BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO-MATEMÁTICAS

"UN ESTUDIO SEMÁNTICO DE LÓGICAS NO CLÁSICAS CON UN ENFOQUE TOPOLÓGICO"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA
CONSTANTINO MOLINA VÁZQUEZ

ASESOR
DR. IVÁN MARTÍNEZ RUIZ

Puebla, Pue., noviembre de 2024

BUAP

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

CONSTANTINO MOLINA VÁZQUEZ

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 16 de octubre de 2024, con la tesis titulada:

Un estudio semántico de lógicas no clásicas con un enfoque topológico

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 16 de octubre de 2024.

DR. RAÚL ESCOBEDO CONDE
COORDINADOR DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
(222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Dedicatoria

A mi madre, que siempre me ha impulsado en todo.

Agradecimientos

Al Conahcyt, por la beca de estudios que me otorgó.

A mi asesor de tesis, por su guía y su paciencia.

Al comité revisor, por sus observaciones.

A mis profesores, por brindarme la luz del conocimiento.

A mis compañeros, por su camaradería y labor de equipo.

Al personal administrativo, por su ardua labor con los trámites.

Y a mi familia, por el ánimo que siempre me ha dado.

Índice

Capítulo 1

Introducción

La lógica formal tiene sus antecedentes en los trabajos de Platón y de Aristóteles, quienes se interesaron por establecer sistemas formales de argumentación. Desarrollaron lo que ahora se denomina lógica aristotélica, que fue la principal estructura formal de la lógica hasta finales de la Edad Media salvo algunas variaciones desarrolladas durante esa época.

En el siglo XVII, Gottfried Wilhelm Leibniz, influenciado por los símbolos pictográficos empleados por diversas culturas antiguas, propuso el desarrollo de una notación simbólica y de reglas válidas de deducción, que permitieran determinar cuándo una proposición era consecuencia de proposiciones previamente establecidas.

No es sino a partir de la última etapa del siglo XIX y durante el siglo XX que se presentan grandes avances en el estudio de la lógica matemática. Podemos citar, por mencionar algunos, a los siguientes matemáticos y filósofos de esa época, quienes contribuyeron enormemente al desarrollo de esta rama: Bolzano, Cantor, Dedekind, Frege, Peano, Peirce, Schröder, Boole, De Morgan, y Venn, quienes también tuvieron una influencia muy relevante en otras áreas de la matemática.

Posteriormente, durante la segunda mitad del siglo XX continuó el desarrollo de la lógica matemática y su aplicación en otras áreas de las matemáticas. Logico-matemáticos como Russell, Whitehead, Gödel, Turing, Kripke, Lewis, Tarski, Lukasiewicz y Heytig realizaron las contribuciones más importantes al área. Con ellos fueron apareciendo los resultados que dotaron a esta disciplina de la fisonomía que presenta en la actualidad.

Se ha generado gran cantidad de lógicas formales diferentes a la lógica clásica. Esto ha sido técnicamente posible, en primer lugar, por la facilidad para modificar la sintaxis de cada cada una de ellas (en sus axiomas, en sus conectivos y en sus reglas de inferencia) y, en segundo lugar, por la aplicación, dentro de las mismas, de conceptos y resultados de las diversas teorías de la matemática (álgebra y topología preponderantemente). La retroalimentación entre la lógica y la matemática es vasta y práctica.

En este trabajo realizaremos un tratamiento topológico a la semántica de la lógica modal, principalmente sobre modelos reflexivos y transitivos, para pasar luego a establecer modelos topológicos sobre espacios preordenados y, por último, a la demostración del teorema de solidez topologico-modal del sistema **S4** (todo teorema es fórmula válida) y a la del teorema de completitud para el mismo (toda fórmula válida es teorema).

Cabe destacar que este tratamiento topológico puede verse como aplicación de una teoría sobre otra teoría, o bien como generalización de ésta última. Y por esto mismo posee una ventaja: disponemos de dos visiones de nuestro objeto de estudio, lo cual puede y debe agilizar la obtención de resultados. Sólo se pide al lector nociones de lógica modal y de topología básica.

A grandes rasgos, el esquema de este trabajo es el siguiente:

1. Recordatorio de lógica clásica y de otras lógicas, así como de topología.

2. Establecimiento de los resultados que tomaremos de la lógica modal.
3. Modelación topológica de la semántica modal.
4. Demostración de los teoremas de solidez y de completitud del sistema **S4**.

Un último pensamiento nos acomete: la posibilidad de establecer las ideas plasmadas en el presente trabajo como punto de partida para desarrollar una tesis doctoral.

Capítulo 2

Semánticas modales

La sintaxis y la semántica constituyen el cuerpo teórico del razonamiento formalizado, el cual va más allá de la intuición y de la observación aun cuando éstas nos puedan proveer de juicios correctos.

En la lógica clásica, también llamada cálculo proposicional clásico, la sintaxis formaliza el proceso de deducción de los sistemas lógicos. Este proceso consiste, primero, en la obtención mecánica de teoremas a partir de proposiciones menos complejas dentro del mismo sistema y, segundo, en la asignación de valores de verdad a estos teoremas. Por otro lado, la semántica cumple con la tarea de otorgarles validez.

La lógica modal ofrece una sintaxis ampliada respecto a la sintaxis de la lógica clásica, es decir, contiene a ésta y añade nuevos elementos, concretamente dos conectivos y dos reglas de inferencia. Y en lo tocante a la semántica, introduce tres nociones: la de *mundos posibles*, entornos en donde las proposiciones pueden o no suceder, la de *relación de accesibilidad*, manera de relacionar unos mundos con otros, y la de *valuación*, indicador de los mundos en donde las proposiciones son verdaderas. Esta ampliación de la lógica clásica a la lógica modal significa y representa un acercamiento del formalismo a la vida cotidiana, entendiéndose ésta como el parecido de las proposiciones modales a algunas afirmaciones que hacemos frecuentemente.

2.1. Sistemas lógicos

Toda formalización matemática de la lógica se realiza por medio de unas estructuras creadas para ello, llamadas sistemas logico-matemáticos, o sistemas lógicos para brevedad, mediante las cuales se maneja con precisión la construcción y la validez de las proposiciones. El presente trabajo se avoca al cálculo proposicional, es decir, a la lógica de orden cero.

Dentro de un sistema lógico, cada proposición posee una representación única, llamada *fórmula*, que no es sino la versión operacional de la proposición, lista para serle aplicadas las funciones del sistema.

Definición 2.1. Un *sistema lógico* es una estructura que posee tres componentes: *lenguaje, sintaxis y semántica.*

- El lenguaje es un conjunto de fórmulas.
- La sintaxis es el aparato deductivo del sistema. Sus partes son los *conectivos*, operaciones entre fórmulas para la obtención de más fórmulas, los *símbolos de agrupación* ( ), o paréntesis, utilizados en lógica del mismo modo que en aritmética y en álgebra, y las *reglas de inferencia*, esquemas de silogismos de fórmulas.
- La semántica es la parte que otorga *validez* a las fórmulas. No está presente en todos los sistemas.

Tanto en el sistema de la lógica clásica, también llamado cálculo proposicional clásico, como en el de la lógica modal, las fórmulas más simples generan a las más complejas mediante la acción de los conectivos. Estos conectivos son el de conjunción ($\wedge$), el de disyunción ($\vee$), el de implicación ($\rightarrow$), el de doble implicación ($\leftrightarrow$) y el de negación

($\neg$), binarios los cuatro primeros y unitario el último. Además, la única regla de inferencia es la de *Modus Ponens*: $(\frac{\varphi, \varphi\to\psi}{\psi})$, donde φ y ψ son fórmulas.

Llamaremos *fórmulas atómicas*, o *átomos*, a las fórmulas más simples, y **Prop** al conjunto que conforman, que obviamente es un subconjunto del lenguaje. No poseen conectivos, pero se pueden combinar con éstos para formar el resto de las fórmulas del sistema. Las reglas de estas combinaciones constituyen la sintaxis, y cada combinación es una sucesión de fórmulas, conectivos y paréntesis que resultan en una fórmula también, una fórmula mayor que contiene a esta sucesión.

En cada sistema no es necesario utilizar todos los conectivos para construir todas las fórmulas. Esto se debe a que se cumplen algunas equivalencias entre éstos. Por ejemplo, el conectivo de condicional ($\to$) puede ser expresado como combinación del conectivo de negación ($\neg$) con el de disyunción ($\vee$). Recordemos, de nuestros cursos de lógica, la conocida equivalencia entre las expresiones "$p \to q$" y "$\neg(p \vee \neg q)$", donde p y q son fórmulas. En el trabajo presente omitiremos el conectivo de implicación y el de doble implicación, debido a esta última equivalencia para el primero, y a la equivalencia $(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \to q) \wedge (q \to p)]$ para el segundo.

Hasta aquí, los elementos citados conforman el sistema de la lógica clásica, llamado también cálculo proposicional clásico. La lógica modal los contiene también, además de poseer nuevos elementos que describiremos en la siguiente definición.

Definición 2.2. Un *sistema lógico modal* es una estructura que posee los siguientes componentes:

- Las tres partes del sistema clásico: lenguaje, sintaxis y semántica.
- Dos *conectivos modales*:

  $\Box$ (cuadro) o conectivo de necesidad.

$\Diamond$ (diamante) o conectivo de posibilidad.

Para cada fórmula φ, la expresión $\Box\varphi$ se lee "es necesario que φ", y la expresión $\Diamond\varphi$ se lee "es posible que φ".

- La *cerradura modal*: si φ y ψ son fórmulas, también $\Box\varphi$ y $\Diamond\varphi$ son fórmulas, en el entendido de que son tan operables como las fórmulas de la lógica clásica.

- La *dualidad modal*: para toda fórmula φ

$$\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi.$$

El sistema modal es, evidentemente, una ampliación del sistema clásico, pero posee mayor poder expresivo, pues contiene fórmulas que no provienen de este último. Y es que el sistema clásico sólo puede establecer valores de verdad de las proposiciones, pero no tiene elementos que nos digan si éstas son necesarias o posibles, dos atribuciones que la intuición ha utilizado sobre éstas desde siempre. En cambio, el sistema modal puede hacerlo sin dificultad, cosa que aprovecharemos para relacionarlo con espacios topológicos en el capítulo siguiente.

En ambos sistemas lógicos, el clásico y el modal, las fórmulas pasan por un doble proceso: primero, son construídas por la sintaxis y, segundo, son validadas por la semántica.

A partir de aquí, usaremos indistintamente los conceptos "lógica" y "sistema lógico", ya que en este trabajo ambos se referirán a los mismos objetos logico-matemáticos.

Como afirmamos antes, la semántica otorga validez a los teoremas en caso de que éstos la tengan. A diferencia de lo que sucede en la lógica clásica, la cual sólo otorga valor de verdadero o de falso a a cada proposición, en la lógica modal se indica en cuáles mundos es verdadera tal proposición. Es lo que se conoce como interpretación. En cada uno de estos mundos la lógica modal se comporta como la lógica clásica.

Terminemos de definir los elementos de lógica modal que necesitamos:

Definición 2.3. Una *lógica modal normal* (ver [3]) es un sistema modal que contiene el axioma

$$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q),$$

llamado *axioma de distribución* o *axioma K*, y que es cerrada bajo las reglas de inferencia *Modus Ponens, Necesidad y Sustitución Uniforme*:

$$\frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi} \text{ (MP)}, \qquad \frac{\varphi}{\Box \varphi} \text{ (N)}, \qquad \frac{\varphi(p_1, \ldots, p_n)}{\varphi(\psi_1, \ldots, \psi)} \text{ (SU)}$$

Esta lógica es llamada *lógica modal básica* o *sistema modal básico* y se denota por **K** en honor a Saúl Kripke (1940-2022), quien aportó la herramienta más usual y popular que la describe y la desarrolla.

Podemos añadir axiomas modales a **K** y así obtener otros sistemas modales. He aquí los más usuales. La suma $S + a$ denota la menor lógica modal que contiene al sistema S y al axioma a,:

- $\mathbf{KT} = \mathbf{K} + (\Box p \to p)$ (axioma T o reflexivo)
- $\mathbf{K4} = \mathbf{K} + (\Box p \to \Box\Box p)$ (axioma 4 o transitivo)
- $\mathbf{S4} = \mathbf{K} + (\Box p \to p) + (\Box p \to \Box\Box p)$ (ambos axiomas)

Así, en tanto **K** posee sólo un axioma modal, **KT** y **K4** poseen dos cada uno, y **S4** detenta tres. Las propiedades lógicas de estos sistemas junto con su ampliación topológica constituyen la espina dorsal de este trabajo. Trataremos principalmente el sistema **S4**, debido a que su ampliación topológica es la clase de espacios de Alexandroff, como veremos en el siguiente capítulo.

Tómese como nota que en todo sistema modal el axioma T ($\Box p \to p$) equivale a la fórmula $p \to \Diamond p$ y el axioma 4 ($\Box p \to \Box\Box p$) equivale a la fórmula $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ ([5]).

2.2. Semánticas de Kripke

En esta sección nos basaremos en [3].

Definición 2.4. Un *marco de Kripke* es un par (W, R), con W un conjunto no vacío y $R \subseteq W^2$ una relación binaria. Cada elemento de W es llamado *mundo posible*, o simplemente *mundo* o bien *punto*, y en él se puede o no cumplir cada proposición modal.

Decimos que un marco de Kripke (W, R) es finito o infinito según lo sea W, y que es reflexivo y/o transitivo según lo sea R.

Si w es un punto de W, llamaremos *conjunto relacional* de w al conjunto $R(w) = \{v \in W : wRv\}$.

Definición 2.5. Un *modelo de Kripke* es una tripleta (W, R, V), donde (W, R) es un marco de Kripke y $V : \textbf{Prop} \to \mathcal{P}(W)$ es una *función de valuación*, o simplemente *valuación*, la cual asigna a cada fórmula atómica un subconjunto de mundos de W.

Claramente, a partir de un marco se pueden construir tantos modelos como funciones de valuación existan para él.

Definición 2.6. (Satisfacibilidad puntual). Dado un modelo $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ y w un elemento de W, diremos que una fórmula modal φ es *satisfacible por el modelo* $\mathfrak{M}$ *sobre el punto* w, escrito $\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$, si w es elemento de $V(\varphi)$.

Notemos que en la definición **2.5** la valuación V se establece sólo para las fórmulas atómicas (**Prop**), en tanto que en la definición precedente esto se hace para todas las fórmulas modales, tanto atómicas como no atómicas. A continuación utilizaremos un esquema de recursión para establecer con detalle cómo se definen las valuaciones para todas las fórmulas. Esta recursión se realiza sobre la complejidad de la fórmula, es decir, establece las propiedades de cada fórmula a partir de suponerlas ciertas para las subfórmulas de ésta. El primer inciso prueba la afirmación para fórmulas atómicas, en tanto que los tres siguientes lo hacen para los conectivos clásicos, y finalmente los dos últimos corresponden a los conectivos modales. Aquí, p es fórmula atómica y α, β y ψ son cualesquiera fórmulas.

i) Atomicidad:

$\mathfrak{M}, w \vDash p$ si y sólo si $w \in V(p)$, donde p es fórmula atómica;

ii) Conjunción:

$\mathfrak{M}, w \vDash \alpha \wedge \beta$ si y sólo si $\mathfrak{M}, w \vDash \alpha$ y $\mathfrak{M}, w \vDash \beta$, donde $\varphi = \alpha \wedge \beta$;

iii) Disyunción:

$\mathfrak{M}, w \vDash \alpha \vee \beta$ si y sólo si $\mathfrak{M}, w \vDash \alpha$ o $\mathfrak{M}, w \vDash \beta$, donde $\varphi = \alpha \vee \beta$;

iv) Negación:

$\mathfrak{M}, w \vDash \neg\psi$ si y sólo si $\mathfrak{M}, w \nvDash \psi$, donde $\varphi = \neg\psi$;

v) Necesidad:

$\mathfrak{M}, w \vDash \Box\psi$ si y sólo si para todo $v \in W$ sucede que wRv implica $\mathfrak{M}, v \vDash \psi$, donde $\varphi = \Box\psi$;

vi) Posibilidad:

$\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond\psi$ si y sólo si existe $v \in W$ tal que wRv y $\mathfrak{M}, v \vDash \psi$, donde $\varphi = \Diamond\psi$.

Estas definiciones puntuales pueden ser generalizadas a definiciones de conjunto. Es de cierto interés saber sobre qué puntos de W se satisface una fórmula modal dada.

Definición 2.7. (Satisfacibilidad de conjunto). Sea $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ un modelo de Kripke y φ una fórmula modal. Llamamos *conjunto de satisfacibilidad* de φ bajo $\mathfrak{M}$ a

$$[\![\varphi]\!]_{\mathfrak{M}} = \{w \in W : \mathfrak{M}, w \vDash \varphi\}.$$

Si no hay lugar a confusiones, se denotará simplemente $[\![\varphi]\!]$.

La satisfacibilidad de conjunto es una consecuencia de la satisfacibilidad puntual, y mientras esta última se define recursivamente, la primera debe probarse de manera inductiva. El esquema de esta prueba es el mismo que el de la definición **2.6**. Aquí p es fórmula atómica y α y β son fórmulas modales cualesquiera:

i) Atomicidad: $[\![\varphi]\!] = V(p)$ cuando $\varphi = p$;

ii) Conjunción: $[\![\varphi]\!] = [\![\alpha]\!] \cap [\![\beta]\!]$ cuando $\varphi = \alpha \wedge \beta$;

iii) Disyunción: $[\![\varphi]\!] = [\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!]$ cuando $\varphi = \alpha \vee \beta$;

iv) Negación: $[\![\neg\varphi]\!] = W \setminus [\![\varphi]\!]$;

v) Necesidad: $[\![\Box\varphi]\!] = \{w \in W : R(w) \subseteq [\![\varphi]\!]\}$;

vi) Posibilidad: $[\![\Diamond\varphi]\!] = \{w \in W : R(w) \cap [\![\varphi]\!] \neq \varnothing\}$.

Demostración. Sólo necesitamos emplear las propiedades de $\mathfrak{M}$ y la definición de conjunto de satisfacibilidad:

i) Sea $\varphi = p$ una fórmula atómica. Luego su conjunto de satisfacibilidad $[\![\varphi]\!]$ es el conjunto de puntos de W sobre los que el modelo $\mathfrak{M}$ satisface a p. Y tal conjunto no es otra cosa que $V(p)$, pues $w \in [\![\varphi]\!]$ si y sólo si $\mathfrak{M}, w \vDash p$;

ii) Sea $\varphi = \alpha \wedge \beta$ y sea w un punto de W. El modelo $\mathfrak{M}$ satisface a φ sobre w si y sólo si satisface tanto a α como a β sobre w mismo, es decir, a ambos. Esto equivale a decir que

$$w \in [\![\varphi]\!] \text{ si y sólo si } (w \in [\![\alpha]\!] \text{ y } w \in [\![\beta]\!])$$

con lo que
$$[\![\varphi]\!] = [\![\alpha]\!] \cap [\![\beta]\!];$$

iii) Sea $\varphi = \alpha \wedge \beta$ y sea w un punto de W. Aquí $\mathfrak{M}$ satisface a φ sobre w si y sólo satisface a α o bien a β sobre w, es decir, a alguno de los dos. Así que

$$w \in [\![\varphi]\!] \text{ si y sólo si } (w \in [\![\alpha]\!] \text{ o } w \in [\![\beta]\!]);$$

con lo que
$$[\![\varphi]\!] = [\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!];$$

iv) Si el punto w de W pertenece al conjunto $[\![\neg\varphi]\!]$, entonces $\mathfrak{M}$ satisface a $\neg\varphi$ sobre w, y evidentemente $\mathfrak{M}$ no satisface a φ sobre w mismo, con lo que w no está en el conjunto de satisficibilidad de φ, es decir, w no pertenece a $[\![\varphi]\!]$ y por lo tanto está en $W \setminus [\![\varphi]\!]$. El camino de regreso es claramente cierto;

v) $\mathfrak{M}$ satisface a $\Box\varphi$ sobre el punto w de W si y sólo si $\mathfrak{M}$ satisface a φ sobre todo v punto de W relacionado con w (es decir, wRv), lo cual sucede a su vez si y sólo si la pertenencia de v a $R(w)$ implica que v pertenece al conjunto de satisfacibilidad de φ. Esto último equivale a que $R(w)$ está contenido en $[\![\varphi]\!]$.

   Puesto en símbolos, es como sigue:
$$\begin{aligned} [\![\Box\varphi]\!] &= \{w \in W : \mathfrak{M}, w \vDash \Box\varphi\} \\ &= \{w \in W : \forall v \in W \text{ sucede que } wRv \text{ implica } \mathfrak{M}, v \vDash \varphi\} \\ &= \{w \in W : \forall v \in W \text{ sucede que } v \in R(w) \text{ implica } v \in [\![\varphi]\!]\} \\ &= \{w \in W : R(w) \subseteq [\![\varphi]\!]\}; \end{aligned}$$

vi) $\mathfrak{M}$ satisface a $\Diamond\varphi$ sobre el punto w de W si y sólo si $\mathfrak{M}$ satisface a φ sobre algún punto v de W relacionado con w (wRv), lo cual sucede a su vez si y sólo si v pertenece a $R(w)$ y al conjunto de saisfacibilidad de φ. Esto último equivale a que estos dos últimos conjuntos posean intersección no vacía, es decir, $R(w) \cap [\![\varphi]\!] \neq \varnothing$.

Puesto en símbolos, es como sigue:

$$\begin{aligned}
[\![\Diamond\varphi]\!] &= \{w \in W : \mathfrak{M}, w \vDash \Diamond\varphi\} \\
&= \{w \in W : \exists v \in W \text{ tal que } wRv \text{ y } \mathfrak{M}, v \vDash \varphi\} \\
&= \{w \in W : \exists v \in W \text{ tal que } v \in R(w) \text{ y } v \in [\![\varphi]\!]\} \\
&= \{w \in W : \exists v \in W \text{ tal que } v \in R(w) \cap [\![\varphi]\!]\} \\
&= \{w \in W : R(w) \cap [\![\varphi]\!] \neq \varnothing\}.
\end{aligned}$$

□

La satisfacibilidad de conjunto puede cumplirse también en marcos. Para esto basta notar que, dado un marco, una fórmula modal es satisfacible bajo éste si y sólo es satisfacible bajo cualquiera de los modelos que a partir de él se construyen.

Definición 2.8. (Validez). Sea (W, R) un marco de Kripke. Diremos que una fórmula modal φ es *válida* en (W, R), denotado por $(W, R) \vDash \varphi$, si todo modelo $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ construído sobre (W, R) la satisface e tiene $\mathfrak{M} \vDash \varphi$. Y dada una clase $\mathfrak{S}$ de marcos de Kripke, diremos que φ es *válida en la clase* $\mathfrak{S}$, denotado por $\mathfrak{S} \vDash \varphi$, si para cada marco (W, R) que pertenece a $\mathfrak{S}$ se tiene $(W, R) \vDash \varphi$.

Ahora veamos cómo se hereda o se transfiere la satisfacibilidad de un modelo a otro.

Definición 2.9. (Submarco y submarco generado). Sea (W, R) un marco de Kripke, y sean $W' \subseteq W$ y $R' = R \cap (W' \times W')$. A (W', R') se le llama *submarco* de (W, R). Y se dice que es un *submarco generado* si $w \in W'$ y wRv implican $v \in W'$.

Un modelo $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ es un *submodelo* de $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ si (W', R') es submarco de (W, R) y para toda p fórmula atómica se tiene $V'(p) = V(p) \cap W'$. Y es un *submodelo generado* si (W', R') es un submarco generado.

Proposición 2.1. Todo modelo y cualquiera de sus submodelos generados satisfacen las mismas fórmulas modales sobre todos sus puntos, es decir, si $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ es un modelo, $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ es uno de sus submodelos generados, y w' es un punto de W', entonces para cada fórmula modal φ tenemos

$$\mathfrak{M}, w' \vDash \varphi \text{ si y sólo si } \mathfrak{M}', w' \vDash \varphi.$$

Demostración. Procedamos por inducción sobre la complejidad de la fórmula:

i) (Atomicidad) Sea $\varphi = p$, con p fórmula atómica. Sabemos que $\mathfrak{M}, w' \vDash p$ si y sólo si $w' \in V(p)$. Y esto sucede si y sólo si $w' \in V'(p)$ (recordando que w' está en W'), que a su vez sucede si y sólo si $\mathfrak{M}', w' \vDash p$;

ii) (Conjunción) Sea $\varphi = \alpha \wedge \beta$, con α y β fórmulas. Por la inducción, tenemos que $\mathfrak{M}, w' \vDash \alpha \wedge \beta$ implica $[\mathfrak{M}, w' \vDash \alpha$ y $\mathfrak{M}, w' \vDash \beta]$ (separando), lo que a su vez implica $[\mathfrak{M}', w' \vDash \alpha$ y $\mathfrak{M}', w' \vDash \beta]$ (induciendo), y que finalmente nos da $\mathfrak{M}', w' \vDash \alpha \wedge \beta$ (reagrupando);

iii) (Disyunción) Sea $\varphi = \alpha \vee \beta$, con α y β fórmulas. Por la inducción, tenemos que $\mathfrak{M}, w' \vDash \alpha \vee \beta$ implica $[\mathfrak{M}, w' \vDash \alpha$ o $\mathfrak{M}, w' \vDash \beta]$ (separando), lo que a su vez implica $[\mathfrak{M}', w' \vDash \alpha$ o $\mathfrak{M}', w' \vDash \beta]$ (induciendo), y que finalmente nos da $\mathfrak{M}', w' \vDash \alpha \vee \beta$ (reagrupando);

iv) (Negación) Sea $\varphi = \neg\psi$, con ψ fórmula. Por la inducción, sabemos que $\mathfrak{M}, w' \vDash \psi$ si y sólo si $\mathfrak{M}', w' \vDash \psi$. Esto es lo mismo que la equivalencia de sus negaciones, es decir, $\neg(\mathfrak{M}, w' \vDash \psi)$ si y sólo si $\neg(\mathfrak{M}', w' \vDash \psi)$, lo cual a su vez equivale a que $\mathfrak{M}, w' \nvDash \psi$ si y sólo si $\mathfrak{M}', w' \nvDash \psi$, que finalmente resulta en $\mathfrak{M}, w' \vDash \neg\psi$ si y sólo si $\mathfrak{M}', w' \vDash \neg\psi$;

v) (Necesidad) Sea $\varphi = \Box\psi$, con ψ fórmula. Como en los incisos precedentes, por inducción sabemos que $\mathfrak{M}, w' \vDash \psi$ si y sólo si $\mathfrak{M}', w' \vDash \psi$. Ahora probemos, por partes, que $\mathfrak{M}, w' \vDash \Box\psi$ si y sólo si $\mathfrak{M}', w' \vDash \Box\psi$

($\Rightarrow$) Sea $v' \in W'$ tal que $w'R'v'$. Luego $w'Rv'$ pues $R' \subseteq R$ y entonces $\mathfrak{M}, v' \vDash \psi$, lo cual implica $\mathfrak{M}', v' \vDash \psi$ por hipótesis, y por lo tanto $\mathfrak{M}', w' \vDash \Box\psi$.

($\Leftarrow$) Sea $v \in W$ tal que $w'Rv$. Luego $w'R'v$ debido a que $R' \subseteq R$, como en el apartado de arriba. Y debido a que $\mathfrak{M}'$ es submodelo generado de $\mathfrak{M}$, entonces $v \in W'$, así que $\mathfrak{M}', v \vDash \psi$. Esto implica, por hipótesis, $\mathfrak{M}, v \vDash \psi$, resultando en que $\mathfrak{M}, w' \vDash \Box\psi$.

vi) (Posibilidad) La prueba aquí se da debido a la dualidad modal $\Diamond\varphi \equiv \neg\Box\neg\varphi$ y a que arriba hemos probado el inciso de negación.

$\Box$

Corolario 2.1. Todo submarco generado satisface las mismas fórmulas que el marco del cual proviene, es decir, si (W', R') es un submarco generado de (W, R) y φ es una fórmula, entonces

$$(W, R) \vDash \varphi \text{ implica } (W', R') \vDash \varphi.$$

Demostración. La prueba se sigue de aplicar la proposición anterior a todos y cada uno de los submodelos generados de (W', R') y sobre todos y cada uno de los puntos w' de W'. $\Box$

Definición 2.10. (p-morfismo e imagen p-mórfica). Sean (W, R) y (W', R') marcos de Kripke. Una función $f : W \to W'$ es llamada *p-morfismo* si:

i) wRv implica $f(w)R'f(v)$;
ii) $f(w)R'v'$ implica que existe $v \in W$ tal que wRv y $v' = f(v)$.

Si además f es sobreyectiva, llamaremos a (W', R') *imagen p-mórfica* de (W, R) bajo f.

Y si los modelos (W, R, V) y (W', R', V') son extraídos de (W, R) y (W', R') respectivamente, diremos que f es un p-morfismo de modelos, o simplemente p-morfismo si no hay lugar a dudas, cuando $V(p) = \{w \in W : f(w) \in V'(p)\}$ para cada átomo p. Y es claro que $w \in V(p)$ si y sólo si $f(w) \in V'(p)$.

Proposición 2.2. Todo modelo satisface las mismas fórmulas modales que cualquiera de sus imágenes p-mórficas, es decir, si el modelo $\mathfrak{M} = (W', R', V')$ es imagen p-mórfica del modelo $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ bajo el p-morfismo f y w es un punto de W, entonces para cada fórmula modal φ tenemos

$$\mathfrak{M}, w \vDash \varphi \text{ si y sólo si } \mathfrak{M}', f(w) \vDash \varphi.$$

Demostración. La prueba es similar a la del teorema precedente, es decir, por inducción sobre la complejidad de la fórmula:

i) (Atomicidad). Sea $\varphi = p$, con p fórmula atómica. Por la definición de satisfacibilidad puntual sabemos que $\mathfrak{M}, w \vDash p$ si y sólo si $w \in V(p)$. Por la definición precedente es claro que $w \in V(p)$ si y sólo si $f(w) \in V'(p)$. Y de nuevo por la definición de satisfacibilidad puntual tenemos que $f(w) \in V'(p)$ si y sólo si $\mathfrak{M}', f(w) \vDash p$. La conclusión es evidente;

ii) (Conjunción). Sea $\varphi = \alpha \wedge \beta$, con α y β fórmulas modales. Sabemos que $\mathfrak{M}, w \vDash \alpha \wedge \beta$ si y sólo si [$\mathfrak{M}, w \vDash \alpha$ y $\mathfrak{M}, w \vDash \beta$] (separando), lo que a su vez sucede si y sólo si [$\mathfrak{M}', f(w) \vDash \alpha$ y $\mathfrak{M}', f(w) \vDash \beta$] (induciendo), y que finalmente pasa si y sólo si $\mathfrak{M}', f(w) \vDash \alpha \wedge \beta$ (reagrupando);

iii) (Disyunción). Sea $\varphi = \alpha \vee \beta$, con α y β fórmulas modales. Sabemos que $\mathfrak{M}, w \vDash \alpha \vee \beta$ si y sólo si [$\mathfrak{M}, w \vDash \alpha$ o $\mathfrak{M}, w \vDash \beta$] (separando), lo que a su vez sucede si y sólo si [$\mathfrak{M}', f(w) \vDash \alpha$

o $\mathfrak{M}', f(w) \vDash \beta]$ (induciendo), y que finalmente pasa si y sólo si $\mathfrak{M}', f(w) \vDash \alpha \vee \beta$ (reagrupando);

iv) (Negación). Sea $\varphi = \neg\psi$, con ψ fórmula. Por la inducción, sabemos que $\mathfrak{M}, w' \vDash \psi$ si y sólo si $\mathfrak{M}', f(w) \vDash \psi$. Esto es lo mismo que la equivalencia de sus negaciones, es decir, $\neg(\mathfrak{M}, w' \vDash \psi)$ si y sólo si $\neg(\mathfrak{M}', f(w) \vDash \psi)$, lo cual a su vez equivale a que $\mathfrak{M}, w' \nvDash \psi$ si y sólo si $\mathfrak{M}', f(w) \nvDash \psi$, que finalmente resulta en $\mathfrak{M}, w' \vDash \neg\psi$ si y sólo si $\mathfrak{M}', f(w) \vDash \neg\psi$;

v) (Necesidad) Sea $\varphi = \Box\psi$, con ψ fórmula. Por inducción sabemos que $\mathfrak{M}, w \vDash \psi$ si y sólo si $\mathfrak{M}', f(w) \vDash \psi$. Ahora probemos, por partes, que $\mathfrak{M}, w \vDash \Box\psi$ si y sólo si $\mathfrak{M}', f(w) \vDash \Box\psi$

($\Rightarrow$) Sea $v' \in W'$ tal que $f(w)R'v'$. Luego existe $v \in W$ tal que wRv y $v' = f(v)$ por la definición de p-morfismo, y así $\mathfrak{M}, v \vDash \psi$ por hipótesis, con lo que $\mathfrak{M}, f(v) \vDash \psi$ por la inducción, es decir, $\mathfrak{M}, v' \vDash \psi$. Con esto, $\mathfrak{M}', f(v) \vDash \Box\psi$;

($\Leftarrow$) Sea $v \in W$ tal que wRv. Luego $f(w)R'f(v)$ por la definición de p-morfismo, y así $\mathfrak{M}, f(v) \vDash \psi$ por hipótesis, con lo que $\mathfrak{M}, v \vDash \psi$ por la inducción, quedando claro que $\mathfrak{M}, w \vDash \Box\psi$.

vi) (Posibilidad) La prueba aquí se da debido a la dualidad modal $\Diamond\varphi \equiv \neg\Box\neg\varphi$ y a que arriba hemos probado el inciso de negación.

$\Box$

Definición 2.11. (Unión disjunta). Sea $\mathcal{A} = \{(W_i, R_i) \ : \ i \in I\}$ una familia de marcos de Kripke disjunta dos a dos, es decir, si $i \neq j$ entonces $W_i \cap W_j = \varnothing$. La *unión disjunta* $\biguplus_{i\in I}(W_i, R_i)$ de $\mathcal{A}$ es el marco (W, R) tal que $W = \bigcup_{i\in I} W_i$ y $R = \bigcup_{i\in I} R_i$.

También, como en el caso de submodelos y de p-morfismos, esta noción de unión disjunta puede definirse de modelo a modelo: la unión disjunta del conjunto de modelos $\{(W_i, R_i, V_i) : i \in I\}$ disjunto dos a dos es el modelo (W, R, V) tal que $W = \bigcup_{i \in I} W_i$, $R = \bigcup_{i \in I} R_i$ y $V(p) = \bigcup_{i \in I} V_i(p)$ para cada símbolo proposicional p.

Cabe aquí hacer notar que cuando W_i y W_j poseen intersección vacía debido a que los índices i y j son distintos, sus respectivos conjuntos potencia tienen en común sólo al conjunto vacío. En símbolos:

$$i \neq j \quad \Rightarrow \quad W_i \cap W_j = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}(W_i) \cap \mathcal{P}(W_j) = \{\varnothing\},$$

con lo que sus respectivas valuaciones $V_i(\varphi)$ y $V_j(\varphi)$ en cada fórmula modal φ tienen en común a lo más el conjunto vacío.

Proposición 2.3. Si $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ es la unión disjunta de la familia de modelos $\mathcal{A} = \{\mathfrak{M}_i = (W_i, R_i, V_i) \ : \ i \in I\}$ y w es un punto de W, entonces

$$\mathfrak{M}, w \vDash \varphi \text{ si y sólo si } \mathfrak{M}_i, w \vDash \varphi \text{ para cada } i \in I.$$

Demostración. Como en las dos proposiciones precedentes, ésta será demostrada por inducción sobre la complejidad de la fórmula.

i) (Atomicidad) Sea $\varphi = p$, donde p es una fórmula atómica.

($\Rightarrow$) Procedamos por contrarrecíproca: supongamos que $\mathfrak{M}_j, w \nvDash p$ para algún $j \in I$. Entonces $w \notin V_j(p)$. Como estos modelos son disjuntos dos a dos, w no puede pertenecer a W_i con $i \neq j$ y por lo tanto tampoco puede pertenecer a $V_i(p)$, pues este último está contenido en $\mathcal{P}(W_i)$. Luego $w \notin \bigcup\limits_{i \in I} V_i(p)$, es decir, $w \notin V(p)$, lo cual nos lleva a que $\mathfrak{M}, w \nvDash p$;

($\Leftarrow$) Si para toda $i \in I$ tenemos $\mathfrak{M}_i, w \vDash p$, entonces w está en cada $V_i(p)$ y por lo tanto está en la unión $\bigcup\limits_{i \in I} V_i(p)$, con lo que $\mathfrak{M}, w \vDash p$;

ii) (Conjunción) Sea $\varphi = \alpha \wedge \beta$, con α y β fórmulas modales. A semejanza de las demostraciones de las preposiciones precedentes, utilicemos las propiedades de los modelos y de la inducción para obtener la siguiente secuencia de expresiones:

$$\begin{array}{llrl}
\mathfrak{M}, w \vDash \alpha \wedge \beta & \text{si y sólo si} & \mathfrak{M}, w \vDash \alpha \ \text{ y } \ \mathfrak{M}, w \vDash \beta & \\
& \text{si y sólo si} & \mathfrak{M}_i, w \vDash \alpha \ \text{ y } \ \mathfrak{M}_i, w \vDash \beta & \quad \text{para cada } i \in I \\
& \text{si y sólo si} & \mathfrak{M}_i, w \vDash \alpha \wedge \beta & \quad \text{para cada } i \in I;
\end{array}$$

iii) (Disyunción) Sea $\varphi = \alpha \vee \beta$, con α y β fórmulas modales. Este inciso es como el anterior, pero con otro conectivo:

$$\begin{array}{llrl}
\mathfrak{M}, w \vDash \alpha \vee \beta & \text{si y sólo si} & \mathfrak{M}, w \vDash \alpha \ \text{ o } \ \mathfrak{M}, w \vDash \beta & \\
& \text{si y sólo si} & \mathfrak{M}_i, w \vDash \alpha \ \text{ o } \ \mathfrak{M}_i, w \vDash \beta & \quad \text{para cada } i \in I \\
& \text{si y sólo si} & \mathfrak{M}_i, w \vDash \alpha \vee \beta & \quad \text{para cada } i \in I;
\end{array}$$

iv) (Negación) Sea $\varphi = \neg\psi$, con ψ fórmula modal. Por la disjunción de W sucede que existe $j \in I$ tal que $w \in W_j$ y $w \notin W_i$ para $i \neq j$. Entonces $w \notin V_i(\psi)$ para $i \neq j$ pues cada elemento de $V_i(\psi)$ es subconjunto de W_i, y todo depende de que w esté o no en $V_j(\psi)$. Se desprende, pues, la siguiente sucesión de bicondicionales:

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{M}, w \vDash \neg\psi & \text{si y sólo si} & \mathfrak{M}, w \nvDash \psi \\
& \text{si y sólo si} & w \notin V(\psi) \\
& \text{si y sólo si} & w \notin \bigcup_{i \in I} V_i(\psi) \\
& \text{si y sólo si} & \text{para todo } i \in I\text{: } w \notin V_i(\psi) \\
& \text{si y sólo si} & \text{para todo } i \in I\text{: } \mathfrak{M}_i, w \nvDash \psi \\
& \text{si y sólo si} & \text{para todo } i \in I\text{: } \mathfrak{M}_i, w \vDash \neg\psi;
\end{array}$$

v) (Necesidad) Sea $\varphi = \Box\psi$, con ψ fórmula modal.

(⇒) Para cada $i \in I$, consideremos $v_i \in W_i$. Luego wRv_i implica $\mathfrak{M}, v_i \vDash \psi$ por hipótesis, y esto a su vez implica $v_i \in V(\psi)$. Entonces, por la disjunción de W tenemos que $v_i \in V_i(\psi)$, con lo que $\mathfrak{M}_i, v_i \vDash \psi$. Como esto vale para todo v_i relacionado con w bajo R, llegamos a que $\mathfrak{M}_i, w \vDash \Box\psi$.

(⇐) Sea $\in W$. Por la disjunción de W existe $i \in I$ tal que $v \in W_i$. Luego wRv implica wR_iv, con lo que $\mathfrak{M}_i, v \vDash \psi$ por hipótesis. Entonces $v \in V_i(\psi)$ y por ende $v \in V(\psi)$, con lo que $\mathfrak{M}, v \vDash \psi$. Por lo tanto $\mathfrak{M}, w \vDash \Box\psi$.

vi) (Posibilidad) La prueba aquí se da debido a la dualidad modal $\Diamond\varphi \equiv \neg\Box\neg\varphi$ y a que arriba hemos probado el inciso de negación.

□

2.3. Bisimulaciones

Las tres construcciones de modelos definidas en la sección precedente, que son los submodelos generados, las imágenes p-mórficas y las uniones disjuntas, fueron ampliamente utilizadas en la lógica modal más de una década antes de unificarlas bajo el concepto de bisimulación ([2], p.16). Son herramientas fundamentales en muchas áreas de la lógica modal (por ejemplo, cuando se reformulan a nivel de marcos, son ingredientes clave del teorema de Goldblatt-Thomason de la lógica modal de primer orden).

Cabe ahora hacernos la siguiente pregunta: dados dos modelos, ¿bajo qué condiciones podemos utilizar uno u otro para satisfacer el mismo conjunto de fórmulas modales? En esta sección la responderemos.

Definición 2.12. (Bisimulación). Sean $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ y $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ dos modelos de Kripke. Decimos que una relación no vacía $B \subseteq W \times W'$ es una *bisimulación* si wBw' implica:

i) $\mathfrak{M}, w \vDash p$ sii $\mathfrak{M}', w' \vDash p$ para cada $p \in \mathbf{Prop}$ (*armonía atómica*);

i)) wRv implica $\exists v' \in W'$ tal que $w'R'v'$ y vBv' (*condición de ida*, o **zig**);

iii) $w'R'v'$ implica $\exists v \in W$ tal que wRv y vBv' (*condición de vuelta*, o **zag**).

Si w y w' están relacionados por una bisimulación, diremos que son *bisimilares*, y lo mismo entre $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$.

La condición i), o de armonía atómica, significa que dos modelos bisimilares satisfacen las mismas fórmulas atómicas. Esto implica, como veremos a continuación, que también satisfacen todas las fórmulas, en virtud de la construcción sintáctica del sistema y de las propiedades de los marcos de Kripke. La condición de ida, o ii), nos dice que el primer modelo puede expresarse en términos del segundo modelo, y lo recíproco sucede con la condiciń de vuelta, iii). Cabe aquí abordar, naturalmente, la identificación entre modelos, expuesta en los tres teoremas siguientes.

Teorema 2.1. (Invarianza de bisimulación). Sea B una bisimulación entre los modelos $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ y $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$, y sean w y w' elementos de W y W' respectivamente. Si w y w' son bisimilares (esto es, wBw') entonces satisfacen las mismas fórmulas modales, es decir, que para toda fórmula modal φ tenemos

$$\mathfrak{M}, w \vDash \varphi \text{ si y sólo si } \mathfrak{M}', w' \vDash \varphi.$$

Demostración. La prueba se realiza por inducción sobre la complejidad de la fórmula:

i) Atomicidad: es inmediata, debido a la armonía atómica de la bisimulación.

ii) Conjunción: debemos probar que si $\varphi = \alpha \wedge \beta$ para α y β fórmulas, entonces

$$\mathfrak{M}, w \vDash \alpha \wedge \beta \text{ si y sólo si } \mathfrak{M}', w' \vDash \alpha \wedge \beta,$$

lo cual es cierto, pues por inducción tenemos que α es satisfacible por $\mathfrak{M}$ sobre w si y sólo si α es satisfacible por $\mathfrak{M}'$ sobre w', y lo mismo para β, y por la definición inductiva de satisfacibilidad también sucede que $\mathfrak{M}$ satisface a $\alpha \wedge \beta$ sobre w si y sólo si $\mathfrak{M}$ satisface tanto a α como a β sobre w, y lo mismo para $\mathfrak{M}'$ sobre w'. Puesto en símbolos, queda como sigue:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \vDash \alpha \wedge \beta &\text{ si y sólo si } (\mathfrak{M}, w \vDash \alpha \wedge \mathfrak{M}, w \vDash \beta) \\ &\text{ si y sólo si } (\mathfrak{M}', w \vDash \alpha \wedge \mathfrak{M}', w \vDash \beta) \\ &\text{ si y sólo si } \mathfrak{M}' \vDash \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

iii) Disyunción: hay que probar que si $\varphi = \alpha \vee \beta$ para α y β fórmulas, entonces

$$\mathfrak{M}, w \vDash \alpha \vee \beta \text{ si y sólo si } \mathfrak{M}', w' \vDash \alpha \vee \beta,$$

cierto también, pues por inducción tenemos que α es satisfacible por $\mathfrak{M}$ sobre w si y sólo si α es satisfacible por $\mathfrak{M}'$ sobre w', y lo mismo para β, y por la definición inductiva de satisfacibilidad también sucede que $\mathfrak{M}$ satisface a $\alpha \vee \beta$ sobre w si y sólo si $\mathfrak{M}$ satisface a α o a β sobre w, y lo mismo para $\mathfrak{M}'$ sobre w'. Puesto en símbolos, queda como sigue:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \vDash \alpha \vee \beta &\text{ si y sólo si } (\mathfrak{M}, w \vDash \alpha \vee \mathfrak{M}, w \vDash \beta) \\ &\text{ si y sólo si } (\mathfrak{M}', w \vDash \alpha \vee \mathfrak{M}', w \vDash \beta) \\ &\text{ si y sólo si } \mathfrak{M}' \vDash \alpha \vee \beta \end{aligned}$$

iv) Negación: debemos hacer ver que si $\varphi = \neg\psi$ para ψ fórmula, entonces

$$\mathfrak{M}, w \vDash \neg\psi \text{ si y sólo si } \mathfrak{M}', w' \vDash \neg\psi,$$

lo cual se cumple debido a que, por inducción, $\mathfrak{M}$ satisface a ψ sobre w si y sólo si $\mathfrak{M}'$ satisface a ψ sobre w', es decir,

$$\mathfrak{M}, w \vDash \psi \text{ si y sólo si } \mathfrak{M}', w' \vDash \psi,$$

doble implicación que se conserva si negamos ambas proposiciones, con lo que

$$\mathfrak{M}, w \not\models \psi \text{ si y sólo si } \mathfrak{M}', w' \not\models \psi,$$

y como $\mathfrak{M} \not\models \psi$ equivale a $\mathfrak{M} \models \neg\psi$ y $\mathfrak{M}' \not\models \psi$ equivale a $\mathfrak{M}' \models \neg\psi$, este inciso se cumple;

v) Necesidad: sea $\varphi = \Box\psi$, con ψ fórmula. Hay que probar que

$$\mathfrak{M}, w \models \Box\psi \text{ si y sólo si } \mathfrak{M}', w' \models \Box\psi,$$

lo cual es cierto pues, para empezar, sabemos que

$$\mathfrak{M}, w \models \psi \text{ si y sólo si } \mathfrak{M}', w' \models \psi,$$

con lo que usando la condición de ida de B para probar la implicación a la derecha, si $v' \in W'$ es tal que $w'R'v'$ entonces existe $v \in W$ tal que wRv y vBv', y con esto $\mathfrak{M}, v \models \psi$, implicando $\mathfrak{M}', v' \models \psi$,

y usando la condición de vuelta de B para probar la implicación hacia la izquierda, si $v \in W$ es tal que wRv entonces existe $v' \in W'$ tal que $w'R'v'$ y vBv', y con esto $\mathfrak{M}', v' \models \psi$, implicando $\mathfrak{M}, v \models \psi$;

vi) Posibilidad: se obtiene como consecuencia de la dualidad modal $\Diamond \equiv \neg\Box\neg$.

$\Box$

Teorema 2.2. La satisfacibilidad modal es invariante bajo la formación de submarcos generados, imágenes p-mórficas y uniones disjuntas. Es decir, dada una fórmula φ, sucede que:

a) Si $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ es un submodelo generado de $\mathfrak{M} = (W, R, V)$, entonces para todo punto w' de W' tenemos

$$\mathfrak{M}, w' \vDash \varphi \text{ si y sólo si } \mathfrak{M}', w' \vDash \varphi.$$

b) Si $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ es una imagen p-mórfica de $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ bajo el morfismo f y w es un punto de W, entonces

$$\mathfrak{M}, w \vDash \varphi \text{ si y sólo si } \mathfrak{M}, f(w) \vDash \varphi.$$

c) Si $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ es la unión disjunta $\biguplus_{i \in I}(W_i, R_i, V_i)$ de la familia de modelos $\mathcal{A} = \{\mathfrak{M}_i = (W_i, R_i, V_i) \ : \ i \in I\}$ y w es un punto de W, entonces

$$\mathfrak{M}, w \vDash \varphi \text{ si y sólo si } \mathfrak{M}_i, w \vDash \varphi \text{ para cada } i \in I.$$

Demostración. Cada uno de estos tres enunciados puede probarse por inducción sobre la complejidad de la fórmula. Sin embargo, esto no es necesario debido a que son casos particulares de bisimulación (**[2]**, pág.13). □

El recíproco de este resultado no es cierto en general. Dos puntos pueden satisfacer las mismas fórmulas modales y no ser bisimilares. Sin embargo, podemos obtenerlo en los modelos de imagen finita, que describimos a continuación.

Definición 2.13. (Marco de imagen finita). Decimos que un marco de Kripke $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ tiene *imagen finita* si para cada punto w de W el conjunto $R(w)$ es finito (recordemos que $R(w) = \{v \in W : wRv\}$).

Ahora establezcamos el recíproco (**[3]**, pág.19) de la invarianza de bisimulación, arriba demostrada:

Teorema 2.3. (de Hennessy-Milner). Sean $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ y $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ dos modelos de imagen finita, y sean w y w' elementos de W y W' respectivamente. Si w y w' satisfacen las mismas fórmulas modales, entonces son bisimilares.

Demostración. Consideremos la correspondencia modal entre w y w'. Probemos que ella misma se puede ver como una bisimulación entre w y w'. Nombrémosla B.

i) (Armonía atómica) Como $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ satisfacen a toda fórmula modal φ sobre w y w' respectivamente, en particular la satisfacen cuando ésta es un átomo, es decir, $\varphi = p$, con $p \in \mathbf{Prop}$;

ii) (Condición hacia adelante) Procedamos por contradicción: supongamos que existe $v \in W$ tal que para todo $v' \in W'$ sucede $w' \not{R'} v'$ o $v \not{B} v'$. Como $R'(w')$ es finito, entonces $R'(w') = \{v'_1, v'_2, ..., v'_n\}$ con n algún número natural. Entonces existen fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ tales que $\mathfrak{M}, w \models \varphi_i$ y $|\mathfrak{M}', w' \not\models \varphi_i$ para $i = 1, ..., n$ y por lo tanto $\mathfrak{M}, w \models \Diamond(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n)$ y $\mathfrak{M}', w' \not\models \Diamond(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n)$, lo que constituye una contradicción con la hipótesis;

iii) (Condición hacia atrás) La prueba aquí es semejante a la del inciso precedente.

□

Con este último resultado queda contestada la pregunta que nos hicimos acerca del uso indistinto de un modelo u otro para satisfacer el mismo conjunto de fórmulas modales.

2.4. Solidez y completitud

Estos dos conceptos y sus respectivos teoremas nos proveen de una equivalencia entre la noción de derivabilidad formal ($\vdash$) y la de consecuencia lógica ($\vDash$), es decir, entre la sintaxis y la semántica de un lenguaje formal. Y sus redacciones son recíprocas una de la otra.

Definición 2.14. (Solidez). Sea $\mathcal{C}$ una clase de marcos. Un sistema lógico modal S es *sólido* respecto de $\mathcal{C}$ si todo teorema en S es una fórmula válida en $\mathcal{C}$, es decir, para cada fórmula modal φ y cada marco (W, R) en $\mathcal{C}$ tenemos

$$\vdash_S \varphi \;\text{ implica } (W, R) \vDash \varphi.$$

Definición 2.15. (Completitud). Sea $\mathcal{C}$ una clase de marcos. Un sistema lógico modal S es *completo* respecto de $\mathcal{C}$ si toda fórmula válida en $\mathcal{C}$ es un teorema en S, esto es, para cada fórmula modal φ y cada marco (W, R) en $\mathcal{C}$ tenemos

$$(W, R) \vDash \varphi \;\text{ implica }\; \vdash_S \varphi.$$

Podemos enunciar estas dos definiciones conjuntamente diciendo que S es sólido y completo respecto de $\mathcal{C}$ si para toda fórmula modal φ tenemos

$$\forall (W, R) \in \mathcal{C} : \quad \vdash_S \varphi \text{ si y sólo si } (W, R) \vDash \varphi.$$

Si un sistema S es sólido y completo, y S' es un sistema contenido en S, entonces también S' es sólido y completo, debido a que como todas las fórmulas de S cumplen con estas condiciones, en particular las fórmulas de S' las cumplen.

Inversamente, si un sistema S' y un axioma a son sólidos y completos, entonces el sistema $S = S' + a$ también lo es.

Para efectos prácticos, no es necesario encontrar o describir todos los marcos de la clase. Basta con utilizar uno de ellos, pues todos ellos se bisimulan entre sí de dos en dos.

Naturalmente, cabe preguntarnos, dado algún sistema modal S que sea extensión de **K**, cuál es la clase de marcos en la que S es sólido y completo. Dado que hay prácticamente una cantidad elevada de posibilidades para S (una para cada nuevo axioma modal y/o inclusiones de axiomas modales anteriores), para los propósitos del trabajo presente nos enfocaremos en el sistema **S4** solamente, así que su solidez y completitud serán consecuencia de probar la correspondiente solidez y completitud de los axiomas T y 4. La inducción sobre la complejidad de la fórmula hará el resto.

Proposición 2.4. Sea (W, R) un marco de Kripke. Entonces (W, R) satisface el axioma T si y sólo si (W, R) es reflexivo (**[6]**).

Demostración. Recordemos el axioma T: $\Box\varphi \to \varphi$, con φ fórmula modal.

($\Rightarrow$) Debemos probar que para todo punto w de W sucede que wRw.

Como (W, R) satisface a AT, entonces todo modelo $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ satisface a AT sobre cualquier punto w de W. Tomemos $V(p) = \{s : wRs\}$ para p átomo, con lo que $\mathfrak{M}, w \vDash \Box p$.

Aplicando Modus Ponens obtenemos $\mathfrak{M}, w \vDash p$ y así $w \in V(p)$, con lo cual llegamos a que wRw por la definición de $V(p)$. Esto prueba que (W, R) es un marco reflexivo.

($\Leftarrow$) Sean (W, R) un marco reflexivo, w un punto de W y $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ un modelo extraído de (W, R) con $V(p) = \{v : wRv\}$ para p átomo.

Tomando $V(p)$ como arriba, tenemos que $\mathfrak{M}, w \vDash \Box p$. Y por la hipótesis de que wRw entonces $x \in V(p)$ y así $\mathfrak{M}, w \vDash p$. Por lo tanto $\mathfrak{M}, w \vDash \Box p \to p$, es decir, (W, R) satisface AT.

Como suponemos que $\mathfrak{M}, w \vDash \Box\varphi$ para toda fórmula modal φ, entonces en particular $\mathfrak{M}, w \vDash \Box p$, con lo que $w \in V(p)$ y así wRw. Luego entonces (W, R) satisface AT.

Esto equivale a decir que el axioma T es sólido y completo respecto de la clase $\mathcal{C}$ de los marcos reflexivos y transitivos. $\square$

Proposición 2.5. Sea (W, R) un marco de Kripke. Entonces (W, R) satisface el axioma 4 si y sólo si (W, R) es transitivo.

Demostración. Recordemos el axioma 4: $\square\varphi \to \square\square\varphi$ para φ fórmula modal.

($\Rightarrow$) Debemos probar que si wRv y vRu entonces wRu para $w, v, u \in W$.

Como (W, R) satisface a $A4$, entonces cualquier modelo $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ satisface a $A4$ sobre cualquier punto w de W. Tomemos $V(p) = \{s : wRs\}$ para p átomo, con lo que $\mathfrak{M}, w \vDash \square p$.

Aplicando Modus Ponens obtenemos $\mathfrak{M}, w \vDash \square\square p$. Sobre esto, la hipótesis wRv implica $\mathfrak{M}, v \vDash \square p$ y, sobre esto último, la hipótesis vRu implica $\mathfrak{M}, u \vDash p$, es decir, $u \in V(p)$ y por lo tanto wRu. Esto prueba que (W, R) es un marco transitivo.

($\Leftarrow$) Sea (W, R) un marco transitivo, $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ un modelo extraído de (W, R) y w un punto de W.

Supongamos que $\mathfrak{M}, w \vDash \square\varphi$ para alguna fórmula modal φ. Debemos probar que $\mathfrak{M}, w \vDash \square\square\varphi$, es decir, que para todo v tal que wRv sucede $\mathfrak{M}, v \vDash \square\varphi$, o sea que para todo u tal que vRu tenemos $\mathfrak{M}, u \vDash \varphi$.

Pero esto último es cierto, pues (W, R) es transitivo y por tanto wRv y vRu implican wRu, con lo que llegamos a que $\mathfrak{M}, w \vDash \square\square\varphi$. Luego entonces (W, R) satisface $A4$.

Y esto equivale a decir que el axioma 4 es sólido y completo respecto de la clase $\mathcal{C}$ de los marcos reflexivos y transitivos. $\square$

Teorema 2.4. $S = \mathbf{S4}$ es sólido y completo respecto de la clase $\mathcal{C}$ de los marcos reflexivos y transitivos.

Demostración. Es consecuencia de las dos proposiciones precedentes y la inducción sobre la complejidad de la fórmula (no olvidemos que $\mathbf{S4} = \mathbf{K} + T + 4$). $\square$

2.5. Modelos finitos por filtración.

Hasta aquí, es claro que el tamaño del modelo es una variable que no afecta al presente tratamiento teórico. Sin embargo, existen situaciones en las cuales es preferible, e incluso es imperativo, elegir modelos finitos para facilitar el manejo de datos en áreas como la inteligencia artificial y el análisis de datos. La complejidad computacional justifica esta elección.

Nos interesa sobremanera probar que el sistema **S4** posee la propiedad de modelo finito, debido a que sobre este sistema, el cual es preordenado, generaremos las semánticas topológicas. Para esto, expondremos y emplearemos la técnica de *filtraciones*, la cual consiste en obtener, a partir de un modelo que satisface una fórmula, un modelo finito que también la satisface. Las tres definiciones siguientes son el preámbulo de esta técnica.

Definición 2.16. (Propiedad de modelo finito). Un sistema lógico modal posee la *propiedad de modelo finito* si toda fórmula que es satisfacible puntualmente por algún modelo también puede ser satisfacible puntualmente por algún modelo finito. Es decir, en el sistema lógico la satisfacibilidad y la satisfacibilidad finita coinciden.

Definición 2.17. (Cerradura por subfórmulas). Un conjunto de fórmulas Σ es *cerrado por subfórmulas* si para toda fórmula φ en Σ y para toda subfórmula ψ de φ, también ψ está en Σ. En otras palabras, a Σ pertenecen todas las subfórmulas de cada una de sus fórmulas.

Es claro que, dada una fórmula, el conjunto de todas sus subfórmulas cumple con esta definición, es decir, es cerrado por subfórmulas.

Definición 2.18. (Equivalencia por subfórmulas). Sea $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ un modelo. Para cada fórmula modal φ llamemos Σ_φ al conjunto de todas las subfórmulas de φ (notemos que Σ_φ es un conjunto finito) y definamos la relación de equivalencia $\equiv_\varphi$ en W como sigue: dos puntos w, v de W son equivalentes si y sólo si $\mathfrak{M}$ satisface sobre éstos a cada subfórmula de φ, es decir,

$$w \equiv_\varphi v \text{ si y sólo si } \forall \psi \in \Sigma_\varphi : \mathfrak{M}, w \vDash \psi \text{ si y sólo si } \mathfrak{M}, v \vDash \psi.$$

Esta es una relación de equivalencia, debido a que la doble implicación contenida en su definición nos permite ver que es reflexiva, simétrica y transitiva. Denotemos por $[w]_\varphi$ a la clase de equivalencia de w en W y llamemos W' a su conjunto de clases $\{[w]_\varphi : w \in W\}$.

Ahora definamos la técnica que emplearemos.

Definición 2.19. (Filtración). Sea $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ un modelo, y sea φ una fórmula modal satisfacible por $\mathfrak{M}$ sobre un punto w de W. Tomemos a Σ_φ como el conjunto de subfórmulas de φ y a $\equiv_\varphi$ como la equivalencia por subfórmulas de φ. Lamaremos *filtración* de $\mathfrak{M}$ sobre w a través de Σ_φ al modelo $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ que cumple las siguientes cuatro condiciones:

i) $W' = \{[w]_\varphi : w \in W\}$, el conjunto de las clases de equivalencia de $\equiv_\varphi$ como acabamos de definir arriba;

ii) Para w y v elementos de W, si wRv entonces $[w]_\varphi R'[v]_\varphi$, es decir, dos clases de equivalencia se relacionan entre sí en W' cada vez que dos mundos se relacionan entre sí en W. Esta relación está bien definida, pues el conjunto de las clases de W' es siempre el mismo aunque cambiemos sus representantes. En efecto,

iii) Si $[w]_\varphi R'[v]_\varphi$ y $\Diamond\psi \in \Sigma_\varphi$, entonces $\mathfrak{M}, v \vDash \psi$ implica $\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond\psi$;

iii) Para cada átomo p en Σ, $V'(p) = \{[w]_\varphi : \mathfrak{M}, w \vDash p\}$. Esto es, si una fórmula se satisface sobre w, en el modelo filtrado la misma se satisface sobre la clase de equivalencia $[w]_\varphi$ de w. Esto surge del concepto de mapeo natural.

Para nuestros fines es necesario, y no sólo conveniente, que este modelo filtrado sea finito, lo cual se prueba a continuación.

Proposición 2.6. Todo modelo filtrado es finito.

Demostración. Utilizando la notación precedente, las clases de equivalencia de W, elementos de W', están asociadas unívocamente con los elementos del conjunto de subfórmulas de φ, que es Σ_φ. Debido a esto, hay a lo más tantas clases como conjuntos de subfórmulas. Éstos últimos conforman una cantidad finita, con lo que llegamos a que $|W'| \leq |\mathcal{P}(\Sigma_\varphi)|$ y por lo tanto a que W' es finito.

$\square$

Capítulo 3

Semánticas topológicas para lógicas modales

Una manera de generalizar los sistemas modales es la que aquí se expone, la generalización por vía topológica. Ésta consiste, en principio, en la identificación de conjuntos de mundos posibles con conjuntos de espacios topológicos, llamada *identificación topologico-modal*. Se realiza respecto a cada clase de modelos, cuyas propiedades están determinadas por sus axiomas modales definitorios. Nuestro propósito principal es enriquecer la semántica modal con elementos de la topología.

La idea central de este capítulo es definir modelos que partan de nociones de la topología, luego identificarlos con los modelos modales, y finalmente demostrar algunos resultados análogos a los del capítulo anterior y otros propios de este capítulo. Para lograr esta conexión entre lo modal y lo topológico, los conceptos primordiales que emplearemos son el de conjunto abierto y el de preorden. Y es que, precisamente, los conectores modales proporcionan a la intuición la idea de cercanía entre proposiciones de un sistema lógico.

La ventaja de esta implementación reside en que es más que sólo una traslación trivial del lenguaje modal al lenguaje topológico, es decir, no es una simple reexplicación de la teoría, dado que de facto es una ampliación.

3.1. Nociones preliminares de topología.

En esta sección repasaremos las definiciones y los resultados topológicos que nos permitan realizar la modelación de fórmulas modales. Para una revisión rigurosa, consúltese **[1]** y **[4]**.

Definición 3.1. Una *topología* sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

(i) X y el conjunto vacío $\varnothing$ están en τ;

(ii) La unión de los elementos de cualquier subcolección de τ está en τ;

(iii) La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ está en τ.

Llamaremos *espacio topológico* al par (X, τ), donde X es un conjunto y τ una topología definida para X. Los elementos de X serán llamados *puntos*, los elementos de τ serán llamados *conjuntos abiertos* (o simplemente *abiertos*). Un abierto que contenga a un punto x será llamado *vecindad* del punto x, y al conjunto de vecindades del punto x lo denotaremos por $\mathcal{N}_x$. Por último, diremos que un subconjunto Y de X es *cerrado* si su complemento $X \smallsetminus Y$ es abierto.

Definición 3.2. (Interior y clausura). Sean (X, τ) un espacio topológico y A un subconjunto de X.

i) El *interior* de A, denotado por $Int(A)$, es el mayor conjunto abierto contenido en A, es decir, $Int(A) \subseteq A$ y si B es un conjunto abierto que está contenido en A entonces $B \subseteq Int(A)$;

ii) La *clausura* de A, denotado por $Cl(A)$, es el menor conjunto cerrado que contiene a A, es decir, $A \subseteq Cl(A)$ y si B es un conjunto cerrado que contiene a A entonces $Cl(A) \subseteq B$.

Claramente, el interior de un conjunto es la unión de todos los abiertos contenidos en él, y su clausura es la intersección de todos los cerrados que lo contienen.

Regresemos a la definición **3.1**. Si en ella modificamos el inciso (iii) para que no sólo las subcolecciones finitas de τ tengan intersección en τ, sino que también las subcolecciones infinitas la tengan, obtendremos topologías identificables con el sistema **S4**.

Definición 3.3. (Topología de Alexandroff). Una topología τ para un conjunto X es llamada *topología de Alexandroff* si la intersección de los elementos de cualquier subcolección de τ está en τ. Es decir, para cualquier $\tau' \subseteq \tau$,

$$\left(\bigcap_{U \in \tau'} U \right) \in \tau.$$

Si (X, τ) cumple con esta definición, es llamado *espacio de Alexandroff* y se dice que τ es cerrada bajo intersecciones arbitrarias.

Dado un punto x de un espacio topológico (X, τ), podemos preguntarnos si siempre existe un abierto al cual pertenezca x. La respuesta es positiva en los espacios de Alexandroff.

Definición 3.4. En un espacio topológico (X, τ), para cada $x \in X$ definamos

$$U_x = \bigcap_{\substack{U abierto \\ x \in U}} U.$$

Este nuevo conjunto U_x podría no ser abierto en general, pero en los espacios de Alexandroff sí lo es, debido a que es la intersección de una colección de conjuntos abiertos (propiedad (iii) modificada). Además, puede caracterizarse como el conjunto abierto más pequeño que contiene a x. Esto es fácil de ver pues, por su definición, cualquier otro conjunto abierto que contenga a x también contiene a U_x. Y por esto mismo es único para cada punto x de X.

Ahora pensemos en la subcolección de τ formada por estos conjuntos abiertos mínimos para cada punto x:

$$\mathcal{U}_\tau = \{U_x : x \in X\}$$

y establezcamos la siguiente relación binaria $\leq$ entre los elementos de X:

$$x \leq y \text{ si y sólo si } U_x \subseteq U_y.$$

Esta relación binaria es reflexiva y transitiva, tal y como es la relación de contención de conjuntos de la cual proviene. En efecto, es reflexiva pues $U_x \subseteq U_x$ implica $x \leq x$, y es transitiva pues si $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $U_x \subseteq U_y$ y $U_y \subseteq U_z$, lo cual implica $U_x \subseteq U_z$ por la transitividad de la contención de conjuntos, y a su vez esto implica $x \leq y \leq z$.

Establezcamos un concepto que envuelve a las relaciones de este tipo:

Definición 3.5. En cualquier conjunto A, llamaremos *preorden* a toda relación binaria R que sea reflexiva y transitiva. Y diremos que A es un *conjunto preordenado* bajo R.

De acuerdo a estas definiciones, todo espacio de Alexandroff puede verse como un conjunto preordenado. Recíprocamente, todo conjunto preordenado puede verse como un espacio de Alexandroff. Para probar esto último, tomemos un conjunto preordenado X y hagamos $\mathcal{B} = \{\{x \in X : x \leq y\} : y \in X\}$ base de una topología τ para X. Luego τ es una topología de Alexandroff y por lo tanto (X, τ) es un espacio de Alexandroff. Queda establecida así una equivalencia entre los espacios de Alexandroff y los conjuntos preordenados (en el lenguaje de las categorías, tenemos un isomorfismo entre dos de éstas).

3.2. Preórdenes y modelos topológicos.

Una manera natural de generalizar topológicamente la semántica modal es mediante el establecimiento de ciertos subconjuntos de los mundos posibles pertenecientes a los marcos de Kripke. Con esta definición, estos marcos adquirirán una estructura de preorden y, por lo tanto, serán topológicamente manejables como espacios de Alexandroff. En lo tocante a la validez, de gran importancia serán, por un lado, los resultados de heredabilidad y, por el otro, los teoremas de equivalencia. Esto desembocará finalmente en los dos teoremas topo-modales a los que deseamos llegar: el de solidez y el de completitud.

Definición 3.6. Tomemos un marco de Kripke (X, R) reflexivo y transitivo. Diremos que $U \subseteq X$ es un *conjunto ascendente* si $x \in U$ y xRy implican $y \in U$.

Proposición 3.1. Si definimos τ_R como la familia de los conjuntos ascendentes del marco (X, R), entonces (X, τ_R) es un espacio de Alexandroff.

Demostración. Simplemente verifiquemos que τ_R cumple con la definición de topología de Alexandroff:

i) $\varnothing \in \tau_R$ debido a que si $x \in \varnothing$ entonces no hay y que se relacione con x (por vacuidad), así que $y \in \varnothing$ también. Y $X \in \tau_R$ debido a que x y y siempre pertenecen a X y por tanto x;

ii) τ_R es cerrada bajo uniones arbitrarias: sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia cualquiera de conjuntos ascendentes, y sean $x \in \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ y xRy. Es claro que $x \in U_{i_0}$ para algún i_0 y por lo tanto $y \in U_{i_0}$, con lo que $y \in \bigcup\limits_{i\in I} U_i$;

iii) τ_R es cerrada bajo intersecciones arbitrarias: sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia cualquiera conjuntos ascendentes, y sean $x \in \bigcap\limits_{i\in I} U_i$ y xRy.

Luego $x \in U_i$ para todo $i \in I$, con lo que también $y \in U_i$ y así $y \in \bigcap_{i \in I} U_i$.

$\square$

Así, pues, hemos obtenido una manera de identificar una topología de Alexandroff con un cuadro de Kripke mediante la definición de los conjuntos ascendentes. Con esto, algunos resultados topológicos se demostrarán de inmediato al ser semejantes a sus correspondientes resultados modales.

Recordemos, del capítulo 1, las dos últimas igualdades de la proposición recursiva de satisfacibilidad de conjunto (definición **2.7**):

$$
\begin{aligned}
[\![\square\varphi]\!] =& \{x \in X : R(x) \subseteq [\![\varphi]\!]\} \\
[\![\lozenge\varphi]\!] =& \{x \in X : R(x) \cap [\![\varphi]\!] \neq \varnothing\}.
\end{aligned}
$$

Donde $R(x)$ es el conjunto relacional de x para cada x. Estas equivalen, en nuestra traslación a lenguaje topológico, a que

$$
\begin{aligned}
[\![\square\varphi]\!] =& Int_{\tau_R}([\![\varphi]\!]) \\
[\![\lozenge\varphi]\!] =& Cl_{\tau_R}([\![\varphi]\!]),
\end{aligned}
$$

pues para la primera igualdad debemos notar que $R(x)$ es un conjunto abierto que contiene a x en la topología τ_R y, en la segunda, que la intersección no vacía $R(x) \cap [\![\varphi]\!]$ hace que cada x sea punto de acumulación de $[\![\varphi]\!]$ en la misma.

Recordemos también que en τ_R se cumplen las siguientes propiedades para φ, ψ fórmulas modales y p fórmula atómica:

$$\begin{aligned} [\![p]\!] &= V(p) \\ [\![\varphi \wedge \psi]\!] &= [\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!] \\ [\![\varphi \vee \psi]\!] &= [\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!] \\ [\![\neg\varphi]\!] &= X \setminus [\![\varphi]\!] \\ [\![\Box\varphi]\!] &= Int[\![\varphi]\!] \\ [\![\Diamond\varphi]\!] &= Cl[\![\varphi]\!]. \end{aligned} \tag{*}$$

Hasta aquí, hemos construído sólo una topología, τ_R, relacionada con los marcos y con los modelos de Kripke. Es momento de definir, para cualquier topología, modelos también relacionados con ellos. Comencemos con la definición de modelo y satisfacibilidad topológicos.

Definición 3.7. (Modelo topológico). Un *modelo topológico* es una terna $\mathcal{M} = (X, \tau, \mathcal{V})$, donde (X, τ) es un espacio topológico y $\mathcal{V}$ es una *valuación*, esto es, una función $\mathcal{V} : \mathbf{Prop} \to \mathcal{P}(X)$.

Definición 3.8. (Topo-satisfacibilidad puntual). Sean $\mathcal{M} = (X, \tau, \mathcal{V})$ un modelo topológico y x un punto de X. Diremos que una fórmula modal φ es *satisfacible por el modelo topológico* $\mathcal{M}$ *sobre el punto* x, denotado por $\mathcal{M}, x \vDash \varphi$, si x es elemento de $\mathcal{V}(\varphi)$.

Para p, q fórmulas atómicas, la valuación $\mathcal{V}$ cumple con las siguientes propiedades:

- $\mathcal{V}(p \wedge q) = \mathcal{V}(p) \cap \mathcal{V}(q)$
- $\mathcal{V}(p \vee q) = \mathcal{V}(q) \cup \mathcal{V}(q)$
- $\mathcal{V}(\neg p) = W \smallsetminus \mathcal{V}(p)$

Y, por ende, la satisfacibilidad puntual en estos espacios puede ser demostrada inductivamente y a semejanza de como sucede en los marcos de Kripke, como sigue:

i) $\mathcal{M}, x \vDash p$ sii $x \in \mathcal{V}(p)$;

ii) $\mathcal{M}, x \vDash \varphi \wedge \psi$ sii $\mathcal{M}, x \vDash \varphi$ y $\mathcal{M}, x \vDash \psi$;

iii) $\mathcal{M}, x \vDash \varphi \vee \psi$ sii $\mathcal{M}, x \vDash \varphi$ o $\mathcal{M}, x \vDash \psi$;

iv) $\mathcal{M}, x \vDash \neg\varphi$ sii $\mathcal{M}, x \nvDash \varphi$;

v) $\mathcal{M}, x \vDash \Box\varphi$ sii $\exists U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $\forall y \in U$ $\mathcal{M}, y \vDash \varphi$;

vi) $\mathcal{M}, x \vDash \Diamond\varphi$ sii $\forall U \in \tau$ tal que $x \in U$ $\exists y \in U$ tal que $\mathcal{M}, y \vDash \varphi$;

Nótese que la principal diferencia con los modelos modales radica en v) y vi), que involucran conjuntos abiertos de $\mathcal{M}$ y no directamente elementos de $\mathcal{P}(X)$ ni relaciones en X^2 como en los marcos de Kripke.

Definición 3.9. (Topo-satisfacibilidad de conjunto). Sea $\mathcal{M} = (X, \tau, \mathcal{V})$ un modelo topológico y φ una fórmula modal. Llamamos *conjunto de topo-satisfacibilidad* de φ bajo $\mathcal{M}$ a

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}} = \{x \in X : \mathcal{M}, x \vDash \varphi\}.$$

Si no hay lugar a confusiones, se denotará simplemente $[\![\varphi]\!]$.

Ahora bien, con esta definición se cumple (*) ya para toda topología y no solamente para τ_R.

Definición 3.10. (Topo-validez). Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que una fórmula modal φ es *válida* en (X, τ), denotado por $(X, \tau) \vDash \varphi$, si para todo modelo $\mathcal{M} = (X, \tau, \mathcal{V})$ construído sobre (X, τ) se tiene $\mathcal{M} \vDash \varphi$.

Definición 3.11. (Topo-validez de clase). Sea $\mathcal{S}$ una clase de espacios topológicos. Diremos que φ es *válida en la clase* $\mathcal{S}$, denotado por $\mathcal{S} \vDash \varphi$, si para cada espacio (X, τ) que pertenece a $\mathcal{S}$ se tiene que φ es válida en (X, τ), es decir, $(X, \tau) \vDash \varphi$.

3.3. Heredabilidad de la validez

Teorema 3.1. Sea $\mathfrak{M} = (X, R, V)$ un modelo de Kripke reflexivo y transitivo, τ_R su topología de conjuntos ascendentes, y $\mathcal{M} = (X, \tau_R, \mathcal{V})$ su modelo topológico asociado. Entonces, para cada punto $x \in X$ y cada fórmula modal φ se tiene

$$\mathfrak{M}, x \vDash \varphi \text{ si y sólo si } \mathcal{M}, x \vDash \varphi.$$

Demostración. La prueba es realizable por inducción sobre la complejidad de la fórmula, y empleando la identificación topologico-modal. □

Definición 3.12. (Topología inducida) Sea (X, τ) un espacio topológico, y sea Y un subconjunto de X. Llamamos *topología de* X *inducida a* Y, o simplemente *topología inducida a* Y, al conjunto

$$\tau|_Y = \{Y \cap U : U \in \tau\}$$

y llamamos a $(Y, \tau|_Y)$ *subespacio inducido de* (X, τ).

Proposición 3.2. Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff y Y un abierto en X, entonces $(Y, \tau|_Y)$ también es espacio de Alexandroff.

Demostración. Debemos verificar que $\tau|_Y$ es una topología de Alexandroff:

i) Como $\varnothing = Y \cap \varnothing$ y $\varnothing$ está en τ entonces $\varnothing$ está en $\tau|_Y$. Y como $Y = Y \cap X$ y X está en τ, entonces también Y está en $\tau|_Y$;

ii) La unión de los elementos de cualquier subcolección de $\tau|_Y$ está en $\tau|_Y$:

   Sea I un conjunto de índices, y sea $\{V_i\}_{i\in I}$ una subcolección de abiertos en Y. Entonces, para cada $i \in I$ existe U_i abierto en X tal que $V_i = Y \cap U_i$. Luego,

$$\bigcup_{i\in I} V_i = \bigcup_{i\in I}(Y \cap U_i) = Y \cap \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)$$

con lo que $\bigcup_{i\in I} V_i$ está en $\tau|_R$ pues $\bigcup_{i\in I} U_i$ está en τ;

iii) La intersección de los elementos de cualquier subcolección de $\tau|_Y$ está en $\tau|_Y$:

Similar al inciso anterior.

$\square$

Teorema 3.2. Sea (X,τ) un espacio topológico y Y un subconjunto abierto en X. Entonces, para cada fórmula modal φ tenemos

$$(X,\tau) \vDash \varphi \text{ implica } (Y,\tau|_Y) \vDash \varphi.$$

Demostración. Como $X \vDash \varphi$ entonces todo modelo $\mathcal{M} = (X,\tau,\mathcal{V})$ satisface a φ sobre cualquier punto x de X, es decir, $\mathcal{M}, x \vDash \varphi$. Por otro lado, dado que Y es subconjunto abierto en X entonces la topología inducida $\tau|_Y$ es de Alexandroff y por lo tanto el modelo $\mathcal{M}' = (Y,\tau|_Y,\mathcal{V}|^Y)$ satisface a φ sobre cada punto w' de Y. Pero w' está en X pues Y es subconjunto de X, con lo que se tiene lo pedido. $\square$

No hemos llegado a condiciones bajo las cuales se cumpla el recíproco de este teorema, pues aunque Y satisfaga a φ sobre todos sus puntos, no sabemos lo que sucede en los puntos de X que no están en Y, es decir, en $X \setminus Y$.

Definición 3.13. Sean (X,τ) y (Y,η) dos espacios topológicos, y $f : X \to Y$ un mapeo.

a) f se llama *mapeo continuo* si la preimagen $f^{-1}(B)$ de cada conjunto abierto B en Y es un abierto en X;

b) f se llama *mapeo abierto* si la imagen $f(A)$ de cada conjunto abierto A en X es un abierto en Y;

c) f se llama *mapeo interior* si f es continuo y abierto.

Teorema 3.3. Sean (X, τ) Y (Y, η) espacios topológicos y $f : X \to Y$ un mapeo interior suprayectivo. Entonces, para cada fórmula modal φ tenemos

$$(X, \tau) \vDash \varphi \text{ implica } (Y, \eta) \vDash \varphi. \qquad (*)$$

Demostración. Procedamos por contraposición. Supongamos que $(Y, \eta) \nvDash \phi$ para alguna fórmula modal ϕ. Entonces existe un modelo $(Y, \eta, \mathcal{V})$ extraído de (Y, η) y un punto y de Y tal que $(Y, \eta, \mathcal{V}), y \vDash \neg\phi$. Consideremos la valuación $\mathcal{U}$ definida por $\mathcal{U}(p) = f^{-1}(\mathcal{V}(p))$ para p átomo. Como f es suprayectivo, podemos tomar x en X tal que $y = f(x)$. Luego, los modelos $(Y, \eta, \mathcal{V})$ y $(X, \tau, \mathcal{U})$ son topo-bisimilares entre sí, con y bisimilar a x, y por lo tanto validan las mismas fórmulas, con lo que $(X, \tau, \mathcal{U}), x \vDash \neg\phi$ y por ende $(X, \tau) \nvDash \phi$. □

3.4. Equivalencias de modelos.

Cuando dos modelos son equivalentes, son indistinguibles uno de otro para satisfacer fórmulas en un sistema. Esto significa una ventaja en lo que a satisfacibilidad se refiere, y es que podemos utilizar el modelo más sencillo de entre los modelos disponibles. Los dos tipos de equivalencia que manejaremos son la equivalencia topológica y la invarianza por bisimulación.

Definición 3.14. Si dos modelos topológicos $\mathcal{M} = (X, \tau, \mathcal{V})$ y $\mathcal{M}' = (X', \tau', \mathcal{V}')$ satisfacen las mismas fórmulas en los puntos x y x' de X y X' respectivamente, diremos que son *modalmente equivalentes*. Es decir, para toda fórmula modal φ se tiene $\mathcal{M}, x \vDash \varphi$ si y sólo si $\mathcal{M}', x' \vDash \varphi$.

Definición 3.15. Dados los modelos topológicos $\mathcal{M} = (X, \tau, \mathcal{V})$ y $\mathcal{M}' = (X', \tau', \mathcal{V}')$, una *topo-bisimulación* (bisimulación topológica) entre ellos es una relación no vacía $T \subseteq X \times X'$ tal que si xTx' entonces:

i) $x \in \mathcal{V}(p)$ si y sólo si $x' \in \mathcal{V}'(p)$ para cada $p \in \textbf{Prop}$ (armonía atómica);

ii) Si U es un abierto en X y $x \in U$ entonces existe U' abierto en X' tal que $x' \in U'$ y tal que para cualquier $y' \in U'$ existe $y \in U$ con yTy' (*condicion de ida*);

iii) Si U' es un abierto en X' y $x' \in U'$ entonces existe U abierto en X tal que $x \in U$ y tal que para cualquier $y \in U$ existe $y' \in U'$ con yTy' (*condicion de vuelta*).

A semejanza de lo que ocurre en el caso modal, también se define la invarianza bajo el aspecto topológico:

Teorema 3.4. (invarianza de topo-bisimulación). Sea T una topo-bisimuación entre los modelos $\mathcal{M} = (X, \tau, \mathcal{V})$ y $\mathcal{M}' = (X', \tau', \mathcal{V}')$, y sean x y x' elementos de X y de X' respectivamente. Si x y x' son topo-bisimilares (esto es, xTx') entonces $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$ satisfacen las mismas fórmulas modales sobre x y x' respectivamente, es decir, que si φ es fórmula modal entonces

$$\mathcal{M}, x \vDash \varphi \text{ si y sólo si } \mathcal{M}', x' \vDash \varphi$$

Demostración. Es consecuencia de la identificación de cada modelo topológico con su modelo modal asociado y de la aplicación del teorema de invarianza de la bisimulación. $\square$

Capítulo 4

Solidez y completitud topo-modales del sistema S4

4.1. Solidez topo-modal de S4

Este capítulo está completamente basado en **[5]**, secciones 4.1 y 4.3.

Recordemos que:

1. Todo sistema lógico modal normal contiene el axioma K y la fórmula dual **D**, y es cerrado bajo las tres reglas de inferencia: Modus Ponens (MP), Necesidad (N) y Sustitución Uniforme (SU).

2. El sistema **S4** es el menor los sistemas lógicos modales que contienen, además, a los axiomas T y 4.

En el capítulo 1 tratamos la solidez modal de **S4**. Aquí nos avocaremos a la solidez topológica del mismo.

Definición 4.1. (Solidez topo-modal). Sea $\mathcal{C}$ una clase de espacios topológicos. Un sistema lógico modal S es *sólido* respecto de $\mathcal{C}$, denotado por $\mathcal{C} \models \varphi$, si todo teorema en S es una fórmula válida en $\mathcal{C}$, es decir, para cada fórmula modal φ y cada espacio topológico (X, τ) en $\mathcal{C}$ tenemos

$$\vdash_S \varphi \ \text{ implica } (X, \tau) \models \varphi.$$

El propósito de esta sección es probar la solidez de **S4** respecto de la clase de todos los espacios topológicos, a la que denotaremos por **Top**. Lo haremos de la siguiente manera: primero demostraremos que los axiomas **K**, **T**, **4** y la dualidad modal son válidos en cualquier clase de espacios topológicos. Segundo, que las tres reglas de inferencia preservan esta validez. Tercero, concluír que, como consecuencia, todos los teoremas de **S4** son válidos en cualquier clase de espacios topológicos y por tanto en **Top**.

Definición 4.2. (Función de sustitución). Una *función de sustitución* es cualquier mapeo σ del conjunto de fórmulas atómicas **Prop** al conjunto de todas las fórmulas modales $\mathcal{FORM}$, es decir, $\sigma : \textbf{Prop} \to \mathcal{FORM}$.

Por el teorema de recursión podemos extender σ de manera única a una función $\sigma^* : \mathcal{FORM} \to \mathcal{FORM}$, que denotaremos $\sigma^*(\varphi) = (\varphi)^\sigma$ para cada fórmula φ, que cumpla:

$$\begin{aligned} (p)^\sigma &= \sigma(p), \\ \neg(\varphi)^\sigma &= \neg\varphi^\sigma, \\ (\varphi \wedge \psi)^\sigma &= \varphi^\sigma \wedge \psi^\sigma, \text{ y} \\ (\Diamond\varphi)^\sigma &= \Diamond\varphi^\sigma \end{aligned}$$

Definición 4.3. (Instancia de sustitución). Una fórmula ψ es *instancia de sustitución* de una fórmula φ si $\psi = \varphi^\sigma$ para alguna función de sustitución σ.

Definición 4.4. (Instancia de tautología). Una fórmula ψ es *instancia de tautología* de una fórmula φ si ψ es instancia de sustitución de φ y φ es una tautología.

Proposición 4.1. (Equivalencia por sustitución). Sea $\mathcal{M} = (X, \tau, \mathcal{V})$ un modelo topológico, σ una función de sustitución, $\mathcal{V}'$ la valuación definida por $\mathcal{V}'(p) = \mathcal{V}(p^\sigma)$ para cada fórmula atómica p, y $\mathcal{M}'$ el modelo $(X, \tau, \mathcal{V}')$. Entonces, para cada fórmula φ y sobre cada punto $x \in X$ se tiene que $\mathcal{M}$ satisface a φ^σ si y sólo si $\mathcal{M}'$ satisface a φ, es decir, $\mathcal{M}, x \vDash \varphi^\sigma$ si y sólo si $\mathcal{M}' \vDash \varphi$.

Demostración. Sean $\mathcal{M}, \sigma, \mathcal{V}'$ y $\mathcal{M}'$ como arriba. Realizaremos la prueba por inducción sobre la complejidad de la fórmula, es decir, probaremos que el conjunto:

$$A = \{\varphi \text{ fórmula modal } : \text{ para cada } x \in X \text{ tenemos } \mathcal{M}, x \vDash \varphi^\sigma \text{ ssi } \mathcal{M}', x \vDash \varphi\}$$

es precisamente el conjunto de todas las fórmulas. Para esto, emplearemos las propiedades de modelo, visto en los primeros dos capítulos, y las propiedades de las funciones de sustitución, arriba expuestas.

Comenzando con la atomicidad, si p es una fórmula atómica entonces se tiene la cadena de bicondicionales $\mathcal{M}, x \vDash \varphi^\sigma$ si y sólo si $x \in \mathcal{V}(p^\sigma)$ si y sólo si $x \in \mathcal{V}'(p)$ si y sólo si $\mathcal{M}, x \vDash p$. Así, $p \in A$.

Para la conjunción, si φ y ψ están en A, la cadena es $\mathcal{M}, x \vDash (\varphi \wedge \psi)^\sigma$ si y sólo si $[\mathcal{M}, x \vDash (\varphi)^\sigma$ y $\mathcal{M}, x \vDash (\varphi)^\psi]$ si y sólo si $[\mathcal{M}', x \vDash \varphi$ y $\mathcal{M}', x \vDash \psi]$ si y sólo si $\mathcal{M}', x \vDash \varphi \wedge \psi$. Luego $\varphi \wedge \psi \in A$. Y esto es similar para la disyunción.

En el caso de la negación, si φ está en A, las bicondicionales son $\mathcal{M}, x \vDash (\neg\varphi)^\sigma$ si y sólo si $\mathcal{M}, x \vDash \neg\varphi^\sigma$ si y sólo si $\mathcal{M}, x \nvDash \varphi^\sigma$ si y sólo si $\mathcal{M}', x \nvDash \varphi$ (por la cerradura de A) si y sólo si $\mathcal{M}', x \vDash \neg\varphi$. Por tanto, $\neg\varphi \in A$.

Pasemos al caso modal. Como $(\Diamond\varphi)^\sigma = \Diamond\varphi^\sigma$, sucede $\mathcal{M}, x \vDash (\Diamond\varphi)^\sigma$ si y sólo si $\mathcal{M}, x \vDash \Diamond\varphi^\sigma$. Esta última expresión significa que para cada $U \in \tau$ tal que $x \in U$ existe $y \in U$ tal que $\mathcal{M}, y \vDash \varphi^\sigma$. Y dado que $\varphi \in A$, tenemos que para cada $y \in X$ y cada $U \in \tau$ tal que $y \in U$ sucede $\mathcal{M}, y \vDash \varphi^\sigma$ si y sólo si $\mathcal{M}', y \vDash \varphi$. Con todo esto, $\mathcal{M}, x \vDash \Diamond\varphi^\sigma$

equivale a decir que para cada $U \in X$ que contenga a x existe $y \in U$ tal que $\mathcal{M}', y \vDash \varphi$, que a su vez equivale a $\mathcal{M}', x \vDash \Diamond\varphi$. Luego entonces $\Diamond\varphi \in A$ y por lo tanto A contiene a todas las fórmulas modales. La conclusión es que A es el conjunto de todas las fórmulas. $\square$

Proposición 4.2. Los axiomas **K**, **AT** y **A4** y la dualidad modal son válidos en cualquier clase de espacios topológicos $\mathcal{C}$.

Demostración.

i) Para el axioma K, sean $(X, \tau) \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{V} : \mathbf{Prop} \to \mathcal{P}(X)$. Veamos que si $\mathfrak{M} = (X, \tau, \mathcal{V})$ entonces $\mathfrak{M} \vDash \square(p \to q) \to (\square p \to \square q)$. Hay que probarlo para todo $x \in X$.

   Sea $x \in X$. Probemos que $\mathfrak{M}, x \vDash \square(p \to q) \to (\square p \to \square q)$. Supongamos que se cumple el antecedente de esta expresión, es decir, $\mathfrak{M}, x \vDash \square(p \to q)$. Entonces existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $\mathfrak{M}, y \vDash p \to q$ para cada $y \in U$. Con esto reducimos la prueba a tener que demostrar $\mathfrak{M}, x \vDash \square p \to \square q$, el consecuente.

   Supongamos que $\mathfrak{M}, x \vDash \square p$. Entonces existe $V \in \tau$ tal que $\mathfrak{M}, y \vDash p$ para cada $y \in V$. Ahora, hagamos $W = U \cap V$. Entonces $W \in \tau$ y $x \in W$. Así, para cada $z \in U \cap V$ sucede lo siguiente: por un lado $z \in U$ y por lo tanto $\mathfrak{M}, z \vDash p \to q$, y por otro lado $w \in V$ y por lo tanto $\mathfrak{M}, z \vDash p$. Concluímos que $\mathfrak{M}, z \vDash q$ y por ende $\mathfrak{M}, x \vDash \square q$.

   Así pues, $\mathfrak{M}, x \vDash \square(p \to q) \to (\square p \to \square q)$ para todo $x \in X$. Luego entonces $X \vDash \square(p \to q) \to (\square p \to \square q)$. Y como (X, τ) es cualquier elemento de $\mathcal{C}$, concluímos que $\mathcal{C} \vDash \square(p \to q) \to (\square p \to \square q)$.

ii) Para el axioma T, la prueba se asemeja a la del inciso precedente: sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{V} : \mathbf{Prop} \to \mathcal{P}(X)$. Veamos que si $\mathfrak{M} = (X, \tau, \mathcal{V})$ entonces $\mathfrak{M} \vDash \square p \to p$.

Sea $x \in X$. Probemos que $\mathfrak{M}, x \vDash \Box p \to p$. Supongamos que $\mathfrak{M}, x \vDash \Box p$. Entonces existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $\mathfrak{M}, y \vDash p$ para cada $y \in U$. Como $x \in U$, entonces $\mathfrak{M}, x \vDash p$, que es el consecuente del axioma.

Así pues, $\mathfrak{M}, x \vDash \Box p \to p$ para todo $x \in X$. Luego $X \vDash \Box p \to p$. Y como (X, τ) es cualquier elemento de $\mathcal{C}$, concluímos que $\mathcal{C} \vDash \Box p \to p$.

iii) Para el axioma 4, repitamos (X, τ) y $\mathcal{V}$ como arriba. Veamos que si $\mathfrak{M} = (X, \tau, \mathcal{V})$ entonces $\mathfrak{M} \vDash \Box p \to \Box\Box p$.

Sea $x \in X$. Probemos que $\mathfrak{M}, x \vDash \Box p \to \Box\Box p$. Supongamos que $\mathfrak{M}, x \vDash \Box p$. Entonces existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $\mathfrak{M}, y \vDash p$ para cada $y \in U$. Afirmamos que para cada $z \in U$ tenemos $\mathfrak{M}, z \vDash \Box p$. En efecto. Notemos que $U \in \tau$, $z \in U$ y para cada $y \in U$ se cumple que $\mathfrak{M}, y \vDash p$. Esto prueba que $\mathfrak{M}, z \vDash \Box p$. Concluímos que $\mathfrak{M}, x \vDash \Box\Box p$ y que por lo tanto $\mathfrak{M}, x \vDash \Box p \to \Box\Box p$. Luego $X \vDash \Box p \to \Box\Box p$ y así $\mathcal{C} \vDash \Box p \to \Box\Box p$.

iv) Para la dualidad modal, continuemos con (X, τ) y $\mathcal{V}$ como arriba y probemos que si $\mathfrak{M} = (X, \tau, \mathcal{V})$ entonces $\mathfrak{M} \vDash \Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$.

Sea $x \in X$. Probemos que $\mathfrak{M}, x \vDash \Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$:

$\mathfrak{M}, x \models \Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$	si y sólo si	para cada $U \in \tau$ tal que $x \in U$ se cumple que $\mathfrak{M}, y \models p$ para algún $y \in U$
	si y sólo si	para cada $U \in \tau$ tal que $x \in U$ se cumple que $\mathfrak{M}, y \not\models \neg p$ para algún $y \in U$
	si y sólo si	no existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y se cumpla $\mathfrak{M}, y \models \neg p$ para cada $y \in U$
	si y sólo si	$\mathfrak{M}, x \not\models \Box\neg p$
	si y sólo si	$\mathfrak{M}, x \models \neg\Box\neg p$.

Vale para todo $x \in X$, con lo que $X \models \Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$ y por lo tanto $\mathcal{C} \models \Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$.

$\Box$

Proposición 4.3. Las tautologías proposicionales son válidas en cualquier clase de espacios topológicos.

Demostración. Sean $(X, \tau) \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{V} : \mathbf{Prop} \to \mathcal{P}(X)$. Si $\mathfrak{M} = (X, \tau, \mathcal{V})$, deseamos probar que $\mathfrak{M} \models \varphi$, donde φ es una tautología.

Sea $x \in X$, y sea $\overline{\mathcal{V}}_x : \mathbf{Prop} \to \{0, 1\}$ dada por:

$$\overline{\mathcal{V}}_x(p) = \begin{cases} 1 \text{ si } \mathfrak{M}, x \models p & (x \in \mathcal{V}(p)) \\ 0 \text{ en otro caso} & (x \notin \mathcal{V}(p)) \end{cases}$$

para cada fórmula atómica p. Por el teorema de recursión, podemos extender $\overline{\mathcal{V}}_x$ de manera única a una función $\overline{\mathcal{V}}^*_x : \mathcal{FORM} \to \{0, 1\}$.

Definamos $A = \{\varphi \in \mathcal{FORM} : \mathfrak{M} \models \varphi \text{ si y sólo si } \overline{\mathcal{V}}^*_x = 1\}$. Afirmamos que $A = \mathcal{FORM}$, es decir, el conjunto de todas las fórmulas.

Esto se prueba por inducción sobre la complejidad de la fórmula. La atomicidad es evidente por la definición de A. La conjunción $\varphi \wedge \psi$, la disyunción $\varphi \vee \psi$ y la negación $\neg\varphi$, donde $\varphi, \psi \in A$, se siguen de las propiedades de $\mathfrak{M}$.

Así, para φ tautología y la valuación $\overline{\mathcal{V}}_x^*$ se tiene $\overline{\mathcal{V}}_x^*(\varphi) = 1$, lo cual equivale a $\mathfrak{M}, x \vDash \varphi$. Como $\varphi, (X, \tau), \mathcal{V}$ y x son arbitrarios, llegamos a que toda tautología proposicional es válida en $\mathcal{C}$. $\square$

Proposición 4.4. Las reglas de inferencia Modus Ponens (**MP**), Necesidad (**N**) y Sustitución Uniforme (**SU**) preservan la validez en cualquier clase de espacios topológicos.

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ una clase de espacios topológicos.

Comencemos con probar que la regla **MP** preserva la validez en $\mathcal{C}$, es decir, que si las fórmulas φ y $\varphi \to \psi$ son válidas en $\mathcal{C}$ entonces también la fórmula ψ es válida en $\mathcal{C}$. Sean (X, τ) un espacio topológico perteneciente a $\mathcal{C}$, $\mathfrak{M}$ un modelo topológico $(X, \tau, \mathcal{V})$ y x un elemento de X. Basta con probar $\mathfrak{M}, x \vDash \psi$. Asumamos la validez de φ y de $\varphi \to \psi$ en $\mathcal{C}$, es decir, $\mathcal{C} \vDash \varphi$ y $\mathcal{C} \vDash \varphi \to \psi$ respectivamente. Esto implica $\mathfrak{M}, x \vDash \varphi$ y $\mathfrak{M}, x \vDash \varphi \to \psi$, lo cual nos lleva a $\mathfrak{M}, x \vDash \psi$. Como (X, τ), $\mathcal{V}$ y x son arbitrarios, tenemos que ψ es válida en $\mathcal{C}$.

A continuación, probemos que también la regla **N** preserva la validez en $\mathcal{C}$, es decir, que si φ es válida en $\mathcal{C}$ entonces $\Box\varphi$ también lo es. Tomemos (X, τ), $\mathfrak{M} = (X, \tau, \mathcal{V})$ y x como en el párrafo precedente. Así, basta con probar $\mathfrak{M}, x \vDash \Box\varphi$, lo cual significa que debemos demostrar que existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $\mathfrak{M}, y \vDash \varphi$ para cada $y \in U$. El candidato para esto es $U = X$, pues de antemano tenemos $X \in \tau$ y $x \in X$, con lo cual $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ para cada $y \in U$, es decir, $y \in X$. Por lo tanto $\mathfrak{M}, x \vDash \varphi$ y así $\Box\varphi$ es válida en $\mathcal{C}$.

Por último, probemos que la regla **SU** preserva la validez en $\mathcal{C}$. Sean φ una fórmula válida en $\mathcal{C}$ y ψ una instancia de sustitución de φ. Esto significa que existe alguna función de sustitución σ : **Prop** $\to$

$\mathcal{FORM}$ cuya extensión σ^* satisface $\sigma^*(\varphi) = \psi$, o bien $\varphi^\sigma = \psi$ según la notación de la definición **4.2**, página 46. Nuevamente tomemos (X, τ), $\mathfrak{M} = (X, \tau, \mathcal{V})$ y x como arriba. Debemos probar que $\mathfrak{M}, x \vDash \psi$, lo cual es equivalente a $\mathfrak{M}, x \vDash \varphi^\sigma$. Definamos ahora la valuación $\mathcal{V}'$ como sigue: $\mathcal{V}'(p) = \mathcal{V}(p^\sigma)$ para $p \in \mathbf{Prop}$. Sea $\mathfrak{M}' = (X, \tau, \mathcal{V}')$. Como φ es válida en $\mathcal{C}$, entonces $\mathfrak{M}', x \vDash \varphi$. Por el lema 4.1.3 esto es equivalente a $\mathfrak{M}, x \vDash \varphi^\sigma$ y por lo tanto equivalente a $\mathfrak{M}, x \vDash \psi$, con lo cual ψ es válida en $\mathcal{C}$. □

Pasemos, finalmente, al enunciado y la demostración del teorema que ha generado toda esta preparación teórica.

Teorema 4.1. **S4** es sólido respecto de **Top**.

Demostración. Sea φ una fórmula modal tal que $\vdash_{S4} \varphi$. Probemos por inducción sobre la longitud de una prueba de φ, de largo a lo más n, que $\mathbf{Top} \vDash \varphi$.

Sea $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1}$ una prueba de φ en **S4**. Entonces tenemos que $\varphi_{n+1} = \varphi$ y que para φ_{n+1} puede suceder alguno de los siguientes casos:

- φ_{n+1} es una instancia de tautología;
- φ_{n+1} es el axioma K, el axioma T o el axioma 4;
- φ_{n+1} se obtiene a partir de φ_i para algún $i < n + 1$ aplicando la regla de Modus Ponens (MP), la regla de Necesidad (N) o la regla de Sustitución Uniforme (SU).

Procedamos caso por caso:

i) Instancia de tautología: si φ_{n+1} es una instancia de tautología, entonces existe una tautología proposicional α y una función de sustitución σ tales que $\varphi_{n+1} = \alpha^\sigma$. Por la proposición **4.3** (página 50), α es válida en cualquier espacio topológico y por lo tanto $\mathbf{Top} \vDash \alpha$. Y si aplicamos la equivalencia por sustitución (proposición **4.1**, página 47), llegamos a que **Top** $\models \alpha^\sigma$, es decir, **Top** $\models \varphi_{n+1}$;

ii) Axiomas: si φ_{n+1} es el axioma K, el axioma T o el axioma 4, entonces es una fórmula válida en virtud de la proposición **4.2** (página 48);

iii) Reglas de inferencia: Comencemos por la regla de Modus Ponens, es decir, φ_{n+1} se obtiene a partir de φ_i para algún $i < n+1$ aplicando la regla de Modus Ponens (MP). Esto es, existen $i, j < n+1$ tales que $\varphi_j = \varphi_i \rightarrow \varphi$ y φ_{n+1} se obtiene de $\frac{\varphi_i, \varphi_i \rightarrow \varphi}{\varphi}$. Notemos que $\vdash_{S4} \varphi_i$ y $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ es una prueba de φ_i de longitud $i \leq n$. Análogamente, $\vdash_{S4} \varphi_j$ y $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ es una prueba de φ_i de longitud $j \leq n$. Por hipótesis inductiva, **Top** $\models \varphi_i$ y **Top** $\models \varphi_i \rightarrow \varphi$, y por lo tanto **Top** $\models \varphi$. La prueba es análoga para la regla de Necesidad y para la regla de Sustitución Uniforme.

Por lo tanto, **Top** $\models \varphi$, con lo que **S4** es sólido respecto de **Top**. $\square$

4.2. Completitud topo-modal de S4

Recordemos que en un marco de Kripke (X, R) reflexivo y transitivo:

1. $U \subseteq X$ es llamado conjunto ascendente si $x \in U$ y xRy implican $y \in U$ (definición **3.6**, página 37).

2. La familia de los conjuntos ascendentes de (X, R), denotada por τ_R, es un espacio de Alexandroff (proposición **3.1**, página 37).

3. Para $x \in X$, $R(x) = \{y \in X : xRy\}$ es un conjunto ascendente, y es el menor conjunto abierto que contiene a x (definición **2.4**, página 10).

4. Y que si $\mathcal{M} = (X, \tau_R, \mathcal{V})$ es su modelo topológico asociado, entonces para cada fórmula modal φ y cada punto $x \in X$ se cumple que $\mathfrak{M}, x \vDash \varphi$ si y sólo si $\mathcal{M}, x \vDash \varphi$ (proposición **3.1**, página 41).

Con todo esto, estamos en condiciones de presentar la definición y de probar el teorema que le dan nombre a esta sección.

Definición 4.5. (Completitud topo-modal). Sea $\mathcal{C}$ una clase de espacios topológicos. Un sistema lógico modal S es *completo* respecto de $\mathcal{C}$, denotado por $\mathcal{C} \vdash_S \varphi$, si toda fórmula válida en $\mathcal{C}$ es teorema en S, es decir, para cada fórmula modal φ y cada espacio topológico (X, τ) en $\mathcal{C}$ tenemos

$$(X, \tau) \vDash \varphi \text{ implica } \vdash_S \varphi \quad .$$

Teorema 4.2. S4 es completo respecto de **Top**.

Demostración. Procedamos por contradicción. Sea φ una fórmula modal que no es teorema en **S4**, es decir, tal que $\nvdash_S \varphi$. Como **S4** es completo con respecto de la clase de los marcos reflexivos y transitivos (teorema **2.4**, página 29), existe un modelo $\mathfrak{M} = (X, R, V)$ y un punto $x \in X$ tales que (X, R) es un marco reflexivo y transitivo y $\mathfrak{M}, x \nvDash \varphi$. Entonces, el topo-modelo $\mathcal{M} = (X, \tau_R, \mathcal{V})$ asociado a $\mathfrak{M}$ cumple $\mathcal{M}, x \nvDash \varphi$ y por lo tanto φ no es válida en **S4**.

Por lo tanto, **S4** es completo respecto de **Top**. $\square$

Capítulo 5

Conclusiones

1. Repasamos algunas nociones básicas de las dos disciplinas que le dan sustento a este trabajo: lógica y topología.

2. Introdujimos los conceptos de la lógica modal, incluídos los de marcos y modelos de Kripke y los de satisfacibilidad y validez.

3. Establecimos los criterios de heredabilidad, de invarianza, de equivalencia y de bisimulación entre modelos de Kripke, principalmente de los submodelos generados, de las imágenes p-mórficas y de las uniones disjuntas.

4. Construímos modelos finitos por el método de filtración.

5. Definimos, para cada marco de Kripke, una relación binaria reflexiva y transitiva que convirtió a sus conjuntos relacionales en una familia preordenada de conjuntos.

6. Establecimos una identificación entre estas familias preordenadas y los espacios de Alexandroff.

7. Demostramos la solidez y la completitud modales del sistema **S4** respecto de la clase de los marcos de Kripke preordenados.

8. Definimos los modelos topológicos en general, para luego avocarnos a los modelos basados en el sistema **S4** y establecer las definiciones y las proposiciones modales (puntos 2 y 3) bajo una implementación topológica.

9. Probamos la solidez y la completitud topologico-modales del sistema **S4**.

Índice de materias

Bibliografía

[1] Will Asness. ***A brief overview of Alexandrov spaces***. The University of Chicago Department of Mathematics. (2018). URL: https://math.uchicago.edu/~may/REU2018/REUPapers/Asness.pdf.

[2] Patrick Blackburn & Johan van Benthem. ***Modal logic: a semantic perspective***. Handbook of Modal Logic – P. Blackburn et al. (Editors). (2007). URL: https://drive.google.com/drive/u/1/folders/178x7NMtQEjJsifuHDDylpLxOS3R2t5VL.

[3] Nick Bezhanishvili. ***Topological semantics of modal logic***. Institute for Logic, Language and Computation, University of Amsterdam. Tsinghua Summer School. (2021). URL: https://rodrigonalmeida.github.io/projects/Topology_Project/Guest-lecture-slides.pdf.

[4] James R. Munkres. ***Topología***. Prentice-Hall, (2002). ISBN: 84-205-3180-4.

[5] Shashank Pathak. ***Modal logic of spaces***. Department of Mathematics, Indian Institute of Science, Education and Research Bophal. (2021). URL: https://home.iiserb.ac.in/~kashyap/Group/thesis_shashank.pdf.

[6] Varios. ***Modal logic S4***. PlanetMath, (2022). URL: https://planetmath.org/ModalLogicS4.