



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

“AGUJEROS NEGROS EN ESPACIOTIEMPOS DE LIFSHITZ EN MODELOS TENSO- ESCALARES”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN CIENCIAS
(FÍSICA APLICADA)**

PRESENTA

URIEL NORIEGA CORNELIO

DIRECTORES DE TESIS

DR. ALFREDO HERRERA AGUILAR

DR. CUPATITZIO RAMÍREZ ROMERO

No. de CVU: 814574

DICIEMBRE 2020



Agujeros Negros en Espaciotiempos de Lifshitz en Modelos Tenso-Escalares

Tesis que para obtener el grado de
maestro en ciencias
(Física Aplicada)
presenta

Lic. Uriel Noriega Cornelio

Supervisado por el Dr. Herrera Aguilar Alfredo
y el Dr. Ramírez Romero Cupatitzio

Diciembre 2020

Resumen

En el presente trabajo se deducen, mediante la variación de una acción, las ecuaciones de campo para una teoría tenso-escalar en $D + 1$ dimensiones que describe gravedad acoplada fuertemente a un número arbitrario n de campos escalares. Mediante el ansatz de Lifshitz para la métrica se escriben dichas ecuaciones para el caso particular de un sistema en dos dimensiones y con dos campos escalares. Se resuelven las ecuaciones de este sistema y se encuentran soluciones exactas particulares. La familia de métricas encontrada corresponde a configuraciones de agujero negro asintóticamente Lifshitz. Se realiza el estudio de las propiedades físicas para dicha familia de soluciones mediante el cálculo de invariantes geométricos. Se analiza el comportamiento del arreglo de campos escalares que soportan a la métrica.

Agradecimientos

Agradezco enormemente a mi familia por su cariño, apoyo y comprensión.

Índice general

Resumen	v
Agradecimientos	vi
1. Introducción	1
1.1. Teorías tenso-escalares	1
1.2. Espaciotiempos de Lifshitz	2
1.3. Motivación	3
2. La acción y su variación	4
2.1. La acción	4
2.2. Método variacional	4
2.2.1. Derivación de las ecuaciones gravitacionales	5
2.2.2. Deducción de las ecuaciones de los campos escalares	10
3. Ecuaciones de campo	14
3.1. Deducción de cantidades importantes	14
3.1.1. El ansatz para la métrica	14
3.1.2. Los símbolos de Christoffel	14
3.1.3. El tensor de Ricci	15
3.1.4. El escalar de Ricci o escalar de curvatura	15
3.2. Las ecuaciones de Einstein para el sistema	15
3.2.1. La componente rr	16
3.2.2. La componente tt	16
3.3. Las ecuaciones de los campos escalares para el sistema	16
3.3.1. La ecuación del campo escalar con $a = 1$	17
3.3.2. La ecuación del campo escalar con $a = 2$	17
4. Soluciones particulares a las ecuaciones de campo	18
4.1. La función $f(r)$	18

4.2. Solución I	19
4.3. Solución II	20
4.4. Solución III	22
4.5. Solución IV	24
5. Propiedades físicas de las soluciones	28
5.1. El tensor de Riemann	29
5.2. Los invariantes geométricos	30
5.2.1. El escalar de curvatura	30
5.2.2. El invariante de Kretschmann	30
5.2.3. La contracción del tensor de Ricci consigo mismo	31
6. Conclusiones	32
6.1. Trabajo a futuro	33
Bibliografía	33

Capítulo 1

Introducción

1.1. Teorías tenso-escalares

Las teorías tenso-escalares de gravedad son modelos gravitatorios alternativos a la teoría de Einstein original. Estas teorías son conocidas con este nombre ya que contienen al tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y un campo escalar ϕ . Una característica importante de estos modelos es el acoplamiento directo que existe entre el campo escalar ϕ y el escalar de curvatura R .

Una forma general de las teorías tenso-escalares puede derivarse de una densidad lagrangiana que tiene la siguiente expresión [1]-[2]:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} [f(\phi)R + g(\phi)(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi) - 2\Lambda(\phi) + \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi_i)], \quad (1.1)$$

donde f , g y Λ son funciones arbitrarias del campo escalar que definen la teoría, $\mathcal{L}_m$ es la densidad lagrangiana de materia, con el determinante $\sqrt{-g}$ factorizado, que depende de la métrica $g_{\mu\nu}$ y de los campos de materia ψ_i .

Otra característica de estas teorías es que son conformemente equivalentes a Relatividad General; esto quiere decir que si realizamos una transformación conforme del siguiente estilo:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = f(\phi)g_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

la nueva métrica, $\tilde{g}_{\mu\nu}$, obedece las ecuaciones usuales de Einstein con fuentes de materia y campo escalar, donde el escalar de curvatura, R , no está acoplado a alguna función, $f(\phi)$. De esta manera se dice que la teoría se encuentra expresada en el marco de Einstein, ya que las ecuaciones de Einstein con la métrica conforme, $\tilde{g}_{\mu\nu}$, toman su forma convencional. Cuando se considera la métrica original $g_{\mu\nu}$ se dice que se utiliza el marco de Jordan.

Otra característica notable de estos modelos es que resultan de manera natural al considerar la reducción dimensional de teorías con dimensiones extra, tales como Kaluza-Klein [3].

1.2. Espaciotiempos de Lifshitz

Una teoría en N dimensiones, con coordenadas espaciales x^i y coordenada temporal t , que es invariante bajo traslaciones y rotaciones espaciales:

$$H : t \rightarrow t' = t + a, \quad (1.3)$$

$$P^i : x^i \rightarrow x'^i = x^i + a^i, \quad (1.4)$$

$$L^{ij} : x^i \rightarrow x'^i = L^i_j x^j \quad (1.5)$$

y que es simétrica bajo el siguiente cambio de escala:

$$\mathcal{D}_z : \quad t \rightarrow t' = \lambda^z t, \quad x_i \rightarrow x'^i = \lambda x^i, \quad (1.6)$$

se dice que tiene una simetría tipo Lifshitz. El grupo de simetría que consiste de las transformaciones H , P^i , L^{ij} y $\mathcal{D}_z$ se denota como $Lif_N(z)$ [4]-[5].

Una generalización inmediata de los modelos tipo Lifshitz son las teorías homogéneas y espacialmente anisótropas, es decir, aquellas con simetrías en la traslación (H, P^i) pero con cambio de escala distinto en cada dirección:

$$\mathcal{D}_{z_i} : \quad t \rightarrow t' = \lambda^z t, \quad x_i \rightarrow x'^i = \lambda^{z_i} x^i, \quad (1.7)$$

donde z_i son los exponentes dinámicos.

Al grupo que consiste de H , P^i y $\mathcal{D}_{z_i}$ lo denotamos como $Lif_N(z_i)$.

Las geometrías tipo Lifshitz están dadas por la siguiente expresión [6]:

$$ds^2 = l^2 \left(-r^{\pm 2z} dt^2 + \frac{dr^2}{r^2} + r^{\pm 2} dx_i^2 \right), \quad (1.8)$$

donde $0 \leq r \leq \infty$, l es el radio de Lifshitz, $i = 1, 2, \dots, d$ y a z se le conoce como el exponente dinámico. Observamos que cuando $z = 1$ se recupera la geometría tipo anti-de Sitter (AdS).

La métrica admite las traslaciones y rotaciones espaciales (1.3)-(1.5) como isometrías¹ y también es invariante bajo el cambio de escala (1.6).

¹A las simetrías que posee la métrica usualmente se les llama isometrías.

La geometría de Lifshitz es una solución a las ecuaciones de Einstein con tensor de energía-momento no trivial. Una manera sencilla de obtener un espaciotiempo de este estilo consiste en considerar gravedad con constante cosmológica negativa acoplada a un campo vectorial masivo A_μ [5]-[7]:

$$S = \int d^{D+1}x \sqrt{-g} \left[R - 2\Lambda - \frac{1}{4}F^2 - \frac{1}{2}M^2 A^2 \right], \quad (1.9)$$

donde Λ es la constante cosmológica, $F_{\mu\nu}$ es la intensidad del campo vectorial, A_μ es un campo de Proca.

1.3. Motivación

Recientemente se ha mostrado un gran interés en la teoría denominada Sachdev–Ye–Kitaev (SYK), propuesta por primera vez por Kitaev como una generalización del modelo Sachdev–Ye [8–11].

En este modelo se considera la interacción de N fermiones de Majorana ψ_i en una dimensión. El Hamiltoniano de esta teoría está dado por la siguiente expresión:

$$\mathcal{H} = \sum_{ijkl} \lambda_{ijkl} \psi_i \psi_j \psi_k \psi_l, \quad (1.10)$$

donde $i, j, k, l = 1, 2, \dots, N$, λ_{ijkl} son las constantes de acoplamiento obtenidas de una distribución Gaussiana con promedio igual a cero.

El interés en este modelo se debe a las importantes propiedades que presenta, entre ellas que en el límite cuando $N \rightarrow \infty$ el modelo se resuelve exactamente. Otra propiedad importante es que esta teoría está estrechamente relacionada con los modelos de gravedad-dilatónica en dos dimensiones, cuya importancia radica en que pueden describir fenómenos físicamente interesantes cerca del horizonte de eventos de agujeros negros [11].

Una conjetura natural sobre el dual gravitatorio de estas teorías, en el marco de la dualidad holográfica, son los modelos tenso-escalares [12], hecho que motiva su estudio y en particular la realización del presente trabajo.

En adición, la búsqueda de soluciones tipo agujero negro en el marco de estas teorías está motivada por el análisis, bajo la conjetura de la dualidad, de las propiedades termodinámicas de sistemas descritos por teorías de campo [13]-[14]. Para una referencia introductoria sobre el tema véase el trabajo [15].

Capítulo 2

La acción y su variación

2.1. La acción

En el presente trabajo nos enfocamos en una teoría tenso-escalar de la gravedad en $D+1$ dimensiones y con un número arbitrario n de campos escalares. Como se mencionó en el capítulo anterior, una característica notable en este tipo de teorías es que los campos escalares se acoplan directamente al escalar de curvatura R .

En esta sección consideramos como punto de partida la siguiente acción de gravedad con campos escalares :

$$S = \int d^{D+1}x \sqrt{-g} e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} \left(R + \sum_{b,c} \beta_{bc} (\partial^\mu \phi_b) (\partial_\mu \phi_c) - 2\Lambda \right), \quad (2.1)$$

donde $D+1$ es la dimensión del espaciotiempo, $g = \det g_{\mu\nu}$, R es el escalar de curvatura, Λ es la constante cosmológica de la teoría, ϕ_a denota los campos escalares, γ_a son constantes reales y arbitrarias, β_{bc} es la entrada bc de una matriz cuadrada de constantes reales arbitrarias y $a, b, c = 1, 2, \dots, n$, donde n es el número de campos escalares.

2.2. Método variacional

Podemos escribir la acción (2.1) como la suma de una parte gravitacional $S_{\phi R}$ y una parte escalar S_ϕ :

$$S = S_{\phi R} + S_\phi, \quad (2.2)$$

donde

$$S_{\phi R} = \int d^{D+1}x \sqrt{-g} e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} R \quad (2.3)$$

y

$$S_\phi = \int d^{D+1}x \sqrt{-g} e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} \left(\sum_{b,c} \beta_{bc} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi_b) (\partial_\nu \phi_c) - 2\Lambda \right). \quad (2.4)$$

Las ecuaciones que gobiernan esta teoría incluyen las ecuaciones gravitacionales (ecuaciones de Einstein) que se obtienen al variar la acción con respecto de la métrica y las ecuaciones de campo escalar que se obtienen al variar la acción con respecto de los campos escalares.

2.2.1. Derivación de las ecuaciones gravitacionales

Analicemos el comportamiento de la acción (2.1) al realizar variaciones de la métrica. Es importante notar que es conveniente realizar la variación con respecto de la métrica inversa $g^{\mu\nu}$.

A partir de la variación

$$\delta (g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu}) = \delta (\delta_\nu^\mu) = 0, \quad (2.5)$$

obtenemos

$$g^{\mu\alpha} \delta g_{\alpha\nu} = -g_{\lambda\nu} \delta g^{\mu\lambda}, \quad (2.6)$$

de esta forma

$$\delta g_{\alpha\nu} = -g_{\mu\alpha} g_{\lambda\nu} \delta g^{\mu\lambda}, \quad (2.7)$$

con lo cual llegamos a la conclusión de que los puntos estacionarios que encontremos al variar $g^{\mu\nu}$ también son puntos estacionarios al variar $g_{\mu\nu}$.

Comencemos por estudiar la variación de la acción $\delta S_{\phi R}$ (2.3) la cual vamos a descomponer en tres partes, usando el hecho de que $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$:

$$\delta S_{\phi R} = \delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3, \quad (2.8)$$

donde

$$\delta S_1 = \int d^{D+1}x e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

$$\delta S_2 = \int d^{D+1}x e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

y

$$\delta S_3 = \int d^{D+1}x e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} R \delta \sqrt{-g}. \quad (2.11)$$

Observemos que δS_2 ya se encuentra en la forma deseada: algo multiplicado por la variación de $g^{\mu\nu}$.

Consideremos ahora la variación para S_1 . Sabemos que el tensor de Ricci es la contracción del tensor de Riemann, el cual está dado por:

$$R_{\mu\lambda\nu}^{\rho} = \partial_{\lambda}\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho}\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma}. \quad (2.12)$$

Al realizar una variación arbitraria de los símbolos de Christoffel,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \rightarrow \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}, \quad (2.13)$$

y considerar solo los términos a primer orden en la variación tenemos que

$$\delta R_{\mu\lambda\nu}^{\rho} = \partial_{\lambda}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) + \delta(\Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho}\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}) - \partial_{\nu}(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\rho}) - \delta(\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma}). \quad (2.14)$$

Por otro lado, como la variación arbitraria $\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho}$ es una diferencia de dos conexiones, y por lo tanto es un tensor, podemos tomar su derivada covariante.

De esta manera, consideramos las siguientes derivadas covariantes

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) &= \partial_{\lambda}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma}\delta\Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}, \\ \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\rho}) &= \partial_{\nu}(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\rho}) + \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma}\delta\Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} - \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

y su resta,

$$\begin{aligned} &\nabla_{\lambda}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\rho}) \\ &= \partial_{\lambda}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) - \partial_{\nu}(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\rho}) + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} + \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} \\ &= \partial_{\lambda}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) - \partial_{\nu}(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\rho}) + \delta(\Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho}\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}) - \delta(\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Al comparar (2.14) y (2.16) obtenemos:

$$\delta R_{\mu\lambda\nu}^{\rho} = \nabla_{\lambda}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\rho}), \quad (2.17)$$

o en términos del tensor de Ricci:

$$\delta R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} = \delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\lambda}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda}). \quad (2.18)$$

De esta manera tenemos que

$$\begin{aligned} \delta S_1 &= \int dx \sqrt{-g} e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} g^{\mu\nu} [\nabla_{\lambda}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda})] \\ &= \int dx \sqrt{-g} e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} \nabla_{\sigma} [g^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}) - g^{\mu\sigma}(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda})], \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde hemos renombrado algunos índices mudos y utilizado la derivada covariante del tensor métrico.

Consideramos la definición de los símbolos de Christoffel,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) \quad (2.20)$$

y su variación con respecto de $g^{\mu\nu}$,

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = -\frac{1}{2} [g_{\lambda\mu} \nabla_{\nu} (\delta g^{\lambda\sigma}) + g_{\lambda\nu} \nabla_{\mu} (\delta g^{\lambda\sigma}) - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla^{\sigma} (\delta g^{\alpha\beta})]; \quad (2.21)$$

al sustituir (2.21) en (2.19) llegamos a la siguiente expresión:

$$\delta S_1 = \int dx \sqrt{-g} e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} \nabla_{\sigma} [g_{\mu\nu} \nabla^{\sigma} \delta g^{\mu\nu} - \nabla_{\lambda} \delta g^{\sigma\lambda}]. \quad (2.22)$$

Ahora, si utilizamos la integración por partes dos veces tenemos que:

$$\begin{aligned} \delta S_1 &= \sqrt{-g} e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} [g_{\mu\nu} \nabla^{\sigma} \delta g^{\mu\nu} - \nabla_{\lambda} \delta g^{\sigma\lambda}]_{-\infty}^{\infty} - \\ &\int dx \sqrt{-g} \nabla_{\sigma} e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} [g_{\mu\nu} \nabla^{\sigma} \delta g^{\mu\nu} - \nabla_{\lambda} \delta g^{\sigma\lambda}] \\ &= \nabla_{\sigma} e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} [g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \delta g^{\sigma\lambda}]_{-\infty}^{\infty} + \\ &\int dx \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \nabla^{\sigma} \nabla_{\sigma} e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} \delta g^{\mu\nu} - \\ &\int dx \sqrt{-g} \nabla_{\lambda} \nabla_{\sigma} e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} \delta g^{\sigma\lambda} \\ &= \int dx \sqrt{-g} (g_{\mu\nu} \square e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} e^{\sum_a \gamma_a \phi_a}) \delta g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde hemos considerado que las variaciones de la métrica en el infinito son nulas, además que $\square = \nabla^{\sigma} \nabla_{\sigma} = g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu}$ es el símbolo que denota el d'Alembertiano.

Para estudiar el caso de δS_3 (2.11) consideremos primero que

$$\ln(\det M) = \text{Tr}(\ln M), \quad (2.24)$$

donde M es una matriz cuadrada con determinante distinto de cero. Al variar la igualdad tenemos que

$$\frac{1}{\det M} \delta(\det M) = \text{Tr}(M^{-1} \delta M). \quad (2.25)$$

Si consideramos $M = g_{\mu\nu}$, de tal manera que $\det M = \det g_{\mu\nu} = g$, entonces:

$$\begin{aligned} \delta g &= g(g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) \\ &= -g(g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde hemos considerado el resultado (2.7):

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \delta g^{\rho\sigma}. \quad (2.27)$$

De esta manera tenemos que

$$\begin{aligned}
 \delta\sqrt{-g} &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g \\
 &= \frac{1}{2}\frac{g}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\
 &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \delta S_3 &= \int dx e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} R \delta\sqrt{-g} \\
 &= \int dx e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} R \left(-\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right).
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Reuniendo todas la variaciones tenemos:

$$\begin{aligned}
 \delta S_{\phi R} &= \delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3 \\
 &= \int dx \sqrt{-g} \left[e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} \left(\underbrace{-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + R_{\mu\nu}}_{G_{\mu\nu}} \right) + g_{\mu\nu} \square e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} - \right. \\
 &\quad \left. \nabla_\mu \nabla_\nu e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} \right] \delta g^{\mu\nu}, \tag{2.30}
 \end{aligned}$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein.

Cálculo del tensor de energía momento

Consideremos ahora la variación de la parte escalar de la acción (2.4), con respecto de $g^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
 \delta S_\phi &= \int d^D x \delta\sqrt{-g} e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} \left(\sum_{b,c} \beta_{bc} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi_b) (\partial_\nu \phi_c) - 2\Lambda \right) + \\
 &\quad \int d^D x \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} \sum_{b,c} \beta_{bc} (\partial_\mu \phi_b) (\partial_\nu \phi_c) \\
 &= -\frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} \left(\sum_{b,c} \beta_{bc} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi_b) (\partial_\nu \phi_c) - 2\Lambda \right) + \\
 &\quad \int d^D x \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} \sum_{b,c} \beta_{bc} (\partial_\mu \phi_b) (\partial_\nu \phi_c) \\
 &= \int d^D x e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \times \\
 &\quad \left[-\frac{1}{2} \left(\sum_{b,c} \beta_{bc} g_{\mu\nu} (\partial^\beta \phi_b) (\partial_\beta \phi_c) - 2\Lambda g_{\mu\nu} \right) + \sum_{b,c} \beta_{bc} (\partial_\mu \phi_b) (\partial_\nu \phi_c) \right]. \tag{2.31}
 \end{aligned}$$

Por definición tenemos que el tensor de energía momento está dado por la siguiente expresión:

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \hat{S}_\phi}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.32)$$

donde $\delta \hat{S}_\phi$ es el integrando de δS_ϕ .

Entonces para nuestro caso:

$$T_{\mu\nu} = e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} \left\{ g_{\mu\nu} \left[\sum_{b,c} \beta_{bc} (\partial^\beta \phi_b) (\partial_\beta \phi_c) - 2\Lambda \right] - 2 \sum_{b,c} \beta_{bc} (\partial_\mu \phi_b) (\partial_\nu \phi_c) \right\}. \quad (2.33)$$

De este modo hemos logrado obtener la variación de la acción (2.1) con respecto de $g^{\mu\nu}$.

Al reunir los resultados (2.30), (2.31), (2.32) y (2.33) esta variación adopta la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta S_{\phi R} + \delta S_\phi \\ &= \int d^n x \sqrt{-g} \left(e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} - \nabla_\mu \nabla_\nu e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} \right) \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento gravitacionales tenemos que considerar que la variación de la acción es cero para toda $\delta g^{\mu\nu}$, es decir que se tiene que cumplir que:

$$e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} - \nabla_\mu \nabla_\nu e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} = 0. \quad (2.35)$$

Ahora analicemos más a detalle el penúltimo y último términos del primer miembro de esta última ecuación:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \square e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} &= g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \nabla_\sigma e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} \\ &= g_{\mu\nu} (g^{\sigma\rho} \nabla_\rho \nabla_\sigma e^{\sum_a \gamma_a \phi_a}) \\ &= e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} g_{\mu\nu} g^{\sigma\rho} \times \\ &\quad \left(\sum_{a,b} \gamma_a \gamma_b \partial_\sigma \phi_a \partial_\rho \phi_b + \sum_a \gamma_a \nabla_\rho \partial_\sigma \phi_a \right) \\ &= e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} g_{\mu\nu} \left(\sum_{a,b} \gamma_a \gamma_b \partial^\rho \phi_a \partial_\rho \phi_b + \sum_a \gamma_a \nabla^\sigma \partial_\sigma \phi_a \right), \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \nabla_\nu e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} &= \nabla_\mu (\partial_\nu e^{\sum_a \gamma_a \phi_a}) \\
&= \nabla_\mu \left(e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} \sum_a \gamma_a (\partial_\nu \phi_a) \right) \\
&= \partial_\mu e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} \sum_a \gamma_a (\partial_\nu \phi_a) + e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} \sum_a \gamma_a \nabla_\mu (\partial_\nu \phi_a) \\
&= e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} \left[\left(\sum_b \gamma_b \partial_\mu \phi_b \right) \left(\sum_a \gamma_a \partial_\nu \phi_a \right) + \sum_a \gamma_a \nabla_\mu \partial_\nu \phi_a \right] \\
&= e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} \left[\sum_{a,b} \gamma_a \gamma_b \partial_\nu \phi_a \partial_\mu \phi_b + \sum_a \gamma_a \nabla_\mu \partial_\nu \phi_a \right]. \quad (2.37)
\end{aligned}$$

Finalmente, usando (2.35), las ecuaciones de Einstein adoptan la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&-R_{\mu\nu} - \sum_{a,b} \beta_{ab} \partial_\mu \phi_a \partial_\nu \phi_b + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(R + \sum_{a,b} \beta_{ab} (\partial^\rho \phi_a) (\partial_\rho \phi_b) - 2\Lambda \right) + \\
&\sum_a \gamma_a \nabla_\mu \partial_\nu \phi_a + \sum_{a,b} \gamma_a \gamma_b \partial_\mu \phi_a \partial_\nu \phi_b - \\
&g_{\mu\nu} \left(\sum_{a,b} \gamma_a \gamma_b (\partial^\rho \phi_a) (\partial_\rho \phi_b) + \sum_a \gamma_a \nabla^2 \phi_a \right) = 0. \quad (2.38)
\end{aligned}$$

2.2.2. Deducción de las ecuaciones de los campos escalares

En este caso es útil considerar a la densidad Lagrangiana como

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \hat{\mathcal{L}}, \quad (2.39)$$

ya que mientras que para derivar las ecuaciones gravitacionales utilizamos $\mathcal{L}$, lo que usamos para derivar las ecuaciones de campo es en realidad $\hat{\mathcal{L}}$. Al hacer esto, se obtienen las Ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas para campos,

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \phi_a} - \nabla_\mu \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \nabla_\mu \phi_a} \right) = 0, \quad (2.40)$$

donde ∇_μ expresa derivada covariante.

En nuestro trabajo:

$$\hat{\mathcal{L}} = e^{\sum_d \gamma_d \phi_d} \left[R + \sum_{b,c} \beta_{bc} (\partial^\sigma \phi_b) (\partial_\sigma \phi_c) - 2\Lambda \right], \quad (2.41)$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \phi_a} = \gamma_a e^{\sum_d \gamma_d \phi_d} \left[R + \sum_{b,c} \beta_{bc} (\partial^\sigma \phi_b) (\partial_\sigma \phi_c) - 2\Lambda \right]. \quad (2.42)$$

Ahora como

$$\hat{\mathcal{L}} = e^{\sum_d \gamma_d \phi_d} \left[R + \sum_{b,c} \beta_{bc} g^{\rho\sigma} (\nabla_\rho \phi_b) (\nabla_\sigma \phi_c) - 2\Lambda \right], \quad (2.43)$$

donde solo hemos “bajado” el índice en la derivada covariante, entonces

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \nabla_\mu \phi_a} = e^{\sum_d \gamma_d \phi_d} \left[\sum_{b,c} \beta_{bc} g^{\rho\sigma} \frac{\partial (\nabla_\rho \phi_b) (\nabla_\sigma \phi_c)}{\partial \nabla_\mu \phi_a} \right]. \quad (2.44)$$

Analicemos la siguiente derivada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [(\nabla_\rho \phi_b) (\nabla_\sigma \phi_c)]}{\partial \nabla_\mu \phi_a} &= \frac{\partial (\nabla_\rho \phi_b)}{\partial \nabla_\mu \phi_a} (\nabla_\sigma \phi_c) + (\nabla_\rho \phi_b) \frac{\partial (\nabla_\sigma \phi_c)}{\partial \nabla_\mu \phi_a} \\ &= \delta_\rho^\mu \delta_b^a (\nabla_\sigma \phi_c) + (\nabla_\rho \phi_b) \delta_\sigma^\mu \delta_c^a. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Al utilizar el resultado anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \nabla_\mu \phi_a} &= e^{\sum_d \gamma_d \phi_d} \left\{ \sum_{b,c} \beta_{bc} g^{\rho\sigma} \delta_\rho^\mu \delta_b^a (\nabla_\sigma \phi_c) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{b,c} \beta_{bc} g^{\rho\sigma} (\nabla_\rho \phi_b) \delta_\sigma^\mu \delta_c^a \right\} \\ &= e^{\sum_d \gamma_d \phi_d} \left\{ \sum_c \beta_{ac} g^{\mu\sigma} (\nabla_\sigma \phi_c) + \sum_b \beta_{ba} g^{\rho\mu} (\nabla_\rho \phi_b) \right\}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Ahora calculemos la derivada covariante de esta última expresión:

$$\begin{aligned}
& \nabla_\mu \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \nabla_\mu \phi_a} \right) \\
&= \nabla_\mu \left\{ e^{\sum_d \gamma_d \phi_d} \left[\sum_c \beta_{ac} g^{\mu\sigma} (\nabla_\sigma \phi_c) + \sum_b \beta_{ba} g^{\rho\mu} (\nabla_\rho \phi_b) \right] \right\} \\
&= \nabla_\mu (e^{\sum_d \gamma_d \phi_d}) \left[\sum_c \beta_{ac} g^{\mu\sigma} (\nabla_\sigma \phi_c) + \sum_b \beta_{ba} g^{\rho\mu} (\nabla_\rho \phi_b) \right] + \\
& \quad e^{\sum_d \gamma_d \phi_d} \nabla_\mu \left[\sum_c \beta_{ac} g^{\mu\sigma} (\nabla_\sigma \phi_c) + \sum_b \beta_{ba} g^{\rho\mu} (\nabla_\rho \phi_b) \right] \\
&= e^{\sum_d \gamma_d \phi_d} \sum_d \gamma_d \partial_\mu \phi_d \left[\sum_c \beta_{ac} \nabla^\mu \phi_c + \sum_b \beta_{ba} \nabla^\mu \phi_b \right] + \\
& \quad e^{\sum_d \gamma_d \phi_d} \left[\sum_c \beta_{ac} \nabla^\sigma \nabla_\sigma \phi_c + \sum_b \beta_{ba} \nabla^\rho \nabla_\rho \phi_b \right] \\
&= e^{\sum_d \gamma_d \phi_d} \left[\sum_c \beta_{ac} \nabla^\mu \phi_c \sum_d \gamma_d \partial_\mu \phi_d + \right. \\
& \quad \left. \sum_b \beta_{ba} \nabla^\mu \phi_b \sum_d \gamma_d \partial_\mu \phi_d + \sum_c \beta_{ac} \nabla^2 \phi_c + \sum_b \beta_{ba} \nabla^2 \phi_b \right] \\
&= e^{\sum_d \gamma_d \phi_d} \left[\sum_c \beta_{ac} \left(\nabla^2 \phi_c + \nabla^\mu \phi_c \sum_d \gamma_d \partial_\mu \phi_d \right) + \right. \\
& \quad \left. \sum_b \beta_{ba} \left(\nabla^2 \phi_b + \nabla^\mu \phi_b \sum_d \gamma_d \partial_\mu \phi_d \right) \right]. \tag{2.47}
\end{aligned}$$

Finalmente, usando (2.42) y (2.47) nuestras ecuaciones de Euler-Lagrange para campos (2.40) quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& \gamma_a \left[R + \sum_{b,c} \beta_{bc} (\partial^\sigma \phi_b) (\partial_\sigma \phi_c) - 2\Lambda \right] \\
&= \sum_c \beta_{ac} \left(\nabla^2 \phi_c + \nabla^\mu \phi_c \sum_d \gamma_d \partial_\mu \phi_d \right) + \sum_b \beta_{ba} \left(\nabla^2 \phi_b + \nabla^\mu \phi_b \sum_d \gamma_d \partial_\mu \phi_d \right) \\
& \quad = \sum_c (\beta_{ac} + \beta_{ca}) \left(\nabla^2 \phi_c + \nabla^\mu \phi_c \sum_d \gamma_d \partial_\mu \phi_d \right). \tag{2.48}
\end{aligned}$$

Cabe destacar que el resultado anterior es distinto del encontrado en [12], donde las ecuaciones de movimiento del campo escalar están dadas por la siguiente

expresión:

$$\begin{aligned} \gamma_a \left[R + \sum_{b,c} \beta_{bc} (\partial^\sigma \phi_b) (\partial_\sigma \phi_c) + C \right] \\ = \sum_c \beta_{ac} \left(\nabla^2 \phi_c + \partial_\mu \phi_c \sum_d \gamma_d (\partial^\mu \phi_d) \right) \end{aligned} \quad (2.49)$$

y se observa una diferencia en el segundo miembro. En este trabajo la constante cosmológica está dada por C .

Capítulo 3

Ecuaciones de campo

3.1. Deducción de cantidades importantes

3.1.1. El ansatz para la métrica

En este trabajo estamos interesados en obtener soluciones de agujero negro tipo Lifshitz, por lo que un buen inicio es proponer una hipótesis puramente geométrica para la métrica en dos dimensiones espaciotemporales:

$$ds = l^2 \left(-r^{2z} f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 f(r)} \right), \quad (3.1)$$

donde $f(r)$ es una función arbitraria de la coordenada extra r y z es una constante arbitraria denominada exponente crítico o dinámico.

En el presente trabajo consideramos $1+1$ dimensiones, por simplicidad, con el objetivo de desarrollar esta investigación para $D+1$ dimensiones en el futuro cercano.

3.1.2. Los símbolos de Christoffel

Utilicemos el ansatz de nuestro tensor métrico para calcular los símbolos de Christoffel cuya definición está dada por la siguiente expresión:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}). \quad (3.2)$$

Los símbolos de Christoffel no nulos son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \frac{z}{r} + \frac{f'(r)}{2f(r)}, \\ \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2} r^{2z+1} f(r) [2zf(r) + rf'(r)], \\ \Gamma_{rr}^r &= - \left[\frac{1}{r} + \frac{f'(r)}{2f(r)} \right]. \end{aligned}$$

3.1.3. El tensor de Ricci

Utilicemos la siguiente definición del tensor de Riemann o tensor de curvatura

$$R_{\mu\gamma\nu}^{\rho} = \partial_{\gamma}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\gamma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\gamma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\gamma}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} \quad (3.3)$$

para deducir el llamado tensor de Ricci, que es el resultado de hacer la contracción siguiente:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^{\rho} = \partial_{\rho}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\rho}^{\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\rho}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}. \quad (3.4)$$

Al calcular las componentes no nulas del tensor de curvatura obtenemos:

$$R_{rr} = -\frac{r^2 f''(r) + (3z+1) r f'(r) + 2z^2 f(r)}{2r^2 f(r)}, \quad (3.5)$$

$$R_{tt} = \frac{1}{2} r^{2z} f(r) [r^2 f''(r) + (3z+1) r f'(r) + 2z^2 f(r)]. \quad (3.6)$$

3.1.4. El escalar de Ricci o escalar de curvatura

El escalar de Ricci o escalar de curvatura es la traza del tensor de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (3.7)$$

que en nuestro caso está dado por la siguiente expresión:

$$R = g^{tt} R_{tt} + g^{rr} R_{rr} = -\left[\frac{r^2 f''(r) + (3z+1) r f'(r) + 2z^2 f(r)}{l^2} \right]. \quad (3.8)$$

3.2. Las ecuaciones de Einstein para el sistema

En esta sección y la siguiente deduciremos las ecuaciones de campo usando el ansatz métrico (3.1). Además consideraremos, como un caso particular, dos campos escalares $\phi_1(r)$ y $\phi_2(r)$, dejando el caso general con n campos escalares para un estudio posterior.

Recordemos que las ecuaciones de Einstein están dadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & -R_{\mu\nu} - \sum_{a,b} \beta_{ab} \partial_{\mu} \phi_a \partial_{\nu} \phi_b + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(R + \sum_{a,b} \beta_{ab} (\partial^{\rho} \phi_a) (\partial_{\rho} \phi_b) - 2\Lambda \right) + \\ & \sum_a \gamma_a \nabla_{\mu} \partial_{\nu} \phi_a + \sum_{a,b} \gamma_a \gamma_b \partial_{\mu} \phi_a \partial_{\nu} \phi_b - \\ & g_{\mu\nu} \left(\sum_{a,b} \gamma_a \gamma_b (\partial^{\rho} \phi_a) (\partial_{\rho} \phi_b) + \sum_a \gamma_a \nabla^2 \phi_a \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Al utilizar las expresiones para las componentes del tensor de Ricci R_{rr} (3.5) y R_{tt} (3.6), el escalar de curvatura R (3.7) y la ecuación anterior, tenemos que las ecuaciones de Einstein de nuestro sistema están dadas por las siguientes expresiones:

3.2.1. La componente rr

La componente rr de las ecuaciones de Einstein adopta la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \beta_{11}\phi_1'(r)^2 + \beta_{22}\phi_2'(r)^2 + (\beta_{12} + \beta_{21})\phi_1'(r)\phi_2'(r) + \\ & \gamma_1 \left(\frac{2z}{r} + \frac{f'(r)}{f(r)} \right) \phi_1'(r) + \gamma_2 \left(\frac{2z}{r} + \frac{f'(r)}{f(r)} \right) \phi_2'(r) + \frac{2l^2\Lambda}{r^2 f(r)} = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.2.2. La componente tt

La componente tt de las ecuaciones de Einstein tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \gamma_1\phi_1''(r) + \gamma_2\phi_2''(r) + \left(\gamma_1^2 - \frac{\beta_{11}}{2} \right) \phi_1'(r)^2 + \left(\gamma_2^2 - \frac{\beta_{22}}{2} \right) \phi_2'(r)^2 + \\ & \left[2\gamma_1\gamma_2 - \left(\frac{\beta_{12} + \beta_{21}}{2} \right) \right] \phi_1'(r)\phi_2'(r) + \gamma_1 \left(\frac{1}{r} + \frac{f'(r)}{2f(r)} \right) \phi_1'(r) + \\ & \gamma_2 \left(\frac{1}{r} + \frac{f'(r)}{2f(r)} \right) \phi_2'(r) + \frac{l^2\Lambda}{r^2 f(r)} = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.3. Las ecuaciones de los campos escalares para el sistema

En esta sección presentamos las ecuaciones de campo para $\phi_1(r)$ y $\phi_2(r)$ utilizando las expresiones para las componentes del tensor de Ricci R_{rr} (3.5) y R_{tt} (3.6) y el escalar de curvatura R (3.7).

Recordemos la expresión para los campos escalares:

$$\begin{aligned} \gamma_a \left[R + \sum_{b,c} \beta_{bc} (\partial^\sigma \phi_b) (\partial_\sigma \phi_c) - 2\Lambda \right] = & \sum_c \beta_{ac} \left(\nabla^2 \phi_c + \nabla^\mu \phi_c \sum_d \gamma_d \partial_\mu \phi_d \right) + \\ & \sum_b \beta_{ba} \left(\nabla^2 \phi_b + \nabla^\mu \phi_b \sum_d \gamma_d \partial_\mu \phi_d \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Al considerar dos campos escalares tenemos que $a = 1, 2$.

3.3.1. La ecuación del campo escalar con $a = 1$

$$\begin{aligned}
& 2\beta_{11}\phi_1''(r) + (\beta_{12} + \beta_{21})\phi_2''(r) + \beta_{11}\gamma_1\phi_1'(r)^2 + \\
& ((\beta_{12} + \beta_{21})\gamma_2 - \beta_{22}\gamma_1)\phi_2'(r)^2 + 2\beta_{11}\gamma_2\phi_1'(r)\phi_2'(r) + \\
& 2\beta_{11}\left(\frac{z+1}{r} + \frac{f'(r)}{f(r)}\right)\phi_1'(r) + (\beta_{12} + \beta_{21})\left(\frac{z+1}{r} + \frac{f'(r)}{f(r)}\right)\phi_2'(r) + \\
& \frac{\gamma_1}{r^2 f(r)} [r^2 f''(r) + (3z+1)rf'(r) + 2z^2 f(r) + 2l^2 \Lambda] = 0,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

donde las cantidades primadas denotan derivadas con respecto de r .

3.3.2. La ecuación del campo escalar con $a = 2$

$$\begin{aligned}
& (\beta_{12} + \beta_{21})\phi_1''(r) + 2\beta_{22}\phi_2''(r) + ((\beta_{12} + \beta_{21})\gamma_1 - \beta_{11}\gamma_2)\phi_1'(r)^2 + \\
& \beta_{22}\gamma_2\phi_2'(r)^2 + 2\beta_{22}\gamma_1\phi_1'(r)\phi_2'(r) + \\
& (\beta_{12} + \beta_{21})\left(\frac{z+1}{r} + \frac{f'(r)}{f(r)}\right)\phi_1'(r) + 2\beta_{22}\left(\frac{z+1}{r} + \frac{f'(r)}{f(r)}\right)\phi_2'(r) + \\
& \frac{\gamma_2}{r^2 f(r)} [r^2 f''(r) + (3z+1)rf'(r) + 2z^2 f(r) + 2l^2 \Lambda] = 0.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Capítulo 4

Soluciones particulares a las ecuaciones de campo

Hemos encontrado distintas soluciones exactas, particulares, para las ecuaciones de Einstein (3.10)-(3.11) y de campo escalar (3.13)-(3.14), para el sistema en consideración: caso con dos dimensiones y dos campos escalares.

4.1. La función $f(r)$

Al observar las cuatro ecuaciones de movimiento de nuestro sistema (3.10), (3.11), (3.13) y (3.14) nos damos cuenta que existe acoplamiento entre las funciones $f(r)$, $\phi_1(r)$ y $\phi_2(r)$, ya que se encuentran multiplicadas entre sí. El primer paso para abordar este problema fue considerar los términos que se encuentran en el primer miembro de las ecuaciones de campo con $a = 1$ (3.13) y $a = 2$ (3.14):

$$\frac{\gamma_a}{r^2 f(r)} [r^2 f''(r) + (3z + 1) r f'(r) + 2z^2 f(r) + 2l^2 \Lambda], \quad (4.1)$$

y suponer que lo que se encuentra entre corchetes, es una constante, k , de esta manera obtenemos una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden para $f(r)$:

$$r^2 f''(r) + (3z + 1) r f'(r) + 2z^2 f(r) + 2l^2 \Lambda = k, \quad (4.2)$$

la cual tiene la siguiente solución:

$$f(r) = \frac{k - 2l^2 \Lambda}{2z^2} + \frac{\tilde{c}_1}{r^z} + \frac{\tilde{c}_2}{r^{2z}}, \quad (4.3)$$

donde $\tilde{c}_1$ y $\tilde{c}_2$ son constantes de integración.

Consideremos factorizar la constante $\frac{k-2l^2\Lambda}{2z^2}$ de $f(r)$, y absorberla en dt^2 y dr^2 de la métrica, con lo cual obtenemos

$$f(r) = 1 + \frac{c_1}{r^z} + \frac{c_2}{r^{2z}}. \quad (4.4)$$

Las soluciones que vamos a presentar en esta sección para los campos escalares $\phi_1(r)$ y $\phi_2(r)$ se obtienen manteniendo las constantes γ_1 y γ_2 completamente arbitrarias, por lo cual podemos prescindir de ellas. De este modo hemos supuesto que el valor para γ_1 y γ_2 es 1, lo que es equivalente a cambiar la escala de los campos escalares; esto puede verse más claro en la acción (2.1) de la cual partimos:

$$S = \int d^{D+1}x \sqrt{-g} e^{\sum_a \gamma_a \phi_a} \left(R + \sum_{b,c} \beta_{bc} (\partial^\mu \phi_b) (\partial_\mu \phi_c) - 2\Lambda \right).$$

4.2. Solución I

En esta solución para las ecuaciones de campo hemos considerado que los valores para las constantes k , β_{11} y la constante cosmológica Λ se fijan de la siguiente manera:

$$k = 0, \quad (4.5)$$

$$\Lambda = -\frac{z^2}{l^2}, \quad (4.6)$$

$$\beta_{11} = \frac{(\beta_{12} + \beta_{21})^2}{4\beta_{22}}, \quad (4.7)$$

con lo anterior obtenemos que la función $f(r)$ y los campos escalares $\phi_1(r)$ y $\phi_2(r)$, que satisfacen las ecuaciones del sistema, están dados por las siguientes expresiones:

$$f(r) = 1 + \frac{c_1}{r^z} + \frac{c_2}{r^{2z}}, \quad (4.8)$$

$$\phi_1(r) = c_3 + \frac{2\beta_{22}}{2\beta_{22} - (\beta_{12} + \beta_{21})} \log \left(r^z + \frac{c_1}{2} \right), \quad (4.9)$$

$$\phi_2(r) = c_5 - \frac{\beta_{12} + \beta_{21}}{2\beta_{22} - (\beta_{12} + \beta_{21})} \log \left(r^z + \frac{c_1}{2} \right), \quad (4.10)$$

donde c_1 , c_2 , c_3 , c_5 son constantes arbitrarias reales.

Encontramos que el horizonte de eventos para la solución de agujero negro, dado por $f(r)$, está definido por

$$r_H = \left(\sqrt{\frac{c_1^2}{4} - c_2} - \frac{c_1}{2} \right)^{\frac{1}{z}}. \quad (4.11)$$

Para que la signatura de la métrica no cambie, necesitamos que $f(r) > 0$, lo cual se logra con cualquiera de las siguientes condiciones:

$$c_1 \leq 0, \quad c_2 < \frac{c_1^2}{4}, \quad r > \left(\sqrt{\frac{c_1^2}{4} - c_2} - \frac{c_1}{2} \right)^{\frac{1}{z}}, \quad (4.12)$$

$$c_1 > 0, \quad c_2 < 0, \quad r > \left(\sqrt{\frac{c_1^2}{4} - c_2} - \frac{c_1}{2} \right)^{\frac{1}{z}}. \quad (4.13)$$

Los campos escalares dados por (4.9) y (4.10) tienen un comportamiento regular para $r \geq r_H$. Así mismo observamos que cuando $r \rightarrow \infty$ los campos escalares tienden a infinito o menos infinito, dependiendo del valor de las constantes β_{12} , β_{21} y β_{22} . Para ilustrar este comportamiento se grafican algunos ejemplos del primer caso (4.12), para $\phi_1(r)$ en la figura 4.1 y para $\phi_2(r)$ en la figura 4.2.

4.3. Solución II

En esta solución, a diferencia de la anterior, hemos considerado anular la constante cosmológica, fijar k , β_{11} y β_{22} de la siguiente manera:

$$\Lambda = 0, \quad (4.14)$$

$$k = 2z^2, \quad (4.15)$$

$$\beta_{11} = \frac{\beta_{12} + \beta_{21} - 2(1 + \kappa)}{1 - \kappa}, \quad (4.16)$$

$$\beta_{22} = \frac{(\beta_{12} + \beta_{21})\kappa - 2(1 + \kappa)}{\kappa - 1}, \quad (4.17)$$

donde κ es una constante de proporcionalidad entre los campos escalares $\phi_1(r)$ y $\phi_2(r)$, ver (4.20).

Otra diferencia con la solución I es que la constante de integración c_2 que se encuentra en $f(r)$ está fija de la siguiente manera:

$$c_2 = \frac{c_1^2}{4}. \quad (4.18)$$

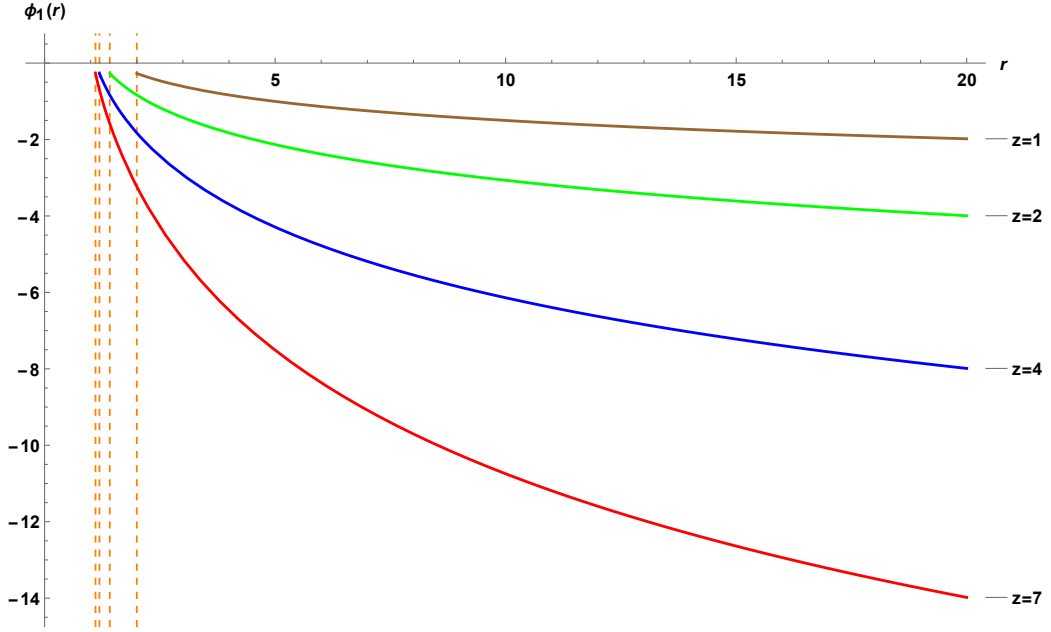


Figura 4.1: Solución I. Gráfica del campo escalar $\phi_1(r) = -\frac{2}{3}\log(r^z - \frac{1}{2})$, para algunos valores de z . Para este ejemplo se fijó $c_3 = c_5 = 0, \beta_{22} = 1, \beta_{12} = 2, \beta_{21} = 3, c_1 = -1, c_2 = -2$. Las líneas verticales punteadas color naranja representan el horizonte de eventos r_H para cada caso. Podemos observar que en estos ejemplos $r_H = 2^{\frac{1}{z}}$, debido a (4.11). Nótese que $\phi_1(r)$ tiene un comportamiento regular en r_H y que $\phi_1(r) \rightarrow -\infty$ cuando $r \rightarrow \infty$.

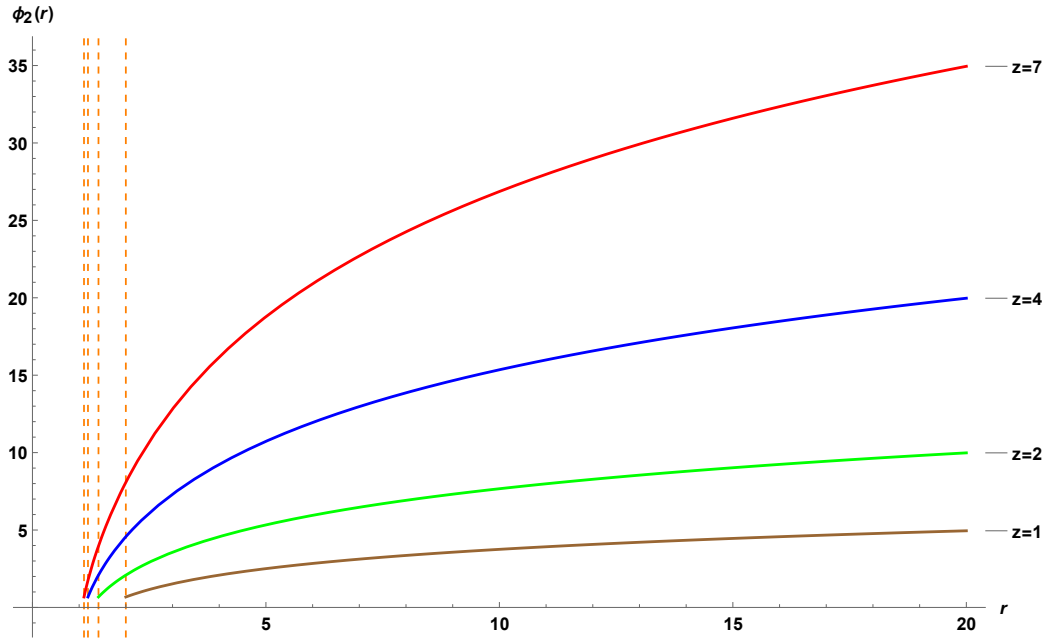


Figura 4.2: Solución I. Gráfica del campo escalar $\phi_2(r) = \frac{5}{3}\log(r^z - \frac{1}{2})$, para algunos valores de z . Para este ejemplo se fijó $c_3 = c_5 = 0, \beta_{22} = 1, \beta_{12} = 2, \beta_{21} = 3, c_1 = -1, c_2 = -2$. Las líneas verticales punteadas color naranja representan el horizonte de eventos r_H para cada caso. Podemos observar que en estos ejemplos $r_H = 2^{\frac{1}{z}}$, debido a (4.11). Nótese que $\phi_2(r)$ tiene un comportamiento regular en r_H y que $\phi_2(r) \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow \infty$.

Dadas estas condiciones se obtienen las siguientes expresiones para $f(r)$ y los campos escalares:

$$f(r) = \left(1 + \frac{c_1}{2r^z}\right)^2, \quad (4.19)$$

$$\phi_1(r) = c_3 - \frac{\kappa}{\kappa + 1} \log \left(r^z + \frac{c_1}{2}\right), \quad (4.20)$$

$$\phi_2(r) = c_5 - \frac{1}{\kappa + 1} \log \left(r^z + \frac{c_1}{2}\right), \quad (4.21)$$

donde c_1, c_3, c_5 son constantes arbitrarias reales.

Podemos observar que, debido a la condición (4.18), la configuración de agujero negro es extremal.

En esta solución de agujero negro el horizonte de eventos está dado por

$$r_H = \left(-\frac{c_1}{2}\right)^{\frac{1}{z}}. \quad (4.22)$$

Para que $f(r) > 0$ y las funciones de campo escalar estén evaluadas en $r > r_H > 0$ se necesita que

$$c_1 < 0, \quad r > \left(-\frac{c_1}{2}\right)^{\frac{1}{z}}. \quad (4.23)$$

Un aspecto de las funciones de campo escalar aquí descritas es que se observa un comportamiento divergente al ser evaluadas en el horizonte de eventos r_H y en $r \rightarrow \infty$ como se muestra en los ejemplos de las figuras 4.3 y 4.4.

4.4. Solución III

En este caso tenemos que para

$$\Lambda = 0, \quad (4.24)$$

$$c_2 = \frac{c_1^2}{4}, \quad (4.25)$$

$$k = 2z^2, \quad (4.26)$$

$$\beta_{11} = 2, \quad (4.27)$$

$$\beta_{22} = \beta_{12} + \beta_{21} - 2, \quad (4.28)$$

obtenemos la siguiente solución particular de las ecuaciones de campo

$$f(r) = \left(1 + \frac{c_1}{2r^z}\right)^2, \quad (4.29)$$

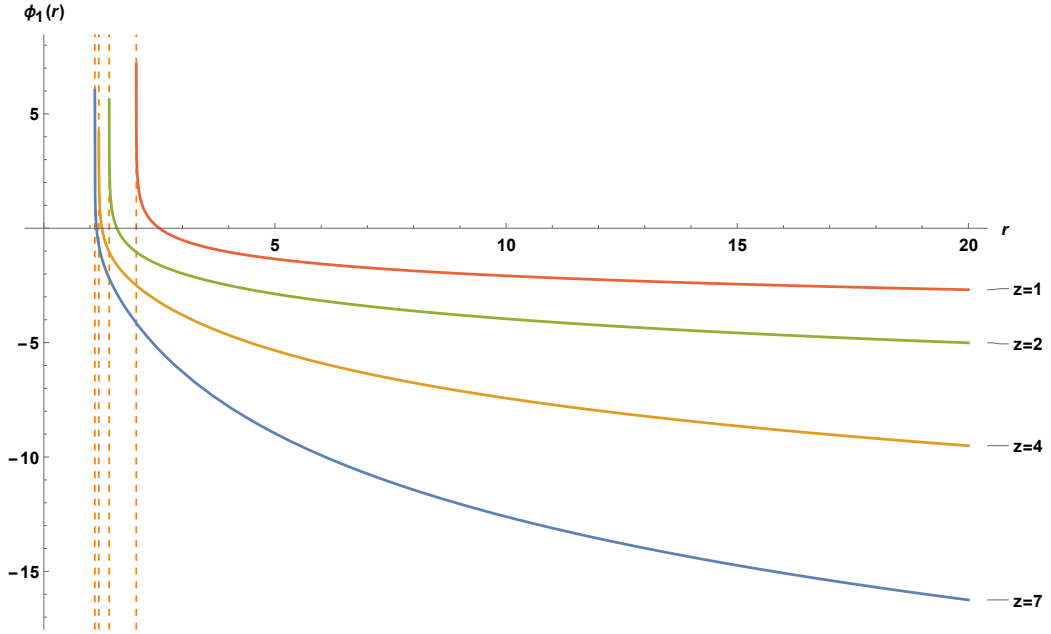


Figura 4.3: Solución II. Gráficas del campo escalar $\phi_1(r) = -\frac{3}{4}\log(2r^z - 4)$, para algunos valores de z . Para estos ejemplos se fija $c_3 = c_5 = 0, \beta_{22} = 1, \beta_{12} = 2, \beta_{21} = 3, c_1 = -4, c_2 = 4$. Las líneas verticales punteadas representan el horizonte de eventos en cada ejemplo. Nótese que para cada una de las gráficas, el horizonte de eventos se encuentra en $r_H = 2^{\frac{1}{z}}$, debido a (4.22). Consideramos una constante de proporcionalidad $\kappa = 3$, por lo tanto $\phi_1(r) = 3\phi_2(r)$, véase ecuación (4.20). Se observa en cada caso que $\phi_1(r) \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow r_H$ y $\phi_1(r) \rightarrow -\infty$ cuando $r \rightarrow \infty$.

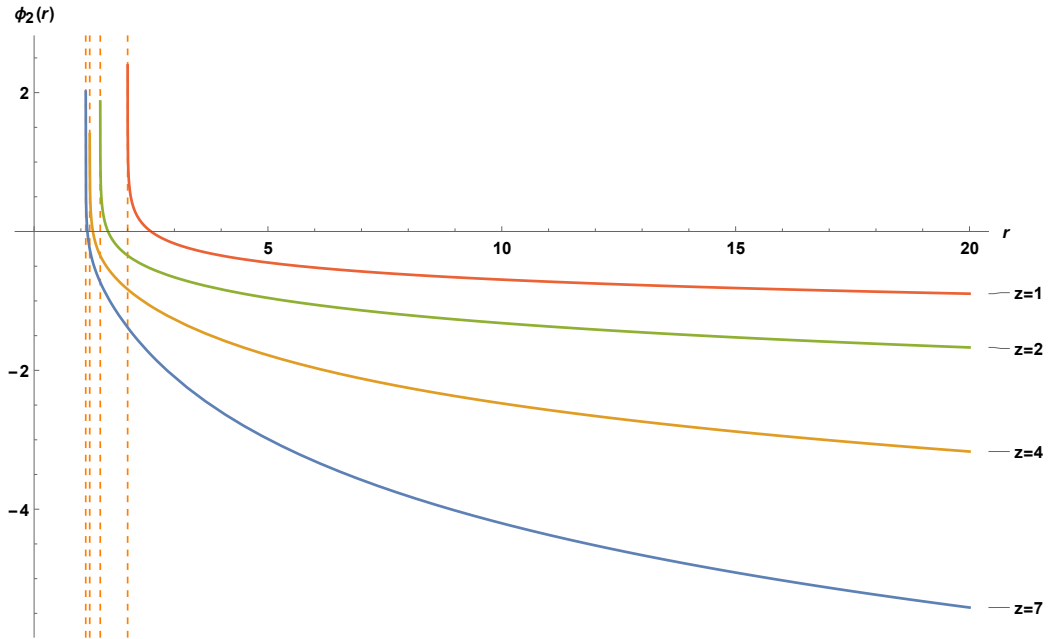


Figura 4.4: Solución II. Gráficas del campo escalar $\phi_2(r) = -\frac{1}{4}\log(2r^z - 4)$, para algunos valores de z . Para estos ejemplos se fija $c_3 = c_5 = 0, \beta_{22} = 1, \beta_{12} = 2, \beta_{21} = 3, c_1 = -4, c_2 = 4$. Las líneas verticales punteadas representan el horizonte de eventos en cada ejemplo. Nótese que para cada una de las gráficas, el horizonte de eventos se encuentra en $r_H = 2^{\frac{1}{z}}$, debido a (4.22). Consideramos una constante de proporcionalidad $\kappa = 3$, por lo tanto $\phi_1(r) = 3\phi_2(r)$, véase ecuación (4.20). Se observa en cada caso que $\phi_2(r) \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow r_H$ y $\phi_2(r) \rightarrow -\infty$ cuando $r \rightarrow \infty$.

$$\phi_1(r) = c_3 + \frac{\beta_{12} + \beta_{21} - 2}{\beta_{12} + \beta_{21} - 4} \log(r^z + c_6) - \log\left(r^z + \frac{c_1}{2}\right), \quad (4.30)$$

$$\phi_2(r) = c_5 - \frac{2}{\beta_{12} + \beta_{21} - 4} \log(r^z + c_6), \quad (4.31)$$

donde c_1 , c_3 , c_5 y c_6 son constantes arbitrarias reales.

Un aspecto a notar es que la expresión para $f(r)$ es la misma que en la solución II (4.19) pero la expresión para los campos escalares es distinta.

En esta solución de agujero negro el horizonte de eventos está dado por

$$r_H = \left(-\frac{c_1}{2}\right)^{\frac{1}{z}}. \quad (4.32)$$

Para que $f(r) > 0$ y las funciones de campo escalar estén evaluadas en $r > r_H > 0$ se necesita que

$$c_1 < 0, \quad c_6 \geq \frac{c_1}{2}, \quad r > \left(-\frac{c_1}{2}\right)^{\frac{1}{z}}. \quad (4.33)$$

Otro aspecto a destacar en esta solución es que si $c_6 \neq \frac{c_1}{2}$ se observa un comportamiento divergente solamente en la función de campo escalar $\phi_1(r)$ evaluado en r_H , como podemos observar en los ejemplos de las figuras 4.5 y 4.6, donde también se puede notar que los dos campos escalares divergen cuando $r \rightarrow \infty$.

4.5. Solución IV

En este caso para obtener la solución fijamos

$$\Lambda = 0, \quad (4.34)$$

$$k = 2z^2, \quad (4.35)$$

$$\beta_{11} = \beta_{12} + \beta_{21} - \beta_{22}. \quad (4.36)$$

De esta manera se logra obtener

$$f(r) = 1 + \frac{c_1}{r^z} + \frac{c_2}{r^{2z}}, \quad (4.37)$$

$$\phi_1(r) = c_3 + \frac{1}{2\beta_{22} - (\beta_{12} + \beta_{21})} \log(r^{2z} + c_1 r^z + c_2), \quad (4.38)$$

$$\phi_2(r) = c_5 - \frac{1}{2\beta_{22} - (\beta_{12} + \beta_{21})} \log(r^{2z} + c_1 r^z + c_2). \quad (4.39)$$

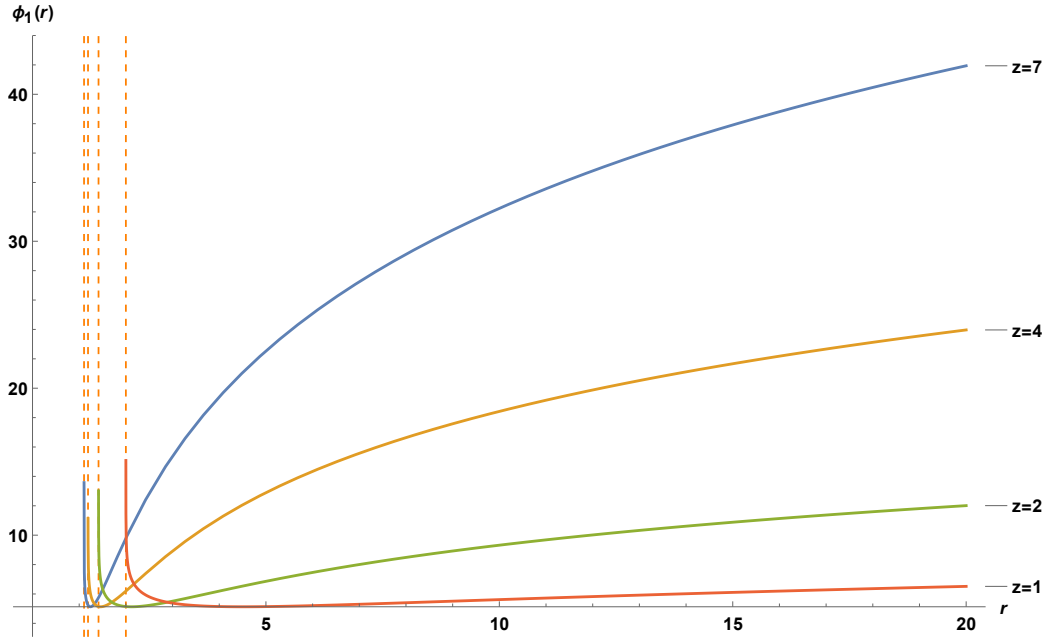


Figura 4.5: Solución III. Gráficas del campo escalar $\phi_1(r) = 3 \log(r^z + 3) - \log(r^z - 2)$, para algunos valores de z . Para estos ejemplos se fija $c_3 = c_5 = 0, \beta_{22} = 1, \beta_{12} = 2, \beta_{21} = 3, c_1 = -4, c_2 = 4, c_6 = 3$. Las líneas verticales punteadas representan el horizonte de eventos en cada ejemplo. Nótese que para cada una de las gráficas, el horizonte de eventos se encuentra en $r_H = 2^{\frac{1}{z}}$, debido a (4.32). Se observa en cada caso que $\phi_1(r) \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow r_H$ y $\phi_1(r) \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow \infty$.

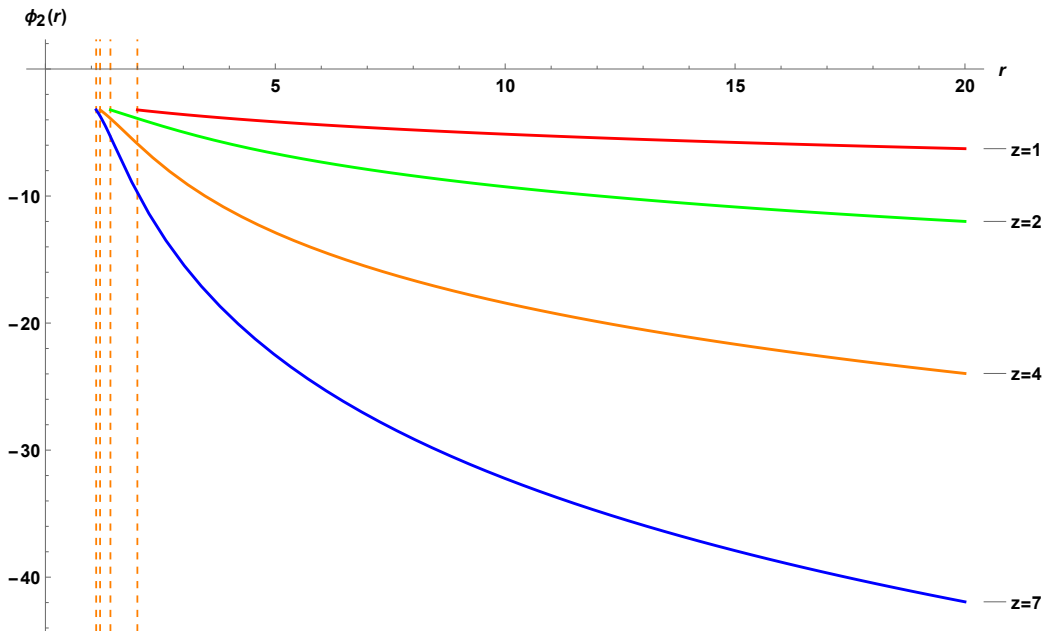


Figura 4.6: Solución III. Gráficas del campo escalar $\phi_2(r) = -2 \log(r^z + 3)$, para algunos valores de z . Para estos ejemplos se fija $c_3 = c_5 = 0, \beta_{22} = 1, \beta_{12} = 2, \beta_{21} = 3, c_1 = -4, c_2 = 4, c_6 = 3$. Las líneas verticales punteadas representan el horizonte de eventos en cada ejemplo. Nótese que para cada una de las gráficas, el horizonte de eventos se encuentra en $r_H = 2^{\frac{1}{z}}$, debido a (4.32). Se observa en cada caso que $\phi_2(r)$ tiene un comportamiento regular al ser evaluado en r_H y que $\phi_2(r) \rightarrow -\infty$ cuando $r \rightarrow \infty$.

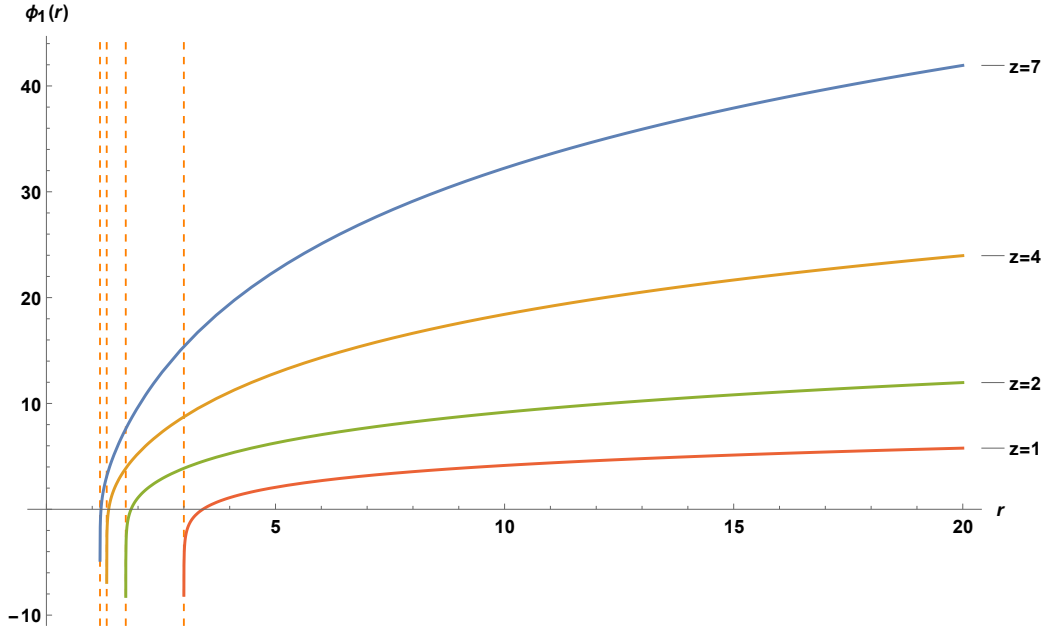


Figura 4.7: Solución IV. Gráficas del campo escalar $\phi_1(r) = \log(r^{2z} - 4r^z + 3)$, para algunos valores de z . Para estos ejemplos se fija $c_3 = c_5 = 0, \beta_{22} = 3, \beta_{12} = 2, \beta_{21} = 3, c_1 = -4, c_2 = 3$. Las líneas verticales punteadas representan el horizonte de eventos en cada ejemplo. Nótese que para cada una de las gráficas, el horizonte de eventos se encuentra en $r_H = 3^{\frac{1}{z}}$, debido a (4.40). Se observa en cada caso que $\phi_1(r) \rightarrow -\infty$ cuando $r \rightarrow r_H$ y $\phi_1(r) \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow \infty$.

Observamos que la forma de la función $f(r)$, que define la solución de agujero negro, es la misma que en la solución I (4.8) pero que la configuración de campo escalar es distinta.

Encontramos que el horizonte de eventos para la solución de agujero negro está dado por

$$r_H = \left(\sqrt{\frac{c_1^2}{4} - c_2} - \frac{c_1}{2} \right)^{\frac{1}{z}}. \quad (4.40)$$

Para que $f(r) > 0$ y los campos escalares estén evaluados en $r > r_H > 0$ se necesita cualquiera de los siguientes dos casos:

$$c_1 \leq 0, \quad c_2 < \frac{c_1^2}{4}, \quad r > \left(\sqrt{\frac{c_1^2}{4} - c_2} - \frac{c_1}{2} \right)^{\frac{1}{z}}, \quad (4.41)$$

$$c_1 > 0, \quad c_2 < 0, \quad r > \left(\sqrt{\frac{c_1^2}{4} - c_2} - \frac{c_1}{2} \right)^{\frac{1}{z}}. \quad (4.42)$$

Se observa que en r_H y en $r \rightarrow \infty$ las funciones de campo escalar divergen, como se muestra en las figuras 4.7 y 4.8 de los ejemplos que ilustran el primer caso (4.41).

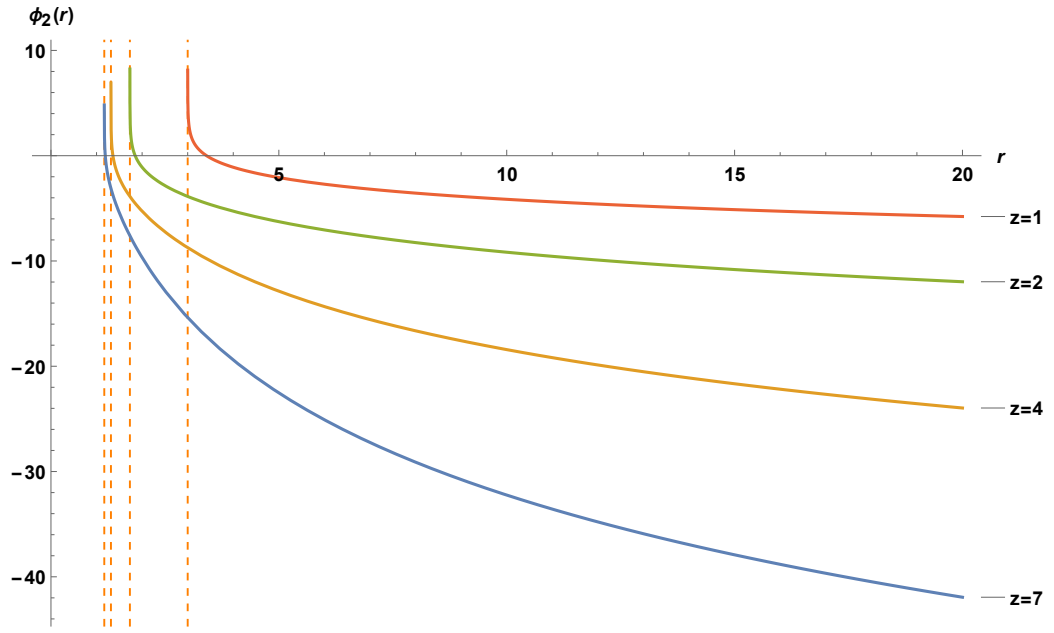


Figura 4.8: Solución IV. Gráficas del campo escalar $\phi_2(r) = -\log(r^{2z} - 4r^z + 3)$, para algunos valores de z . Para estos ejemplos se fija $c_3 = c_5 = 0, \beta_{22} = 3, \beta_{12} = 2, \beta_{21} = 3, c_1 = -4, c_2 = 3$. Las líneas verticales punteadas representan el horizonte de eventos en cada ejemplo. Nótese que para cada una de las gráficas, el horizonte de eventos se encuentra en $r_H = 3^{\frac{1}{z}}$, debido a (4.40). Se observa en cada caso que $\phi_2(r) \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow r_H$ y $\phi_2(r) \rightarrow -\infty$ cuando $r \rightarrow \infty$.

Capítulo 5

Propiedades físicas de las soluciones

En el capítulo anterior hemos mostrado algunas soluciones particulares de las ecuaciones de Einstein (3.10)-(3.11) y de campo escalar (3.13)-(3.14). En cada caso obtenemos una expresión para $f(r)$ que define la solución de agujero negro debido al ansatz geométrico (3.1).

La expresión para $f(r)$ es:

$$f(r) = 1 + \frac{c_1}{r^z} + \frac{c_2}{r^{2z}}, \quad (5.1)$$

donde para el caso de las soluciones II y III $c_2 = \frac{c_1^2}{4}$.

De esta manera obtenemos una familia de soluciones de agujero negro tipo Lifshitz, que satisfacen las ecuaciones de campo, dada por la siguiente expresión de la métrica:

$$ds^2 = l^2 \left(- \left(1 + \frac{c_1}{r^z} + \frac{c_2}{r^{2z}} \right) r^{2z} dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{c_1}{r^z} + \frac{c_2}{r^{2z}} \right) r^2} \right). \quad (5.2)$$

Podemos observar en el comportamiento asintótico de estas soluciones, al considerar $r \rightarrow \infty$ y $z > 0$, que se recupera la métrica usual para el espaciotiempo de Lifshitz (en dos dimensiones):

$$ds^2 = l^2 \left(-r^{2z} dt^2 + \frac{dr^2}{r^2} \right). \quad (5.3)$$

El horizonte de eventos, r_H , de esta familia de soluciones se encuentra al resolver la ecuación $f(r) = 0$, es decir

$$1 + \frac{c_1}{r^z} + \frac{c_2}{r^{2z}} = 0, \quad (5.4)$$

y considerar la raíz positiva de mayor valor:

$$r_H = \left(\sqrt{\frac{c_1^2}{4} - c_2} - \frac{c_1}{2} \right)^{\frac{1}{z}}. \quad (5.5)$$

Debido a la expresión para la familia de configuraciones de agujero negro (5.2) los valores $r = r_H$ y $r = 0$, podrían parecer problemáticos ya que en esos puntos las componentes del tensor métrico se vuelven infinitas; en la siguiente sección se analiza esta aparente dificultad.

Por otro lado, recordemos que el espaciotiempo de Lifshitz tiene como una de sus características que bajo el siguiente cambio de escala anisótropo:

$$t \rightarrow t' = \lambda^{\mp z} t, \quad (5.6)$$

$$r \rightarrow r' = \lambda^{\pm 1} r, \quad (5.7)$$

la métrica permanece invariante. En este caso, si consideramos que también las constantes de integración c_1 y c_2 cambian de la siguiente forma:

$$c_1 \rightarrow c'_1 = \lambda^{\pm z} c_1, \quad (5.8)$$

$$c_2 \rightarrow c'_2 = \lambda^{\pm 2z} c_2, \quad (5.9)$$

la solución de agujero negro (5.2) es invariante bajo el cambio de escala anisótropo.

5.1. El tensor de Riemann

Por definición tenemos que el tensor de Riemann está dado por:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (5.10)$$

Para el sistema tratado, las componentes no nulas son:

$$\begin{aligned} R^r_{ttr} &= -\partial_r \Gamma^r_{tt} + \Gamma^r_{tt} \Gamma^t_{rt} - \Gamma^r_{rr} \Gamma^r_{tt} \\ &= -\frac{r^{2z} f(r)}{2} (r^2 f''(r) + (3z+1) r f'(r) + 2z^2 f(r)) \\ &= -z^2 (r^{2z} + c_1 r^z + c_2), \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} R^t_{rtr} &= -\partial_r \Gamma^t_{tr} + \Gamma^t_{tr} \Gamma^r_{rr} - \Gamma^t_{rt} \Gamma^r_{tr} \\ &= -\frac{r^2 f''(r) + (3z+1) r f'(r) + 2z^2 f(r)}{2r^2 f(r)} \\ &= -\frac{z^2 r^{2z}}{r^2 (r^{2z} + c_1 r^z + c_2)}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Debido a que ninguna componente del tensor de Riemann es igual a cero podemos decir que el espaciotiempo dado por la métrica (5.2) no es plano.

5.2. Los invariantes geométricos

En la sección anterior se señaló que las componentes de la métrica (5.2) toman valor infinito en los puntos $r = r_H$ y $r = 0$. Esto puede ser debido a que existen singularidades en el propio espaciotiempo, o puede deberse a valores indefinidos en esos puntos por el uso de cierto sistema de coordenadas. Para averiguar si se trata de singularidades en el espaciotiempo, podemos investigar si la curvatura se vuelve infinita en esos puntos. Sabemos que el tensor de Riemann mide la curvatura, pero las componentes de este tensor siguen siendo dependientes del sistema de coordenadas usado, así que lo que utilizamos para este análisis son algunas cantidades escalares derivadas de este tensor.

5.2.1. El escalar de curvatura

Utilizamos la expresión para el escalar de Ricci (3.8):

$$R = -\frac{r^2 f''(r) + (1 + 3z)rf'(r) + 2z^2 f(r)}{l^2} \quad (5.13)$$

y la expresión para la función $f(r)$ encontrada (5.1) para obtener el siguiente resultado

$$R = -\frac{2z^2}{l^2}. \quad (5.14)$$

5.2.2. El invariante de Kretschmann

El invariante de Kretschmann está dado por la siguiente expresión:

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} g^{\rho\rho'} g^{\sigma\sigma'} R_{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}. \quad (5.15)$$

Para el caso considerado aquí tenemos que

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= (g^{tt})^2 (g^{rr})^2 (R_{trtr})^2 + (g^{tt})^2 (g^{rr})^2 (R_{trrt})^2 + \\ &\quad (g^{tt})^2 (g^{rr})^2 (R_{rttr})^2 + (g^{tt})^2 (g^{rr})^2 (R_{rttr})^2 \\ &= 2 (g^{tt})^2 (g^{rr})^2 (R_{trtr})^2 + 2 (g^{tt})^2 (g^{rr})^2 (R_{rttr})^2. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Al sustituir el ansatz geométrico (3.1) obtenemos:

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{(r^2 f''(r) + (1 + 3z)rf'(r) + 2z^2 f(r))^2}{l^4}. \quad (5.17)$$

Con la expresión para $f(r)$ (5.1) llegamos a que:

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{4z^4}{l^4}. \quad (5.18)$$

5.2.3. La contracción del tensor de Ricci consigo mismo

Por definición tenemos que la contracción del tensor de Ricci consigo mismo está dada por la siguiente relación:

$$R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} R_{\mu\nu} R_{\mu'\nu'}. \quad (5.19)$$

En nuestro caso la contracción toma la siguiente forma:

$$R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = (g^{tt})^2 (R_{tt})^2 + (g^{rr})^2 (R_{rr})^2. \quad (5.20)$$

Al tomar en cuenta el ansatz geométrico (3.1) tenemos que

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} &= \left(-\frac{1}{l^2 r^{2z} f(r)} \right)^2 \left(\frac{1}{2} r^{2z} f(r) (r^2 f''(r) + (3z+1)r f'(r) + 2z^2 f(r)) \right)^2 \\ &+ \left(\frac{r^2 f(r)}{l^2} \right)^2 \left(-\frac{r^2 f''(r) + (3z+1)r f'(r) + 2z^2 f(r)}{2r^2 f(r)} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2l^4} (r^2 f''(r) + (3z+1)r f'(r) + 2z^2 f(r))^2. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Al sustituir $f(r)$ dado por (5.1) llegamos a que

$$R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = \frac{2z^4}{l^4}. \quad (5.22)$$

Como hemos observado todos los invariantes de curvatura son constantes y directamente proporcionales a potencias positivas de z , por lo tanto ningún invariante se vuelve infinito en $r = r_H$ y $r = 0$, de este modo podemos decir que no existe singularidad en el espaciotiempo cuya métrica está dada por la relación (5.2). En conclusión todos los puntos son regulares.

Capítulo 6

Conclusiones

Se han deducido de la acción (2.1) las ecuaciones de Einstein (2.38) y de campo escalar (2.48) para la teoría tenso-escalar considerada en este trabajo. Se observa que la forma de las ecuaciones de campo escalar obtenidas es distinta a la reportada en [12].

Se obtuvieron soluciones exactas particulares a las ecuaciones de Einstein y de campo escalar para el sistema considerado, con dos dimensiones y dos campos escalares.

En particular hemos obtenido la función $f(r)$ dada de manera general por (5.1), en donde para llegar a esa forma hemos absorbido cantidades constantes en los términos dt^2 y dr^2 de la métrica. Hemos deducido la expresión para el horizonte de eventos y analizado algunas propiedades físicas de la familia de configuraciones de agujero negro, de lo cual llegamos a la conclusión que no existen puntos singulares en el espaciotiempo analizado. La métrica es invariante bajo los cambios de escala anisótropos de Lifshitz. Observamos en el comportamiento asintótico de la métrica, $r \rightarrow \infty$, que el espaciotiempo de Lifshitz es recuperado.

Por otro lado, en todos los casos observamos un comportamiento singular en los campos escalares en $r \rightarrow \infty$. En las soluciones II y IV se observa un comportamiento singular en el horizonte de eventos r_H ; en la solución III se observa este comportamiento en el campo escalar ϕ_1 ; en cuanto a la solución I, el comportamiento de los campos escalares es regular al ser evaluado en r_H . Aunque originalmente se considera que los valores para las constantes γ_1 y γ_2 son arbitrarios, estas constantes pueden ser absorbidas en los propios campos escalares ϕ_1 y ϕ_2 y, por lo tanto, tener soluciones que no dependan explícita-

mente de sus valores.

6.1. Trabajo a futuro

Como trabajo en proceso hemos establecido las ecuaciones de campo para el caso más general, el sistema en $D+1$ dimensiones, y con un número n arbitrario de campos escalares. Nuestro objetivo inmediato es encontrar soluciones de agujero negro y la configuración apropiada de campos escalares que satisfagan las ecuaciones de Einstein y campo escalar ya establecidas. Eventualmente se analizarán las propiedades físicas y termodinámicas de la métrica obtenida.

Bibliografía

- [1] S. M. Carroll. *An Introduction to General Relativity Space Time and Geometry*. Addison-Wesley, 2004.
- [2] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, and C. Skordis. Modified Gravity and Cosmology. *Phys. Rept.*, (513), 2012. arXiv: 1106.2476 [astro-ph.CO].
- [3] S. M. Carroll, James Geddes, Mark B. Hoffman, and Robert M. Wald. Classical stabilization of homogeneous extra dimensions. *Phys. Rev. D* 66, (024036), 2002. arXiv: hep-th/0110149v3.
- [4] M. Taylor. Lifshitz holography. *Class. Quantum Gravit.*, 33(033001), 2016.
- [5] M. Taylor. Non-relativistic holography. arXiv:0812.0530 [hep-th].
- [6] S. Kachru, X. Liu, and M. Mulligan. Gravity Duals of Lifshitz-like Fixed Points. *Phys. Rev. D.*, 78(106005), 2008. arXiv: 0808.1725 [hep-th].
- [7] R. Cartas-Fuentevilla, A. Herrera-Aguilar, V. Matlalcuatzi-Zamora, U. Noriega, and J. M. Romero. Anisotropic Lifshitz holography in Einstein-Proca theory with stable negative mass spectrum. *EPJ Plus*, 135(155), 2020.
- [8] A. Kitaev. Hidden correlations in the hawking radiation and thermal noise. Talk given at the Fundamental Physics Prize Symposium, November 10, 2014.
- [9] S. Sachdev and J. Ye. Gapless spin fluid ground state in a random, quantum Heisenberg magnet. *Phys. Rev. Lett.*, 70(3339), 1993.
- [10] J. Maldacena and D. Stanford. Comments on the Sachdev-Ye-Kitaev model. *Phys. Rev. D.*, 94(10602), 2016. arXiv:1604.07818 [hep-th].

- [11] D. A. Trunin. Pedagogical introduction to SYK model and 2D Dilaton Gravity. *Phys. Usp.*, (11), 2020. arXiv:2002.12187 [hep-th].
- [12] M. Taylor. Generalized conformal structure, dilaton gravity and SYK. *JHEP*, 10(2018), 2018.
- [13] P. Da-Wei. A Note on Black Holes in Asymptotically Lifshitz Spacetime. *Commun. Theor. Phys.*, 62(265), 2014.
- [14] H. S. Liu and H. Lu. Thermodynamics of Lifshitz Black Holes. *JHEP*, 12(071), 2014. arXiv:1410.6181v1 [hep-th].
- [15] M. Natsuume. AdS/CFT Duality User Guide. *Lect. Notes Phys.*, 903, 2015. arXiv:1409.3575 [hep-th].