Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Postgrado en Ciencias Física Aplicada

Estudio de las características de los estados coherentes generalizados

Tesis

que para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias
(Física Aplicada)

presenta:

Guadalupe García Arellano

Director de Tesis:

Dr. Gerardo F. Torres del Castillo

Puebla, Pue. Enero 2016

Título: Estudio de las características de los estados coherentes generalizados
Estudiante: GUADALUPE GARCÍA ARELLANO

COMITÉ

_____

Dra. Mercedes P. Velázquez Quesada
Presidente

_____

Dr. Alberto Escalante Hernández
Secretario

_____

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla
Vocal

_____

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Vocal

_____

Dr. Gerardo F. Torres del Castillo
Asesor

A mi madre

Agradecimientos

A mi familia por su apoyo incondicional.

A CONACYT por la beca otorgada durante el periodo Enero 2014-Diciembre 2015.

Índice general

Resumen **1**

Introducción **2**

1. Estados coherentes del oscilador armónico **3**
1.1. Función de onda del estado coherente 3
1.2. Propiedades de los estados coherentes 6
1.2.1. Eigenvectores del operador de aniquilación 6
1.2.2. Saturación de la desigualdad de Heisenberg 7
1.2.3. Operador de Desplazamiento 8
1.2.4. Completez 9

2. Estados coherentes generalizados **10**
2.1. Función de onda del ECG 10
2.2. Propiedades de los ECG 12
2.2.1. Relaciones de ortogonalidad 12
2.2.2. Generalización de los operadores escalera 13
2.2.3. Desigualdad de Heisenberg 14
2.2.4. Los ECG como base 14
2.3. Función generatriz para los ECG 17
2.4. Aplicaciones de la función generatriz 19
2.4.1. Propiedad de la delta de Dirac 19
2.4.2. Relaciones de recurrencia 21
2.4.3. Relaciones de ortogonalidad 22

3. La función de Wigner **25**
3.1. Generalidades sobre la función de Wigner 25
3.2. FW para una partícula en un pozo infinito 26
3.3. FW para el estado coherente de un oscilador armónico 29
3.4. FW para un oscilador armónico en un campo eléctrico uniforme 30
3.4.1. Determinación de la fase 32

Conclusiones **34**

Bibliografía **35**

Resumen

En este trabajo hacemos una revisión sobre las principales características de los estados coherentes generalizados reportadas en la literatura y construimos una función generatriz para sus funciones de onda, a partir de la cual calculamos relaciones de ortogonalidad entre ellas.

Introducción

Los estados coherentes fueron descubiertos en 1926 por Schrödinger (ver [17]) cuando buscaba soluciones al oscilador armónico cuántico que tuvieran un comportamiento lo más cercano posible a las soluciones clásicas del sistema.

Estos estados alcanzaron su popularidad cuando Glauber, en 1963, los utilizó de manera exitosa para describir el fenómeno de coherencia de la luz. Siendo él quien les dió el nombre de estados coherentes.

Después del trabajo de Glauber, se encontraron aplicaciones para los estados coherentes en áreas como la comunicación óptica, computación cuántica, entre otras (ver [10]).

A partir de 1950 los estados coherentes tuvieron un auge en la teoría de representación de grupos (ver [5],[9],[13],[14]). En 1954, I. R. Senitzky (ver [18]) demostró que una generalización de los estados coherentes, correspondía a desplazar algún eigenestado del oscilador armónico de modo que su densidad de probabilidad oscilara de acuerdo a una trayectoria clásica.

En este trabajo estudiaremos las principales características de los estados coherentes generalizados que propuso Senitzky. Estos estados son interesantes porque combinan propiedades de eigenestado y estado coherente.

En el capítulo 1 calculamos la función de onda de un estado coherente bajo el esquema propuesto en la referencia [6]. A diferencia del procedimiento que se presenta en esta referencia, mostramos explícitamente cómo obtener la función de onda hallada por Schrödinger. También hacemos una revisión de las principales características reportadas en la literatura para los estados coherentes (ver [5],[6],[15],[19]) como saturación de la desigualdad de Heisenberg, relación con el grupo de Heisenberg-Weyl y completez.

En el capítulo 2 extendemos las ideas desarrolladas en el capítulo previo, para calcular la función de onda de un estado coherente generalizado y hacemos una revisión sobre algunas de sus propiedades reportadas en la literatura (ver [14],[15]). Además, en este capítulo proponemos y mostramos la construcción de una función generatriz para las funciones de onda de los estados coherentes generalizados, a partir de la cual obtenemos relaciones de ortogonalidad entre ellas.

En el capítulo 3 revisamos cómo puede obtenerse la forma en la que se desplaza la densidad de probabilidad de un estado coherente a partir de la función de Wigner (ver [20]). Específicamente calculamos la función de Wigner para el estado base de un oscilador armónico, un oscilador armónico en un campo eléctrico uniforme y una partícula en un pozo infinito.

Capítulo 1

Estados coherentes del oscilador armónico

En este capítulo calculamos la función de onda de un estado coherente bajo el esquema propuesto en la referencia [7]. A diferencia del procedimiento que se presenta en esta referencia, mostramos explícitamente cómo obtener la función de onda hallada por Schrödinger.

1.1. Función de onda del estado coherente

Cualquier función compleja de $\vec{x}$ y t puede escribirse como:

$$\Psi(\vec{x},t) = \sqrt{\rho(\vec{x},t)}\exp\left[\frac{iS(\vec{x},t)}{\hbar}\right] \tag{1.1}$$

con ρ una función positiva y S una función real. Si sustituimos esta función en la ecuación de Schrödinger, obtenemos (ver [19]):

$$i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\rho}+\frac{i}{\hbar}\sqrt{\rho}\frac{\partial S}{\partial t}\right]$$

$$= \frac{-\hbar^2}{2m}\left[\nabla^2\sqrt{\rho}+\left(\frac{2i}{\hbar}\right)(\nabla\sqrt{\rho}).(\nabla S)-\frac{1}{\hbar^2}\sqrt{\rho}|\nabla S|^2+\left(\frac{i}{\hbar}\right)\sqrt{\rho}\nabla^2 S\right]+\sqrt{\rho}V \tag{1.2}$$

Al separar la parte real e imaginaria, vemos que, para que la función propuesta sea una solución de la ecuación de Schrödinger, ρ y S deben satisfacer dos ecuaciones diferenciales:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\sqrt{\rho}+\frac{1}{2m}\sqrt{\rho}|\nabla S|^2+\sqrt{\rho}V+\sqrt{\rho}\frac{\partial S}{\partial t}=0 \tag{1.3}$$

$$-\frac{\hbar}{m}(\nabla\sqrt{\rho}).(\nabla S)-\frac{\hbar}{2m}\sqrt{\rho}\nabla^2 S-\hbar\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\rho}=0 \tag{1.4}$$

Multiplicando (1.4) por $1/\sqrt{\rho}$, reconocemos que esta ecuación corresponde a la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla.j=0 \tag{1.5}$$

con $j=\frac{\rho\nabla S}{m}$.

Mientras que (1.3), en el límite clásico ($\hbar \to 0$), se convierte en la ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} + \frac{1}{2m}|\nabla S|^2 + V + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{1.6}$$

Por lo tanto, encontrar una solución para la ecuación de Schrödinger, es equivalente a encontrar ρ y S que satisfagan la ecuación de continuidad y una ecuación que en el límite corresponde a la de Hamilton-Jacobi. A continuación utilizaremos este hecho para calcular la función de onda del estado coherente del oscilador armónico en una dimensión, partiendo de la idea que tenemos para un estado coherente, como aquel estado cuya densidad de probabilidad coincide con la del estado base pero que se desplaza sin deformarse. En los cálculos posteriores utilizaremos $\hbar = 1, m = 1$ y $\omega = 1$ por comodidad.

Consideremos la siguiente función:

$$\Psi(x,t) = A\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[x - y(t)\right]^2\right\} e^{iS(x,t)} \tag{1.7}$$

donde S es una función real, y una función que depende solamente del tiempo y A una constante de normalización. Como podemos notar, el módulo al cuadrado de esta función, corresponde a la densidad de probabilidad del estado base del oscilador armónico desplazada por una cantidad $y(t)$. Nos gustaría obtener la forma de las funciones $y(t)$ y $S(x,t)$. Como queremos que esta función de onda corresponda a un estado accesible del sistema, entonces debe satisfacer la ecuación de Schrödinger.

Aplicando lo anterior, obtenemos que, para que Ψ sea solución, S y $y(t)$ deben satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + (x-y)\frac{\partial S}{\partial x} = (x-y)\dot{y} \tag{1.8}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + xy - \frac{y^2}{2} = -\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{1}{2} \tag{1.9}$$

donde el punto indica derivada con respecto al tiempo.

Para resolver la primera ecuación hacemos la sustitución $p = \frac{\partial S}{\partial x}$, lo cual permite obtener una ecuación diferencial de primer orden no homogénea:

$$p' + q(x)p = q(x)\dot{y} \tag{1.10}$$

donde $q(x) = 2(y - x)$ y la prima indica derivada parcial con respecto a x.

Para resolver esta ecuación inhomogénea calculamos el factor de integración $\mu(x)$:

$$\mu(x) = e^{\int q(x)dx} = e^{y^2}e^{-(x-y)^2} \tag{1.11}$$

tal que:

$$(\mu p)' = \mu(p' + qp) = \mu\left[q(x)\dot{y}\right] \tag{1.12}$$

entonces:

$$\begin{aligned}\mu p &= \int \mu \left[q(x)\dot{y}\right] dx \\ &= \int e^{y^2} e^{-(x-y)^2} \left[2(y-x)\dot{y}\right] dx \\ &= -2\dot{y}e^{y^2} \int x e^{-(x-y)^2} dx + 2y\dot{y}e^{y^2} \int e^{-(x-y)^2} dx \\ &= -2\dot{y}e^{y^2} \left[\frac{e^{-(x-y)^2}}{-2}\right] \\ &= \dot{y}e^{y^2} e^{-(x-y)^2} + c(t) \end{aligned} \tag{1.13}$$

donde $c(t)$ agrupa todas las constantes que salen en la integración y es una función que depende solamente del tiempo. En la referencia [6], la constante $c(t)$ se hace cero sin dar alguna justificación.

Por lo tanto:

$$p = \frac{1}{\mu}\left[\dot{y}e^{y^2} e^{-(x-y)^2} + C_1(t)\right] = \dot{y} + c(t)e^{-y^2} e^{(x-y)^2} \tag{1.14}$$

es decir

$$S(x,t) = \dot{y}x + C_1(t) \int e^{(x-y)^2} dx + C_2(t) \tag{1.15}$$

donde $C_1(t) = c(t)e^{-y^2}$.

A continuación sustituimos la función $S(x,t)$ en la segunda ecuación diferencial que también se debe satisfacer:

$$xy - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = -\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{1}{2} \tag{1.16}$$

$$\frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{C_1^2}{2} e^{2(x-y)^2} + xy - \frac{y^2}{2} = -\ddot{y}x - \dot{C}_1(t) \int e^{(x-y)^2} dx - \frac{1}{2} - \dot{C}_2(t) \tag{1.17}$$

como podemos notar, determinar $y(t), C_1$ y C_2 a partir de esta ecuación, no es sencillo. Para resolverla impondremos como condición que la densidad de probabilidad se mueva siguiendo la trayectoria de un oscilador armónico clásico (en el capítulo 3 veremos cómo utilizando la función de Wigner para calcular la densidad de probabilidad, es posible obtener $y(t)$ para potenciales a lo más cuadráticos), es decir que $y(t)$ satisfaga la siguiente ecuación:

$$y + \ddot{y} = 0 \tag{1.18}$$

con ello, la expresión (1.17) se reduce a:

$$\frac{\dot{y}^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \dot{C}_2(t) + \frac{1}{2} = -\frac{C_1^2}{2} e^{2(x-y)^2} - \dot{C}_1(t) \int e^{(x-y)^2} dx \tag{1.19}$$

La única manera de que se satisfaga esta ecuación, es que $C_1(t)$ sea cero, ya que las funciones $y(t)$ y C_2 son funciones exclusivas de t.

Con esto, la expresión (1.19) se convierte en una ecuación diferencial que permite determinar la constante de integración C_2:

$$\begin{aligned}\dot{C_2} &= \frac{1}{2}(y^2 - \dot{y}^2) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(-\ddot{y}y - \dot{y}^2 - 1\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(-\dot{y}y - t\right)\end{aligned} \tag{1.20}$$

por lo tanto

$$C_2(t) = -\frac{1}{2}\dot{y}(t)y(t) + \frac{1}{2}\dot{y}(0)y(0) - \frac{t}{2} \tag{1.21}$$

Así que la función de onda de un estado desplazado del estado base del oscilador armónico es:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\pi^{1/4}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[x - y(t)\right]^2\right\} e^{i x \dot{y}(t)} e^{-\frac{1}{2}i\left[\dot{y}(t)y(t) - \dot{y}(0)y(0)\right]} e^{-\frac{it}{2}} \tag{1.22}$$

Si calculamos el valor esperado de la posición y momento en este estado:

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x|\Psi(x,t)|^2 dx = y(t) \tag{1.23}$$

$$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{i\dot{y} - (x - y(t))\right\}|\Psi(x,t)|^2 dx = \dot{y}(t) \tag{1.24}$$

podemos reescribir la función de onda del estado coherente como:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\pi^{1/4}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[x - \langle x\rangle\right]^2\right\} e^{i\left[x\langle p\rangle - \frac{1}{2}\langle x\rangle\langle p\rangle\right]} e^{-\frac{it}{2}} \tag{1.25}$$

donde hicimos $\dot{y}(0) = 0$

1.2. Propiedades de los estados coherentes

A continuación hacemos una revisión de las principales características que son reportadas en la literatura para los estados coherentes (ver [5], [6], [15], [19]):

1.2.1. Eigenvectores del operador de aniquilación

Utilizando la notación de Dirac se encontró que la misma función de onda que halló Schrödinger (ver [17]) para un estado coherente (estado que se etiquetará por $|\alpha\rangle$), es obtenida para un eigenvector del operador de aniquilación que se define de la siguiente manera:

$$\widehat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{x} + i\widehat{p}\right) \tag{1.26}$$

$$\widehat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{1.27}$$

donde α es un número complejo.

Estos eigenvectores se expresan comúnmente en términos de los eigenestados del hamiltoniano del oscilador armónico:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{1.28}$$

y tienen la siguiente evolución temporal:

$$|\alpha,t\rangle = e^{-it/2}e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha e^{-it})^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = e^{-it/2}|\alpha e^{-it}\rangle \tag{1.29}$$

La función de onda que se calcula a partir de las expresiones anteriores para un eigenvector del operador de aniquilación es:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\pi^{1/4}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[x-\langle\widehat{x}\rangle\right]^2\right\}e^{i\left[x\langle\widehat{p}\rangle-\frac{1}{2}\langle\widehat{x}\rangle\langle\widehat{p}\rangle\right]}e^{-it/2} \tag{1.30}$$

donde

$$\langle\alpha,t|\widehat{x}|\alpha,t\rangle = \sqrt{2}|\alpha|\cos(t-\theta) \tag{1.31}$$

$$\langle\alpha,t|\widehat{p}|\alpha,t\rangle = -\sqrt{2}|\alpha|\sin(t-\theta) \tag{1.32}$$

que en efecto coincide con la función de onda hallada para el estado base desplazado.

1.2.2. Saturación de la desigualdad de Heisenberg

Otra característica de los estados coherentes es que saturan la desigualdad de Heisenberg, como a continuación se prueba:

$$\begin{aligned}\langle\alpha,t|\widehat{x}^2|\alpha,t\rangle &= \frac{1}{2}\langle\alpha,t|\left(\widehat{a}+\widehat{a}^\dagger\right)^2|\alpha,t\rangle = \frac{1}{2}\langle\alpha,t|\left(\widehat{a}^2+\widehat{a}^{\dagger 2}+1+2\widehat{a}^\dagger\widehat{a}\right)|\alpha,t\rangle \\ &= 2|\alpha|^2\cos^2(t-\theta)+\frac{1}{2}\end{aligned} \tag{1.33}$$

$$\begin{aligned}\langle\alpha,t|\widehat{p}^2|\alpha,t\rangle &= -\frac{1}{2}\langle\alpha,t|\left(\widehat{a}^\dagger-\widehat{a}\right)^2|\alpha,t\rangle = -\frac{1}{2}\langle\alpha,t|\left(\widehat{a}^{\dagger 2}+\widehat{a}^2-1-2\widehat{a}^\dagger\widehat{a}\right)|\alpha,t\rangle \\ &= 2|\alpha|^2\sin^2(t-\theta)+\frac{1}{2}\end{aligned} \tag{1.34}$$

Luego:

$$\langle(\Delta\widehat{x})^2\rangle = \langle\widehat{x}^2\rangle-\langle\widehat{x}\rangle^2 = 2|\alpha|^2\cos^2(t-\theta)+\frac{1}{2}-2|\alpha|^2\cos^2(t-\theta) = \frac{1}{2} \tag{1.35}$$

$$\langle(\Delta\widehat{p})^2\rangle = \langle\widehat{p}^2\rangle-\langle\widehat{p}\rangle^2 = 2|\alpha|^2\sin^2(t-\theta)+\frac{1}{2}-2|\alpha|^2\sin^2(t-\theta) = \frac{1}{2} \tag{1.36}$$

así que:

$$\langle(\Delta\widehat{x})^2\rangle\langle(\Delta\widehat{p})^2\rangle = \frac{1}{4} \tag{1.37}$$

Este resultado es de esperarse, ya que los estados coherentes son el estado base del oscilador armónico desplazado, el cual también satura la desigualdad.

La desigualdad de Heisenberg se considera como una medida de qué tan clásico es un estado, como los estados coherentes la saturan se dice que son los estados más clásicos posibles.

1.2.3. Operador de Desplazamiento

Como se observó en la sección 1.1, la densidad de probabilidad de un estado coherente corresponde a la del estado base de un oscilador armónico con el origen desplazado. Esta propiedad se puede describir mediante la acción de un operador que se encarga de desplazar al estado base, como es mostrado a continuación:

De acuerdo con la ecuación (1.28) el estado coherente puede expresarse en términos de los eigenestados $|n\rangle$ de la siguiente manera:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{1.38}$$

Ya que los eigenestados $|n\rangle$ pueden ser generados por el operador de creación, $|n\rangle = \left(\widehat{a}^\dagger\right)^n/\sqrt{n!}|0\rangle$, podemos escribir esta última expresión como:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\frac{\left(\widehat{a}^\dagger\right)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}e^{\alpha\widehat{a}^\dagger}|0\rangle \tag{1.39}$$

y como se cumple:

$$\exp(-\alpha^*\widehat{a})|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\alpha^*\widehat{a})^n}{n!}|0\rangle = |0\rangle \tag{1.40}$$

entonces podemos escribir la ecuación (1.36) como:

$$|\alpha\rangle = \left(e^{-|\alpha|^2/2}e^{\alpha\widehat{a}^\dagger}e^{-\alpha^*\widehat{a}}\right)|0\rangle = D(\alpha)|0\rangle \tag{1.41}$$

Para reunir las exponenciales que forman al operador $D(\alpha)$ utilizamos la fórmula de Baker-Hausdorff, la cual enuncia que para dos operadores A y B, tales que:

$$[[A,B],A] = [[A,B],B] = 0 \tag{1.42}$$

se cumple:

$$e^{A+B} = e^{-[A,B]/2}e^Ae^B \tag{1.43}$$

Para nuestro caso definimos $A = \alpha\widehat{a}^\dagger$ y $B = -\alpha^*\widehat{a}$, los cuales cumplen:

$$[[A,B],A] = \left[|\alpha|^2I, \alpha\widehat{a}^\dagger\right] = 0 \tag{1.44}$$

$$[[A,B],B] = \left[|\alpha|^2I, -\alpha^*\widehat{a}\right] = 0 \tag{1.45}$$

Así que:

$$D(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2}e^{\alpha\widehat{a}^\dagger}e^{-\alpha^*\widehat{a}} = e^{\alpha\widehat{a}^\dagger-\alpha^*\widehat{a}} \tag{1.46}$$

los estados coherentes pueden obtenerse a partir de la aplicación de un operador de desplazamiento. Lo interesante del operador $D(\alpha)$, es que es un elemento del grupo de Heisenberg-Weyl.

El grupo de Heisenberg-Weyl, está formado por operadores de la forma:

$$G = e^{it}exp\left(\alpha\widehat{a}^\dagger - \alpha^*\widehat{a}\right) \tag{1.47}$$

donde t es un parámetro real y α un número complejo. Cuando los elementos de este grupo actúan sobre un vector fijo del espacio de Hilbert, por ejemplo $|f_0\rangle = |0\rangle$, se obtiene el conjunto ordinario de estados coherentes, cuando elegimos cualquier otro eigenestado, se obtienen los estados coherentes generalizados.

1.2.4. Completez

Los estados coherentes forman un conjunto sobrecompleto:

$$I = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{1.48}$$

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2} \tag{1.49}$$

Estas propiedades son de interés en Óptica cuántica, ya que gracias a ellas es posible construir una funcion de distribución en el espacio fase (ver [20]). Como veremos en el capítulo 3, las funciones de distribución en el espacio fase (en nuestro caso trataremos solamente con la distribución de Wigner) son de gran utilidad en mecánica cuántica, ya que permiten ilustrar las propiedades de los estados cuánticos así como calcular valores esperados de diferentes observables.

Capítulo 2

Estados coherentes generalizados

En este capítulo extendemos las ideas presentadas en el capítulo anterior, para calcular la función de onda de un estado coherente generalizado (posteriormente nos referiremos a ellos como ECG) y revisamos algunas de sus caraterísticas reportadas en la literatura (ver [14], [15])

2.1. Función de onda del ECG

A continuación calcularemos la función de onda de un ECG, de manera similar a como lo hicimos para un estado coherente en el capítulo 1.

Partimos de la idea que tenemos para un estado coherente, como aquel estado cuya función de onda tiene la misma densidad de probabilidad que un eigenestado pero desplazada por una cantidad $y(t)$, tal que $\ddot{y} + y = 0$:

$$\Psi_n(x,t) = \Phi_n(x - y(t))e^{iS(x,t)} \tag{2.1}$$

donde Φ_n es la función de onda de un eigenestado del hamiltoniano del oscilador armónico con energía E_n:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial x^2} + \frac{1}{2}x^2\Phi_n = E_n\Phi_n \tag{2.2}$$

Como queremos que $\Psi_n(x,t)$ sea un estado accesible del sistema, entonces debe satisfacer la ecuación de Schrödinger:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi_n}{\partial x^2} + \frac{1}{2}x^2\Psi_n = i\frac{\partial\Psi_n}{\partial t} \tag{2.3}$$

Al sustituir la expresión (2.1) en esta ecuación y separar la parte real e imaginaria, obtenemos un par de ecuaciones diferenciales que debe satisfacer S:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + xy - \frac{y^2}{2} = -\frac{\partial S}{\partial t} - E_n \tag{2.4}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\Phi_n - \frac{\partial\Phi_n}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{\partial\Phi_n}{\partial t} \tag{2.5}$$

Para resolver la segunda ecuación hacemos la sustitución $p = \frac{\partial S}{\partial x}$, así:

$$p' + f_n(x)p = f_n(x)\dot{y} \tag{2.6}$$

donde $f_n(x) = 2\frac{\partial}{\partial u}\ln\Phi_n(u)$ y $u = x - y(t)$.

Para resolver esta ecuación inhomogénea calculamos el factor de integración $\mu(x)$:

$$\mu(x) = e^{\int f_n(x)dx} = e^{2\ln\Phi_n(u)} = \Phi_n^2 \tag{2.7}$$

tal que:

$$(\mu p)' = \mu(p' + f_n p) = \mu[f_n\dot{y}] \tag{2.8}$$

entonces:

$$\mu p = \int \mu[f_n\dot{y}]dx \tag{2.9}$$

$$= \int \Phi_n^2 \left(2\frac{1}{\Phi_n}\frac{\partial\Phi_n}{\partial x}\dot{y}\right)dx \tag{2.10}$$

$$= 2\dot{y}\int \Phi_n\frac{\partial\Phi_n}{\partial x}dx$$

La integral que aparece en esta última expresión se calcula integrando por partes:

$$\int \Phi_n\frac{\partial\Phi_n}{\partial x}dx = \Phi_n^2 - \int \Phi_n\frac{\partial\Phi_n}{\partial x}dx \tag{2.11}$$

con lo que:

$$\mu p = \dot{y}\Phi_n^2 + C_1(t) \tag{2.12}$$

donde $C_1(t)$ agrupa todas las constantes que salen en la integración y es una función que depende solamente del tiempo.

Por lo tanto:

$$p = \dot{y} + \frac{C_1(t)}{\Phi_n^2} \tag{2.13}$$

es decir:

$$S(x,t) = \dot{y}x + C_1(t)\int \frac{\pi^{1/2}2^n n! e^{u^2}}{H_n^2(u)}dx + C_2(t) \tag{2.14}$$

Al sustituir esta expresión en la segunda ecuación diferencial que debe satisfacer S, obtenemos que, al igual que en el caso del estado coherente, $C_1(t)$ debe ser igual a cero y la constante $C_2(t)$ debe satisfacer:

$$\dot{C_2} = \frac{1}{2}(y^2 - \dot{y}^2) - E_n \tag{2.15}$$

es decir:

$$C_2(t) = -\frac{1}{2}\dot{y}(t)y(t) + \frac{1}{2}\dot{y}(0)y(0) - E_n t$$

Por lo tanto la función de onda para un estado coherente generalizado es:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\pi^{1/4}2^{n/2}\sqrt{n!}}e^{-(x-y(t))^2/2}H_n\left[x - y(t)\right]e^{ix\dot{y}(t)}e^{-\frac{1}{2}i\left[\dot{y}(t)y(t) - \dot{y}(0)y(0)\right]}e^{-i(n+1/2)t} \tag{2.17}$$

que coincide con la función de onda que halló Senitzky para un eigenestado del oscilador armónico desplazado:

$$\Psi_{n,\alpha}(x,t) = \frac{1}{\pi^{1/4}2^{n/2}\sqrt{n!}} e^{-(x-\langle\widehat{x}\rangle)^2/2} H_n[x-\langle\widehat{x}\rangle] \exp(i[-(n+1/2)t + x\langle\widehat{p}\rangle - \langle\widehat{x}\rangle\langle\widehat{p}\rangle/2]) \tag{2.18}$$

donde $\langle\widehat{x}\rangle$ y $\langle\widehat{p}\rangle$ son los valores esperados de la posición y el momento en el estado $|n,\alpha\rangle$

$$\langle\widehat{x}\rangle = \langle n,\alpha|\widehat{x}|n,\alpha\rangle = \sqrt{2}|\alpha|\cos(t-\theta) \tag{2.19}$$

$$\langle\widehat{p}\rangle = \langle n,\alpha|\widehat{p}|n,\alpha\rangle = -\sqrt{2}|\alpha|\sin(t-\theta) \tag{2.20}$$

Como podemos notar, para etiquetar a un estado coherente generalizado, se necesita un número α que da el caracter de estado coherente y un número n que indica el eigenestado excitado del oscilador. Cuando $n = 0$ la solución se reduce a la función de onda de los estados coherentes y cuando $\alpha = 0$ la solución se reduce a los eigenestados de energía:

$$\Psi_{n,0}(x,t) = \frac{1}{\pi^{1/4}2^{n/2}\sqrt{n!}} e^{-x^2/2} H_n[x] \exp(-i(n+1/2)t) \tag{2.21}$$

La función de onda del ECG difiere de la del eigenestado de energía en que su amplitud está desplazada por un término dependiente del tiempo y la fase está desplazada por una cantidad $x\langle\widehat{p}\rangle - \langle\widehat{x}\rangle\langle\widehat{p}\rangle/2$, es decir la densidad de probabilidad de un estado coherente generalizado mantiene la misma forma que la densidad estática pero desplazada.

2.2. Propiedades de los ECG

A continuación enunciamos las principales características que son reportadas en la literatura para los estados coherentes generalizados (ver [14], [15]):

2.2.1. Relaciones de ortogonalidad

Utilizando la notación de los ECG encontramos que los eigenestados de energía satisfacen la relación de ortogonalidad ya conocida

$$\langle n,0|m,0\rangle = \delta_{nm} \tag{2.22}$$

Esta propiedad es preservada por los ECG con la misma amplitud compleja:

$$\langle n,\alpha|m,\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*_{n,\alpha}\Psi_{m,\alpha}dx \tag{2.23}$$

$$= \frac{\exp(it[n-m])}{\pi^{1/2}2^{(n+m)/2}\sqrt{n!}\sqrt{m!}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\langle\widehat{x}\rangle)^2} H_n[(x-\langle\widehat{x}\rangle)]H_m[(x-\langle\widehat{x}\rangle)]dx \tag{2.24}$$

$$= \frac{\exp(it[n-m])}{\pi^{1/2}2^{(n+m)/2}\sqrt{n!}\sqrt{m!}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} H_n[u]H_m[u]du \tag{2.25}$$

$$= \frac{\exp(it[n-m])}{\pi^{1/2}2^{(n+m)/2}\sqrt{n!}\sqrt{m!}} 2^n\pi^{1/2}n!\delta_{nm} \tag{2.26}$$

$$= \delta_{nm}$$

Sin embargo para diferentes amplitudes complejas ocurre (ver prueba en [15]):

$$\langle n,\beta|n,\alpha\rangle = e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2-2^{\alpha\beta^*})/2}L_n(|\alpha-\beta|^2)$$

donde los $L_n(z)$ son los polinomios de Laguerre.

2.2.2. Generalización de los operadores escalera

Podemos preguntarnos ¿Cómo trabajan los operadores escalera sobre los ECG? Sabemos que los estados coherentes son eigenvectores del operador de aniquilación:

$$\widehat{a}|0,\alpha\rangle = \alpha|0,\alpha\rangle \tag{2.27}$$

y que los eigenestados de energía son aniquilados y creados por los operadores escalera:

$$\widehat{a}|n,0\rangle = \sqrt{n}|n-1,0\rangle \tag{2.28}$$

$$\widehat{a}^\dagger|n,0\rangle = \sqrt{n+1}|n+1,0\rangle \tag{2.29}$$

y nos preguntamos ¿qué ocurre con $\widehat{a}|n,\alpha\rangle$?

Para obtener la respuesta calculamos el bracket $\langle x|\widehat{a}|n,\alpha\rangle$ aplicando la definición del operador de aniquilación en términos de los operadores de posición y momento:

$$\begin{aligned}\langle x|\widehat{a}|n,\alpha\rangle &= \langle x|\left(\frac{\widehat{x}+i\widehat{p}}{\sqrt{2}}\right)|n,\alpha\rangle \\ &= x\frac{\Psi_{n,\alpha}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}\Psi_{n,\alpha} \\ &= \frac{\langle\widehat{x}\rangle + i\langle\widehat{p}\rangle}{\sqrt{2}}\Psi_{n,\alpha} + \sqrt{n}\Psi_{n-1,\alpha} \\ &= \alpha\Psi_{n,\alpha} + \sqrt{n}\Psi_{n-1,\alpha}\end{aligned} \tag{2.30}$$

Por lo tanto

$$\widehat{a}|n,\alpha\rangle = \alpha|n,\alpha\rangle + \sqrt{n}|n-1,\alpha\rangle \tag{2.31}$$

o bien:

$$\widehat{a}_\alpha|n,\alpha\rangle = \sqrt{n}|n-1,\alpha\rangle \tag{2.32}$$

donde hemos definido al operador (ver[15]):

$$\widehat{a}_\alpha = \widehat{a} - \alpha \tag{2.33}$$

De manera similar se puede calcular cómo actúa el operador de subida y con base en ello definir un nuevo operador $\widehat{a}^\dagger_\alpha$ tal que:

$$\widehat{a}^\dagger_\alpha|n,\alpha\rangle = \sqrt{n+1}|n+1,\alpha\rangle \tag{2.34}$$

Como podemos notar, estos operadores definidos en (2.32) y (2.34), realizan las funciones de los operadores de creación y aniquilación de manera conjunta, es decir, crean y aniquilan el número n referente al eigenestado y conservan el número α referente al estado coherente. Sin embargo los ECG ya no son eigenvectores de estos operadores.

2.2.3. Desigualdad de Heisenberg

Como se demostró en el capítulo anterior, los estados coherentes saturan la desigualdad de Heisenberg. En el caso de los ECG, esperamos que no saturen esta desigualdad, puesto que los estados excitados del oscilador armónico no la saturan.

Calculamos:

$$\begin{aligned}\langle n,\alpha|\widehat{x}^2|n,\alpha\rangle &= \frac{1}{2}\langle n,\alpha|\left(\widehat{a}+\widehat{a}^\dagger\right)^2|n,\alpha\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle n,\alpha|\left(\widehat{a}_\alpha\widehat{a}_\alpha^\dagger+\widehat{a}_\alpha^\dagger\widehat{a}_\alpha+4|\alpha|^2\cos^2\theta\right)|n,\alpha\rangle \\ &= n+\frac{1}{2}+2|\alpha|^2\cos^2\theta \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}\langle n,\alpha|\widehat{p}^2|n,\alpha\rangle &= -\frac{1}{2}\langle n,\alpha|\left(\widehat{a}^\dagger-\widehat{a}\right)^2|n,\alpha\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle n,\alpha|\left(\widehat{a}_\alpha\widehat{a}_\alpha^\dagger+\widehat{a}_\alpha^\dagger\widehat{a}_\alpha+4|\alpha|^2\sin^2\theta\right)|n,\alpha\rangle \\ &= n+\frac{1}{2}+2|\alpha|^2\sin^2\theta \end{aligned} \tag{2.36}$$

luego:

$$\langle(\Delta\widehat{x})^2\rangle = \langle\widehat{x}^2\rangle-\langle\widehat{x}\rangle^2 = n+\frac{1}{2} \tag{2.37}$$

$$\langle(\Delta\widehat{p})^2\rangle = \langle\widehat{p}^2\rangle-\langle\widehat{p}\rangle^2 = n+\frac{1}{2} \tag{2.38}$$

así que:

$$\langle(\Delta\widehat{x})^2\rangle\langle(\Delta\widehat{p})^2\rangle = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \tag{2.39}$$

Solo cuando $n=0$, se satura la desigualdad de Heisenberg.

2.2.4. Los ECG como base

Como sabemos, los eigenestados de energía forman una base, así que, debe ocurrir que para α fijo:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|n,\alpha\rangle\langle n,\alpha| = I \tag{2.40}$$

y para n fijo (ver [15]):

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha|n,\alpha\rangle\langle n,\alpha| = I \tag{2.41}$$

Es decir, los estados coherentes generalizados poseen de manera conjunta las propiedades de base de los estados coherentes y los eigenestados del oscilador armónico.

Para demostrar esta propiedad, expresamos primero al ket $|n,\alpha\rangle$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}|n,\alpha\rangle &= \frac{(\widehat{a}_\alpha^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0,\alpha\rangle \\ &= \frac{(\widehat{a}_\alpha^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\alpha^l}{\sqrt{l!}}|l,0\rangle \\ &= \frac{e^{-|\alpha|^2/2}}{\sqrt{n!}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\alpha^l}{\sqrt{l!}}(\widehat{a}^\dagger-\alpha^*)^n|l,0\rangle \end{aligned} \tag{2.42}$$

donde hemos usado la expansión para un estado coherente en términos de los eigenvectores del hamiltoniano del oscilador armónico y la definición del operador escalera $\widehat{a}_\alpha^\dagger$.

Expandimos el binomio de operadores que conmutan:

$$(\widehat{a}^\dagger-\alpha^*)^n = \sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\,(-\alpha^*)^{n-m}\,(\widehat{a}^\dagger)^m \tag{2.43}$$

y lo sustituimos en (2.42), considerando que:

$$(\widehat{a}^\dagger)^m|l,0\rangle = \sqrt{\frac{(l+m)!}{l!}}|l+m,0\rangle \tag{2.44}$$

luego:

$$\begin{aligned}|n,\alpha\rangle &= \frac{e^{-|\alpha|^2/2}}{\sqrt{n!}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\alpha^l}{\sqrt{l!}}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\,(-\alpha^*)^{n-m}\sqrt{\frac{(l+m)!}{l!}}|l+m,0\rangle \\ &= \frac{e^{-|\alpha|^2/2}}{\sqrt{n!}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\alpha^l}{\sqrt{l!}}\frac{n!}{0!(n-0)!}\,(-\alpha^*)^{n-0}\sqrt{\frac{(l+0)!}{l!}}|l,0\rangle \\ &\quad+\frac{e^{-|\alpha|^2/2}}{\sqrt{n!}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\alpha^l}{\sqrt{l!}}\frac{n!}{1!(n-1)!}\,(-\alpha^*)^{n-1}\sqrt{\frac{(l+1)!}{l!}}|l+1,0\rangle \\ &\quad+\cdots\cdots\cdots+\frac{e^{-|\alpha|^2/2}}{\sqrt{n!}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\alpha^l}{\sqrt{l!}}\frac{n!}{n!(n-n)!}\,(-\alpha^*)^{n-n}\sqrt{\frac{(l+n)!}{l!}}|l+n,0\rangle \end{aligned} \tag{2.45}$$

De manera general podemos notar que los términos que multiplican al ket $|k,0\rangle$ en la expresión (2.45) son:

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}}\frac{n!}{0!(n-0)!}\,(-\alpha^*)^{n-0}\sqrt{\frac{k!}{(k-0)!}}+\frac{\alpha^{k-1}}{\sqrt{(k-1)!}}\frac{n!}{1!(n-1)!}\,(-\alpha^*)^{n-1}\sqrt{\frac{k!}{(k-1)!}} \\ &+\cdots\cdots\cdots+\frac{\alpha^0}{\sqrt{0!}}\frac{n!}{k!(n-k)!}\,(-\alpha^*)^{n-k}\sqrt{\frac{k!}{0!}}\end{aligned} \tag{2.46}$$

los cuales pueden ser escritos como:

$$\sqrt{k!}\,(\alpha^*)^{n-k}\,(-1)^{n-k}\sum_{s=0}^{k}\frac{|\alpha|^{2s}}{s!}(-1)^s\frac{n!}{(k-s)!(n-k+s)!} \tag{2.47}$$

o bien

$$\sqrt{k!}\,(\alpha^*)^{n-k}\,(-1)^{n-k}\,L_k^{n-k}(|\alpha|^2)$$

donde $L_k^m(x)$ son los polinomios asociados de Laguerre.

Por lo tanto, podemos expresar la relación que aparece en (2.45) sumando sobre todos los posibles kets $|k,0\rangle$ (ver [15]):

$$|n,\alpha\rangle = \frac{e^{-|\alpha|^2/2}}{\sqrt{n!}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{n-k}\,\sqrt{k!}\,(\alpha^*)^{n-k}\,L_k^{n-k}(|\alpha|^2)\;|k,0\rangle \tag{2.48}$$

Utilizando esta relación demostraremos la propiedad (2.41) de los ECG:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha|n,\alpha\rangle\langle n,\alpha| &= \int d^2\alpha\frac{e^{-|\alpha|^2}}{n!}\\ &\quad\times\sum_{k,l=0}^{\infty}(-1)^{-k-l}\,\sqrt{k!l!}\,(\alpha^*)^{n-k}\,(\alpha)^{n-l}\,L_k^{n-k}(|\alpha|^2)L_l^{n-l}(|\alpha|^2)\;|k,0\rangle\langle l,0|\\ &= \sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{-k-l}}{n!}\sqrt{k!}\sqrt{l!}\;|k,0\rangle\langle l,0|\\ &\quad\times\int e^{-|\alpha|^2}\,(\alpha^*)^{n-k}\,(\alpha)^{n-l}\,L_k^{n-k}(|\alpha|^2)L_l^{n-l}(|\alpha|^2)d^2\alpha\end{aligned} \tag{2.49}$$

Para calcular esta integral escribimos en su forma polar al número complejo α:

$$\begin{aligned}\alpha &= |\alpha|e^{i\theta}\\ d^2\alpha &= |\alpha|d|\alpha|d\theta\end{aligned} \tag{2.50}$$

con lo que:

$$\begin{aligned}&\int e^{-|\alpha|^2}\,(\alpha^*)^{n-k}\,(\alpha)^{n-l}\,L_k^{n-k}(|\alpha|^2)L_l^{n-l}(|\alpha|^2)d^2\alpha\\ &\quad= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-|\alpha|^2}|\alpha|^{2n-k-l}L_k^{n-k}(|\alpha|^2)L_l^{n-l}(|\alpha|^2)|\alpha|d|\alpha|\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(l-k)\theta}d\theta\\ &\quad= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|\alpha|^2}|\alpha|^{2(n-k)}L_k^{n-k}(|\alpha|^2)L_k^{n-k}(|\alpha|^2)|\alpha|d|\alpha|\\ &\quad= \pi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u}u^{n-k}L_k^{n-k}(u)L_k^{n-k}(u)du\\ &\quad= \pi\frac{\Gamma(n+1)}{k!}\\ &\quad= \pi\frac{n!}{k!}\end{aligned} \tag{2.51}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha|n,\alpha\rangle\langle n,\alpha| &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{n!}\frac{n!}{k!}\ |k,0\rangle\langle k,0| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}|k,0\rangle\langle k,0| \\ &= 1 \end{aligned} \tag{2.52}$$

2.3. Función generatriz para los ECG

Una de las características de las eigenfunciones del oscilador armónico es que puede construirse una función generatriz para ellas (ver [9])

Como hemos visto, los estados coherentes generalizados son estados interesantes porque combinan características de eigenestados y estados coherentes. En esta sección aprovecharemos sus características de eigenestado para construir una función generatriz que contenga la información de las funciones de onda de los ECG.

El método que utilizaremos para encontrar dicha función fue propuesto por M. H. Hassan en la referencia [9]. Este método se basa en la aplicación de las propiedades de los operadores de creación y aniquilación para encontrar un par de ecuaciones diferenciales que deba satisfacer la función generatriz.

Buscamos una función de dos variables $G(z,x)$ cuyo desarrollo en serie de Taylor sea de la forma:

$$G(z,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\Psi_{n,\alpha}(x) = \langle x|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n,\alpha\rangle \tag{2.53}$$

si aplicamos las propiedades del operador de creación generalizado:

$$\widehat{a}_\alpha^\dagger|n,\alpha\rangle = \sqrt{n+1}|n+1,\alpha\rangle \tag{2.54}$$

$$(\widehat{a}_\alpha^\dagger)^n|0,\alpha\rangle = \sqrt{n!}|n,\alpha\rangle \tag{2.55}$$

podemos escribir esta función generatriz como:

$$G(z,x) = \langle x|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n(\widehat{a}_\alpha^\dagger)^n}{n!}|0,\alpha\rangle = \langle x|\exp(z\widehat{a}_\alpha^\dagger)|0,\alpha\rangle \tag{2.56}$$

Ahora calculemos el bracket $\langle x|\widehat{a}_\alpha\exp(z\widehat{a}_\alpha^\dagger)|0,\alpha\rangle$, identificando en el proceso a la función $G(z,x)$ escrita de la anterior forma:

$$\begin{aligned}\langle x|\widehat{a}_\alpha\exp(z\widehat{a}_\alpha^\dagger)|0,\alpha\rangle &= \langle x|(\frac{\widehat{x}}{\sqrt{2}}+i\frac{\widehat{p}}{\sqrt{2}}-\alpha)\exp(z\widehat{a}_\alpha^\dagger)|0,\alpha\rangle \\ &= \frac{x}{\sqrt{2}}G(z,x)+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}G(z,x)-\alpha G(z,x)\end{aligned} \tag{2.57}$$

Este bracket también puede desarrollarse si en lugar de aplicar la definición del operador

de aniquilación, expandimos en serie la función exponencial:

$$\begin{aligned}\langle x|\widehat{a}_\alpha \exp(z\widehat{a}_\alpha^\dagger)|0,\alpha\rangle &= \langle x|\widehat{a}_\alpha \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sqrt{n!}|n,\alpha\rangle = \langle x|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\widehat{a}_\alpha|n,\alpha\rangle \\ &= \langle x|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{m+1}}{\sqrt{m!}}|m,\alpha\rangle = z\langle x|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}(\widehat{a}_\alpha^\dagger)^m|0,\alpha\rangle \\ &= zG(z,x) \end{aligned} \tag{2.58}$$

Igualando ambos desarrollos obtenemos una ecuación diferencial que debe satisfacer la función generatriz:

$$\frac{\partial}{\partial x}G(z,x) = \sqrt{2}(\alpha + z - \frac{x}{\sqrt{2}})G(z,x) \tag{2.59}$$

para la cual proponemos la siguiente solución:

$$G(z,x) = C\exp\{\sqrt{2}x(\alpha+z) - \frac{x^2}{2} + f(z)\} \tag{2.60}$$

Para determinar $f(z)$ obtendremos otra ecuación diferencial parcial para $G(z,x)$ a partir de las propiedades del operador de creación:

$$\begin{aligned}\langle x|\widehat{a}_\alpha^\dagger \exp(z\widehat{a}_\alpha^\dagger)|0,\alpha\rangle &= \langle x|(\widehat{a}^\dagger - \alpha^*)\exp(z\widehat{a}_\alpha^\dagger)|0,\alpha\rangle \\ &= \langle x|(\frac{\widehat{x}}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\widehat{p})\exp(z\widehat{a}_\alpha^\dagger)|0,\alpha\rangle - \alpha^*\langle x|\exp(z\widehat{a}_\alpha^\dagger)|0,\alpha\rangle \\ &= \frac{x}{\sqrt{2}}G(z,x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}G(z,x) - \alpha^* G(z,x) \end{aligned} \tag{2.61}$$

y también:

$$\begin{aligned}\langle x|\widehat{a}_\alpha^\dagger \exp(z\widehat{a}_\alpha^\dagger)|0,\alpha\rangle &= \langle x|\widehat{a}_\alpha^\dagger \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sqrt{n!}|n,\alpha\rangle \\ &= \langle x|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\sqrt{n+1}|n+1,\alpha\rangle \end{aligned} \tag{2.62}$$

podemos identificar la última expresión como la parcial con respecto a z de G:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}G(z,x) &= \frac{\partial}{\partial z}\langle x|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n,\alpha\rangle \\ &= \langle x|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{\sqrt{n!}}|n,\alpha\rangle \\ &= \langle x|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sqrt{m+1}z^m}{\sqrt{m!}}|m+1,\alpha\rangle \end{aligned} \tag{2.63}$$

así que:

$$\frac{\partial}{\partial z}G(z,x) = \langle x|\widehat{a}_\alpha^\dagger \exp(z\widehat{a}_\alpha^\dagger)|0,\alpha\rangle \tag{2.64}$$

Comparando ambos desarrollos del bracket $\langle x|\widehat{a}_\alpha^\dagger \exp(z\widehat{a}_\alpha^\dagger)|0,\alpha\rangle$, obtenemos una segunda ecuación diferencial para G:

$$\frac{\partial}{\partial z}G(z,x) = (\frac{x}{\sqrt{2}} - \alpha^*)G(z,x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}G(z,x) \tag{2.65}$$

Al sustituir la solución propuesta en esta ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}x + f'(z))G(z,x) &= (\frac{x}{\sqrt{2}} - \alpha^*)G(z,x) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}(\alpha+z) - x)G(z,x)\\ f'(z) &= -(2|\alpha|\cos\theta + z)\end{aligned} \tag{2.66}$$

una ecuación diferencial que nos permite determinar $f(z)$. Por lo tanto la función G tiene la forma:

$$G(z,x) = C\exp\{\sqrt{2}x(\alpha+z) - \frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{2} - 2|\alpha|\cos\theta z\} \tag{2.67}$$

Para hallar la constante C tomamos la función de onda del estado coherente:

$$\begin{aligned}\langle x|0,\alpha\rangle &= \frac{1}{\pi^{1/4}}\exp\{-\frac{1}{2}(x-\sqrt{2}|\alpha|\cos\theta)^2\}\exp i\{x\sqrt{2}|\alpha|\sin\theta - |\alpha|^2\cos\theta\sin\theta\}\\ &= \frac{1}{\pi^{1/4}}\exp\{-\frac{x^2}{2} + x\sqrt{2}\alpha - |\alpha|\cos\theta\alpha\}\end{aligned} \tag{2.68}$$

y la comparamos con la función generatriz encontrada a $z=0$:

$$G(0,x) = \langle x|0,\alpha\rangle = C\exp\left(\sqrt{2}x\alpha - \frac{x^2}{2}\right)$$

así que:

$$C = \frac{1}{\pi^{1/4}}\exp\{-|\alpha|\alpha\cos\theta\} \tag{2.69}$$

Por lo tanto la función generatriz para los ECG es:

$$G(z,x) = \frac{1}{\pi^{1/4}}\exp\{\sqrt{2}x(\alpha+z) - \frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{2} - 2|\alpha|\cos\theta z - |\alpha|\alpha\cos\theta\} \tag{2.70}$$

2.4. Aplicaciones de la función generatriz

2.4.1. Propiedad de la delta de Dirac

En la referencia [9], como una aplicación de la función generatriz para las eigenfunciones del oscilador, se calcula una de las propiedades de la delta de Dirac. A continuación calcularemos esta misma propiedad pero utilizando la función generatriz de los ECG:

Queremos demostrar:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\langle x|x'\rangle dx = 1 \tag{2.71}$$

Para ello, notemos que el bracket $\langle x|x'\rangle$ puede escribirse en términos de la función generatriz:

$$\begin{aligned}
\langle x|x'\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty}\Psi_{n,\alpha}(x)\Psi^*_{n,\alpha}(x') \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty}\Psi_{n,\alpha}(x)\delta_{mn}\Psi^*_{m,\alpha}(x') \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty}\Psi_{n,\alpha}(x)\left[\int \frac{z^{*m}}{\sqrt{m!}}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}d\mu(z)\right]\Psi^*_{m,\alpha}(x') \\
&= \int\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{*m}}{\sqrt{m!}}\Psi^*_{m,\alpha}(x')\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\Psi_{n,\alpha}(x)\right]d\mu(z) \\
&= \int G^*(z,x')G(z,x)d\mu(z) \qquad (2.72)
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la relación:

$$\delta_{mn} = \int \frac{z^{*m}}{\sqrt{m!}}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}d\mu(z) \qquad (2.73)$$

con $z = q + ip$, $d\mu(z) = \frac{e^{-(q^2+p^2)}}{\pi}dqdp$. El producto $G^*(z,x')G(z,x)$ corresponde a:

$$\begin{aligned}
G^*(z,x')G(z,x) &= \left[\frac{1}{\pi^{1/4}}\exp\{\sqrt{2}x'(\alpha^*+z^*) - \frac{x'^2}{2} - \frac{z^{*2}}{2} - 2|\alpha|\cos\theta z^* - |\alpha|\alpha^*\cos\theta\}\right] \\
&\quad\times\left[\frac{1}{\pi^{1/4}}\exp\{\sqrt{2}x(\alpha+z) - \frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{2} - 2|\alpha|\cos\theta z - |\alpha|\alpha\cos\theta\}\right] \\
&= \frac{1}{\pi^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(x^2+x'^2) + \sqrt{2}(x'\alpha^* + x\alpha) - 2|\alpha|^2\cos^2\theta\right] \\
&\quad\times\exp\left[-2|\alpha|\cos\theta(z^*+z) - \frac{(z^2+z^{*2})}{2} + \sqrt{2}(xz + x'z^*)\right] \qquad (2.74)
\end{aligned}$$

Una vez que hemos escrito el bracket en términos de la función generatriz, procedemos a integrar. Como la integral es con respecto a z, solamente es necesario integrar la segunda exponencial que aparece en $G^*(z,x')G(z,x)$:

$$\begin{aligned}
&\int\exp\left[-2|\alpha|\cos\theta(z^*+z) - \frac{(z^2+z^{*2})}{2} + \sqrt{2}(xz+x'z^*)\right]d\mu(z) \\
&= \int\int\exp\left[-4q|\alpha|\cos\theta - q^2 + p^2 + \sqrt{2}(x(q+ip) + x'(q-ip))\right]\frac{\exp(-q^2-p^2)}{\pi}dqdp \\
&= \frac{1}{\pi}\int\int\exp\left[-4q|\alpha|\cos\theta - 2q^2 + \sqrt{2}q(x+x') + \sqrt{2}ip(x-x')\right]dqdp \\
&= \frac{1}{\pi}\exp\left[2\left(\frac{(x+x')}{2\sqrt{2}} - |\alpha|\cos\theta\right)^2\right]\int\exp\left[-2\left(q - \left(\frac{(x+x')}{2\sqrt{2}} - |\alpha|\cos\theta\right)\right)^2\right]dq \\
&\quad\times\int\exp\left[\sqrt{2}ip(x-x')\right]dp \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[2\left(\frac{(x+x')}{2\sqrt{2}} - |\alpha|\cos\theta\right)^2\right]\int\exp\left[\sqrt{2}ip(x-x')\right]dp \qquad (2.75)
\end{aligned}$$

Así que $\langle x|x'\rangle$ se convierte en:

$$\langle x|x'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\exp\left[-\frac{(x^2+x'^2)}{2}+\sqrt{2}(x'\alpha^*+x\alpha)-2|\alpha|^2\cos^2\theta\right] \times \exp\left[2\left(\frac{(x+x')}{2\sqrt{2}}-|\alpha|\cos\theta\right)^2\right]\int\exp\left[\sqrt{2}ip(x-x')\right]dp \tag{2.76}$$

Al simplificar la parte que está fuera de la integral nos queda simplemente:

$$\begin{aligned}\langle x|x'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4}+\sqrt{2}i|\alpha|\sin\theta(x-x')\right]\int\exp\left[\sqrt{2}ip(x-x')\right]dp \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4}+\left(\sqrt{2}|\alpha|\sin\theta+k\right)i(x-x')\right]dk \end{aligned}\tag{2.77}$$

Integrando ambos lados de esta expresión con respecto a x obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\langle x|x'\rangle dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4}+\left(\sqrt{2\omega}|\alpha|\sin\theta+k\right)i(x-x')\right]dxdk \tag{2.78}$$

para realizar esta integral aplicamos un resultado ya conocido:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}ax^2+iJx\right]dx = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{-J^2}{2a}\right) \tag{2.79}$$

así que:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\langle x|x'\rangle dx &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\left(\sqrt{2}|\alpha|\sin\theta+k\right)^2\right)dk \\ &= 1\end{aligned}\tag{2.80}$$

obtenemos la propiedad de la delta de Dirac, usando la función generatriz para los ECG.

2.4.2. Relaciones de recurrencia

Como otra aplicación de la función generatriz podemos calcular relaciones de recurrencia para las funciones de onda. Para ello calculamos las parciales de la función generatriz de dos formas:

$$G(z,x) = \frac{1}{\pi^{1/4}}\exp\{\sqrt{2}x(\alpha+z)-\frac{x^2}{2}-\frac{z^2}{2}-2|\alpha|\cos\theta z-|\alpha|\alpha\cos\theta\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\Psi_{n,\alpha}(x)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial z} &= \left[\sqrt{2}x-z-2|\alpha|\cos\theta\right]G(z,x) \\ &= \left[\sqrt{2\omega}x-2|\alpha|\cos\theta\right]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\Psi_{n,\alpha}(x)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{\sqrt{n!}}\Psi_{n,\alpha}(x) \\ &= \left[\sqrt{2\omega}x-2|\alpha|\cos\theta\right]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\Psi_{n,\alpha}(x)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n\sqrt{n}}{\sqrt{n!}}\Psi_{n-1,\alpha}(x)\end{aligned}\tag{2.81}$$

también:

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{\sqrt{n!}} \Psi_{n,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} z^n}{\sqrt{n!}} \Psi_{n+1,\alpha}(x) \tag{2.82}$$

igualando (2.81) y (2.82) obtenemos la primera relación de recurrencia:

$$\sqrt{n+1}\Psi_{n+1,\alpha}(x) - \left[\sqrt{2}x - 2|\alpha|\cos\theta\right] \Psi_{n,\alpha}(x) + \sqrt{n}\Psi_{n-1,\alpha}(x) = 0 \tag{2.83}$$

Ahora calculamos las derivadas parciales de la función generatriz con respecto a x:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial x} &= \left[\sqrt{2}(\alpha + z) - x\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \Psi_{n,\alpha}(x) \\
&= \left[\sqrt{2}\alpha - x\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \Psi_{n,\alpha}(x) + \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{\sqrt{n!}} \Psi_{n,\alpha}(x) \\
&= \left[\sqrt{2}\alpha - x\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \Psi_{n,\alpha}(x) + \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n} \Psi_{n-1,\alpha}(x) \qquad (2.84) \\
\frac{\partial G}{\partial x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \Psi'_{n,\alpha}(x) \qquad (2.85)
\end{aligned}$$

igualando (2.84) y (2.85) obtenemos una segunda relación de recurrencia para las funciones de onda de los ECG:

$$\left[\sqrt{2}\alpha - x\right] \Psi_{n,\alpha}(x) + \sqrt{2n}\Psi_{n-1,\alpha}(x) = \Psi'_{n,\alpha}(x) \tag{2.86}$$

2.4.3. Relaciones de ortogonalidad

Usando las relaciones de recurrencia podemos obtener una ecuación diferencial de segundo orden para las funciones de onda de los ECG a $t = 0$, a partir de la cual es posible calcular relaciones de ortogonalidad.

Reescribimos las relaciones de recurrencia obtenidas en (2.83) y (2.86) como:

$$\sqrt{2(n+1)}\Psi_{n+1,\alpha}(x) + \left[-2x + 2\sqrt{2}|\alpha|\cos\theta\right] \Psi_{n,\alpha}(x) + \sqrt{2n}\Psi_{n-1,\alpha}(x) = 0 \tag{2.87}$$

$$\left[-\sqrt{2}\alpha + x\right] \Psi_{n,\alpha}(x) - \sqrt{2n}\Psi_{n-1,\alpha}(x) = -\Psi'_{n,\alpha}(x) \tag{2.88}$$

al sumarlas obtenemos:

$$\Psi_{n+1,\alpha} = \frac{-\Psi_{n,\alpha}(x)}{\sqrt{2(n+1)}} \left[-x + 2\sqrt{2}|\alpha|\cos\theta - \sqrt{2}\alpha\right] - \frac{\Psi'_{n,\alpha}(x)}{\sqrt{2(n+1)}} \tag{2.89}$$

si derivamos esta expresión nos queda:

$$\Psi'_{n+1,\alpha}(x) = \frac{-\Psi'_{n,\alpha}(x)}{\sqrt{2(n+1)}} \left[-x + 2\sqrt{2}|\alpha|\cos\theta - \sqrt{2}\alpha\right] + \frac{\Psi_{n,\alpha}(x)}{\sqrt{2(n+1)}} - \frac{\Psi''_{n,\alpha}(x)}{\sqrt{2(n+1)}} \tag{2.90}$$

Por otro lado, si en la relación de recurrencia (2.88) cambiamos n por $n+1$ y sustituimos (2.89) obtenemos:

$$\begin{aligned}\Psi'_{n+1,\alpha}(x) &= \left[\sqrt{2}\alpha - x\right]\left[\frac{\Psi_{n,\alpha}(x)\left[x - 2\sqrt{2}|\alpha|\cos\theta + \sqrt{2}\alpha\right] - \Psi'_{n,\alpha}(x)}{\sqrt{2(n+1)}}\right] \\ &\quad + \sqrt{2(n+1)}\Psi_{n,\alpha}(x) \\ &= \frac{\Psi_{n,\alpha}(x)}{\sqrt{2(n+1)}}\left[-4\alpha|\alpha|\cos\theta + 2\alpha^2 - x^2 + 2\sqrt{2}x|\alpha|\cos\theta + 2(n+1)\right] \\ &\quad - \left[\sqrt{2}\alpha - x\right]\frac{\Psi'_{n,\alpha}(x)}{\sqrt{2(n+1)}} \qquad (2.91)\end{aligned}$$

Igualando (2.90) y (2.91) y simplificando llegamos a:

$$\Psi''_{n,\alpha}(x) - \left[2\sqrt{2}|\alpha| i\sin\theta\right]\Psi'_{n,\alpha}(x) \qquad (2.92)$$

$$+\Psi_{n,\alpha}(x)\left[-(x - \sqrt{2}|\alpha|\cos\theta)^2 + 2n + 1 - 2|\alpha|^2\sin^2\theta\right] = 0 \qquad (2.93)$$

una ecuación diferencial de segundo orden. Es importante recalcar que esta ecuación es satisfecha por las funciones de onda de los ECG a $t = 0$. Si la funciones de onda utilizadas para calcular la funcion generatriz fueran las dependientes del tiempo, entonces deberíamos recobrar la ecuación de Schrödinger, pero por simplicidad lo hemos hecho sin dependencia temporal.

La ecuación diferencial que obtuvimos no es autoadjunta, es decir no puede ser escrita en la forma:

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}y(x)\right] + q(x)y(x) = \lambda w(x)y(x) \qquad (2.94)$$

De la teoría de ecuaciones diferenciales sabemos que toda ecuación diferencial de la forma

$$P(x)\frac{d^2y}{dx} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0 \qquad (2.95)$$

puede hacerse audtoadjunta mediante una función definida como $e^{\int Q(x)/P(x)dx}$. En este caso la función es:

$$\exp\{-2\sqrt{2}ix|\alpha|\sin\theta\}$$

El hecho de que una ecuación diferencial sea autoadjunta, nos permite establecer la siguiente relación de ortogonalidad entre las diferentes soluciones que la satisfacen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\sqrt{2}ix|\alpha|\sin\theta}\Psi_{m,\alpha}(x)\Psi_{n,\alpha}(x) = 0$$

Para hallar una relación de ortogonalidad entre las mismas funciones de onda escribamos la función generatriz de la siguiente manera:

$$G(z,x) = A\exp\left\{\sqrt{2}x\alpha - \frac{x^2}{2} + \sqrt{2}xz\right\}\exp\left\{-\frac{z^2}{2} - 2|\alpha|\cos\theta z\right\}$$

donde $A = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/4} \exp\{-|\alpha|\alpha\cos\theta\}$

Luego calculamos:

$$\exp\left\{-2\sqrt{2}ix|\alpha|\sin\theta\right\} G(z,x)G(t,x)$$
$$= \sum_{m=0,n=0}^{\infty} \exp\left\{-2\sqrt{2}ix|\alpha|\sin\theta\right\} \Psi_{m,\alpha}(x)\Psi_{n,\alpha}(x)\frac{z^m}{m!}\frac{t^n}{n!} \tag{2.96}$$

Al integrar esta relación sobre x de $-\infty$ a ∞, los términos cruzados de la doble suma se van a cero debido a la propiedad de ortogonalidad entre diferentes funciones de onda, lo que reduce la expresión (2.82) a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-2\sqrt{2}ix|\alpha|\sin\theta\right\} G(z,x)G(t,x)dx \tag{2.97}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zt)^n}{n!n!} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-2\sqrt{2}xi|\alpha|\sin\theta\right\} \left[\Psi_{n,\alpha}(x)\right]^2 dx \tag{2.98}$$

Calculamos la integral del lado izquierdo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-2\sqrt{2}ix|\alpha|\sin\theta\right\} G(z,x)G(t,x)dx$$
$$= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-2\sqrt{2}ix|\alpha|\sin\theta\right\}$$
$$\times \exp\left\{2\sqrt{2}x\alpha - x^2 + \sqrt{2}x(z+t) - \frac{z^2+t^2}{2} - 2|\alpha|\cos\theta(z+t)\right\} dx$$
$$= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}x - (z+t)\right)^2 + 2|\alpha|\cos\theta\left(\sqrt{2}x - z - t\right) + zt\right\} dx$$
$$= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2 + 2|\alpha|\cos\theta u\right\} e^{zt}\frac{du}{\sqrt{2}} \tag{2.99}$$
$$= e^{-2|\alpha|^2 i\cos\theta\sin\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zt)^n}{n!}$$

Por lo tanto:

$$e^{-2|\alpha|^2 i\cos\theta\sin\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zt)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zt)^n}{n!} \left[\frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-2\sqrt{2}ix|\alpha|\sin\theta\right\} \left[\Psi_{n,\alpha}(x)\right]^2 dx\right]$$

Igualando potencia a potencia de cada lado de la sumatoria, obtenemos una relación de ortogonalidad para las mismas funciones de onda:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\sqrt{2}ix|\alpha|\sin\theta} \left[\Psi_{n,\alpha}(x)\right]^2 = n! e^{-2|\alpha|^2 i\cos\theta\sin\theta}$$

Capítulo 3

La función de Wigner

En este capítulo utilizaremos la función de Wigner (que abreviaremos por FW) para calcular la densidad de probabilidad de un estado coherente en tres casos: el oscilador armónico, el oscilador armónico en un campo eléctrico uniforme y una partícula en un pozo cuadrado infinito. Después, aplicando las condiciones encontradas en el capítulo 1 (para que una función sea una solución de la ecuación de Schrödinger) encontraremos la fase correspondiente, lo cual nos permitirá escribir la función de onda del estado coherente en esos tres casos.

3.1. Generalidades sobre la función de Wigner

Con el objetivo de establecer correcciones cuánticas a la mecánica estadística clásica, E. Wigner introdujo en 1932 (ver [22]) una función que relacionaba la función de onda que aparece en la ecuación de Schrödinger con una cuasidistribución de probabilidad en el espacio fase.

Tiempo después de que fuera propuesta, la función de Wigner fue reconocida como una parte fundamental de la formulación de la mecánica cuántica en el espacio fase, ya que permite establecer un mapeo entre operadores en el espacio de Hilbert y funciones en el espacio fase.

La descripción de la mecánica cuántica en el espacio fase tuvo sus inicios en los trabajos de H. Weyl, quien en 1927 introdujo una correspondencia entre funciones definidas en este espacio y operadores en el espacio de Hilbert (ver [21]), la cual constituye el mapeo inverso de la función de Wigner (ver [2])

Una de las propiedades interesantes de la función de Wigner que utilizaremos en este capítulo, es que para potenciales a lo más cuadráticos (ver [20]):

$$V(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \tag{3.1}$$

su evolución temporal se puede obtener a partir de las soluciones clásicas del sistema, es decir:

$$W(x,p,t) = W_0\left(x_0(x,p,t), p_0(x,p,t)\right) \tag{3.2}$$

donde $x_0(x,p,t), p_0(x,p,t)$ son las coordenadas del punto en el espacio fase, en el cual una partícula clásica tendría que estar al tiempo $t = 0$, para llegar al punto (x,p) al tiempo t.

Esto se deriva del hecho de que su ecuación de evolución temporal se reduce a la ecuación de Liouville clásica para potenciales a lo más cuadráticos.

Otra propiedadad que utilizaremos en esta sección es que, la densidad de probabilidad en x o p, se obtiene integrando la función de Wigner con respecto a p o x, respectivamente. Por ejemplo, la densidad de probabilidad en el espacio de posiciones se obtiene calculando $\int W_d(x,p,t)dp = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)$.

A continuación calculamos la función de Wigner para el estado base de una partícula en un pozo infinito, a partir de la cual intentaremos obtener la densidad de probabilidad del estado base.

3.2. FW para una partícula en un pozo infinito

Para un estado puro, la función de Wigner se define de la siguiente forma (ver [20]):

$$W(x,p) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-ipy}\Psi(x+y/2)\Psi^*(x+y/2)dy$$

En el caso de una partícula en un pozo infinito:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & x < 0, x > a \end{cases} \tag{3.3}$$

Las funciones de onda son:

$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad n = 1,2,3...$$

donde a es el ancho del pozo.

La función de Wigner correspondiente es:

$$\begin{aligned} W(x,p) &= \frac{1}{\pi a}\int e^{-ipy}\sin\left(\frac{n\pi}{a}\left(x+y/2\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}\left(x-y/2\right)\right)dy \\ &= \frac{2}{\pi a}\int e^{-2iby'}\sin\left(n'(x+y')\right)\sin\left(n'\left(x-y'\right)\right)dy' \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde $b = p$, $y' = y/2$ y $n' = \frac{n\pi}{a}$

Los límites de integración para la variable y', están determinados por la condición de que el argumento de la función seno se encuentre en el intervalo $[0,a]$, es decir, por las condiciones:

$$0 \leq x + y' \leq a \tag{3.5}$$

$$0 \leq x - y' \leq a \tag{3.6}$$

Para que se satisfaga la primera condición, y' debe estar en el intervalo $[-x, a-x]$ y para que se satisfaga la segunda condición y' debe estar en el intervalo $[x-a, x]$. Como ambas condiciones deben ser satisfechas, la intersección de estos dos intervalos será el dominio que tome la variable y'. Dicha intersección depende de los valores que tome x. Si x está en el intervalo $[0, a/2]$, la intersección es $[-x, x]$ y si x está en el intervalo $[a/2, a]$ la intersección es $[x-a, a-x]$.

Una vez aclarados los límites de integración, procedemos a calcular la función de Wigner:

Para x en $[0, a/2]$:

$$W(x,p) = \frac{2}{\pi a}\int_{-x}^{x} e^{-2iby'} \sin\left(n'(x+y')\right)\sin\left(n'\left(x-y'\right)\right)dy'$$
$$= \frac{2}{\pi a}\int_{-x}^{x} \left\{\cos(2by') - i\sin(2by')\right\}\sin\left(n'(x+y')\right)\sin\left(n'\left(x-y'\right)\right)dy' \quad (3.7)$$

Para evaluar las integrales desarrollamos:

$$\sin\left(n'(x+y')\right) = \sin(n'x)\cos(n'y') + \cos(n'x)\sin(n'y') \quad (3.8)$$

Desarrollamos la primera integral de (3.7)

$$\int_{-x}^{x} \cos(2by')\sin\left(n'(x+y')\right)\sin\left(n'\left(x-y'\right)\right)dy'$$
$$= \int_{-x}^{x} \cos(2by')[\sin^2(n'x)\cos^2(n'y') - \cos^2(n'x)\sin^2(n'y')]dy'$$
$$= \sin^2(n'x)\int_{-x}^{x}\cos(2by')\cos^2(n'y')dy' - \cos^2(n'x)\int_{-x}^{x}\cos(2by')\sin^2(n'y')dy'$$
$$= \frac{\sin(2x(b-n'))}{4(b-n')} + \frac{\sin(2x(b+n'))}{4(b+n')} - \frac{\cos(2n'x)\sin(2bx)}{2b} \quad (3.9)$$

Como la función de Wigner debe ser una función real, entonces la segunda integral que aparece en (3.7) debe ser cero, como puede verificarse. Por lo tanto, la función de Wigner en $[0, a/2]$ es:

$$W(x,p) = \frac{2}{\pi a}\left\{\frac{\sin(2x(p-\frac{n\pi}{a}))}{4(p-\frac{n\pi}{a})} + \frac{\sin(2x(p+\frac{n\pi}{a}))}{4(p+\frac{n\pi}{a})} - \frac{\cos(2\frac{n\pi}{a}x)\sin(2px)}{2p}\right\} \quad (3.10)$$

para x en $[a/2, a]$, solo cambiamos x por $x' = a - x$ en el resultado anterior. Este resultado ya ha sido calculado anteriormente (ver [1]).

A continuación trataremos de obtener un estado coherente para el estado base de este pozo ($n = 1$) con $a = \pi$ para simplificar los cálculos.

Desplazemos por una cantidad c la función de onda del estado base.

Suponiendo que $0 < c < \pi/2$, entonces la función de Wigner para cada intervalo es:

Para $c < x < \pi/2 + c < \pi$:

$$W(x,p) = \frac{2}{\pi^2}\left\{\frac{\sin(2\left(x-c\right)\left(p-1\right))}{4(p-1)} + \frac{\sin(2\left(x-c\right)\left(p+1\right))}{4(p+1)}\right\}$$
$$-\frac{2}{\pi^2}\left\{\frac{\cos(2\left(x-c\right))\sin(2p\left(x-c\right))}{2p}\right\} \quad (3.11)$$

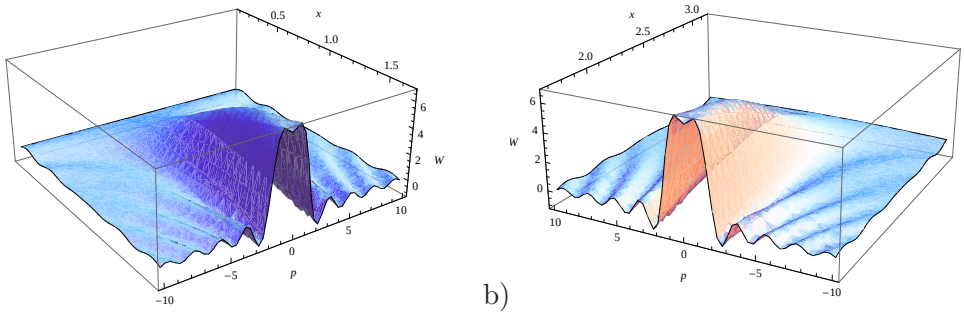

Figura 3.1: Función de Wigner para el estado base de un pozo infinito desplazado una cantidad $c = 0{,}1$ en el intervalo a)$[0, \pi/2]$ y b)$[\pi/2, \pi]$

Para $\pi/2 + c < x < \pi$:

$$W(x,p) = \frac{2}{\pi^2}\left\{\frac{\sin(2\,(\pi - x + c)\,(p-1))}{4(p-1)} + \frac{\sin(2\,(\pi - x + c)\,(p+1))}{4(p+1)}\right\} - \frac{2}{\pi^2}\left\{\frac{\cos(2\,(\pi - x + c))\sin(2p\,(\pi - x + c))}{2p}\right\} \tag{3.12}$$

En el caso en que $c > \pi/2$ $(c + \pi/2 > \pi)$, la función de Wigner será simplemente para el intervalo $c < x < \pi$:

$$W(x,p) = \frac{2}{\pi^2}\left\{\frac{\sin(2\,(x - c)\,(p-1))}{4(p-1)} + \frac{\sin(2\,(x - c)\,(p+1))}{4(p+1)}\right\} \frac{2}{\pi^2}\left\{-\frac{\cos(2\,(x - c))\sin(2p\,(x - c))}{2p}\right\} \tag{3.13}$$

De forma similar podemos obtener la función de Wigner para un estado excitado desplazado.

Para saber cómo evolucionan en el tiempo estos estados necesitamos calcular $W(x,p,t)$. En el caso de la partícula en un pozo la solución clásica es:

Para el intervalo $0 < t < \frac{\pi - x_0}{p_0}$

$$\begin{aligned} x_0 &= x - pt \\ p_0 &= p \end{aligned} \tag{3.14}$$

Para el intervalo $\frac{\pi - x_0}{p_0} < t < \frac{2(\pi - x_0)}{p_0}$:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2\pi - x - pt \\ p_0 &= p \end{aligned} \tag{3.15}$$

A pesar de que podemos escribir la evolución temporal de la función de Wigner para cada caso, como $W(x,p,t) = W(x_0(x,p,t), p_0(x,p,t))$ obtener la densidad de probabilidad no es sencillo, debido a las integrales que deben calcularse. Por lo tanto no siempre será conveniente calcular la densidad de probabilidad de un estado utilizando la función de Wigner.

3.3. FW para el estado coherente de un oscilador armónico

En el caso del estado base del oscilador armónico la función de onda correspondiente es:

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-x^2/2}$$

Así que la función de Wigner para el estado base del oscilador armónico es:

$$\begin{aligned} W(x,p) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-ipy} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+y/2)^2/2} e^{-(x-y/2)^2/2} dy \\ &= \frac{1}{\pi} \exp\left(-x^2 - p^2\right) \end{aligned} \tag{3.16}$$

Con el fin de obtener el estado coherente, consideremos la función de onda del estado base del oscilador armónico desplazada por una cantidad b. La función de Wigner de este estado desplazado es:

$$W_d(x,p) = \frac{1}{\pi} \exp\left(-(x-b)^2 - p^2\right) \tag{3.17}$$

Para el caso del oscilador armónico clásico la evolución temporal en el espacio fase es descrita por las ecuaciones:

$$x_0 = x\cos t - p\sin t \tag{3.18}$$

$$p_0 = p\cos t + x\sin t \tag{3.19}$$

donde x y p son los valores de la posición y el momento al tiempo t y x_0 y p_0 son los valores al tiempo $t = 0$

Así que la evolución temporal para la función de Wigner del caso del oscilador armónico está dada por:

$$W(x,p,t) = W_0\left(x\cos t - p\sin t, p\cos t + x\sin t\right) \tag{3.20}$$

por lo tanto, en el caso del estado base desplazado, la evolución temporal de la FW es:

$$W_d(x,p,t) = \frac{1}{\pi} \exp\left(-\left(x\cos t - p\sin t - b\right)^2 - \left(p\cos t + x\sin t\right)^2\right) \tag{3.21}$$

la cual puede escribirse de forma simplificada como:

$$W_d(x,p,t) = \frac{1}{\pi} \exp\left(-\left(x - b\cos t\right)^2 - \left(p + b\sin t\right)^2\right) \tag{3.22}$$

Como es apreciable de la expresión de la función de Wigner, después de integrar, vamos a obtener como densidad de probabilidad una función gaussiana que oscila.

$$\Psi^*(x,t)\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-(x - b\cos t)^2\right) \tag{3.23}$$

De la misma forma en que se obtiene la función de Wigner para un estado coherente, podemos encontrarla para un estado coherente generalizado, simplemente desplazando la función de Wigner de un eigenestado del oscilador armónico y encontrando su evolución temporal.

Por ejemplo, para el primer estado excitado la función de onda es:

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \sqrt{2} x e^{-x^2/2} \tag{3.24}$$

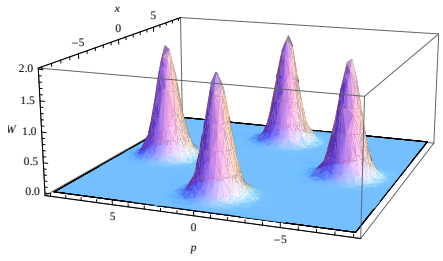

Figura 3.2: Función de Wigner para un estado coherente a diferentes tiempos. El parámetro usado es $b = 6$

así que su función de Wigner es:

$$W(x,p) = \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \int e^{-ipy} \left(x^2 - y^2/4\right) e^{-(x+y/2)^2/2} e^{-(x-y/2)^2/2} dy \tag{3.25}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{2x^2 + 2p^2 - 1\right\} \exp\left(-x^2 - p^2\right) \tag{3.26}$$

Si desplazamos el estado excitado por una cantidad b, la función de Wigner es:

$$W_d(x,p) = \frac{1}{\pi} \left\{2\left(x-b\right)^2 + 2p^2 - 1\right\} \exp\left(-(x-b)^2 - p^2\right) \tag{3.27}$$

y su evolución temporal está dada por:

$$W_d(x,p,t) = \frac{1}{\pi} \left\{2\left(x\cos t - p\sin t - b\right)^2 + 2\left(p\cos t + x\sin t\right)^2 - 1\right\}$$
$$\times \exp\left(-\left(x\cos t - p\sin t - b\right)^2 - \left(p\cos t + x\sin t\right)^2\right) \tag{3.28}$$

Para simplicar esta expresión, solo es necesario simplificar el primer factor, ya que el argumento de la exponencial es el mismo que aparece en el estado base desplazado:

$$W_d(x,p,t) = \frac{1}{\pi} \left\{-1 + 2\left(p + b\sin t\right)^2 + 2\left(x - b\cos t\right)^2\right\}$$
$$\times \exp\left(-\left(x - b\cos t\right)^2 - \left(p + b\sin t\right)^2\right) \tag{3.29}$$

En este caso la densidad de probabilidad en x es:

$$\int W_d(x,p,t)dp = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{-1 + \frac{2}{\left(x - b\cos t\right)}\right\} \exp\left(-(x - b\cos t)^2\right) \tag{3.30}$$

3.4. FW para un oscilador armónico en un campo eléctrico uniforme

Con el objetivo de aprovechar el resultado referente a la evolución temporal de la función de Wigner para potenciales a lo más cuadráticos, desarrollaremos a continuación

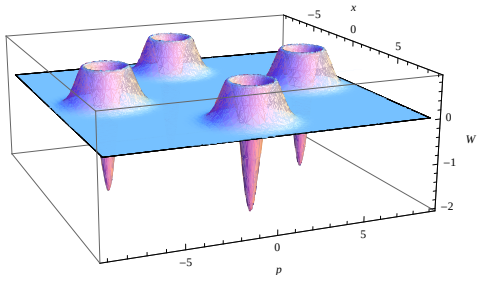

Figura 3.3: Función de Wigner para un estado coherente generalizado a diferentes tiempos. El parámetro usado es $b = 6$

el caso de un oscilador armónico en un campo eléctrico uniforme, en el que el potencial está dado por:

$$V(x) = \frac{x^2}{2} - q\xi x \tag{3.31}$$

Las soluciones clásicas de este potencial están dadas por las siguientes expresiones:

$$x_0 = (x(t) - q\xi)\cos t - p(t)\sin t + q\xi \tag{3.32}$$
$$p_0 = (x(t) - q\xi)\sin t + p(t)\cos t \tag{3.33}$$

Por lo tanto la evolución temporal de la función de Wigner obedece:

$$W(x,p,t) = W_0\left((x(t) - q\xi)\cos t - p(t)\sin t + q\xi, (x(t) - q\xi)\sin t + p(t)\cos t\right) \tag{3.34}$$

La solución cuántica para este potencial se obtiene notando que el hamiltoniano:

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{p}^2}{2} + \frac{\widehat{x}^2}{2} - q\xi\widehat{x} \tag{3.35}$$

puede escribirse como el hamiltoniano del oscilador más una constante:

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{p}^2}{2} + \frac{1}{2}(\widehat{x} - q\xi)^2 - \frac{q^2\xi^2}{2} \tag{3.36}$$

Por lo tanto las funciones de onda de este hamiltoniano ($\Psi_n^{'}(x)$) y las energías ($E_n^{'}$) están relacionadas con las del oscilador armónico ($\Psi_n(x), E_n$) de la siguiente manera:

$$\Psi_n^{'}(x) = \Psi_n(x - q\xi) \tag{3.37}$$

$$E_n^{'} = E_n - \frac{q^2\xi^2}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{q^2\xi^2}{2} \tag{3.38}$$

Así que el estado base de este sistema tiene la forma:

$$\Psi_0'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x - q\xi)^2\right) \tag{3.39}$$

La función de Wigner para este estado, es idéntica a la del estado base del oscilador armónico solamente desplazada por una cantidad $\beta = q\xi$:

$$W(x,p) = \frac{1}{\pi}\exp\left(-(x-\beta)^2 - p^2\right) \tag{3.40}$$

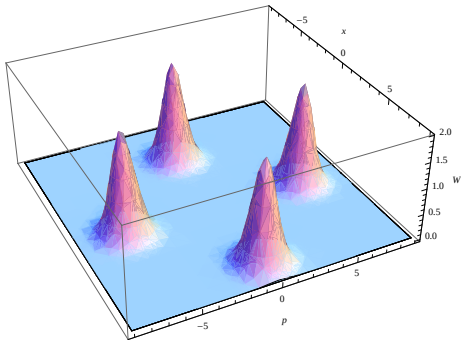

Figura 3.4: Función de Wigner para el estado coherente de un oscilador armónico en un campo eléctrico uniforme, a diferentes tiempos. Los parámetro usados son $b = 6$ y $\beta = 1$.

Así, para un estado desplazado la función de Wigner es:

$$W_d(x,p) = \frac{1}{\pi}\exp\left(-(x-\beta-b)^2 - p^2\right)$$

con evolución temporal:

$$W_d(x,p,t) = \frac{1}{\pi}\exp\Big(-\left[(x-q\xi)-b\cos(t)\right]^2 - \left[p+b\sin(t)\right]^2\Big) \tag{3.41}$$

Así que los estados coherentes de un oscilador armónico en un campo eléctrico uniforme, tienen un doble desplazamiento como puede apreciarse en las gráficas:

3.4.1. Determinación de la fase

Para construir la función de onda del estado coherente, una vez que conocemos la densidad de probabilidad del estado base desplazado, necesitamos calcular la fase S. Para ello, solo sustituimos la densidad calculada en las ecuaciones encontradas en el capítulo 1.

Para el caso del oscilador armónico, vemos que, al calcular ρ utilizando la función de Wigner hallamos también la función $y(t)$. Esto puede considerarse como una ventaja, ya que, como vimos en el capítulo 1, determinar esta función a partir de las ecuaciones diferenciales que debe satisfacer un estado desplazado no es sencillo.

Para el caso del oscilador armónico en un campo eléctrico uniforme tenemos una densidad de probabilidad dada por:

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\Big(-\left(x-q\xi-b\cos t\right)^2\Big) \tag{3.42}$$

Para este caso las ecuación (1.5) queda como:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \left(x' - y\left(t\right)\right)\frac{\partial S}{\partial x} = \dot{y}(x' - y(t)) \tag{3.43}$$

donde $x' = x - q\xi$ y $y(t) = b\cos t$.

Esta ecuación se soluciona haciendo la sustitución $p = \frac{\partial S}{\partial x}$:

$$p' + up = u\dot{y} \tag{3.44}$$

donde $u(x) = 2(y - x')$. El factor de integración es:

$$\mu(x) = e^{\int u(x)dx} = e^{(y+q\xi)^2} e^{-(x-(y+q\xi))^2} \tag{3.45}$$

luego:

$$\begin{aligned} \mu p &= \int \mu u(x) \dot{y} dx = 2\dot{y} e^{y'^2} \int \left(y' - x\right) e^{-(x-y')^2} \dot{y} dx \\ &= \dot{y} e^{y'^2} e^{-(x-y')^2} + c(t) \end{aligned} \tag{3.46}$$

donde $y' = y + q\xi$ y $c(t)$ es una constante que depende únicamente de t.

Por lo tanto:

$$S(x,t) = \dot{y}x + C_1(t) e^{(x-y')^2} \tag{3.47}$$

donde $C_1(t) = c(t) e^{-y'^2}$

Al sustituir esta fase en la segunda ecuación diferencial que se debe satisfacer, encontramos que $C_1(t)$ debe ser igual a cero, mientras que la constante $C_2(t)$ es la misma que en el caso del oscilador armónico:

$$C_2(t) = -\frac{1}{2}\dot{y}(t)y(t) + \frac{1}{2}\dot{y}(0)y(0) - \frac{t}{2} \tag{3.48}$$

Por lo tanto la función de onda para el estado coherente de un oscilador armónico en un campo eléctrico uniforme es:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - q\xi - y(t)\right)^2\right) e^{i\dot{y}x} e^{-\frac{i}{2}\left[\dot{y}(t)y(t) - \dot{y}(0)y(0)\right]} e^{-\frac{it}{2}} \tag{3.49}$$

Conclusiones

En algunos artículos y libros (ver [4],[19]) se define un estado coherente como el eigenvector de un operador de aniquilación. Si bien esta definición es útil para obtener estados coherentes de manera sistemática, no permite apreciar sus características físicas.

Con tal objetivo, en este trabajo hemos seguido y extendido el esquema que se presenta en [6] para calcular la función de onda de un estado coherente y de un estado coherente generalizado para un oscilador armónico, el cual parte de la idea que se tiene para un estado coherente como aquél que tiene una densidad de probabilidad tipo estado base pero que se desplaza siguiendo una trayectoria $y(t)$. Sin embargo hemos observado que determinar dicha trayectoria a partir de las ecuaciones de Schrödinger no es sencillo.

Hemos revisado también las diferentes propiedades que tienen los ECG y atendiendo a las características que comparten con las eigenfunciones del hamiltoniano del oscilador armónico construimos una función generatriz para sus funciones de onda, la cual hemos aplicado para obtener relaciones de ortogonalidad entre ellas, al tiempo $t = 0$.

Finalmente, hemos revisado cómo hallar la trayectoria que debe seguir la densidad de probabilidad de un estado coherente, al menos para potenciales cuadráticos, utilizando la función de Wigner, lo cual nos permitió calcular estados coherentes y a la vez generalizados para el oscilador armónico en un campo eléctrico uniforme. Sin embargo también hemos hallado dificultades para calcular las integrales que aparecen, como lo observamos en el caso de la partícula en un pozo infinito.

La ventaja de tener la función de Wigner para un estado cuántico radica en que esta representación permite analizar otras características del estado base, por ejemplo, los estados comprimidos pueden obtenerse a partir de tranformaciones canónicas sobre la densidad de Wigner del estado base del oscilador armónico (ver [8]).

Como trabajo posterior se pueden calcular densidades de probabilidad para otros potenciales, no necesariamente cuadráticos, utilizando la función de Wigner y también obtener los estados comprimidos en la representación de Wigner para los casos ya analizados.

Bibliografía

[1] M. Belloni, M. A. Doncheski, R. W. Robinett, "Wigner quasi-probability distribution for the infinite square well: energy eigenstates and time-dependent wave packets", arXiv:quant-ph/0312086

[2] T. L. Curtright, C. K. Zachos, "Quantum Mechanics in Phase Space", arXiv:1104.5269 [physics.hist-ph]

[3] W. B. Case, "Wigner function and Weyl transforms for pedestrians", Am. J. Phys. **76**, 937-946 (2008)

[4] D. J. Fernández, "Coherent states for one-dimensional systems", Frontiers in Contemporary Physics **809**, 80-85 (2006)

[5] J. P. Gazeau, *Coherent States in Quantum Physics 1st ed.* (Wiley-VCH, Berlín, 2009)

[6] K. Gottfried, T. M. Yan, *Quantum Mechanics: Fundamentals 2nd ed.* (Springer, New York, 2004)

[7] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics 2nd ed.* (Pearson, New Jersey, 1995)

[8] D. Han, Y. S. Kim and M. E. Noz, "Linear canonical transformations of coherent and squeezed states in the Wigner phase space", Phys. Rev. A **37**, 807-814 (1988)

[9] M. H. Hassan, "Generating function method and its applications to Quantum, Nuclear and the Classical Groups", arXiv:1203.2892 [math-ph].

[10] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics 1st ed.* (Cambridge U. P., Cambridge, 1995)

[11] M. F. Marhic, "Oscillating Hermite-Gaussian wave functions of the harmonic oscillator", Lett. Nuovo Cim. **22**, 376-378 (1978)

[12] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics 3rd ed.* (Wiley, New York, 1998)

[13] F. A. M. de Oliveira, M. S. Kim, P. L. Knight and V. Buzek, "Properties of displaced number states", Phys. Lett. A **229**, 135-143 (1997)

[14] A. Perelomov, *Generalized coherent states and their applications 1st ed.* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1986)

[15] T. G. Philbin, "Generalized Coherent States", Am. J. Phys. **82**, 742-748 (2014)

[16] J. Plebanski, "Wave functions of a harmonic oscillator", Phys. Rev. **101**, 1825-1826 (1956)

[17] E. Schrödinger, "Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik", Naturwissenschaften **14**, 664-666 (1926)

[18] I. R. Senitzky, "Harmonic Oscillating Wave Functions", Phys. Rev. **95**, 1115-1116 (1954)

[19] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics Rev. ed.* (Addison-Wesley, California, 1994)

[20] W. P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space 1st ed.* (Wiley-VCH, Berlín, 2001)

[21] H. Weyl, "Quantenmechanik und Gruppentheorie", Z. Phys. **46**, 1-33 (1927)

[22] E. Wigner, "Quantum Corrections for Thermodynamic Equilibrium", Phys. Rev. **40**, 749-759 (1932)