



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ESTUDIO GEOMÉTRICO DE LA TEORÍA
ELECTROMAGNÉTICA DE MAXWELL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

JAZMÍN MARAVILLA MEZA

ASESORADA POR:

DRA. IRAÍS RUBALCAVA GARCÍA

DRA. MERCEDES PAULINA VELÁZQUEZ QUESADA

Puebla, Pue., septiembre 2022



Dedicated to whoever deserves it.

Agradecimientos

The gratefulness I feel in my heart can only be compared to the respect and appreciation I have for you.

Thank you very much for all your help.

Resumen

En la física, las teorías de normas son teorías de campo cuya lagrangiana es invariante bajo ciertos grupos de Lie de transformaciones locales. En este trabajo estudiamos la formulación geométrica de las teorías de Yang Mills y nos enfocamos en el electromagnetismo de Maxwell como una teoría de norma asociada al grupo abeliano $U(1)$.

Notación

Definiciones

M	— Variedad diferenciable.
(U, ϕ)	— Carta (o carta local) en M .
$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$	— Función de transición entre dos cartas coordenadas.
C^k	— Atlas de dimension m en M .
(X, τ)	— Espacio topológico.
$(x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p))$	— Coordenadas de un punto p en M .
h^*f	— Pullback de f bajo h .
v_p	— Vector tangente a M en p .
$T_p M$	— Espacio tangente a M en p .
σ	— Una curva en una variedad M .
$v f$	— Derivada direccional de f en la dirección v .
TM	— Haz tangente de una variedad. M
π	— Proyección canónica de TM en M .
v	— Campo vectorial en M , generador infinitesimal del flujo φ .
$\chi(M)$	— Conjunto de todos los campos vectoriales en M .
$[v, w]$	— Corchete de Lie de los campos vectoriales $v, w \in \chi(M)$.
h_{*p}	— Jacobiano (o diferencial) de h en p .
α_p	— Vector cotangente o vector covariante a un punto $p \in M$.
$T_p^* M$	— Espacio cotangente a $p \in M$.
$T^* M$	— Haz cotangente (Cotangent bundle).

ω	— 1-forma (one-form) en M .
I	— Un conjunto indexado.
C^∞	— Conjunto de funciones suaves (smooth) es decir, para las cuales todas sus derivadas parciales de todos los ordenes existen.
φ_t	— Curva generada por un grupo uno-paramétrico en una variedad M .
$\{\varphi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$	— Grupo abeliano de difeomorfismos de M en M .
$v_p^\varphi(f)$	— Campo vectorial inducido por una familia de difeomorfismos para todos los puntos $p \in M$ y $f \in \mathbb{C}^\infty(M)$.
$\sigma(t)$	— Curva integral en M .
$\mathcal{L}_v f$	— Derivada de Lie de f con respecto a v .
$\mathcal{L}_v w$	— Derivada de Lie de w con respecto a v .
$\langle df, v \rangle$	— Derivada exterior de una función $f \in \mathbb{C}^\infty(M)$.
$*$	— Operador estrella de Hodge (The Hodge star operator).
$Z^n(M)$	— Conjunto de todas las n -formas cerradas en M .
$B^n(M)$	— Conjunto de todas las n -formas exactas en M .
$(G, *, e)$	— Grupo G con una operación binaria $*$ y elemento neutro e .
g^{-1}	— Elemento inverso del elemento $g \in G$.
$S \leq G$	— S subgrupo de G .
$G \simeq G'$	— G isomorfo a G'
$S^1 = U(1)$	— Grupo unitario.
V	— Espacio vectorial.
$L(V)$	— Conjunto de operadores lineales en V .
$GL(V)$	— Grupo lineal general de transformaciones lineales del espacio vectorial V .
$M_n(\mathbb{C})$	— Matrices invertibles de $n \times n$ con coeficientes en V .
C	— Campo escalar.
$GL(n, C)$	— Grupo lineal general de matrices invertibles en C .
$GL(n, \mathbb{R})$	— Grupo lineal general real en n dimensiones.
$GL(n, \mathbb{C})$	— Grupo lineal general complejo en n dimensiones.
$SL(n, \mathbb{R})$	— Grupo especial lineal real.

$SL(n, \mathbb{C})$	— Grupo especial lineal complejo.
g	— Una métrica en $\mathbb{R}^n$.
(p, q)	— Signatura de una métrica.
$O(p, q)$	— Grupo ortogonal.
$SO(p, q)$	— Grupo especial ortogonal.
$SO(3)$	— Grupo de todas las rotaciones en el espacio 3-dimensional.
$SO(3, 1)$	— Grupo de Lorentz.
$\langle v, w \rangle$	— Producto interior usual en $\mathbb{C}$.
$SU(n)$	— Grupo especial unitario.
ρ	— Una representación de G en V .
$\rho \oplus \rho'$	— Suma directa de las representaciones ρ y ρ'
ρ_n	— Representaciones irreducibles en el espacio vectorial $\mathbb{C}$.
l_g	— Traslación izquierda por g (left traslation).
r_g	— Traslación derecha por g (right traslation).
$l_{g*}v$	— v es izquierdo-invariante (left-invariant).
$r_{g*}v$	— v es derecho-invariante (right-invariant).
$L(g)$	— Conjunto de todos los campos vectoriales izquierdos-invariantes.
$\mathfrak{g}$	— Algebra de Lie de G .
exp	— Mapeo exponencial.
(E, π, M)	— Haz (Bundle).
E	— Haz espacio (bundle space) o espacio total del haz.
π	— Mapeo proyección.
M	— Espacio base del haz.
$E_p = \pi^{-1}(\{p\})$	— Fibra (fiber) sobre p .
$E _S$	— Restricción de E a S .
s	— Una sección (section) de un haz (E, π, M) .
$\Gamma(E)$	— El espacio de todas las secciones de un haz vectorial (E, π, M) .
$\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$	— Funciones de transición.
$\{U_\alpha\}$	— Una cubierta de conjuntos abiertos de M .
$[p, v]_\alpha$	— Puntos de E correspondientes a $(p, v) \in U_\alpha \times V$.

$End(V)$	— Conjunto de todos los endomorfismos de V .
V^*	— Conjunto de todos los mapeos lineales $L : V \rightarrow \mathbb{R}$.
$(L, v) = \langle L, v \rangle_V$	— El valor de $L \in V^*$ en V .
e_i	— Base de V .
e^j	— Base dual de V^* .
$E \otimes E^*$	— Haz de endomorfismos de E .
$\mathcal{G}$	— Conjunto de todas las transformaciones de norma.
D	— Una conexión (connection) en M .
D_v	— Función (operador) de $\Gamma(E)$ a $\Gamma(E)$.
$D_v s$	— Derivada covariante de s en la dirección de v .
x^μ	— Coordenadas en un conjunto abierto $U \subset M$.
∂_μ	— Base de campos vectoriales coordenados.
A	— Vector potencial.
$A_{\mu j}^i$	— Componentes del vector potencial A .
T_i	— Secciones de $End(E)$.
D^0	— Conexión plana estándar (standard flat connection) en $E _U$.
$\mathcal{A}$	— Espacio de todas las G -conexiones en un G -haz.
$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{G}}$	— Espacio de todas las clases de norma equivalentes de las conexiones o espacio de las conexiones módulo las transformaciones de norma.
$\mathfrak{u}(1)$	— Algebra de Lie de $U(1)$.
F	— Tensor de curvatura
$d_D s$	— Derivada exterior covariante de una sección s de E
$*_S$	— Operador estrella de Hodge en formas $End(E)$ -valuadas en S
S_n	— Conjunto de permutaciones con $n \in \mathbb{N}$ fijo.
π_1	— Permutación de un conjunto
$sgn(\pi)$	— Signo de una permutación $\pi \in S_n$
ϵ_{rmn}	— Símbolo de permutación
δ_{mn}	— Símbolo de la delta de Kronecker
$\mathcal{M}$	— Espacio de Minkowski

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	IV
Notación	V
Introducción	XIII
1 Preliminares sobre electrodinámica	1
1.1 Ecuaciones de Maxwell en términos de los potenciales	2
1.2 Invarianza de las ecuaciones de Maxwell ante un cambio en los potenciales	6
1.3 Lagrangiana del campo electromagnético en términos del tensor de campo de fuerza F	7
1.4 Invarianza de la lagrangiana del campo electromagnético bajo transforma- ciones de Lorentz	9
2 Variedades	12
2.1 Variedades diferenciables	12
2.1.1 Definiciones e ideas geométricas	12
2.2 Espacio tangente	17
2.3 Haz tangente (tangent bundle) de una variedad diferenciable M	21
2.4 Campos vectoriales (vector fields)	23
3 Formas diferenciales	27
3.1 Vectores cotangentes	27
3.2 Tensores generales y n-formas	29

3.2.1	Álgebra de formas	30
3.2.2	Derivada exterior	32
4	Derivada de Lie	34
4.1	Grupos uni-paramétricos de transformaciones y flujos.	34
4.1.1	Flujos locales.	35
4.2	Derivada de Lie de funciones, de campos vectoriales y de 1-Formas.	37
4.3	Derivada exterior	39
4.4	Operador estrella de Hodge (The Hodge star operator)	39
4.5	Teoría DeRham	40
4.5.1	1-formas exactas y cerradas	40
5	Simetrías	42
5.1	Grupos de Lie y representaciones	42
5.2	Representaciones de grupos	46
5.3	El álgebra de Lie de un grupo de Lie	50
6	Haces y conexiones	54
6.1	Haz vectorial (vector bundle)	57
6.2	G-haz (G-bundle)	59
6.3	Transformaciones de norma	62
6.4	Conexiones	64
7	Ecuaciones de Yang-Mills	70
7.1	Curvatura	70
7.2	Curvatura en un G-haz	72
7.3	Derivada exterior covariante	73
7.4	Ecuaciones de Yang-Mills	75
7.4.1	Invarianza de norma	77
8	Ecuaciones de Maxwell $G=U(1)$	79
8.1	Teoría de Yang-Mills en el caso $G = U(1)$	79

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	XI
8.2 Transformaciones de norma	80
8.3 Curvatura en un $U(1)$ -haz	81
8.4 Derivada exterior covariante en el $U(1)$ -haz	82
8.5 Ecuaciones de Yang Mills para $G=U(1)$	84
8.5.1 Idenditades de Bianchi: $dF = 0$	85
8.5.2 Ecuaciones con fuentes: $*d*F = J$	86
8.6 Observaciones	88
Conclusiones	89
A Notación tensorial y de Einstein	90
A.1 Símbolos de permutación y delta de Kronecker.	91
A.1.1 Producto cruz o vectorial.	92
A.2 Identidades vectoriales	93
A.3 Operador derivada	93
B Métrica	95
B.1 Métrica de Minkowski	97
Bibliografía	98

Índice de figuras

2.1	Una carta local coordenada (A local coordinate chart).	13
2.2	Función de transición de dos cartas coordenadas.	13
2.3	Una función f de valores reales definida en M que es representada por la función $f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	16
2.4	El pullback de f bajo h al cual denotaremos por h^*f	17
2.5	Una carta local coordenada usada para definir vectores tangentes.	19
2.6	Una curva en M	20
2.7	El haz tangente (tangent bundle) de M formado por la unión de los espacios tangentes a M en todos los puntos de M . Cada espacio tangente a M aquí está representado por una línea vertical.	21
2.8	El haz tangente (tangent bundle) de M	22
2.9	Operación push-forward (Jacobiano o diferencial) en vectores tangentes. . .	24
2.10	Operación push-forward en campos vectoriales.	25
3.1	El haz cotangente (cotangent bundle) de M	29
4.1	Campo vectorial en M tomando las tangentes a la familia φ_t de curvas en cada punto	36
5.1	Grupos matriz	46
6.1	Idea general de un haz (bundle) (E, π, M)	55
6.2	Morfismo de haces (Haces isomorfos).	56
6.3	Función restricción.	57
6.4	Sección.	58
6.5	G-bundle	60

Introducción

Actualmente, la descripción de nuestro universo se hace usando la relatividad general y el llamado modelo estándar que involucra tres fuerzas: electromagnetismo y las fuerzas nucleares débil y fuerte. Todas ellas son ejemplos de teorías de norma (gauge fields).

En particular, la descripción del campo electromagnético puede hacerse en términos de los potenciales vectorial y escalar. Al escribir la teoría en términos de estos potenciales, se observa que el campo electromagnético no define completamente a los potenciales, esto es, dos pares de potenciales distintos pueden describir el mismo campo electromagnético. Se encuentra además que estos distintos potenciales tienen una relación entre sí, a esta relación se le conoce como transformación de norma y es por eso que se dice que la teoría electromagnética es una teoría de norma. Las transformaciones de norma entre los potenciales se pueden asociar a un grupo que se conoce como el grupo de simetría de la teoría. Actualmente se sabe que, además de la teoría electromagnética, las fuerzas fuerte y débil, también la gravitación pueden describirse como teorías de norma. Por lo anterior consideramos que el estudio de este tipo de teorías es de gran importancia para comprender el mundo físico; así que en este trabajo buscamos estudiar el caso particular de la teoría electromagnética desde un punto de vista geométrico como una teoría de norma.

Nuestro trabajo se desarrolla en 8 capítulos y 2 apéndices. El objetivo principal es llegar a estudiantes de licenciaturas en matemáticas y/o física de tal forma que el contenido sea de utilidad y pueda ser comprendido por ambos ya sea desde el primer capítulo o desde el capítulo de su interés. En el Capítulo 1 incluimos algunos conceptos y hechos preliminares relacionados con electrodinámica. Además, acordamos la notación que usamos en los capítulos siguientes para evitar confusiones y hacer una lectura más fluida aunque previamente ya se incluye un índice de notación. Este capítulo puede ser omitido en la lectura, si el

lector está familiarizado con la teoría del electromagnetismo, aunque se recomienda, en caso de requerirlo, revisar el índice analítico que se incluye en las páginas finales si algún enunciado o concepto parece extraño en los capítulos posteriores.

En el Capítulo 2 se tratan algunos conceptos y hechos relacionados con variedades diferenciables, tomando como textos base [3] y [2].

En el Capítulo 3 se muestran conceptos relacionados con formas diferenciales para posteriormente, en el Capítulo 4 revisar conceptos como grupos uni-paramétricos y flujos necesarios para la definición del concepto de derivada de Lie, derivada exterior y finalmente de la cohomología de DeRham.

En el Capítulo 5 cambiamos un poco de enfoque ya que como se tratará sobre simetrías es necesario establecer definiciones y resultados de la teoría de grupos, grupos de lie y sus representaciones.

El Capítulo 6, a diferencia de los anteriores, es más complejo y en él se presentan propiedades importantes sobre haces y conexiones tomando como base [1]. Existen 4 secciones en este capítulo, la primera está dedicada a mostrar lo más general sobre haces vectoriales. La siguiente sección muestra la construcción de un tipo especial de haz, el G -haz. En la sección 3, mostramos conceptos elementales para entender lo que es una transformación de norma; para la cuarta sección hacemos énfasis en las conexiones.

Casi para terminar, el Capítulo 7 está compuesto por 4 secciones, las primeras tres están relacionadas con algunos conceptos necesarios sobre curvatura y la derivada exterior covariante; la restante estudia las ecuaciones de Yang-Mills y su invarianza de norma, en ella mencionamos algunas nociones básicas sobre éstas.

Finalmente, en el Capítulo 8 se hace una revisión más exhaustiva del objetivo principal de esta tesis. Cabe resaltar que en las secciones de este capítulo fueron plasmadas las ideas finales del trabajo que realizamos en el afán de responder al cuestionamiento planteado sobre cómo entender la teoría electromagnética como una teoría de norma y se hace la relación con los conceptos vistos en los capítulos previos.

Capítulo 1

Preliminares sobre electrodinámica

En el presente capítulo, damos las bases para el desarrollo de esta tesis en cuanto a electrodinámica. En la medida de lo posible, tratamos de explicar de manera simple y clara el contenido aquí presentado. Se espera que el lector posea conocimientos básicos de electrodinámica, pues aunque este capítulo está dedicado a sentar los conceptos y resultados básicos, no damos detalles exactos de algunas afirmaciones por razones relacionadas con la extensión del mismo documento.

Primeramente, recordemos que la electrodinámica clásica es gobernada por las ecuaciones de Maxwell:

$$\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}, \quad \text{Ley de Ampere} \quad (1.1)$$

$$\epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad \text{Ley de Coulomb (Ley de Gauss electrica)} \quad (1.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \text{Ley de Faraday} \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad \text{Ley de Gauss magnetica,} \quad (1.4)$$

donde: $\vec{E}$ es el campo eléctrico mientras que $\vec{B}$ denota el campo magnético, además, $\vec{J}$ es la corriente y ρ denota la densidad de carga; mientras que la permitividad absoluta ϵ y la permeabilidad magnética absoluta μ , son funciones escalares que describen el medio.

Observe que los valores de ϵ y μ son constantes cuando las cargas están en medios homogéneos e isotrópos, así que en este tipo de medio la velocidad de la luz es constante;

en lo que sigue consideraremos medios homogéneos e isotrópicos por lo que asumiremos unidades en las cuales la velocidad de la luz, al igual que ϵ y μ son iguales a uno, así se puede prescindir de las constantes de permitividad y permeabilidad.

1.1. Ecuaciones de Maxwell en términos de los potenciales

Recordando que la divergencia de un rotacional es cero y usando esto en la ecuación (1.4) se define $\vec{A}$ como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} := \vec{B} \quad (1.5)$$

es decir, $\vec{A}$ es el vector cuyo rotacional es $\vec{B}$.

Usando la ecuación (1.5) en la ecuación (1.3),

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{A})}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0, \quad (1.6)$$

y recordando que el gradiente de un rotacional es cero, podemos definir una función escalar ϕ tal que

$$-\vec{\nabla} \phi = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (1.7)$$

en donde el signo menos es sólo por convención. De modo que la ecuación (1.4) se cumple idénticamente si tenemos la función ϕ , mientras que la ecuación (1.3) se satisface idénticamente si la escribimos en función del vector $\vec{A}$.

De igual forma podemos escribir las ecuaciones (1.1) y (1.2) en términos de $\vec{A}$ y ϕ . Usando las ecuaciones (1.5) y (1.7) para $\vec{B}$ y $\vec{E}$ en la ecuación (1.1) se tiene que

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{J}. \quad (1.8)$$

Mientras que para la ecuación (1.2),

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \rho, \quad (1.9)$$

es decir

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\rho. \quad (1.10)$$

Hemos escrito las ecuaciones de Maxwell en términos de las funciones ϕ y $\vec{A}$ que se conocen como los potenciales escalar y vectorial respectivamente. A continuación escribiremos las ecuaciones de Maxwell en términos de una notación relativista. Definamos el cuadri-vector de potencial:

$$A^\mu := (\phi, \vec{A}) = (\phi, A^i) \quad (1.11)$$

donde $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ es decir, $\mu = 0, 1, 2, 3$, mientras que $i = 1, 2, 3$. Además definimos el tensor de campo de fuerza,

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (1.12)$$

donde

$$\partial^0 = -\frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial^i = \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (1.13)$$

De la definición anterior vemos que $F^{\mu\nu}$ es antisimétrico, además, podemos calcular sus componentes:

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = -\frac{\partial}{\partial t} A^i - \partial^i \phi = -\dot{A}^i - \partial^i \phi = E^i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.14)$$

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = \epsilon^{ijk} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \epsilon^{kij} B_k, \quad (1.15)$$

donde hemos usado las ecuaciones (1.5) y (1.7) y usando la convención de suma de Einstein donde siempre sumaremos sobre índices repetidos que aparecerán una vez como subíndice y una vez como superíndice.

Tenemos entonces que las componentes del tensor de campo de fuerza son las componentes de los campos eléctrico y magnético.

Usando las definiciones dadas en las ecuaciones (1.11) y (1.12), se puede ver que las dos primeras ecuaciones de Maxwell pueden ser escritas como:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu \quad (1.16)$$

donde $J^\mu := (\rho, \vec{J})$ es el 4-vector de densidad carga corriente. Considerando $\mu = 0$ la ecuación (1.16) toma la forma

$$\partial_\nu F^{0\nu} = \partial_i E^i = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho. \quad (1.17)$$

Por otro lado, para $\mu = j$ y observando que $\partial_0 := \frac{\partial}{\partial t}$, la ecuación (1.16) se transforma en

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{j\mu} &= \partial_0 F^{j0} + \partial_i F^{ji} \\ &= -\partial_0 F^{0j} + \partial_i F^{ji} \\ &= -\frac{d}{dt} E^j + \partial_i (\epsilon^{jik} \vec{B}_k) = -\dot{E}^j + (\vec{\nabla} \times \vec{B})^j = J^j, \end{aligned} \quad (1.18)$$

con $j = 1, 2, 3$ así,

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{B} - \dot{\vec{E}}, \quad (1.19)$$

que coincide con la ecuación (1.1).

Las últimas dos ecuaciones de Maxwell pueden ser escritas como:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\rho F^{\mu\nu} = 0 \quad (1.20)$$

pues para $\sigma = 0$ la ecuación (1.20) toma la forma

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu\rho 0} \partial^\rho F^{\mu\nu} &= \epsilon_{ijk0} \partial^k F^{ij} = \epsilon_{ijk0} \partial^k \epsilon^{ijl} B_l = -\epsilon_{0ijk} \epsilon^{ijl} \partial^k B_l = -\epsilon_{ijk} \epsilon^{ijl} \partial^k B_l \\ &= -(\delta_j^i \delta_k^l - \delta_j^l \delta_k^i) \partial^k B_l = -2\delta_k^l \partial^k B_l = -2\partial^k B_k = -2\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \end{aligned} \quad (1.21)$$

es decir,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.22)$$

Mientras que para $\sigma = i$, la ecuación (1.20) toma la forma

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu\rho i} \partial^\rho F^{\mu\nu} &= \epsilon_{0\nu\rho i} \partial^\rho F^{0\nu} + \epsilon_{j\nu\rho i} \partial^\rho F^{j\nu} \\ &= \epsilon_{0lki} \partial^k F^{0l} + \epsilon_{j0\rho i} \partial^\rho F^{j0} + \epsilon_{jk\rho i} \partial^\rho F^{jk} \\ &= \epsilon_{0lki} \partial^k F^{0l} + \epsilon_{j0ki} \partial^k F^{j0} + \epsilon_{jk0i} \partial^0 F^{jk} \\ &= \epsilon_{0jki} \partial^k F^{0j} + \epsilon_{0jki} \partial^k F^{0j} + \epsilon_{0jki} \partial^0 F^{jk} \\ &= 2\epsilon_{0jki} \partial^k F^{0j} + \epsilon_{0jki} \partial^0 F^{jk} \\ &= 2\epsilon_{0jki} \partial^k F^{0j} + \epsilon_{0jki} \partial^0 (\epsilon^{jkl} B_l) \\ &= 2\epsilon_{jki} \partial^k E^j + \epsilon_{jki} \epsilon^{jkl} \partial^0 B_l \\ &= -2\epsilon_{ikj} \partial^k E^j + 2\delta_i^l \partial^0 B_l \\ &= -2(\vec{\nabla} \times \vec{E})_i - 2\frac{\partial}{\partial t} B_i \\ &= 2(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{B})_i = 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Por lo tanto las ecuaciones de Maxwell en términos del tensor de campo de fuerza y el 4-vector de densidad carga corriente se escriben como en las ecuaciones (1.20) y (1.16).

Por otro lado, tomando la cuatro-divergencia de ambos lados de la ecuación (1.16), tenemos

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\mu J^\mu \quad (1.24)$$

que nos lleva a que la corriente electromagnética es conservada pues el lado izquierdo de la ecuación anterior se anula debido a la antisimetría de F y la simetría de las derivadas parciales, así tenemos que

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (1.25)$$

1.2. INVARIANZA DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL ANTE UN CAMBIO EN LOS POTENCIALES

desarrollando la sumatoria tenemos

$$\begin{aligned}\partial_0 J^0 + \partial_i J^i &= \partial_0 \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}, \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0.\end{aligned}\tag{1.26}$$

La ecuación anterior se conoce como ecuación de continuidad de la corriente electromagnética.

1.2. Invarianza de las ecuaciones de Maxwell ante un cambio en los potenciales

En esta sección veremos que los potenciales antes vistos no son únicos. Consideremos la transformación:

$$\begin{aligned}\phi' &= \phi + \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \\ \vec{A}' &= \vec{A} - \vec{\nabla} \Gamma,\end{aligned}\tag{1.27}$$

que escrita en notación de cuadvectores toma la forma:

$$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \Gamma\tag{1.28}$$

la cual veremos más adelante, es una transformación de norma. Luego, de la ecuación (1.12) y usando la ecuación (1.28),

$$\begin{aligned}F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu &= \partial^\mu (A^\nu - \partial^\nu \Gamma) - \partial^\nu (A^\mu - \partial^\mu \Gamma) \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu \partial^\nu \Gamma - \partial^\nu A^\mu + \partial^\nu \partial^\mu \Gamma.\end{aligned}\tag{1.29}$$

Así, el tensor de campo de fuerza se transforma como:

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - (\partial^\mu \partial^\nu - \partial^\nu \partial^\mu) \Gamma\tag{1.30}$$

y como las derivadas conmutan, por lo tanto,

$$F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} \quad (1.31)$$

es decir, el tensor de campo de fuerza es invariante ante una transformación de los campos dada por la ecuación (1.28).

1.3. Lagrangiana del campo electromagnético en términos del tensor de campo de fuerza F

Se puede buscar una lagrangiana que nos lleve a las ecuaciones para el campo electromagnético en términos de los potenciales escalar y vectorial, de modo que las ecuaciones de Maxwell se deriven de dicha lagrangiana L .

Por lo tanto, buscamos una lagrangiana L cuyas ecuaciones de movimiento estén dadas por la ecuaciones (1.16) y (1.20) así que se propone:

$$L(A_\mu, \partial_\nu A_\mu, t) = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + J^\mu A_\mu \quad (1.32)$$

en donde trataremos la corriente J^μ como una fuente externa mientras que A^ν son campos que dependen de las coordenadas. Siendo así sus ecuaciones de movimiento de la forma:

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right] - \frac{\partial L}{\partial A_\nu} = 0 \quad (1.33)$$

con $A_\nu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$. Entonces para calcular dichas ecuaciones de movimiento, observemos que

$$\frac{\partial L}{\partial A_\nu} = \frac{\partial}{\partial A_\nu} \left(-\frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + J^\alpha A_\alpha \right) = J^\alpha \frac{\partial A_\alpha}{\partial A_\nu} = J^\alpha \delta_\alpha^\nu \quad (1.34)$$

1.3. LAGRANGIANA DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO EN TÉRMINOS DEL TENSOR DE CAMP

mientras que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \left(-\frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + J^\alpha A_\alpha \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \left(-\frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) \\
 &= -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F_{\alpha\beta} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F^{\alpha\beta} \right).
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

Pero note que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \\
 &= \frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial(\partial_\beta A_\alpha)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \\
 &= \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu.
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F_{\alpha\beta} = \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F^{\alpha\beta}. \tag{1.37}$$

Luego, se tiene que la ecuación (1.35) tiene la forma

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{2} ((\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu)) F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) \\
 &= -\frac{1}{2} (F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu}) = -F^{\mu\nu}.
 \end{aligned} \tag{1.38}$$

Así,

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right] = \partial_\mu (-F^{\mu\nu}) = -\partial_\mu F^{\mu\nu} \tag{1.39}$$

y por lo tanto la ecuación final de movimiento es:

$$-\partial_\mu F^{\mu\nu} - J^\nu = 0 \tag{1.40}$$

entonces,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \tag{1.41}$$

es decir, la lagrangiana L tiene como ecuaciones de movimiento a las ecuaciones de Maxwell con fuentes. Note que el otro conjunto de ecuaciones sin fuentes (1.20) corresponden a identidades una vez que hemos definido a $F^{\mu\nu}$.

1.4. Invarianza de la lagrangiana del campo electromagnético bajo transformaciones de Lorentz

Ahora consideremos las transformaciones,

$$X'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} X^{\nu} \quad (1.42)$$

que satisfacen la condición:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

que se usa en la relación

$$\eta_{\rho\sigma} = \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} \eta_{\mu\nu}, \quad (1.44)$$

de donde

$$X_{\mu} = \eta_{\mu\nu} X^{\nu}. \quad (1.45)$$

Vamos a ver cómo se modifica la lagrangiana L si le aplicamos la transformación (1.42) a los campos que la componen. Si aplicamos la transformación (1.42) al cuadri-vector de potencial tenemos:

$$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu} \quad (1.46)$$

y si la aplicamos al tensor de campo de fuerza tenemos:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (1.47)$$

1.4. INVARIANZA DE LA LAGRANGIANA DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO BAJO TRANSFORMACIONES DE GAUGE

De esta forma,

$$F'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\delta}\eta_{\nu\gamma}F'^{\delta\gamma} = \eta_{\mu\delta}\eta_{\nu\gamma}\Lambda_{\rho}^{\delta}\Lambda_{\sigma}^{\gamma}F^{\rho\sigma}. \quad (1.48)$$

Entonces

$$\begin{aligned} F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} &= \Lambda_{\alpha}^{\mu}\Lambda_{\beta}^{\nu}F^{\alpha\beta}\eta_{\mu\delta}\eta_{\nu\gamma}\Lambda_{\rho}^{\delta}\Lambda_{\sigma}^{\gamma}F^{\rho\sigma} \\ &= \Lambda_{\alpha}^{\mu}\Lambda_{\rho}^{\delta}\eta_{\mu\delta}\Lambda_{\beta}^{\nu}\Lambda_{\sigma}^{\gamma}\eta_{\nu\gamma}F^{\alpha\beta}F^{\rho\sigma} \\ &= \eta_{\alpha\rho}\eta_{\beta\sigma}F^{\alpha\beta}F^{\rho\sigma} \\ &= F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (1.49)$$

donde en el tercer renglón hemos usado la ecuación (1.44) y en el cuarto renglón la ecuación (1.48).

Mientras que el tensor de corriente transforma como

$$J'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu}J^{\nu} \quad (1.50)$$

y de la ecuación (1.46) se tiene que

$$A'_{\mu} = \eta_{\mu\nu}\Lambda_{\alpha}^{\nu}A^{\alpha} \quad (1.51)$$

entonces:

$$\begin{aligned} J'^{\mu}A'_{\mu} &= \Lambda_{\rho}^{\mu}J^{\rho}\eta_{\mu\nu}\Lambda_{\alpha}^{\nu}A^{\alpha} \\ &= \Lambda_{\rho}^{\mu}\Lambda_{\alpha}^{\nu}\eta_{\mu\nu}J^{\rho}A^{\alpha} \\ &= \eta_{\rho\alpha}J^{\rho}A^{\alpha} \end{aligned} \quad (1.52)$$

donde en el tercer renglón hemos usado la ecuación (1.44). Así,

$$\eta_{\rho\alpha}J^{\rho}A^{\alpha} = J^{\rho}(\eta_{\rho\alpha}A^{\alpha}). \quad (1.53)$$

1.4. INVARIANZA DE LA LAGRANGIANA DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO BAJO TRANSFORMACIONES DE GAUGE

es decir,

$$J^\rho A_\rho = J^\mu A_\mu. \quad (1.54)$$

Tenemos que

$$L' = -\frac{1}{4}F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} + J'^\mu A'_\mu = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + J^\mu A_\mu \quad (1.55)$$

esto último, cambiando ρ por μ y σ por ν . Entonces la lagrangiana L es invariante bajo las transformaciones que satisfacen (1.44). Este tipo de transformaciones son conocidas como las transformaciones de Lorentz dentro de la teoría de la relatividad especial, son un conjunto de relaciones que dan cuenta de cómo se relacionan las medidas de una magnitud física obtenidas por dos observadores diferentes. Estas relaciones describen el tipo de geometría del espacio-tiempo requeridas por la teoría de Einstein. Matemáticamente el conjunto de todas las transformaciones de Lorentz forman el grupo de Lorentz que es un subgrupo del grupo lineal $GL(\mathbb{R}^4)$ y también puede ser dotado de la estructura de grupo de Lie.

Capítulo 2

Variedades

En el presente capítulo, damos las bases para el desarrollo de esta tesis en cuanto a variedades diferenciables. Un aspecto poco abordado pero que es un elemento importante de las ecuaciones de Yang-Mills es el concepto de variedad que es el lugar en el cual toma acción lo que desarrollaremos pues es ahí donde nuestros objetos físicos viven. En el caso del electromagnetismo y el modelo estándar, dicha variedad es justo el espacio de Minkowski de relatividad general. En seguida se presenta la definición formal de una variedad y algunos otros conceptos relacionados.

2.1. Variedades diferenciables

2.1.1. Definiciones e ideas geométricas

Definición 2.1. Sea M un conjunto. Una carta (o carta local) en M es un par (U, ϕ) tal que U es un subconjunto de M y ϕ es un mapeo uno a uno de U en algún subconjunto abierto de R^n así, se dice que (U, ϕ) es una carta coordenada n -dimensional ($1 \leq n < \infty$) en M . Una carta en M es también llamada un sistema coordenado en M . Ver figura (2.1).

Definición 2.2. Sean (U_1, ϕ_1) y (U_2, ϕ_2) un par de cartas coordenadas n -dimensionales con $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Entonces la función de transición entre las dos cartas coordenadas es el mapeo $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ del subconjunto abierto $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$.

Ver figura (2.2)

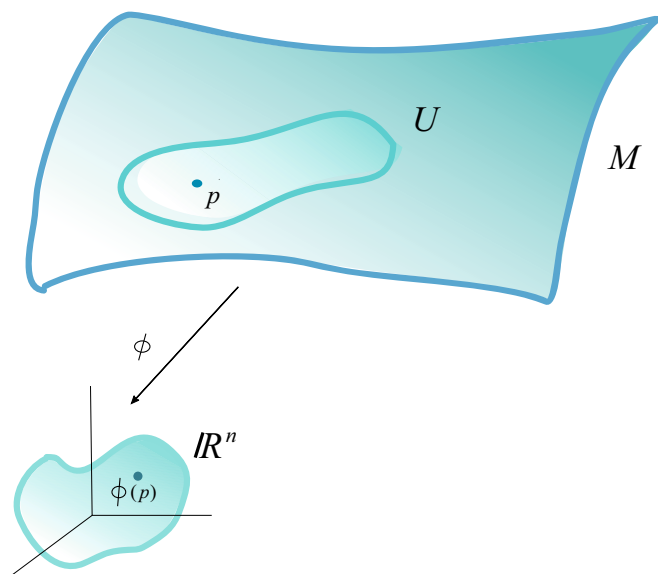


Figura 2.1: Una carta local coordenada (A local coordinate chart).

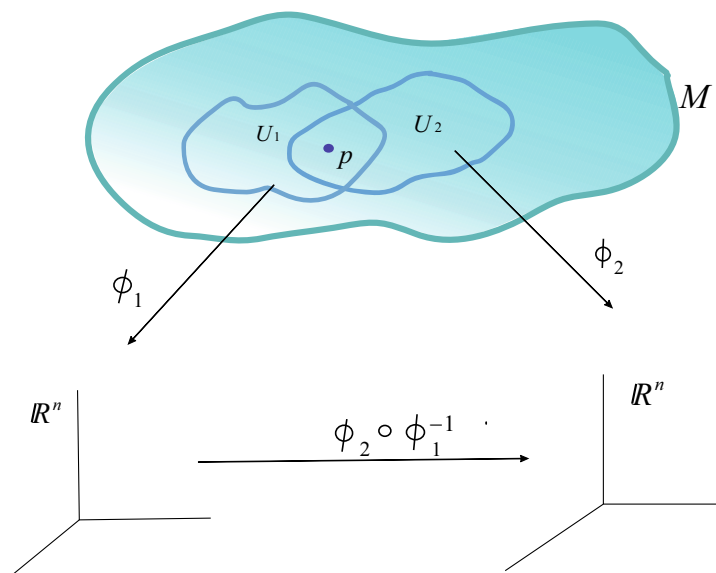


Figura 2.2: Función de transición de dos cartas coordenadas.

Definición 2.3. Un C^k atlas ($1 \leq k < \infty$) de dimensión m en M es una familia de cartas coordenadas m dimensionales $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ (donde I es un conjunto indexado) tal que

- a) M es cubierto por la familia es decir; $M = \bigcup_{i \in I} U_i$,
- b) cada función de transición $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$, $i, j \in I$ es un difeomorfismo C^k donde ($1 \leq k < \infty$) de $\phi_i(U_i \cap U_j)$ a $\phi_j(U_i \cap U_j)$.

Observación:

1. A la función de transición también se le llama función de cambio de coordenadas.
2. Recuerde que una función C^∞ de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ es aquella para la cual todas sus derivadas parciales de todos los órdenes existen. A una función que es C^∞ también se le dice suave (smooth).

Definición 2.4. Un espacio topológico (X, τ) es un conjunto no vacío X junto con τ una familia de subconjuntos abiertos de X y que satisfacen las condiciones:

1. El conjunto vacío $\emptyset$ y el mismo X son conjuntos abiertos,
2. Si $U, V \subseteq X$ son abiertos, entonces $U \cap V$ también lo es,
3. Si los conjuntos $U_\alpha \subseteq X$ son abiertos, entonces también lo es la unión $\bigcup U_\alpha$.

La colección de conjuntos τ es llamado la topología de X . Los elementos de la topología se llaman abiertos y sus complementarios cerrados.

Existen diversos tipos de espacios topológicos, pero nos centraremos sólo en los siguientes:

Definición 2.5. 1. Un espacio topológico (X, τ) es de Hausdorff si para cada par de puntos $x, y \in X$ con $x \neq y$ existen dos abiertos $U_\alpha, U_\beta \in \tau$ con $x \in U_\alpha$ y $y \in U_\beta$ tales que $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$.

2. Se dice que un espacio topológico verifica el segundo axioma de numerabilidad (o que es segundo numerable, o segundo contable) si su topología tiene una base numerable

Definición 2.6. Una variedad C^k de dimensión n es un espacio topológico M que es Hausdorff y segundo numerable, con un C^k atlas de dimensión n ; si $k \geq 1$ se dice que M es una variedad diferenciable. Si $k = 0$, donde las funciones de transición son homeomorfismos, se dice que M es una variedad topológica.

Para nosotros, cuando hablemos de una variedad pensaremos en una variedad diferenciable. También, se asumirá que nuestra variedad es Hausdorff y compacta en donde por compacta entenderemos lo siguiente: Una variedad M es compacta si y sólo si toda sucesión en M tiene una subsucesión convergente. Esto último, por ser segundo numerable.

Definición 2.7. Un punto $p \in U \subset M$ tiene coordenadas $(\phi^1(p), \phi^2(p), \dots, \phi^n(p)) \in \mathbb{R}^n$ con respecto a la carta (U, ϕ) , donde las $\phi^\mu : U \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu = 1, 2, \dots, n$ son definidas en términos de las funciones proyección $u^\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $u^\mu(x) := x^\mu$, con $\phi^\mu(p) := u^\mu(\phi(p))$. A las funciones coordenadas se les escribirá como x^μ , $\mu = 1, 2, \dots, n$ y las coordenadas de un punto p serán $(x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p))$.

Si f es una función de valores reales definida en una variedad diferenciable M , $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, y (U, ϕ) es una carta perteneciente al atlas de M , la composición $f \circ \phi^{-1}$ es una función de valores reales definida en un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ el cual, puede o no ser diferenciable. Ver figura (2.3). Observe que la diferenciabilidad de la composición $f \circ \phi^{-1}$ no depende de la elección de la carta dado que, las cartas del atlas de M están relacionadas por medio de las funciones de transición es así que damos la siguiente definición:

Definición 2.8. Sea M una C^k variedad diferenciable. Una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable de clase C^r ($r \leq k$) si $f \circ \phi^{-1}$ es diferenciable de clase C^r para cada carta (U, ϕ) en el atlas de M .

Ahora, pensando en dos variedades diferenciables tenemos la siguiente definición:

Definición 2.9. Sean M una C^k variedad y N una C^l variedad, un mapeo h de M en N es diferenciable de clase C^r (con $r \leq \min\{k, l\}$) si para cualesquiera dos cartas (U, ϕ) en M y (U', ϕ') en N , el mapeo $\phi' \circ h \circ \phi^{-1}$ es diferenciable de clase C^r ; es decir, $h : M \rightarrow N$ es diferenciable si, para $p \in M$, las coordenadas de $h(p)$ dependen diferenciablemente en las coordenadas de p .

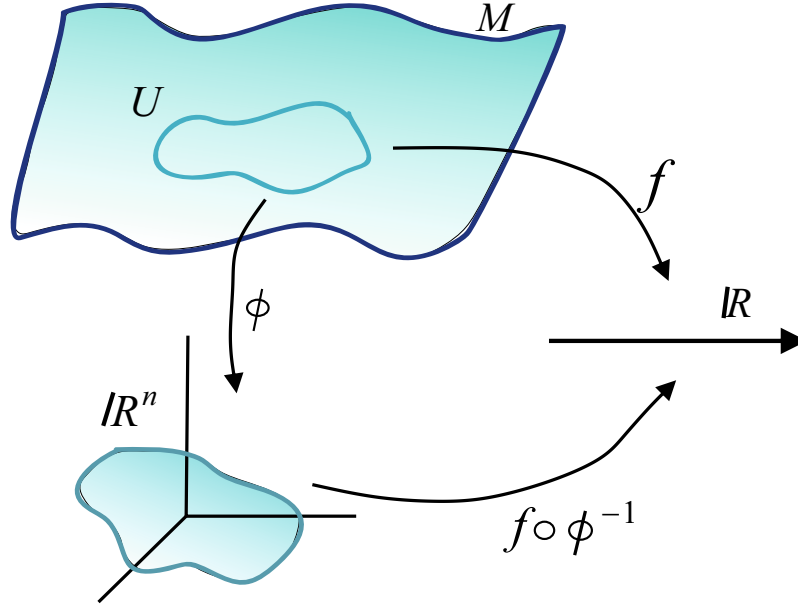


Figura 2.3: Una función f de valores reales definida en M que es representada por la función $f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Si $x^1, \dots, x^n$ son coordenadas asociadas con la carta (U, ϕ) en M y $y^1, \dots, y^n$ son las coordenadas asociadas con la carta (U', ϕ') en N tenemos que,

$$(y^1(h(p)), \dots, y^n(h(p))) = \phi'(h(p)) = (\phi' \circ h \circ \phi^{-1})(\phi(p)) = (\phi' \circ h \circ \phi^{-1})(x^1(p), \dots, x^n(p)). \quad (2.1)$$

Lo anterior, ya sabiendo que el mapeo h de M en N es un mapeo diferenciable. A continuación damos una definición sobre cuándo dos variedades se dice que son difeomorfismos es decir, que casi pueden pensarse como iguales.

Definición 2.10. Un difeomorfismo h es un mapeo uno-a-uno y sobreyectivo de una variedad diferenciable M a una variedad diferenciable N tal que h y h^{-1} son diferenciables; dos variedades diferenciables M y N son difeomorfas si existe un difeomorfismo h de M en N .

La siguiente definición es usada como precedente para el concepto de pullback de una 1-forma.

Definición 2.11. Si h es un mapeo diferenciable de M en una variedad diferenciable N y

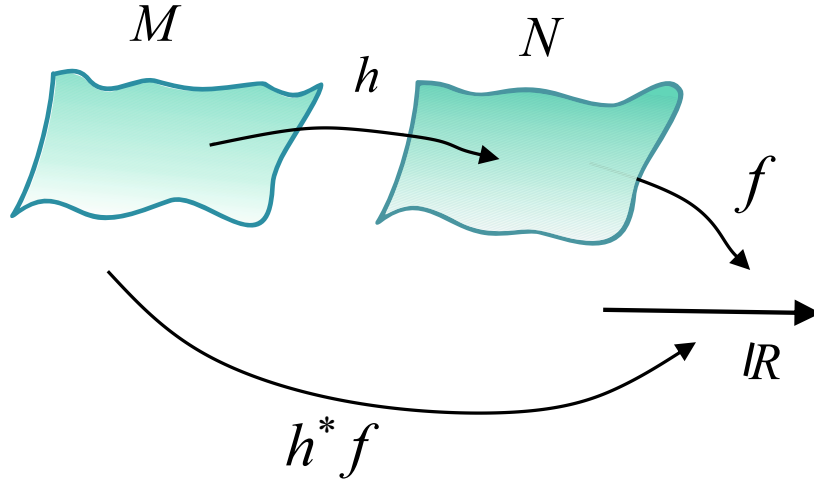


Figura 2.4: El pullback de f bajo h al cual denotaremos por h^*f .

$f \in C^\infty(N)$, el pullback de f bajo h , h^*f , se define por $h^*f := f \circ h$.

Además, $h^*f \in C^\infty(M)$. Esto es, $h^* : C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M)$. (h^* es aplicado a funciones definidas en N para producir funciones definidas en M ; de ahí su nombre pullback para f .) Ver figura (2.4)

. Observación:

1. $h^*(af + bg) = ah^*f + bh^*g$ y $h^*(fg) = (h^*f)(h^*g)$ para toda $f, g \in C^\infty(N)$, $a, b \in \mathbb{R}$,
2. $h : M \rightarrow N$ es diferenciable si y sólo si $h^*f \in C^\infty(M)$ para toda $f \in C^\infty(N)$.

2.2. Espacio tangente

Definición 2.12. 1. Sea $p \in M$. Un vector tangente a M en p es un mapeo v_p de $C^\infty(M)$ en $\mathbb{R}$ tal que

$$\text{a) } v_p(af + bg) = av_p(f) + bv_p(g)$$

$$\text{b) } v_p(fg) = f(p)v_p(g) + g(p)v_p(f)$$

para $f, g \in C^\infty(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

2. El espacio tangente a M en p , denotado por $T_p M$ (o $T_p(M)$ y M_p) es el conjunto de todos los vectores tangentes a M en p . El conjunto $T_p M$ es un espacio vectorial real con las operaciones definidas por

$$\text{a) } (v_p + w_p)(f) := v_p(f) + w_p(f)$$

$$\text{b) } (av_p)(f) := a(v_p(f))$$

para $v_p, w_p \in T_p M$, $f \in C^\infty(M)$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

Observación: Para una función constante c , (denotamos por c a la función y a sus valores es decir; $c(p) = c$ para todo $p \in M$), se tiene que $v_p(c) = 0$.

Definición 2.13. Si (U, ϕ) es una carta en M , con $p \in U$ y coordenadas $x^1, x^2, \dots, x^n$, definimos el conjunto $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$, por

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p (f) := \frac{\partial}{\partial u^\mu} f \circ \phi^{-1} \Big|_{\phi(p)}, \quad (2.2)$$

para $f \in C^\infty(M)$, $\mu = 1, 2, \dots, \dim M$ donde $\frac{\partial}{\partial u^\mu}$ denota la derivada parcial con respecto al μ -ésimo argumento. Ver figura (2.5).

Observación: De la definición (2.13) se puede mostrar que $\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p \in T_p M$.

Por otro lado, se puede ver que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p (x^\nu) = \delta_\mu^\nu := \begin{cases} 1, & \text{si } \mu = \nu, \\ 0, & \text{si } \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (2.3)$$

El conjunto $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p\right\}_{\mu=1}^n$ es linealmente independiente dado que si $a^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p = 0$ con $a^\mu \in \mathbb{R}$. Note que hemos usado la convención de Einstein y usando (2.3),

$$0 = 0(x^\nu) = a^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p (x^\nu) = a^\mu \delta_\mu^\nu = a^\nu. \quad (2.4)$$

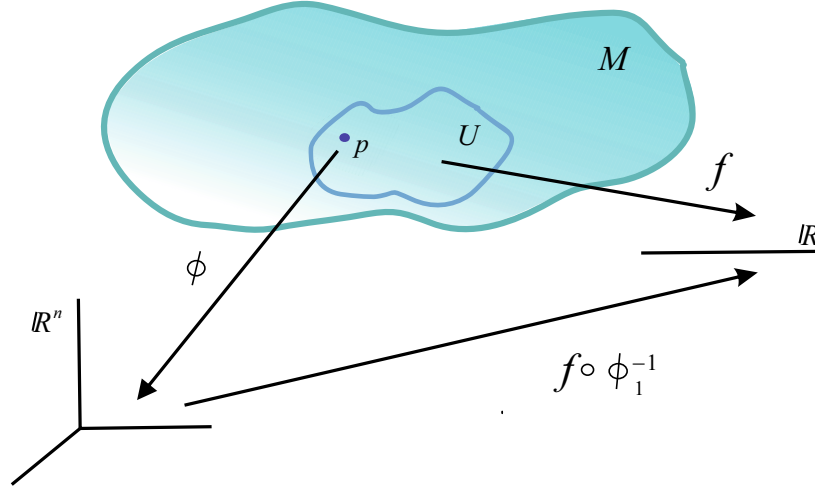


Figura 2.5: Una carta local coordenada usada para definir vectores tangentes.

Observación: Si (U, ϕ) es una carta en M y $p \in U$, el conjunto $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p \right\}_{\mu=1}^n$ es una base de $T_p M$ y

$$v_p = v_p(x^\mu) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p \quad (2.5)$$

para $v_p \in T_p M$.

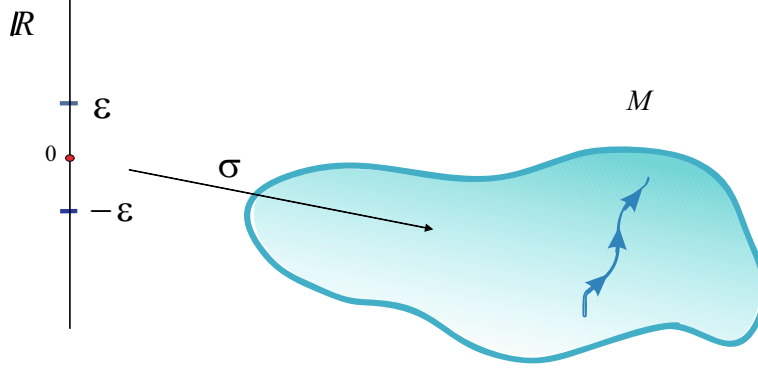
Con la siguiente definición se puede dar una definición alternativa de vector tangente.

Definición 2.14. Una curva σ en una variedad M es un mapeo suave (smooth map) es decir, $C^\infty((-\epsilon, \epsilon), M)$ (o diferenciable) de algún intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ de la recta real en M . Ver figura (2.6).

Definición 2.15. Si σ es una curva diferenciable en M y $f \in \mathbb{C}^\infty(M)$, entonces $\sigma^* f = f \circ \sigma$ es una función diferenciable de algún subconjunto abierto $I \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Si $t_0 \in I$, el vector tangente a σ en el punto $\sigma(t_0)$, denotado por σ'_{t_0} , se define por

$$\sigma'_{t_0} := \left. \frac{d}{dt} (f \circ \sigma) \right|_{t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(\sigma(t)) - f(\sigma(t_0))}{t - t_0}. \quad (2.6)$$

Observe que un vector tangente v_p en $T_p M$ puede ser usado como una derivada direc-

Figura 2.6: Una curva en M .

cional en funciones $f \in C^\infty(M)$ definido por

$$v_p(f) := \left. \frac{df(\sigma(t))}{dt} \right|_{t=0}$$

donde σ es una curva. Es decir; dada una función f y un campo vectorial v en M (lo cuál se definirá más adelante), podemos formar la derivada direccional de f en la dirección v a la cual escribiremos solamente como vf en lugar de $v(f)$. Escribiremos $x^1, \dots, x^n$ para las coordenadas en M , y sólo ∂_μ para las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$; además, seguiremos usando la convención de suma de Einstein. Entonces si v tiene componentes $(v^1, \dots, v^n)$, tenemos la fórmula $vf = v^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + \dots + v^n \frac{\partial f}{\partial x^n} = v^\mu \partial_\mu f$. Dado que la fórmula $vf = v^\mu \partial_\mu f$ se cumple para toda f , podemos incluso utilizar la notación $v = v^\mu \partial_\mu$.

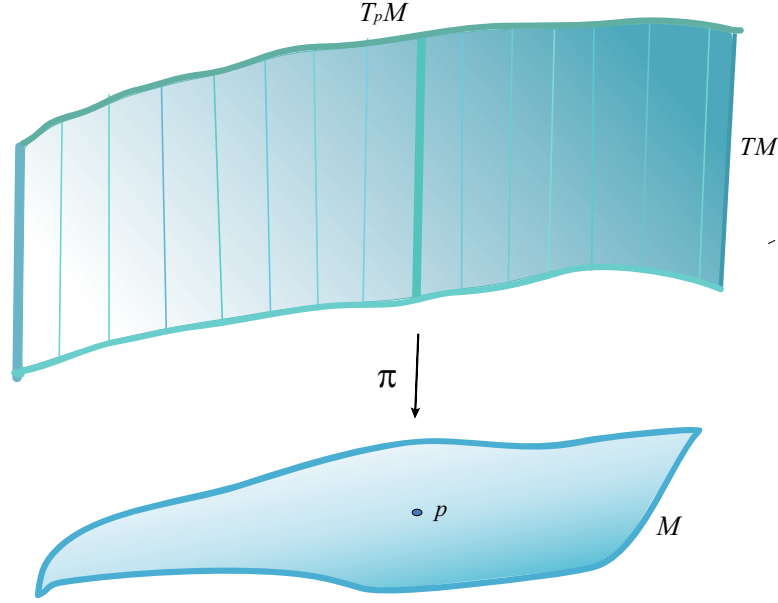


Figura 2.7: El haz tangente (tangent bundle) de M formado por la unión de los espacios tangentes a M en todos los puntos de M . Cada espacio tangente a M aquí está representado por una línea vertical.

2.3. Haz tangente (tangent bundle) de una variedad diferenciable M .

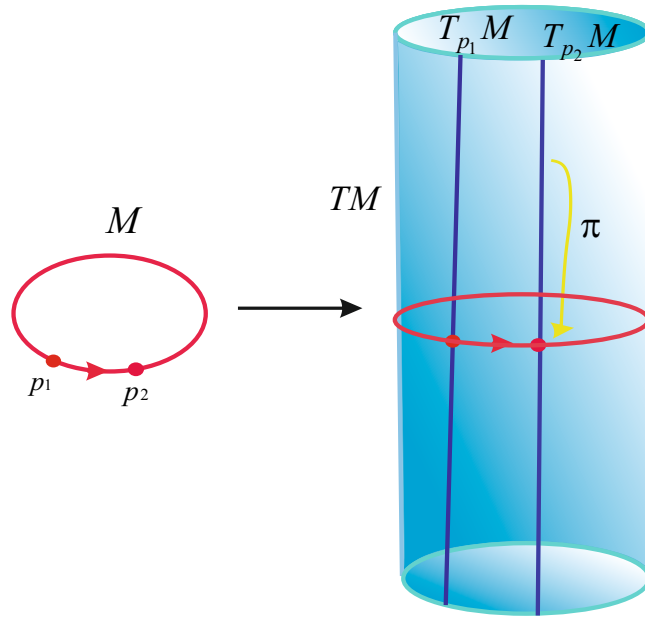
Definición 2.16. 1. El haz tangente (tangent bundle) denotado por TM se define como

$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$ es decir, es el conjunto de todos los vectores tangentes a todos los puntos de M .

2. La proyección canónica π de TM en M es el mapeo que asocia a cada elemento de TM el punto de M al cual está vinculado; esto es, si $v_p \in T_p M$, entonces $\pi(v_p) = p$. Por lo tanto, usaremos la notación $\pi^{-1}(p) = T_p M$.

3. La imagen inversa (la fibra sobre p (fiber)) bajo el mapeo π es el conjunto de todos los vectores que son tangentes a la variedad en ese punto. Ver figura (2.7)

El haz tangente tiene la estructura de una variedad diferenciable inducida de forma natural por la estructura de M . Si (U, ϕ) es un sistema coordinado en M , cada $v_p \in \pi^{-1}(U)$ es una combinación lineal de los vectores $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$, con coeficientes reales que dependen de


 Figura 2.8: El haz tangente (tangent bundle) de M

v_p . Entonces podemos escribir

$$v_p = \dot{q}^i(v_p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p, \quad (2.7)$$

lo cual define n funciones $\dot{q}^i : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}$. (Esta notación viene de la comunmente empleada en la mecánica Lagrangiana, cuando M es el espacio configuración de un sistema mecánico.) Ver figura (2.8). De (2.3) tenemos que

$$\dot{q}^i(v_p) = v_p(x^i). \quad (2.8)$$

Definiendo las n funciones $q^i : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}$, por $q^i := x^i \circ \pi = \pi^* x^i$, el par $(\pi^{-1}(U), \bar{\phi})$ (donde $\bar{\phi} : TM \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$), con

$$\bar{\phi} := (q^1(v_p), \dots, q^n(v_p), \dot{q}^1(v_p), \dots, \dot{q}^n(v_p)), \quad (2.9)$$

es una carta en TM .

Observación: La imagen de $\pi^{-1}(U)$ bajo $\bar{\phi}$ es $\phi(U) \times \mathbb{R}^n$, el cual es es un subconjunto

abierto de $\mathbb{R}^{2n}$ y la inyectividad de $\bar{\phi}$ se sigue de la inyectividad de ϕ .

2.4. Campos vectoriales (vector fields)

Ya que hemos definido un vector tangente para cada punto de una variedad. Ahora daremos paso a una importante generalización de esta idea que involucra un campo (field) de vectores tangentes en el sentido de que un vector tangente es asignado a cada punto de M (o más generalmente, a cada punto en algún subconjunto abierto de M). Este concepto se formaliza en la siguiente definición:

Definición 2.17. *Un campo vectorial (vector field) v en M es una función que a cada punto p de M asigna un vector tangente $v(p) \in T_p M$. Al vector tangente $v(p)$ también se le denota por v_p . El conjunto de campos vectoriales en una variedad M es denotado por $VFld(M)$ o $\chi(M)$.*

Observación: $\chi(M)$ tiene asociado una estructura de espacio vectorial. Si v, w con campos vectoriales en M y $a, b \in \mathbb{R}$ se pueden definir las siguientes operaciones:

1. $(av + bw)f := avf + bwf$
2. $(gv)f := g(vf)$

para todo $f, g \in C^\infty(M)$.

Existe otra operación entre campos vectoriales, llamada el corchete de Lie (Lie bracket).

Definición 2.18. *Si v y w son campos vectoriales en M , su corchete de Lie (Lie bracket) está definido por $[v, w](f) := v(wf) - w(vf)$ para $f \in C^\infty(M)$.*

Observación: $[v, w] = -[w, v]$.

Definición 2.19. *Sean M y N variedades. Sea $h : M \rightarrow N$ un difeomorfismo. El mapeo h induce una transformación lineal entre los espacios tangentes $T_p M$ y $T_{h(p)} N$ llamado el Jacobiano (o diferencial) de h en p , denotado por h_{*p} (o por dh_p). Si $v_p \in T_p M$, $h_{*p}(v_p)$ es definido como el vector tangente a N en $h(p)$ tal que para $f \in C^\infty(N)$,*

$$h_{*p}(v_p)(f) := v_p(h^*f). \quad (2.10)$$

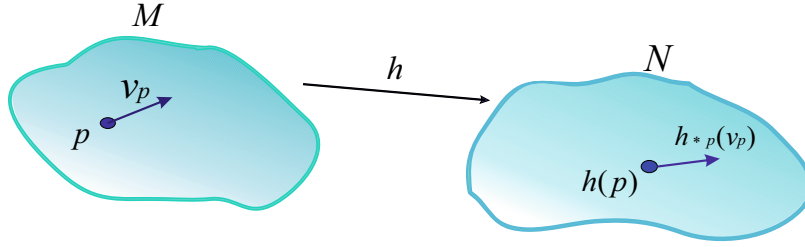


Figura 2.9: Operación push-forward (Jacobiano o diferencial) en vectores tangentes.

Ver figura (2.9)

Se ha definido la operación push-forward o Jacobiano $h_* : T_p M \rightarrow T_{h(p)} N$ inducido por el mapeo $h : M \rightarrow N$. Ésta es una operación entre espacios vectoriales $T_p M$ y $T_{h(p)} N$ así que una pregunta natural es cuándo es posible definir una idea similar pero para campos vectoriales de M en N . Es así que surge la siguiente definición:

Definición 2.20. Sea $h : M \rightarrow N$ y sean v, w campos vectoriales en M y N respectivamente. Entonces v y w se dicen h -relacionados (h -related) si, para todos los puntos $p \in M$,

$$h_*(v_p) = w_{h(p)} \quad (2.11)$$

y entonces se escribirá $w = h_*v$.

Ver figura (2.10)

Observación: Si v y w son h -relacionados, y si $f \in C^\infty(N)$, entonces

$$(h_*v_p)f = w_{h(p)}f, \quad (2.12)$$

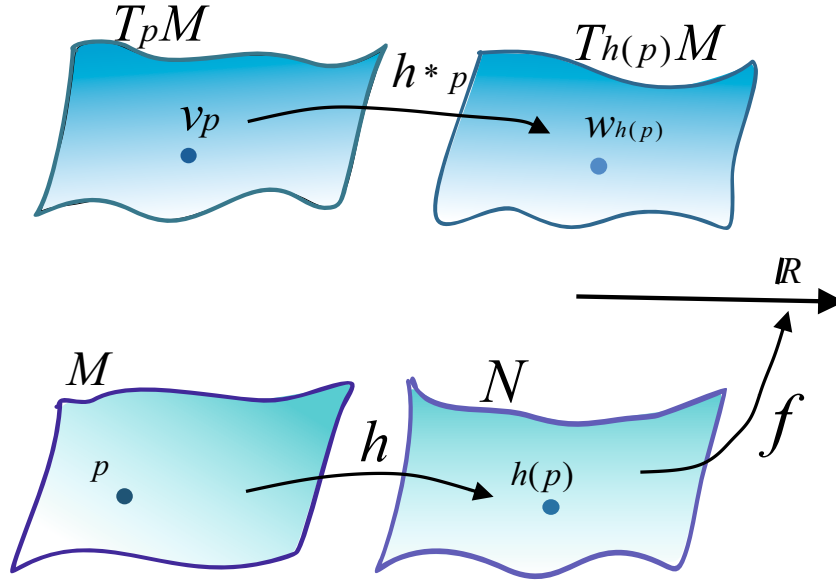


Figura 2.10: Operación push-forward en campos vectoriales.

es decir,

$$[v(f \circ h)](p) = v_p(f \circ h) = (wf)(h(p)), \quad (2.13)$$

así,

$$v(f \circ h) = (wf) \circ h, \quad (2.14)$$

la cuál es una forma más útil de expresar la propiedad de h -relación. De acuerdo a lo anterior llegamos a la siguiente definición, para campos vectoriales.

Definición 2.21. Sean M y N dos variedades diferenciales y sea $h : M \rightarrow N$ un difeomorfismo. Si v es un campo vectorial en N , entonces existe un único campo vectorial w en M tal que w y v están h -relacionados. Esto es, la condición de que v y w estén h -relacionados (es decir, $h_{*v}w_v = v_{h(v)}$) tiene una única solución dada por

$$w_v = (h^{-1})_{*h(v)} v_{h(v)}. \quad (2.15)$$

El campo vectorial w es, por definición, el pullback de v bajo h y lo denotaremos por h^*v , esto es;

$$(h^*v)_v := (h^{-1})_{*h(v)} v_{h(v)}. \quad (2.16)$$

Note que dado h^*v y v que están h-relacionados,

$$(h^*v)(h^*f) = h^*(vf) \quad (2.17)$$

para $f \in \mathbb{C}^\infty(M)$.

Capítulo 3

Formas diferenciales

3.1. Vectores cotangentes

Este capítulo está dedicado a discutir hechos relacionados con álgebras de formas. Ya hemos revisado propiedades y resultados sobre campos vectoriales, ahora toca el turno de hablar un poco sobre formas diferenciales aunque empezamos por revisar algunos conceptos de vectores cotangentes para después dar una versión más general de acuerdo al contexto de tensores.

Definición 3.1. 1. Un vector cotangente o vector covariante a un punto $p \in M$ es un mapeo lineal real α de $T_p M$ en $\mathbb{R}$. El valor de α en el vector tangente $v_p \in T_p M$ se escribirá como α_p ó α .

2. El espacio cotangente a $p \in M$ es el conjunto $T_p^* M$ de todos los mapeos lineales α de $T_p M$ en $\mathbb{R}$.

3. El haz cotangente (cotangent bundle) $T^* M$ es el conjunto de todos los vectores cotangentes a todos los puntos p en M . Esto es, $T^* M := \bigcup_{p \in M} T_p^* M$. Ver figura (3.1)

Observación:

1. A cada espacio tangente $T_p M$ se le asocia un espacio cotangente $T_p^* M$, es decir, $T_p^* M$ es el espacio dual a $T_p M$.

2. T_p^*M es en sí mismo un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones

$$a) (\alpha_p + \beta_p)(v_p) := \alpha_p(v_p) + \beta_p(v_p),$$

$$b) (a\alpha_p)(v_p) := a(\alpha_p(v_p)),$$

para $\alpha_p, \beta_p \in T_p^*M$, $v_p \in T_pM$, y $a \in \mathbb{R}$.

3. $\dim(T_pM) = \dim(T_p^*M) = \dim(M)$

Definición 3.2. Sea $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$; el diferencial de f en un punto $p \in M$, denotado por df_p , es definido por

$$df_p(v_p) := v_p(f), \quad (3.1)$$

para $v_p \in T_pM$.

Observación: Por simplicidad en algunos casos usaremos $v_p f = v_p(f)$.

El mapeo df_p es una transformación lineal de T_pM en $\mathbb{R}$, dado que si $v_p, w_p \in T_pM$ y $a, b \in \mathbb{R}$, de (3.1) y (2.12) tenemos que

$$df_p(av_p + bw_p) = (av_p + bw_p)f = av_p f + bw_p f = a df_p(v_p) + b df_p(w_p). \quad (3.2)$$

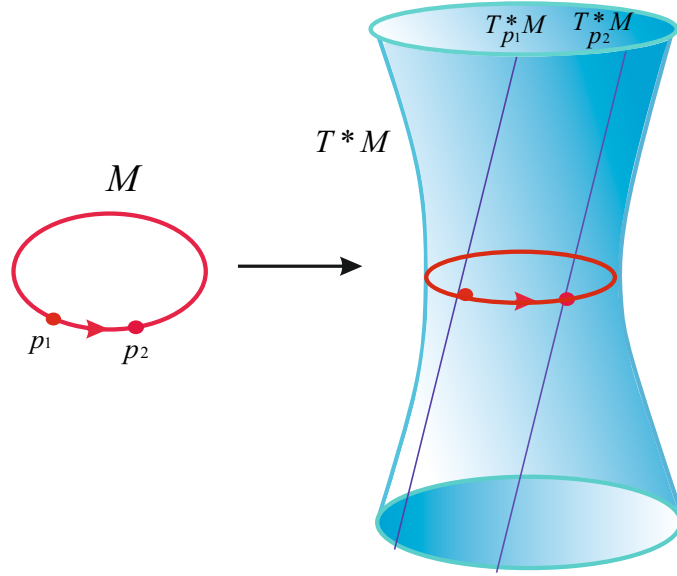
Esto nos dice que df_p pertenece al espacio dual de T_pM , es decir, a T_p^*M .

Además, $\{dx_p^\mu\}_{\mu=1}^n$ es una base de T_p^*M , dado que si una combinación lineal, con coeficientes reales, $a_\mu dx_p^\mu$, es igual al vector covariante cero, tenemos que

$$0 = (a_\mu dx_p^\mu) \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right)_p \right) = a_\mu \left(dx_p^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right)_p \right) = a_\mu \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) (x^\mu) \right)_p = a_\mu \delta_\nu^\mu = a_\nu. \quad (3.3)$$

Más aún, si $\alpha_p \in T_p^*M$, para algún vector tangente $v_p \in T_pM$ expresado en la forma $v_p = v_p(x^\mu) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p$ (como en (2.5)), puede verse que

$$\alpha_p(v_p) = \alpha_p \left(v_p(x^\mu) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p \right) = v_p(x^\mu) (\alpha_p) \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p \right), \quad (3.4)$$

Figura 3.1: El haz cotangente (cotangent bundle) de M

pero de acuerdo a (3.1) $v_p(x^\mu) = dx_p^\mu(v_p)$. Por tanto,

$$\alpha_p(v_p) = \alpha_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p \right) dx_p^\mu(v_p) = \left[\alpha_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p \right) dx_p^\mu \right] (v_p), \quad (3.5)$$

dado que v_p es arbitrario, se concluye que

$$\alpha_p = \alpha_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p \right) dx_p^\mu. \quad (3.6)$$

3.2. Tensores generales y n-formas

Algunos casos especiales de tensores del tipo (r, s) incluyen a T_p^*M , T_pM y n-formas así que es necesario recordar la idea del producto tensorial $V \otimes W$ (donde la dimensión de dichos espacios vectoriales es finita ya que, si fuera de otra forma, deberían considerarse algunos aspectos topológicos).

3.2.1. Álgebra de formas

Observación:

1. La notación $\otimes^r V$ representa el espacio vectorial formado al tomar el producto tensorial de V consigo mismo r -veces. Por conveniencia se incluye el valor de $r = 0$, con el producto en este caso definido como $\mathbb{R}$. Usando esta convención se puede notar que hay un isomorfismo canónico $W \otimes \mathbb{R} \cong W$ para cualquier espacio vectorial real W .
2. Una definición de un tensor de tipo (r, s) en un punto $p \in M$ es como un mapeo multilineal:

$$\otimes^r T_p^* M \times \otimes^s T_p M \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.7)$$

del producto cartesiano de $T_p^* M$ r -veces, y $T_p M$ s -veces, en $\mathbb{R}$ los números reales.

3. Algunos casos especiales de tensores del tipo (r, s) incluyen:

- a) $T_p^{0,1} = T_p^* M$
- b) $T_p^{1,0} = (T_p^* M)^* \cong T_p M$
- c) $T_p^{r,0}$ es llamado el espacio de tensores r -contravariantes.
- d) $T_p^{0,s}$ es llamado el espacio de tensores s -covariantes.

Tanto los campos vectoriales como las 1-formas, son ejemplos de campos tensoriales, una 0-forma se define como una función en C^∞ . Otro campo tensorial son las n -formas (n -form) donde $0 \leq n \leq \dim M$, que definiremos un poco más adelante.

Definición 3.3. Una 1-forma α es una asignación de un vector cotangente α_p a cada punto $p \in M$. Diremos que es diferenciable (suave) si para todo $v \in \chi(M)$ la función $\alpha(v)$ definida por

$$(\alpha(v))(p) := \alpha_p(v_p) \quad (3.8)$$

es diferenciable (de clase C^∞).

La definición formal de una n -forma en general es la siguiente:

Definición 3.4. Sea M una variedad diferenciable. Una forma diferencial de grado n o n -forma (n -form) ω en M es un campo tensorial de tipo $(0, n)$ que es totalmente antisimétrico (*skew-symmetric*) en el sentido de que,

$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) \quad (3.9)$$

con $1 \leq i < j \leq n$, para $v_1, \dots, v_n \in \chi(M)$.

En este sentido $\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = (-1)^{sgn(\pi)} \omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(n)})$ donde $v_1, v_2, \dots, v_n$ son campos vectoriales arbitrarios en M y $sgn(\pi)$ es el grado de la permutación π , es decir; $+1$ si π es par y -1 si π es impar. El conjunto de todas las n -formas en M se denotará $\Omega^n(M)$.

Observación: $\Omega^1(M)$ es un módulo sobre $\mathbb{C}^\infty(M)$ con las operaciones

1. $(\alpha + \beta)_p := \alpha_p + \beta_p$,
2. $(f\alpha)_p := f(p)\alpha_p$,

para $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ y $f \in \mathbb{C}^\infty(M)$. A los elementos de $\Omega^1(M)$ también se les llama formas diferenciales lineales o 1-formas. Así como se dió una expresión para los campos vectoriales en función de una carta, también se puede hacer algo similar para el caso de las 1-formas en M luego, usando la observación anterior y (3.6) se sigue que la 1-forma $\alpha \in \Omega^1(M)$ se expresa como

$$\alpha(p) = \alpha(p) \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p \right) dx_p^\mu = \left[\alpha \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \right) \right] (p) dx^\mu(p) = \left[\alpha \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \right) dx^\mu \right] (p); \quad (3.10)$$

esto es,

$$\alpha = \alpha \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \right) dx^\mu. \quad (3.11)$$

Si denotamos a las funciones de valores reales $\alpha \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \right)$ por α_μ se concluye que cualquier 1-forma se expresa localmente (es decir; en función de las coordenadas de una carta local) en la forma

$$\alpha = \alpha_\mu dx^\mu. \quad (3.12)$$

Definición 3.5. Si $\omega_1 \in \Omega^{n_1}$ y $\omega_2 \in \Omega^{n_2}$, el producto wedge, o producto exterior, de ω_1 y ω_2 es la $n_1 + n_2$ -forma $\omega_1 \wedge \omega_2$ definida por

$$\omega_1 \wedge \omega_2 := \frac{1}{n_1!n_2!} \sum_{\text{Perms}\pi} (-1)^{\text{grad}(\pi)} (\omega_1 \otimes \omega_2)^\pi \quad (3.13)$$

donde, si ω es cualquier campo tensorial de tipo $(0, n)$, el campo tensorial "permutado" ω^π de tipo $(0, n)$ es definido como:

$$\omega^\pi(v_1, v_2, \dots, v_n) := \omega(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \dots, v_{\pi(n)}) \quad (3.14)$$

para todos los campos vectoriales $v_1, v_2, \dots, v_n$ en la variedad M .

Finalmente, al término del capítulo anterior se dió la definición del pull-back sobre campos vectoriales, se puede dar una definición análoga para 1-formas que es la siguiente:

Definición 3.6. Sea $h : M \rightarrow N$ un difeomorfismo. Si w es una 1-forma en N entonces el pull-back de w es la 1-forma h^*w en M definido por

$$(h^*w, v)_p := \langle w, h_*v \rangle_{h(p)} \quad (3.15)$$

para todos los puntos $p \in M$ y todos los vectores tangentes $v \in T_pM$.

3.2.2. Derivada exterior

Definición 3.7. Sea w una n -forma en M , su derivada exterior dw , está dada por:

$$(n+1)dw(v_1, v_2, \dots, v_n) := \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} v_i(w(v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{n+1})) \\ + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} w([v_i, v_j], v_1, \dots, \widehat{v}_i, \widehat{v}_j, \dots, v_{n+1}),$$

para $v_1, \dots, v_{n+1} \in \chi(M)$ donde $\widehat{v}_i$ indica que v_i se omite.

Ejemplos:

1. Para $n = 0$ es decir, si f es una 0-forma en M ,

$$df(v) = vf \quad (3.16)$$

2. Para $n = 1$, o bien, para w una 1-forma en M ,

$$\begin{aligned} 2dw(v_1, v_2) &= \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} v_i(w(v_1, \widehat{v}_i)) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} w([v_i, v_j], v_1, \dots, v_{n+1}) \\ &= (-1)^2 v_1 w(v_2) + (-1)^3 v_2 w(v_1) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} w([v_i, v_j]) \end{aligned}$$

Observe que

$$\sum_{i < j} (-1)^{i+j} w([v_i, v_j]) = w([v_1, v_2]). \quad (3.17)$$

Defínase $v := v_1$, $u := v_2$ así,

$$2dw(v, u) = vw(u) - uw(v) - w([v, u]). \quad (3.18)$$

Capítulo 4

Derivada de Lie

En este capítulo nos centramos en el estudio de la derivada de Lie. Primero se definen los conceptos de grupo uni-paramétrico de transformaciones y flujos, que son necesarios para la definición de derivada de Lie. Luego mostramos la definición formal de derivada de Lie para posteriormente dar la definición de derivada exterior y finalizar con algunos conceptos fundamentales del operador estrella de Hodge y la teoría DeRham.

4.1. Grupos uni-paramétricos de transformaciones y flujos.

Definición 4.1. Sea M una variedad diferenciable. Un grupo uni-paramétrico de transformaciones, φ en M es un mapeo diferenciable de $M \times \mathbb{R}$ en M tal que

$$\varphi(p, 0) = p \tag{4.1}$$

y

$$\varphi(\varphi(p, t), s) = \varphi(p, t + s) \tag{4.2}$$

para todo $p \in M$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Dado un grupo uni-paramétrico de transformaciones φ sobre la variedad M , si definimos $\varphi_t := \varphi(p, t)$, entonces para cada $t \in \mathbb{R}$, φ_t es un mapeo diferencial de M en M y se tiene

que

$$\varphi_{t+s}(p) = \varphi(p, t+s) = \varphi(\varphi(p, t), s) = \varphi(\varphi_t(p), s) = \varphi_s(\varphi_t(p)) = (\varphi_s \circ \varphi_t)(p), \quad (4.3)$$

esto es, $\varphi_{t+s} = \varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \varphi_s$. De lo anterior vemos que φ_0 es el mapeo identidad en M dado que $\varphi_0(p) = \varphi(p, 0) = p$ para todo $p \in M$. Además, $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_0$ donde cada mapeo φ_t tiene un inverso φ_{-t} también diferenciable. Por lo tanto, cada φ_t es un difeomorfismo de M en sí mismo. Entonces el conjunto de transformaciones $\{\varphi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ es un grupo abeliano de difeomorfismos de M en M , y el mapeo $t \rightarrow \varphi_t$ es un homeomorfismo del grupo aditivo de los números reales en el grupo de difeomorfismos de M .

A través de cada punto $p \in M$ pasa la curva $t \rightarrow \sigma_t(p)$.¹ Dado que tal curva pasa a través de cada punto p podemos obtener un campo vectorial en M tomando las tangentes a esta familia de curvas en cada punto como se ve en la Figura (4.1). El campo vectorial resultante v^φ se dice que es inducido por una familia de difeomorfismos y se define como

$$v_p^\varphi(f) := \left. \frac{d}{dt} f(\varphi_t(p)) \right|_{t=0} \quad (4.4)$$

para todos los puntos $p \in M$, $f \in \mathbb{C}^\infty(M)$.

Observación: En la notación de $\varphi_t(p)$ observe que no se trata de una función de p sino de t .

4.1.1. Flujos locales.

Para ir de un campo vectorial a un grupo de difeomorfismos, definimos el concepto de flujo local (local flow). De la definición 4.1 observe que φ puede no estar definido para todo $t \in \mathbb{R}$ y por esta razón no sería un grupo uni-paramétrico de transformaciones. Sin embargo, surge la siguiente definición:

Definición 4.2. Sea v un campo vectorial definido en un subconjunto $U \subset M$. Un flujo local (local flow) de v en p es un grupo uni-paramétrico de difeomorfismos locales definidos en un subconjunto U de M tal que $p \in U \subset M$ y para $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, φ es definido en

¹Note que usamos esta notación sólo para enfatizar que se trata de una curva

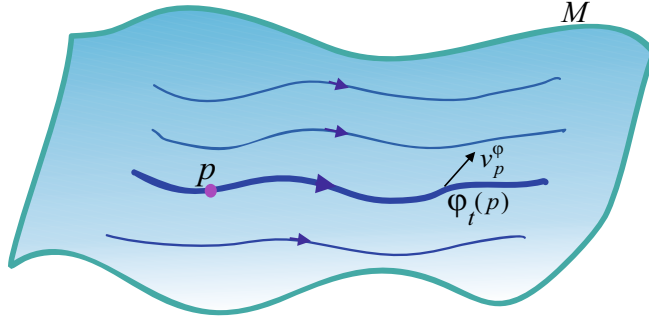


Figura 4.1: Campo vectorial en M tomando las tangentes a la familia φ_t de curvas en cada punto

$U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ y es diferenciable tal que el campo vectorial inducido por esta familia es igual al campo vectorial dado v .

Observación: A v se le suele llamar el generador infinitesimal del flujo φ .

También en la parte anterior hemos hablando de curvas es así que cabe mencionar la siguiente definición:

Definición 4.3. Sea v un campo vectorial en una variedad M y sea p un punto en M . Entonces una curva integral de v que pasa a través del punto p es una curva $t \rightarrow \sigma(t)$ en M tal que

$$\sigma(0) = p \quad (4.5)$$

$$\sigma'_t = v_{\sigma(t)} \quad (4.6)$$

para todo t en algún intervalo abierto $(-\varepsilon, \varepsilon)$ de $\mathbb{R}$ usando la notación de la ecuación (2.6).

De la definición anterior se puede ver que los valores para t están en un intervalo finito de $\mathbb{R}$, sin embargo, en algunas variedades este intervalo se puede extender a todo $\mathbb{R}$. Veamos la siguiente definición:

Definición 4.4. Un campo vectorial v en una variedad M es completo si, para cada punto p en M , la curva integral que pasa a través de p se puede extender a una curva integral para v que está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Observación: Si M es una variedad compacta entonces cualquier campo vectorial v es completo.

4.2. Derivada de Lie de funciones, de campos vectoriales y de 1-Formas.

Sea φ un grupo uni-paramétrico o un flujo en M . Como se dijo anteriormente, el mapeo $\varphi_t : M \rightarrow M$ definido por $\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$ es un mapeo diferenciable.

Para $f \in \mathbb{C}^\infty(M)$, defínase el pullback de f como $\varphi_t^* f := f \circ \varphi_t$ que también pertenece a $\mathbb{C}^\infty(M)$; el límite $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^* f - f}{t}$ representa el cambio de una función f bajo una familia de transformaciones φ_t .

Si v es el generador infinitesimal de φ , la curva φ_t dada por $\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$ es la curva integral de v que inicia en x y por lo tanto,

$$\left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^* f - f}{t} \right) (x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_t(x)) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\varphi(x, t)) - f(x)}{t} \quad (4.7)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_t(t)) - f(\varphi_t(0))}{t} = (\varphi_t)'_0(f) = v_x(f) = (vf)(x) \quad (4.8)$$

lo cual muestra que para cualquier función diferenciable, el límite $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^* f - f}{t}$ existe y depende de φ sólo a través de su generador infinitesimal.

Definición 4.5. Sea $f \in \mathbb{C}^\infty(M)$ y v el generador del grupo uni-paramétrico φ_t , el $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^* f - f}{t}$ es llamado la derivada de Lie de f con respecto a v y se denota por $\mathcal{L}_v f$ o algunas veces como $L_v f$.

De la expresión, $\mathcal{L}_v f = vf$ se pueden obtener las propiedades de la derivada de Lie en funciones es decir; el mapeo $f \rightarrow vf$ tiene las siguientes propiedades con respecto al anillo $\mathbb{C}^\infty(M)$:

1. $v(f + g) = vf + vg$ para todo $f, g \in \mathbb{C}^\infty(M)$
2. $v(rf) = rvf$ para todo $f \in \mathbb{C}^\infty(M)$, $r \in \mathbb{R}$
3. $v(fg) = fvg + gv f$ para todo $f, g \in \mathbb{C}^\infty(M)$.

Se ha dado una definición de la derivada de Lie para una función f en $\mathbb{C}^\infty$ a continuación se enuncia la definición para la derivada de Lie de un campo vectorial w en M .

Definición 4.6. Sea φ un grupo uni-paramétrico de transformaciones o un flujo en M y sea v su generador infinitesimal. Para cualquier campo vectorial w en M , el límite $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^* w - w}{t}$, si existe es llamado la derivada de Lie de w con respecto a v y es denotado por $\mathcal{L}_v w$.

La derivada de Lie de un campo vectorial nos es útil por la siguiente propiedad.

Proposición 4.1. Sean v, w campos vectoriales en M ; entonces la derivada de Lie de w con respecto a v existe y es igual al corchete de Lie (Lie bracket) de v y w ², es decir;

$$\mathcal{L}_v w = [v, w]. \quad (4.9)$$

Observación:

1. $\mathcal{L}_v w$ es una relación de cómo el campo vectorial w cambia a medida que se desplaza a lo largo de las curvas integrales de v .
2. La derivada de Lie frecuentemente aparece en conexión con las simetrías. Se dice que el campo vectorial w en M es invariante bajo el grupo uni-paramétrico de difeomorfismos φ_t si $\mathcal{L}_v w = 0$ donde v es el generador infinitesimal de φ_t .

Finalmente se enuncia la definición para la derivada de Lie de una 1-forma:

Definición 4.7. La derivada de Lie $\mathcal{L}_v w$ de una 1-forma ω con respecto a un campo vectorial v se define como el cambio de velocidad de ω a lo largo de las líneas de flujo del grupo uni-paramétrico φ_t de difeomorfismos locales asociados a v :

$$\mathcal{L}_v w := \left(\frac{d}{dt} \varphi_t^* w \right) \Big|_{t=0}. \quad (4.10)$$

² $[v, w](f) := v(wf) - w(vf)$ para $f \in \mathbb{C}^\infty(M)$

4.3. Derivada exterior

Definición 4.8. La derivada exterior de una función $f \in \mathbb{C}^\infty(M)$ es la uno-forma df definida por

$$\langle df, v \rangle := vf = \mathcal{L}_v f \quad (4.11)$$

para todos los campos vectoriales v en M . En coordenadas locales :

$$(df)_p = \sum_{\mu=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p f (dx^\mu)_p. \quad (4.12)$$

En donde x^μ son las mismas de la ecuación (3.11) para describir a una 1-forma en una base.

Observación: Si $h : M \rightarrow N$ entonces $h^*(df) = d(f \circ h)$ para todo $f \in \mathbb{C}^\infty(N)$ es decir, la diferenciación exterior conmuta con la operación pull-back. Más aún, si $h : M \rightarrow N$ y ω es una n -forma en N entonces

$$d(h^*\omega) = h^*(d\omega) \quad (4.13)$$

4.4. Operador estrella de Hodge (The Hodge star operator)

El operador estrella de Hodge es la clave para entender la dualidad simétrica de las ecuaciones de Maxwell en el vacío; esta simetría es la razón del por qué el segundo par de las ecuaciones de Maxwell luce tan similar al primero. Esto se verá más adelante así que por ahora, sólo se estudiará el operador estrella de Hodge que nos servirá para escribir el segundo par de las ecuaciones de Maxwell en términos de formas diferenciales.

La $*$ -operación de Hodge es un mapeo que convierte p -formas en $(n - p)$ -formas, donde n es la dimensión de la variedad. Se define un conjunto base e^j con un producto interno en T_x^*M y se dice ortonormal si su producto interno satisface $\langle e^j, e^k \rangle = \epsilon(j)\delta^{jk}$, donde $\epsilon(j) = \pm 1$. Se define $*(e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_p}) \equiv \pm e^{j_{p+1}} \wedge \cdots \wedge e^{j_n}$, donde $j_{p+1}, \dots, j_n$ son los enteros de

la lista $1, \dots, n$ (en orden) que no están en la lista $j_1, \dots, j_p$ y donde el signo es determinado por la paridad de la permutación tomando $1, \dots, n$ a $j_1, \dots, j_n$.

4.5. Teoría DeRham

4.5.1. 1-formas exactas y cerradas

Una de las más importante aplicaciones matemáticas de formas diferenciales proviene de la observación que si el operador exterior d es dos veces aplicado a cualquier n -forma entonces la resultante $(n+2)$ -forma $d(d(w))$ es idénticamente cero. Este resultado usualmente es escrito como

$$d^2 = 0 \tag{4.14}$$

y es de gran significado por ejemplo, en el cálculo vectorial estándar.

Para nosotros será importante saber que, si ω es una forma en una variedad M que satisface la ecuación $d\omega = 0$, el pull-back de ω bajo cualquier difeomorfismo de M también satisface esta ecuación. Veremos más adelante que el primer par de ecuaciones de Maxwell puede escribirse en términos de una derivada exterior de una dos forma ($F = B + E \wedge dt$), dado que un difeomorfismo puede ser visto como un cambio de coordenadas, esto significa que dichas ecuaciones son invariantes, no sólo bajo transformaciones de Lorentz, rotaciones, y traslaciones, sino bajo todas las transformaciones de coordenadas.

Si ahora tratamos de resolver estas ecuaciones, encontraríamos muchas soluciones porque $d^2 = 0$. Si F es el operador exterior aplicado a alguna forma, algo, se satisface automáticamente $dF = 0$ y similarmente para E y para B . La pregunta sería ver si se pueden obtener todas las soluciones para el primer par de las ecuaciones de Maxwell de la misma forma. La rama de las matemáticas que resuelve un poco esta cuestión es llamada cohomología de Rham (deRham cohomology). Primero introduciremos un poco de términos estándar.

Definición 4.9. 1. Una n -forma ω es cerrada si $d\omega = 0$. El conjunto de todas las n -formas cerradas es denotado $Z^n(M)$. Una n -forma cerrada también se dice que es un n -cocycle para la cohomología DeRham.

2. Una n -forma ω es exacta si existe alguna $(n-1)$ -forma β tal que $d\beta = \omega$. El conjunto de n -formas exactas es denotado $B^n(M)$. Una n -forma exacta también se dice un n -coboundary para la cohomología DeRham.

Observación: La ecuación $d^2 = 0$ nos dice que todas las formas exactas son cerradas. Si el campo eléctrico E es d de alguna función en el espacio, automáticamente tenemos que $dE = 0$. En física se llama a una función (o 0-forma) ϕ con

$$E = -d\phi \quad (4.15)$$

un potencial escalar para E ; el signo menos es sólo una convención. Similarmente, si el campo magnético B es d de alguna 1-forma en el espacio, tenemos que $dB = 0$. Se llama a una 1-forma A con

$$B = dA \quad (4.16)$$

un vector potencial para B . También, si el campo electromagnético F satisface

$$F = dA \quad (4.17)$$

para alguna 1-forma A en el espacio tiempo, automáticamente $dF = 0$, y llamamos a A un vector potencial para F .

Ahora veremos cuándo una 1-forma cerrada es exacta. Si tenemos una variedad M con una 1-forma E en ella que satisface $dE = 0$, la pregunta es cómo obtener una función ϕ en M tal que $E = -d\phi$. La ecuación $dE = 0$ se resuelve si asumimos que M es conexo. Podemos decir que en una variedad simplemente conexa, toda 1-forma cerrada es exacta. En el caso de E y F como habíamos considerado al inicio, de acuerdo a lo visto, siempre podemos encontrar un potencial escalar para el campo eléctrico. Para 2-formas, esto nos permite entender cuándo podemos encontrar un vector potencial para el campo magnético o el campo electromagnético en caso de necesitarse más detalles sobre estas últimas afirmaciones puede consultarse en el texto de John Baez incluido en las referencias.

Capítulo 5

Simetrías

A lo largo de este capítulo, se discuten ideas fundamentales sobre simetría y por ende de grupos, para ser más precisos, algunos ejemplos de grupos de lie y sus álgebras. También incluimos ideas abordadas para el estudio de las representaciones de grupos.

5.1. Grupos de Lie y representaciones

En esta sección se hace una breve revisión de conceptos básico de teoría de grupos.

Definición 5.1. 1. Un monoide es un semigrupo $(G, *)$ con elemento neutro.

2. Dado $(G, *)$ un monoide, $(G, *)$ es un grupo si para cada $g \in G$, g es invertible es decir, posee un elemento inverso en G . Para el inverso de g se usa la notación g^{-1} .

3. A un grupo en general se le denotará $(G, *, e)$. Si además, se tiene que

$$\forall g_1, g_2 \in G, \quad g_1 * g_2 = g_2 * g_1 \tag{5.1}$$

diremos que el grupo es conmutativo o abeliano.

Ejemplos:

1. $(\mathbb{R}, +, 0)$ es un grupo.
2. $(\mathbb{C}, +, 0)$ es un grupo.

Definición 5.2. Sea $\emptyset \neq S \subseteq G$, con G un grupo, decimos que S es un subgrupo de G si con la operación definida en G , tenemos que S es un grupo y se denotará $S \leq G$.

Definición 5.3. 1. Sean $(G, *, e)$, $(G', \cdot, e')$ grupos. Una función $f : G \rightarrow G'$ es llamada morfismo de grupos (homomorfismo) si:

$$f(a * b) = f(a) \cdot f(b) \quad (5.2)$$

para $a, b \in G$.

2. Un homomorfismo de grupo $f : G \rightarrow G'$ se dice que es un isomorfismo si y sólo si f es una biyección.

En este caso diremos que los grupos G y G' son isomorfos y lo denotaremos por $G \approx G'$.

A continuación se da la definición de un grupo de Lie.

Definición 5.4. Un grupo real de Lie G es un conjunto que es un grupo en el sentido algebraico usual y una variedad diferenciable con las propiedades de que el producto de dos elementos del grupo, y la inversa de un elemento del grupo, son operaciones suaves. Específicamente, los mapeos:

$$\mu : G \times G \rightarrow G \quad (5.3)$$

$$(g_1, g_2) \rightarrow g_1 g_2$$

y

$$\iota : G \rightarrow G \quad (5.4)$$

$$g \rightarrow g^{-1}$$

ambas son C^∞ .

Ejemplos:

1. Cuando dotamos a $\mathbb{R}^n$ con su estructura natural diferenciable, el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es un grupo de Lie (abeliano) n -dimensional.

2. El círculo $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ puede ser dotado con la estructura de un grupo de Lie real unidimensional empleando la estructura diferencial usual, y definiendo la operación multiplicación del grupo como la multiplicación de los números complejos. Este grupo es denotado usualmente $U(1)$ y pertenece a una serie $U(n)$, $n = 1, 2, \dots$ de grupos de Lie. Como espacio topológico, $U(1)$ es compacto.

La teoría de grupos o de grupos de Lie nos da una forma extremadamente poderosa de entender y clasificar simetrías, y por lo tanto de cargas conservadas. Muchos de los grupos útiles en física son grupos matrices, esto es, conjuntos de matrices cerrados bajo la multiplicación e inversa de matrices y que contienen una matriz identidad. Ver figura (5.1). Algunos de ellos son los siguientes:

1. Dado un espacio vectorial V , $L(V)$ denota su conjunto de operadores lineales así, se define $GL(V)$ el grupo lineal general del espacio vectorial V como el subconjunto de todos los operadores lineales invertibles de V . Observe que $GL(V)$ es un grupo.
2. Sean V un espacio vectorial de dimensión n y C un campo escalar. Si se elige una base para V entonces para cada $T \in GL(V)$ se obtiene una matriz invertible $[T] \in M_n(C)$. Así como $GL(V)$ forma un grupo, también lo hacen las correspondientes matrices invertibles denotadas por $M_n(C)$, este grupo se denota como $GL(n, C)$. Cuando $C = \mathbb{R}$ se obtiene $GL(n, \mathbb{R})$ el grupo lineal general real en n dimensiones y cuando $C = \mathbb{C}$ se obtiene $GL(n, \mathbb{C})$ el grupo lineal general complejo en n dimensiones.

Así como $GL(n, \mathbb{R})$ y $GL(n, \mathbb{C})$ son grupos frecuentes en física, éstos tienen muchos subgrupos importantes que en sí mismos son grupos. Por ejemplo, el grupo especial lineal es el conjunto de matrices con determinante 1; se denota $SL(n, \mathbb{R})$ a las matrices reales de dimensión $n \times n$ con determinante 1 y $SL(n, \mathbb{C})$ son las matrices de dimensión $n \times n$ complejas con determinante 1. A $SL(n, \mathbb{R})$ se le puede pensar como el grupo de todas las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^n$ que preservan el volumen.

Además de considerar grupo de transformaciones lineales que preservan volumen, se puede pensar en grupos que preservan distancias y ángulos es decir, la métrica. Si p y q son

enteros positivos con $p + q = n$, sea g una métrica en $\mathbb{R}^n$ de signatura (p, q) por ejemplo:

$$g(v, w) = v^1 w^1 + \dots + v^p w^p - v^{p+1} w^{p+1} - \dots - v^{p+q} w^{p+q}. \quad (5.5)$$

Definimos el grupo ortogonal $O(p, q)$ al conjunto de matrices reales A que preservan g es decir;

$$g(Av, Aw) = g(v, w) \quad (5.6)$$

para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$.

El grupo especial ortogonal $SO(p, q)$ es el conjunto de matrices en $O(p, q)$ que además tiene determinante 1.

Observación:

1. Si $p = n$, g es la métrica euclidiana y se denota a estos grupos simplemente como $O(n)$ y $SO(n)$.
2. $SO(3)$ denota al grupo de todas las rotaciones en el espacio euclidiano 3-dimensional. El grupo $SO(3, 1)$ para $\mathcal{M}$, el espacio de Minkowski es similar a $SO(3)$ en el espacio euclidiano. A $SO(3, 1)$ se le llama grupo de Lorentz.

Los grupos ortogonales tienen análogos complejos. El más importante es $U(n)$ el grupo unitario, consiste de todas las matrices complejas unitarias de dimensión $n \times n$ es decir; aquellas que preservan el producto interior usual en $\mathbb{C}^n$ dado por

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{v^i} w^i. \quad (5.7)$$

Finalmente, $SU(n)$ es el grupo especial unitario y denota el subgrupo de $U(n)$ consistente de matrices con determinante 1.

Observe que una matriz 1×1 en $\mathbb{C}$ es un número y puede ser tratada como un escalar sin embargo, al considerarle una matriz cuadrada de orden uno, el valor del determinante es igual al único término de la matriz es decir; $\det A = \det [a_{11}] = a_{11}$. Así,

$$U(1) = e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}. \quad (5.8)$$

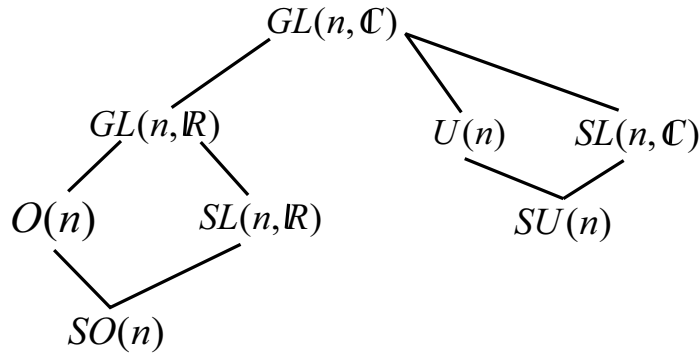


Figura 5.1: Grupos matriz

En física, un elemento de $U(1)$ es llamado una fase (phase). Observe que $U(1)$ es un grupo abeliano cuya operación binaria es la de la multiplicación en $\mathbb{C}$. Además, $U(1)$ es isomorfo a $SO(2)$ y el isomorfismo está dado por:

$$\rho(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

5.2. Representaciones de grupos

En esta sección se introducen conceptos de representaciones de grupos en general. Si no se especifica lo contrario, G siempre será un grupo finito con elemento neutro e y V un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de dimensión finita.

Definición 5.5. Sea G un grupo, y V un espacio vectorial. Una función $\rho : G \rightarrow GL(V)$ es una representación de G en V si

$$\rho(e) = I, \quad (5.10)$$

y

$$\rho(gh)v = \rho(g)\rho(h)v \quad \forall g, h \in G \quad y \quad \forall v \in V. \quad (5.11)$$

También se dice que el grupo G actúa sobre V .

Observación:

1. V es llamado el espacio representación y su dimensión es llamada la dimensión o grado de la representación.
2. Una representación de G en V es un homeomorfismo $\rho : G \rightarrow GL(V)$ así, cuando G es un grupo de Lie, se considera V de dimensión finita y ρ es un mapeo suave entre variedades así, se pueden emplear herramientas de geometría diferencial.

Definición 5.6. Una representación es llamada fiel (faithful) si $\rho : G \rightarrow GL(V)$ es un isomorfismo.

En la Física, diferentes grupos de Lie llevan a diferentes ecuaciones llamadas ecuaciones de Yang-Mills las cuales describen varias fuerzas en el modelo estándar. A dicho grupo se le llama grupo de simetría o grupo de norma de la fuerza en cuestión. El electromagnetismo tiene a $U(1)$ como su grupo de norma es decir, las ecuaciones de Yang-Mills con grupo de norma $U(1)$ son las ecuaciones de Maxwell; ya que $U(1)$ es abeliano, las ecuaciones de Yang-Mills son lineales. La relación con lo anterior no se ve directamente por ello a continuación definimos lo que llamamos representaciones equivalentes:

Definición 5.7. Dadas dos representaciones $\rho : G \rightarrow GL(V)$ y $\rho' : G \rightarrow GL(V)$ decimos que son equivalentes si existe un mapeo lineal biyectivo $T : V \rightarrow V$ tal que $\rho(g)T = T\rho'(g)$ para todo $g \in G$.

Observación: Dada una representación matricial para $GL(V)$ por medio de la traza se puede determinar la equivalencia de representaciones.

Definición 5.8. 1. Sea ρ una representación para el grupo G en el espacio vectorial V .

Si V_1 es un subespacio vectorial de V , se dice que V_1 es invariante con respecto a ρ si para $v \in V_1$ y para todo $g \in G$, $\rho(g)v \in V_1$.

2. Una representación $\rho : G \rightarrow GL(V)$ es irreducible si no existe ningún subespacio invariante no trivial en V con respecto a ρ . En caso contrario, la representación es reducible.

Observación:

1. Una representación ρ de un grupo G en un espacio vectorial V siempre tiene a los subespacios $\{0\}$ y V como subespacios invariantes a los cuales se les dice triviales.
2. Si G es compacto, cada representación de G es equivalente a una suma directa de representaciones irreducibles. Recordemos que una variedad es compacta si y sólo si toda sucesión en G tiene una subsucesión convergente.
3. Los grupos de norma que aparecen en física usualmente son compactos con excepción del de relatividad general.

Anteriormente se dijo sobre una posible relación entre la representación de grupos y la traza de una matriz lo cual se formaliza a continuación:

Definición 5.9. Sea $\rho : G \rightarrow GL(V)$ una representación, entonces el carácter de ρ es la función $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$ dada por: $\chi(g) = \text{tr}\rho(g)$.¹

Observación: Las representaciones equivalentes tienen los mismos caracteres.

Definición 5.10. Sea G un grupo y sea ρ una representación de G en V y ρ' una representación de G en V' . Sea $\rho \oplus \rho'$ la suma directa de las representaciones ρ y ρ' , la representación de G en la suma directa $V \oplus V'$ está dada por:

$$(\rho \oplus \rho')(g)(v, v') := \left(\rho(g)v, \rho'(g)v' \right) \quad (5.12)$$

para todo $v \in V, v' \in V'$.

Observación: La suma directa $V \oplus V'$ es el espacio de las parejas (v, v') con $v \in V, v' \in V'$.²

¹ χ asigna a cada $g \in G$ a la traza (suma de los elementos diagonales) de la matriz asociada a ρ .

²La suma directa $V \oplus V'$ es la usual para espacios vectoriales salvo la descomposición trivial $V = 0 \oplus V$

Un resultado importante sobre representaciones es el siguiente conocido como lema de Schur.

Teorema 5.1. *Si $\rho : G \rightarrow GL(V)$ es una representación irreducible entonces cualquier operador lineal $T : V \rightarrow V$ que conmuta con todos los operadores $\rho(g)$ debe ser un múltiplo escalar del operador identidad.*

Observación: Si G es abeliano, cualquier $\rho(g)$ conmuta con todos los demás así, ρ es una representación irreducible de G y todos los operadores $\rho(g)$ son múltiplos de la identidad. La observación anterior implica que cada subespacio de V es invariante así, la única manera en que ρ sea irreducible es que sea unidimensional. Es decir, cada representación irreducible de un grupo abeliano es unidimensional.

Como se dijo anteriormente, $U(1)$ es el círculo unitario en el plano complejo con la multiplicación como operación de grupo. Note que para cualquier entero n , $U(1)$ tiene una representación ρ_n en $\mathbb{C}$ dada por

$$\rho_n(e^{i\theta})v = e^{in\theta}v. \quad (5.13)$$

Además, las representaciones ρ_n son irreducibles dado que el espacio vectorial $\mathbb{C}$ no tiene otros subespacios que $\{0\}$ y él mismo.

Cualquier representación irreducible de $U(1)$ (en un espacio vectorial complejo) es equivalente a una de estas representaciones ρ_n es decir; cualquier representación compleja uni-dimensional de $U(1)$ es equivalente a una de las representaciones ρ_n . Entonces cualquier representación irreducible de $U(1)$ es equivalente a una de las representaciones ρ_n . Dado que $U(1)$ es compacto, esto quiere decir que todas las representaciones de dimensión finita en $U(1)$ pueden ser vistas como sumas directas de las representaciones ρ_n . Anteriormente se mencionó que el grupo $U(1)$ es el grupo de norma para el electromagnetismo. Si observamos que la carga eléctrica de cualquier partícula es un múltiplo de una cierta unidad de carga q . Entonces una partícula con carga igual a nq se transforma de acuerdo a la representación ρ_n de $U(1)$.

5.3. El álgebra de Lie de un grupo de Lie

En esta sección se mostrará cómo es que cada grupo de Lie posee un álgebra de Lie asociada la cuál refleja las propiedades de dicho grupo.

Definición 5.11. *Un álgebra de Lie L sobre un campo K , es un espacio vectorial L definido sobre el campo K con un mapeo $L \times L \rightarrow L$, usualmente denotado por $[\cdot, \cdot]$ que satisface las siguientes condiciones:*

1. *es bilineal:*

$$[u, av + bw] = a[u, v] + b[u, w], \quad (5.14)$$

$$[au + bv, w] = a[u, w] + b[v, w], \quad (5.15)$$

para $u, v, w \in L$, $a, b \in K$,

2. *es antisimétrico:*

Para todo $u, v \in L$

$$[u, v] = -[v, u], \quad (5.16)$$

3. *satisface la identidad de Jacobi:*

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0, \quad (5.17)$$

para $u, v, w \in L$.

4. *Un álgebra de Lie es abeliana si $[u, v] = 0$ para $u, v \in L$.*

Definición 5.12. *Sea G un grupo de Lie. Para $g \in G$, l_g denota el mapeo de G en G definido por*

$$l_g : G \rightarrow G \quad (5.18)$$

$$g' = gg'$$

para $g' \in G$ es decir; es un difeomorfismo de G en G etiquetado por el elemento $g \in G$ (algunas veces es llamado traslación izquierda por g (left traslation)). Similarmente, r_g

denota el mapeo de G en G definido por

$$r_g : G \rightarrow G \quad (5.19)$$

$$g' = g'g$$

para $g' \in G$ es decir; es un difeomorfismo de G en G etiquetado por el elemento $g \in G$ (algunas veces es llamado *traslación derecha* por g (*right traslation*))

La propiedad crucial de un grupo de Lie que permite que el álgebra incluya muchas de las propiedades del grupo es la existencia de las traslaciones derechas o izquierdas de G en sí mismo que pueden ser empleadas como mapeos locales de la variedad en sí misma; veremos que estos mapeos pueden relacionarse al espacio tangente a G en el elemento identidad e . Es así que cabe recordar que podemos hablar de un grupo de Lie G en el sentido algebraico y también se puede hacer desde el punto de vista geométrico, visto como una variedad.

La definición clave para un álgebra de Lie es la siguiente:

Definición 5.13. 1. Sea v un campo vectorial en G un grupo de Lie. Decimos que v es *izquierdo-invariante* (*left-invariant*) si es l_g -relacionado a sí mismo para todo $g \in G$ es decir;

$$l_{g*}v = v \text{ para todo } g \in G \quad (5.20)$$

o equivalentemente,

$$l_{g*}(v_{g'}) = v_{gg'} \text{ para todo } g, g' \in G. \quad (5.21)$$

2. Similarmente, v es *derecho-invariante* (*right-invariant*) si es r_g -relacionado a sí mismo para todo $g \in G$ es decir;

$$r_{g*}v = v \text{ para todo } g \in G \quad (5.22)$$

o equivalentemente,

$$r_{g*}(v_{g'}) = v_{g'g} \text{ para todo } g, g' \in G. \quad (5.23)$$

Observación: El conjunto de todos los campos vectoriales izquierdo-invariantes (left-invariants) en un grupo de Lie G se denota $L(G)$ y es un espacio vectorial real.

Definición 5.14. Al álgebra de Lie de G se le denota $\mathfrak{g}$ y es el álgebra de Lie de los campos vectoriales izquierdo-invariantes (left-invariants) en G .

El siguiente teorema nos permite conocer la dimensión del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Teorema 5.2. Existe un isomorfismo de $L(G)$, pensado como espacio vectorial, con el espacio tangente $T_e G$ donde e es el elemento identidad de G .

De lo anterior se obtiene lo siguiente:

Observación:

1. La dimensión del espacio vectorial $L(G)$ es igual a $\dim T_e G = \dim G$. Dado que se asumió que G es una variedad de dimensión finita se tiene que $L(G)$ es de dimensión finita.
2. A $\mathfrak{g}$ se le puede pensar como el espacio tangente a G en el elemento identidad e o como el espacio vectorial de los campos vectoriales izquierdo-invariantes en G .

Teorema 5.3. Sea $f : G \rightarrow H$ un isomorfismo entre los grupos de Lie G y H . Entonces el mapeo $f_x : T_x G \rightarrow T_x H$ es un isomorfismo entre las álgebras de Lie de los grupos.

Anteriormente, en el capítulo 3 se mencionó sobre campos vectoriales completos, ahora podemos mencionar el siguiente resultado:

Teorema 5.4. Si v es un campo vectorial izquierdo-invariante en un grupo de Lie G , entonces v es completo (ver definición (4.4)).

Observación: A los elementos de un álgebra de Lie se les puede pensar como vectores tangentes a curvas que inician en e elemento identidad de G .

Definición 5.15. El mapeo exponencial

$$\exp : T_e G \rightarrow G \tag{5.24}$$

se define por:

$$\exp X := \exp tX \big|_{t=1} \quad (5.25)$$

es decir;

$$\exp X = \varphi(e, 1). \quad (5.26)$$

Observación:

1.

$$\exp tX = \varphi(e, t) \quad (5.27)$$

$$\exp (s + t)X = (\exp sX)(\exp tX) \quad (5.28)$$

$s, t \in \mathbb{R}$ (ver ecuaciones (4.1) y (4.2)).

2.

$$\exp (X + Y) = (\exp X)(\exp Y) \text{ si } [X, Y] = 0. \quad (5.29)$$

3. $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ no siempre es inyectiva o sobreyectiva.

De las propiedades de la función $\exp$ se puede llegar a lo siguiente: Dada una matriz arbitraria A de $n \times n$,

$$\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}. \quad (5.30)$$

Capítulo 6

Haces y conexiones

En este capítulo nos centramos en el estudio de los haces y conexiones. Primero damos algunas definiciones y propiedades referentes a un haz en general y a una sección. Luego mostramos una construcción para un tipo de haz especial, un G -haz. Posteriormente damos la definición de una transformación de norma para después hablar de conexiones. Además, exhibimos la noción de potencial vectorial. Para finalizar, vemos cómo actúa una transformación de norma para las conexiones en el caso concreto del electromagnetismo. Cabe mencionar que la mayor parte de las ideas y definiciones expuestas en este capítulo han sido tomadas en el texto de John Baez y Javier Muniain.

- Definición 6.1.*
1. *Un haz (bundle) es una estructura consistente de dos variedades diferenciales, M y E , y un mapeo suprayectivo $\pi : E \rightarrow M$ es decir, es la tripleta (E, π, M) . Ver figura (6.1)*
 2. *La variedad E es llamada haz espacio (bundle space) o espacio total del haz. M es el espacio base del haz; el mapeo π es la proyección.*
 3. *Para cada punto $p \in M$, el espacio $E_p := \{q \in E : \pi(q) = p\}$ es llamado la fibra (fiber) sobre p . En algunos casos también se denota por $\pi^{-1}(\{p\})$.*

La definición anterior de un haz es muy general. Sin embargo, en todas las aplicaciones existentes en física (y para la mayoría de los usos en matemáticas) los haces que surgen tienen la propiedad especial de que las fibras E_p son todas homeomorfas (difeomórficas,

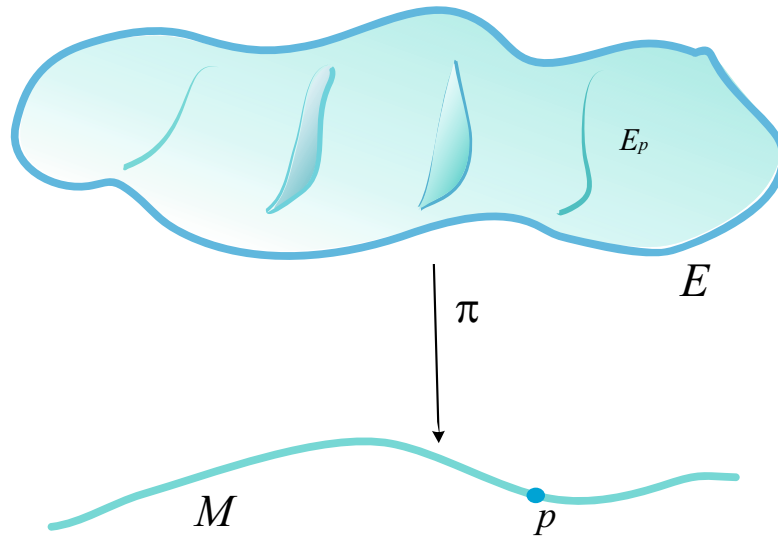


Figura 6.1: Idea general de un haz (bundle) (E, π, M) .

en el caso de la variedad) a un espacio común F . En este caso, a F se le conoce como la fibra del haz, y se dice que el haz es un haz fibrado.

Definición 6.2. Sea (E, π, M) un haz con fibra F diremos que (E, π, M) es un haz fibrado y lo denotaremos por (E, π, M) o en algunos casos sólo como E .

En los casos de interés para nosotros consideraremos haces fibrados.

Observación:

1. No hay pérdida de generalidad en suponer que $\pi : E \rightarrow M$ es sobreyectivo ya que en caso de no serlo, basta con considerar al haz sobre la imagen $\pi(E) \subset M$.
2. Note que el espacio total E es la unión de todas las fibras: $E = \bigcup_{p \in M} E_p$.

Definición 6.3. Un morfismo entre un par de haces (E, π, M) y (E', π', M') es un par de mapeos (u, f) donde $u : E \rightarrow E'$ y $f : M \rightarrow M'$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & E' \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array}$$

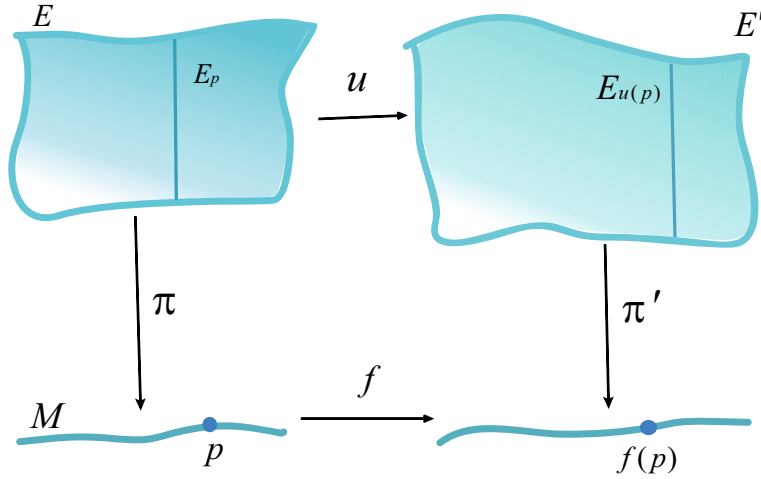


Figura 6.2: Morfismo de haces (Haces isomorfos).

es decir;

$$\pi' \circ u = f \circ \pi. \quad (6.1)$$

Ver figura (6.2)

Observación:

1. La ecuación (6.1) implica que para todo $p \in M$, $u(\pi^{-1}(\{p\})) \subset (\pi')^{-1}(\{f(p)\})$ es decir; el par de mapeos (u, f) mapea fibras de E en fibras de E' .
2. Dado que π es sobreyectivo, el mapeo f esta unívocamente determinado por el mapeo u .

Definición 6.4. Sean M y F variedades, el haz trivial (trivial bundle) sobre M con fibra estándar F es el producto cartesiano $E = M \times F$, con el mapeo proyección dado por $\pi(p, f) = p$ para todo $(p, f) \in M \times F$.

Definición 6.5. 1. Sean (E, π, M) un haz y $S \subseteq M$ una subvariedad, se define su restricción a S como sigue: $E|_S := \{q \in E : \pi(q) \in S\}$, tomando a S como el espacio base y usando π (restringida a $E|_S$) como la proyección. Ver figura (6.3)

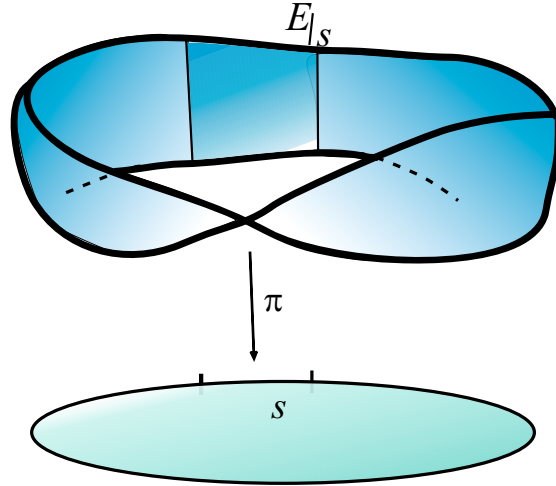


Figura 6.3: Función reestricción.

2. En general decimos que un haz (E, π, M) es trivial localmente con fibra estándar F si para cada punto $p \in M$, existe una vecindad U de p y un isomorfismo de haces $\phi : E|_U \rightarrow U \times F$ enviando cada fibra E_p a la fibra $p \times F$. Llamaremos a ϕ una trivialización local.

6.1. Haz vectorial (vector bundle)

Definición 6.6. Un haz vectorial real n -dimensional (E, π, M) es un haz fibrado en el cual cada una de sus fibras E_p posee una estructura de un espacio vectorial n -dimensional. Mas aún, para cada $p \in M$ existe alguna vecindad $U \subset M$ de p y una trivialización local $h : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ tal que, para toda $y \in U$, el mapeo $h : y \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(\{y\})$ es lineal. Esto es, que la trivialización para la fibra sea lineal.

Observación: Similarmente se puede definir un haz vectorial complejo tomando a $\mathbb{C}$ en lugar de $\mathbb{R}^n$ en la definición anterior.

Definición 6.7. Una sección (section) de un haz (E, π, M) es un mapeo $s : M \rightarrow E$ tal que

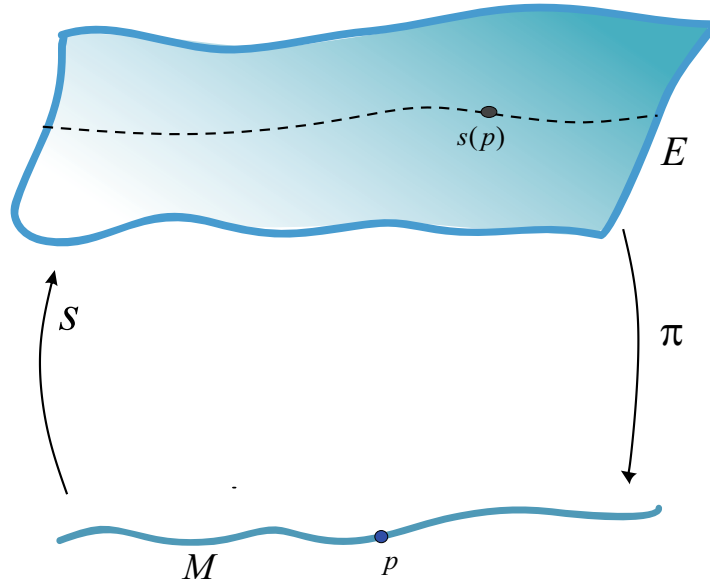


Figura 6.4: Sección.

la imagen de cada punto $p \in M$ pertenece a la fibra $\pi^{-1}(\{p\})$ sobre p . Mas precisamente, $\pi \circ s = id_M$. Ver figura (6.4)

En otras palabras, la sección asigna a cada punto en el espacio base un vector en la fibra sobre ese punto.

Observación:

1. Note que si $E = M \times F$ es un haz trivial con fibra estándar F y si tenemos una sección $s : M \rightarrow E$, existe una función $f : M \rightarrow F$ tal que $s(p) = (p, f(p)) \in E_p$ para todo $p \in M$.
2. Una sección del haz tangente es un campo vectorial.

Definición 6.8. El espacio $\Gamma(E)$ de todas las secciones de un haz vectorial (E, π, M) está equipado con una estructura natural de modulo sobre el anillo $C(M)$ de funciones de valores reales continuas en M , definido por:

1. $(s_1 + s_2)(x) := s_1(x) + s_2(x)$ para todo $x \in M$; $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$
2. $(fs)(x) := f(x)s(x)$ para todo $x \in M$; $f \in C(M)$, $s \in \Gamma(E)$.

En particular, $\Gamma(E)$ tiene la estructura de un espacio vectorial real en el cual los números reales son representados por funciones constantes en M .

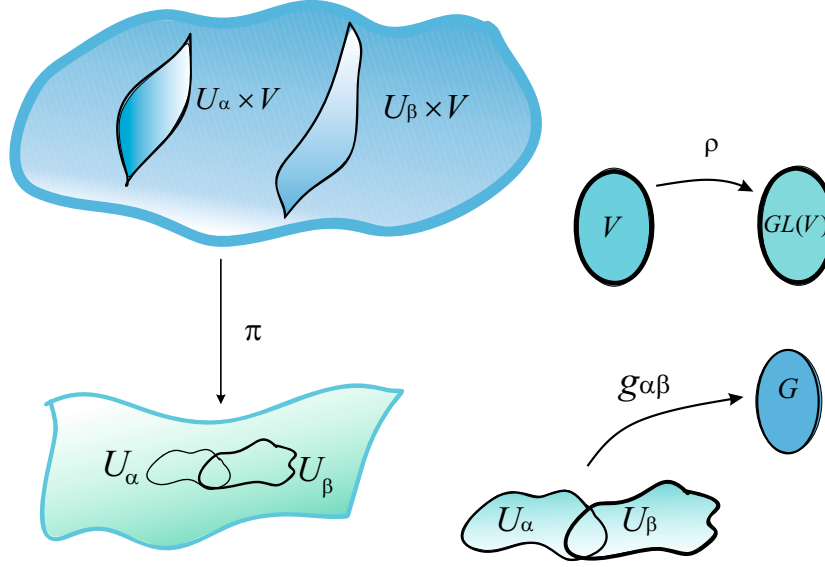
Definición 6.9. Dado un haz vectorial E , se dice que las secciones $e_1, \dots, e_n$ de E forman una base de secciones de E si cualquier sección $s \in \Gamma(E)$ se puede escribir únicamente como una suma $s = s^i e_i$ donde $s^i \in C^\infty(M)$.

Observación: Un haz vectorial tiene una base de secciones si y sólo si este es isomorfo a un haz trivial. Sin embargo, de la definición de haz vectorial se tiene que cada haz vectorial es localmente isomorfo a un haz trivial por lo tanto, siempre se puede trabajar con una base de secciones sobre alguna vecindad para cualquier punto en el espacio base.

6.2. G -haz (G -bundle)

Una de las maneras de construir haces vectoriales es "pegando" haces vectoriales triviales. A continuación, lo veremos para el G -haz (G -bundle).

Sean M una variedad y $\{U_\alpha\}$ una cubierta de conjuntos abiertos de M . Sea V un espacio vectorial y sea ρ una representación para algún grupo G en V . "Pegaremos" los haces triviales $U_\alpha \times V$ para obtener un haz vectorial (E, π, M) usando las funciones de transición $\mathbf{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$. Para obtener E , empezamos con la unión disjunta $\bigcup_\alpha U_\alpha \times V$, ahora consideremos cualesquiera dos puntos $(p, v) \in U_\alpha \times V$ y $(p, v') \in U_\beta \times V$ a los que pensaremos como iguales matemáticamente si $v = \rho(\mathbf{g}_{\alpha\beta}(p))v'$. Para mayor comodidad denotaremos lo anterior solo como $v = \mathbf{g}_{\alpha\beta}v'$. Sin embargo, este procedimiento sólo nos dará un haz vectorial si las funciones de transición satisfacen un par de condiciones de consistencia. Suponga que $p \in U_\alpha$. Entonces con base en lo anterior tenemos que identificar $(p, v) \in U_\alpha \times V$ con $(p, \mathbf{g}_{\alpha\alpha}v) \in U_\alpha \times V$. Sin embargo, como no queremos identificar dos puntos en el mismo haz trivial $U_\alpha \times V$, requerimos $\mathbf{g}_{\alpha\alpha} = 1$ en U_α donde estamos asumiendo que 1 es la identidad en G . También hay una condición más sutil si $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. En este caso identificaremos $(p, v) \in U_\beta \times V$ con $(p, \mathbf{g}_{\beta\gamma}v) \in U_\gamma \times V$ al cual identificaremos con $(p, \mathbf{g}_{\beta\gamma}\mathbf{g}_{\gamma\alpha}v) \in U_\alpha \times V$, que a su vez identificaremos con $(p, \mathbf{g}_{\alpha\beta}\mathbf{g}_{\beta\gamma}\mathbf{g}_{\gamma\alpha}v) \in U_\alpha \times V$. Nuevamente, para que no identifiquemos dos puntos en $U_\alpha \times V$, requeriremos de la condición

Figura 6.5: G -bundle

co-cíclica (cocycle condition): $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}\mathfrak{g}_{\beta\gamma}\mathfrak{g}_{\gamma\alpha} = 1$ en $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

A partir de ahora escribamos $[p, v]_\alpha$ para los puntos de E correspondientes a $(p, v) \in U_\alpha \times V$.

Así, de la identificación que hemos hecho, $[p, v]_\alpha = [p, \mathfrak{g}_{\beta\alpha}v]_\beta$. Definimos la proyección

$\pi : E \rightarrow V$ por $\pi[p, v]_\alpha = p$. Es decir, ya tenemos todo lo necesario para definir un G -haz.

La fibra E_p es entonces el conjunto de todos los puntos en E de la forma $[p, v]_\alpha$.

Si se mantienen las condiciones de consistencia en las funciones de transición, (E, π, M) es un haz vectorial al que llamaremos un G -haz (G -bundle). El grupo G es llamado el grupo de norma (gauge group) del haz y V es llamada la fibra estándar (standard fiber).

A continuación se da la definición formal de un G -haz.

Definición 6.10. Sean M una variedad y $\{U_\alpha\}$ una cubierta de conjuntos abiertos de M . Sea V un espacio vectorial y sea ρ una representación para algún grupo G en V . Para E como la union disjunta $\bigcup_\alpha U_\alpha \times V$, considere las funciones de transición $\mathfrak{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ tales que

1. $\mathfrak{g}_{\alpha\alpha} = 1$ en U_α
2. $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}\mathfrak{g}_{\beta\gamma}\mathfrak{g}_{\gamma\alpha} = 1$ en $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ la condición co-cíclica (cocycle condition) se cumplen.

Usando la notación introducida anteriormente, $[p, v]_\alpha = [p, \mathfrak{g}_{\beta\alpha}v]_\beta$ y con la proyección $\pi : E \rightarrow V$ definida por $\pi[p, v]_\alpha = p$. Entonces diremos que (E, π, M) es un haz vectorial al que llamaremos un G -haz (G -bundle). El grupo G es llamado el grupo de norma (gauge group) del haz y V es llamado la fibra estándar (standard fiber).

Note que, los haces triviales $U_\alpha \times V$ dan lugar a trivializaciones locales de E , sea $\phi_\alpha : E|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times V$, dado por $\phi_\alpha[p, v]_\alpha = (p, v)$ para $p \in U_\alpha$, $v \in V$. Para comparar dos de estas trivializaciones en la cubierta $U_\alpha \cap U_\beta$ usamos la función de transición $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$; más específicamente, usamos que, $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} = \rho(\mathfrak{g}_{\alpha\beta})$ sobre cualquier fibra $p \times V$ con $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. La idea es que se pueden hacer cálculos sobre U_α trabajando en $U_\alpha \times V$ usando la trivialización ϕ_α , mientras se hacen cálculos locales sobre U_β trabajando en $U_\beta \times V$ aunque para comparar lo que está pasando en la cubierta, necesitamos usar la función de transición $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$.

Dado que cada fibra E_p realmente luce como V , pero no canónicamente, y G tiene una representación ρ en V , tiene sentido preguntarse si una transformación lineal $T : E_p \rightarrow E_p$ es de la forma $\rho(g)$. Más precisamente, suponga que $p \in U_\alpha$, entonces decimos que T está definida en G si es de la forma $[p, v]_\alpha \rightarrow [p, gv]_\alpha$ para algún $g \in G$.¹ Observe que esta definición es independiente de la elección de α . Ahora suponga que $p \in U_\beta$ entonces, $[p, v]_\alpha = [p, g_{\beta\alpha}v]_\beta$, similarmente, se ve que $[p, gv]_\alpha = [p, g_{\beta\alpha}gv]_\beta$ entonces, T esta dado en $U_\alpha \cap U_\beta$ por $[p, g_{\beta\alpha}v]_\beta \rightarrow [p, g_{\beta\alpha}gv]_\beta$ o en otras palabras, $[p, v']_\beta \rightarrow [p, g'v']_\beta$ en donde hemos cambiado las variables $v' = g_{\beta\alpha}v$, $g' = g_{\beta\alpha}gg_{\beta\alpha}^{-1}$.

Lo mismo se cumple para el algebra de Lie de G .

Definición 6.11. Sea E un G -haz (G -bundle) con fibras E_p . Sea V un espacio vectorial y sea ρ una representación para el grupo G en V . Si una transformación lineal $T : E_p \rightarrow E_p$ es de la forma $[p, v]_\alpha \rightarrow [p, d\rho(x)v]_\alpha$ para algun $x \in \mathfrak{g}$ se dice que $T : E_p \rightarrow E_p$ está definida en $\mathfrak{g}$ donde $\mathfrak{g}$ es el algebra de Lie de G .

¹En la Física se suele decir que " T vive en G ".

6.3. Transformaciones de norma

Una vez introducidos los haces vectoriales, es tiempo de introducir los grupos naturales de simetrías de haces vectoriales. El tipo más básico de simetrías es llamado una transformación de norma (gauge transformation). Para fijar notación, daremos algunas definiciones básicas sobre transformaciones.

Definición 6.12. 1. Una aplicación $f : V \rightarrow W$ entre dos espacios vectoriales sobre un mismo campo $\mathbb{R}$ se dice que es lineal si satisface las dos siguientes propiedades:

$$\text{a) } f(u + v) = f(u) + f(v) \quad \forall u, v \in V.$$

$$\text{b) } f(\lambda v) = \lambda f(v), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V.$$

2. Esta definición es equivalente a que $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V$. Si $V = W$, se llama también endomorfismo.

3. El conjunto de todos los endomorfismos de V se denota por $End(V)$.

Observación: $End(V)$ es un espacio vectorial con las siguientes operaciones:

$$\blacksquare (\alpha T)(v) = \alpha T(v),$$

$$\blacksquare (S + T)(v) = S(v) + T(v)$$

para cualquier escalar α , cualesquiera $S, T \in End(V)$.

Observación: Note que $End(V)$ es un álgebra con el producto definido por $(ST)(v) = S(T(v))$.

Si V es un espacio vectorial real, el dual (algebraico) de V se define como el conjunto V^* de todos los mapeos lineales $L : V \rightarrow \mathbb{R}$. El valor de $L \in V^*$ en v es convenientemente escrito como $\langle L, v \rangle$, o como $\langle L, v \rangle_V$ si es necesario enfatizar al espacio vectorial involucrado.

Si tomamos una base e_i de V y sea e^j que denota la base dual de V^* , una base conveniente de $End(V)$ esta dada por los elementos e_j^i , esto es, $e_j^i e_k = \delta_k^i e_j$, donde δ denota la delta de Kronecker.

Observación: Existe un isomorfismo $V \otimes V^* \cong End(V)$ donde al elemento $v \otimes f \in V \otimes V^*$ se le asigna una función lineal dada por $x \rightarrow f(x)v$ para todo $x \in V$. En términos de la bases, el isomorfismo esta dado por $e^i \otimes e_j \rightarrow e_j^i$.

Definición 6.13. Dado un haz (E, ϕ, M) , el conjunto de todos los endomorfismos de E , $\text{End}(E)$, forma el haz de endomorfismos de E y se denota por $E \otimes E^*$.

Observación: La fibra de $\text{End}(E)$ sobre cualquier punto $p \in M$ es la misma que $\text{End}(E_p)$, los endomorfismos de E_p . Como resultado, cualquier sección T de $\text{End}(E)$ define un mapeo de E en sí mismo mandando $v \in E_p$ a $T(p)v \in E_p$ el cual es un morfismo de haces vectoriales. Es decir, las secciones de $\text{End}(E)$ determinan los morfismos del haz vectorial de E en sí mismo.

Así, cualquier sección T de $\text{End}(E)$ actúa sobre cualquier sección s de E , dando una nueva sección Ts de E como sigue: $(Ts)(p) = T(p)s(p)$.

Entonces T determina una función $T : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$, donde $\Gamma(E)$ es el conjunto de todas las secciones de E . Esta función es $\mathbb{C}^\infty$ -lineal es decir; $T(fs) = fT(s)$ para todas las funciones f y todas las secciones s de E . También se puede probar que todos los mapeos $\mathbb{C}^\infty(M)$ -lineales $T : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ corresponden a secciones de $\text{End}(E)$ de esta manera.

Ahora suponga que (E, π, M) es un G -haz, donde G es un grupo de Lie. Recordemos que esto significa que existe una cubierta de abiertos U_α de M tales que E se construye uniendo los haces triviales $U_\alpha \times V$, donde V es el espacio vectorial en el cual G tiene una representación ρ . Suponga también que $T \in \text{End}(E)$. En la sección previa se ha visto que $T(p) \in \text{End}(E_p)$ puede vivir en el grupo de norma G o en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Definición 6.14. Sea (E, π, M) un G -haz, donde G es un grupo de Lie. Sea V es el espacio vectorial en el cual G tiene una representación ρ . Ahora sea $T \in \text{End}(E)$. Si $T(p)$ vive en G para todo $p \in M$, diremos que T es una transformación de norma (gauge transformation). El conjunto de todas las transformaciones de norma se denotará por $\mathcal{G}$.

Observación: El conjunto de todas las transformaciones de norma $\mathcal{G}$ es un grupo con los productos e inversos dados por: $(gh)(p) = g(p)h(p)$, $g^{-1} = g(p)^{-1}$.

Lo principal de la las teorías de norma es que los campos deberían ser secciones de G -haces, y que las leyes de la física deberían ser ecuaciones diferenciales tales que si la sección S es una solución, también gs lo es para algún $g \in \mathcal{G}$. Dicha ecuación diferencial se dice que es invariante de norma (gauge invariant).

6.4. Conexiones

Definición 6.15. Sea E un haz vectorial sobre una variedad M . Recordemos que $\Gamma(E)$ denota el espacio de todas las secciones de E . Una conexión (connection) D en M asigna a cada campo vectorial v en M una función (operador) D_v de $\Gamma(E)$ a $\Gamma(E)$ tal que se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $D_v(\alpha s) = \alpha D_v s$
2. $D_v(s + t) = D_v s + D_v t$
3. $D_v(fs) = v(f)s + fD_v s$
4. $D_{v+w}s = D_v s + D_w s$
5. $D_{fv}s = fD_v s$

para todo $v, w \in \chi(M)$, $s, t \in \Gamma(E)$, $f \in \mathbb{C}^\infty(M)$ y para todos los escalares α . A la propiedad (3) se le suele llamar la ley de Leibniz. Dada cualquier sección s y un campo vectorial v , a $D_v s$ se le llamará la derivada covariante de s en la dirección de v .

A continuación veamos a que equivale la definición de conexión en termino de coordenadas locales y de una base de secciones del haz E . Sean x^μ las coordenadas en un conjunto abierto $U \subset M$, sea ∂_μ la base correspondiente de campos vectoriales coordenados, y sea e_i una base de secciones de E sobre U . Usaremos la abreviación: $D_\mu = D_{\partial_\mu}$. Note que para cualesquiera μ, j podemos expresar $D_\mu e_j$ como una combinación lineal única de secciones e_i , con funciones en U como sus coeficientes. Entonces podemos definir funciones $A_{\mu j}^i$ en U por $D_\mu e_j = A_{\mu j}^i e_i$. Estas funciones son llamadas las componentes del potencial vectorial. A continuación daremos una descripción independiente de coordenadas para el potencial vectorial. La importancia del potencial vectorial radica en que este puede ser usado para resolver la derivada covariante $D_v s$ de cualquier sección s de E sobre U , en la dirección de cualquier campo vectorial V en U . Mejor dicho, tenemos

$$D_v s = D_{v^\mu \partial_\mu} s = v^\mu D_\mu s = v^\mu D_\mu (s^i e_i). \quad (6.2)$$

Así usando la regla de Leibniz;

$$D_v s = v^\mu ((\partial_\mu s^i) e_i + A_{\mu i}^j s^i e_j). \quad (6.3)$$

Si ahora intercambiamos los índices i y j en el segundo término,

$$D_v s = v^\mu (\partial_\mu s^i + A_{\mu j}^i s^j) e_i. \quad (6.4)$$

Si ahora definimos las funciones $(D_\mu s)^i$ por $D_\mu s = (D_\mu s)^i e_i$, la ecuación anterior nos da $(D_\mu s)^i = \partial_\mu s^i + A_{\mu j}^i s^j$.

Observación: En física frecuentemente se usa esta notación más compacta, excepto que se usa $D_\mu s^i$ en lugar de $(D_\mu s)^i$.

Para un significado más geométrico del potencial vectorial, pensemos en éste como una sección de algún haz. Para hacer esto, veamos qué es lo que hace el potencial vectorial en las formulaciones anteriores. Empecemos con un campo vectorial v y una sección s de E sobre U , cuando calculamos $D_v s$, obtenemos un término de la forma $A_{\mu i}^j v^\mu s^i e_j$, el cual es una nueva sección de E sobre U . Note que esta expresión es lineal en v y en s ; en particular, es lineal sobre $\mathbb{C}^\infty(M)$ lo cual significa que si multiplicamos ya sea v o s por una función, la expresión es multiplicada por esa función dado que las derivadas no aparecen en ella. Así, el rol del potencial vectorial es que a un campo vectorial y una sección de E sobre U le asigna una nueva sección de E sobre U de una forma lineal en $\mathbb{C}^\infty(M)$.

En base a lo anterior, se puede pensar al potencial vectorial como una 1-form de $End(E)$ valuada en U , esto es, es una sección del haz $End(E|_U) \otimes T^*U$.

La razón es que si definimos el potencial vectorial A de esta manera;

$$A = A_{\mu i}^j e_j \otimes e^i \otimes dx^\mu, \quad (6.5)$$

la parte de la 1-forma que actúa sobre cualquier campo vectorial v en U nos da una sección de $End(E)$ sobre U ,

$$A(v) = A_{\mu i}^j (e_j \otimes e^i) \otimes dx^\mu(v) = A_{\mu i}^j v^\mu ((e_j \otimes e^i))$$

la cual en cambio, a cualquier sección s de E sobre U le asigna

$$A(v)s = A_{\mu i}^j v^\mu (e_j \otimes e^i)s = A_{\mu i}^j v^\mu s^i e_j \quad (6.6)$$

que es una nueva sección de E sobre U . En estos términos, tenemos que

$$(D_\mu s)^i = v s^i + (A(v)s)^i. \quad (6.7)$$

Algunas veces se omiten los índices internos i, j que están asociados con la base de secciones e_i y se escribe al potencial vectorial en términos de las componentes

$$A_\mu = A_{\mu i}^j e_j \otimes e^i. \quad (6.8)$$

Cada componente de A_μ es una sección de $End(E)$ sobre U . Una forma sencilla de pensar en la teoría de norma (gauge theory) es que ésta generaliza el electromagnetismo permitiendo que el potencial vectorial no sólo sea una 1-forma con componentes A_μ sino una matriz de 1-formas valuadas (matrix-valued 1-form) con componentes $A_{\mu i}^j$. Como se necesita de una trivialización local de $End(E)$ para definir las componentes $A_{\mu i}^j$, una forma más invariante de pensar al potencial vectorial es como una 1-forma valuada en $End(E)$ con componentes A_μ . Una ventaja de pensar al potencial vectorial como una 1-forma valuada en $End(E)$ es que se puede hacer no sólo localmente sobre algún conjunto abierto U , sino globalmente, en todo M . A continuación describiremos cómo hacerlo.

Suponga que A es una 1-forma valuada en $End(E)$. Podemos escribir

$$A = \sum_i T_i \otimes \omega_i \quad (6.9)$$

donde T_i son secciones de $End(E)$ y ω_i son 1-formas en M . Entonces, para cualquier campo vectorial v en M podemos definir la sección $A(v)$ de $End(E)$ por

$$A(v) = \sum_i \omega_i(v) T_i \quad (6.10)$$

Esta sección $A(v)$ actúa sobre cualquier sección s de E para dar una nueva sección $A(v)s$.

Afirmación 6.1. *Si D^0 es cualquier conexión en E , entonces $D = D^0 + A$ con lo cual nos referimos a la conexión de tal manera que $D_v s = D_v^0 s + A(v)s$.*

Más aún, afirmamos que cualquier conexión D puede ser escrita como $D^0 + A$.

Observe que en este sentido no se hace diferencia entre una conexión y un potencial vectorial. Este fué el caso cuando se trabajó usando coordenadas locales y una trivialización local de E . Implícitamente se hizo uso de la conexión $D_v^0 s = v(s^j)e_j$ para escribir cualquier conexión D como $D^0 + A$:

$$D_v s = (v(s^i) + A_{\mu j}^i v^\mu s^j) e_i = D_v^0 s + A(v)s. \quad (6.11)$$

Esta conexión D^0 es llamada la conexión plana estándar (standard flat connection) en $E|_U$. La conexión plana estándar depende de la elección de la trivialización local de E ; no es canónica.

Demostración. Primero necesitamos verificar que si D^0 es una conexión en E y A es una $End(E)$ -valued 1-form, $D = D^0 + A$ también es una conexión en E . Para la ley de Leibniz:

$$D_v(fs) = D_v^0(fs) + A(v)(fs) = v(f)s + fD_v^0 s + fA(v)s = v(f)s + fD_v(s). \quad (6.12)$$

Segundo, necesitamos verificar que si D es cualquier otra conexión en E , tenemos que $D = D^0 + A$ para alguna 1-forma A valuada en $End(E)$. Lo principal es mostrar que $A = D - D^0$ tiene la propiedad de que $A(v)s$ depende linealmente en v y s en el sentido de $\mathbb{C}^\infty(M)$. La linealidad en v es obvia dado que $D_v s$ y $D_v^0 s$ dependen linealmente en v . La linealidad en s es menos obvia, pero

$$D_v(fs) - D_v^0(fs) = v(f)s + fD_v s - v(f)s - fD_v^0 s = f(D_v s - D_v^0 s) \quad (6.13)$$

para cualquier función f en M . Entonces, usando que $A(v)s$ tiene estas propiedades de linealidad, podemos llegar a lo deseado es decir; la 1-forma A valuada en $End(E)$. Por ejemplo, para cualesquiera coordenadas locales x^μ y base local de secciones e_i de E , pode-

mos definir

$$A = A_{\mu i}^j e_j \otimes e^i \otimes dx^\mu \quad (6.14)$$

donde

$$A(\partial_\mu) e_j = A_{\mu j}^i e_i. \quad (6.15)$$

Observación: En las teorías de Yang-Mills, los haces vectoriales siempre son G -haces, donde G es el grupo de norma de la teoría. Aquí, las conexiones físicamente relevantes son aquellas cuyo potencial vectorial localmente luce como una 1-forma g valuada.

Para hacer esto más preciso, usaremos la noción de una sección de $End(E)_p$ que vive en $\mathfrak{g}$.

Supongamos que E es un G -haz con fibra estándar dada por algún espacio vectorial V en el cual G tiene una representación ρ . Entonces existen trivializaciones locales $\phi_\alpha : E|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times V$ tales que las funciones de transición $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ son de la forma $\rho(g_{\alpha\beta})$ para alguna función evaluada de G (G -valued) $g_{\alpha\beta}$ en la cubierta (overlap). Ahora supongamos que D es una conexión en E . Sobre cualquier de los U_α podemos escribir a D como la conexión plana estándar D^0 más un potencial vectorial A . Decimos que D es una G -conexión (G -connection) si en coordenadas locales las componentes $A_\mu \in End(E)$ viven en $\mathfrak{g}$. Podría parecer que esta definición depende de las coordenadas locales x^μ usadas para definir las componentes $End(E)$, pero no lo hace realmente: si lo cambiamos a nuevas coordenadas x'^ν , obtenemos las nuevas componentes A'_ν dadas por

$$A'_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A_\mu, \quad (6.16)$$

las cuales viven en $\mathfrak{g}$ si las componentes originales A_μ lo hacen.

Justo como se puede aplicar una transformación de norma a una sección de un G -haz, podemos aplicarlo a una G -conexión. Sea D una G -conexión en E y sea $g \in \mathcal{G}$ una transformación de norma. Entonces afirmamos que existe una nueva G -conexión D' en E tal que

$$D'_v(gs) = gD_v s \quad (6.17)$$

para todos los campos vectoriales v en M y secciones s de E . La fórmula explícita para

D' es

$$D'_v(s) = gD_v(g^{-1}s), \quad (6.18)$$

así que sólo necesitamos revisar que D' es una G -conexión. Para la ley de Leibniz, sea f cualquier función en M , entonces

$$\begin{aligned} D'_v(fs) &= gD_v(g^{-1}fs) = gD_v(fg^{-1}s) \\ &= gv(f)g^{-1}s + fgD_v(g^{-1}s) = v(f)s + fD'_v s. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Observación: Usando una trivialización local de E sobre $U_\alpha \subseteq M$, se puede escribir a la G -conexión D como la conexión plana estándar más un potencial vectorial es decir; $D = D^0 + A$. El potencial vectorial A' para D' en coordenadas locales está dado por

$$A'_\mu = gA_\mu g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1}. \quad (6.20)$$

Si la G -conexión D' es obtenida de la G -conexión D por medio de una transformación de norma, decimos que D y D' son equivalentes de norma (gauge-equivalent). En las teorías de norma, dos conexiones describen el mismo campo físico si son equivalentes de norma. Algunas veces se denota al espacio de todas las G -conexiones en un G -haz como $\mathcal{A}$ y escribimos $\frac{\mathcal{A}}{G}$ para el espacio de todas las clases de norma equivalentes de las conexiones (gauge equivalence classes of connections) también conocido como el espacio de las conexiones módulo las transformaciones de norma. La geometría de $\frac{\mathcal{A}}{G}$ juega un papel crucial en las teorías de norma.

Capítulo 7

Ecuaciones de Yang-Mills

Es en este capítulo que, usando las herramientas matemáticas desarrolladas en capítulos previos, vamos a definir de manera geométrica general qué es una teoría de Yang Mills y ver cómo es que para estas teorías la electrodinámica (descrita por las ecuaciones de Maxwell) son un caso particular cuando elegimos el grupo $G = U(1)$.

7.1. Curvatura

Definición 7.1. Sea E un haz vectorial sobre M con conexión D . Dados los campos vectoriales $v, w \in \chi(M)$, se define el tensor de curvatura F como el operador en las secciones de E dado por:

$$F(v, w) = D_v D_w - D_w D_v - D_{[v, w]}. \quad (7.1)$$

Entre sus principales propiedades se encuentran:

1. Antisimetría

$$F(v, w) = -F(w, v). \quad (7.2)$$

2. Linealidad sobre $\mathbb{C}^\infty(M)$ en cada argumento,

$$F(fv, w)s = F(v, fw)s = F(v, w)(fs) = fF(v, w)s, \quad (7.3)$$

para toda función $f \in \mathbb{C}^\infty(M)$, $v, w \in \chi(M)$ y $s \in \Gamma(E)$.

Observación: $F(v, w)$ define un mapeo lineal $\mathbb{C}^\infty(M)$ de $\Gamma(E)$ en sí mismo, se puede concluir que $F(v, w)$ es una sección de $\text{End}(E)$.

Definición 7.2. En términos de coordenadas locales x^μ en algún subconjunto $U \subset M$. Se define $F_{\mu\nu}$ como la sección de $\text{End}(E)$ dada por:

$$F_{\mu\nu} = F(\partial_\mu, \partial_\nu). \quad (7.4)$$

Usando la ecuación (7.1) junto con la definición (7.2),

$$F_{\mu\nu} = F(\partial_\mu, \partial_\nu) = D_{\partial_\mu} D_{\partial_\nu} - D_{\partial_\nu} D_{\partial_\mu} - D_{[\partial_\mu, \partial_\nu]}, \quad (7.5)$$

pero como $(\partial_\mu, \partial_\nu)$ son elementos de la base de TM , $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$, con lo cual el último término de la ecuación (7.5) se anula, es decir,

$$D_{[\partial_\mu, \partial_\nu]} = 0. \quad (7.6)$$

Por tanto,

$$F_{\mu\nu} = D_{\partial_\mu} D_{\partial_\nu} - D_{\partial_\nu} D_{\partial_\mu} =: D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu. \quad (7.7)$$

Para e_i una base local de secciones de E sobre U , la curvatura en términos del potencial vectorial está dada por:

$$F_{\mu\nu} e_i = D_\mu D_\nu e_i - D_\nu D_\mu e_i = D_\mu (A_{\nu i}^j e_j) - D_\nu (A_{\mu i}^j e_j). \quad (7.8)$$

Usando que la conexión satisface la regla de Leibniz del producto,

$$F_{\mu\nu} e_i = A_{\nu i}^j D_\mu e_j + (D_\mu A_{\nu i}^j) e_j - A_{\mu i}^j D_\nu e_j - (D_\nu A_{\mu i}^j) e_j \quad (7.9)$$

y como $A_{\nu i}^j$ son las componentes de la sección $A_{\nu k}^j e_j$ con respecto a la base e_j de E sobre U ,

$$D_\mu A_{\nu i}^j = \partial_\mu A_{\nu i}^j, \quad (7.10)$$

por tanto, la ecuación (7.9) puede escribirse como

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}e_i &= (\partial_\mu A_{\nu i}^j - \partial_\nu A_{\mu i}^j)e_j + (A_{\nu i}^j A_{\mu j}^k - A_{\mu i}^j A_{\nu j}^k)e_k, \\ &= [\partial_\mu A_{\nu i}^j - \partial_\nu A_{\mu i}^j + A_{\mu k}^j A_{\nu i}^k - A_{\nu k}^j A_{\mu i}^k]e_j. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Como las secciones $e_j \otimes e^i$ forman una base local de secciones para $End(E)$,

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu i}^j e_j \otimes e^i \quad (7.12)$$

para algún conjunto de funciones $F_{\mu\nu i}^j$, es decir, las componentes de la curvatura. En particular con $F_{\mu\nu}e_i = F_{\mu\nu i}^j e_j$,

$$F_{\mu\nu i}^j = \partial_\mu A_{\nu i}^j - \partial_\nu A_{\mu i}^j + A_{\mu k}^j A_{\nu i}^k - A_{\nu k}^j A_{\mu i}^k. \quad (7.13)$$

Sin considerar los índices i, j, k asociados a la base de secciones de E sobre U , la fórmula para la curvatura en términos del potencial vectorial es:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (7.14)$$

7.2. Curvatura en un G-haz

Ahora analicemos el caso de la curvatura cuando E es un G -haz y la conexión D es una G -conexión. Trabajando en una trivialización local de E , se tiene que $D = D^0 + A$ donde D^0 es la conexión estándar plana y las componentes A_μ del potencial vectorial pertenecen a $\mathfrak{g}$. Dado

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (7.15)$$

y que el corchete de dos secciones de $End(E)$ valuadas en $\mathfrak{g}$, nuevamente pertenecen a $\mathfrak{g}$ (pues $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie). Por tanto, las componentes de $F_{\mu\nu}$ pertenecen a $\mathfrak{g}$.

Si $G = U(1)$ y consideramos la fibra estándar de E en la representación fundamental de $U(1)$ en $\mathbb{C}$, entonces en una trivialización local se puede pensar a F como i veces (con i la

unidad imaginaria) una 2-forma valuada en los reales. Dado que $U(1)$ es abeliano,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (7.16)$$

Observe que la ecuación (7.16) tiene la forma del tensor de campo de fuerza electromagnética en términos del potencial vectorial; así, esta ecuación nos permite ver que, en términos geométricos el campo electromagnético puede verse como la curvatura en un $G = U(1)$ haz.

7.3. Derivada exterior covariante

Antes de dar la definición principal de esta sección, la derivada exterior covariante, se define una w -forma valuada en E

Definición 7.3. Dado E un haz vectorial sobre una variedad M con una conexión D . Se define una w -forma valuada en E como una sección de

$$E \otimes \Omega^p T^*(M). \quad (7.17)$$

Observación:

1. Una 0-forma valuada en E es una sección de E .
2. Como una 1-forma en M es una $\mathbb{C}^\infty(M)$ función lineal de $\chi(M)$ en $\mathbb{C}^\infty(M)$, una 1-forma valuada en E es una $\mathbb{C}^\infty(M)$ función lineal de $\chi(M)$ en $\Gamma(E)$.

Con la definición anterior se puede entender mejor lo siguiente:

Definición 7.4. Se define la 2-forma de la curvatura F como la 2-forma valuada en $\text{End}(E)$:

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (7.18)$$

Es decir, una definición para la curvatura en términos de 2-formas.

A continuación se define la derivada exterior covariante.

Definición 7.5. Se define la derivada exterior covariante d_D de una sección s de E como la 1-forma valuada en E , $d_D s$, tal que:

$$d_D s(v) = D_v s \quad (7.19)$$

para cualquier campo vectorial v en M . Alternativamente, en coordenadas locales x^μ en algún conjunto abierto $U \subseteq M$,

$$d_D s = D_\mu s \otimes dx^\mu. \quad (7.20)$$

Cualquier forma diferencial valuada en E en un conjunto U puede ser escrita como

$$s_I \otimes dx^I \quad (7.21)$$

para algunas secciones s_I de $E|_U$ donde I tiene múltiples rangos, por ejemplo, para una p -forma tomará valores $I = 1, 2, \dots, p$.¹

Definición 7.6. Dada una p -forma ω valuada en $\text{End}(E)$ y una q -forma ν valuada en $\text{End}(E)$, definimos el conmutador gradado como²,

$$[\omega, \nu] = \omega \wedge \nu - (-1)^{pq} \nu \wedge \omega. \quad (7.22)$$

Con la propiedad que,

$$[\omega, \nu] = -(-1)^{pq} [\nu, \omega]. \quad (7.23)$$

Suponiendo que el haz E admite una conexión plana D^0 (lo cual es cierto siempre para haces triviales o cuando trabajamos de manera local, lo cual es el caso en este capítulo de la tesis), escribiremos,

$$d = d_{D^0}, \quad (7.24)$$

con d la derivada exterior en M .

¹En el caso que s es una p -forma $s = \frac{1}{p!} s_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} =: s_I dx^I$, note que la notación aquí introducida simplifica las ecuaciones.

²El factor $(-1)^{pq}$ se introduce para compensar la antisimetría del producto exterior de las formas diferenciales ordinarias.

Para cualquier p -forma, η , valuada en $\text{End}(E)$,

$$d_D\eta = d\eta + [A, \eta], \quad (7.25)$$

lo cual podemos escribir en coordenadas locales, escribiendo a la p -forma, η , valuada en $\text{End}(E)$ como $\eta_I dx^I$, donde η_I son secciones de $\text{End}(E)$,

$$\begin{aligned} d_D\eta &= [D_\mu, \eta_I] \otimes dx^\mu \wedge dx^I \\ &= [D_\mu^0 + A_\mu, \eta_I] \otimes dx^\mu \wedge dx^I \\ &= d\eta + A \wedge \eta - (-1)^p \eta \wedge A \end{aligned} \quad (7.26)$$

$$= d\eta + [A, \eta]. \quad (7.27)$$

Observe que $d_D\eta$ es una $(p+1)$ -forma valuada en $\text{End}(E)$, por lo que considerando una base local para $\text{End}(E)$, la podemos escribir como,

$$d_D\eta = (d_D\eta)^j{}_i e_j \otimes e^i, \quad (7.28)$$

por lo que la ecuación (7.26) puede escribirse como,

$$(d_D\eta)^j{}_i e_j \otimes e^i = ((d\eta)^j{}_i + A^j{}_k \wedge \eta^k{}_i - (-1)^p \eta^j{}_k \wedge A^k{}_i) e_j \otimes e^i. \quad (7.29)$$

Hasta aquí el desarrollo de la derivada exterior covariante en un G -haz expresada en coordenadas locales es general. En el capítulo siguiente estudiaremos el caso cuando elegimos al grupo $G = U(1)$.

7.4. Ecuaciones de Yang-Mills

Las ecuaciones de estado en una teoría de Yang-Mills son las siguientes:

$$d_DF = 0, \quad (7.30)$$

$$*d_D * F = J. \quad (7.31)$$

Éstas generalizan la forma de las dos ecuaciones de Maxwell obtenidas a partir de la definición de los campos eléctricos y magnéticos en términos del potencial vectorial. La primera de estas ecuaciones, la ecuación (7.30) es conocida como la identidad de Bianchi, el hecho de que sea una identidad se sigue de nuestra elección de F en términos del potencial vectorial A_j , ya que consideraremos

$$F = F_{\mu\nu} \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu \text{ y } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (7.32)$$

Si F se puede expresar en términos de los potenciales como en la ecuación anterior, se tiene que la ecuación (7.30) es una identidad. En el caso particular de las ecuaciones de Maxwell, como $F = dA$, la ecuación $dF = d^2A = 0$ es claramente una identidad.

La ecuación (7.31) es la ecuación de Yang-Mills que contiene las fuentes, que en el caso de la electrodinámica corresponden a cargas y corrientes eléctricas. Físicamente lo que esta ecuación da es la interacción de los campos con sus fuentes. En el caso de la electrodinámica serían las ecuaciones de Maxwell que contienen la interacción entre los campos eléctricos y magnéticos y las fuentes (cargas y corrientes). Dicha ecuación se puede escribir en coordenadas como:

$$D_\rho F_{\mu\nu} \otimes *(dx^\rho \wedge *(dx^\mu \wedge dx^\nu)) = J. \quad (7.33)$$

Además, estas expresiones para la derivada covariante en términos del vector A son,

$$D_\rho F_{\mu\nu} = \partial_\rho F_{\mu\nu} + [A_\rho, F_{\mu\nu}]. \quad (7.34)$$

Las ecuaciones (7.32) y (7.33) son una representación explícita de las ecuaciones de Yang-Mills en términos del potencial vectorial A_j , con la derivada covariante definida como en la ecuación (7.34).

Definición 7.7. Se define el operador estrella de Hodge $(*)$ actuando en una forma diferencial valuada en $\text{End}(E)$ como el único $\mathbb{C}^\infty(M)$ operador lineal tal que para cualquier

sección T de $\text{End}(E)$ y cualquier forma diferencial w ,

$$*(T \otimes w) = T \otimes *w \quad (7.35)$$

donde en la parte derecha $*$ representa el operador estrella de Hodge en la forma diferencial w .

Podemos ver que para cualquier 1-forma J en M , valuada en $\text{End}(E)$, se satisface la ecuación de YangMills con fuentes (7.31); comunmente se conoce a J como corriente. En particular, cuando E es un haz trivial $U(1)$ con fibra estándar dada por la representación fundamental de $U(1)$, las ecuaciones de Yang-Mills se reducen a las ecuaciones de Maxwell.

7.4.1. Invarianza de norma

Ahora veamos que las ecuaciones de Yang-Mills son invariantes de norma (gauge-invariant), Es decir, si D y D' son conexiones que satisfacen las ecuaciones de Yang-Mills, entonces existe una transformación de norma entre ellas. Primero, observemos lo que sucede con la curvatura bajo una transformación de norma. Sea D una G -conexión en E y sea $g \in \mathcal{G}$ una transformación de norma. Entonces decimos que existe una nueva conexión D' tal que

$$D'_v s = g D_v (g^{-1} s). \quad (7.36)$$

Sea F la curvatura de D y sea F' la curvatura de D' . Entonces

$$\begin{aligned} F'(u, v) s &= D'_u D'_v s - D'_v D'_u s - D'_{[u, v]} s \\ &= g D_u D_v (g^{-1} s) - g D_v D_u (g^{-1} s) - g D'_{[u, v]} (g^{-1} s) \\ &= D_\mu (A^j_{\nu i}) e_j - D_\nu (A^j_{\mu i}) e_j = g F(u, v) (g^{-1} s) \end{aligned} \quad (7.37)$$

o simplemente,

$$F' = g F g^{-1} \quad (7.38)$$

donde se toma el producto de las secciones g y g^{-1} de $End(E)$ con la F forma valuada en $End(E)$. En coordenadas locales,

$$F'_{\mu\nu} = gF_{\mu\nu}g^{-1}. \quad (7.39)$$

Usando coordenadas locales se puede ver que

$$*d_D * F = J * \text{ así, } d_{D'} * F' = J' \quad (7.40)$$

donde

$$J' = gJg^{-1}. \quad (7.41)$$

Considerando la invarianza de norma, cuando estamos trabajando sobre el espacio $\mathcal{M}$ de Minkowski (es decir la variedad base del haz la consideramos como el espacio de Minkowski) podemos ver lo siguiente: Cada haz vectorial sobre $\mathbb{R}^n$ es trivial, por tanto se puede escribir la conexión D como la conexión estándar más un potencial vectorial, lo cual en componentes se expresa como,

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu. \quad (7.42)$$

Capítulo 8

Ecuaciones de Maxwell $G=U(1)$

En el presente capítulo, se estudia de manera concreta cómo los conceptos vistos en capítulos previos se aplican cuando elegimos al grupo del G -haz como $U(1)$. Mostramos que, con esta elección, las ecuaciones de Yang Mills vistas en el capítulo previo se reducen a las ecuaciones de Maxwell. Para finalizar, vemos que cuando expresamos las ecuaciones de Maxwell en un sistema de coordenadas local las expresiones resultantes coinciden con lo presentado en el capítulo 1, que es la notación más comunmente empleada en la física.

8.1. Teoría de Yang-Mills en el caso $G = U(1)$

Los primeros pasos para desarrollar una teoría de Yang-Mills son:

1. Elegir una variedad; para las ecuaciones de Maxwell se usa el espacio $\mathcal{M}$ de Minkowski de la relatividad especial.
2. Elegir un grupo de estructura; para las ecuaciones de Maxwell es el grupo $U(1)$, es decir, el círculo unitario en el plano complejo formado por los números complejos $z = e^{i\theta}$.
3. Elegir una representación del grupo que actúe como una fibra. Para las ecuaciones de Maxwell elegimos $V_x = \mathbb{C}$ y así la transformación de grupo es la función $e^{i\theta}$ que actúa por multiplicación en una sección $s(x)$.

Con estos tres pasos se define un G -haz que es el espacio en donde se desarrolla la teoría de Yang-Mills.

8.2. Transformaciones de norma

De acuerdo con la sección anterior, ahora veamos cómo actúa una transformación de norma para las conexiones en el caso $G = U(1)$. Por simplicidad, suponga que E es un haz de línea complejo trivial sobre M . En otras palabras, suponemos que $E = M \times \mathbb{C}$ así que la fibra E_p sobre cualquier punto $p \in M$ es isomorfa a $\mathbb{C}$. Note que E se convierte en un $U(1)$ -haz si pensamos a $\mathbb{C}$, su fibra estándar, como la representación fundamental del grupo $U(1)$.

Una conexión D en E puede ser entonces descrita por su potencial vectorial A , el cual es una 1-forma valuada en $End(E)$ ($End(E)$ -valued 1 form). Dado que $End(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ entonces A es una 1-forma valuada en $\mathbb{C}$ en M ($\mathbb{C}$ -valued 1-form), es decir, el potencial vectorial A es una sección del haz $End(E|_U) \otimes T^*U$. De la expresión general para el potencial vectorial (6.14),

$$A = A_{\mu}^j e_j \otimes e^i \otimes dx^\mu, \quad (8.1)$$

podemos ver que cuando elegimos $G = U(1)$, A es una sección del haz $\mathbb{C} \otimes T^*M$ donde $A = A_\mu \otimes dx^\mu$, pues $e_j \otimes e^i$ es una base para $\mathbb{C}$ y en este caso se puede omitir escribirla.

Si la conexión D es una $U(1)$ -conexión, las componentes A_μ del potencial vectorial deben estar valuadas en $\mathfrak{u}(1)$. Dado $\mathfrak{u}(1) = \{ix : x \in \mathbb{R}\}$, esto significa que las componentes A_μ son funciones puramente imaginarias o en otras palabras, A es igual a i veces una 1-forma real valuada (real-valued 1-form) es decir;

$$A_\mu = i\mathcal{A}_\mu \quad (8.2)$$

con $\mathcal{A}_\mu$ una función real. Ahora suponga que aplicamos una transformación de norma g al potencial vectorial A . Dado que E es trivial, podemos pensar a g como una función en

$U(1)$. Elegiendo a g de la forma $g = e^{-i\theta}$, como

$$A'_\mu = gA_\mu g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1} \quad (8.3)$$

entonces

$$\begin{aligned} i\mathcal{A}'_\mu &= e^{-i\theta} i\mathcal{A}_\mu e^{i\theta} + e^{-i\theta} \partial_\mu i\mu e^{i\theta}, \\ &= e^{-i\theta} i\mathcal{A}_\mu e^{i\theta} + ie^{-i\theta} (\partial_\mu \theta) e^{i\theta}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Dado que $U(1)$ es abeliano, $e^{-i\theta} e^{i\theta} = 1$ y cancelando i pues es factor común esto se simplifica como

$$\mathcal{A}'_\mu = \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu \theta, \quad (8.5)$$

para θ alguna función real. Tenemos que

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} + d\theta \quad (8.6)$$

En otras palabras, en este caso, aplicar una transformación de norma a $\mathcal{A}$, simplemente equivale a añadir la 1-forma $d\theta$.

8.3. Curvatura en un $U(1)$ -haz

Para el caso de la curvatura cuando E es un G -haz y la conexión D es una G -conexión, trabajando en una trivialización local de E , se tiene que $D = D^0 + A$ donde D^0 es la conexión estándar plana y las componentes A_μ del potencial vectorial pertenecen a $\mathfrak{g}$. En coordenadas locales en M , las componentes de la curvatura están dadas por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \quad (8.7)$$

y dado que el corchete de dos secciones de $\text{End}(E)$ que pertenecen a $\mathfrak{g}$ nuevamente pertenecen a $\mathfrak{g}$ (pues $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie) así, las componentes de $F_{\mu\nu}$ pertenecen a $\mathfrak{g}$.

Si $G = U(1)$ y la fibra estándar de E es la representación fundamental de $U(1)$ en $\mathbb{C}$,

entonces en una trivialización local se puede pensar a F como i veces una 2-forma valuada en los reales. Para e_i una base local de secciones de E sobre U , la curvatura en términos del potencial vectorial está dada como la ecuación (7.13):

$$F_{\mu\nu}^j = \partial_\mu A_{\nu i}^j - \partial_\nu A_{\mu i}^j + A_{\mu k}^j A_{\nu i}^k - A_{\nu k}^j A_{\mu i}^k. \quad (8.8)$$

Como las secciones $e_j \otimes e^i$ forman una base local de secciones para $\text{End}(E)$ que en este caso es $\mathbb{C}$, tenemos que los índices de la base de secciones serían de la forma $e_1 \otimes e^1$. Entonces

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu. \quad (8.9)$$

Dado que $U(1)$ es abeliano,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (8.10)$$

Observe que esta es la expresión para las componentes del tensor de campo electromagnético en términos del potencial vectorial (que es equivalente, subiendo índices, a la ecuación (1.12)). Con esto podemos interpretar, de manera geométrica, al tensor de campo electromagnético como la curvatura en un $U(1)$ -haz.

8.4. Derivada exterior covariante en el $U(1)$ -haz

En la sección 7.3 se dió la definición formal de la derivada exterior covariante, que denotamos por $d_D s(v) = D_v s$. En esta sección veremos, de manera concreta, qué forma toma esta derivada cuando elegimos al grupo del G -haz como $U(1)$. Primero daremos algunas propiedades básicas de la derivada exterior covariante, d_D .

En la sección 8.2 vimos que cuando $G = U(1)$, $E = M \times \mathbb{C}$ y que $\text{End}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, por lo que las componentes de las p -formas valuadas en $\text{End}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ pertenecen a $\mathfrak{u}(1)$ (álgebra de Lie de $U(1)$) y pueden verse como funciones puramente imaginarias. Por lo

que la ecuación (7.29) puede escribirse como¹,

$$d_D\eta = d\eta + A \wedge \eta - (-1)^p \eta \wedge A, \quad (8.11)$$

usando la propiedad de las formas diferenciales en M : Dadas una p -forma η y una q -forma ν , entonces $\nu \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \nu$. Vemos que los dos últimos términos de la ecuación anterior se cancelan, por lo que,

$$d_D\eta = d\eta. \quad (8.12)$$

Con esto podemos ver de inmediato que, cuando elegimos al grupo del G -haz como $U(1)$, la primera de las ecuaciones de Yang-Mills, ec. (7.30),

$$d_DF = 0 \quad \Rightarrow \quad dF = 0. \quad (8.13)$$

Ahora veámos que pasa para el operador estrella de Hodge cuando elegimos al grupo del G -haz como $U(1)$. En la definición 7.7 vimos que el operador estrella de Hodge es un operador lineal tal que para cualquier sección T de $End(E)$ y cualquier forma diferencial w ,

$$*(T \otimes w) = T \otimes *w, \quad (8.14)$$

lo cual dicho en palabras significa que actúa sobre la estructura de formas en M , “ignorando” la estructura de $End(E)$.

En el caso cuando elegimos al grupo del G -haz como $U(1)$, T es una sección de $End(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, es decir una función compleja, por lo que,

$$*(T \otimes w) = *(Tw) = T(*w). \quad (8.15)$$

Como se vió en la sección anterior la 2-forma de curvatura (en una variedad de 4 dimensiones) está valuada en $\mathfrak{u}(1)$, por lo que sus componentes son funciones puramente

¹Ya sin índices internos, es decir, aquellos que representan las componentes con respecto a una base $e_j \otimes e^i$ en $End(E)$.

imaginarias. Podemos ver que $*F$ pertenece también a $\mathfrak{u}(1)$. Y dado que $d_D\eta = d\eta$,

$$d_D * F = d * F. \quad (8.16)$$

Observe que $d * \eta$ es una 3-forma valuada en $\text{End}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Y como el operador estrella de Hodge actúa sólo sobre la estructura de formas diferenciables en M ,

$$*d_D * F = *d * F. \quad (8.17)$$

Con esto vemos que la segunda ecuación de Maxwell (7.31) se traduce en,

$$*d_D * F = J \quad \Rightarrow \quad *d * F = J. \quad (8.18)$$

8.5. Ecuaciones de Yang Mills para $G=U(1)$

En la sección anterior vimos que, cuando elegimos el grupo del G -haz como $U(1)$, la derivada exterior covariante $d_D = d$, por lo que las ecuaciones de Yang-Mills toman la forma,

$$dF = 0, \quad (8.19)$$

$$*d * F = J, \quad (8.20)$$

que son las ecuaciones de Maxwell, expresadas en términos de formas diferenciales.

Con esto estamos mostrando que las ecuaciones de Maxwell son un caso particular de las ecuaciones de Yang-Mills (tal como se definen en el capítulo 7 de manera geométrica) cuando elegimos al grupo del G -haz como $U(1)$.

Sin embargo, con la finalidad de hacer conexión con el capítulo (1), vamos a expresar las ecuaciones de Maxwell (8.19) y (8.20) en términos de coordenadas locales.

Recordemos, que en el capítulo (1) se introdujeron las ecuaciones de Maxwell desde su formalismo vectorial, tal como se ve en los cursos de física, y posteriormente se escriben en términos de tensores.

En lo que sigue mostraremos que las expresiones para las ecuaciones de Maxwell (8.19) y (8.20) expresadas en coordenadas locales, van a coincidir con lo mostrado en el primer capítulo, es decir, con la notación empleada usualmente en la física.

También estamos suponiendo, en este punto para elegir coordenadas locales, que la variedad M es el espacio-tiempo de Minkowski $\mathcal{M}$, es decir, una variedad 4-dimensional que tiene una métrica, $\eta_{\mu\nu}$ tal que $\text{diag } \eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$. Por lo que los valores que pueden tomar los índices griegos son $\mu, \nu, \rho = 0, 1, 2, 3$.

8.5.1. Idenditades de Bianchi: $dF = 0$

Como ya se mostró, F es la 2-forma de curvatura en un $U(1)$ - haz, por tanto dF es una 3-forma que, en coordenadas locales en M , puede expresarse como,

$$dF = \frac{1}{2!} \partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho, \quad (8.21)$$

por lo que de $dF = 0$ vemos que

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0. \quad (8.22)$$

La ecuación $\partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0$, tiene tres índices libres que podemos elegir entre los valores que pueden tomar ($\mu, \nu, \rho = 0, 1, 2, 3$), por ejemplo una de las posibles ecuaciones sería,

$$\partial_{[0} F_{12]} = \partial_0 F_{12} + \partial_2 F_{01} + \partial_1 F_{20} = 0. \quad (8.23)$$

Note que elegir $\partial_{[0} F_{12]}$, $\partial_{[2} F_{01]}$ o $\partial_{[1} F_{20]}$ nos llevan a la misma ecuación (8.23), ¿cuántas elecciones diferentes tenemos? La respuesta es 4. Aunque no se vea de manera explícita, $\partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0$ representa 4 ecuaciones independientes. Esto podemos condensarlo en la siguiente ecuación,

$$\epsilon^{\sigma\mu\nu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0. \quad (8.24)$$

donde ya no es necesario incluir los corchetes de antisimetrización, pues los índices están sumados con el $\epsilon^{\sigma\mu\nu\rho}$ cuyos índices son completamente antisimétricos. El índice σ indica

la ecuación independiente que se esté tratando, por ejemplo, si elegimos $\sigma = 3$,

$$\epsilon^{3\mu\nu\rho}\partial_\mu F_{\nu\rho} = 0, \quad (8.25)$$

el resto de los índices sólo podrían tomar los valores 0, 1, 2, de otro modo $\epsilon^{3\mu\nu\rho}$ se anularía, que corresponde a la ecuación (8.23). Puede mostrarse que de la ecuación (8.24) podemos obtener la ecuación (8.22).

La ecuación (8.24) es equivalente, a la ecuación (1.20), obtenida en el capítulo (1).

8.5.2. Ecuaciones con fuentes: $*d * F = J$

Para escribir en coordenadas locales las ecuaciones de Maxwell con fuentes, $*d * F = J$, primero recordemos que para cualquier p -forma

$$w = \frac{1}{p!} w_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \quad (8.26)$$

Aunque en secciones previas se definió el operador $*$ de Hodge sobre haces, no se mostró de manera explícita como se ven las componentes de una p -forma cuando se le aplica el operador $*$ de Hodge, las cuales se dan a continuación,

$$(*w)_{j_1 \dots j_{n-p}} = \frac{1}{(n-p)!} \epsilon^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_{n-p}} w_{i_1 \dots i_p} \quad (8.27)$$

donde

$$\epsilon^{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} \text{sgn}(i_1 \dots i_n) & \text{para todo } i_j \text{ distinto} \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (8.28)$$

es el símbolo de Levi-Cevita para $1 \leq i_j \leq n$. Ahora bien, primero veamos cómo actúa el operador $*$ de Hodge en F , donde F es una 2-forma en una variedad de cuatro dimensiones, que, vista en coordenadas locales,

$$F = \frac{1}{2!} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (8.29)$$

Dado que F es una 2-forma en una variedad de cuatro dimensiones, $*F$ también es una 2-forma cuyas componentes, usando la ecuación (8.27), son,

$$(*F)_{\rho\sigma} = \frac{1}{2!} \epsilon_{\rho\sigma}{}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (8.30)$$

o, equivalentemente, escrita como una 2-forma,

$$*F = \frac{1}{2!} \frac{1}{2!} \epsilon_{\rho\sigma}{}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} dx^\rho \wedge dx^\sigma. \quad (8.31)$$

Como $*F$ es una 2-forma, $d * F$ es una 3-forma, la cual podemos escribir como²

$$d * F = \frac{1}{2!} \frac{1}{2!} \epsilon_{[\rho\sigma}{}^{\mu\nu} \partial_{\lambda]} F_{\mu\nu} dx^\lambda dx^\rho \wedge dx^\sigma. \quad (8.33)$$

Al aplicarle el operador $*$ de Hodge a esta 3-forma, $d * F$, vemos que $*d * F$ es una 1-forma cuyas componentes son,

$$(*d * F)_\alpha = \frac{1}{(4-3)!} \epsilon_\alpha{}^{\rho\sigma\lambda} \frac{1}{2!} \frac{1}{2!} \epsilon_{[\rho\sigma}{}^{\mu\nu} \partial_{\lambda]} F_{\mu\nu}, \quad (8.34)$$

$$= \frac{1}{2!} \frac{1}{2!} \epsilon_\alpha{}^{\rho\sigma\lambda} \epsilon_{[\rho\sigma}{}^{\mu\nu} \partial_{\lambda]} F_{\mu\nu}. \quad (8.35)$$

Como los índices λ, ρ, σ están contraídos con los correspondientes índices en $\epsilon_\alpha{}^{\rho\sigma\lambda}$, que de por sí es un objeto completamente antisimétrico, podemos omitir los corchetes cuadrados que denotan la antisimetría en los índices, en lo que sigue ya no los escribimos.

Recordando algunas propiedades del Apéndice (B) se puede ver que,

$$\eta_{\alpha\beta} \epsilon^{\rho\sigma\lambda\beta} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \eta_{\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\rho\sigma\lambda\beta}, \quad (8.36)$$

$$\epsilon^{\rho\sigma\lambda\beta} \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} = 2! \delta_{\rho\sigma}^{\alpha\lambda} = 2! (\delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\beta - \delta_\nu^\lambda \delta_\mu^\beta). \quad (8.37)$$

²Esto último sólo usando la expresión para la derivada exterior de una dos forma,

$$dF = \frac{1}{2!} \partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho, \quad (8.32)$$

teniendo cuidado de antisimetrizar los índices adecuados.

De lo anterior,

$$(*d * F)_\alpha = \frac{1}{2!} \frac{1}{2!} \eta_{\alpha\beta} 2! (\delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\beta - \delta_\nu^\lambda \delta_\mu^\beta) \partial_\lambda F_{\mu\nu}, \quad (8.38)$$

$$= \frac{1}{2!} \eta_{\alpha\beta} (\partial_\mu F^{\mu\beta} - \partial_\mu F^{\beta\mu}) = \frac{1}{2!} 2 \eta_{\alpha\beta} \partial_\mu F^{\mu\beta} = J_\alpha. \quad (8.39)$$

Si ahora, se multiplica lo obtenido por $\eta^{\alpha\gamma}$, la inversa de $\eta_{\alpha\beta}$ y es tal que se cumple que $\eta^{\alpha\gamma} \eta_{\alpha\beta} = \delta_\beta^\gamma$, se obtiene que

$$\eta^{\alpha\gamma} (\eta_{\alpha\beta} \partial_\mu F^{\mu\beta} = J_\alpha). \quad (8.40)$$

Luego,

$$\delta_\beta^\gamma \partial_\mu F^{\mu\beta} = J^\gamma \text{ si y sólo si } \partial_\mu F^{\mu\gamma} = J^\gamma. \quad (8.41)$$

Esta última expresión coincide con la ecuación (1.16) presentada en el capítulo 1. Por tanto, podemos concluir que la ecuación (8.20) en efecto es la misma que (1.16).

8.6. Observaciones

En síntesis, hemos mostrado que las ecuaciones de Maxwell vistas en el capítulo 1 son las mismas que las de una teoría de norma con grupo de estructura $U(1)$.

Finalizamos con algunas observaciones a modo de resumen en la siguiente tabla.

Conceptos principales		
Concepto	Caso general	Caso $G=U(1)$
espacio base	M	Minkowski $\mathcal{M}$
espacio total	E	$\mathcal{M} \times \mathbb{C}$
fibra	E_p	$\mathbb{C}$
$End(E) - \text{valued } 1 - \text{form}$	$A = A_{\mu i}^j e_j \otimes e^i \otimes dx^\mu$	$A = A_\mu dx^\mu = i \mathcal{A}_\mu$
curvatura	$F_{\mu\nu i}^j = \partial_\mu A_{\nu i}^j - \partial_\nu A_{\mu i}^j + A_{\mu k}^j A_{\nu i}^k - A_{\nu k}^j A_{\mu i}^k$	$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$
identidad de Bianchi	$d_D F = 0$	$dF = 0$
2ª ecuación de Yang-Mills	$*d_D * F = J$	$*d * F = J$

Conclusiones

Con esto, damos por terminado el trabajo. Esperamos que estas páginas hayan sido gratas para el lector y que el contenido no fuera confuso y si de utilidad. El objetivo que motivó el desarrollo de esta tesis consideramos se ha cumplido pues estudiamos la formulación geométrica de las teorías de Yang Mills y revisamos cómo son para el grupo $G = U(1)$. A lo largo del documento se revisó el material que consideramos mínimo necesario para entender el tema propuesto; además, se ha buscado ser lo más claro posible para llegar no sólo al público especialista en el área.

Iniciamos con la teoría electromagnética de Maxwell desde sus ecuaciones principales, desarrollando su expresión en términos de potenciales; posteriormente se revisó todo lo concerniente a variedades diferenciables, haces y conexiones entre muchos otros conceptos, siempre priorizando las propiedades, definiciones y algunas observaciones en torno al tema de nuestro interés. Así se obtuvieron las expresiones para las ecuaciones de Yang Mills cuando su grupo de norma es $U(1)$ y se concluyó que, en coordenadas locales, son las mismas que para el electromagnetismo en la física.

De lo anterior, considero que quizá más adelante podré responder mayores cuestionamientos no solo en torno a un grupo tan elemental como $U(1)$ sino para muchos otros más desde el enfoque geométrico usado en la tesis. Además, en el camino encontré muchas preguntas que puede ser divertido estudiar, pues las teorías de norma seguramente tienen mucho que decir.

Sin más que agregar, agradecemos el tiempo e interés a este trabajo.

Apéndice A

Notación tensorial y de Einstein

La convención de Einstein se ocupa para simplificar la notación en el caso de sumatorias, si la expresión tiene índices repetidos en un término, esto indica la suma sobre el rango de valores que toman dichos índices. Por ejemplo, en un espacio vectorial con tres dimensiones, dados un par de vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cuyas componentes, en alguna base, son A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 y B_3 respectivamente, la expresión para el producto escalar o producto punto será

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{n=1}^3 A_n B_n = A_n B_n. \quad (\text{A.1})$$

Note que con esta convención se omite el símbolo de sumatoria. A los índices en la ecuación anterior se les llama mudos (dummies) ya que pueden reemplazarse por otra letra sin alterarse la expresión.

Veamos cómo se aplica la convención de suma de Einstein en el siguiente ejemplo:

$$\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) \left(\vec{C} \cdot \vec{D}\right) = \sum_{m=1}^3 A_m B_m \sum_{n=1}^3 C_n D_n = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 A_m B_m C_n D_n = A_m B_m C_n D_n. \quad (\text{A.2})$$

Note que es importante indicar las sumas de forma independiente por medio de diferentes pares de índices repetidos.

Observación:

1. Un índice libre es aquel que aparece una sola vez en cada término aditivo de una

expresión por ejemplo, en:

$$a_i = \epsilon_{ijk} b_j c_k + D_{ij} e_j \quad (\text{A.3})$$

i es libre e implica la existencia de i ecuaciones independientes ya que toma todos los valores asociados a las dimensiones del espacio en donde se está trabajando.

2. A los índices mudos se les puede identificar como aquellos que aparecen dos veces dentro de un término aditivo de una expresión e implican una suma sobre dicho índice sobre todos sus valores posibles. Note que en la expresión en (A.3), j y k son índices mudos.

A.1. Símbolos de permutación y delta de Kronecker.

Definición A.1. El símbolo de permutación ¹ ϵ_{rmn} es un símbolo con tres índices definido como:

$$\epsilon_{rmn} = \begin{cases} 1 & \text{si } rmn \text{ es una permutación par de } 123 \\ -1 & \text{si } rmn \text{ es una permutación impar de } 123 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Observación:

1. ϵ_{rmn} es igual a cero si rmn tiene cualesquiera dos números iguales.
2. Si en ϵ_{rmn} cualesquiera par de índices es intercambiado, el valor del signo cambia. Por ejemplo, $\epsilon_{rmn} = -\epsilon_{nmr}$.
3. $\epsilon_{rmn} = \epsilon_{nrm}$ pues la paridad o imparidad de los dos órdenes es el mismo.
4. El símbolo de permutación ϵ_{rmn} puede generalizarse a n dimensiones.
5. Se puede dar una definición similar para ϵ^{rmn} el cual también satisface las observaciones anteriores.

¹También es llamado símbolo de Levi-Civita o tensor de Levi-Civita

Definición A.2. El símbolo de la delta de Kronecker², δ_{mn} está definido por:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } m=n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Observación:

1.

$$\delta_{mn} = \delta_{nm} \quad (\text{A.6})$$

2.

$$\sum_{m=1}^3 \delta_{mn} A_m = \delta_{nn} A_n = \delta_{1n} A_1 + \delta_{2n} A_2 + \delta_{3n} A_3. \quad (\text{A.7})$$

Sólo el n-ésimo término es diferente de cero así, $\delta_{nn} A_n = A_n$.

3.

$$\epsilon_{rmn} \epsilon_{rpq} = \delta_{mp} \delta_{nq} - \delta_{mq} \delta_{np}. \quad (\text{A.8})$$

A.1.1. Producto cruz o vectorial.

Dados $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores en un espacio vectorial de tres dimensiones³, se define un vector $\vec{C}$ cuya r-ésima componente está dada por $C_r = \epsilon_{rmn} A_m B_n$.

Observe que

$$C_1 = \epsilon_{1mn} A_m B_n = \epsilon_{123} A_2 B_3 + \epsilon_{132} A_3 B_2 = A_2 B_3 - A_3 B_2, \quad (\text{A.9})$$

donde, al expandir la suma, hemos omitido escribir los términos que son cero. De manera similar, $C_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3$ y $C_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1$, así, $\vec{C}$ tiene las mismas componentes que el producto vectorial de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Esto es,

$$(A \times B)_r = \epsilon_{rmn} A_m B_n. \quad (\text{A.10})$$

²Es una función de dos variables, también puede escribirse como δ_j^i

³Aunque el producto vectorial está definido solamente en tres dimensiones, este puede generalizarse a n dimensiones, con $n \neq 0, 1$, y solo tendrá sentido si se usan $n - 1$ vectores, dependiendo de la dimensión en la que se esté.

A.2. Identidades vectoriales

A continuación se enlistan algunas operaciones válidas con la simbología anterior:

1. Renombrar índices mudos: $A_m B_m = A_n B_n$
2. Cambio en el orden de los factores de un producto: $A_m B_n C_r = A_m C_r B_n$
3. Propiedades del símbolo de permutación: $\epsilon_{rmn} = \epsilon_{nrm} = -\epsilon_{rnm}$.
4. Propiedad de la delta de Kronecker: $\delta_{mn} A_m = A_n$.
5. La identidad: $\epsilon_{rmn} \epsilon_{rpq} = \delta_{mp} \delta_{nq} - \delta_{mq} \delta_{np}$.
6. Propiedad distributiva: $A_m (B_n + C_n) = A_m B_n + A_m C_n$.

De las propiedades anteriores se deriva la identidad:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

mientras que para el triple producto vectorial:

$$[\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})]_r = [\vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})]_r$$

así,

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}).$$

A.3. Operador derivada

Dada una función $U(x_1, x_2, x_3)$ definida en los reales, se define $U_{,n} := \frac{\partial U}{\partial x_n}$. A partir de esta notación, las siguientes expresiones que involucran el operador derivada $(\vec{\nabla})$ se escriben como:

1. $(\vec{\nabla} U)_n = U_{,n}$ n-ésima componente del gradiente de U .
2. $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} U = U_{,n,n}$ Laplaciano de U .

Para un campo vectorial $\vec{A}$, tenemos

1. $(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{A})_r = v_{r,m,m}$ r-ésima componente del Laplaciano de $\vec{A}$.
2. $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = A_{n,n}$ Divergencia de $\vec{A}$.

$$3. \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right)_r = \epsilon_{rmn} A_{n,m} \quad \text{r-ésima componente del rotacional de } \vec{A}$$

Observación:

Como $\frac{\partial^2 A_r}{\partial x_n \partial x_m} = \frac{\partial^2 A_r}{\partial x_m \partial x_n}$ se tiene que $A_{r,m,n} = A_{r,n,m}$.

La notación, símbolos y convenciones aquí usados son de manera breve los utilizados en esta tesis.

Apéndice B

Métrica

Una métrica en un espacio vectorial V es un mapeo $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que cumple lo siguiente:

1. es bilineal o lineal en cada entrada:

$$g(cv + v', w) = cg(v, w) + g(v', w), \quad (\text{B.1})$$

$$g(v, cw + w') = g(v, w) + cg(v, w'), \quad (\text{B.2})$$

2. simétrico:

$$g(v, w) = g(w, v), \quad (\text{B.3})$$

3. no degenerado:

$$\text{Si } g(v, w) = 0 \text{ para todo } w \in V \text{ entonces } v = 0. \quad (\text{B.4})$$

En la física se dice que $v \in V$ es spacelike, timelike o null dependiendo si $g(v, v)$ es positivo, negativo o cero respectivamente.

Si $g(v, w) = 0$ para $v, w \in V$ entonces se dice que v y w son ortogonales.

Dada una métrica en V , siempre se puede encontrar una base ortonormal para V es decir; una base $\{e_\mu\}$ tal que $g(e_\mu, e_\nu) = 0$ si $\mu \neq \nu$ y ± 1 si $\mu = \nu$.

Observación:

El número $+1$ y -1 es independiente de la base ortonormal; si el número de $+1$ es p y el número de -1 es q , decimos que la métrica tiene signatura (p, q) .

Podemos escribir la métrica en el lenguaje de índices, es decir como se define a continuación:

Definición B.1. Sean (U, ϕ) una carta y e_μ una base de campos vectoriales, se definen las componentes de una métrica como:

$$g_{\mu\nu} = g(e_\mu, e_\nu). \quad (\text{B.5})$$

Si la variedad M es n -dimensional, $g_{\mu\nu}$ es una matriz $n \times n$. La condición de no degeneración implica que dicha matriz es invertible, denotamos como $g^{\mu\nu}$ a su matriz inversa. Por otro lado, usando la métrica, se puede generar una correspondencia entre campos vectoriales y 1-formas. Así, sea $v = v^\mu e_\mu$ un campo vectorial escrito en sus componentes asociadas a una carta (U, ϕ) , la correspondiente 1-forma $g(v, \cdot)$ es igual a $v_\nu f^\nu$, donde f^ν es la base dual de 1-formas y $v_\nu = g_{\mu\nu} v^\mu$. Ahora, sea $\omega = \omega_\mu f^\mu$ una 1-forma en una carta (U, ϕ) , el correspondiente campo vectorial se define como $\omega^\nu e_\nu$, donde $\omega^\nu = g^{\mu\nu} \omega_\mu$. Al proceso anterior es decir, de conversión entre campos vectoriales y 1-formas usando la métrica se le llama subir y bajar índices.

En general, si se tiene una cantidad con algunos índices

$$A_{\delta\epsilon\cdots\zeta}^{\alpha\beta\cdots\gamma}, \quad (\text{B.6})$$

se puede bajar o subir cualquier índice con la métrica y su inversa, usando la convención de sumación de Einstein. Es decir, podemos bajar α y obtener

$$A_{\alpha\delta\epsilon\cdots\zeta}^{\beta\cdots\gamma} = g_{\alpha\mu} A_{\delta\epsilon\cdots\zeta}^{\mu\beta\cdots\gamma}, \quad (\text{B.7})$$

o subir δ y obtener

$$A_{\epsilon\cdots\zeta}^{\delta\alpha\beta\cdots\gamma} = g^{\delta\mu} A_{\mu\epsilon\cdots\zeta}^{\alpha\beta\cdots\gamma}. \quad (\text{B.8})$$

Note que se puede subir y bajar índices en la métrica así, g_ν^μ es igual a la delta de Kronecker δ_μ^ν , esto es, 1 si $\mu = \nu$ y 0 de otra forma. En este caso, el orden de los índices no importa

dado que $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ pero es importante el orden en los índices cuando se tienen varios índices libres.

B.1. Métrica de Minkowski

Finalmente, concluimos este apéndice con una muy breve revisión del espacio $\mathcal{M}$ de Minkowski. Pensemos en $\mathbb{R}^4$ con la métrica siguiente (métrica de Minkowski)

$$\eta(v, w) = -v^0 w^0 + v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3. \quad (\text{B.9})$$

Las componentes de dicha métrica en la base estándar son

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Observe que para el espacio de Minkowski se tiene la signatura $(3, 1)$.

Bibliografía

- [1] Baez, J. (1994) Gauge fields, knots and gravity. World Scientific Publishing Co Pte Ltd, Singapore, Singapore
- [2] Isham, C.J. (1999). Modern Differential Geometry for Physicists, 2nd ed. World Scientific, Singapore.
- [3] Torres del Castillo, G.F. (2012). Differentiable Manifolds A Theoretical Physics Approach, Birkhäuser.
- [4] Jeevanjee, N. (2015). An Introduction to Tensors and Group Theory for Physicists. 2nd ed. Springer International Publishing Switzerland.
- [5] Jackson, J.D. (1998). Classical Electrodynamics, 3rd ed. John Wiley and Sons, Inc.
- [6] Saletan E. J. (1998) Classical dynamics: a contemporary approach. Cambridge.
- [7] Jones, Arthur (1987) Manifolds and mechanic. New York, Cambridge University Press.

Índice alfabético

- C^∞ , 14
- G -conexión, 69
- G -haz (G -bundle), 59
- $\Omega^n(M)$, 31
- w -forma E-valuada, 73
- 4-vector de densidad
 - carga corriente, 4, 5
- funciones proyección, 15
- atlas, 14
- campo eléctrico, 1
- campo magnético, 1
- campo vectorial (vector field), 23
- campo vectorial
 - completo, 37
- campo vectorial
 - inducido, 35
- campos vectoriales
 - izquierdo-invariantes, 52
- carta (o carta local), 12
- carácter de una
 - representación, 48
- compacta, 15
- componentes del tensor
 - de campo de fuerza, 4
- conexión (connection), 64
- conexión plana estándar (standard flat connection), 67
- convención de suma de Einstein, 3, 20
- corchete de Lie (Lie bracket), 23, 38
- corriente, 1, 7
- cuadri-vector de
 - potencial, 3, 9
- curva, 19
- curva integral, 36
- curvatura, 73
- densidad de carga, 1
- derecho-invariante, 51
- derivada covariante, 64
- derivada de Lie $\mathcal{L}_v w$ de
 - una 1-forma, 38
- derivada de Lie de f con
 - respecto a v $\mathcal{L}_v f$, 37
- derivada de Lie de w con
 - respecto a v $\mathcal{L}_v w$, 38
- derivada direccional, 19
- derivada direccional de f
 - en la dirección v (vf) , 20
- derivada exterior
 - covariante, 74
- derivada exterior de una
 - función $f \in \mathbb{C}^\infty(M)$, 39
- derivadas parciales, 5

- difeomorfismo, 16
- difeomorfismo, 16
- diferencial de f en un
 - punto $p \in M$, 28
- divergencia, 2
- ecuaciones de estado, 75
- ecuaciones de Maxwell,
 - 1, 4, 5
- ecuaciones de Maxwell ,
 - 4
- ecuaciones de
 - Yang-Mills, 47,
 - 76
- ecuación de continuidad
 - de la corriente
 - electromagnética,
 - 6
- endomorfismo, 62
- espacio cotangente, 27
- espacio de las conexiones
 - módulo las
 - transformaciones
 - de norma (gauge
 - equivalence
 - classes of
 - connections), 69
- espacio de tensores
 - r-contravariantes,
 - 30
- espacio de tensores
 - s-covariantes, 30
- espacio representación,
 - 47
- espacio tangente, 18
- espacio topológico, 14
- fase (phase), 46
- fibra (fiber), 54
- fibra estándar (standard
 - fiber), 60
- fibra sobre p (fiber)), 21
- flujo local (local flow), 35
- funciones coordenadas,
 - 15
- función de transición, 12,
 - 14
- función restricción, 57
- Funciones coordenadas,
 - 15
- generador infinitesimal,
 - 36
- gradiente, 2
- grupo, 42
- grupo de Lie, 11
- grupo de Lorentz, 11, 45
- grupo de norma, 47
- grupo de norma (gauge
 - group), 60
- grupo de simetría, 47
- grupo especial lineal, 44
- grupo especial ortogonal,
 - 45
- grupo especial unitario,
 - 45
- grupo lineal general, 44
- grupo ortogonal, 45
- grupo real de Lie, 43
- grupo uni-paramétrico
 - de transformacio-
 - nes, 34
- grupo unitario, 45
- h-relacionados
 - (h-related), 24
- haces isomorfos, 56
- Hausdorff, 14
- haz (bundle), 54
- haz cotangente
 - (cotangent
 - bundle), 27
- haz espacio (bundle
 - space), 54
- haz fibrado, 55, 57
- haz tangente (tangent
 - bundle), 21
- homomorfismo, 43
- identidad de Bianchi, 76
- identidad de Jacobi, 50
- invariantes de norma
 - (gauge-

- invariant), 77
- isomorfismo, 43
- izquierdo-invariante, 51
- Jacobiano (o diferencial), 23
- la corriente
 - electromagnética, 5
- lagrangiana, 7, 9, 22
- lema de Schur, 49
- Ley de Ampere, 1
- Ley de Coulomb (Ley de Gauss electrica), 1
- Ley de Faraday, 1
- Ley de Gauss magnetica, 1
- ley de Leibniz, 64
- mapeo exponencial, 52
- Minkowski, 78, 97
- morfismo, 43
- métrica, 45
- n-forma, 31
- operador estrella de
 - Hodge, 76
- permeabilidad magnética
 - absoluta, 1
- permitividad absoluta, 1
- potencial vectorial, 64, 65
- potenciales escalar y vectorial, 3
- proyección canónica, 21
- pullback, 17
- push-forward, 24
- representaciones
 - equivalentes, 47
- representación, 46
- representación fiel
 - (faithful), 47
- representación reducible, 48
- rotacional, 2
- sección (section), 57
- segundo numerable, 14
- signatura, 45
- sistema coordenado, 12
- suave (smooth), 14
- suma directa, 48
- tensor de campo de
 - fuerza, 3, 5, 7, 9
- tensor de curvatura, 70
- topología, 14
- transformaciones de
 - Lorentz, 11
- transformación de
 - norma, 77
- transformación de norma
 - (gauge transformation), 62
- traslación derecha, 51
- traslación izquierda, 50
- trivialización local, 57
- $v_p^{\mathcal{C}}(f)$, 35
- Variedad, 15
- variedad compacta, 48
- variedad diferenciable, 15
- variedad topológica, 15
- vector cotangente o
 - vector covariante, 27
- vector tangente, 17
- álgebra de Lie, 50, 52