

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

MODELO ESTOCÁSTICO DE VASICEK PARA LA PREDICCIÓN DEL PRECIO DE UN BONO

T E S I S

para obtener el título de:

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

presenta:

FANY ALCANTARA GIL

directores de tesis:

DR. HUGO ADÁN CRUZ SUÁREZ
DR. RUY ALBERTO LÓPEZ RÍOS

PUEBLA, PUE. **22 de abril de 2026**

Fany Alcantara Gil: *Modelo estocástico de Vasicek para la predicción del precio de un bono,* Caso de Estudio a Nivel Licenciatura, © Abril 2026

Mesa de revisión:
Dr. Carlos Camilo Garay
Dr. Rei Israel Ortega Gutiérrez
Dr. Francisco Solano Tajonar Sanabria

Localidad:
Puebla, Puebla, México

Impresa:
Abril 2026

– Dedicada a mis padres, hermana y abuelos –

En cada trayectoria hay ruido, pero detrás de cada ruido hay estructura...
y eso es lo que la matemática nos enseña a descubrir.

–Anónimo–

Agradecimientos

Agradezco a Dios por ser mi guía y mi fortaleza en cada paso de este camino.

A mis padres, por ser la única constante en un mundo de variables. Gracias por su fe infinita en mis capacidades, incluso cuando mis propios cálculos fallaban. Ustedes me enseñaron que el éxito no es una cifra, sino el producto de la entrega y la honestidad, porque sin su apoyo constante y su fe en mí, no estaría aquí hoy. A mi hermana, por ser mi apoyo paralelo en este camino, siempre caminando a mi lado y manteniendo el equilibrio en mis días más caóticos. A mis abuelitos, pues su fe en mí fue el vector que me impulsó a no rendirme. En especial, a mi abuelo paterno, quien creyó en mis sueños desde el primer día y fue una constante de amor y apoyo incondicional hasta el último momento de su vida.

A mis tres mejores amigos, quienes han estado presentes en cada segmento de mi formación académica. Gracias por su apoyo incondicional en cada etapa en la que nuestras vidas se cruzaron. En particular, agradezco profundamente a quien, superando cualquier barrera de distancia o dificultad, nunca permitió que mi ánimo decayera. Tu amistad es un axioma de lealtad que no requiere demostración; gracias por estar ahí hasta el final N. A mis amigas por las jornadas de estudio que terminaban en risas y por no dejarme desistir. Gracias por entender mis ausencias y por celebrar cada pequeño avance conmigo. Y por supuesto a los amigos que hice a lo largo de mi formación académica.

Al Dr. Ruy, por su guía experta y su paciencia. Gracias por ayudarme a converger hacia este objetivo, por haber aceptado ser mi asesor de tesis y por enseñarme que, ante cualquier problema complejo, siempre existe una solución elegante si se aplica la lógica y la dedicación correcta.

A mis sinodales, por el tiempo y la rigurosidad dedicados a la revisión

de este trabajo. Sus observaciones y cuestionamientos no solo enriquecieron esta tesis, sino que me impulsaron a elevar mis propios estándares académicos. Gracias por ser los jueces que validaron este esfuerzo final.

Introducción

La modelación estocástica se ha consolidado como el pilar fundamental de las finanzas cuantitativas modernas, debido a su capacidad para formalizar la incertidumbre y describir fenómenos aleatorios intrínsecos a los mercados. En el ámbito de la renta fija, el supuesto de que las tasas de interés permanecen constantes o siguen una trayectoria determinista puede resultar aceptable únicamente para instrumentos de muy corto plazo en entornos de alta estabilidad. No obstante, al analizar horizontes de mediano y largo plazo, la tasa de interés exhibe un comportamiento aleatorio que exige el uso del cálculo estocástico y, específicamente, del movimiento browniano como herramientas base para su análisis.

Una de las propiedades empíricas más relevantes en las variables macrofinancieras es la tendencia a estabilizarse en torno a un valor de equilibrio de largo plazo, a este fenómeno se le llama reversión a la media. En las últimas tres décadas, el desarrollo de teorías sobre la estructura temporal de las tasas de interés ha permitido clasificar los modelos en dos grandes vertientes: modelos de equilibrio y modelos de no equilibrio. Los modelos de equilibrio que más destacan son el de Vasicek y Cox-Ingersoll-Ross (CIR). Ambos incorporan la reversión a la media; sin embargo, el modelo de Vasicek se distingue por su excepcional manipulación analítica (Allen, 2007). Aunque este modelo presenta la limitación teórica de permitir tasas de interés negativas una propiedad generalmente no deseada en la modelación de tasas, su estructura matemática permite obtener soluciones cerradas de gran utilidad para la valuación de bonos y productos derivados.

El objetivo principal de este trabajo es exponer las características esenciales del modelo de Vasicek y una vez alcanzado esto, mostrar su aplicación para el cálculo del precio de un bono de cupón cero que incorpora una tasa de interés estocástica, así como el rendimiento al vencimiento del bono.

En este sentido, la presente investigación contribuye no solo con la re-

visión teórica, sino con la implementación práctica y validación del modelo dentro del contexto financiero nacional. Las aportaciones principales de este trabajo radican en la construcción de un marco algorítmico en Python capaz de procesar datos históricos de la TIIE a 28 días de Banxico, y la posterior estimación de los parámetros de reversión a la media mediante el método de Máxima Verosimilitud (MLE). Esta validación empírica permite constatar la eficacia del modelo para describir la estructura temporal de las tasas en México, ofreciendo una herramienta reproducible para la valuación de activos.

La presente tesis está organizada en cinco capítulos a los cuales antecede una introducción que describe las características más relevantes del trabajo y el objetivo que se persigue.

En el primer capítulo se revisan los conceptos de variación cuadrática, las distintas definiciones de integral y las condiciones de regularidad (Lipschitz y Hölder) que garantizan la existencia de soluciones en modelos posteriores.

En el capítulo dos se desarrolla la teoría del movimiento Browniano, así como los conceptos de integral, isometría, propiedades y regla diferencial de Itô, así como las ecuaciones diferenciales estocásticas y la existencia y unicidad de su solución.

En el capítulo tres se analizan las soluciones y propiedades estadísticas de tres modelos representativos que son el movimiento browniano geométrico y el modelo de Langevin, pero con especial énfasis en el modelo de Vasicek pues es uno de los principales objetos de este trabajo.

El capítulo cuatro constituye la aplicación de este trabajo, integrando las herramientas de cálculo estocástico aplicando estas herramientas a bonos y la curva de rendimiento: se establece el principio de no arbitraje y la relación entre el precio del bono y la tasa spot; se expresa el precio como una esperanza bajo una medida de martingala equivalente; y, bajo Vasicek, se derivan la media y la varianza de la integral de la tasa spot para obtener una fórmula cerrada del precio del bono y su rendimiento al vencimiento. Se incluyen simulaciones numéricas que ilustran el efecto de la reversión a la media en la evolución del precio y en la forma de la curva de rendimiento ante distintas tasas spot.

Finalmente en el quinto capítulo establecemos nuestras conclusiones.

Índice general

Agradecimientos v

Introducción vii

Índice general ix

1 Preliminares **1**
1.1. Definiciones básicas 1
1.2. Variación y variación cuadrática 3
1.3. Integral de Riemann 6
1.4. Integral de Stieltjes 6
1.5. Integral de Lebesgue 9
1.6. Diferenciales e integrales 9
1.7. Condiciones de Lipschitz y Hölder 10
1.8. Condiciones de crecimiento 11

2 Cálculo estocástico **12**
2.1. Movimiento Browniano (MB) 12
2.2. Propiedades del MB 14
2.3. Propiedades de las Trayectorias del Movimiento Browniano . 15
2.4. Integral de Itô 16
2.5. Fórmula de Itô 22
2.6. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas 27

3 Modelos estocásticos **31**
3.1. Movimiento Browniano Geométrico 31
3.2. Modelo de Langevin 33
3.3. Modelo de Vasicek 36

4 Bonos y la Curva de Rendimiento **40**
4.1. Precio del bono 40
4.2. No Arbitraje y la Tasa Spot 41

4.3. Análisis del modelo de Vasicek 42
4.4. Implementación 47

5 Conclusiones. **54**

A Apéndice **56**

Bibliografía **63**

CAPÍTULO 1

Preliminares

En el presente capítulo se citan los principales resultados del análisis matemático que sustentan el desarrollo del cálculo estocástico para la teoría posterior. Se revisan las nociones de continuidad, funciones càdlàg y los diferentes tipos de variación, cuya comprensión es vital para distinguir entre trayectorias suaves y procesos con saltos. Asimismo, se establecen las definiciones de las integrales de Riemann, Stieltjes y Lebesgue, y se exponen las condiciones de Lipschitz, Hölder y crecimiento lineal, las cuales garantizan la existencia y unicidad de las soluciones a las ecuaciones diferenciales que se abordarán en los capítulos siguientes. La principal referencia teórica utilizada en este capítulo es tomada de (Klebaner, 2012).

En cálculo estocástico, se trabaja con funciones dependientes del tiempo t, $0 \leq t \leq T$.

1.1. Definiciones básicas

Una función continua obedece la intuición de que no presenta "saltos".

Definición 1.1.1. *Sea f una función, es llamada continua en $t = t_0$ si*

$$\Delta f(t) = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) \to 0 \text{ cuando } \Delta t = t - t_0 \to 0.$$

Si f es continua en todo punto del dominio, por definición, ésta es llamada continua. Por otra parte, una función también puede ser continua por la izquierda o por la derecha, a continuación, se define este tipo de continuidad:

Definición 1.1.2. *Una función es continua por la derecha (o por la izquierda) en el punto t_0 si los valores de la función $g(t)$ se aproximan a $g(t_0)$ cuando t se aproxima a t_0 por la derecha (izquierda); es decir,*

$$\lim_{t\downarrow t_0} g(t) = g(t_0), \quad (\lim_{t\uparrow t_0} g(t) = g(t_0)).$$

La notación de este tipo de continuidad es la siguiente:

- La versión continua por la izquierda de g se denota por $g(t-)$, se define tomando el límite izquierdo en cada punto,

$$g(t-) = \lim_{s\uparrow t} g(s).$$

- La función continua por la derecha $g(t+)$ se define de manera similar,

$$g(t+) = \lim_{s\downarrow t} g(s).$$

Definición 1.1.3. *Una función f es diferenciable en t_0 si en ese punto*

$$\Delta f \sim C\Delta t, \text{ es decir, } \lim_{\Delta t\to 0} \frac{f(t_0+\Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = f'(t_0) = C.$$

Teorema 1.1.4 (Teorema del Valor Medio)**.** *Si f es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), existe c, $(a<c<b)$, tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Definición 1.1.5. *Un punto t se denomina discontinuidad de primer tipo o punto de salto si ambos límites $g(t+)$ y $g(t-)$ existen y no son iguales. El salto en t se define como $\Delta g(t) = g(t+) - g(t-)$. Cualquier otra discontinuidad se denomina de segundo tipo.*

Las trayectorias de procesos de salto (como el de Poisson) no son continuas, pero sí càdlàg.

Definición 1.1.6. *Una función es càdlàg si es continua por la derecha y tiene límite por la izquierda en cada punto.*

Ejemplo 1.1.7. La función escalón de Heaviside, definida como $H(t) = \mathbf{1}_{\{t\geq 0\}}$, es un ejemplo de una función càdlàg.

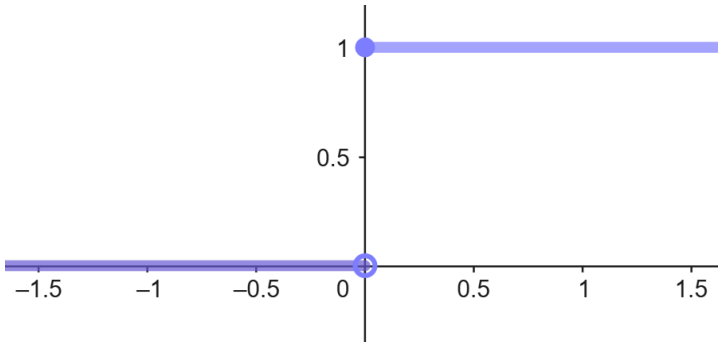


Figura 1.1: Función de Heaviside.

Teorema 1.1.8. *Una función definida en un intervalo $[a, b]$ no puede tener más que un número contable de saltos.*

Teorema 1.1.9. *Si f es diferenciable con una derivada finita $f'(t)$ en un intervalo, entonces en todos los puntos $f'(t)$ es continua o tiene una discontinuidad de segundo tipo.*

Las funciones en cálculo estocástico son funciones sin discontinuidades de segundo tipo, es decir, funciones que tienen límites tanto derechos como izquierdos en cualquier punto del dominio y unilaterales en la frontera. A este tipo de funciones se les llama funciones regulares.

1.2. Variación y variación cuadrática

Definición 1.2.1. *Si g es una función de variable real, su variación en $[a, b]$ se define como*

$$V_g([a, b]) = \sup \sum_{i=1}^{n} |g(t_i^n) - g(t_{i-1}^n)|,$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones:

$$a = t_0^n < t_1^n < ... < t_n^n = b.$$

Observe que, a medida que se añaden nuevos puntos a la partición, la suma aumenta. Por lo que la variación de g es

$$V_g([a, b]) = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} |g(t_i^n) - g(t_{i-1}^n)|$$

donde $\delta_n := \text{máx}_{1 \leq i \leq n}(t_i - t_{i-1})$.

Definición 1.2.2. *g es de variación finita si $V_g(t) < \infty$ para todo t. g es de variación acotada si $sup_t V_g(t) < \infty$, es decir, si para todo t, $V_g(t) < C$, donde C es una constante independiente de t.*

Teorema 1.2.3 (Descomposición de Jordan)**.** *Si g tiene variación finita, se puede expresar como diferencia de dos funciones crecientes*

$$g(t) = a(t) - b(t).$$

Demostración. Definimos $a(t) = V_g([0,t])$, $b(t) = a(t) - g(t)$. Ambas son crecientes, y $g(t) = a(t) - b(t)$. □

La representación de una función de variación finita como la diferencia de dos funciones no es única. Otra forma es la siguiente:

$$g(t) = \frac{1}{2}(V_g(t) + g(t)) - \frac{1}{2}(V_g(t) - g(t)).$$

La suma, diferencia y el producto de dos funciones de variación finita también son de variación finita. Además, el cociente de dos funciones de variación finita es de variación finita siempre que el denominador cumpla que exista una constante $c > 0$ tal que $|g(t)| \geq c$ para todo t.

Teorema 1.2.4. *Una función de variación finita no puede tener más de un número contable de discontinuidades. Además, las discontinuidades son saltos.*

Una condición suficiente para que una función continua sea de variación finita está dada por el siguiente teorema.

Teorema 1.2.5. *Si g es continua, g' existe y $\int |g'(t)|dt < \infty$ entonces g es de variación finita.*

Teorema 1.2.6 (Banach)**.** *Sea $g(t)$ una función continua en $[0,1]$, y denotemos por $s(a)$ el número de valores de t tales que $g(t) = a$. Entonces, la variación de g está dada por*

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(a)da.$$

Variación cuadrática

Definición 1.2.7. *Si f es una función de variable real, se define su variación cuadrática sobre todo el intervalo $[0,t]$ como el límite (cuando existe)*

$$[f](t) = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} (f(t_i^n) - f(t_{i-1}^n))^2,$$

donde el límite se toma sobre todas las particiones: $0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_n^n = t$, con $\delta_n := \max_{1 \leq i \leq n}(t_i^n - t_{i-1}^n)$.

Teorema 1.2.8. *Si f es continua y de variación finita, entonces su variación cuadrática es cero.*

Ejemplo 1.2.9. Sea $f(t) = t^2$ definida en el intervalo $[0,1]$.

Consideremos una partición uniforme del intervalo $[0,1]$ en n subintervalos, con puntos:

$$t_i = \frac{i}{n}, \quad \text{para } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Los incrementos de f en cada subintervalo son:

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = \left(\frac{i}{n}\right)^2 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 = \frac{2i-1}{n^2}.$$

Sumando los cuadrados de los incrementos:

$$\sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i-1}{n^2}\right)^2 = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2.$$

Usando la identidad $\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 = \frac{4n^2-1}{3n^3}.$$

Entonces

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4n^2-1}{3n^3} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{4}{3n} - \frac{1}{3n^3}\right) = 0.$$

Por lo tanto, la variación cuadrática de $f(t) = t^2$ en $[0,1]$ es 0.

Definición 1.2.10. *La variación cuadrática (o covariación) de dos funciones f y g en $[0,t]$ se define por:*

$$[f,g](t) = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n))(g(t_{i+1}^n) - g(t_i^n)),$$

si éste existe, donde el límite se toma sobre las particiones $\{t_i\}$ *de* $[0,t]$ *con* $\delta_n = \text{máx}(t^n_{i+1} - t^n_i)$.

Teorema 1.2.11. *Si* f *es continua y* g *tiene variación finita, entonces su covariación es cero,* $[f,g](t) = 0$.

Teorema 1.2.12 (Identidad de polarización)**.** *Sean* f *y* g *funciones tales que su covariación está definida, entonces*

$$[f,g](t) = \frac{1}{2}([f+g, f+g](t) - [f,f](t) - [g,g](t)).$$

Del teorema anterior, note que la covariación es simétrica.

1.3. Integral de Riemann

La integral de Riemann de f sobre todo el intervalo $[a,b]$ es definida por el límite de las sumas de Riemann

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi^n_i)(t^n_i - t^n_{i-1}).$$

Donde las t^n_i's representan particiones del intervalo, $a = t^n_0 < t^n_1 < \cdots < t^n_n = b$, $\delta = \text{máx}_{1\leq i\leq n}(t^n_i - t^n_{i-1})$ y $t^n_{i-1} \leq \xi^n_i \leq t^n_i$.

El cálculo de integrales a menudo se realiza utilizando la antiderivada y se basa en el siguiente resultado.

Teorema 1.3.1 (Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Si* f *es diferenciable en* $[a,b]$ *y* f' *es Riemann integrable en* $[a,b]$ *entonces*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(s)ds.$$

La integral de Riemann está bien definida para funciones continuas y, al dividir el intervalo, puede extenderse a funciones que son discontinuas en un número finito de puntos.

1.4. Integral de Stieltjes

La integral de Stieltjes es de la forma $\int_a^b f(t)dg(t)$, donde g es una función de variación finita. Dado que una función de variación finita es la diferencia de dos funciones crecientes, basta con definir la integral con respecto a funciones monótonas.

Integral de Stieltjes con respecto a funciones monótonas

La integral de Stieltjes de f con respecto a g una función monótona en todo el intervalo $[a, b]$ se define como:

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f(t)dg(t) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^n)(g(t_i^n) - g(t_{i-1}^n)).$$

Esta integral es una generalización de la integral de Riemann, que se recupera al sustituir $g(t) = t$. Esta integral es conocida como la integral de Riemann-Stieltjes.

Casos particulares

Si $g'(t)$ existe, y $g(t) = g(0) + \int_0^t g'(s)ds$, entonces

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Sea g una función de variación finita y $g(t) = a(t) - b(t)$ con $a(t) = V_g(t)$, $b(t) = V_g(t) - g(t)$, que son funciones no decrecientes. Si

$$\int_0^t |f(s)|da(s) = \int_0^t |f(s)|dV_g(s) := \int_0^t |f(s)|dg(s) < \infty,$$

entonces f es Stieltjes integrable con respecto a g y su integral está definida por

$$\int_{(0,t]} f(s)dg(s) = \int_{(0,t]} f(s)da(s) - \int_{(0,t]} f(s)db(s).$$

Si f es Stieltjes integrable con respecto a la función g de variación finita, entonces la variación de la integral es

$$V(t) = \int_0^t |f(s)||dg(s)| = \int_0^t |f(s)|dV_g(s).$$

En cálculo estocástico, necesitamos considerar integrales con respecto a funciones de variación infinita; dichas funciones surgen, por ejemplo, como modelos de precios de acciones. Las integrales respecto a una función de variación infinita no pueden definirse como un límite habitual de sumas aproximadas, por lo que se enuncia el siguiente teorema.

Teorema 1.4.1. *Sea* $\delta_n = \max(t_i^n - t_{i-1}^n)$*, el intervalo más grande en la partición de* $[a, b]$*. Si*

$$\lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1}^n)[g(t_i^n) - g(t_{i-1}^n)],$$

existe para cualquier función continua f, entonces g debe ser de variación finita en $[a, b]$.

Esto demuestra que si g es de variación infinita, entonces el límite de las sumas aproximadas no existe para algunas funciones f.

Integración por partes

Sean f y g funciones de variación finita. Denotando por $\Delta g(s) = g(s) - g(s-)$, entonces (con integrales en $(a, b]$)

$$\begin{aligned} f(b)g(b) - f(a)g(a) &= \int_a^b f(s-)dg(s) + \int_a^b g(s-)df(s) + \sum_{a\leq s\leq b} \Delta f(s)\Delta g(s) \\ &= \int_a^b f(s-)dg(s) + \int_a^b g(s)df(s). \end{aligned}$$

Nótese que, aunque la sumatoria anterior se extiende sobre un conjunto no numerable de valores $a \leq s \leq b$, solo posee una cantidad numerable de términos no nulos. Esto ocurre porque, como se mencionó en el Teorema 1.2.4, una función de variación finita tiene, a lo sumo, un conjunto numerable de saltos.

Si f es continua de modo que $f(s-) = f(s)$ para todo s, entonces la ecuación se simplifica. En este caso, se obtiene la fórmula de integración por partes

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f(s)dg(s) + \int_a^b g(s)df(s).$$

Cambio de variable

Sea f una función con derivada continua ($f \in C^1$) y g de variación finita y continua, entonces

$$f(g(t)) - f(g(0)) = \int_0^t f'(g(s))dg(s) = \int_{g(0)}^{g(t)} f'(u)du.$$

Si g es de variación finita, tiene saltos y es continua por la derecha, entonces

$$f(g(t))-f(g(0)) = \int_0^t f'(g(s-))dg(s)+\sum_{0<s\leq t} (f(g(s))-f(g(s-))-f'(g(s-))\Delta g(s))$$

donde $\Delta g(s) - g(s-)$ denota los saltos de g en s.

Una de las deficiencias de las integrales de Riemann y Stieltjes es que no conservan la propiedad de convergencia monótona, es decir, para una

sucesión de funciones $f_n \uparrow f$ no necesariamente se sigue que sus integrales converjan. Por lo que da paso a otra integral, la cual es la integral de Lebesgue.

1.5. Integral de Lebesgue

Mientras que en la integral de Riemann, las sumas se construyen particionando el dominio de integración (sobre el eje x); es decir, subdividiendo el intervalo $[a, b]$ en subintervalos más pequeños. El enfoque de Lebesgue invierte la perspectiva: las sumas se construyen particionando el rango de la función (sobre el eje y).

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función medible y supóngase que su imagen está contenida en un intervalo $[c, d]$. Considérese una partición del intervalo $[c, d]$,

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_k < \cdots < y_n = d.$$

A partir de esta partición, se forman los conjuntos medibles de nivel

$$A_k = \{\, t \in [a, b] :\ y_k \leq f(t) < y_{k+1} \,\}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

y se define la suma de Lebesgue asociada como

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k \, \mu(A_k),$$

donde $\mu(A_k)$ denota la medida (en el caso usual, la longitud de A_k).

La integral de Lebesgue puede entenderse como el límite (o, más precisamente, el supremo de todas las aproximaciones inferiores) de estas sumas cuando la partición del rango se refina, es decir, cuando aumenta el número de puntos de partición y los intervalos $[y_k, y_{k+1})$ se hacen cada vez más pequeños. Este método resulta más general que el de Riemann y preserva la convergencia; es especialmente útil en contextos de probabilidad, donde permite integrar funciones definidas en espacios abstractos provistos de una medida.

Observación 1.5.1. El enfoque de Lebesgue es fundamental en probabilidad, pues la esperanza matemática es una integral de Lebesgue.

1.6. Diferenciales e integrales

Sea f una función diferenciable en el tiempo t, su diferencial se define como la parte lineal en Δt del incremento en t, $f(t + \Delta t) - f(t)$, si el

diferencial de la variable es denotado por $dt = \Delta t$, entonces $f(t+dt)-f(t) = df(t) + \textit{términos menores}$ y se sigue de la existencia de la derivada en t, que

$$df(t) = f'(t)dt.$$

Si $g(t)$ también es diferenciable

$$df(g(t)) = f'(g(t))g'(t)dt = f'(g(t))dg(t).$$

El resultado es conocido como la regla de la cadena. Además, si una función f satisface una ecuación diferencial de la forma

$$df(t) = \varphi(t)d\omega(t),$$

entonces su forma integral es

$$f(t) = f(0) + \int_0^t \varphi(s)d\omega(s).$$

Esto establece la relación entre diferenciabilidad e integrabilidad, mostrando cómo los cambios infinitesimales se acumulan a lo largo del tiempo mediante integrales.

1.7. Condiciones de Lipschitz y Hölder

Las condiciones de Lipschitz y Hölder describen subclases de funciones continuas. Aparecen como condiciones sobre los coeficientes en los resultados sobre la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias y estocásticas. En nuestro estudio, estas condiciones se utilizan explícitamente para garantizar que las ecuaciones diferenciales consideradas tengan solución.

Definición 1.7.1. *f satisface una condición de Hölder (Hölder continua) de orden α, $0 < \alpha \leq 1$, en $[a, b] \subset \mathbb{R}$ si existe una constante $K > 0$ tal que, para todo $x, y \in [a, b] \subset \mathbb{R}$*

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^{\alpha}.$$

La condición de Lipschitz es una condición de Hölder con $\alpha = 1$:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Observe que una función Hölder continua de orden α en $[a, b]$ también es Hölder continua de cualquier orden menor.
Basta con que una función sea continua y suave a trozos para que satisfaga la condición de Lipschitz; a continuación, se enuncian las definiciones correspondientes.

Definición 1.7.2. *f es suave en $[a,b]$ si posee una derivada continua f' en (a,b) tal que los límites $f'(a+)$ y $f'(b-)$ existen.*

Definición 1.7.3. *f es continua a trozos en $[a,b]$ si es continua en $[a,b]$ excepto, posiblemente, en un número finito de puntos en los cuales existen los límites por la derecha y por la izquierda.*

Definición 1.7.4. *f es suave a trozos en $[a,b]$ si es continua a trozos en $[a,b]$ y f' existe y también es continua a trozos en $[a,b]$.*

1.8. Condiciones de crecimiento

La condición de crecimiento lineal también aparece en los resultados sobre la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales. $f(x)$ satisface la condición de crecimiento lineal si existe K tal que

$$|f(x)| \leq K(1+|x|).$$

Esta condición describe el crecimiento de una función para valores grandes de x y establece que f está acotada para valores pequeños de x.

Teorema 1.8.1 (Desigualdad de Gronwall)**.** *Sean $g(t)$ y $h(t)$ funciones regulares no negativas en $[0,T]$. Entonces, para cualquier función regular $f(t) \geq 0$ que satisfaga la desigualdad para todo $0 \leq t \leq T$;*

$$f(t) \leq g(t) + \int_0^t h(s)f(s)\,ds,$$

se tiene que,

$$f(t) \leq g(t) + \int_0^t h(s)g(s)\exp\left(\int_s^t h(u)\,du\right)ds.$$

Esta forma se toma de Dieudonné (1960). En particular, si g es no decreciente, la integral anterior se simplifica a,

$$f(t) \leq g(t)e^{\int_0^t h(s)\,ds}.$$

Un caso particular es cuando $g = A$ y $h = B$ son constantes,

$$f(t) \leq Ae^{Bt}.$$

CAPÍTULO 2

Cálculo estocástico

En este capítulo se presentan las bases matemáticas del cálculo estocástico mediante el estudio del movimiento browniano y su formalización como proceso de Wiener. Se establecen sus propiedades definitorias, junto con sus momentos estadísticos fundamentales y las singularidades patológicas de sus trayectorias, caracterizadas por variación cuadrática finita e infinita variación total. Finalmente, se desarrollan la integral de Itô para procesos adaptados y la fórmula de Itô en sus formas univariada y multivariada, herramientas esenciales para el análisis de ecuaciones diferenciales estocásticas.

2.1. Movimiento Browniano (MB)

El movimiento browniano es un proceso estocástico de naturaleza gaussiana que fue introducido originalmente con el propósito de describir matemáticamente ciertos fenómenos físicos asociados al comportamiento aleatorio de partículas microscópicas suspendidas en un fluido. Este fenómeno fue observado por primera vez por el biólogo Robert Brown en 1827, cuando, mediante el uso del microscopio, analizó el movimiento de partículas de polen en el agua (Brown, 1828). Brown advirtió que dichas partículas presentaban un desplazamiento irregular y errático, atribuible a las interacciones moleculares del medio (Nelson, 1967).
Posteriormente, en un contexto distinto, Louis Bachelier empleó en 1900 el movimiento browniano como modelo para describir la evolución temporal de los precios de los activos financieros en su teoría matemática de la especulación (Bachelier, 1900). No obstante, su trabajo no fue plenamente

comprendido ni valorado en su tiempo, permaneciendo relegado durante varios años hasta que se logró establecer una base matemática rigurosa. Esta formalización del concepto de movimiento browniano fue desarrollada más tarde por Norbert Wiener, en cuyo honor el proceso es conocido también como proceso de Wiener (Wiener, 1923).

Definición 2.1.1. *El Movimiento Browniano o proceso de Wiener* $B \equiv \{B(t) : t \geq 0\}$ *es un proceso estocástico que cumple con las siguientes propiedades:*

1. *Comienza en el origen con probabilidad 1:*

$$P[B(0) = 0] = 1.$$

2. *B tiene incrementos estacionarios:*

$$B(t+\Delta t) - B(t) \overset{d}{=} B(s+\Delta t) - B(s), \qquad \forall\, s, t :\ 0 \leq s \leq t \in [0, +\infty),$$

donde el símbolo $\overset{d}{=}$ *denota igualdad en distribución.*

3. *Los incrementos del proceso dados por* $B(t) - B(s)$ *son independientes; en particular,*

$$B(t_2) - B(t_1),\ B(t_3) - B(t_2),\ \ldots,\ B(t_{n+1}) - B(t_n)$$

son variables aleatorias independientes, con

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq t_{n+1} \leq +\infty.$$

4. *Los incrementos tienen distribución gaussiana (o normal) con media cero y varianza* $t - s$ *para todo* $0 \leq s \leq t$*; es decir,*

$$B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0,\, t - s).$$

En el caso particular en que $s = 0$*, y considerando la propiedad anterior, se obtiene que*

$$B(t) \sim \mathcal{N}(0,\, t),$$

esto es, $B(t)$ *es una variable aleatoria normal de media cero y desviación típica* $\sqrt{t}$*.*

5. *Las trayectorias del proceso* $B(t)$ *son continuas con probabilidad uno, pero no son diferenciables en ningún punto.*

2.2. Propiedades del MB

Proposición 2.2.1. *El MB B_t tiene las siguientes propiedades para números reales positivos s, t, t_0, λ :*

1. $\{B_t\}$ *es un proceso de Markov.*
2. $\mathbb{E}\{B_t\} = 0$.
3. $\mathbb{V}ar\{B_t\} = \mathbb{E}\{B_t^2\} = t$.
4. $\mathbb{C}ov\{B_t, B_s\} = \mathbb{E}\{B_t B_s\} = \text{mín}\{s, t\}$.
5. $\mathbb{E}\{(B_t - B_s)^2\} = |t - s|$.
6. $\mathbb{E}\{B_t^4\} = 3t^2$.

Demostración. (1) Para demostrar que $\{B_t\}$ cumple la propiedad de Markov, usando la característica de independencia de los incrementos del movimiento browniano, tenemos:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{B_{t+s} \leq a \mid B_0 = w_0,\ B_1 = w_1,\ \ldots,\ B_s = w_s\} \\
&\quad = \mathbb{P}\{B_{t+s} - B_s \leq a - w_s \mid B_0 = w_0,\ B_1 = w_1,\ \ldots,\ B_s = w_s\} \\
&\quad = \frac{\mathbb{P}\{B_{t+s} - B_s \leq a - w_s, B_0 = w_0,\ B_1 = w_1,\ \ldots,\ B_s = w_s\}}{\mathbb{P}\{B_0 = w_0,\ B_1 = w_1,\ \ldots,\ B_s = w_s\}} \\
&\quad = \mathbb{P}\{B_{t+s} - B_s \leq a - w_s\} \\
&\quad = \mathbb{P}\{B_{t+s} \leq a \mid B_s = w_s\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{B_t\}$ es un proceso de Markov.

(2) Directamente del punto 2) de la definición de movimiento browniano.

(3) Directamente del punto 3) de la definición de movimiento browniano.

(4) Como

$$\text{Cov}\{B_t, B_s\} = \mathbb{E}\Big[(B_t - \mathbb{E}[B_t])(B_s - \mathbb{E}[B_s])\Big] = \mathbb{E}[B_t B_s],$$

para demostrar que $\mathbb{E}[B_t B_s] = \text{mín}\{t, s\}$, supongamos que $s < t$; entonces

$$\mathbb{E}[B_t B_s] = \mathbb{E}\Big[B_s(B_t - B_s)\Big] + \mathbb{E}[B_s^2] = \mathbb{E}[B_s(B_t - B_s)] + \mathbb{E}[B_s^2] = \mathbb{E}[B_s^2] = s.$$

Análogamente para $t < s$.

(5) Para demostrar que $\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = |t - s|$, se tiene:

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = \mathbb{E}[B_t^2] - 2\mathbb{E}[B_t B_s] + \mathbb{E}[B_s^2] = t - 2\,\text{mín}\{t, s\} + s = |t - s|.$$

(6) Usando la función generadora de momentos de una variable aleatoria normal B_t,

$$\varphi(u) = \exp\left(\mu u + \frac{tu^2}{2}\right), \quad \text{con } \mu = \mathbb{E}[B_t] = 0 \text{ y } t = \text{Var}(B_t),$$

se obtiene que

$$\varphi^{(4)}(u) = (3t^2 + 6u^2t^3 + u^4t^4)e^{\left(\frac{tu^2}{2}\right)}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Evaluando en $u = 0$, se verifica que

$$\mathbb{E}[B_t^4] = 3t^2.$$

□

2.3. Propiedades de las Trayectorias del Movimiento Browniano

Una ocurrencia de movimiento browniano, observada desde el tiempo 0 hasta el tiempo T, es una función aleatoria de t en el intervalo $[0, T]$. Se le denomina realización, camino o trayectoria.

Definición 2.3.1. *La variación cuadrática del MB $[B, B](t)$ está definida en $[0, t]$ como*

$$[B, B](t) = [B, B]([0, t]) = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} |B(t_i^n) - B(t_{i-1}^n)|^2,$$

donde el límite se toma sobre todas las particiones finas de $[0, t]$, con $\delta_n = \text{máx}_i(t_{i+1}^n - t_i^n) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Note que, aunque las sumas en la definición anterior son aleatorias, su límite no es aleatorio (es determinista), como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 2.3.2. *La variación cuadrática de un MB sobre $[0, t]$ es t.*

Teorema 2.3.3. *Para cualquier t, casi todas las trayectorias del MB no son diferenciables en t.*

Demostración. Considere

$$\frac{B(t+\Delta)-B(t)}{\Delta} = \frac{\sqrt{\Delta}Z}{\Delta} = \frac{Z}{\sqrt{\Delta}},$$

para alguna variable aleatoria normal estándar Z. Por lo tanto, el cociente converge a ∞ en distribución, ya que $P\left(\left|\frac{Z}{\sqrt{\Delta}}\right| > K\right) \to 1$ para cualquier K, cuando $\Delta \to 0$, lo que impide la existencia de la derivada en t. □

Propiedades de las Trayectorias Brownianas

Las funciones $B(t)$ como funciones de t poseen las siguientes propiedades. Casi toda trayectoria muestral $B(t)$, para $0 \leq t \leq T$, es:

1. Una función continua de t: A pesar de su comportamiento errático, no presenta saltos (continuidad casi segura).
2. No monótona en ningún intervalo: No importa cuán pequeño sea el intervalo, la trayectoria oscila infinitamente.
3. No diferenciable en ningún punto: La trayectoria tiene picos en todas partes.
4. De variación infinita en cualquier intervalo: Debido a sus oscilaciones extremas, la longitud total del camino recorrido en cualquier intervalo (por pequeño que sea) es infinita.
5. De variación cuadrática en $[0, t]$ igual a t: Para cualquier t, la suma de los cuadrados de sus incrementos converge de forma determinista al valor del tiempo transcurrido.

2.4. Integral de Itô

En el estudio del cálculo estocástico, la integral de Itô constituye una herramienta fundamental para el análisis de procesos aleatorios, especialmente aquellos relacionados con el movimiento Browniano. A diferencia de la integración clásica, la integral de Itô se construye para manejar funciones que dependen de trayectorias aleatorias.

Definición 2.4.1. *Un proceso X es llamado adaptado a la filtración $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}$, si para todo t, $X(t)$ es $\mathcal{F}_t - medible$.*

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado y sea $B(t)$ un movimiento Browniano adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$. El objetivo es definir la integral estocástica:

$$\int_0^T X(t)\, dB(t) = \int X\, dB.$$

Esta integral debe tener la propiedad de que, si $X(t) = 1$, entonces

$$\int_0^T dB(t) = B(T) - B(0).$$

De manera similar, si $X(t)$ es una constante c, entonces la integral debe ser

$$c(B(T) - B(0)).$$

De esta forma, podemos integrar procesos constantes con respecto a B. La integral sobre $[0, T]$ debe ser la suma de integrales sobre los dos subintervalos $(0, a]$ y $(a, T]$. Así, si $X(t)$ toma dos valores, c_1 en $(0, a]$ y c_2 en $(a, T]$, entonces la integral de X con respecto a B se define fácilmente. De esta manera, la integral se define para *procesos simples*, es decir, procesos que son constantes en un número finito de intervalos.

Definición 2.4.2. *Un proceso $X = \{X(t), 0 \leq t \leq T\}$ se llama un* ***proceso adaptado simple*** *si existen tiempos $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ y variables aleatorias $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, tales que:*

- *ξ_0 es una constante,*
- *ξ_i es $\mathcal{F}_{t_i}$-medible (esta depende de los valores de $B(t)$ para $t \leq t_i$, pero no de los valores de $B(t)$ para $t > t_i$),*
- *$\mathbb{E}(\xi_i^2) < \infty,\ i = 0, \ldots, n-1,$*

tal que

$$X(t) = \xi_0 I_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i I_{(t_i, t_{i+1})}(t).$$

Para procesos adaptados simples, la integral de Itô, se define como:

$$\int_0^T X(t)\, dB(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \Big(B(t_{i+1}) - B(t_i) \Big).$$

Cuando las ξ_i son aleatorias, la integral no necesariamente tiene una distribución normal.

Propiedades de la Integral de Itô para Procesos Simples

Se establecen las propiedades principales de la integral de Itô para procesos simples; estas propiedades se extienden a la integral de Itô para procesos generales.

- Linealidad. Si $X(t)$ y $Y(t)$ son procesos simples y α y β son constantes, entonces
$$\int_0^T (\alpha X(t) + \beta Y(t))dB(t) = \alpha \int_0^T X(t)dB(t) + \beta \int_0^T Y(t)dB(t).$$
- Para la función indicadora de un intervalo ($I_{(a,b]}(t) = 1$ donde $t \in (a, b]$, y cero en otro caso)
$$\int_0^T I_{(a,b]}(t)\, dB(t) = B(b) - B(a),$$
$$\int_0^T I_{(a,b]}(t)X(t)\, dB(t) = \int_a^b X(t)\, dB(t).$$
- Media cero.
$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X(t)dB(t)\right) = 0.$$
- Isometría.
$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X(t)dB(t)\right)^2 = \int_0^T \mathbb{E}(X^2(t))dt.$$

Integral de Itô para Procesos Adaptados

Teorema 2.4.3. *Sea $X(t)$ un proceso adaptado simple tal que, con probabilidad uno $\int_0^T X^2(t)\, dt < \infty$. Entonces, la integral de Itô $\int_0^T X(t)dB(t)$ está definida y tiene las siguientes propiedades:*

1. *Linealidad. Si las integrales de Itô de $X(t)$ y $Y(t)$ están definidas y α, β son constantes, entonces*
$$\int_0^T (\alpha X(t) + \beta Y(t))\, dB(t) = \alpha \int_0^T X(t)\, dB(t) + \beta \int_0^T Y(t)\, dB(t).$$

2.

$$\int_0^T X(t) I_{(a,b]}(t) dB(t) = \int_a^b X(t) dB(t).$$

Las siguientes dos propiedades se cumplen cuando el proceso satisface una condición adicional

$$\int_0^T \mathbb{E}(X^2(t)) dt < \infty.$$

3. Propiedad de media cero. Si se cumple la condición anterior, entonces,

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X(t)\, dB(t)\right) = 0.$$

4. Propiedad de isometría. Si se cumple la condición anterior, entonces,

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X(t)\, dB(t)\right)^2 = \int_0^T \mathbb{E}(X^2(t))\, dt.$$

Demostración. **Propiedad 1:** Por definición de la integral de Itô para procesos simples

$$\int_0^T Z(t)\, dB(t) = \sum_{i=0}^{n-1} Z_i\Big(B(t_{i+1}) - B(t_i)\Big),$$

donde Z_i es el valor del proceso en el intervalo $(t_i, t_{i+1}]$. Si $Z(t) = \alpha X(t) + \beta Y(t)$, donde $X(t)$ y $Y(t)$ son procesos simples, entonces

$$\int_0^T (\alpha X(t) + \beta Y(t))\, dB(t) = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha X_i + \beta Y_i)(B(t_{i+1}) - B(t_i)),$$

Aplicando distributividad

$$= \alpha \sum_{i=0}^{n-1} X_i (B(t_{i+1}) - B(t_i)) + \beta \sum_{i=0}^{n-1} Y_i (B(t_{i+1}) - B(t_i)),$$

por definición se tiene que:

$$= \alpha \int_0^T X(t)\, dB(t) + \beta \int_0^T Y(t)\, dB(t).$$

Propiedad 2: Por definición

$$\int_0^T I_{(a,b]}(t)\, dB(t) = \sum_{i=0}^{n-1} I_{(a,b]}(t_i)(B(t_{i+1}) - B(t_i)).$$

Como $I_{(a,b]}(t_i) = 1$ si $t_i \in (a, b]$, y 0 en otro caso, la suma solo toma los incrementos entre a y b

$$\int_0^T I_{(a,b]} dB(t) = B(b) - B(a).$$

Propiedad 3: Supongamos que $X(t)$ es un proceso estocástico adaptado que satisface la condición de integrabilidad L^2:

$$\int_0^T \mathbb{E}[X^2(t)]dt < \infty.$$

La Integral de Itô $J = \int_0^T X(t)dB(t)$ se define como el límite en L^2 de las integrales de los procesos simples J_n.

Tomando la esperanza de J_n

$$\mathbb{E}[J_n] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n-1} X(t_k^n)\Delta B_k\right] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[X(t_k^n)\Delta B_k\right]$$

Dado que $X(t_k^n)$ es $\mathcal{F}_{t_k^n}$-medible y ΔB_k es independiente de $\mathcal{F}_{t_k^n}$ con $\mathbb{E}[\Delta B_k] = 0$

$$\mathbb{E}\left[X(t_k^n)\Delta B_k\right] = \mathbb{E}\left[X(t_k^n)\right] \cdot \mathbb{E}\left[\Delta B_k\right] = \mathbb{E}\left[X(t_k^n)\right] \cdot 0 = 0.$$

La media de la integral simple es cero

$$\mathbb{E}[J_n] = \sum_{k=0}^{n-1} 0 = 0.$$

Como $J_n \to J$ en L^2, la esperanza converge

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X(t)dB(t)\right) = \mathbb{E}[J] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[J_n] = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Propiedad 4: Calculamos la esperanza del cuadrado de J_n

$$\mathbb{E}[J_n^2] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} X(t_k^n)\Delta B_k\right)^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[X(t_i^n)X(t_j^n)\Delta B_i \Delta B_j\right]$$

Términos Cruzados ($i \neq j$) para $i < j$:

$$\mathbb{E}\left[X(t_i^n)X(t_j^n)\Delta B_i \Delta B_j\right] = \mathbb{E}\left[\left(X(t_i^n)X(t_j^n)\Delta B_i\right) \cdot \Delta B_j\right].$$

El término entre paréntesis es $\mathcal{F}_{t_j^n}$-medible. Como ΔB_j es independiente de $\mathcal{F}_{t_j^n}$ y $\mathbb{E}[\Delta B_j] = 0$,

$$\mathbb{E}\left[\dots\right] = \mathbb{E}\left[X(t_i^n)X(t_j^n)\Delta B_i\right] \cdot \mathbb{E}\left[\Delta B_j\right] = 0.$$

Los términos cruzados se anulan.

Términos Diagonales ($i = j$) solo quedan los términos donde $i = j = k$:

$$\mathbb{E}[J_n^2] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[X^2(t_k^n)(\Delta B_k)^2\right].$$

Usando la independencia de $X^2(t_k^n)$ y $(\Delta B_k)^2$, y $\mathbb{E}[(\Delta B_k)^2] = \Delta t_k$,

$$\mathbb{E}[J_n^2] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[X^2(t_k^n)\right] \cdot \mathbb{E}\left[(\Delta B_k)^2\right] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[X^2(t_k^n)\right] \Delta t_k.$$

Como $J_n \to J$ en L^2, $\mathbb{E}[J_n^2] \to \mathbb{E}[J^2]$. El límite de la suma de Riemann es la integral

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T X(t)dB(t)\right)^2\right) = \mathbb{E}[J^2] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[J_n^2] = \int_0^T \mathbb{E}[X^2(t)]dt.$$

□

Teorema 2.4.4. *Sean $X(t)$ y $Y(t)$ procesos adaptados regulares, tales que*

$$\mathbb{E}\int_0^T X(t)^2\,dt < \infty \quad y \quad \mathbb{E}\int_0^T Y(t)^2\,dt < \infty.$$

Entonces

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X(t)\,dB(t)\ \int_0^T Y(t)\,dB(t)\right) = \int_0^T \mathbb{E}[X(t)Y(t)]\,dt.$$

Demostración. Denotemos las integrales de Itô como

$$I_1 = \int_0^T X(t)\,dB(t), \qquad I_2 = \int_0^T Y(t)\,dB(t).$$

Escribimos su producto usando la identidad

$$I_1 I_2 = \frac{(I_1 + I_2)^2}{2} - \frac{I_1^2}{2} - \frac{I_2^2}{2}.$$

Primero, calculamos las esperanzas:

$$\mathbb{E}[I_1 I_2] = \frac{\mathbb{E}[(I_1 + I_2)^2] - \mathbb{E}[I_1^2] - \mathbb{E}[I_2^2]}{2}.$$

Por la isometría de Itô

$$\mathbb{E}[I_1^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^T X(t)^2\, dt\right], \qquad \mathbb{E}[I_2^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^T Y(t)^2\, dt\right].$$

Además,

$$I_1 + I_2 = \int_0^T (X(t) + Y(t))\, dB(t),$$

por lo que

$$\mathbb{E}[(I_1 + I_2)^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^T (X(t) + Y(t))^2\, dt\right].$$

Expandimos,

$$(X(t) + Y(t))^2 = X(t)^2 + Y(t)^2 + 2X(t)Y(t).$$

Así,

$$\mathbb{E}[(I_1 + I_2)^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^T X(t)^2 + Y(t)^2 + 2X(t)Y(t)\, dt\right].$$

Combinando los términos

$$\mathbb{E}[I_1 I_2] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^T X(t)^2 + Y(t)^2 + 2X(t)Y(t)\, dt\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^T X(t)^2\, dt\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^T Y(t)^2\, dt\right]}{2}.$$

Simplificando

$$\mathbb{E}[I_1 I_2] = \mathbb{E}\left[\int_0^T X(t)Y(t)\, dt\right].$$

Finalmente, por el teorema de Fubini A.0.11 (Ver Apéndice)

$$\mathbb{E}[I_1 I_2] = \int_0^T \mathbb{E}[X(t)Y(t)]\, dt.$$

□

2.5. Fórmula de Itô

La fórmula de Itô es una de las herramientas principales del cálculo estocástico. Es una extensión estocástica de la regla de la cadena, diseñada específicamente para funciones que dependen tanto del tiempo como del movimiento browniano. Esta fórmula permite calcular diferenciales de procesos estocásticos.

Teorema 2.5.1. *Si $B(t)$ es un movimiento browniano en $[0,T]$ y $f(x)$ es una función continua y dos veces diferenciable en $\mathbb{R}$ para algún $t \leq T$*

$$f(B(t)) = f(0) + \int_0^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B(s))ds. \tag{2.1}$$

Demostración. Sea una partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ del intervalo $[0,t]$, con $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. Definimos

$$\Delta B_i = B(t_{i+1}) - B(t_i).$$

Queremos ver el comportamiento de

$$f(B(t)) - f(B(0)) = \sum_{i=0}^{n-1} \Big[f(B(t_{i+1})) - f(B(t_i)) \Big].$$

Por otra parte, note que la expansión de Taylor de segundo orden de $f(B(t_{i+1}))$ es:

$$f(B(t_{i+1})) = f(B(t_i)) + f'(B(t_i))\Delta B_i + \tfrac{1}{2} f''(B(t_i))(\Delta B_i)^2 + R_i,$$

donde el R_i satisface que converge a 0. Sustituyendo esto, obtenemos

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Big(f(B(t_{i+1})) - f(B(t_i)) \Big) = \sum_{i=0}^{n-1} f'(B(t_i))\Delta B_i + \tfrac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f''(B(t_i))(\Delta B_i)^2.$$

Por lo tanto,

$$f(B(t)) - f(0) = \sum_{i=0}^{n-1} f'(B(t_i))\Delta B_i + \tfrac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f''(B(t_i))(\Delta B_i)^2.$$

Note que:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f'(B(t_i))\Delta B_i \longrightarrow \int_0^t f'(B(s))\, dB(s).$$

Para el segundo término, como $(\Delta B_i)^2 \approx \Delta t_i$, esto se justifica por la siguiente tabla, conocida como tabla de McKean, (Kuo, 2006).

	dt	$dB(t)$
dt	$(dt)^2 = 0$	$(dt)(dB(t)) = 0$
$dB(t)$	$(dt)(dB(t)) = 0$	$(dB(t))^2 = dt$

Figura 2.1: Tabla de McKean

entonces

$$\sum_{i=0}^{n-1} f''(B(t_i))(\Delta B_i)^2 \longrightarrow \int_0^t f''(B(s))\,ds.$$

Por lo tanto,

$$f(B(t)) = f(0) + \int_0^t f'(B(s))\,dB(s) + \tfrac{1}{2}\int_0^t f''(B(s))\,ds.$$

□

Ejemplo 2.5.2. Sea $B(t)$ un Movimiento Browniano estándar en $[0,T]$. Utilice el teorema anterior para determinar la descomposición integral de $f(B_t) = B_t^3$:
Descomposición integral:

$$\begin{aligned} B_t^3 &= f(B_0) + \int_0^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B(s))ds \\ &= 0 + \int_0^t 3B(s)^2 dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t 6B(s)ds \\ &= \int_0^t 3B(s)^2 dB(s) + \int_0^t 3B(s)ds. \end{aligned}$$

Procesos de Itô

Definición 2.5.3. *Un proceso de Itô tiene la forma*

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \mu(s)\,ds + \int_0^t \sigma(s)\,dB(s), \qquad 0 \le t \le T,$$

donde $Y(0)$ es $\mathcal{F}_0$-medible y los procesos $\mu(t)$ y $\sigma(t)$ están adaptados a $\mathcal{F}_t$, tales que

$$\int_0^T |\mu(t)|\,dt < \infty \qquad y \qquad \int_0^T \sigma^2(t)\,dt < \infty.$$

Se dice que el proceso $Y(t)$ tiene el diferencial estocástico en $[0,T]$

$$dY(t) = \mu(t)\,dt + \sigma(t)\,dB(t), \qquad 0 \le t \le T.$$

Teorema 2.5.4 (Formula de Itô para $f(X(t))$)**.** *Sea $X(t)$ un proceso de Itô con diferencial estocástico*

$$dX(t) = \mu(t)\,dt + \sigma(t)\,dB(t), \quad 0 \le t \le T.$$

Si $f(x)$ es una función C^2 (dos veces diferenciable y continua), entonces el diferencial estocástico del proceso $f(X(t))$ existe y está dado por

$$df(X(t)) = f'(X(t))\,dX(t) + \tfrac{1}{2}f''(X(t))(dX(t))^2.$$

Como

$$(dX(t))^2 = (\mu(t)\,dt + \sigma(t)\,dB(t))^2 \approx \sigma^2(t)\,dt,$$

entonces

$$df(X(t)) = f'(X(t))(\mu(t)\,dt + \sigma(t)\,dB(t)) + \tfrac{1}{2}f''(X(t))\sigma^2(t)\,dt.$$

Agrupando términos

$$df(X(t)) = \Big[f'(X(t))\mu(t) + \tfrac{1}{2}f''(X(t))\sigma^2(t)\Big]dt + f'(X(t))\sigma(t)\,dB(t).$$

En su forma integral es

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t f'(X(s))dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X(s))\sigma^2(s)ds.$$

Ejemplo 2.5.5. Sea $X(t)$ un proceso que tiene el siguiente diferencial estocástico

$$dX(t) = \mu(t)X(t)dt + \sigma(t)X(t)dB(t).$$

Utilice el teorema anterior para determinar el diferencial del proceso estocástico $f(X_t) = \ln X_t$:

$$\begin{aligned} d(\ln(X_t)) &= f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)(\sigma(t)X_t)^2dt \\ &= \frac{1}{X_t}\left(\mu(t)X_tdt + \sigma(t)X_tdB_t\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{X_t^2}\right)\sigma^2(t)X_t^2dt \\ &= (\mu(t)dt + \sigma(t)dB_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)dt \\ &= \left(\mu(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)\right)dt + \sigma(t)dB_t, \end{aligned}$$

y la solución $X(t) = e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma dB_t}$ es conocida como Black-Scholes.

Fórmula de Itô para funciones de dos variables

Si dos procesos X e Y poseen ambos un diferencial estocástico con respecto a $B(t)$, y $f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas hasta de orden

dos, entonces $f(X(t), Y(t))$ también posee un diferencial estocástico. Para encontrar su forma, consideremos la expansión de Taylor de orden dos

$$\begin{aligned} df(x,y) =& \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial x)^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial y)^2}(dy)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}dxdy\right). \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} (dX(t))^2 = dX(t)dX(t) = d[X,X](t) = \sigma_X^2(t)dt, \\ (dY(t))^2 = d[Y,Y](t) = \sigma_Y^2(t)dt, \\ dX(t)dY(t) = d[X,Y]_t = \sigma_X(t)\sigma_Y(t)dt, \end{aligned}$$

donde $\sigma_X(t)$ y $\sigma_Y(t)$ son los coeficientes de difusión de X e Y respectivamente.

Teorema 2.5.6. *Sea $f(x,y)$ con derivadas parciales continuas hasta el orden dos (una función C^2), y sean X, Y procesos de Itô, entonces*

$$\begin{aligned} df(X(t),Y(t)) =& \frac{\partial f}{\partial x}(X(t),Y(t))dX(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(X(t),Y(t))dY(t) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X(t),Y(t))\sigma_X^2(t)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X(t),Y(t))\sigma_Y^2(t)dt \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X(t),Y(t))\sigma_X(t)\sigma_Y(t)dt. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ejemplo 2.5.7. Si $f(x,y) = xy$, entonces obtenemos un diferencial de un producto (o la regla del producto) que da como resultado la fórmula de integración por partes.

$$d(X(t)Y(t)) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + \sigma_X(t)\sigma_Y(t)dt.$$

Un caso importante de la fórmula de Itô es para funciones de la forma $f(X(t), t)$.

Teorema 2.5.8. *Sea $f(x,t)$ dos veces continuamente diferenciable en x, y continuamente diferenciable en t (una función C^2), y sea X un proceso de Itô, entonces*

$$\begin{aligned} df(X(t),t) =& \frac{\partial f}{\partial x}(X(t),t)dX(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(X(t),t)dt \\ &+ \frac{1}{2}\sigma_X^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X(t),t)dt. \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.6. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Las ecuaciones diferenciales se utilizan para describir la evolución de un sistema. Las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE) surgen cuando se introduce un ruido aleatorio en las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO).

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

Si $x(t)$ es una función diferenciable definida para $t \geq 0$, $\mu(x,t)$ es una función de x y t, y se satisface la siguiente relación para todo t, $0 \leq t \leq T$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x'(t) = \mu(x(t),t), \quad \text{y} \quad x(0) = x_0, \tag{2.4}$$

entonces $x(t)$ es una solución de la EDO con la condición inicial x_0. Usualmente, se añade el requisito de que $x'(t)$ sea continua. La ecuación anterior puede escribirse en su forma diferencial como:

$$dx(t) = \mu(x(t),t)\,dt$$

o en su forma integral:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \mu(x(s),s)\,ds.$$

Antes de definir las EDE, analizaremos cómo surgen como EDO perturbadas aleatoriamente.

Ruido Blanco

El proceso de ruido blanco $\xi(t)$ se define como la derivada del movimiento Browniano

$$\xi(t) = \frac{dB(t)}{dt} = B'(t).$$

Sin embargo, la igualdad no puede ser interpretada en el sentido del cálculo ordinario, ya que el movimiento browniano no es diferenciable en ningún punto. Si $\sigma(x,t)$ es la intensidad del ruido en el punto x en el tiempo t, se deduce que

$$\int_0^T \sigma(X(t),t)\xi(t)\,dt = \int_0^T \sigma(X(t),t)B'(t)\,dt = \int_0^T \sigma(X(t),t)\,dB(t),$$

donde la integral es la integral de Itô.

Las EDE surgen, por ejemplo, cuando los coeficientes de las ecuaciones diferenciales ordinarias son perturbados por ruido blanco.

Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Sea $B(t), t \geq 0$, un proceso de movimiento browniano. Una ecuación de la forma

$$dX(t) = \mu(X(t), t)\, dt + \sigma(X(t), t)\, dB(t), \tag{2.5}$$

donde las funciones $\mu(x,t)$ y $\sigma(x,t)$ son dadas y $X(t)$ es el proceso desconocido, se llama *ecuación diferencial estocástica (EDE)* impulsada por movimiento browniano. Las funciones $\mu(x,t)$ y $\sigma(x,t)$ se llaman respectivamente el *coeficiente de media* y el *de volatilidad*.

Definición 2.6.1. *Un proceso $X(t)$ se llama una solución fuerte de la EDE (2.5) si para todo $t > 0$ las integrales*

$$\int_0^t \mu(X(s), s)\, ds \quad y \quad \int_0^t \sigma(X(s), s)\, dB(s),$$

existen, siendo la segunda una integral de Itô, y

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(X(s), s)\, ds + \int_0^t \sigma(X(s), s)\, dB(s). \tag{2.6}$$

Generalmente, las EDE tienen la forma

$$dX(t) = \mu(t)\, dt + \sigma(t)\, dB(t), \tag{2.7}$$

donde $\mu(t)$ y $\sigma(t)$ pueden depender de t y de todo el pasado de los procesos $X(t)$ y $B(t)$, es decir

$$\mu(t) = \mu(X(s), s \leq t), \quad \sigma(t) = \sigma(X(s), s \leq t).$$

La única restricción sobre $\mu(t)$ y $\sigma(t)$ es que deben ser procesos adaptados, con las respectivas integrales bien definidas.

Existencia y unicidad de soluciones

Sea $X(t)$ solución de

$$dX(t) = \mu(X(t), t)\, dt + \sigma(X(t), t)\, dB(t). \tag{2.8}$$

Teorema 2.6.2 (Existencia y unicidad)**.** *Si se cumplen las tres condiciones siguientes:*

1. *Los coeficientes son localmente Lipschitz en x de manera uniforme en t. Es decir, para todo T y N existe una constante K, que depende solo de T y N, tal que para todo $|x|, |y| \leq N$ y todo $0 \leq t \leq T$,*

$$|\mu(x,t) - \mu(y,t)| + |\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| < K\,|x - y|.$$

2. *Los coeficientes satisfacen la condición de crecimiento lineal*

$$|\mu(x,t)| + |\sigma(x,t)| \leq K(1+|x|).$$

3. $X(0)$ *es independiente de* $\{B(t), 0 \leq t \leq T\}$ *y* $\mathbb{E}[X^2(0)] < \infty$.

Entonces existe una única solución fuerte $X(t)$ *de la EDE (2.8). Además,* $X(t)$ *tiene trayectorias continuas y satisface*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq T} X^2(s)\right) < C\left(1+\mathbb{E}X^2(0)\right),$$

donde la constante C *depende únicamente de* K *y* T.

El siguiente resultado es específico para EDEs unidimensionales. Se presenta para el caso de coeficientes independientes del tiempo (Klebaner, 2012).

Teorema 2.6.3 (Yamada-Watanabe)**.** *Supongamos que* $\mu(x)$ *satisface la condición de Lipschitz y que* $\sigma(x)$ *satisface una condición de Hölder de orden* α *con* $\alpha \geq \frac{1}{2}$*; es decir, existe una constante* $K > 0$ *tal que, para todo* x, y*,*

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K\,|x-y|^{\alpha}.$$

Entonces, si existe una solución fuerte, esta es única.

Ejemplo 2.6.4. Considérese la siguiente EDE (modelo de Vasicek)

$$dX(t) = b\,(a - X(t))\,dt + \sigma\,dB(t), \qquad b > 0,\ a \in \mathbb{R},\ \sigma > 0.$$

Sea $\mu(x) := b(a-x)$ y $\sigma(x) := \sigma$. Verifique que se satisfacen las hipótesis del teorema de Yamada-Watanabe.

Solución:

- *Condición Lipschitz.* Al ser lineal en x,

$$|\mu(x) - \mu(y)| = |b(a-x) - b(a-y)| = b\,|x-y|,$$

de modo que μ es Lipschitz global, con constante $K = b$.

- *Condición de Hölder.* Como $\sigma(x) \equiv \sigma$ es constante,

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| = 0 \leq K\,|x-y|^{\alpha},$$

para cualquier $\alpha \in (0,1]$ (puede tomarse $K = 0$). En particular, se cumple la condición de Hölder con $\alpha \geq \frac{1}{2}$ requerida en el Teorema Yamada–Watanabe.

Por el Teorema de Yamada–Watanabe, si existe solución fuerte, ésta es *única*. Además, usando que $|\mu(x)|+|\sigma(x)| \leq a|x|+(ab+\sigma) \leq K(1+|x|)$, se satisface crecimiento lineal, por lo que el Teorema de existencia y unicidad garantiza también la *existencia* de una única solución fuerte con trayectorias continuas.

CAPÍTULO 3

Modelos estocásticos

El modelado de la evolución dinámica de variables financieras clave, como los precios de activos y las tasas de interés, requiere el empleo de herramientas estocásticas que capturen la incertidumbre inherente al mercado. A continuación, examinaremos tres modelos estocásticos.

3.1. Movimiento Browniano Geométrico

El movimiento browniano geométrico (MBG) es uno de los procesos estocásticos más utilizados para modelar sistemas dinámicos cuya evolución depende proporcionalmente de su estado actual y está sujeta a incertidumbre de tipo multiplicativo.

Sean $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y $X_0 > 0$, se define el movimiento browniano geométrico como el proceso estocástico a tiempo continuo $\{X_t : t \geq 0\}$ que satisface la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \mu X_t \, dt + \sigma X_t \, dB_t, \quad X(0) = 1. \tag{3.1}$$

Una característica fundamental del MBG es que sus trayectorias permanecen siempre positivas, lo cual lo convierte en un modelo natural para cantidades que no pueden asumir valores negativos, como precios de activos, poblaciones biológicas o concentraciones químicas.

La solución de la ecuación diferencial (3.1) se obtiene de la siguiente manera:

Tomando $f(x) := \ln x$, entonces

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Aplicando la fórmula de Itô (Teorema 2.5.4)

$$df(X) = f'(X)\,dX + \frac{1}{2}f''(X)(dX)^2.$$

Usando que

$$dX(t) = \mu X(t)\,dt + \sigma X(t)\,dB(t), \quad (dB(t))^2 = dt.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} d(\ln X(t)) =& \frac{1}{X(t)}dX(t) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{X(t)^2}\right)(dX(t))^2 \\ =& \frac{1}{X(t)}(\mu X(t)\,dt + \sigma X(t)\,dB(t)) - \frac{1}{2}\sigma^2 X(t)^2\frac{1}{X(t)^2}dt \\ =& \mu\,dt + \sigma\,dB(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \\ =& \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma\,dB(t). \end{aligned}$$

Su solución integral es

$$\int_0^t d(\ln X(s)) = \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)ds + \int_0^t \sigma\,dB(s)$$

Como $\ln X(0) = \ln(1) = 0$, entonces

$$\ln X(t) = (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)$$

Para eliminar el logaritmo:

$$X(t) = e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)}.$$

Por lo que la solución del MBG es

$$\boxed{X(t) = X_0 \cdot \exp\left((\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)\right).} \tag{3.2}$$

Esperanza del MBG

A continuación se desarrolla el cálculo de la esperanza del MBG, poniendo énfasis en los pasos esenciales del procedimiento y en cómo la solución explícita obtenida mediante la fórmula de Itô permite obtener una expresión cerrada para $\mathbb{E}[X_t]$.
Aplico la Definición A.0.5 del operador esperanza a la ecuación (3.2)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_t] =&\mathbb{E}\Big[X_0 \exp\Big((\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)\Big)\Big] \\ =&X_0 \exp\Big((\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t\Big) \cdot \mathbb{E}\Big[e^{\sigma B(t)}\Big].\end{aligned}$$

Como $B(t) \sim N(0,t)$, entonces $\sigma B(t) \sim N(0,\sigma^2 t)$. Usando la esperanza de la exponencial de una normal

$$\mathbb{E}[e^{\sigma B(t)}] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}.$$

Por lo tanto

$$\boxed{\mathbb{E}[X_t] = X_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} = X_0 e^{\mu t}.}$$

Varianza del MBG

A continuación, desarrollo el cálculo de la varianza del MBG ya que comprender su varianza es esencial para analizar la dispersión y el riesgo asociado a la dinámica del activo.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_t) =&\mathrm{Var}\Big[X_0 \exp\Big((\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)\Big)\Big] \\ =&X_0^2 \cdot \mathrm{Var}\Big[\exp\Big((\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)\Big)\Big] \\ =&X_0^2 \cdot \Big(\mathbb{E}[e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + 2\sigma B(t)}] - (\mathbb{E}[e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)}])^2\Big) \\ =&X_0^2 \cdot \Big(e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \cdot e^{2\sigma^2 t} - e^{2\mu t}\Big) \\ =&X_0^2 \cdot \Big(e^{2\mu t + \sigma^2 t} - e^{2\mu t}\Big).\end{aligned}$$

La varianza del MBG es la siguiente:

$$\boxed{\sigma^2 = X_0^2 e^{2\mu t}(e^{\sigma^2 t} - 1).}$$

3.2. Modelo de Langevin

El modelo de Langevin, originalmente formulado en física para describir el movimiento browniano, también se ha convertido en una herramienta

importante en finanzas para modelar variables que muestran reversión a la media bajo la influencia de ruido aleatorio. En este contexto, se utiliza para representar tasas de interés, volatilidades o dinámicas de precios que tienden a estabilizarse en torno a un nivel promedio, pero que permanecen afectadas por fluctuaciones estocásticas.

El *modelo de Langevin* satisface la ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = -\alpha X(t)\,dt + \sigma dB(t). \tag{3.3}$$

donde α y σ son constantes no negativas. Mientras que su solución define como un proceso estocástico gaussiano $\{X_t : t \geq 0\}$ con reversión a la media.

A continuación calculamos la solución de la ecuación (3.3).
Note que la ecuación es de la forma:

$$dX(t) = a(t)X(t)\,dt + b(t)\,dB(t),$$

con

$$a(t) = -\alpha, \quad b(t) = \sigma.$$

Utilizando el factor integrante

$$e^{\alpha t}dX(t) + \alpha e^{\alpha t}X(t)\,dt = \sigma e^{\alpha t}dB(t).$$

El lado izquierdo es

$$d\Big(e^{\alpha t}X(t)\Big) = \sigma e^{\alpha t}dB(t).$$

Integrando:

$$\begin{aligned}\int_0^t d\Big(e^{\alpha s}X(s)\Big) &= \int_0^t \sigma e^{\alpha s}dB(s),\\ e^{\alpha t}X(t) &= X(0) + \int_0^t \sigma e^{\alpha s}dB(s).\end{aligned}$$

Despejando $X(t)$ obtenemos la solución

$$\boxed{X(t) = e^{-\alpha t}X(0) + \sigma e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}dB(s).} \tag{3.4}$$

A la ecuación anterior se le conoce como el *proceso Ornstein-Uhlenbeck*.

Esperanza del proceso Ornstein-Uhlenbeck

En esta sección se desarrolla paso a paso el cálculo de la esperanza, mostrando cómo la estructura del proceso conduce naturalmente a una expresión cerrada para $\mathbb{E}[X_t]$ y refleja la propiedad de reversión exponencial hacia cero. Aplico el operador esperanza a la ecuación (3.4)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_t] =&\mathbb{E}\Big[e^{-\alpha t}X_0 + \sigma e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}\,dB(s)\Big]\\ =&e^{-\alpha t}X_0 + \sigma e^{-\alpha t}\mathbb{E}\left[\int_0^t e^{\alpha s}\,dB(s)\right].\end{aligned}$$

Como la esperanza de la integral estocástica es cero, entonces la esperanza del proceso X_t es

$$\boxed{\mathbb{E}[X_t] = e^{-\alpha t}X_0.}$$

Varianza del proceso Ornstein-Uhlenbeck

Para complementar el estudio de la esperanza del proceso de Ornstein–Uhlenbeck, resulta necesario analizar su varianza, pues esta describe la magnitud de las fluctuaciones alrededor del valor medio. Por lo que a continuación se presenta el desarrollo explicito de la varianza del proceso expresado por la ecuación (3.4):

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_t) =&\mathrm{Var}\Big[e^{-\alpha t}X_0 + \sigma e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}\,dB(s)\Big]\\ =&\sigma^2 e^{-2\alpha t}\,\mathrm{Var}\left[\int_0^t e^{\alpha s}\,dB(s)\right].\end{aligned}$$

Por la isometría de Itô

$$\mathrm{Var}\left[\int_0^t e^{\alpha s}\,dB(s)\right] = \int_0^t e^{2\alpha s}\,ds.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_t) =&\sigma^2 e^{-2\alpha t}\int_0^t e^{2\alpha s}\,ds\\ =&\sigma^2 e^{-2\alpha t}\cdot\frac{e^{2\alpha t}-1}{2\alpha}.\end{aligned}$$

Finalmente, simplificando los términos exponenciales, llegamos a la expresión de la varianza

$$\boxed{\mathrm{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha t}\right).}$$

3.3. Modelo de Vasicek

A continuación se presenta el modelo de Vasicek, el cual es muy útil para modelar variables que presentan estabilidad en algún valor a largo plazo, como es el caso de algunas variables financieras, por ejemplo, tasas de interés, inflación, rendimiento sobre el capital (ROE), etc.

El modelo de Vasicek está dado por la siguiente EDE

$$dX_t = b(a - X_t)\,dt + \sigma\,dB_t, \tag{3.5}$$

donde B es un movimiento browniano, y a, b, σ son constantes.
Es importante mencionar que los parámetros a, b, y σ son la media a largo plazo, la velocidad de ajuste de X_t hacia el parámetro de largo plazo (parámetro de reversión a la media) y la volatilidad de X_t respectivamente.
Podemos asegurar que el modelo de Vasicek tiene solución y es única, pues, como se vio en el Ejemplo 2.6.4 cumple con el Teorema 2.6.3.
Por lo que la solución de la ecuación diferencial del modelo de Vasicek (ecuación 3.5) se obtiene de la siguiente manera

$$\begin{aligned} dX_t =& abdt - bX_t dt + \sigma dB_t \\ \implies \qquad dX_t + bX_t dt =& abdt + \sigma dB_t. \end{aligned}$$

Utilizando el factor integrante de la forma $\mu(t) = e^{bt}$

$$e^{bt}dX_t + e^{bt}bX_t dt = e^{bt}abdt + e^{bt}\sigma dB_t.$$

Para utilizar la regla del producto de Itô, primero se calculan las derivadas.

$$\frac{de^{bt}}{dt} = be^{bt} \quad \implies \quad de^{bt} = be^{bt}dt,$$

$$\frac{dX_t}{dX_t} = 1 \quad \implies \quad dX_t = dX_t.$$

Ahora se aplica la regla del producto,

$$d(e^{bt}X_t)) = e^{bt}dX_t + be^{bt}X_t dt.$$

Sustituyendo del lado izquierdo, obtenemos la siguiente igualdad

$$d(e^{bt}X_t) = e^{bt}abdt + e^{bt}\sigma dB_t.$$

Integrando ambos lados, se obtiene lo siguiente

$$\int_0^t d(e^{bs}X_s) = \int_0^t e^{bs}abds + \int_0^t e^{bs}\sigma dB_s$$

$$e^{bt}X_t - X_0 = ab\int_0^t e^{bs}ds + \sigma\int_0^t e^{bs}dB_s$$

$$e^{bt}X_t - X_0 = ab\left[\frac{e^{bs}}{b}\right]_0^t + \sigma\int_0^t e^{bs}dB_s$$

$$e^{bt}X(t) - X(0) = a(e^{bt}-1) + \sigma\int_0^t e^{bs}\,dB(s).$$

Finalmente, al despejar X_t, llegamos a la solución explícita del modelo de Vasicek

$$\boxed{X(t) = e^{-bt}X(0) + a(1-e^{-bt}) + \sigma e^{-bt}\int_0^t e^{bs}\,dB(s).} \tag{3.6}$$

Propiedades estadísticas del proceso de Vasicek

Con anterioridad, se introdujeron las propiedades de la integral de Itô (Teorema 2.4.3), las cuales aquí se utilizarán para el análisis de las principales funciones estadísticas de la solución del modelo de Vasicek, que recordemos es la ecuación (3.6):

$$X(t) = e^{-bt}X(0) + a(1-e^{-bt}) + \sigma e^{-bt}\int_0^t e^{bs}\,dB(s).$$

Concretamente, a continuación se determinarán las funciones media, varianza y covarianza del proceso $X(t)$.

Esperanza del proceso de Vasicek

Tomando el operador esperanza de la expresión (3.6), se obtiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_t] =& \mathbb{E}\Big[X_0e^{-bt} + a(1-e^{-bt}) + \sigma e^{-bt}\int_0^t e^{bs}\,dB(s)\Big]\\ =& \mathbb{E}[X_0e^{-bt}] + a(1-e^{-bt}) + \sigma e^{-bt}\mathbb{E}\Big[\int_0^t e^{bs}\,dB(s)\Big]\\ =& X_0e^{-bt} + a(1-e^{-bt}) + \sigma e^{-bt}\cdot 0 \quad \text{(Prop. de la media cero).}\end{aligned}$$

La expresión para la esperanza del proceso de Vasicek es

$$\boxed{\mathbb{E}[X_t] = X_0e^{-bt} + a(1-e^{-bt}).} \tag{3.7}$$

Varianza del proceso de Vasicek

Para calcular la varianza del proceso X_t expresado por la ecuación (3.6) utilizo la Definición A.0.7

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X_t] &= \mathrm{Var}\Big[X_0e^{-bt} + a(1-e^{-bt}) + \sigma e^{-bt}\int_0^t e^{bs}\,dB(s)\Big]\\ &= \mathrm{Var}\Big[\sigma e^{-bt}\int_0^t e^{bs}\,dB(s)\Big]\\ &= \sigma^2 e^{-2bt}\,\mathrm{Var}\Big[\int_0^t e^{bs}\,dB(s)\Big]\\ &= \sigma^2 e^{-2bt}\,\left(\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t e^{bs}dB(s)\Big)^2\Big] - \mathbb{E}^2\Big[\int_0^t e^{bs}dB(s)\Big]\right).\end{aligned}$$

Por isometría y la propiedad de media cero de Itô

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X_t] =&\sigma^2e^{-2bt}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t e^{bs}\,dB(s)\Big)^2\Big]\\ =&\sigma^2e^{-2bt}\mathbb{E}\Big[\int_0^t e^{2bs}\,ds\Big]\\ =&\sigma^2e^{-2bt}\int_0^t e^{2bs}\,ds\\ =&\sigma^2e^{-2bt}\cdot\frac{e^{2bt}-1}{2b}.\end{aligned}$$

Finalmente, simplificando los términos exponenciales, llegamos a la varianza del proceso de Vasicek

$$\boxed{\mathrm{Var}[X_t] = \frac{\sigma^2}{2b}(1-e^{-2bt}).}$$

Función covarianza del proceso de Vasicek

Para calcular la *función covarianza* del proceso solución $X(t)$ de la expresión (3.6), recordando la Definición A.0.10 (Ver Apéndice), se tiene que;

$$\mathrm{Cov}[X(t),X(s)] = \mathbb{E}[X(t)X(s)] - \mathbb{E}[X(t)]\mathbb{E}[X(s)]. \tag{3.8}$$

Como $\mathbb{E}[X(t)]$ y $\mathbb{E}[X(s)]$ están dadas por la expresión (3.7), es suficiente con determinar el término de correlación $\mathbb{E}[X(t)X(s)]$. Para ello, se reescribe el proceso solución dado en (3.6) como

$$X(t) = a + (X_0 - a)e^{-bt} + \sigma e^{-bt}\int_0^t e^{bu}\,dB(u).$$

Calculamos primero $X(t)X(s)$

$$\begin{aligned}
X(t)X(s) &= \left(a + (X_0 - a)e^{-bt} + \sigma e^{-bt}\int_0^t e^{bu}dB(u)\right) \\
&\quad \times \left(a + (X_0 - a)e^{-bs} + \sigma e^{-bs}\int_0^s e^{bu}dB(u)\right) \\
&= a^2 + (X_0 - a)^2 e^{-b(t+s)} + a(X_0 - a)(e^{-bt} + e^{-bs}) \\
&\quad + \sigma a(e^{-bt} + e^{-bs})\int_0^s e^{bu}dB(u) \\
&\quad + \sigma(X_0 - a)e^{-b(t+s)}\left(\int_0^s e^{bu}dB(u) + \int_0^t e^{bu}dB(u)\right) \\
&\quad + \sigma^2 e^{-b(t+s)}\left(\int_0^t e^{bu}dB(u)\right)\left(\int_0^s e^{bu}dB(u)\right).
\end{aligned}$$

Ahora tomamos esperanza usando las propiedades enunciadas en la Proposición A.0.6 y las propiedades de Itô (Teorema 2.4.3)

$$\mathbb{E}[X(t)X(s)] = a^2 + (X_0 - a)^2 e^{-b(t+s)} + a(X_0 - a)(e^{-bt} + e^{-bs}) + \sigma^2 e^{-b(t+s)}\int_0^{t\wedge s} e^{2bu}\,du.$$

Realizando el cálculo de la integral, se tiene que

$$\int_0^{t\wedge s} e^{2bu}\,du = \frac{1}{2b}\left(e^{2b(t\wedge s)} - 1\right).$$

Entonces

$$\mathbb{E}[X(t)X(s)] = a^2 + (X_0 - a)^2 e^{-b(t+s)} + a(X_0 - a)(e^{-bt} + e^{-bs}) + \frac{\sigma^2 e^{-b(t+s)}}{2b}\left(e^{2b(t\wedge s)} - 1\right).$$

Sustituyendo en (3.8)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}[X(t), X(s)] =& a^2 + (X_0 - a)^2 e^{-b(t+s)} + a(X_0 - a)(e^{-bt} + e^{-bs}) + \frac{\sigma^2 e^{-b(t+s)}}{2b}\left(e^{2b(t\wedge s)} - 1\right) \\
&- (X_0 e^{-bt} + a(1 - e^{-bt})) \times (X_0 e^{-bs} + a(1 - e^{-bs})).
\end{aligned}$$

Finalmente la función covarianza del proceso de Vasicek es

$$\boxed{\mathrm{Cov}[X(t), X(s)] = \frac{\sigma^2 e^{-b(t+s)}}{2b}\left(e^{2b(t\wedge s)} - 1\right).}$$

Observe que si $s = t$, se obtiene la varianza

$$\mathrm{Var}[X(t)] = \frac{\sigma^2}{2b}\left(1 - e^{-2bt}\right).$$

CAPÍTULO 4

Bonos y la Curva de Rendimiento

En esta sección abordaremos el precio de un bono, la tasa spot y la curva yield dentro del modelo de Vasicek. Esta es la principal sección porque aquí se presenta el aporte central: partir de la dinámica estocástica de la tasa spot para obtener el precio del bono como una esperanza bajo la medida de martingala equivalente y, a partir de ello, construir el rendimiento al vencimiento. Más que centrarnos en un análisis exhaustivo de la estructura temporal completa, el enfoque está en mostrar cómo la reversión a la media influye en los precios y en la forma general de la curva yield, y en ilustrarlo mediante simulaciones que permiten visualizar el comportamiento del bono bajo distintos escenarios iniciales.

4.1. Precio del bono

Un bono de \$1 con vencimiento T es un contrato que garantiza al tenedor conseguir \$1 en un tiempo T. Algunos bonos pagan cierta cantidad, llamada cupón, durante la vida del bono, pero para la teoría basta considerar solo bonos sin cupones (bonos de cupón cero). Denotemos por $P(t,T)$ el precio en el tiempo t del bono que paga \$1 en T, con $P(T,T) = 1$. De acuerdo con Capiński y Zastawniak (2003), para calcular el precio del bono se utiliza el valor nominal a tiempo presente (VP), esto es:

$$P(t,T) = VP(1) = 1 \cdot e^{-R(t,T)(T-t)}.$$

Calculando el logaritmo de $P(t,T)$ se obtiene que:

$$\begin{aligned}\ln P(t,T) &= \ln\left(e^{-R(t,T)(T-t)}\right)\\ &= -R(t,T)(T-t),\end{aligned}$$

por lo que el rendimiento al vencimiento del bono o *yield to maturity* se define como

$$R(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}. \tag{4.1}$$

Dicho rendimiento puede ser definido como el tipo de interés anual capitalizable que se espera obtener como rendimiento medio por mantener el bono hasta su vencimiento. Por otra parte, como función de T, se llama *curva de rendimiento o curva yield* en el tiempo t.

4.2. No Arbitraje y la Tasa Spot

Supongamos que existe una cuenta de ahorro que paga, en el tiempo t, una tasa instantánea $r(t)$, llamada tasa spot (o tasa corta). El valor acumulado de invertir \$1 hasta el tiempo t está dado por el factor de capitalización

$$\beta(t) = e^{\int_0^t r(s)\,ds}.$$

Esta función $\beta(t)$ representa el factor de crecimiento de la inversión debido a la acumulación de intereses en cada instante s.

Para evitar el arbitraje entre bonos y cuentas de ahorro, debe cumplirse cierta relación entre los bonos y la tasa spot. Si no hubiera incertidumbre, para evitar el arbitraje tendría que cumplirse la siguiente relación

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T r(s)\,ds}.$$

Invertir esta cantidad en el tiempo t resulta en \$1 en el tiempo T. Cuando la tasa es aleatoria, entonces $\int_t^T r(s)\,ds$ también es aleatoria y en el futuro t, mientras que el precio $P(t,T)$ se conoce en t, y la relación anterior se cumple solo en promedio (ecuación 4.2).

Asumimos un modelo probabilístico con una filtración $\mathcal{F}_t = \{F_t\}, 0 \leq t \leq T$, y procesos adaptados $P(t,T), (t \leq T \leq T^*)$, y $\beta(t)$. El modelo de mercado con vencimientos infinitos hace que el modelo de mercado tenga infinitamente muchos activos, lo que produce más complicaciones. Por lo tanto, se considera un número finito de vencimientos y perfiles de pago, donde en cada momento solo se manejan procesos adaptados, medibles y de variación finita. La condición de no arbitraje se formula con la ayuda de las siguientes hipótesis.

Suposición la Medida de Martingala Equivalente (MME)

Existe una probabilidad Q (llamada la medida de martingala equivalente), equivalente a P (la probabilidad real original), tal que simultáneamente para todo $T \leq T^*$, el proceso en t, $P(t,T)/\beta(t)$, es una martingala $0 \leq t \leq T$.

La propiedad de martingala implica que:

$$\mathbb{E}_Q\left(\frac{1}{\beta(T)}\middle|\mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}_Q\left(\frac{P(T,T)}{\beta(T)}\middle|\mathcal{F}_t\right) = \frac{P(t,T)}{\beta(t)},$$

donde $\mathcal{F}_t$ denota la información disponible a partir de los precios de los bonos hasta el tiempo t. Como $P(T,T) = 1$ y dado que $\beta(t)$ se conoce en el tiempo t, puede entrar en la esperanza, por lo que obtenemos la expresión para el precio del bono

$$P(t,T) = \mathbb{E}_Q\left(\frac{\beta(t)}{\beta(T)}\middle|\mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}_Q\left(e^{-\int_t^T r(s)\,ds}\middle|\mathcal{F}_t\right). \tag{4.2}$$

Esto muestra que el bono puede verse como un derivado sobre la tasa corta. Por lo que el precio del bono hoy debe ser el inverso de este crecimiento esperado para el periodo restante.

4.3. Análisis del modelo de Vasicek

El modelo para la tasa spot que se analizara sera el de Vasicek el cual satisface la siguiente EDE:

$$dr(t) = b(a - r(t))dt + \sigma dB(t), \tag{4.3}$$

donde $r(t)$ es un proceso estocástico, cuya solución como se vio en la sección anterior es:

$$r(t) = a - e^{-bt}(a - r(0)) + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)}\,dB(s).$$

Ahora escribiremos la EDE (4.3) en su forma integral y tomando esperanza,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t dr(s)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t b(a - r(s))ds\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma dB(s)\right].$$

Intercambiar la integral y la esperanza está justificado por el Teorema de Fubini, tenemos que

$$\mathbb{E}[r(t)] - \mathbb{E}[r(0)] = \int_0^t b(a - \mathbb{E}[r(s)])\, ds. \tag{4.4}$$

Realizando un cambio de variable, sea $h(t) = \mathbb{E}[r(t)]$ y diferenciando la ecuación anterior, obtenemos

$$h'(t) = b(a - h(t)).$$

Esta ecuación se resuelve separando variables.

$$\frac{dh(t)}{a - h(t)} = bdt$$

Integrando de 0 a t y realizando el cambio de variable $u = h(s)$, obtenemos

$$\int_{h(0)}^{h(t)} \frac{1}{a-u} du = \int_0^t b\, ds \quad \Rightarrow \quad h(t) = a - e^{-bt}(a - h(0)).$$

Deshaciendo el cambio de variable

$$\mathbb{E}[r(t)] = a - e^{-bt}(a - r(0)).$$

Ahora sea,

$$X(t) = r(t) - \mathbb{E}[r(t)] = r(t) - h(t).$$

Por lo tanto, $X(t)$ satisface lo siguiente

$$dX(t) = dr(t) - dh(t) = -bX(t)\, dt + \sigma\, dB(t),$$

con la condición inicial $X(0) = 0$. Sin embargo, esta es la ecuación para el proceso de Ornstein–Uhlenbeck.

$$X(t) = \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)}\, dB(s),$$

Hagamos dos observaciones. Primero, la media a largo plazo es a

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[r(t)] = a.$$

Esto significa que, sin importar cuál sea el valor de la tasa de interés hoy $(r(0))$, si esperamos el tiempo suficiente, el valor promedio esperado de la tasa será el parámetro a. Segundo, el proceso $X(t) = r(t) - \mathbb{E}[r(t)]$ revierte a cero, pues en ese caso la tasa es exactamente igual al valor esperado. Por otro

lado, $r(t)$ revierte a su media: si $r(t)$ está por encima de su media, entonces la deriva es negativa, haciendo que $r(t)$ disminuya; y si $r(t)$ está por debajo de su media, entonces la deriva es positiva, haciendo que $r(t)$ aumente. La reversión a la media es una propiedad deseable en la modelización de tasas de interés (John C. Hull, 2012).

Para proceder al cálculo de los precios de los bonos

$$P(t,T) = \mathbb{E}_Q(e^{-\int_t^T r(s)\,ds}|\mathcal{F}_t),$$

se necesitan más supuestos sobre el precio de riesgo del mercado $q(t)$. Supongamos que $q(t) = q$ es constante.

También se necesita hacer un cambio de medida para ello, siguiendo la notación del Corolario A.0.17 se reserva B_t para la medida real $\mathbb{P}$ y W_t para la medida de riegos nuetro $\mathbb{Q}$. Pasamos de la medida real $\mathbb{P}$ a la MME $\mathbb{Q}$ usando el Corolario A.0.17 (ver Apéndice), consecuencia del Teorema de Girsanov, el cual establece que

$$dW(t) = dB(t) - q\,dt.$$

Por lo tanto, la EDE para $r(t)$ bajo $\mathbb{Q}$ se da por la ecuación (3.5) reemplazado a por

$$a^* = a + \frac{\sigma q}{b}. \tag{4.5}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} dr(t) &= b(a - r(t))dt + \sigma(dW(t) + qdt), \\ dr(t) &= b(a + \frac{\sigma q}{b} - r(t))dt + \sigma dW(t), \\ dr(t) &= b(a^* - r(t))dt + \sigma dW(t). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Para calcular la distribución condicional bajo Q de $\int_t^T r(s)\,ds$ dado $\mathcal{F}_t$, necesaria para el precio del bono, observamos que, por la propiedad de Markov, la solución para $s > t$ comienza en $r(t)$ y corre para $s - t$, dando:

$$r(s) = a^* - e^{-b(s-t)}(a^* - r(t)) + \sigma e^{-b(s-t)} \int_0^{s-t} e^{bu}\,dW(u). \tag{4.7}$$

Esta es equivalente a la siguiente ecuación

$$r(s) = a^* - e^{-b(s-t)}(a^* - r(t)) + \sigma e^{-b(s-t)} \int_t^{s} e^{b(v-t)}\,dW(v). \tag{4.8}$$

Bajo la medida Q, $B(u)$ representa un movimiento browniano independiente de la filtración $\mathcal{F}_t$. Dado que $r(s)$ es un proceso gaussiano (porque la

función en la integral de Itô es determinista), la distribución condicional de $\int_t^T r(s)\,ds$ dado $\mathcal{F}_t$ es equivalente a la distribución dado el valor actual $r(t)$ y es una distribución normal.
Así, el cálculo del precio del bono implica la esperanza de una lognormal $\mathbb{E}_Q\left[e^{-\int_t^T r(s)\,ds}\middle| r(t)\right]$. Por lo tanto

$$P(t,T) = e^{-\mu_1+\sigma_1^2/2}, \tag{4.9}$$

donde μ_1 y σ_1^2 son la media y la varianza condicionales de $\int_t^T r(s)\,ds$ dado $r(t)$. Usando (4.7), tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \mathbb{E}_Q\left(\int_t^T r(s)\,ds \,\middle|\, r(t)\right) = \int_t^T \mathbb{E}_Q(r(s) \mid r(t))\,ds \\
&= \int_t^T \mathbb{E}_Q\Big[a^* - e^{-b(s-t)}(a^* - r(t)) + \sigma e^{-b(s-t)}\int_0^{s-t} e^{bu}\,dW(u)\Big]\,ds \\
&= \int_t^T \mathbb{E}_Q\Big[a^* - e^{-b(s-t)}(a^* - r(t))|r(t)\Big]\,ds \\
&= \int_t^T \Big(a^* - e^{-b(s-t)}(a^* - r(t))\Big)\,ds \\
&= a^*(T-t) - (a^* - r(t))e^{bt}\int_t^T e^{-bs}ds.
\end{aligned}$$

Por lo que μ_1 es

$$\mu_1 = a^*(T-t) - \frac{1}{b}\Big(a^* - r(t)\Big)\Big(1 - e^{-b(T-t)}\Big). \tag{4.10}$$

Para calcular σ_1^2, usamos la representación de $r(s)$ condicional en $r(t)$, ecuación (4.7). Por definición, la varianza de cualquier variable aleatoria Y es la covarianza de la variable consigo misma: $Var(Y) = Cov(Y,Y)$. En este caso, la variable de interés es la integral de la tasa corta

$$Y = \int_t^T r(s)ds.$$

Por lo tanto, la varianza condicional se expresa como

$$\sigma_1^2 = Cov\left(\int_t^T r(s)ds, \int_t^T r(u)du\right).$$

Utilizando la bilinealidad de la covarianza y el Teorema de Fubini, se tiene que:

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= \mathbb{E}\left[\left(\int_t^T (r(s) - \mathbb{E}[r(s)])ds\right)\left(\int_t^T (r(u) - \mathbb{E}[r(u)])du\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_t^T \int_t^T (r(s) - \mathbb{E}[r(s)])(r(u) - \mathbb{E}[r(u)])dsdu\right] \\ &= \int_t^T \int_t^T \mathbb{E}\left[(r(s) - \mathbb{E}[r(s)])(r(u) - \mathbb{E}[r(u)])\right] dsdu.\end{aligned}$$

De esta manera, la varianza puede escribirse como

$$\sigma_1^2 = \int_t^T \int_t^T \mathrm{Cov}(r(s), r(u))\, ds\, du.$$

Calculamos ahora la $Cov(r(s), r(u))$, recordando que

$$Cov[X, Y] = \mathbb{E}[(r(s) - \mathbb{E}[r(s)])(r(u) - \mathbb{E}[r(u)])],$$

como

$$\mathbb{E}[r(s)] = a^* + e^{-b(s-t)}(r(t) - a^*),$$

al restar la esperanza de la solución del proceso, los términos deterministas (a^* y $r(t)$) se anulan, y solo nos quedan las integrales estocásticas

$$Cov(r(s), r(u)) = \mathbb{E}\left[\left(\sigma \int_t^s e^{-b(s-v)} dW(v)\right)\left(\sigma \int_t^u e^{-b(u-v)} dW(v)\right)\right].$$

Utilizando la Isometría de Itô y asumiendo, sin pérdida de generalidad, que $s > u$, el intervalo de integración común es $[t, u]$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}Cov(r(s), r(u)) &= \sigma^2 \int_t^u e^{-b(s-v)} e^{-b(u-v)} dv \\ &= \sigma^2 e^{-b(s+u)} \int_t^u e^{2bv} dv \\ &= \sigma^2 e^{-b(s+u)} \left[\frac{e^{2bu} - e^{2bt}}{2b}\right].\end{aligned}$$

Finalmente, simplificando los términos exponenciales, obtenemos que

$$Cov(r(s), r(u)) = \frac{\sigma^2}{2b}\left(e^{-b(s-u)} - e^{-b(u+s-2t)}\right).$$

Debido a que la covarianza es simétrica, $Cov(r(s), r(u)) = Cov(r(u), r(s))$, es posible simplificar la integral sobre el cuadrado $[t, T] \times [t, T]$ integrando

el doble del valor sobre la región triangular definida por $s > u$. Por lo que

$$\begin{aligned}
\sigma_1^2 &= 2\int_t^T \int_t^T \frac{\sigma^2}{2b}\left(e^{-b(s-u)} - e^{-b(s+u-2t)}\right) duds \\
&= \frac{\sigma^2}{b}\int_t^T \left(\int_t^s (e^{-bs}e^{bu} - e^{-b(s-2t)}e^{-bu})du\right) ds \\
&= \frac{\sigma^2}{b}\int_t^T \left(\left[\frac{e^{-bs}e^{bu}}{b} - \frac{e^{-b(s-2t)}(-e^{-bu})}{b}\right]_{u=t}^{u=s}\right) ds \\
&= \frac{\sigma^2}{b^2}\int_t^T \left((e^0 - e^{-b(s-t)}) + (e^{-b(2s-2t)} - e^{-b(s-2t+t)})\right) ds \\
&= \frac{\sigma^2}{b^2}\int_t^T \left(1 - 2e^{-b(s-t)} + e^{-2b(s-t)}\right) ds \\
&= \frac{\sigma^2}{b^2}\left((T-t) - 2\left[\frac{e^{-b(s-t)}}{-b}\right]_t^T + \left[\frac{e^{-2b(s-t)}}{-2b}\right]_t^T\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{b^2}(T-t) + \frac{\sigma^2}{b^2}\left[\frac{2}{b}(e^{-b(T-t)} - 1) - \frac{1}{2b}(e^{-2b(T-t)} - 1)\right] \\
&= \frac{\sigma^2}{b^2}(T-t) - \frac{\sigma^2}{2b^3}\left[4(1 - e^{-b(T-t)}) - (1 - e^{-2b(T-t)})\right] \\
&= \frac{\sigma^2}{b^2}(T-t) - \frac{\sigma^2}{2b^3}\left[4 - 4e^{-b(T-t)} - 1 + e^{-2b(T-t)}\right].
\end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos

$$\sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{b^2}(T-t) - \frac{\sigma^2}{2b^3}\left(3 - 4e^{-b(T-t)} + e^{-2b(T-t)}\right). \tag{4.11}$$

Al sustituir los resultados de μ_1 y σ_1^2 en la ecuación (4.9) del precio del bono, obtenemos que

$$P(t,T) = e^{-\left(a^*(T-t) - \frac{1}{b}(a^* - r(t))\left(1 - e^{-b(T-t)}\right)\right) + \frac{\sigma^2}{2b^2}(T-t) - \frac{\sigma^2}{4b^3}\left(3 - 4e^{-b(T-t)} + e^{-2b(T-t)}\right)}.$$

Tras agrupar los términos y denotar el rendimiento a largo plazo como $R(\infty) = a^* - \frac{\sigma^2}{2b^2}$, obtenemos

$$P(t,T) = e^{\frac{1}{b}(1 - e^{-b(T-t)})(R(\infty) - r(t)) - (T-t)R(\infty) - \frac{\sigma^2}{4b^3}(3 - 4e^{-b(T-t)} + e^{-2b(T-t)})}. \tag{4.12}$$

4.4. Implementación

La implementación del modelo de Vasicek en una base de datos obtenida de BANXICO sobre las TIIE a 28 días, en un periodo de un año diariamente, donde se utilizaron 261 datos (ver Cuadro .1), recordando que el

modelo de Vasicek esta dado por la EDE $dr_t = b(a - r_t)dt + \sigma dB(t)$. Los parámetros (a, b, σ) fueron estimados mediante el método de máxima verosimilitud (MLE), teniendo en cuenta que $r_{t+1}|r_t$ es normal. De acuerdo con Hogg et al., 2019 el MLE tiene la siguiente ecuación

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma_{est}^2) - \frac{(r_i - \mu_{est})^2}{2\sigma_{est}^2} \right],$$

debido a la no linealidad de las ecuaciones, utilizamos el algoritmo de optimización numérica (a través de la librería *scipy.optimize.minimize*) para minimizar el negativo de la función de log-verosimilitud ($-\ln L(\theta)$), lo cual equivale a maximizar la verosimilitud de los parámetros $\theta = [b, a, \sigma]$ dado el conjunto de datos.

Los valores obtenidos son los siguientes:

- Velocidad de Reversión ($b = 1.4021$): El coeficiente indica una fuerza de retorno hacia la media considerable. Matemáticamente, esto implica que las desviaciones de la tasa spot respecto a su nivel de equilibrio son transitorias.
- Media a Largo Plazo ($a = 0.0654$): Se identifica un nivel de atracción de la tasa corta en el 6.81 %. Durante el periodo observado, se aprecia cómo el proceso r_t tiende a converger hacia este valor desde niveles iniciales superiores al 10 %.
- Volatilidad ($\sigma = 0.0129$): La desviación estándar instantánea del proceso muestra fluctuaciones moderadas, permitiendo que la tendencia de reversión predomine sobre el ruido estocástico del movimiento browniano.

Tras la estimación de los parámetros $[a, b, \sigma]$ del modelo de Vasicek, se lleva a cabo una validación de los parámetros, para garantizar la consistencia del modelo frente a la dinámica empírica de la TIIE a 28 días. Esta validación se divide en un análisis cualitativo visual y un análisis cuantitativo mediante métricas de error estadístico.

En la Figura 4.1, se presenta el contraste entre la serie histórica de la TIIE a 28 días y la trayectoria teórica generada por el modelo de Vasicek tras la validación. Se aprecia que el modelo replica satisfactoriamente la estructura de la tasa de interés, capturando los cambios de nivel y manteniendo la propiedad de reversión a la media. El hecho de que la trayectoria estimada

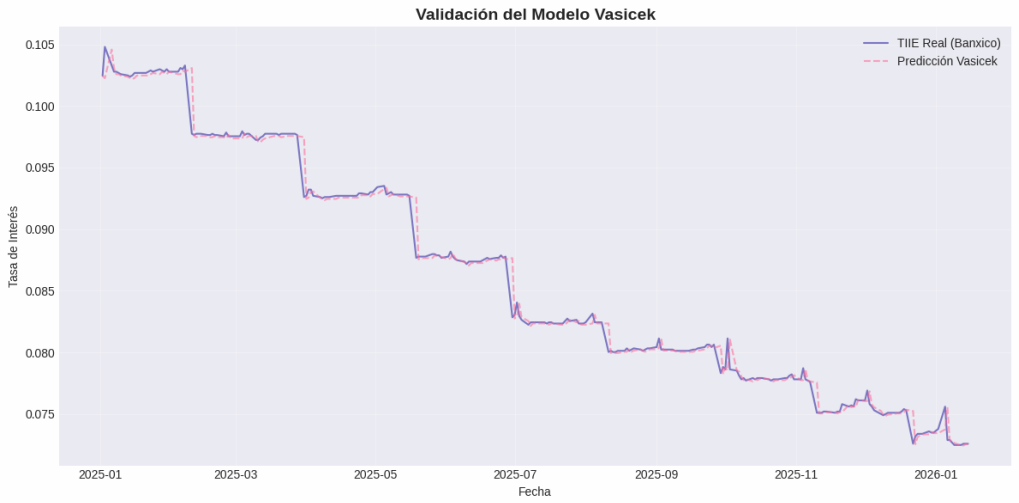


Figura 4.1: TIIE Real vs Predicción

siga de cerca a la serie observada valida la capacidad de los parámetros para describir el comportamiento del mercado en el periodo analizado.

Para verificar que el componente estocástico ha sido modelado correctamente, se analizó la serie de los residuales ϵ_t, definidos como la diferencia entre el valor observado y la predicción: $\epsilon_t = r_t - \hat{r}_t$.Como se ilustra en la Figura 4.2, los errores se distribuyen de manera aleatoria alrededor del eje $y = 0$. Esta dispersión, que carece de patrones, es un indicador de que el modelo es insesgado y que el ruido blanco del proceso ha sido correctamente aislado mediante el parámetro de volatilidad σ.

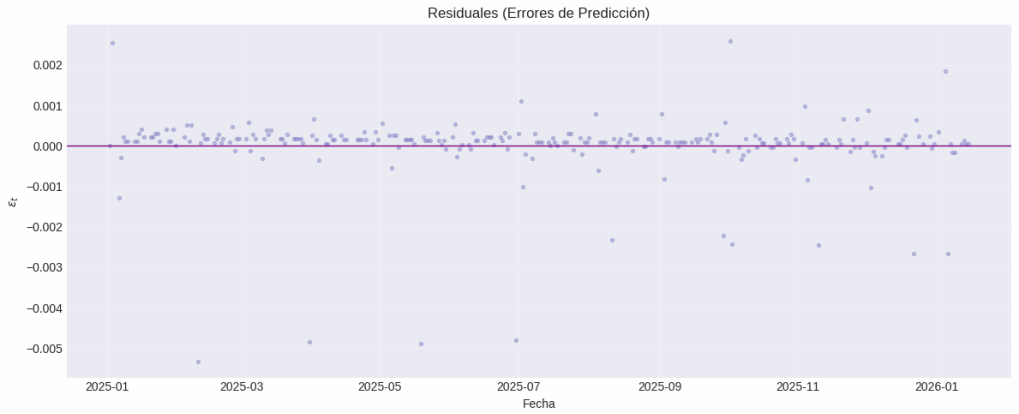


Figura 4.2: Residuales

Para dar sustento matemático al análisis visual, se calcularon tres métricas de error y estadísticos descriptivos que permiten medir la precisión del ajuste. Los resultados se resumen en las siguientes tablas.

Cuadro 4.1: Métricas de desempeño del modelo de Vasicek.

Métrica	**Valor**
RMSE (Raíz del Error Cuadrático Medio)	0.00080835
MAE (Error Absoluto Medio)	0.00035406
MAPE (Error Absoluto Medio Porcentual)	0.4170 %

El valor del MAPE (0.4170 %) confirma que el error de pronóstico es significativamente bajo (menor al 1 %), lo que otorga robustez a los resultados. Por otro lado, los estadísticos de los residuales confirman la convergencia óptima del método de estimación.

Cuadro 4.2: Estadísticos descriptivos de los residuales ϵ_t.

Estadístico	**Valor**
Media de los errores ($\bar{\epsilon}$)	-0.000000001887
Desviación Estándar (s_ϵ)	0.00080835
Error Máximo	0.00257144
Error Mínimo	-0.00529017

La media de los errores es prácticamente nula, lo cual demuestra que la optimización numérica converge a una solución donde los errores son insesgados. La desviación estándar de los residuales coincide con el RMSE, lo que indica una dispersión controlada y consistente con el parámetro de volatilidad σ estimado.

Ya que se validaron los parámetros se procede a presentar las gráficas de la media y varianza expresadas en las ecuaciones (4.10) y (4.11), respectivamente, del modelo de Vasicek con los parámetros estimados anteriormente, teniendo en cuenta que ahora el modelo tiene la ecuación (4.6) donde $a^* = 0.0649$.

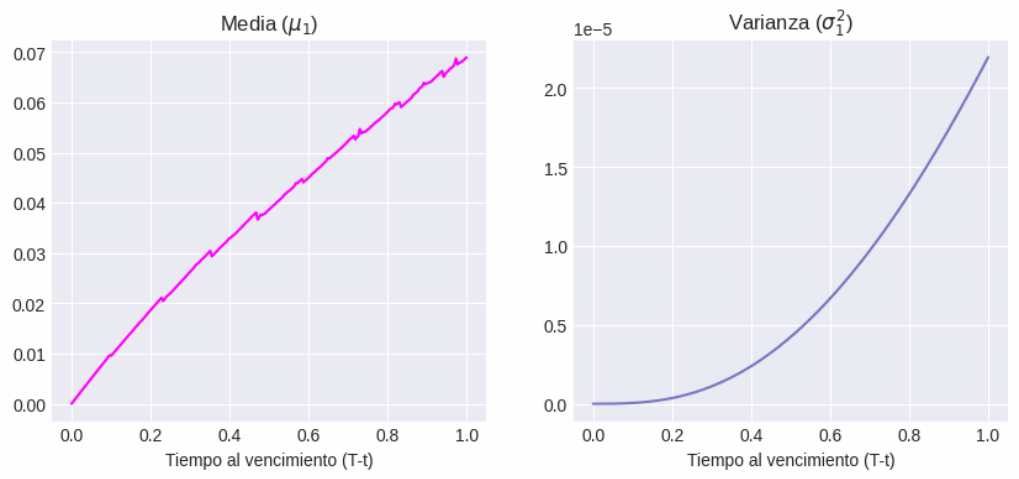


Figura 4.3: Media y varianza de $r(t)$

A continuación, se presenta la gráfica de la tasa spot y el precio del activo financiero. Cabe destacar que un paso importante en la transición de la estadística descriptiva a la valuación de activos es el paso de la medida real $\mathbb{P}$ a la MME $\mathbb{Q}$. En el modelo de Vasicek, esto se logra mediante la introducción del precio de mercado del riesgo (q), el cual se fijo en -0.05.

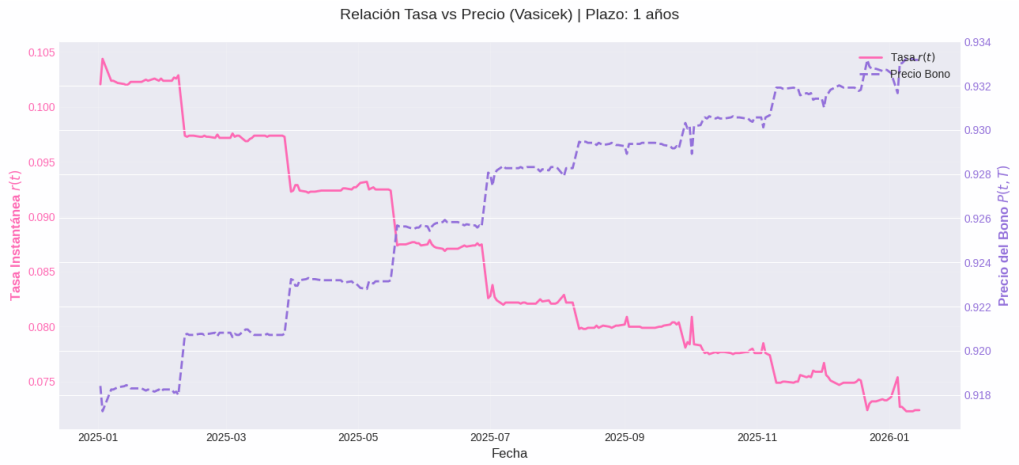


Figura 4.4: Evolución de $r(t)$ y $P(t)$

Como se puede observar en la gráfica, los resultados de la valuación demuestran que existe una relación inversa fundamental entre la tasa de interés y el precio del activo financiero. En enero de 2025, con una tasa de $r = 0.1020$, el precio del bono se situó en 0.9185. Sin embargo, conforme la tasa comenzó su descenso hacia el final del periodo, se observo cómo el precio del bono se recupera hasta alcanzar los 0.9333. Esta dinámica confirma que,

bajo el modelo de Vasicek, la apreciación del capital está intrínsecamente ligada a la brecha entre la tasa corta actual y el nivel ajustado por riesgo ($a^* = 0.0649$). La incorporación de una prima de riesgo de mercado ($q = -0.05$) permite que el modelo capture de forma más precisa las expectativas del mercado y la prima por plazo exigida por los inversionistas.

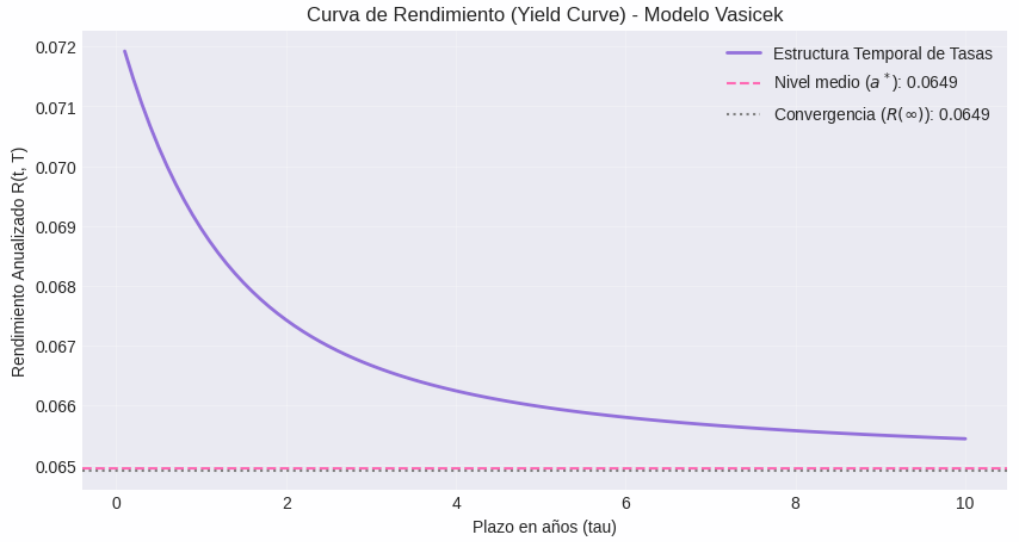


Figura 4.5: Curva yield

La gráfica anterior muestra la curva de rendimiento generada por el modelo de Vasicek; ésta presenta una pendiente negativa: el rendimiento es mayor para plazos cortos y disminuye gradualmente conforme aumenta el horizonte temporal. Esto ocurre porque la tasa corta inicial se encuentra por encima del nivel medio de largo plazo $a^* = 0.0649$, representado por la línea rosa. El comportamiento decreciente refleja el mecanismo de reversión a la media propio del modelo. Conforme el plazo crece, el rendimiento converge suavemente hacia el valor promedio de equilibrio, mostrando la característica forma asintótica de la estructura temporal bajo Vasicek. Económicamente, una curva invertida como esta indica expectativas de que las tasas actuales relativamente altas disminuirán en el futuro, coherente con la dinámica de estabilización que plantea el modelo.

Para finalizar el análisis del comportamiento del activo, se presenta la trayectoria del precio de un bono cupón cero durante su vida remanente. Se verifica el fenómeno de convergencia al valor par (valor nominal del contrato), donde el precio del bono transita desde su valor descontado inicial ($P \approx 0.918$) hacia su valor nominal ($P = 1.00$) al vencimiento.

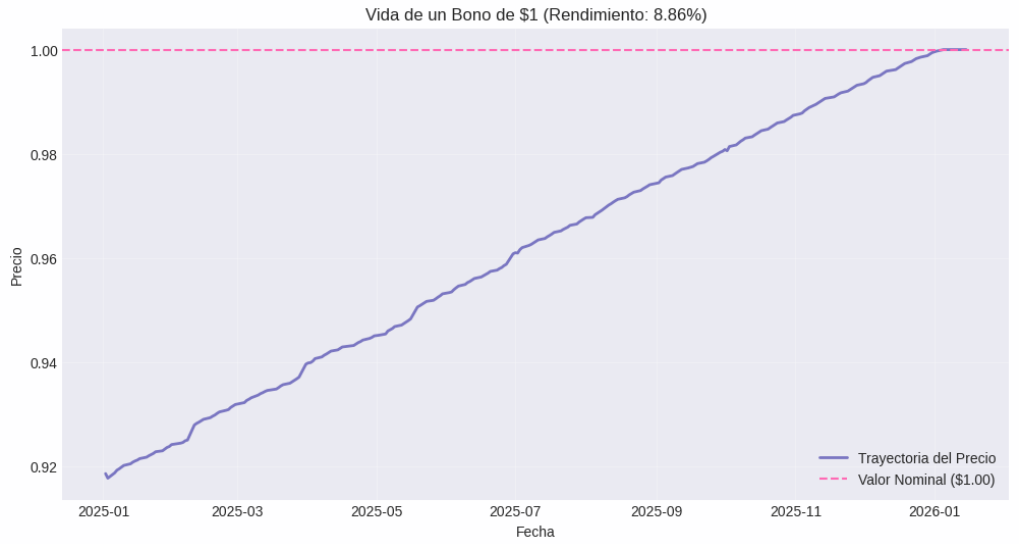


Figura 4.6: pull-to-par

Esta trayectoria confirma que el componente de deriva del modelo de Vasicek domina la evolución del precio en el largo plazo, asegurando la recuperación del valor nominal. No obstante, las oscilaciones observadas a lo largo de la curva evidencian el impacto de la volatilidad estocástica estimada ($\sigma = 0.0124$), la cual genera desviaciones transitorias en el valor de mercado del bono sin alterar su convergencia final en $t = T$.

El código fuente para la generación de las gráficas y la estimación de parámetros mediante el modelo de Vasicek, así como la validación está disponible para su reproducción en el siguiente enlace de Google Colab: [Clic aquí]

CAPÍTULO 5

Conclusiones.

El desarrollo de esta tesis permitió ver cómo el cálculo estocástico sirve como una herramienta para describir fenómenos financieros que, por su naturaleza aleatoria, no pueden explicarse mediante modelos deterministas. En particular, en el estudio del modelo de Vasicek se observó que la dinámica estocástica de la tasa spot no solo muestra la aleatoriedad observada en los mercados, sino que también incluye una propiedad fundamental de las tasas de interés: la reversión a la media. Esta característica resulta esencial para entender la estabilidad de los mercados de renta fija.
Calcular el precio del bono a partir de la medida de martingala equivalente permitió conectar de manera directa la teoría probabilística con la valuación financiera. Al obtener explícitamente la media y la varianza de la integral de la tasa spot, se observó cómo los parámetros del modelo influyen en la forma que toma la curva de rendimiento. La velocidad de reversión controla cuánto tarda la tasa en volver a su nivel de equilibrio, mientras que el nivel de largo plazo y la volatilidad determinan la inclinación y la dispersión de los rendimientos. Esto confirma que las EDE con reversión a la media describen bien el comportamiento observado en las tasas de interés.

Si bien el modelo estudiado ofrece una gran claridad y facilidad para trabajar con él, también presenta limitaciones puesto que permite tasas negativas y asume una volatilidad constante, lo que no siempre se ajustan a los mercados reales. Por ello, se proponen como líneas de trabajo futuro la extensión hacia modelos de volatilidad estocástica o el modelo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR), que garantiza la positividad de las tasas. Asimismo, la implementación de métodos de calibración más avanzados, como el Filtro de

Kalman, y la exploración de modelos multifactoriales, permitirían capturar dinámicas más complejas de la estructura temporal.

APÉNDICE A

Apéndice

Definición A.0.1. *Un espacio de probabilidad es una terna* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, donde* Ω *es un espacio muestral,* $\mathcal{F}$ *es una* $\sigma -$ *álgebra de subconjuntos de* Ω*, y* $\mathbb{P}$ *es una medida de probabilidad definida sobre* $\mathcal{F}$*.*

Definición A.0.2 (Variable Aleatoria)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad, la función medible* $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *es una variable aleatoria si y solo si*

$$X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definición A.0.3. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad y* T *un subconjunto de* $\mathbb{R}$*. Sea* $\{X_t,\, t \in T\}$ *una familia de variables aleatorias sobre* Ω *y* $\{\mathcal{F}_t,\, t \in T\}$ *una familia de sub-*σ*-álgebras de* $\mathcal{F}$*. Decimos que:*

(a) La familia $\{\mathcal{F}_t,\, t \in T\}$ *es una filtración de* $\mathcal{F}$ *si la familia es no decreciente en el siguiente sentido,*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \quad \text{para todo } s, t \in T, \text{ con } s < t.$$

(b) La familia $\{X_t,\, t \in T\}$ *está adaptada a la filtración* $\{\mathcal{F}_t,\, t \in T\}$ *si* X_t *es* $\mathcal{F}_t$*-medible para todo* $t \in T$*.*

Definición A.0.4 (Igualdad en distribución)**.** *Se dice que dos variables aleatorias* X *y* Y *son iguales en distribución, y se denota como* $X \overset{d}{=} Y$*, si sus correspondientes funciones de distribución coinciden, es decir,* $F_X(x) = F_Y(x)$ *para cada numero real* x*.*

Esperanza

La esperanza de una variable aleatoria es un número que representa el promedio ponderado de sus posibles valores, se calcula como se indica a continuación.

Definición A.0.5. *Sea X una v.a. con función de distribución $F(x)$. La esperanza de X, denotada por $\mathbb{E}[X]$, se define como*

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x),$$

cuando esta integral sea absolutamente convergente, es decir, cuando $\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x) < \infty$, y en tal caso se dice que X es integrable, o que tiene esperanza finita.

A la esperanza se le conoce también con el nombre de media, valor esperado, valor promedio o valor medio.

Proposición A.0.6 (Propiedades de la esperanza)**.** *Sean X y Y v.a. con esperanza finita, y sea c una constante. Entonces*

1. $\mathbb{E}[X + c] = \mathbb{E}[X] + c$.
2. $\mathbb{E}[X \pm Y] = \mathbb{E}[X] \pm \mathbb{E}[Y]$.
3. $\mathbb{E}[aX] = a\,\mathbb{E}[X]$.

Varianza

La varianza de una variable aleatoria es una medida del grado de dispersión de los diferentes valores tomados por la variable en torno a la media su definición es la siguiente.

Definición A.0.7. *La varianza de una variable aleatoria X, denotada por $Var(X)$, se define como la siguiente esperanza, si ésta existe,*

$$Var[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

Momentos

Los parámetros μ y σ son medidas descriptivas numéricas significativas que ubican el centro y describen la dispersión asociada con los valores de una variable aleatoria Y, pero no dan una caracterización única de la distribución de Y. Muchas distribuciones diferentes poseen las mismas medias y desviaciones estándar.

Definición A.0.8 (Momentos)**.** *Sea X una v.a. y sea k un número natural.*

- *El $k-$ésimo momento de una v.a. Y tomado alrededor del origen se define como $\mathbb{E}[Y^k]$ y se denota como μ'_k.*
- *El $k-$ésimo momento de una v.a. Y tomado alrededor de su media o el $k-$ésimo momento central de Y, se define como $\mathbb{E}[(Y-\mu)^k]$ y está denotado por μ_k.*

Función generadora de momentos (fgm)

Esta es otra función que puede asociarse a algunas distribuciones de probabilidad. No siempre está garantizado que exista, pero cuando sí existe, permite identificar de manera única la distribución correspondiente.

Definición A.0.9. *La función generadora de momentos de la v.a. X se define como*

$$m(t) = \mathbb{E}[e^{tX}],$$

definida para valores reales de t tales que la esperanza es absolutamente convergente.

La llamamos fgm porque los momentos de X pueden obtenerse derivando sucesivamente $m(t)$

$$m^{(k)}(0) = \mathbb{E}[X^k],$$

si los momentos existen.

Función covarianza

La función de covarianza es una de las herramientas fundamentales en el análisis de procesos estocásticos, pues permite describir cómo dos valores del proceso, tomados en distintos instantes de tiempo, se relacionan entre sí.

Definición A.0.10. *La función covarianza de un proceso estocástico $X(t)$ es definida por*

$$\begin{aligned}\gamma(s,t) = \operatorname{Cov}(X(t), X(s)) &= \mathbb{E}[X(t) - \mathbb{E}X(t)][X(s) - \mathbb{E}X(s)] \\ &= \mathbb{E}(X(t)X(s)) - \mathbb{E}[X(t]) \, \mathbb{E}[X(s)].\end{aligned}$$

Teorema de Fubini

El Teorema de Fubini nos permite intercambiar integrales (sumas) y esperanzas. Damos un caso particular del Teorema de Fubini; está formulado del modo en que lo usamos en las aplicaciones.

Teorema A.0.11 (Fubini)**.** *Sea $X(t)$ un proceso estocástico en $0 \leq t \leq T$ (para todo t, $X(t)$ es una variable aleatoria), con trayectorias regulares (para todo ω, en cualquier punto t, $X(t)$ tiene límites por la izquierda y por la derecha). Entonces*

$$\int_0^T \mathbb{E}[\,|X(t)|\,]\,dt = \mathbb{E}\left(\int_0^T |X(t)|\,dt\right).$$

Además, si esta cantidad es finita, entonces

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X(t)\,dt\right) = \int_0^T \mathbb{E}[X(t)]\,dt.$$

Distribución normal o gaussiana

La distribución normal o gaussiana es una de las distribuciones de probabilidad de variables aleatorias continuas. Esta distribución, además de ser una de las más importantes en teoría de la probabilidad, es también una de las herramientas más utilizadas en la modelación estadística de fenómenos reales.

Definición A.0.12. *Se dice que una v.a. X tiene distribución normal de probabilidad, con parámetros $\sigma > 0$ y $-\infty < \mu < \infty$, denotándose como $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, cuando su función de densidad de X está dada por*

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Esta distribución está completamente determinada por su media μ y su desviación estándar σ.
La distribución normal es una clase cerrada bajo transformaciones lineales y sumas.

Proposición A.0.13. *Si $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ y $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ son v.a. independientes y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces*

$$aX + bY \sim N(a\mu_x + b\mu_y, a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2).$$

Definición A.0.14. *La función generadora de momentos de una v.a. X que se distribuye $N(\mu, \sigma^2)$ es*

$$m(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x; \mu, \sigma^2) dx = e^{\mu t + \frac{(\sigma t)^2}{2}}.$$

Teoría de Girsanov

Analizaremos cambios de medida sobre el espacio de trayectorias continuas $C[0,T]$. Por lo que adoptamos el espacio $(\Omega, \mathcal{F}) = (C[0,T], \mathcal{B})$, identificando cada trayectoria continua con un punto de $C[0,T]$. La medida de Wiener $\mathbb{P}$ es la inducida por el browniano estándar B, mientras que la medida $\mathbb{Q}$ inducida por $B_t + \mu t$ corresponde al browniano con deriva constante μ, (Steele, 2001).

Teorema A.0.15 (Girsanov para Movimiento Browniano)**.** *Sea $B(t)$, $0 \leq t \leq T$, un movimiento browniano bajo la medida de probabilidad $\mathbb{P}$. Considere el proceso $W(t) = B(t) + \mu t$. Defina la medida $\mathbb{Q}$ por*

$$\Lambda = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_T} = \exp\Big(- \mu B(T) - \tfrac{1}{2}\mu^2 T\Big).$$

Entonces $\mathbb{Q}$ es equivalente a $\mathbb{P}$, y $W(t)$ es un movimiento browniano bajo $\mathbb{Q}$. Además,

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\Big|_{\mathcal{F}_T} = \frac{1}{\Lambda} = \exp\Big(\mu W(T) - \tfrac{1}{2}\mu^2 T\Big).$$

Teorema A.0.16 (Girsanov para eliminación de la deriva)**.** *Sea $B(t)$ un movimiento browniano bajo $\mathbb{P}$ y sea $H(t)$ un proceso predecible tal que*

$$\mathcal{E}\Big(- \int_0^t H(s)\, dB(s)\Big) = \exp\Big(- \int_0^t H(s)\, dB(s) - \tfrac{1}{2}\int_0^t H(s)^2\, ds\Big).$$

es una martingala. Defina una medida equivalente $\mathbb{Q}$ por

$$\Lambda = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_T} = \exp\left(- \int_0^T H(s)\, dB(s) - \tfrac{1}{2}\int_0^T H(s)^2\, ds\right).$$

Entonces el proceso

$$W(t) = B(t) + \int_0^t H(s)\, ds,$$

es un movimiento browniano bajo $\mathbb{Q}$.

Corolario A.0.17. *Sea $\mathbb{P}$ la medida de Wiener, $B(t)$ un movimiento browniano bajo $\mathbb{P}$, y sea $\mathbb{Q}$ una medida equivalente a $\mathbb{P}$. Entonces existe un proceso predecible $q(t)$ tal que*

$$\Lambda(B_{[0,T]}) = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_{[0,T]}} = \exp\left(\int_0^T q(s)\,dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^T q(s)^2\,ds\right).$$

Además,

$$B(t) = W(t) + \int_0^t q(s)\,ds,$$

donde $W(t)$ es un movimiento browniano bajo la medida $\mathbb{Q}$.

Cuadro .1: Base de datos utilizada

Tiempo	Valor	Tiempo	Valor	Tiempo	Valor	Tiempo	Valor	Tiempo	Valor
02/01/2025	10.245	20/03/2025	9.7638	06/06/2025	8.747	20/08/2025	8.0126	04/11/2025	7.8718
03/01/2025	10.4791	21/03/2025	9.7739	09/06/2025	8.737	21/08/2025	8.0226	05/11/2025	7.7812
06/01/2025	10.328	24/03/2025	9.7739	10/06/2025	8.7168	22/08/2025	8.0327	06/11/2025	7.7712
07/01/2025	10.2776	25/03/2025	9.7739	11/06/2025	8.737	25/08/2025	8.0226	07/11/2025	7.7611
08/01/2025	10.2776	26/03/2025	9.7739	12/06/2025	8.737	26/08/2025	8.0126	10/11/2025	7.5097
09/01/2025	10.2675	27/03/2025	9.7739	13/06/2025	8.737	27/08/2025	8.0226	11/11/2025	7.5097
10/01/2025	10.2574	28/03/2025	9.7638	16/06/2025	8.737	28/08/2025	8.0327	12/11/2025	7.5097
13/01/2025	10.2474	31/03/2025	9.2604	17/06/2025	8.747	29/08/2025	8.0327	13/11/2025	7.5198
14/01/2025	10.2373	01/04/2025	9.2704	18/06/2025	8.7571	01/09/2025	8.0427	14/11/2025	7.5198
15/01/2025	10.2474	02/04/2025	9.3208	19/06/2025	8.7671	02/09/2025	8.1132	18/11/2025	7.5097
16/01/2025	10.2675	03/04/2025	9.3208	20/06/2025	8.7571	03/09/2025	8.0226	19/11/2025	7.5198
17/01/2025	10.2675	04/04/2025	9.2704	23/06/2025	8.7671	04/09/2025	8.0226	20/11/2025	7.5198
20/01/2025	10.2675	07/04/2025	9.2604	24/06/2025	8.7671	05/09/2025	8.0226	21/11/2025	7.5801
21/01/2025	10.2675	08/04/2025	9.2503	25/06/2025	8.7873	08/09/2025	8.0226	24/11/2025	7.56
22/01/2025	10.2776	09/04/2025	9.2604	26/06/2025	8.7671	09/09/2025	8.0126	25/11/2025	7.5701
23/01/2025	10.2877	10/04/2025	9.2604	27/06/2025	8.7772	10/09/2025	8.0126	26/11/2025	7.56
24/01/2025	10.2776	11/04/2025	9.2604	30/06/2025	8.2842	11/09/2025	8.0126	27/11/2025	7.6203
27/01/2025	10.2977	14/04/2025	9.2704	01/07/2025	8.3043	12/09/2025	8.0126	28/11/2025	7.6103
28/01/2025	10.2877	15/04/2025	9.2704	02/07/2025	8.4049	15/09/2025	8.0126	01/12/2025	7.6103
29/01/2025	10.2776	16/04/2025	9.2704	03/07/2025	8.2942	17/09/2025	8.0226	02/12/2025	7.6907
30/01/2025	10.2977	21/04/2025	9.2704	04/07/2025	8.264	18/09/2025	8.0226	03/12/2025	7.5801
31/01/2025	10.2776	22/04/2025	9.2704	07/07/2025	8.2238	19/09/2025	8.0327	04/12/2025	7.56
04/02/2025	10.2776	23/04/2025	9.2704	08/07/2025	8.2439	22/09/2025	8.0427	05/12/2025	7.5299
05/02/2025	10.3078	24/04/2025	9.2906	09/07/2025	8.2439	23/09/2025	8.0629	08/12/2025	7.4997
06/02/2025	10.2977	25/04/2025	9.2906	10/07/2025	8.2439	24/09/2025	8.0629	09/12/2025	7.4896
07/02/2025	10.328	28/04/2025	9.2805	11/07/2025	8.2439	25/09/2025	8.0427	10/12/2025	7.4997
10/02/2025	9.7739	29/04/2025	9.3006	14/07/2025	8.2439	26/09/2025	8.0629	11/12/2025	7.5097
11/02/2025	9.7638	30/04/2025	9.3006	15/07/2025	8.2339	29/09/2025	7.8315	15/12/2025	7.5097
12/02/2025	9.7739	02/05/2025	9.3409	16/07/2025	8.2439	30/09/2025	7.8818	16/12/2025	7.5097
13/02/2025	9.7739	05/05/2025	9.351	17/07/2025	8.2439	01/10/2025	7.8617	17/12/2025	7.5198
14/02/2025	9.7739	06/05/2025	9.2805	18/07/2025	8.2339	02/10/2025	8.1132	18/12/2025	7.5399
17/02/2025	9.7638	07/05/2025	9.2906	21/07/2025	8.2339	03/10/2025	7.8617	19/12/2025	7.5299
18/02/2025	9.7638	08/05/2025	9.3006	22/07/2025	8.2339	06/10/2025	7.8516	22/12/2025	7.2584
19/02/2025	9.7739	09/05/2025	9.2805	23/07/2025	8.254	07/10/2025	7.8114	23/12/2025	7.3187
20/02/2025	9.7638	12/05/2025	9.2805	24/07/2025	8.2741	08/10/2025	7.7812	24/12/2025	7.3388
21/02/2025	9.7638	13/05/2025	9.2805	25/07/2025	8.254	09/10/2025	7.7913	26/12/2025	7.3388
24/02/2025	9.7538	14/05/2025	9.2805	28/07/2025	8.264	10/10/2025	7.7712	29/12/2025	7.3589
25/02/2025	9.784	15/05/2025	9.2805	29/07/2025	8.2339	13/10/2025	7.7913	30/12/2025	7.3489
26/02/2025	9.7538	16/05/2025	9.2704	30/07/2025	8.2339	14/10/2025	7.7812	31/12/2025	7.3489
27/02/2025	9.7538	19/05/2025	8.7671	31/07/2025	8.2339	15/10/2025	7.7913	02/01/2026	7.379
28/02/2025	9.7538	20/05/2025	8.7772	01/08/2025	8.2439	16/10/2025	7.7913	05/01/2026	7.56
03/03/2025	9.7538	21/05/2025	8.7772	04/08/2025	8.3143	17/10/2025	7.7913	06/01/2026	7.2886
04/03/2025	9.7941	22/05/2025	8.7772	05/08/2025	8.2439	20/10/2025	7.7812	07/01/2026	7.2886
05/03/2025	9.7638	23/05/2025	8.7772	06/08/2025	8.2439	21/10/2025	7.7712	08/01/2026	7.2685
06/03/2025	9.7739	26/05/2025	8.7973	07/08/2025	8.2439	22/10/2025	7.7812	09/01/2026	7.2484
07/03/2025	9.7739	27/05/2025	8.7973	08/08/2025	8.2439	23/10/2025	7.7812	12/01/2026	7.2484
10/03/2025	9.7236	28/05/2025	8.7873	11/08/2025	8.0025	24/10/2025	7.7812	13/01/2026	7.2584
11/03/2025	9.7236	29/05/2025	8.7873	12/08/2025	8.0126	27/10/2025	7.7913	14/01/2026	7.2584
12/03/2025	9.7437	30/05/2025	8.7671	13/08/2025	8.0025	28/10/2025	7.7913	15/01/2026	7.2584
13/03/2025	9.7538	02/06/2025	8.7772	14/08/2025	8.0025	29/10/2025	7.8114		
14/03/2025	9.7739	03/06/2025	8.8175	15/08/2025	8.0126	30/10/2025	7.8215		
18/03/2025	9.7739	04/06/2025	8.7772	18/08/2025	8.0126	31/10/2025	7.7812		
19/03/2025	9.7739	05/06/2025	8.7571	19/08/2025	8.0327	03/11/2025	7.7812		

Bibliografía

Allen, E. (2007). *Modeling with Itô Stochastic Differential Equations*. Springer.

Bachelier, L. (1900). *Théorie de la spéculation* [Tesis doctoral, Université de Paris].

Brown, R. (1828). A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August 1827, on the particles contained in the pollen of plants. *Philosophical Magazine*, *4*(21), 161-173.

Capiński, M., & Zastawniak, T. (2003). *Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering*. Springer-Verlag.

Higham, D. J. (2004). *An Introduction to Financial Option Valuation: Mathematics, Stochastics and Computation*.

Hogg, R. V., McKean, J. W., & Craig, A. T. (2019). *Introduction to Mathematical Statistics* (8th). Pearson.

Hull, J. C. (2012). *Options, Futures, and Other Derivatives* (8.ª ed.). Pearson.

Infante Gil, S., & Zárate de Lara, G. P. (1990). *Métodos estadísticos: un enfoque interdisciplinario* (2da) [Reimpresión de 2003]. Editorial Trillas.

Klebaner, F. C. (2012). *Introduction to Stochastic Calculus with Applications* (3.ª ed.). Imperial College Press.

Kuo, H.-H. (2006). *Introduction to Stochastic Integration*. Springer.

Mikosch, T. (1998). *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View* (Vol. 6). World Scientific Publishing.

Nelson, R. C. (1967). Simple Brownian motion. *American Journal of Physics*, *35*(12), 1062-1066.

Ross, S. M. (2019). *A First Course in Probability* (10th). Pearson.

Steele, J. M. (2001). *Stochastic Calculus and Financial Applications* (Vol. 45). Springer-Verlag.

Wiener, N. (1923). Differential-Space. *Journal of Mathematics and Physics*, *2*(1), 131-174.