eficaz para la detección y diagnóstico de lesiones en la mama. La CAD (por sus siglas en inglés) Diagnóstico Asistidos por Computador, ayuda a clasificar la lesión, cuando se realiza una prueba basado en imagen, como puede ser una radiografía, una tomografía computarizada (TAC por sus siglas en ingles) o una resonancia magnética, donde pueden detectarse opacidades sospechosas en la imagen, que podría ser cáncer, para ello se hace uso de las propiedades de la geometría fractal para su estudio, ya que fractales sintéticos que fueron generados por ordenador, ver figura 2.14 a), han demostrado la similitud que existe con un tejido de mama invadido por cáncer, ver figura 2.14 b), pues esto nos indica que el desarrollo de la patología es de manera fractal, basado en esto podemos usar la dimensión fractal, para el análisis y estudio de una mamografía.

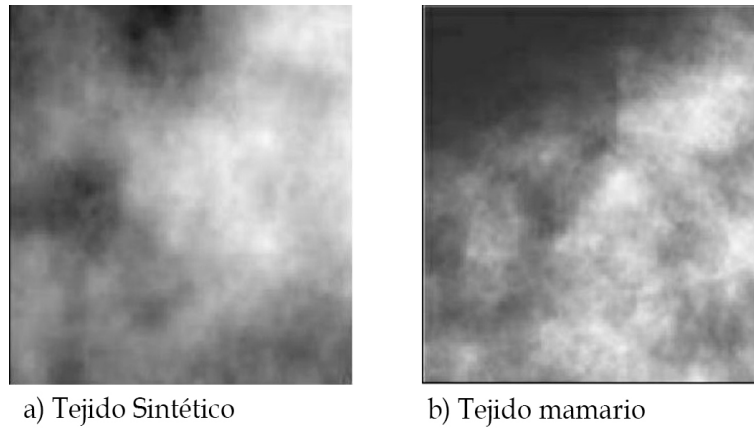


Figura 2.14: a) Fractal sintético generado por medio de funciones recursivas, b) Tejido mamario invadido por el cáncer.

Recordemos que la dimensión fractal, nos permite analizar al objeto de estudio, este objeto de estudio son los fractales naturales, los cuales tienen una única característica que es la complejidad infinita, pues la semejanza de autosimilitud que existe al observar el fractal natural a una escala mucho menor, son solo similares al original más no idénticas, pues estas siguen siendo de estructuras muy complejas independientemente de la escala a la cual observemos, dentro de esta complejidad podemos observar el contorno, el cual puede ser regular o irregular dependiendo de la complejidad de la formación y cuya dimensión no es entera, en otras palabras, la dimensión fractal mide la complejidad de un objeto, pero además observamos que la dimensión fractal aumenta a medida que la forma del objeto o el contorno del objeto es más irregular, en este caso la célula cancerígena, tomado como un fractal natural y que al analizar se puede observar que existe irregularidad en su contorno, por lo cual su dimensión aumenta, en la siguiente tabla podemos observar este comportamiento, ver tabla 2.1 a), observe que mientras la forma del contorno sea regular el valor de la dimensión fractal es igual a la dimensión topológica, hablando estrictamente como si se tratara de la forma del contorno como una línea recta, ahora, b) si la forma del contorno presenta pequeñas irregularidades el valor de la dimensión fractal se encuentra entre $1 < 1.27 \leq 1.46$, c) a mayor irregularidad el valor de la dimensión fractal es mayor o igual a 1.46 pero menor que 2, pues la $D = 2$ se refiere a una estructura completa (un todo) pero no un contorno haciendo referencia a la dimensión topológica, es decir, $D = D_T = 2$

(puede llegar a darse el caso en que la dimensión fractal absorbe la dimensión topológica) [1].

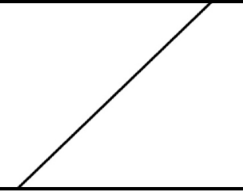
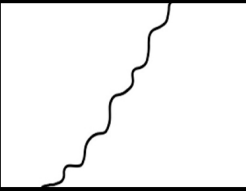
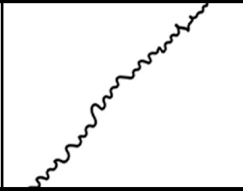
Forma			
Dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch	D=1	D=1.27	D=1.46
	a)	b)	c)

Tabla 2.1: a) Contorno regular que muestra que la dimensión fractal es $D = 1$, b) forma del contorno que presenta pequeñas irregularidades con dimensión fractal $D = 1.27$, c) contorno con mayor irregularidades su dimensión fractal es $D = 1.46$

2.5.2. Sistema de base de datos e informes de imágenes mamarias (BI-RADS)

El sistema de base de datos e informes de imágenes mamarias (BI-RADS- Breast Imaging Reporting and Date System por sus siglas en inglés), es un sistema para la clasificación de lesiones mamográficas, la cual categoriza las lesiones de mama, según el grado de desarrollo que este se tenga en la mamografía, dicho sistema consta de 7 categorías [17], los cuales son

1. BI-RADS 0 - Mamografía Incompleta, requiere evaluación con imágenes adicionales.
2. BI-RADS 1 - Negativo, significa que no hay ninguna anomalía o notoria que reportar.
3. BI-RADS 2 - Hallazgo benigno no canceroso, se recomienda realizar chequeo constante.
4. BI-RADS 3 - Probablemente benigno, se recomienda intervalos cortos de seguimiento.
5. BI-RADS 4 - Sospechosa, realización de mamografía, ultrasonido, estas poseen 3 clasificaciones adicionales las cuales son, 4A baja sospecha de malignidad, 4B moderada sospecha de malignidad, 4C alta sospecha de malignidad.

6.BI-RADS 5 - Altamente sugestiva de malignidad, probabilidad de ser cáncer.

7.BI-RADS 6 - Diagnóstico maligno comprobado por biopsia.

Estas 7 categorías nos indican el grado de avance de la enfermedad, pero mediante el uso de la dimensión fractal podemos deducir si se trata de un cáncer benigno o maligno, con alto porcentaje de seguridad en los resultados, evitando las biopsias, las cuales son técnicas de estudio invasivas.

Capítulo 3

Resultados numéricos

En este capítulo mostramos los resultados numéricos del tratamiento digital de imágenes, donde el código numérico está desarrollado en MatLab ¹, así mismo se hace uso de ImageJ para obtener el Conteo Box-Counting de Hausdorff-Besicovitch.

3.1. Algoritmo

En la presente tesis cabe aclarar que los códigos numéricos utilizados, se han tomado de referencias bibliográficas y estos códigos han sido modificados a nuestro criterio propio, para el objetivo de la presente tesis [1].

El primer paso para detectar cáncer de mama es la autoexploración, si se detecta alguna anomalía, el paciente acude al médico especialista, para que posteriormente este ordene un estudio de mamografía, al detectar una anomalía en la mamografía, hay que observar las siguientes propiedades de la lesión, la forma del contorno, localización de la lesión, densidad que esta tiene, el número de anomalías en la mama, la presencia o ausencia de microcalcificaciones asociadas a la lesión. La característica más importante que tomaremos en cuenta de la lesión, es la forma del contorno, si el contorno de la lesión presenta leves irregularidades, esta se asocia a un caso benigno, mientras que a mayor sea la irregulari-

¹ Acceso a BUAP-MATLAB Update 4. (2022). 9.12.0.2009381 (R2022a) © 1994-2022 The MathWorks, Inc.

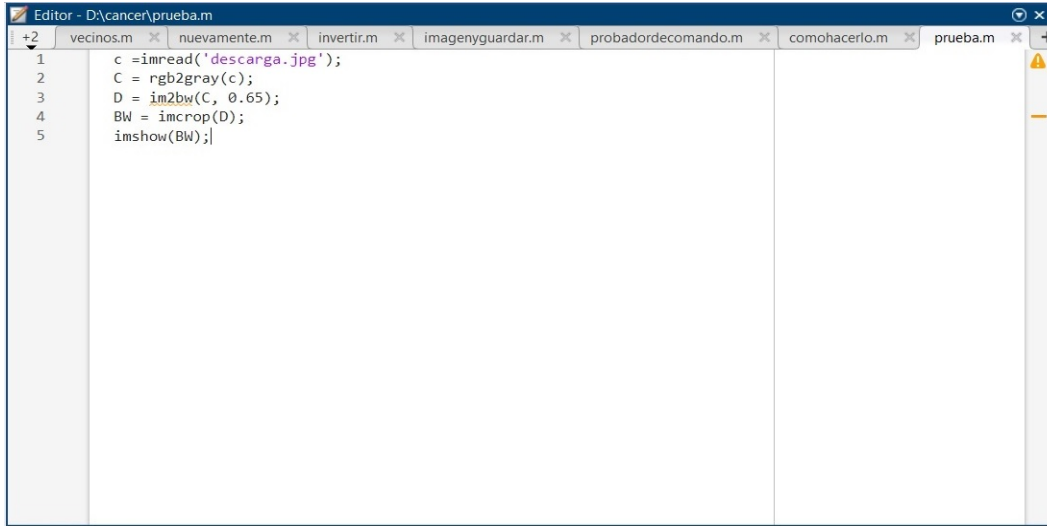
dad de la lesión, esta demuestra ser un caso maligno. Por otro lado, ya se ha mencionado en el capítulo 2, sección 2.5.1, que cuando se tiene la forma del contorno con pequeñas irregularidades, el valor de la dimensión fractal se encuentra entre $1 < 1.27 \leq 1.46$ y a mayor irregularidad es mayor o igual a 1.46 pero menor a 2, esto está fuertemente ligado a la lesión a estudiar, es decir, en el contorno de la lesión, si es regular o irregular. Una vez observado las características de la anomalía, el especialista clasifica la patología y lo categoriza utilizando las BIR-RADS, basado en la categorización de la mamografía se procede a dar un tratamiento a la imagen.

Tomando en cuenta el estudio del arte de la dimensión topológica, la dimensión de Hausdorff-Besicovitch y el Conteo Box-Counting, enunciados en el capítulo anterior, a continuación se describe a detalle los pasos a seguir del tratamiento de imagen que se le da a una mamografía, para obtener un diagnóstico computarizado mediante la teoría de dimensión fractal de Hausdorff-Besicovich.

- 1.- Lectura de la mamografía.
- 2.- Selección de la región de interés, en donde se considera que se tiene la anomalía.
- 3.- La región seleccionada cambia el fondo en negro, y la anomalía en color blanco (sólo toma el contorno de la anomalía). Es decir se usa el comando `rgb2gray` que convierte imágenes RGB a escala de grises por eliminación de información de matiz y saturación mientras retiene la luminisencia. Así mismo se utiliza el comando `im2bw` para convertir la imagen en una imagen por umbralización, es decir, convierte la intensidad de la imagen a blanco y negro.
- 4.- Cambia el contorno a color negro y el fondo en color blanco. En éste punto se usa el algoritmo K-vecinos, en donde toma alrededor de un pixel que contenga parte de la anomalía 8 pixeles, toma en cuenta el valor más alto de estos 8 pixeles y le asigna ese valor más alto de la intensidad de cada pixel, por ejemplo, si individualmente cada uno de estos 8 pixeles tienden a ser más blancos que negros, el algoritmo automáticamente le asigna el color totalmente blanco y viceversa.(CITAR EL ALGORITMO)
- 5.- Se guarda la imagen en `.bmp`, para que se pueda realizar su análisis en ImageJ del Conteo Box-Counting.

A continuación se muestra los algoritmos numéricos de estos pasos mencionados.

Algoritmo correspondiente al paso número 1, 2, 3, ver figura 3.1, donde se hace lectura de la imagen, se binariza, se traza la anomalía, definiendo la anomalía y su contorno.



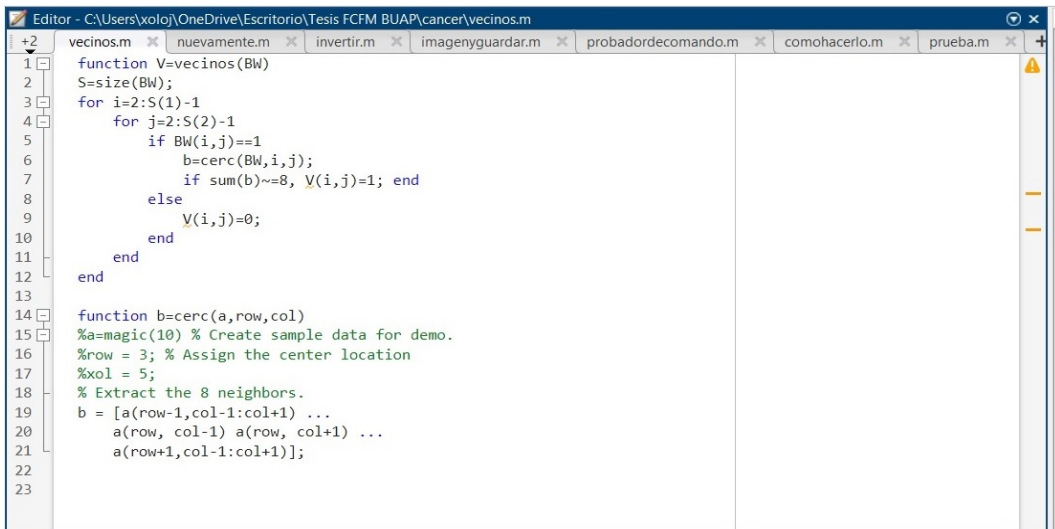
```

Editor - D:\cancer\prueba.m
+2 vecinos.m x nuevamente.m x invertir.m x imagenyguardar.m x probadordecomando.m x comohacerlo.m x prueba.m x
1 c = imread('descarga.jpg');
2 C = rgb2gray(c);
3 D = im2bw(C, 0.65);
4 BW = imcrop(D);
5 imshow(BW);

```

Figura 3.1: Lectura de la imagen mediante `imread('mamo.jpg')`, binarización y trazo del contorno.

Algoritmo correspondiente al paso 4, ver figura 3.2, se hace uso de la función K-vecinos donde traza el contorno en color blanco sobre un fondo negro.



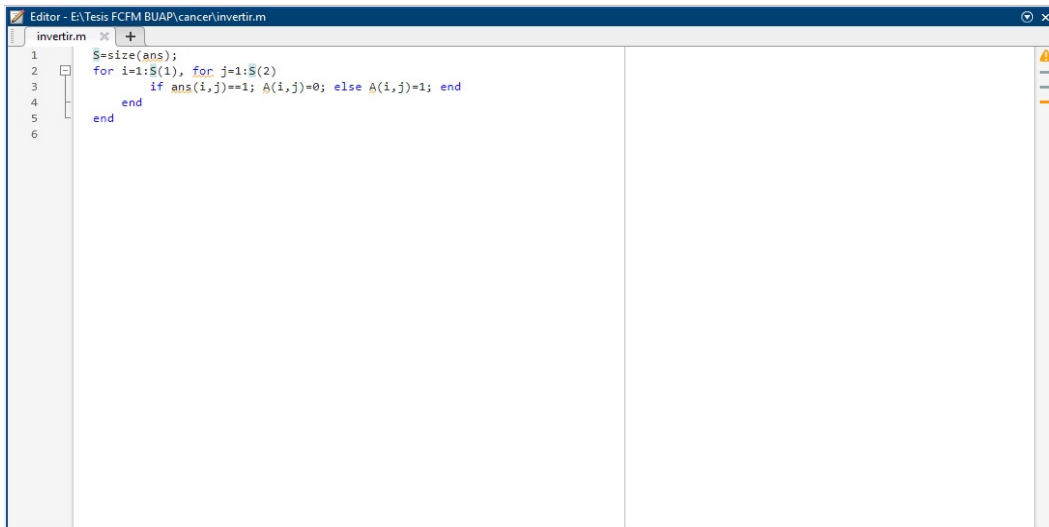
```

Editor - C:\Users\xoloj\OneDrive\Escritorio\Tesis FCFM BUAP\cancer\vecinos.m
+2 vecinos.m x nuevamente.m x invertir.m x imagenyguardar.m x probadordecomando.m x comohacerlo.m x prueba.m x
1 function V=vecinos(BW)
2 S=size(BW);
3 for i=2:S(1)-1
4     for j=2:S(2)-1
5         if BW(i,j)==1
6             b=cerc(BW,i,j);
7             if sum(b)~=8, V(i,j)=1; end
8         else
9             V(i,j)=0;
10        end
11    end
12 end
13
14 function b=cerc(a,row,col)
15 %a=magic(10) % Create sample data for demo.
16 %row = 3; % Assign the center location
17 %xol = 5;
18 % Extract the 8 neighbors.
19 b = [a(row-1,col-1:col+1) ...
20     a(row, col-1) a(row, col+1) ...
21     a(row+1,col-1:col+1)];
22
23

```

Figura 3.2: Uso del algoritmo K-vecinos para la obtención del contorno en un fondo color negro.

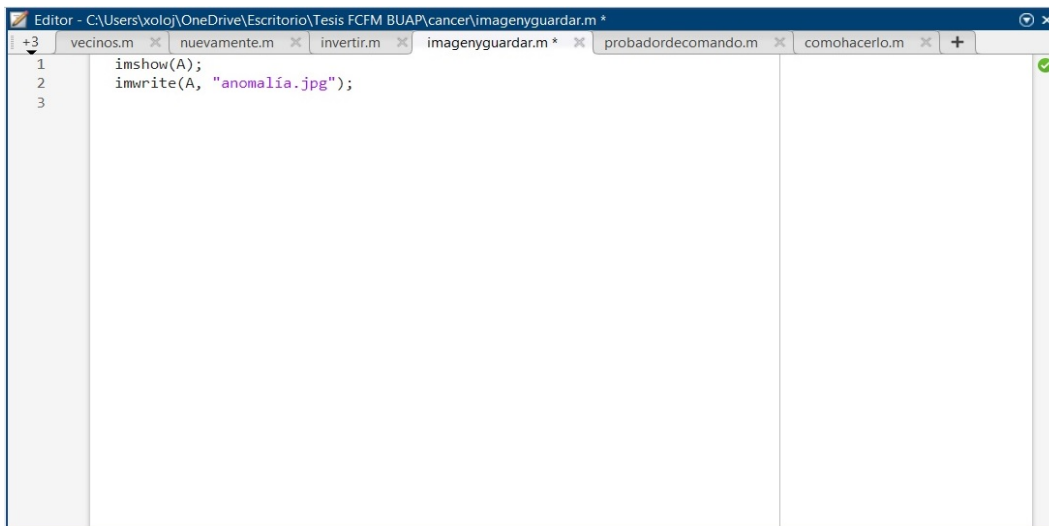
Luego se invierte el contorno blanco a un contorno negro sobre un fondo blanco, ver figura 3.3.



```
Editor - E:\Tesis FCFM BUAP\cancer\invertir.m
invertir.m
1 S=size(ans);
2 for i=1:S(1), for j=1:S(2)
3     if ans(i,j)==1; A(i,j)=0; else A(i,j)=1; end
4     end
5 end
6
```

Figura 3.3: Luego de usar la función K-vecinos, se usa la función `invertir` para obtener la misma imagen pero ahora con el contorno negro sobre un fondo blanco.

Algoritmo correspondiente al paso 5, ver figura 3.4, después del paso cuatro, la imagen se llama a pantalla y se guarda con el nombre que nosotros elegimos con extensión `.bmp`



```
Editor - C:\Users\voloj\OneDrive\Escritorio\Tesis FCFM BUAP\cancer\imagenyguardar.m *
vecinos.m x nuevamente.m x invertir.m x imagenyguardar.m * x probadordecomando.m x comohacerlo.m x +
1 imshow(A);
2 imwrite(A, "anomalía.jpg");
3
```

Figura 3.4: Comandos para guardar imagen obtenida en formato `.bmp`

Ahora, mediante el uso de ImageJ se llama a la imagen obtenida en el paso 5 y guardada en extensión .bmp (también conocido como mapas de bits) [15] [8]. Aquí una vez llamada la imagen, ver figura 3.5, se procede a abrir la pestaña analizar (analyze por su nombre en inglés), de la cual seleccionamos Tools y luego Fractal Box Counter para que el software nos arroje la tabla de tamaño de cajas.

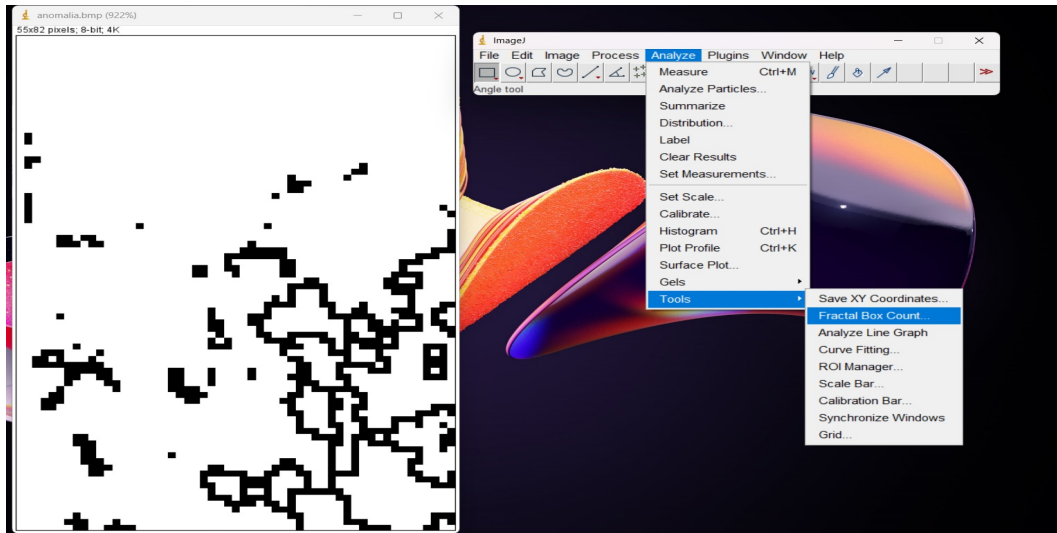


Figura 3.5: Selección de la pestaña Analyze, se procede a seleccionar Tools y por último en la subsección Fractal Box Counter.

La ventana Fractal Box Counter, ver figura 3.6, el software sugiere el tamaño de cajas de la imagen de entrada predeterminado para el análisis de la imagen, es decir, el número de iteraciones que se realizarán, estos valores se pueden modificar.

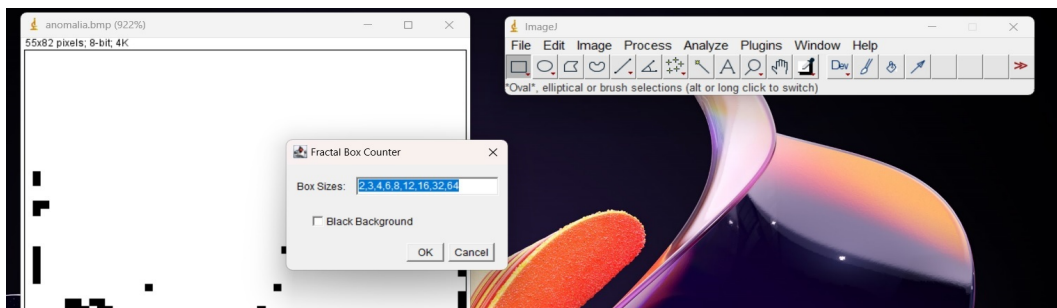


Figura 3.6: El software sugiere los tamaños de cajas predeterminado para el análisis de la imagen, es decir, el número de iteraciones.

Posterior a éste paso, el software arroja una tabla de resultados (result por su nombre en inglés), ver figura 3.7 a) la tabla muestra la columna label que nos indica el número de iteraciones que se realizaron con respecto al tamaño de cajas solicitadas y el renglón representada por el nombre de la imagen analizada (anomalía), nos indica las cajas que contienen parte de la anomalía que dependen del tamaño que se eligió para cada caso, en el inciso b) se muestra la gráfica de dispersión, la cual se obtiene de las iteraciones realizadas y observemos que para el eje x , que está representado por $\log(boxsize)$, representa el tamaño de las cajas que se eligieron para realizar las iteraciones, mientras que el eje y , nos indica el número de cajas que contienen parte de la anomalía, y se representa como $\log(count)$, y cuya D nos indica la dimensión fractal Box-Counting de Hausdorff-Besicovitch.

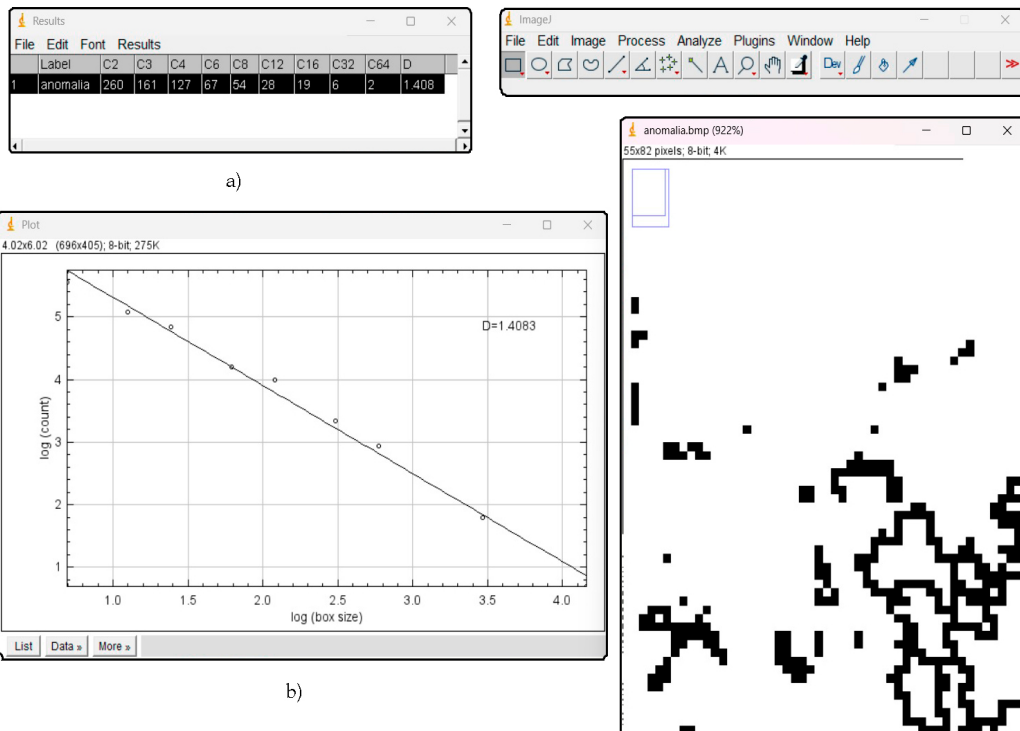
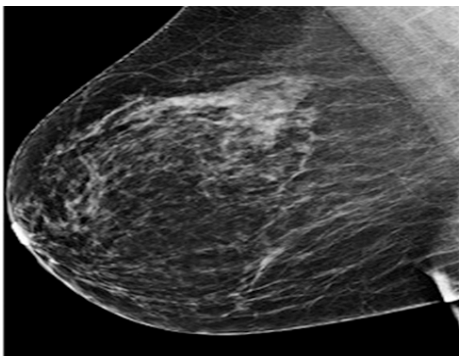


Figura 3.7: a) Obtención de la tabla de resultados indicando el tamaño y número de cajas generadas por el software, b) gráfica de dispersión obtenida del número de iteraciones e indica la dimensión fractal Box-Counting de Hausdorff-Besicovitch.

3.2. Análisis de resultados

En éste apartado se muestran resultados de imágenes de mamografías con anomalías las cuales han sido verificadas por especialistas en el área. Cada imagen es tratada de acuerdo a los pasos detallados anteriormente, y cada una de estas imagenes son analizadas, dichas imagenes tratadas son tomadas de la red.

En la figura 3.8 a) nos muestra la mamografía de una de las mamas que contiene anomalías, b) es la imagen tratada mediante MatLab, guardada en extesión .bmp, la cual es utilizada para el análisis mediante ImageJ, c) la tabla nos muestra el tamaño de cajas que el software automaticamente arroja, d) nos muestra la gráfica de dispersión obtenida de las iteraciones realizadas y donde $D = 1.5363$, que nos indica la dimensión fractal Box-Counting de Hausdorff-Besicovitch.



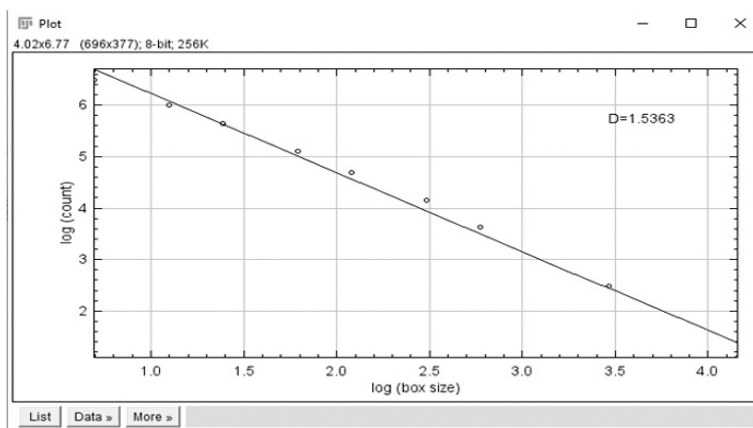
a) Mamografía con lesión en una mama.



b) Imagen obtenida del tratamiento de imagen mediante MatLab, guarda en extensión .bmp para su análisis en ImageJ.

Label	C2	C3	C4	C6	C8	C12	C16	C32	C64	D
1 mamografía2	658	403	281	164	109	64	38	12	3	1.536

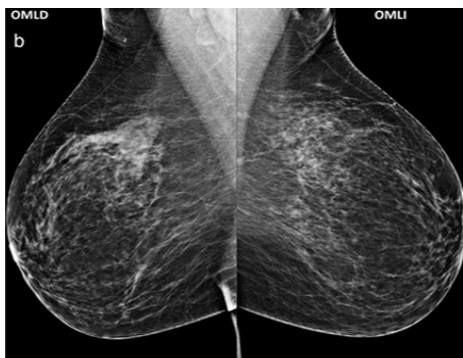
c) Tabla que muestra el número de iteraciones realizadas mediante ImageJ



d) Gráfica de dispersión y dimensión fractal obtenidas de las iteraciones realizadas y obteniendo la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch, con $D=1.5363$

Figura 3.8: a) Se muestra mama con anomalías, b) se obtiene la imagen tratada con extensión .bmp, c) se utiliza la imagen para el análisis mediante ImageJ y cuya tabla nos indica el tamaño de cajas y que corresponde al número de iteraciones realizadas, d) al analizar obtenemos también la gráfica de dispersión, así como la dimensión fractal Box-Counting de Hausdorff-Besicovitch $D = 1.5363$.

En la figura 3.9 a) podemos observar lesiones en ambas mamas, con mayor desarrollo en la mama izquierda, b) es la imagen tratada mediante MatLab, guardada en extensión .bmp, la cual es utilizada para el análisis mediante ImageJ, c) la tabla nos muestra el tamaño de cajas que el software automáticamente arroja, d) nos muestra la gráfica de dispersión obtenida de las iteraciones realizadas y donde $D = 1.3956$, que nos indica la dimensión fractal Box-Counting de Hausdorff-Besicovitch.



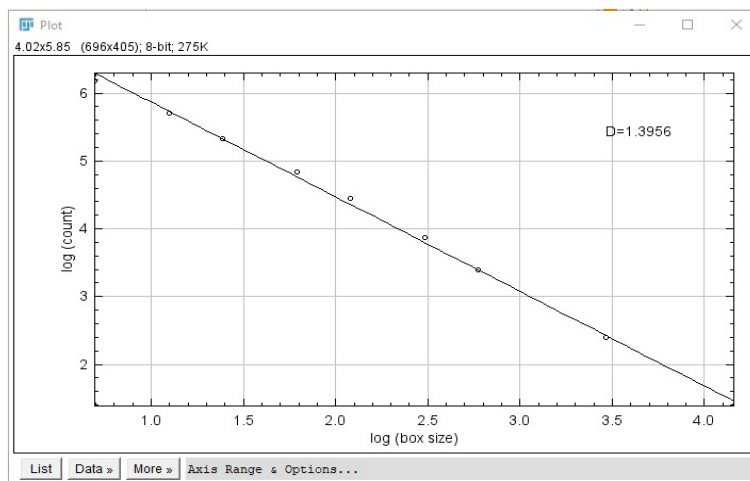
a) Mamografía con lesión en ambas mamas



b) Imagen obtenida del tratamiento de imagen mediante MatLab con extensión .bmp, para el análisis mediante ImageJ.

File	Edit	Font	Results													
Label	C2	C3	C4	C6	C8	C12	C16	C32	C64	D						
1	mamografia2	658	403	281	164	109	64	38	12	3	1.536					

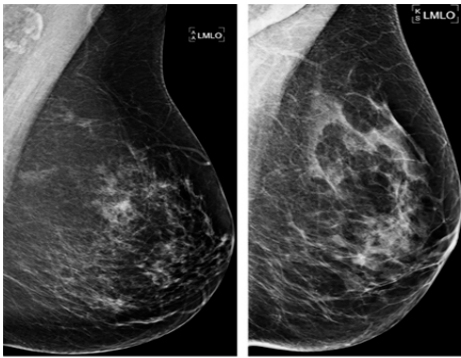
c) Tabla que muestra el número de iteraciones realizadas mediante ImageJ



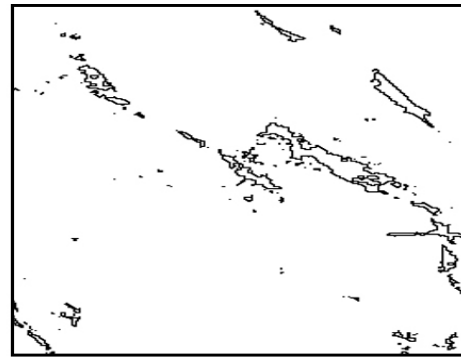
d) Gráfica de dispersión y dimensión fractal obtenidas de las iteraciones realizadas, con una dimensión fractal Box-Counting de Hausdorff-Besicovitch $D=1.3956$

Figura 3.9: a) Se muestran mamas con anomalías, con mayor desarrollo en la mama izquierda, b) se obtiene la imagen tratada con extensión .bmp, c) se utiliza la imagen para el análisis mediante ImageJ y cuya tabla nos indica el número de iteraciones realizadas, d) al analizar obtenemos la gráfica de dispersión, así como la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch $D = 1.3956$.

En la figura 3.10 a) nos muestra lesión en ambas mamas, denotando mayor desarrollo en la mama derecha, b) es la imagen tratada mediante MatLab, guardada en extensión .bmp, la cual es utilizada para el análisis mediante ImageJ, c) la tabla nos muestra el tamaño de cajas que el software automáticamente arroja, d) nos muestra la gráfica de dispersión obtenida de las iteraciones realizadas y donde $D = 1.1601$, que nos indica la dimensión fractal Box-Counting de Hausdorff-Besicovitch.



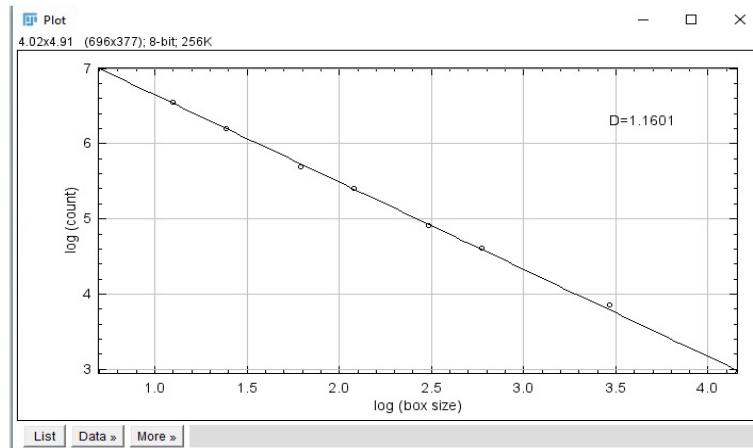
a) Mamografía con lesión en ambas mamas.



b) Imagen obtenida del tratamiento de imagen mediante MatLab, guarda en extensión .bmp para su análisis en ImageJ.

Label	C2	C3	C4	C6	C8	C12	C16	C32	C64	D	
1	mamo3	1101	702	495	296	224	136	101	47	19	1.160

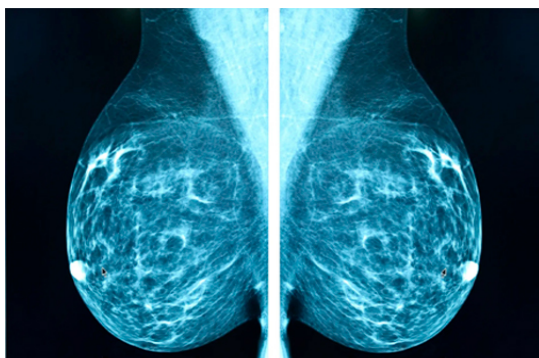
c) Tabla que muestra el número de iteraciones realizadas mediante ImageJ



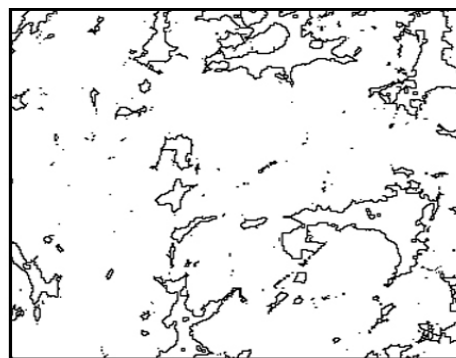
d) Gráfica de dispersión y dimensión fractal obtenidas de las iteraciones realizadas obteniendo la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch, con $D=1.1601$

Figura 3.10: a) Se muestran mamas con anomalías, con mayor desarrollo en la mama derecha, b) mediante MatLab se obtiene la imagen tratada con extensión .bmp, c) se utiliza la imagen para el análisis mediante ImageJ y cuya tabla nos indica el número de iteraciones realizadas, d) al analizar obtenemos la gráfica de dispersión, así como la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch $D = 1.601$.

En la figura 3.11 a) se muestra mamografía con lesiones en ambas mamas, observando desarrollo en las partes superior de las mamas, b) es la imagen tratada mediante MatLab, guardada en extensión .bmp, la cual es utilizada para el análisis mediante ImageJ, c) la tabla nos muestra el tamaño de cajas que el software automáticamente arroja, d) nos muestra la gráfica de dispersión obtenida de las iteraciones realizadas y donde $D = 1.3124$, que nos indica la dimensión fractal Box-Counting de Hausdorff-Besicovitch.



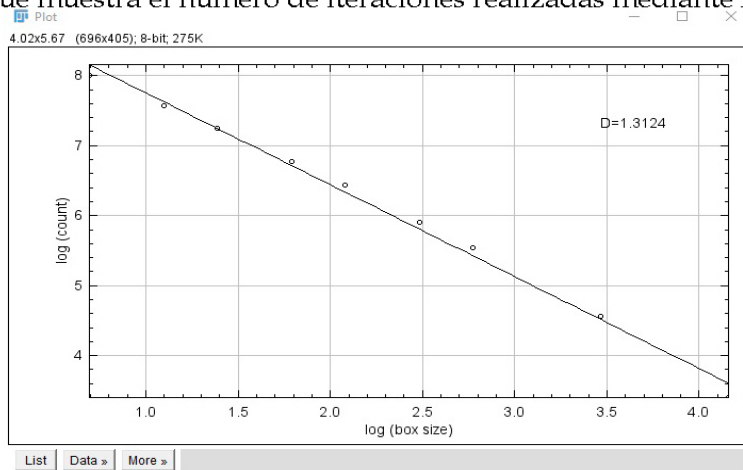
a) Mamografía con lesiones en ambas mamas .



b) Imagen obtenida del tratamiento de imagen mediante MatLab, guarda en extensión .bmp para su análisis en ImageJ.

Label	C2	C3	C4	C6	C8	C12	C16	C32	C64	D
1 mam04	3010	1927	1409	876	622	369	256	96	30	1.312

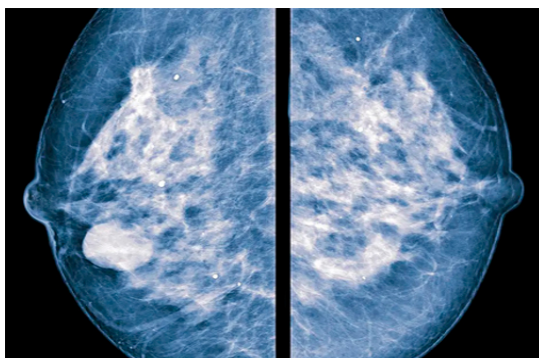
c) Tabla que muestra el número de iteraciones realizadas mediante ImageJ



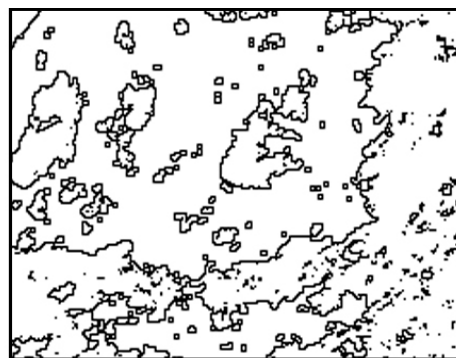
d) Gráfica de dispersión y dimensión fractal obtenidas de las iteraciones realizadas y obteniendo la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch, con $D=1.3124$

Figura 3.11: a) Se muestran mamas con anomalías, con un desarrollo uniforme en ambas mamas, b) se obtiene la imagen tratada con extensión .bmp mediante el uso de MatLab c) se utiliza la imagen para el análisis mediante ImageJ y cuya tabla nos indica el número de iteraciones realizadas, d) al analizar obtenemos la gráfica de dispersión, así como la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch $D = 1.3124$.

En la figura 3.12 a) se observa lesión en ambas mamas pero además se observan indicios de microcalcificaciones que no afectan en el análisis de la mamografía, b) es la imagen tratada mediante MatLab, guardada en extensión .bmp, la cual es utilizada para el análisis mediante ImageJ, c) la tabla nos muestra el tamaño de cajas que el software automáticamente arroja, d) nos muestra la gráfica de dispersión obtenida de las iteraciones realizadas y donde $D = 1.5323$, que nos indica la dimensión fractal Box-Counting de Hausdorff-Besicovitch



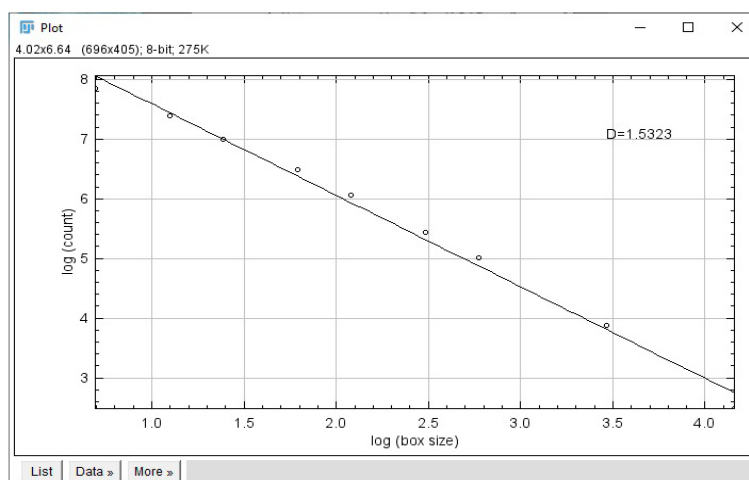
a) Mamografía con lesión en ambas mamas y microcalcificaciones.



b) Imagen obtenida del tratamiento de imagen mediante MatLab, para el análisis mediante ImageJ

Label	C2	C3	C4	C6	C8	C12	C16	C32	C64	D	
1	mamo5	2560	1607	1085	659	426	231	150	48	12	1.532

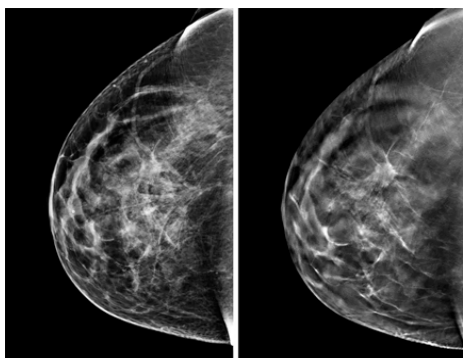
c) Tabla que muestra el número de iteraciones realizadas mediante ImageJ



d) Gráfica de dispersión y dimensión fractal obtenidas de las iteraciones realizadas y obteniendo la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch, con $D=1.5323$

Figura 3.12: a) Se muestran mamas con anomalías, estas muestra desarrollo de microcalcificaciones, b) se obtiene la imagen tratada con extensión .bmp mediante el uso de MatLab, c) se utiliza la imagen para el análisis mediante ImageJ y cuya tabla nos indica el número de iteraciones realizadas, d) al analizar obtenemos la gráfica de dispersión, así como la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch $D = 1.5323$.

En la figura 3.13 a) mamografía con lesiones en ambas mamas, se nota que el desarrollo de la lesión es uniforme en ambas mamas, b) es la imagen tratada mediante MatLab, guardada en extensión .bmp, la cual es utilizada para el análisis mediante ImageJ, c) la tabla nos muestra el tamaño de cajas que el software automáticamente arroja, d) nos muestra la gráfica de dispersión obtenida de las iteraciones realizadas y donde $D = 1.1971$, que nos indica la dimensión fractal Box-Counting de Hausdorff-Besicovitch



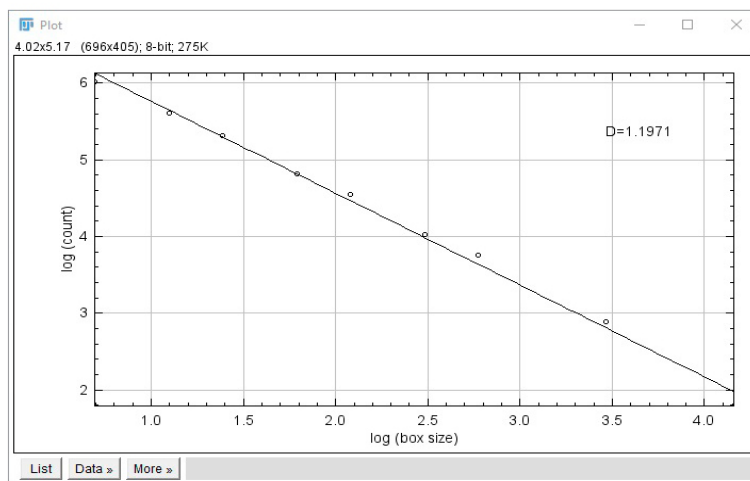
a) Mamografía con lesión en ambas mamas



b) Imagen obtenida del tratamiento de imagen mediante MatLab, para el análisis mediante ImageJ

Label	C2	C3	C4	C6	C8	C12	C16	C32	C64	D	
1	mamo6	409	273	204	123	95	56	43	18	6	1.197

c) Tabla que muestra el número de iteraciones realizadas mediante ImageJ



d) Gráfica de dispersión y dimensión fractal obtenidas de las iteraciones realizadas y obteniendo la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch, con $D=1.197$

Figura 3.13: a) Se muestran mamas con anomalías, estas muestra desarrollo casi uniforme en ambas mamas, b) se obtiene la imagen tratada con extensión .bmp mediante el uso de MatLab c) se utiliza la imagen para el análisis mediante ImageJ y cuya tabla nos indica el número de iteraciones realizadas, d) al analizar obtenemos la gráfica de dispersión, así como la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch $D = 1.1971$.

Los resultados obtenidos del análisis de los 6 casos con lesiones clasificadas por BI-RADS [17], se muestra en la tabla 3.1, donde la primera columna se cita la mamografía analizada, en la segunda columna se muestra el resultado de la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch la cual denotamos por DFH-B, obtenido para cada mamografía analizada, en la tercera columna se muestra el tipo de lesión de cada mamografía analizada, el cual fue confirmada por el radiólogo previamente. Para la clasificación de las 6 mamografías analizadas como caso benigno o maligno, se hará de acuerdo a la dimensión fractal Box-Counting de Hausdorff-Besicovitch obtenida, basada en el estudio realizado por el autor Yung-Sheng Chen en Image Processing [1] y cuyo rango de clasificación está dada de la siguiente manera, la lesiones benignas tienen dimensiones fractales de Hausdorff-Besicovitch más bajas, entre $1 - 1.50$, mientras que las lesiones malignas presentan dimensiones fractales de Hausdorff-Besicovitch más altas, entre $1.35 - 2$. En la tabla 3.2 se muestra los 6 casos analizados, 4 son benignas estas muestran una dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch más bajas menores a 1.4 y 2 son malignas tienen mayores dimensiones fractales de Hausdorff-Besicovitch, mayores a 1.4.

Mamografía analizada	DFH-B	Tipo de lesión
Figura 3.8	1.5363	Maligna
Figura 3.9	1.3956	Benigna
Figura 3.10	1.1601	Benigna
Figura 3.11	1.3124	Benigna
Figura 3.12	1.5323	Maligna
Figura 3.13	1.1971	Benigna

Tabla 3.1: Resultados obtenidos del análisis de las 6 mamografías, lo que muestra la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch obtenida y el tipo de lesión que esta tiene.

Tipo de lesión	DFH-B	Casos
Benigno	<1.4	4 (100 %)
Maligno	>1.4	2 (100 %)

Tabla 3.2: Dimensiones fractales del análisis de las 6 mamografías analizadas en la presente tesis.

Capítulo 4

Conclusiones

En el presente trabajo de tesis, se ha realizado una revisión del estado del arte de fractales, en la cual se revisa los antecedentes históricos de fractales, haciendo una diferencia existente entre la geometría euclidiana y la geometría fractal con respecto a su dimensión, en la geometría euclidiana la dimensión es entera, conocida como la dimensión topológica, pero en la geometría fractal dicha dimensión es fraccionaria no entera, pero que puede absorber la dimensión topológica, para ello haciendo énfasis en sus propiedades de los fractales como lo es la irregularidad del fractal y su dimensión de Hausdorff-Besicovitch, la cual ha influenciado para el desarrollo de nuevo conocimiento dentro de distintas áreas de interés, en particular la medicina. La dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch para el análisis de mamografías ha demostrado que mediante el uso del sistema Box-Counting basadas en el procesamiento y tratamiento de imágenes mediante MatLab e imageJ, arroja resultados numéricos de la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch, basados en las BI-RADS (por sus siglas en inglés), lo cual permitió clasificar los resultados obtenidos basado en la investigación del autor Yung-Sheng Chen en Image Processing, dichos resultados nos indican que debido a la irregularidad que presenta el contorno del tejido de la mama la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch obtenida es mayor, mientras un contorno regular tiene dimensiones fractales de Hausdorff-Besicovitch más bajas, es decir, una dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch mayor con un contorno irregular nos indica si la lesión está asociada a un caso maligno, mientras que una dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch baja con un contorno regular está asociada a un caso benigno. El presente

método estudiado, en la presente tesis, permite la clasificación de lesiones en la mama, basado en un rango que aún no es consistente pues hay indicios de que lesiones benignas presenten dimensiones fractales de Hausdorff-Besicovitch más altas de lo normal, y que lesiones malignas presente dimensiones fractales de Hausdorff-Besicovitch más bajas.

Bibliografía

- [1] Chen, Y. (2009). Image Processing. Intech Open.
- [2] Barnsley, M. F. (2014). Fractals Everywhere (English Edition) (2.a ed.). Academic Press.
- [3] Jurgens H., Peitgen H. Y Saupe D. (1992) Fractals for the Classroom. Springer.
- [4] Mandelbrot, B. B. (1997). La geometría fractal de la naturaleza. Tusquets.
- [5] Domenech J. F. (2020) Dimensión fractal como descriptor 3D. Universitat d'Alacant.
- [6] Mandelbrot, B., Jones, P. W., Evertsz, C. J. G. y Gutzwiller, M. C. (2013). Fractals and Chaos: The Mandelbrot Set and Beyond. Springer Publishing.
- [7] Millado, P. y Iwanishevich, M. L. (2017). Dimensión fractal y Mamografía; un estudio local. Río Gallegos, Pcia. de Santa Cruz. Informes Científicos Técnicos - UNPA, 9(2), 134-149. <https://doi.org/10.22305/ict-unpa.v9i2.250>
- [8] Mateos-Perez, J. M. y Pascau, J. (2013). Image Processing with ImageJ (English Edition). Packt Publishing.
- [9] Lapidus, M. L., Radunovic, G. y Zubrinic, D. (2017). Fractal Zeta Functions and Fractal Drums: Higher-Dimensional Theory of Complex Dimensions (2017 ed.). Springer.
- [10] Falconer, K. (2014). Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. Wiley.
- [11] Edgar, G. (2007). Measure, Topology, and Fractal Geometry (2nd ed.). Springer.

- [12] Audrey Karperien, Charles Sturt University. (s. f.). «Box Counting Options». Recuperado 2 de noviembre de 2022, de <https://imagej.nih.gov/ij/plugins/fraclac/FLHelp/BoxCountingOptions.htm>
- [13] Audrey Karperien, Charles Sturt University. (s. f.-b). FracLac Glossary. Recuperado 2 de noviembre de 2022, de <https://imagej.nih.gov/ij/plugins/fraclac/FLHelp/Glossary.htm>
- [14] Audrey Karperien, Charles Sturt University. (s. f.-b). «Box Counting Options». Recuperado 2 de noviembre de 2022, de <https://imagej.nih.gov/ij/plugins/fraclac/FLHelp/BoxCountingOptions.htm>
- [15] Tipos de mapas de bits - Windows Forms .NET Framework. (2022, 27 septiembre). Microsoft Learn. <https://learn.microsoft.com/es-es/dotnet/desktop/winforms/advanced/types-of-bitmaps?view=netframeworkdesktop-4.8>
- [16] Eduard Rivera Henao y Ricardo López Varona. (2011). Geometría fractal y transformada de Fourier. *Scientia et technica*, 2(48), 269-274. <https://doi.org/10.22517/23447214.1309>
- [17] Camacho-Piedra, C. y Espíndola-Zarazúa, V. (2019). Actualización de la nomenclatura BI-RADS® por mastografía y ultrasonido. *Revista Anales de Radiología México*, 17(2). <https://doi.org/10.24875/arm.m18000015>
- [18] Héctor Garrido: el fotógrafo que amaba la geometría fractal y Doñana. (2015, 11 noviembre). www.nationalgeographic.com.es. <https://www.nationalgeographic.com.es/mundo-ng/hector-garrido-el-fotografo-que-amaba-la-geometria-fractal-y-donana-2-9873/10>