



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Caracterizaciones de anillos artinianos y neterianos con la
noción de finitamente incrustado.

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

por

Samuel Herrera García

Asesorado por

Dr. Iván Fernando Vilchis Montalvo

Puebla Pue.
Junio de 2025



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Caracterizaciones de anillos artinianos y neterianos con la
noción de finitamente incrustado.

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

por

Samuel Herrera García

Asesorado por

Dr. Iván Fernando Vilchis Montalvo

Puebla Pue.
Junio de 2025

Título: Caracterizaciones de anillos artinianos y neterianos con la noción de finitamente incrustado.

Estudiante: SAMUEL HERRERA GARCÍA

COMITÉ

Dr. César Cejudo Castilla
Presidente

Dr. Guillermo Andrés
Valdeón Sauza
Secretario

M. en C. Luis Enrique
Pineda Ramírez
Vocal

Dr. Iván Fernando Vilchis
Montalvo
Asesor

Índice general

Introducción	VII
1. Preliminares	1
1.1. Submódulos esenciales	1
1.2. Cápsulas inyectivas	3
1.3. Anulador	4
1.4. Módulos inescindibles y submódulos irreducibles.	5
1.5. Zoclo	7
1.6. Módulos neterianos y artinianos	9
1.7. Módulos semisimples	13
2. Módulos finitamente incrustados y sus propiedades.	17
2.1. Módulo finitamente incrustado.	17
2.2. Caracterizaciones de módulos neterianos y artinianos.	21
3. Localización con respecto a un ideal primo.	25
3.1. Localización	25
3.2. Dualización y caracterización de anillos neterianos y artinianos.	32
4. Conclusiones	35
Bibliografía	37

Introducción

Los conceptos de finitamente generado y finitamente cogenerado son de los más conocidos para aquellas personas que han profundizado en álgebra, siendo bien conocida la dualidad que se tiene de un concepto con el otro. Sin embargo, un concepto equivalente al de finitamente cogenerado, fue aportado por Peter Vámos en 1968, específicamente en su artículo «The dual of the notion of "finitely generated" [1]», donde define el concepto "finitely embedded", traducido por nosotros como finitamente incrustado, el cual nos dice que un módulo es finitamente incrustado si su cápsula inyectiva es isomorfa a una suma directa externa de cápsulas inyectivas de módulos simples. Las propiedades dadas por Peter Vámos en [1], buscaban satisfacer el vacío que se tenía del concepto dual de finitamente generado en su momento.

El propósito de este trabajo está enfocado principalmente en detallar, esclarecer, complementar y en algunos casos, abordar los lemas, proposiciones y teoremas desde un enfoque distinto, con el objetivo de hacer una lectura más cómoda sobre el concepto de finitamente incrustado. El trabajo se encuentra dividido en tres capítulos, los cuales todos se verán enfocados alrededor de nuestro concepto, como no estamos buscando profundizar sobre la base de la teoría de módulos, se omitirán algunos conceptos básicos como los de módulos, submódulos, módulos cociente, intersección, sumas, sumas directas, producto directo y morfismos de módulos, definición y propiedades básicas de módulos finitamente generado e inyectivos, se dará por hecho que el lector tiene conocimiento sobre ellos, sin embargo abordaremos conceptos y propiedades preliminares e importantes, que nos ayudarán para una mejor comprensión y resolución en los problemas de módulos finitamente incrustados.

En el segundo capítulo, introduciremos la definición de finitamente incrustado en conjunto con algunas propiedades de finitamente generado, se observará la dualización que existe entre ambos conceptos. En el primer lema de este capítulo veremos que ser finitamente incrustado es equivalente a que el zoclo del módulo sea esencial en el módulo y finitamente generado, la cual es una equivalencia, del concepto de finitamente cogenerado. Se finalizará el capítulo viendo algunas caracterizaciones de módulos y anillos neterianos y artinianos, con los conceptos duales de finitamente generado y finitamente incrustado.

Terminamos con el tercer capítulo, en el que daremos una construcción diferente a la habitual de las localizaciones de un anillo con respecto a un ideal primo, en la que estaremos principalmente enfocados en localizar sobre el anillo de endomorfismos de una cápsula inyectiva del cociente de un anillo con un ideal primo, en un caso particular un ideal máximo es un ideal primo y de esta manera, sería el anillo de endomorfismos de una cápsula inyectiva de un módulo simple, lo que nos lleva a nuestro concepto de finitamente incrustado. Concluiremos con la caracterización de la dualización de caracterizaciones de anillos neterianos y artinianos con los conceptos de finitamente generado y finitamente incrustado.

Durante todo el trabajo, a menos que se diga lo contrario, consideraremos a R como un anillo asociativo con identidad, a los R -módulos como izquierdos, cuando nos refiramos a 0 como módulo, es el conjunto que únicamente posee al elemento neutro del módulo, y cuando nos refiramos a 0 como elemento es el elemento neutro del módulo, $\ker$ denota al kernel de un morfismo, utilizaremos $+$ o $\sum$ para la suma, dado el caso de que sea una suma directa interna se especificara, cuando nos refiramos a una suma directa externa usaremos $\oplus$, y cuando queramos referirnos a una suma

directa interna, con Id nos referiremos al morfismo identidad, con i_X al morfismo inclusión con codominio X , si α es un morfismo, $\alpha|_A^B$ denota al morfismo α con restricción en el dominio A y restricción en el codominio B , para los subíndices se considerara a $n \in \mathbb{N}$ y $\text{máx}\{X\}$, se referirá al elemento máximo del conjunto X .

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Submódulos esenciales

Definición 1.1. Sean M un R -módulo y N un submódulo de M . Se dice que N es un submódulo esencial de M si para todo submódulo K de M , $N \cap K = 0$, entonces $K = 0$.

Sea $\alpha : A \rightarrow B$ un morfismo de R -módulos, entonces α es un morfismo esencial si $\alpha(A)$ es un submódulo esencial de B .

De la definición, podemos obtener la contraposición, N es un submódulo esencial en M si para todo submódulo K de M , $K \neq 0$, entonces $M \cap K \neq 0$, de aquí podemos deducir fácilmente que si $M \neq 0$, entonces $N \neq 0$. También, se puede decir que N es esencial en M , si es claro.

Lema 1.1. Sea $\alpha : A \rightarrow B$ un morfismo de R -módulos. Si N es un submódulo esencial de B . Entonces $\alpha^{-1}(N)$ es un submódulo esencial de A .

Demostración. Sea K un submódulo de A tal que $\alpha^{-1}(N) \cap K = 0$, entonces $N \cap \alpha(K) = 0$, como N es esencial en B , $\alpha(K) = 0$, es decir, K es un submódulo del $\ker(\alpha) = \alpha^{-1}(0) \subseteq \alpha^{-1}(N)$. Por lo tanto, $K = \alpha^{-1}(N) \cap K = 0$. ■

Lema 1.2. Sean $\alpha : A \rightarrow B$ y $\beta : B \rightarrow C$, monomorfismos esenciales. Entonces $\beta\alpha$ es monomorfismo esencial.

Demostración. Sea K un submódulo de C tal que $\beta\alpha(A) \cap K = 0$. Ya que β es monomorfismo tenemos,

$$0 = \beta^{-1}(0) = \beta^{-1}(\beta\alpha(A) \cap K) = \beta^{-1}(\beta(\alpha(A))) \cap \beta^{-1}(K) = \alpha(A) \cap \beta^{-1}(K),$$

como $\alpha(A)$ es esencial en B , se sigue que $\beta^{-1}(K) = 0$, entonces K no tiene preimagen distinta de 0 con respecto a β , por lo que $\beta(B) \cap K = 0$ y debido a que $\beta(B)$ es esencial en C , $K = 0$. Por lo tanto, $\beta\alpha$ es monomorfismo esencial. ■

Lema 1.3. Sea N un submódulo de un R -módulo M , N es esencial en M si y solo si para todo $0 \neq x \in M$, existe $r \in R$ tal que $0 \neq rx \in N$.

Demostración. Supongamos que N es esencial en M y sea $0 \neq x \in M$, entonces $Rx \neq 0$, luego $Rx \cap N \neq 0$, ya que N es esencial en M . Ahora supongamos que, para todo $0 \neq x \in M$, existe $r \in R$ tal que $0 \neq rx \in N$, sea K submódulo no cero de M , entonces hay un $0 \neq x \in K$ y existe un $r \in R$ tal que $0 \neq rx \in N$, es decir, $K \cap N \neq 0$. ■

Proposición 1.1. Sean I un conjunto de índices, $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ y N_i un submódulo esencial del R -módulo M_i , para cada $i \in I$. Entonces $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$ es esencial en M .

Demostración. Sea $0 \neq x \in M$, entonces $x = (x_i)$ está conformado por un número finito de componentes no cero, los llamaremos $x_j \in M_{i_j}$, con $j \in \{1, \dots, n\}$, a continuación construiremos un $r \in R$ tal que $0 \neq rx \in N$. Por el lema anterior, existe $r_1 \in R$ tal que $r_1 x_1 \in N_{i_1}$, luego $x_2 \in M_{i_2}$ y así $r_1 x_2 \in M_{i_2}$, si $r_1 x_2 \neq 0$ existe $r_2 \in R$ tal que $0 \neq r_2 r_1 x_2 \in N_{i_2}$, en caso que $r_1 x_2 = 0$, $r_2 = 1_R$. De este modo $0 \neq r_2 r_1 x_1 \in N_{i_1}$ o $0 \neq r_2 r_1 x_2 \in N_{i_2}$, siguiendo con este proceso obtendremos $r = r_n r_{n-1} \dots r_1$ tal que $rx \neq 0$ ya que podemos asegurar que al menos un componente $rx_j \neq 0$ y además $rx \in N$. Por lo tanto, nuevamente por lema anterior N es esencial en M . ■

Corolario 1.1. Sean I un conjunto de índices, $M = \sum_{i \in I} M_i$ y N_i submódulo esencial del R -módulo M_i , para cada $i \in I$, entonces $N = \sum_{i \in I} N_i$ es esencial en M .

Demostración. La demostración es análoga a la demostración de la proposición anterior. ■

Proposición 1.2. Sea M un R -módulo, entonces, M es inyectivo si y solo si no existe un R -módulo E tal que M es submódulo propio esencial de E .

Demostración. Supongamos que M es inyectivo y que existe E tal que M es esencial en E . Como M es inyectivo existe K un R -submódulo no cero de E , tal que $E = M + K$ suma directa, pero M es esencial en E , se sigue que $K = 0$, lo cual es una contradicción por lo que, no existe E .

Ahora supongamos que no existe un R -módulo E tal que M es esencial en E . Para que M sea inyectivo, podemos demostrar que es un sumando directo de un R -módulo K que contenga propiamente a M . Sea K un R -submódulo que contenga propiamente a M y denotamos como Γ a la familia de todos los submódulos no cero X de K tal que $M \cap X = 0$. Por hipótesis, sabemos que M no es esencial en K , negando la definición de submódulo esencial, tenemos que existe un submódulo N tal que $M \cap N = 0$ pero $N \neq 0$, entonces $N \in \Gamma$, de esta manera $\Gamma \neq \emptyset$. Ordenamos parcialmente a Γ con la inclusión y sea Γ' un subconjunto totalmente ordenado de Γ , entonces afirmamos que $\sum_{X \in \Gamma'} X \in \Gamma$, ya que si $x \in M \cap \sum_{X \in \Gamma'} X$, se sigue que

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{con cada } x_i \in X_i, \text{ donde } i \in \{1, \dots, n\},$$

dado que cada $X_i \in \Gamma'$ existe un X_j que los contiene a todos, con $j \in \{1, \dots, n\}$, de este modo $\sum_{i=1}^n x_i \in X_j$ y $x = 0$, obtenimos que $M \cap \sum_{X \in \Gamma'} X = 0$. También, si $X \in \Gamma'$, $X \subseteq \sum_{X \in \Gamma'} X$, por lo que, todo subconjunto totalmente ordenado de Γ está acotado superiormente. Por el lema de Zorn, Γ tiene al menos un elemento máximo X_0 . Si $K = M + X_0$ acabamos, ya que es suma directa. Supongamos que $K \neq M + X_0$ y por el Tercer Teorema de Isomorfismos de módulos tenemos,

$$M = M/(0) = M/(M \cap X_0) \cong (M + X_0)/X_0 \subset K/X_0,$$

como $(M + X_0)/X_0$ es isomorfo a M , tampoco es submódulo esencial propio de algún R -módulo, entonces $(M + X_0)/X_0$ no es esencial en K/X_0 , nuevamente negando la definición, existe $Y/X_0 \neq 0$ submódulo de K/X_0 , se sigue que $X_0 \subseteq Y$ y es tal que,

$$(Y \cap (M + X_0))/X_0 = Y/X_0 \cap (M + X_0)/X_0 = 0,$$

entonces,

$$Y \cap M \subseteq Y \cap (M + X_0) \subseteq X_0,$$

se sigue que, $M \cap Y \subseteq M \cap X_0 = 0$, así $Y \in \Gamma$ y $X_0 \subset Y$, lo cual es una contradicción ya que X_0 es máximo. Por lo tanto $K = M + X_0$ y como es suma directa, M es inyectivo. ■

1.2. Cápsulas inyectivas

Definición 1.2. Sea $\alpha : M \rightarrow E$ un monomorfismo de R -módulos. Entonces E es una cápsula inyectiva de M si E es inyectivo y α es un monomorfismo esencial.

Proposición 1.3. Todo R -módulo está incluido en una cápsula inyectiva.

Demostración. En [4, Chapter 5, Corollary 5.5.5] nos dice que todo R -módulo es un submódulo de un R -módulo inyectivo. Sea M un R -módulo y E un R -módulo inyectivo en el cual está incluido.

Denotamos como Γ a la familia de todos los R -submódulos X de E tal que M es submódulo esencial de X , $M \in \Gamma$ así $\Gamma \neq \emptyset$. Ordenamos parcialmente a Γ con la inclusión y sea Γ' un subconjunto totalmente ordenado de Γ , entonces $\sum_{X \in \Gamma'} X \in \Gamma$, ya que por el Corolario 1.1, $M = \sum_{X \in \Gamma'} M$ es esencial en $\sum_{X \in \Gamma'} X$, por lo que, todo subconjunto totalmente ordenado de Γ está acotado superiormente. Por el lema de Zorn, Γ tiene elemento máximo, sea X_0 . Ahora supongamos que existe K tal que X_0 es submódulo propio esencial de K , como E es inyectivo tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{i_K} & K \\ i_E \downarrow & \searrow \alpha & \\ E & & \end{array}$$

Entonces $X_0 = i_E(X_0) = \alpha(i_K(X_0)) = \alpha(X_0)$. Supongamos que $\ker \alpha \neq 0$, como X_0 es esencial en K , $X_0 \cap \ker \alpha \neq 0$, sea $0 \neq x \in X_0 \cap \ker \alpha$, de este modo, $x = i_E(x) = \alpha(i_K(x)) = 0$ lo cual es una contradicción, por lo que $\ker \alpha = 0$, luego $\alpha|_{\alpha(K)} : K \rightarrow \alpha(K)$ es isomorfismo y $(\alpha|_{\alpha(K)})^{-1} : \alpha(K) \rightarrow K$ es su morfismo inverso. Además como X_0 es esencial en K , por el Lema 1.1, $X_0 = \alpha|_{\alpha(K)}(X_0) = ((\alpha|_{\alpha(K)})^{-1})^{-1}(X_0)$ es esencial en $\alpha(K)$ y por el Lema 1.2, M es esencial en $\alpha(K)$, se sigue que $\alpha(K) \in \Gamma$, se deduce que $\alpha(K) = X_0 = \alpha(X_0)$, como $\alpha|_{\alpha(K)}$ es un correstricción sobre $\alpha(K)$, se sigue que, $\alpha(K) = \alpha|_{\alpha(K)}(K)$, así

$$\begin{aligned} K &= (\alpha|_{\alpha(K)})^{-1}(\alpha|_{\alpha(K)}(K)) = (\alpha|_{\alpha(K)})^{-1}(\alpha(K)) \\ &= (\alpha|_{\alpha(K)})^{-1}(\alpha(X_0)) = (\alpha|_{\alpha(K)})^{-1}(\alpha|_{\alpha(K)}(X_0)) = X_0, \end{aligned}$$

entonces $K = X_0$, lo cual es una contradicción, ya que X_0 era submódulo propio de K . Se ha demostrado que no existe R -módulo K tal que X_0 es submódulo propio esencial de K , por la Proposición 1.2, X_0 es inyectivo esencial y con la inclusión se concluye que, X_0 es cápsula inyectiva de M . ■

Proposición 1.4. Las cápsulas inyectivas son únicas (salvo isomorfismos).

Demostración. Sean $E(M)$ y $E_1(M)$ dos cápsulas inyectivas del R -módulo M , no necesariamente con la inclusión, con $\alpha : E \rightarrow E(M)$ y $\beta : E \rightarrow E_1(M)$ sus respectivos monomorfismos esenciales, como $E_1(M)$ es inyectivo, tenemos el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\alpha} & E(M) \\ \beta \downarrow & \searrow \gamma & \\ E_1(M) & & \end{array}$$

donde, $\beta = \gamma\alpha$. Supongamos que $\ker \gamma \neq 0$, como $\alpha(M)$ es esencial en $E(M)$, $\alpha(M) \cap \ker \gamma \neq 0$, sea $0 \neq x \in \alpha(M) \cap \ker \gamma$, como $x \in \alpha(M)$ existe algún $0 \neq m \in M$ tal que $x = \alpha(m)$, de la misma forma β es monomorfismo, entonces,

$$0 \neq \beta(m) = \gamma(\alpha(m)) = \gamma(x) = 0,$$

lo cual es una contradicción. Así $\ker \gamma = 0$, se sigue que, $\gamma(E(M))$ es inyectivo y es submódulo de $E_1(M)$, por lo que existe un sumando directo K , R -módulo, tal que $E_1(M) = \gamma(E(M)) + K$ suma directa. También sabemos que, $\beta(M) = \gamma(\alpha(M)) \subseteq \gamma(E(M))$, entonces $\beta(M) \cap K = 0$, ya que K es sumando directo de $\gamma(E(M))$ y como $\beta(M)$ es esencial en $E_1(M)$, $K = 0$. De esta manera, $\gamma(E(M)) = E_1(M)$, por lo tanto $E(M) \cong E_1(M)$. ■

Observaciones: A la cápsula inyectiva donde el R -módulo M está incluido la denotaremos como $E(M)$ a menos que se diga otra cosa. También si N es esencial en M , entonces por Lema 1.2 N es esencial en $E(M)$, se sigue que $E(N) = E(M)$.

Proposición 1.5. Sean $M_1, M_2, \dots, M_n$ R -módulos. Entonces $\oplus_{i=1}^n E(M_i)$ es una cápsula inyectiva de $\oplus_{i=1}^n M_i$, es decir,

$$E(\oplus_{i=1}^n M_i) \cong \oplus_{i=1}^n E(M_i).$$

Demostración. Como hay un número finito de $E(M_i)$ por [3, Chapter 2, Proposition 2.3] $\oplus_{i=1}^n E(M_i)$ es inyectivo y por la Proposición 1.1, $\oplus_{i=1}^n M_i$ es esencial en $\oplus_{i=1}^n E(M_i)$. ■

1.3. Anulador

Sean M un R -módulo, N un submódulo de M y K un subconjunto no vacío de M . Entonces denotaremos

$$N : K = \{r \in R \mid rK \subseteq N\}$$

Lema 1.4. $N : K$ es ideal izquierdo de R .

Demostración. Sean $x, y \in N : K$, $k \in K$ y $r \in R$, entonces

$$\begin{aligned} (x + y)k &= xk + yk \in N, & 0_R k &= 0_R \in N, \\ (-x)k &= -(xk) \in N & \text{y} & \quad (rx)k = r(xk) \in N, \end{aligned}$$

así $x + y, -x, rx, 0_R \in N : K$. Por lo tanto, $N : K$ es un ideal izquierdo de R . ■

De aquí, podemos observar los siguientes casos particulares. Sea $m \in M$

$$\begin{aligned} N : m &= \{r \in R \mid rm \in N\} \\ 0 : K &= \{r \in R \mid rK \subseteq 0\} = \{r \in R \mid k \in K, rk = 0\} \end{aligned}$$

Si K es submódulo de M y sean $x \in N : K$, $k \in K$, $r \in R$, entonces $(xr)k = x(rk)$, como $rk \in K$ se tiene que $x(rk) \in N$, así $xr \in N : K$. De este modo, si K es R -submódulo de M , $N : K$ es un ideal bilateral de R .

Definición 1.3. Sean M un R -módulo y N un submódulo de M . Entonces a $0 : N$ lo llamaremos anulador de N y lo denotaremos $\text{Ann}_R N$. En caso de que $K = \{x\}$, denotamos $0 : \{x\} = (0 : x)$.

Proposición 1.6. Sean M un R -módulo y $x \in M$, entonces $Rx \cong R/(0 : x)$.

Demostración. Sea $\alpha : R \rightarrow Rx$ tal que $\alpha(r) = rx$, con $r \in R$ y sean $r_1, r_2 \in R$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha(rr_1 + r_2) &= (rr_1 + r_2)x = rr_1x + r_2x = r\alpha(r_1) + \alpha(r_2) \\ rx \in Rx, \exists r \in R & \quad \alpha(r) = rx. \end{aligned}$$

De está forma, α es un epimorfismo, y por otro lado,

$$\ker \alpha = \{r \in R | \alpha(r) = 0\} = \{r \in R | rx = 0\} = (0 : x)$$

y por el Primer Teorema de Isomorfismos

$$R/(0 : x) = R/\ker \alpha \cong Rx.$$

■

Lema 1.5. Sean I un ideal izquierdo propio de R y $x \in \text{Ann}_R E(R/I)$. Entonces existe un elemento $y \in R$, $y \notin I$ tal que $yx = 0$.

Demostración. Supongamos que no existe un elemento $y \in R$, $y \notin I$ tal que $yx = 0$. Entonces podemos afirmar que $(0 : x) \subseteq I$. Veamos que $\alpha : Rx \rightarrow R/I$ tal que $\alpha(r_1x) = r + I$, con $r \in R$ es un morfismo de R -módulos. Sean $r \in R$ y $r_1x, r_2x \in Rx$, entonces

$$\alpha(rr_1x + r_2x) = \alpha((rr_1 + r_2)x) = rr_1 + r_2 + I = r(r_1) + I + r_2 + I = r\alpha(r_1x) + \alpha(r_2x)$$

y como $(0 : x) \subseteq I$, α está bien definido, por lo que α es morfismo y lo extendemos de la siguiente manera,

$$\begin{array}{ccc} Rx & \xrightarrow{i_R} & R \\ \alpha \downarrow & & \nearrow \alpha_1 \\ R/I & & \\ i_{E(R/I)} \downarrow & & \\ E(R/I) & & \end{array}$$

donde, $i_{E(R/I)}\alpha = \alpha_1 i_R$, de esta forma, $\alpha_1 : R \rightarrow E(R/I)$ y

$$\alpha_1(x) = \alpha_1(i_R(x)) = i_{E(R/I)}(\alpha(x)) = \alpha(x) = 1 + I.$$

Por otro lado, $\alpha_1(1) \in E(R/I)$, así

$$0 = x\alpha_1(1) = \alpha_1(x) = 1 + I \neq 0$$

lo cual es una contradicción.

■

1.4. Módulos inescindibles y submódulos irreducibles.

Definición 1.4. Sea M un R -módulo. Se dice que M es inescindible si $M \neq 0$ y los únicos sumandos directos de M son M y 0 .

Definición 1.5. Sean M un R -módulo y N un submódulo de M . Entonces decimos que N es un submódulo irreducible si $N \neq M$ y no existen submódulos A, B de M tal que $N \subset A$, $N \subset B$ y $N = A \cap B$. Un ideal izquierdo de un anillo es un ideal izquierdo irreducible, si el anillo es visto como un módulo izquierdo y el ideal es un submódulo irreducible. Si M es un R -módulo tal que el submódulo cero es irreducible en M , se dice que M es uniforme.

De las definiciones se puede deducir que cualquier módulo isomorfo a un módulo inescindible (irreducible) es inescindible (irreducible).

Proposición 1.7. *Sea M un R -módulo inyectivo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. M es inescindible.
2. $M \neq 0$ y es la cápsula inyectiva de todo submódulo no cero de sí mismo.
3. M es uniforme.

Demostración. Primero demostremos que 1. implica 2. Supongamos que M es inescindible, así $M \neq 0$. Sea $N \neq 0$ un submódulo de M , como M es inyectivo tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{i_{E(N)}} & E(N) \\ i_M \downarrow & \searrow \alpha & \\ M & & \end{array}$$

Donde i_M y $i_{E(N)}$ son las respectivas inclusiones, entonces $i_M = \alpha i_{E(N)}$, veamos que α es monomorfismo, supongamos que $\ker \alpha \neq 0$, debido a que N es esencial en $E(N)$, $N \cap \ker \alpha \neq 0$, sea $0 \neq x \in N \cap \ker \alpha$, entonces

$$0 \neq x = i_M(x) = \alpha i_{E(N)}(x) = \alpha(x) = 0$$

lo cual es una contradicción, por lo que α es monomorfismo. Luego $\alpha(E(N))$ es un submódulo inyectivo de M , entonces $\alpha(E(N))$ es sumando directo distinto de cero de M , por lo que $M = \alpha(E(N))$, así α es isomorfismo y M es una cápsula inyectiva de N .

Ahora demostremos que 2. implica 3. Supongamos que $M \neq 0$ y es cápsula inyectiva de todo submódulo no cero de sí mismo y sean N_1, N_2 submódulos de M tal que $N_1 \cap N_2 = 0$, si $N_1 \neq 0$, como N_1 es esencial en M , se sigue que $N_2 = 0$. Por lo tanto, M es uniforme.

Por último demostremos que 3. implica 1. Supongamos que M es uniforme, entonces $M \neq 0$ y supongamos que existen N_1, N_2 submódulos de M tales que $M = N_1 + N_2$ suma directa, entonces $N_1 \cap N_2 = 0$, lo cuál es una contradicción ya que M es uniforme, por lo tanto M es inescindible. ■

Corolario 1.2. *Sea M un R -módulo. Entonces*

1. $E(M)$ es inescindible si y solo si M es uniforme.
2. Sea N submódulo de M , N es un submódulo irreducible de M si y solo si $E(M/N)$ es inescindible.
3. Si M es un módulo simple, entonces $E(M)$ es inescindible.

Demostración.

1. Por la proposición anterior, $E(M)$ es inescindible si y solo si $E(M)$ es uniforme, y como M es submódulo de $E(M)$, el submódulo cero también es irreducible con respecto a M . Por otro lado, supongamos que M es uniforme y sean N_1, N_2 submódulos no cero de $E(M)$ tal que $N_1 \cap N_2 = 0$, como M es esencial en $E(M)$, $N_1 \cap M, N_2 \cap M$ son submódulos no cero de M tal que $(N_1 \cap M) \cap (N_2 \cap M) = 0$ lo cual es una contradicción ya que M es uniforme. Así, $E(M)$ es uniforme.

2. Primero probaremos que N es un submódulo irreducible de M si y solo si el submódulo cero de M/N es irreducible. Sean N_1, N_2 submódulos M que contienen estrictamente a N , así $N \subseteq N_1 \cap N_2$, entonces si $N_1 \cap N_2 = N$, se tiene que $(N_1/N) \cap (N_2/N) = (N_1 \cap N_2)/N = N/N = 0$, por otro lado, si $(N_1/N) \cap (N_2/N) = 0$, se sigue que $N_1 \cap N_2 \subseteq N$, por lo que $N_1 \cap N_2 = N$. Entonces, N submódulo irreducible de M , no existen los submódulos N_1, N_2 de M que contienen a N tal que $N_1 \cap N_2 = N$ esto ocurre si y solo si $(N_1/N) \cap (N_2/N) = 0$, como no existen $(N_1/N), (N_2/N)$ submódulos de M/N , el submódulo cero de M/N es irreducible.
- Concluimos que, si N es submódulo de M por 1, $E(M/N)$ es inescindible si y solo si el submódulo cero de M/N es irreducible si y solo si N es submódulo irreducible de M .
3. El submódulo cero de M es irreducible ya que no existen submódulos no cero de M que no sean el mismo y $M \cap M = M$, y por 1, $E(M)$ es inescindible. ■

Corolario 1.3. Sea M un R -módulo inyectivo inescindible y $0 \neq x \in M$. Entonces, $M \cong E(R/(0 : x))$ y $(0 : x)$ es un ideal izquierdo irreducible de R .

Demostración. Por la Proposición 1.6, $Rx \cong R/(0 : x)$ y por la proposición anterior $M = E(Rx) \cong E(R/(0 : x))$, por lo que $E(R/(0 : x))$ es inescindible y por el Corolario 1.2, $(0 : x)$ es irreducible. ■

Definición 1.6. Sean R un anillo conmutativo y P un ideal de R , entonces P es un ideal primo de R si es un ideal propio y para todo $x, y \in R$ tal que $xy \in P$, entonces $x \in P$ o $y \in P$.

Lema 1.6. Sean R un anillo conmutativo y P un ideal primo de R . Entonces $E(R/P)$ es inescindible y P es irreducible.

Demostración. Sean A, B ideales de R tal que $P = A \cap B$. Entonces $AB \subseteq A \cap B = P$, así, $A \subseteq P$ o $B \subseteq P$, es decir, $A = P$ o $B = P$, por lo que P es irreducible y por el Corolario 1.2 $E(R/P)$ es inescindible. ■

Lema 1.7. Sean R un anillo conmutativo y M un R -módulo inyectivo inescindible y sea $\phi \in \text{End}_R M$ ($\text{End}_R M$ representa al anillo de los R -morfismos con dominio M y codominio M , es decir, el anillo de los R -endomorfismos de M). Entonces ϕ es invertible si y solo si $\ker \phi = 0$.

Demostración. En un anillo de endomorfismo de M , los elementos invertibles, son los isomorfismos, por lo que, si ϕ es isomorfismo, es monomorfismo y $\ker \phi = 0$. Por otro lado, si $\ker \phi = 0$ entonces ϕ es monomorfismo y $\phi(M)$ es un submódulo inyectivo de M por lo que $\phi(M)$ es un sumando directo de M distinto de cero, como M es inescindible, $\phi(M) = M$ y así ϕ es epimorfismo. Por lo tanto, ϕ es invertible. ■

1.5. Zoclo

Definición 1.7. Sea M un R -módulo, entonces el zoclo de M es la suma directa de todos sus R -submódulos simples de M y lo denotaremos $\text{zoc}(M)$, es decir,

$$\text{zoc}(M) = \sum_{\substack{S \subseteq M \\ S \text{ simple}}} S \quad (\text{suma directa}).$$

Proposición 1.8. Sea $\alpha : M \rightarrow N$ un morfismo de R -módulos. Entonces $\alpha(\text{zoc}(M)) \subseteq \text{zoc}(N)$.

Demostración.

$$\alpha(\text{zoc}(M)) = \alpha\left(\sum_{\substack{S \subseteq M \\ S \text{ simple}}} S\right) = \sum_{\substack{S \subseteq M \\ S \text{ simple}}} \alpha(S).$$

Sea S un submódulo simple de M , entonces por el primer teorema de isomorfismos, $S/\ker(\alpha|_S) \cong \alpha(S)$, como S es simple, $\ker(\alpha|_S) = S$ o $\ker(\alpha|_S) = 0$. Si $\ker(\alpha|_S) = S$, entonces $0 = S/S \cong \alpha(S)$, por lo que $\alpha(S) = 0$. Por otro lado, si $\ker(\alpha|_S) = 0$, entonces $S \cong \alpha(S)$, se sigue que $\alpha(S)$ es simple. Como $\alpha(S) \subseteq N$, entonces $\alpha(\text{zoc}(M))$ es una suma de submódulos simples y 0 de N . Por lo tanto, $\alpha(\text{zoc}(M)) \subseteq \text{zoc}(N)$. ■

Corolario 1.4. Sea $\alpha : M \rightarrow N$ un isomorfismo de R -módulos. Entonces $\alpha(\text{zoc}(M)) = \text{zoc}(N)$.

Demostración. Por la proposición anterior sabemos que, $\alpha(\text{zoc}(M)) \subseteq \text{zoc}(N)$ y también que $\alpha^{-1}(\text{zoc}(N)) \subseteq \text{zoc}(M)$, por lo tanto, $\text{zoc}(N) \subseteq \alpha(\text{zoc}(M)) \subseteq \text{zoc}(N)$, es decir, $\alpha(\text{zoc}(M)) = \text{zoc}(N)$. ■

Lema 1.8. Sean M un R -módulo y N un R -submódulo esencial de M . Entonces $\text{zoc}(N) = \text{zoc}(M)$.

Demostración. Sea S un submódulo simple de M , como N es esencial en M , $N \cap S \neq 0$, por lo que $N \cap S = S$, así $S \subseteq N$. Por lo tanto, $\text{zoc}(N) = \text{zoc}(M)$. ■

Proposición 1.9. Sean $M_1, M_2, \dots, M_n$ R -módulos. Entonces,

$$\text{zoc}(\oplus_{i=1}^n M_i) \cong \oplus_{i=1}^n \text{zoc}(M_i).$$

Demostración. Sean $\pi_j : \oplus_{i=1}^n M_i \rightarrow M_j$ y $\eta_j : M_j \rightarrow \oplus_{i=1}^n M_i$, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, los morfismos proyección natural e inclusión respectivamente.

Por la Proposición 1.8, sabemos que $\eta_j(\text{zoc}(M_j)) \subseteq \text{zoc}(\oplus_{i=1}^n M_i)$, entonces,

$$\sum_{j=1}^n \eta_j(\text{zoc}(M_j)) \subseteq \text{zoc}(\oplus_{i=1}^n M_i).$$

Por otro lado, sabemos que $\text{Id}_{\oplus_{i=1}^n M_i} = \sum_{j=1}^n \eta_j \pi_j$, se sigue que

$$\text{zoc}(\oplus_{i=1}^n M_i) = \sum_{j=1}^n \eta_j(\pi_j(\text{zoc}(\oplus_{i=1}^n M_i))) \subseteq \sum_{j=1}^n \eta_j(\text{zoc}(M_j)).$$

Por lo que, $\sum_{j=1}^n \eta_j(\text{zoc}(M_j)) = \text{zoc}(\oplus_{i=1}^n M_i)$. Como es suma de módulos simples, es claro que es suma directa, por lo tanto,

$$\oplus_{i=1}^n \text{zoc}(M_i) \cong \sum_{i=1}^n \eta_i(\text{zoc}(M_i)) = \text{zoc}(\oplus_{i=1}^n M_i).$$

■

1.6. Módulos neterianos y artinianos

Definición 1.8. Sea M un R -módulo, M es neteriano (resp. artiniano) si toda familia no vacía de R -submódulos de M posee un elemento máximo (resp. mínimo) con respecto a la inclusión. Un anillo R es considerado neteriano (resp. artiniano) si lo es como R -módulo.

De la definición es fácil ver que todo R -submódulo de un R -módulo neteriano (resp. artiniano), también es neteriano (resp. artiniano). A su vez también que la propiedad de ser neteriano, se preserva bajo isomorfismo de R -módulos.

Definición 1.9. Sea M un R -módulo. Una cadena de R -submódulos de M

$$\cdots \subseteq N_{i-1} \subseteq N_i \subseteq N_{i+1} \subseteq \cdots$$

(finita o infinita) se dice que se estaciona si la cadena está formada por un número finito de diferentes R -submódulos.

Proposición 1.10. Sea M un R -módulo, entonces,

1. M es neteriano si y solo si toda cadena ascendente se estaciona.
2. M es artiniano si y solo si toda cadena descendente se estaciona.

Demostracion.

1. Supongamos que M es neteriano y sea la siguiente cadena ascendente de R -submódulos de M arbitraria.

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \cdots$$

Entonces la familia de submódulos N_i , con $i \in \{1, 2, \dots\}$, tiene un elemento máximo N_k , por lo que $N_k = N_m$, cuando $k \leq m$, entonces la cadena ascendente se estaciona.

Por otro lado, supongamos que M no es neteriano, entonces existe una familia Γ de R -submódulos de M , que no tiene máximo con respecto a la inclusión, entonces sea $N_1 \in \Gamma$, entonces N_1 no es máximo por lo que existe $N_2 \in \Gamma$ tal que $N_1 \subset N_2$, como N_2 tampoco es máximo, existe $N_3 \in \Gamma$ tal que $N_2 \subset N_3$, continuando con este proceso indefinidamente, por lo que la cadena

$$N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \cdots$$

no se estaciona, así si M no es neteriano existe al menos una una cadena ascendente de R -módulos que no se estaciona. Por contraposición tenemos, si toda cadena de R -submódulos de M se estaciona, entonces M es neteriano.

2. La demostración es análoga a la anterior.

■

Proposición 1.11. Sea

$$0 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$$

una sucesión exacta de R -módulos. Entonces E es neteriano (resp. artiniano) si y solo si N y M son neterianos (resp. artinianos).

Demostración. La demostración para artinianos es análoga a la de neterianos, por lo que solo demostraremos para neterianos. Sin pérdida de generalidad, supongamos que N es submódulo de E y que $M = E/N$. Sea

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \cdots$$

una sucesión ascendente de R -submódulos de E/N . Entonces definimos $K'_i = \{x \in E | x + N \in K_i\}$ para cada $i \in \{1, 2, \dots\}$, así tenemos la siguiente cadena de submódulos de E ,

$$K'_1 \subseteq K'_2 \subseteq K'_3 \subseteq \cdots$$

como E es neteriano, la cadena se estaciona en algún K'_n , por lo que $K'_n = K'_m$, cuando $n \leq m$ y por cómo están definidos estos módulos implica que, $K_n = K_m$, cuando $n \leq m$, por lo que la cadena ascendente de submódulo de E/N se estaciona y E/N es neteriano.

Por otro lado, supongamos que N y M son neterianos, y sea

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \cdots$$

una cadena de R -submódulos de E . Entonces tenemos que las siguientes cadenas ascendentes,

$$\begin{aligned} K_1 \cap N &\subseteq K_2 \cap N \subseteq K_3 \cap N \subseteq \cdots \\ (K_1 + N)/N &\subseteq (K_2 + N)/N \subseteq (K_3 + N)/N \subseteq \cdots \end{aligned}$$

de R -submódulos de N y E/N respectivamente, entonces ambas se estacionan, supongamos que en $l, r \in \{1, 2, \dots\}$, respectivamente, sea $n = \max\{l, r\}$ tal que pasen las siguientes acciones al mismo tiempo,

$$K_n \cap N = K_m \cap N \quad \text{y} \quad (K_n + N)/N = (K_m + N)/N,$$

se sigue, $K_n + N = K_m + N$, cuando $n \leq m$. Utilizando la ley modular, obtenemos el siguiente resultado,

$$K_n = K_n + (K_n \cap N) = K_n + (K_m \cap N) = K_m \cap (K_n + N) = K_m \cap (K_m + N) = K_m.$$

Por lo tanto, la cadena ascendente de submódulos de E se estaciona y E es neteriano. ■

Proposición 1.12. Sean $M_1, M_2, \dots, M_n$ R -módulos, entonces $\oplus_{i=1}^n M_i$ es neteriana (resp. artiniana), si y solo si cada M_i es neteriano (resp. artiniano), para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Demostración. La demostración para artinianos es análoga a la de neterianos, por lo que solo demostraremos para neterianos. Procederemos por inducción. Para el caso base, cuando $r = 1$, es claro que se cumplen las dos implicaciones. Supongamos que se cumplen ambas implicaciones para $r > 1$, entonces queda demostrar que se cumplen ambas implicaciones para $r + 1$. Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow \oplus_{i=1}^r M_i \rightarrow \oplus_{i=1}^{r+1} M_i \rightarrow M_{r+1} \rightarrow 0$$

con la inclusión y la proyección canónica.

Ahora supongamos que $\oplus_{i=1}^{r+1} M_i$ es neteriano, entonces por la proposición anterior, $\oplus_{i=1}^r M_i$ y M_{r+1} son neterianos y con la hipótesis de inducción tenemos que cada M_i es neteriano con $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Por otro lado, si suponemos que M_i es neteriano, para cada $i \in \{1, 2, \dots, r+1\}$. Por hipótesis de inducción tenemos que $\oplus_{i=1}^r M_i$ es neteriano y como también M_{r+1} es neteriano, por la proposición anterior, acabamos. ■

Corolario 1.5. Sean $S_1, S_2, \dots, S_n$ R -módulos simples, entonces $\oplus_{i=1}^r S_i$ es neteriano y artiniano.

Demostración. Como cada módulo simple tiene únicamente dos submódulos, toda cadena ascendente y descendente se estaciona entonces son neterianos y artinianos, y por la proposición $\bigoplus_{i=1}^r S_i$ es neteriano y artiniano. ■

Definición 1.10. Sean M un R -módulo y la cadena

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M$$

de R -módulos de M , entonces,

1. la cadena es de longitud n
2. la cadena es una serie de composición si M_{i-1} es submódulo máximo de M_i para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.
3. M es de longitud finita si tiene una serie de composición.

Proposición 1.13. Sea M un R -módulo. Entonces M es neteriano y artiniano si y solo si M es de longitud finita.

Demostración. Supongamos que M es neteriano y artiniano, sea Γ la familia de todos los R -submódulos propios de M , como M es neteriano existe $M_1 \in \Gamma$ máximo, lo que sería un submódulo máximo de M . Como M_1 es submódulo M , también es neteriano y siguiendo el mismo procedimiento, existe M_2 un submódulo máximo de M_1 . Repitiendo este proceso obtenemos la siguiente cadena decendente de submódulos de M ,

$$\cdots \subset M_2 \subset M_1 \subset M_0 = M,$$

debido a que M es artiniano esta cadena se estaciona. Supongamos que se estaciona en el R -módulo M_r , con r un entero positivo, entonces la familia de los submódulos propios de M_r debe ser vacía, por lo que $M_r = 0$, luego $M_r = 0$ es el submódulo máximo de M_{r-1} , por lo que M_{r-1} es un submódulo simple. Se sigue que la cadena es una serie de composición y M es de longitud finita.

Por otro lado, supongamos que M es de longitud finita. Procediendo por inducción. Sea $l = 1$ la longitud de la serie de composición, entonces M es simple, M es artiniano y neteriano. Supongamos que supongamos que se cumple para $l = r - 1$. Queda demostrar que cumple para r . Sea

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{r-1} \subset M_r = M$$

una serie de composición de longitud r de M . Entonces

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{r-1}$$

es una serie de composición de longitud $r - 1$ de M_{r-1} , por hipótesis, M_{r-1} es neteriano y artiniano. A su vez, M_{r-1} es submódulo máximo de M , entonces M/M_{r-1} es simple, por lo que es neteriano y artiniano. Veamos la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow M_{r-1} \rightarrow M \rightarrow M/M_{r-1} \rightarrow 0,$$

por la Proposición 1.11, M es neteriano y artiniano. ■

Proposición 1.14. Un R -módulo M es neteriano si y solo si todo R -submódulo de M es f.g.

Demostración. Supongamos que M es neteriano y sean N un R -submódulo de M y Γ la familia de todos los R -submódulos $f.g.$ de N , la familia es distinta del vacío ya que el R -módulo 0 es $f.g.$. Como M es neteriano, Γ tiene elemento máximo, sea $K_0 = Rx_1 + \cdots + Rx_n$, con $x_i \in K_0$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Supongamos que N no es $f.g.$, entonces $K_0 \subset N$, así existe $k \in N$, $k \notin K_0$, entonces, $K_0 + Rk$ es un submódulo de N $f.g.$, lo cual es una contradicción, ya que K_0 es máximo, por lo tanto N es $f.g.$

Por otro lado, supongamos que todo R -submódulo de M es $f.g.$, y sea

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \cdots$$

una cadena ascendente de R -submódulos de M , consideremos $K = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$, entonces, K es submódulo de M , se sigue que es $f.g.$, sea $K = Rx_1 + \cdots + Rx_n$, donde $x_i \in K_{j_i}$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y para algún $j_i \in \{1, \dots, \infty\}$. entonces, sea $r = \max\{j_i\}$, de este modo $x_1, \dots, x_n \in K_r$, por lo que $K = K_r$, la cadena se estaciona en K_r y M es neteriano. ■

Proposición 1.15. *Un anillo izquierdo R es neteriano (resp. artinario) si y solo si todo R -módulo $f.g.$ es neteriano (resp. artinario).*

Demostración. Supongamos que R es neteriano (resp. artinario). Sea A un R -módulo $f.g.$ si $A = Rx_1 + \cdots + Rx_n$, donde $n \in \mathbb{N}$ $x_i \in A$ con $i \in \{1, \dots, n\}$, como R es neteriano (resp. artinario), R^n también lo es, y sabemos que todo R -módulo es la imagen epimorfica de una suma directa externa de copias de R , en este caso A de R^n , por lo que A es neteriano (resp. artinario).

Por otro lado, suponemos que todo $f.g.$ es neteriano (resp. artinario), como R es $f.g.$ por ser generado por el 1_R , R es neteriano (resp. artinario). ■

Lema 1.9. *Sea R un anillo neteriano, entonces:*

1. *Toda suma directa de R -módulos inyectivos es inyectiva.*
2. *Todo R -módulo M contiene un R -submódulo N uniforme.*

Demostración.

1. Sea $E = \sum_{i \in I} E_i$, con I un conjunto de índices, una suma directa de R -módulos inyectivos. Por el Criterio de Baer, es suficiente probar que para todo U ideal de R y todo morfismo $\alpha : U \rightarrow E$, existe $\beta : R \rightarrow E$, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{i_R} & R \\ \alpha \downarrow & \searrow \beta & \\ E & & \end{array}$$

es decir, $\alpha = \beta i_R$, donde i_R es la inclusión en R .

Como R es neteriano, por la Proposición 1.14, U es $f.g.$, entonces, $U = Rx_1 + \cdots + Rx_n$ y

$$\alpha(U) = \alpha(Rx_1 + \cdots + Rx_n) = R\alpha(x_1) + \cdots + R\alpha(x_n),$$

donde cada $\alpha(x_i)$, es la suma de un numero finito de diferentes elementos no cero de E_i , con $i \in I_0$, $I_0 \subseteq I$ finito. De este modo tenemos los siguientes morfismos, $i_E : \sum_{i \in I_0} E_i \rightarrow E$ y $\alpha_0 = \alpha|_{\sum_{i \in I_0} E_i}$, donde es claro que $\alpha = i_E \alpha_0$. Como I_0 es finito y cada E_i , con $i \in I_0$, es

inyectivo, y la suma directa $\sum_{i \in I_0} E_i$ es inyectiva por lo que existe $\beta_0 : R \rightarrow \sum_{i \in I_0} E_i$, tal que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{i_R} & R \\ \alpha_0 \downarrow & \nearrow \beta_0 & \\ \sum_{i \in I_0} E_i & & \\ i_E \downarrow & & \\ E & & \end{array}$$

es decir, $\alpha_0 = \beta_0 i_R$. Por lo tanto, definimos $\beta = i_E \beta_0$, se sigue que, $\alpha = i_E \alpha_0 = i_E \beta_0 i_R = \beta i_R$.

2. Para la demostración necesitaremos la siguiente definición. Sean A un R -módulo y B un R -submódulo de A , si C un R -submódulo de A , tal que $B \cap C = 0$ y es máximo con esta propiedad, lo llamaremos el complemento de la intersección de B en A , denotaremos al complemento de la intersección de B como $B^\cap$.

Sea N un R -submódulo no cero f.g. de M , por la Proposición 1.15, N es neteriano. Sea Γ la familia de los R -submódulos propios de N , los cuales son el complemento de la intersección de los R -submódulos no cero de N . Como el R -submódulo cero es un submódulo propio de N , $N \neq 0$ y $N^\cap = 0$, $0 \in \Gamma$, así $\Gamma \neq \emptyset$. Como N es neteriano, existe $X^\cap$ máximo, el complemento de la intersección de X en N .

Veamos que todo R -submódulo de X es esencial en X . Sean K un R -submódulo no cero de X y L un R -submódulo de X , tal que $K \cap L = 0$, entonces

$$K \cap (L + X^\cap) = (K \cap L) + (K \cap X^\cap) = 0 + 0 = 0.$$

Como $K \neq 0$, entonces, $K^\cap \neq N$, pero $X^\cap$ es máximo, se sigue que, $L + X^\cap = X^\cap$, es decir, $L \subseteq X^\cap$, por lo que $L \subseteq X \cap X^\cap = 0$, $L = 0$, lo cual es una contradicción. Se obtiene que cualquier submódulo no cero de X es esencial en X . De este modo, no existen R -submódulos no cero A, B de X , tales que $A \cap B = 0$. Por lo tanto, el R -módulo X es uniforme. ■

1.7. Módulos semisimples

Lema 1.10. *Sean M un submódulo tal que todo R -submódulo de M es un sumando directo de M y N un R -submódulo de M , entonces todo R -submódulo de N es un sumando directo de N .*

Demostración. Sea A un R -submódulo de N , entonces A es un submódulo de M , entonces existe un R -submódulo B de M tal que $M = A + B$ suma directa, se sigue que $N \cap M = N \cap (A + B)$ y por la ley modular $N = A + (N \cap B)$, esta suma es directa ya que

$$A \cap (N \cap B) \subseteq A \cap B = 0.$$
■

Proposición 1.16. *Sea M un R -módulo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Todo submódulo de M es una suma directa de submódulos simples.*
2. *M es una suma directa de submódulos simples.*

3. Todo submódulo de M es sumando directo de M .

Demostración. Supongamos que todo submódulo de M es suma directa de submódulos simples, como M es un submódulo de sí mismo, M es una suma directa de submódulos simples.

Por otro lado, supongamos que M es una suma directa de R -submódulos simples, es decir $M = \sum_{i \in I} S_i$, donde I es un conjunto de índices y cada S_i es un R -submódulo simple de M , sea N un submódulo de M y consideremos a la familia

$$\Gamma = \{L \subseteq M \mid N + \sum_{i \in L} S_i \text{ suma directa}\}.$$

Como $\sum_{i \in \emptyset} S_i = 0$, $\emptyset \in \Gamma$, por lo que $\Gamma \neq \emptyset$, ordenamos parcialmente a Γ con la inclusión y sea Γ' una subfamilia totalmente ordenada de Γ . Claramente $K = \bigcup_{L \in \Gamma'} L$ es una cota superior de Γ' , veamos que $K \in \Gamma$. Sea $F \subset K$ finito, entonces existe un $L \in \Gamma'$ tal que $F \subseteq L$ y F es de tal forma que $n + \sum_{i \in F} s_i = 0$, con $n \in N$ y $s_i \in S_i$, como $F \subseteq L$, $n = s_i = 0$ para toda $i \in F$. De esta manera, $N + \sum_{i \in K} S_i$ es suma directa, por lo que $K \in \Gamma$ y por el Lema de Zorn existe un elemento máximo $J \in \Gamma$. Sea

$$E = N + \sum_{i \in J} S_i \quad (\text{suma directa})$$

y supongamos que $E + S_{i_0}$ es suma directa, con $i_0 \in I$, esto no sería posible debido a que $J \cup \{i_0\} \in \Gamma$, pero J es elemento máximo de Γ , se sigue que $E \cap S_{i_0} \neq 0$ y como S_{i_0} es simple se tiene que $E \cap S_{i_0} = S_{i_0}$, así $S_{i_0} \subseteq E$ y

$$M = \sum_{i \in I} S_i \subseteq E \subseteq M,$$

como N fue arbitrario, todo R -submódulo de M es sumando directo de M .

Por último, supongamos que todo R -submódulo de M es sumando directo de M , sean N un R -submódulo de M y $N_0 = \sum_{i \in I} S_i$ donde I es un conjunto de índices y cada S_i es un R -submódulo simple de N , entonces N_0 es submódulo de N , luego por hipótesis y por el lema anterior, existe K un R -submódulo de N tal que $N = N_0 + K$ suma directa, si $K = 0$ terminamos, supongamos que $K \neq 0$, entonces K tiene un R -submódulo f.g. L el cual posee un R -submódulo máximo X , entonces nuevamente por hipótesis y el lema anterior existe L_0 R -submódulo de L tal que $L = X + L_0$ suma directa, luego por el Segundo Teorema de Isomorfismos de módulos

$$L/X = (X + L_0)/X \cong L_0/(X \cap L_0) = L_0/0 = L_0,$$

como X es máximo en L , L/X es simple, entonces L_0 es un submódulo simple de L , así L_0 es un submódulo simple de K y $L_0 \subseteq N_0$, por lo tanto $L_0 \subseteq N_0 \cap K = 0$, lo cual es una contradicción, se sigue que $K = 0$. ■

Definición 1.11. Al R -módulo que cumpla con alguna de las equivalencias dadas en la proposición anterior se le llama R -módulo semisimple. ■

Proposición 1.17. Sea M un R -módulo semisimple, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. M es una suma directa de un número finito de R -submódulos simples.
2. M es neteriano
3. M es artinian.

Demostración. Supongamos que M es una suma directa de un número finito de R -submódulos simples, por el Corolario 1.5, M es artiniiano y neteriano.

Por otro lado, si negamos que M es una suma directa de un número finito de R -submódulos simples, entonces sería una suma infinita entonces M tendría cadenas ascendentes y descendentes infinitas, es decir M no es artiniiano y no es neteriano. La contraposición sería, si M es artiniiano M es una suma directa de un número finito de R -submódulos simples, de igual manera si M es neteriano. ■

Proposición 1.18. *La imagen de un morfismo de un R -módulo semisimple es semisimple.*

Demostración. Sea $\alpha : A \rightarrow B$ un morfismo de R -módulos, donde A es semisimple, entonces existe N un R -submódulo de A tal que $A = \ker \alpha + N$ suma directa, entonces por el primer y segundo teorema de isomorfismos de módulos tenemos que

$$\alpha(M) \cong M/(\ker \alpha) = (\ker \alpha + N)/\ker \alpha \cong N/(N \cap \ker \alpha) = N/0 = N,$$

por la Proposición 1.16, N es semisimple, entonces $\alpha(A)$ es semisimple. ■

Corolario 1.6. *Sea R un anillo. Entonces R es semisimple como R -módulo si y solo si todo R -módulo es semisimple.*

Demostración. Supongamos que R es semisimple, como todo R -módulo es imagen de un epimorfismo de una suma directa externa de copias de R , por la proposición anterior todo R -módulo es semisimple.

Por otro lado, supongamos que todo R -módulo es semisimple, entonces R visto como R -módulo es semisimple. ■

Capítulo 2

Módulos finitamente incrustados y sus propiedades.

2.1. Módulo finitamente incrustado.

Definición 2.1. Un R -módulo no cero M es finitamente incrustado (f.i.) si su cápsula inyectiva es isomorfa a una suma directa finita de cápsulas inyectivas de R -módulos simples, es decir,

$$E(M) \cong E(S_1) \oplus \cdots \oplus E(S_n)$$

Lema 2.1. Sea M un R -módulo. Entonces M es f.i. si y solo si $\text{zoc}(M)$ es esencial en M y es f.g.

Demostración. Supongamos que M es f.i., entonces

$$E(M) \xrightarrow{\alpha} E(S_1) \oplus \cdots \oplus E(S_n)$$

con S_i R -módulos simples, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, como M es esencial en $E(M)$, por el Lema 1.8, $\text{zoc}(M) = \text{zoc}(E(M))$, sea α el isomorfismo dado por hipótesis y por el Corolario 1.4, $\alpha|_{\text{zoc}(E(M))} = \alpha|_{\text{zoc}(E(S_1) \oplus \cdots \oplus E(S_n))}$ es isomorfismo, así

$$\begin{aligned} \text{zoc}(M) &= \text{zoc}(E(M)) \cong \text{zoc}(E(S_1) \oplus \cdots \oplus E(S_n)) \\ &\xrightarrow{\beta} \text{zoc}(E(S_1)) \oplus \cdots \oplus \text{zoc}(E(S_n)) = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n, \end{aligned}$$

por lo que, $\text{zoc}(M)$ es f.g.

Ahora, sabemos que S_i es esencial en $E(S_i)$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se sigue que, $S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$ es esencial en $E(S_1) \oplus \cdots \oplus E(S_n)$. Entonces, por el Lema 1.1, $\text{zoc}(M) = \alpha^{-1}(\beta^{-1}(S_1 \oplus \cdots \oplus S_n))$ es esencial en $E(M)$. Sea U un R -submódulo de M tal que $\text{zoc}(M) \cap U = 0$, como U también es submódulo de $E(M)$, $U = 0$. Por lo que, $\text{zoc}(M)$ esencial en M .

Por otro lado, supongamos que $\text{zoc}(M)$ es esencial en M y es f.g., es decir, $\text{zoc}(M) = \sum_{i=1}^n S_i$, una suma directa de R -submódulos simples S_i de M y como $\text{zoc}(M)$ es esencial en M tenemos,

$$E(M) = E(\text{zoc}(M)) \cong E(S_1 \oplus \cdots \oplus S_n) \cong E(S_1) \oplus \cdots \oplus E(S_n).$$

Por lo tanto, M es f.i. ■

Definición 2.2. Sean M un R -módulo e I un conjunto de índices. Una familia $\{M_i\}_{i \in I}$ de R -submódulos de M es llamada directa (resp. inversa) si para cualquier número finito de elementos de I hay un $i_0 \in I$ tal que,

$$M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \cdots \cup M_{i_n} \subseteq M_{i_0} \\ (\text{resp. } M_{i_0} \subseteq M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \cdots \cap M_{i_n}).$$

Proposición 2.1. Sea M un R -módulo, entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones:

1. M es f.g. si y solo si toda familia directa de R -submódulos propios de M está acotada superiormente por un R -submódulo propio de M .
2. M es f.i. si y solo si toda familia inversa de R -submódulos no cero de M está acotada inferiormente por un R -submódulo no cero de M .

Demostración.

1. Supongamos que M es f.g. y que existe $\{M_i\}_{i \in I}$, con I un conjunto de índices, una familia directa de R -submódulos propios de M , la cual no está acotada superiormente por un R -submódulo propio de M . Además $M_i \subseteq \sum_{i \in I} M_i$, para cada $i \in I$, entonces es una cota superior, pero como la familia no está acotada superiormente por un submódulo propio de M , $\sum_{i \in I} M_i = M$, M es f.g. por lo que existe $I' \subseteq I$ finito tal que, $\sum_{i \in I'} M_i = M$, pero como la familia es directa existe un $i_0 \in I$ tal que $\bigcup_{i \in I'} M_i \subseteq M_{i_0}$, recordando que la suma $\sum_{i \in I'} M_i$ es el generado de $\bigcup_{i \in I'} M_i$, es decir, es el mínimo submódulo que contiene a $\bigcup_{i \in I'} M_i$, se sigue que, $M = \sum_{i \in I'} M_i \subseteq M_{i_0}$, lo cual es una contradicción, ya que M_{i_0} es un submódulo propio de M .

Por otro lado, supongamos que M no es f.g. y sea $\{M_i\}_{i \in I}$ la familia de todos los R -submódulos f.g. de M , como M no es f.g., todos los submódulos de la familia son propios, el $0 \in \{M_i\}_{i \in I}$, por lo que no es vacía y la suma finita de módulos f.g. es nuevamente f.g., por lo que cualquier subfamilia finita, está acotada superiormente por un módulo f.g., entonces $\{M_i\}_{i \in I}$ es una familia directa, por lo que existe M_1 submódulo propio de M que acota superiormente a toda la familia directa, sea $x \in M$, $x \notin M_1$, entonces tenemos que Rx no es un submódulo de M_1 , pero $Rx \in \{M_i\}_{i \in I}$, lo cual es una contradicción, ya que Rx sería submódulo de M_1 .

2. Supongamos que M es f.i. y sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia inversa de submódulos no cero de M , como M está en la familia, es distinta de cero, por el Lema 2.1 sabemos que el $\text{zoc}(M)$ es esencial en M , así $\text{zoc}(M) \cap M_i \neq 0$, para cada $i \in I$, además el $\text{zoc}(M)$ es f.g. y es una suma directa de R -módulos simples, por lo que $\text{zoc}(M) = \sum_{j=1}^n S_j \cong \oplus_{j=1}^n S_j$, con S_j R -submódulos simples de M y por el Corolario 1.5, $\text{zoc}(M)$ es artiniiano, de este modo, la familia $\{\text{zoc}(M) \cap M_i\}_{i \in I}$ tiene mínimo, digamos $\text{zoc}(M) \cap M_{i'}$, sea $k \in I$, como la familia $\{M_i\}_{i \in I}$ es inversa, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $M_{i_0} \subseteq M_k \cap M_{i'}$, se sigue,

$$M_{i_0} \cap \text{zoc}(M) \subseteq M_k \cap M_{i'} \cap \text{zoc}(M) = M_{i'} \cap \text{zoc}(M),$$

como $M_{i'} \cap \text{zoc}(M)$ es mínimo, $M_{i'} \cap \text{zoc}(M) = M_{i_0} \cap \text{zoc}(M)$, por lo que, $M_{i'} \cap \text{zoc}(M) \subseteq M_{i_0} \subseteq M_k$, como k es arbitrario, $M_{i'} \cap \text{zoc}(M)$ es cota inferior distinta de cero de la familia $\{M_i\}_{i \in I}$.

Por otro lado, sea N un R -submódulo no cero de M y Γ la familia de todos los R -submódulos no cero de N , dotamos a Γ con la inclusión inversa para ordenarlo parcialmente, $N \in \Gamma$, entonces $\Gamma \neq \emptyset$. Sean Γ' una subfamilia totalmente ordenada con la inclusión inversa y Γ_0 una subfamilia finita de Γ' , entonces $\bigcap_{L \in \Gamma_0} L \in \Gamma'$ es una cota inferior (con la inclusión

normal) de Γ_0 , por lo que Γ' es una familia inversa y por hipótesis está acotada inferiormente por un submódulo no cero, entonces Γ' con la inclusión inversa esta acotada superiormente y por el Lema de Zorn, Γ tiene máximo, se sigue que, con la inclusión normal tiene mínimo, es decir, N tiene un submódulo simple S . Como $N \neq 0$ fue arbitrario y $0 \neq S \subseteq N \cap \text{zoc}(M)$, el $\text{zoc}(M)$ es esencial en M .

Por el Lema 2.1, queda demostrar que $\text{zoc}(M)$ es f.g. o lo que es lo mismo, $\text{zoc}(M) = \sum_{i=1}^n S_i$, con S_i R -submódulos simples de M . Supongamos que $\text{zoc}(M)$ es una suma directa de una familia infinita de R -submódulos simples de M y sea $\{S_i\}_{i=1}^\infty$ una subfamilia contable. La siguiente familia,

$$\left\{ \sum_{i=j}^{\infty} S_i \right\}_{j=1}^{\infty}$$

claramente esta totalmente ordenada con la inclusión, por lo que, la intersección de un número finito de sus elementos estará en la familia, se sigue que es una familia inversa. Veamos que la intersección de todos los elementos de la familia es cero.

Supongamos que $0 \neq x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} \sum_{i=j}^{\infty} S_i$, en particular $x \in \sum_{i=1}^{\infty} S_i$, es decir, $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$, con $x_i \in S_i$ entonces existe al menos un $0 \neq x_\alpha \in S_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2, \dots, \infty\}$, pero

$$x \in \sum_{i=\alpha+1}^{\infty} S_i = \sum_{i=1}^{\alpha} 0 + \sum_{i=\alpha+1}^{\infty} S_i,$$

de este modo, $x_\alpha = 0$, lo cual es una contradicción, por lo que $x = 0$ y

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} \sum_{i=j}^{\infty} S_i = 0.$$

Se sigue que, toda la familia no puede ser acotada por un submódulo no cero, lo cual es un contradicción ya que contradice nuestra hipótesis. Entonces $\text{zoc}(M)$ es f.g., por lo tanto, M es f.i. ■

Proposición 2.2. Sea $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M_2 \rightarrow 0$ una sucesión exacta de R -módulos, entonces:

1. Si M es f.g., entonces M_2 es f.g.
2. Si M_1 y M_2 son f.g., entonces M es f.g.
3. Si M es f.i., entonces M_1 es f.i.
4. Si M_1 y M_2 son f.i., entonces M es f.i.

Demostración.

1. Sea M f.g., entonces, existe $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ tal que, $M = \sum_{i=1}^n Rx_i$, como β es epimorfismo, tenemos que,

$$M_2 = \beta(M) = \beta\left(\sum_{i=1}^n Rx_i\right) = \sum_{i=1}^n \beta(Rx_i) = \sum_{i=1}^n R\beta(x_i).$$

Módulos finitamente incrustados y sus propiedades.

2.1 Módulo finitamente incrustado.

2. Sean M_1 y M_2 son *f.g.*, entonces existen $x_1, x_2, \dots, x_n \in M_1$ y $y_1, y_2, \dots, y_n \in M_2$, tales que, $M_1 = \sum_{i=1}^n Rx_i$ y $M_2 = \sum_{j=1}^m Ry_j$. Como β es epimorfismo, se sigue que, existen $k_1, k_2, \dots, k_m \in M$ tales que, $\beta(k_j) = y_j$, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$. Sea $k \in M$, entonces

$$\beta(k) = \sum_{j=1}^m r_j y_j = \sum_{j=1}^m r_j \beta(k_j) = \beta\left(\sum_{j=1}^m r_j k_j\right),$$

así $k - \sum_{j=1}^m r_j k_j \in \ker \beta = \text{Im} \alpha$, por lo que, existe $x = \sum_{i=1}^n r'_i x_i \in M_1$ tal que, $\alpha(\sum_{i=1}^n r'_i x_i) = k - \sum_{j=1}^m r_j k_j$, lo que implica, $k = \sum_{i=1}^n r'_i \alpha(x_i) + \sum_{j=1}^m r_j k_j$, por lo tanto,

$$M = \sum_{i=1}^n R\alpha(x_i) + \sum_{j=1}^m Rk_j.$$

3. Supongamos que existe una familia inversa $\{M_i\}_{i \in I}$, con I un conjunto de índices, de R -submódulos no cero de M_1 , que no está acotada inferiormente por un R -submódulo no cero de M_1 , entonces está acotada inferiormente únicamente por el R -módulo 0, entonces $\bigcap_{i \in I} M_i = 0$, como α es monomorfismo, $\{\alpha(M_i)\}_{i \in I}$, es una familia inversa de R -submódulos no cero de M , como M es *f.i.*, existe K una cota inferior no cero, luego α es monomorfismo, se sigue que $0 = \ker \alpha \subseteq M_i$, para cada $i \in I$, entonces

$$0 \neq K \subseteq \bigcap_{i \in I} \alpha(M_i) = \alpha\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) = \alpha(0) = 0,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, M_1 es *f.i.*

4. Sean M_1 y M_2 *f.i.*, entonces,

$$\begin{aligned} E(M_1) &\cong E(S_1) \oplus \dots \oplus E(S_n) \\ E(M_2) &\cong E(S'_1) \oplus \dots \oplus E(S'_m), \end{aligned}$$

con S_i, S_j R -submódulos simples de M_1 y M_2 respectivamente, $i \in \{1, \dots, n\}$ y $j \in \{1, \dots, m\}$. Entonces

$$\begin{aligned} E(E(M_1) \oplus E(M_2)) &\cong E(E(M_1)) \oplus E(E(M_2)) = E(M_1) \oplus E(M_2) \\ &\cong (\oplus_{i=1}^n E(S_i)) \oplus (\oplus_{j=1}^m E(S'_j)), \end{aligned}$$

$E(M_1) \oplus E(M_2)$ es *f.i.* y como $E(M_1)$ es inyectivo tenemos el siguiente mapa conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\alpha} & M \\ \downarrow i_{E(M_1)} & \searrow \gamma & \\ E(M_1) & & \end{array}$$

con $i_{E(M_1)}$ la inclusión en $E(M_1)$, tal que $i_{E(M_1)} = \gamma \alpha$

Definamos el siguiente morfismo $\phi : M \rightarrow E(M_1) \oplus E(M_2)$, de tal forma que, si $x \in M$, $\phi(x) = (\gamma(x), \beta(x))$, como γ y β son morfismos, el morfismo ϕ está bien definido. Sea $x \in \ker \phi$, entonces $\gamma(x) = 0$ y $\beta(x) = 0$, así $x \in \ker \beta = \text{Im} \alpha$, por lo que existe $x' \in M_1$ tal que, $\alpha(x') = x$, entonces,

$$x' = i_{E(M_1)}(x') = \gamma(\alpha(x')) = \gamma(x) = 0,$$

se sigue que, $x = 0$, es decir, $\ker \phi = 0$, ϕ es monomorfismo y $E(M_1) \oplus E(M_2)$ es *f.i.*, por 3. de esta proposición. M es *f.i.*

■

2.2. Caracterizaciones de módulos neterianos y artinianos.

Proposición 2.3. *Un R -módulo M es artiniiano si y solo si todo módulo cociente de M es $f.i.$*

Demostración. Supongamos que M es artiniiano y sea M' un módulo cociente de M , por la Proposición 1.11, M' es artiniiano, entonces todo submódulo de M' contiene un submódulo simple, ya que si N es un submódulo no cero de M' , entonces la familia de todos los submódulos no cero de N , tiene mínimo, es decir, tiene un módulo simple, por lo que, $\text{zoc}(M') \cap N \neq 0$, así $\text{zoc}(M')$ es esencial en M' , además es artiniiano y por la Proposición 1.17, $\text{zoc}(M')$ es neteriano, se sigue que por la proposición anterior es $f.g.$, por lo tanto por el Lema 2.1, M' es $f.i.$

Por otro lado, supongamos que todo módulo cociente de M es $f.i.$ y sea

$$\cdots \subseteq N_3 \subseteq N_2 \subseteq N_1,$$

una cadena descendente de submódulos de M . Sea $N = \bigcap_{i=1}^{\infty} N_i$, entonces N es submódulo de M . Supongamos que la cadena no se estaciona y veamos la siguiente familia de submódulo de M/N , $\{N_1/N, N_2/N, N_3/N, \dots\}$, como la cadena no se estaciona, está es una familia de submódulos no cero de M/N (Si la cadena se estaciona en N_k , la familia incluiría al cero, ya que $N_k/N = N_k/N_k = 0$). Es fácil ver que, también forma una cadena decendente y que es una familia inversa, pues la intersección de un número finito de elementos de la familia es igual al elemento mínimo entre ellos. Pero

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} (N_i/N) = (\bigcap_{i=1}^{\infty} N_i)/N = N/N = 0,$$

por lo que, no puede ser acotada por un submódulo no cero, lo cual es una contradicción, ya que M/N es $f.i.$ y por la Proposición 2.1, la familia debería estar acotada por un submódulo no cero. Por lo tanto, la cadena se estaciona, es decir M es artiniiano. ■

Definición 2.3. *Sea J el conjunto de todos los elementos $r \in R$ tales que $rS = 0$ para todo R -módulo simple S , es decir, $J = \bigcap_{S \text{ simple}} 0 : S$, de este modo J es un ideal bilateral de R al que llamaremos radical de Jacobson.*

Lema 2.2. *J es el radical de Jacobson de R si y solo si J es la intersección de todos los ideales izquierdos máximos de R .*

Demostración. Sean $r \in J$ y M un ideal izquierdo máximo de R , entonces R/M es un R -módulo simple, por lo que $r(R/M) = 0$, se sigue que $r \in M$.

Por otro lado, si r es un elemento de la intersección de todos los ideales izquierdos máximos de R y consideramos a $0 \neq s \in S$ un elemento de un R -módulo simple arbitrario, por la Proposición 1.6 $S = Rs \cong R/(0 : s)$, de este modo $(0 : s)$ es un ideal izquierdo máximo y $r \in (0 : s)$, por lo que $rs = 0$, se sigue que $rS = 0$ y $r \in J$. ■

Proposición 2.4. *Sean R un anillo artiniiano y J el radical de Jacobson de R , entonces J es la intersección de un número finito de ideales izquierdos máximos de R .*

Demostración. Por la Proposición 2.3 el R -módulo R/J es $f.i.$ y consideremos a Γ la familia de todas las intersecciones finitas de submódulos de R/J de la forma M/J , donde M es un ideal izquierdo máximo de R , como la intersección finita de elementos de Γ sigue siendo una intersección finita de submódulos de la forma M/J Γ es una familia inversa de R/J -submódulos, además no está acotada por un R/J -submódulo no cero, ya que

$$\bigcap_{M \text{ máximo}} (M/J) = \left(\bigcap_{M \text{ máximo}} M \right) / J = J/J = 0$$

Módulos finitamente incrustados y sus propiedades.
2.2 Caracterizaciones de módulos neterianos y artinianos.

y debido a que R/J es *f.i.* por la Proposición 2.1, Γ tiene un elemento que es igual a cero, es decir, existen $M_1, M_2, \dots, M_n$ ideales izquierdos máximos tales que

$$(M_1/J) \cap (M_2/J) \cap \dots \cap (M_n/J) = 0,$$

por lo tanto $J = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$. ■

Proposición 2.5. *Sean R un anillo artinario y J el radical de Jacobson de R , entonces R/J es un anillo semisimple.*

Demostración. Por la proposición anterior existen ideales izquierdos máximos $M_1, M_2, \dots, M_n$ de R tales que $J = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$, definimos

$$\begin{aligned} \alpha : R/J &\rightarrow (R/M_1) \oplus \dots \oplus (R/M_n) \\ \alpha(r + J) &= (r + M_1, \dots, r + M_n), \end{aligned}$$

con $r \in R$, veamos que es morfismo de R -módulos, sean $r, x, y \in R$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha((rx + y) + J) &= ((rx + y) + M_1, \dots, (rx + y) + M_n) \\ &= (rx + M_1, \dots, rx + M_n) + (y + M_1, \dots, y + M_n) \\ &= r(x + M_1, \dots, x + M_n) + (y + M_1, \dots, y + M_n) = r\alpha(x + J) + \alpha(y + J). \end{aligned}$$

Sea $r + J \in \ker \alpha$, entonces $r \in \bigcap_{i=1}^n M_i = J$, pero $r + J \in R/J$, entonces $r + J = 0_{R/J}$, entonces es monomorfismo y se tiene que $R/J \cong \alpha(R/J)$. Como M_i es ideal izquierdo máximo, donde $i \in \{1, \dots, n\}$, cada R/M_i es simple, de este modo $(R/M_1) \oplus \dots \oplus (R/M_n)$ es semisimple, por lo que $\alpha(R/J)$ es semisimple ya que es submódulo de un semisimple y por la Proposición 1.18, R/J es semisimple como R -módulo y luego como R/J -módulo. ■

Si n es un entero positivo, entonces J^n denota el conjunto de todas las sumas finitas de elementos de R de la forma $j_1 j_2 \dots j_n$ donde cada $j_i \in J$. También $J^0 = R$.

Proposición 2.6. *Sean R un anillo artinario y J el radical de Jacobson de R , entonces existe un entero positivo k tal que $J^k = 0$.*

Demostración. Dado que R es artinario, la familia de todas las potencias positivas de J tiene un elemento mínimo al cual denotaremos como $I = J^k$, como J es un ideal bilateral J^k también lo es y así $I^2 = J^{2k} = J^k = I$. Suponemos que $I \neq 0$ y $0 : I$ es bilateral ya que I es un submódulo de R y como R es artinario $R/(0 : I)$ también lo es, así que tiene existe al menos un $R/(0 : I)$ -submódulo simple S . Se sigue que $x + 0 : I \in S$ genera a S , con $x \in R$, entonces $x + 0 : I$ genera un R -módulo simple, por definición del radical de Jacobson $J(x + 0 : I) = 0$, así $Ix \subseteq Jx \subseteq 0 : I$, luego $Ix = I^2x = 0$ por lo que $x \in I : 0$ lo cual es una contradicción ya que $x + 0 : I$ genera a S , de esta maenra $J^k = I = 0$. ■

Teorema 2.1. *Sean R un anillo artinario y M un R -módulo, entonces M es artinario si y solo si M es neteriano.*

Demostración. Sea J el radical de Jacobson de R , por la proposición anterior, existe un entero positivo k tal que $J^k = 0$, consideremos la siguiente cadena de R -submódulos de M ,

$$0 = J^k M \subseteq J^{k-1} M \subseteq \dots \subseteq JM \subseteq J^0 M = M.$$

Cada módulo cociente de la forma $J^{i-1}M/J^iM$ es anulado por J , con $i \in \{1, \dots, k\}$, entonces tienen estructura de R/J -módulos. Por la proposición 2.5, R/J es un anillo semisimple, luego por el Corolario 1.6 cada $J^{i-1}M/J^iM$ es semisimple como R/J -módulos.

Módulos finitamente incrustados y sus propiedades.
2.2 Caracterizaciones de módulos neterianos y artinianos.

Supongamos que M es artiniano (resp. neteriano), entonces $J^{i-1}M$ es artiniano (resp. neteriano), donde $i \in \{1, \dots, k\}$, así $J^{i-1}M/J^iM$ es artiniano (resp. neteriano) como R -módulos y en consecuencia como R/J -módulos, por la Proposición 1.17, $J^{i-1}M/J^iM$ es neteriano (resp. artiniano) como R/J -módulo pero también como R -módulo. Nos fijamos en la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow J^{k-1}M \rightarrow J^{k-2}M \rightarrow J^{k-2}M/J^{k-1}M \rightarrow 0$$

En particular $J^{k-1}M/J^kM = J^{k-1}M/0 = J^{k-1}M$ es neteriano (resp. artiniano) y como $J^{k-2}M/J^{k-1}M$ es neteriano (resp. artiniano), se sigue $J^{k-2}M$ es neteriano (resp. artiniano), siguiendo este mismo proceso llegamos a que $J^0M = M$ es neteriano (resp. artiniano). ■

Proposición 2.7. *Sea M un R -módulo de un R anillo conmutativo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. M es f.g. y artiniano.
2. M es f.i. y neteriano.
3. M es de longitud finita.

Demostración. Supongamos que M es de longitud finita, entonces por la Proposición 1.13, M es neteriano y artiniano, por las proposiciones 1.14 y 2.3, M es f.g. y M es f.i., de este modo, solo nos queda probar que 1. implica 3. y que 2. implica 3.

Supongamos que M es f.g. y artiniano, entonces, $M = Rx_1 + \dots + Rx_n$, con $x_i \in M$, como R es conmutativo, $Rx_i \cong R/(0 : x_i)$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, también, cada Rx_i es artiniano, ya que son submódulos de M y M es artiniano, se sigue que cada $R/(0 : x_i)$ es artiniano y por el Teorema 2.1 es neteriano, por la Proposición 1.12, $R/(0 : x_1) \oplus \dots \oplus R/(0 : x_n)$ es neteriano y existe un epimorfismo α tal que,

$$R/(0 : x_1) \oplus \dots \oplus R/(0 : x_n) \cong Rx_1 \oplus \dots \oplus Rx_n \xrightarrow{\alpha} Rx_1 + \dots + Rx_n = M,$$

por lo que M es neteriano y por lo tanto de longitud finita.

Ahora supongamos que M es f.i. y neteriano, entonces M es f.g., $M = Rx_1 + \dots + Rx_n$, y nuevamente $Rx_i \cong R/(0 : x_i)$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, pero ahora $R/(0 : x_i)$ es neteriano, y por 3. de la Proposición 2.2 Rx_i es f.i., se sigue que $R/(0 : x_i)$ es f.i.. Como R es conmutativo también $R/(0 : x_i)$ lo es, por [2, Proposition 3] en un anillo neteriano conmutativo todo f.i. es artiniano, entonces cada $R/(0 : x_i)$ es artiniano y nuevamente siguiendo lo mismo pasos que con los neterianos, llegamos a que M es artiniano. ■

Lema 2.3. *Sean M un R -módulo y Γ la familia de R -submódulos de M , definimos*

$$\Omega = \{\Gamma' \subseteq \Gamma \mid \sum_{N \in \Gamma'} N \text{ es suma directa}\}.$$

Entonces Ω tiene elemento máximo.

Demostración. $\{\emptyset\} \in \Omega$, ya que, $\emptyset \subseteq \Gamma$ y $\sum_{N \in \emptyset} N = 0$ es directa, se sigue que $\Omega \neq \emptyset$. Sea $\Omega' \subseteq \Omega$, totalmente ordenado con la inclusión. Definimos $\alpha = \bigcup_{\Gamma' \in \Omega'} \Gamma'$, entonces, $\alpha \in \Gamma$. Supongamos que $\alpha \notin \Omega$, entonces, $\sum_{N \in \alpha} N$ no es directa, entonces, existe I un conjunto de índices finito, tal que $\sum_{i \in I} N_i$ no es directa, con $N_i \in \alpha$, donde $i \in I$, pero

$$N_i \in \alpha = \bigcup_{\Gamma' \in \Omega'} \Gamma',$$

Módulos finitamente incrustados y sus propiedades.

2.2 Caracterizaciones de módulos neterianos y artinianos.

así $N_i \in \Gamma'_i$, para algún $\Gamma'_i \in \alpha$. Como Ω' es totalmente ordenado, existe Γ'_k tal que, $N_i \in \Gamma'_k$ para todo $i \in I$, de este modo, $\sum_{i \in I} N_i$ es directa, lo cual es una contradicción, por lo que $\alpha \in \Omega$ y es cota superior de Ω' , por el Lema de Zorn, existe Γ'_0 elemento máximo de Ω . ■

Teorema 2.2. *Un anillo R es artinian si y solo si todo R -módulo inyectivo es una suma directa de cápsulas inyectivas de R -módulos simples.*

Demostración. Supongamos que R es un anillo artinian, por el Teorema 2.1, R es neteriano. Sea E un R -módulo inyectivo, por el Lema 2.3 definiendo a Γ como la familia de todos los R -submódulos inyectivos inescindibles de E , tenemos al elemento máximo de Ω , sea Γ'_0 , tal que la suma de sus elementos es directa, es decir $E_0 = \sum_{N \in \Gamma'_0} N$ es directa, con N R -submódulos inyectivos inescindibles, además por 1. del Lema 1.9, E_0 es inyectivo. Por lo que, $E = E_0 + L$ suma directa, con L un R -submódulo de E .

Supongamos que $L \neq 0$, por 2. del Lema 1.9, L contiene un R -submódulo K que es uniforme, entonces por 1. del Corolario 1.2 $E(K)$ es inescindible, si $L \subseteq E(K)$, luego $L \subseteq E_0$ lo que es una contradicción ya que son sumandos directos. Ahora si $E(K) \subseteq L$, existe un R -submódulo L_1 de L , tal que $L = E(K) + L_1$ y es suma directa, por lo que $E_0 + E(K)$ es una suma directa de submódulos inyectivos inescindibles, lo cual es una contradicción, ya que E_0 es máximo. Se sigue que, $L = 0$ y

$$E = \sum_{N \in \Gamma'_0} N.$$

Sea $x \in N$, entonces Rx es un R -submódulo *f.g.* de N , como R es artinian, por la Proposición 1.15, Rx es artinian por lo que contiene un R -submódulo simple S_N y por la Proposición 1.7, $E(S_N) = N \in \Gamma'_0$, con S_N el submódulo simple contenido en cada N .

$$E = \sum_{N \in \Gamma'_0} E(S_N).$$

Por otro lado, supongamos que todo R -módulo inyectivo es una suma directa de cápsulas inyectivas de R -módulos simples, por la Proposición 2.3, si todo módulo cociente de R es *f.i.*, entonces R es artinian. Sea U un ideal de R , se sigue que

$$E(R/U) = \sum_{i \in I} E(S_i),$$

suma directa y S_i R -módulos simples. Además R/U es generado por $1_R + U \in \sum_{i \in I} E(S_i)$, entonces existe $J \subseteq I$ finito, tal que $1_R + U \in \sum_{i \in J} E(S_i)$, por lo que,

$$R/U \subseteq \sum_{i \in J} E(S_i) \subseteq \sum_{i \in I} E(S_i) = E(R/U),$$

R/U es esencial en $E(R/U)$, luego es esencial en $\sum_{i \in J} E(S_i)$ y por 1. del Lema 1.9 $\sum_{i \in J} E(S_i)$ es inyectiva, entonces es cápsula inyectiva. Por lo que $E(R/U) = \sum_{i \in J} E(S_i) \cong \oplus_{i \in J} E(S_i)$. Por lo tanto, todo módulo cociente de R es *f.i.* ■

Capítulo 3

Localización con respecto a un ideal primo.

En este capítulo asumiremos que el anillo R es conmutativo, P un ideal primo de R y $R - P$ son todos los elementos que están en R pero no en P , notar que el 0_R está en P . También, los morfismos de anillos serán unitarios, es decir, el morfismo aplicado al elemento identidad de un anillo sera igual al elemento identidad del otro anillo.

3.1. Localización

Definición 3.1. Una localización de R con respecto a P es un morfismo de anillos $\phi : R \rightarrow S$ que satisface las siguientes afirmaciones:

1. $\ker \phi = \{r \in R \mid \exists t \in R - P, tr = 0\}$;
2. $\phi(t)$ es invertible de S , cuando $t \in R - P$;
3. Todo elemento de S puede ser expresado de la forma $\phi(r)\phi(t)^{-1}$, donde $r \in R$ y $t \in R - P$.

El anillo S no necesariamente debe ser conmutativo, debido al siguiente lema.

Lema 3.1. Sea $\phi : R \rightarrow U$ un morfismo de anillos, U no necesariamente debe ser conmutativo, y suponemos que $\phi(t)$ es invertible en U cuando $t \in R - P$. Entonces los elementos de U de la forma $\phi(r)\phi(t)^{-1}$, donde $r \in R$ y $t \in R - P$, forman un subanillo conmutativo.

Demostración. Sean $r, r_1, r_2 \in R$ y $t, t_1, t_2 \in R - P$. Entonces

$$\begin{aligned}\phi(r_1)\phi(r_2) &= \phi(r_1r_2) = \phi(r_2r_1) = \phi(r_2)\phi(r_1), \\ \phi(t_1)^{-1}\phi(t_2)^{-1} &= (\phi(t_2)\phi(t_1))^{-1} = (\phi(t_1)\phi(t_2))^{-1} = \phi(t_2)^{-1}\phi(t_1)^{-1}, \\ \phi(r)\phi(t)^{-1} &= \phi(t)^{-1}\phi(t)\phi(r)\phi(t)^{-1} = \phi(t)^{-1}\phi(r)\phi(t)\phi(t)^{-1} = \phi(t)^{-1}\phi(r).\end{aligned}$$

Con esto se tiene que los elementos de la forma $\phi(r)\phi(t)^{-1}$, donde $r \in R$ y $t \in R - P$ conmutan, con las operaciones clásicas de los anillos de fracciones, es decir,

$$\begin{aligned}\phi(r_1)\phi(t_1)^{-1} + \phi(r_2)\phi(t_2)^{-1} &= \phi(r_1t_2 + r_2t_1)\phi(t_1t_2)^{-1}, \\ -\phi(r)\phi(t)^{-1} &= \phi(-r)\phi(t)^{-1}, \\ (\phi(r_1)\phi(t_1)^{-1})(\phi(r_2)\phi(t_2)^{-1}) &= \phi(r_1r_2)\phi(t_1t_2)^{-1}.\end{aligned}$$

también con $1_U = \phi(1)\phi(1)^{-1}$ y $0 = \phi(0)\phi(1)$, se tiene que los elementos de la forma $\phi(r)\phi(t)^{-1}$ forman un subanillo conmutativo de U . ■

Observaciones. Si $r \in R$ y $t, t' \in R - P$, entonces $\phi(t)$ es invertible, por lo que $\phi(t)\phi(t)^{-1} = 1_U = \phi(1)\phi(1)^{-1}$ por lo que,

$$\phi(r)\phi(t')^{-1} = \phi(r)\phi(t')^{-1}(1_U) = \phi(r)\phi(t')^{-1}(\phi(t)\phi(t)^{-1}) = \phi(rt)\phi(t't)^{-1},$$

también, $\phi(0)\phi(1)^{-1} = \phi(0)\phi(t)^{-1}$.

Proposición 3.1. *Las localizaciones son únicas salvo isomorfismos.*

Demostración. Sean $\phi : R \rightarrow S$ y $\phi' : R \rightarrow S'$ localizaciones de R con respecto a P . Entonces podemos definir un morfismo de anillos $\psi : S \rightarrow S'$ tal que,

$$\psi(\phi(r)\phi(t)^{-1}) = \phi'(r)\phi'(t)^{-1},$$

donde $r \in R$ y $t \in R - P$. Comprobemos que está bien definido. Sean $r, r' \in R$ y $t, t' \in R - P$, tales que $\phi(r)\phi(t)^{-1} = \phi(r')\phi(t')^{-1}$, es decir, $\phi(rt' - r't)\phi(tt')^{-1} = 0$, se sigue que $\phi(rt' - r't) = 0$, así, $rt' - r't \in \ker \phi$, por lo que existe $x \in R - P$ tal que $(rt' - r't)x = 0$, entonces $rt'x = r'tx$. De este modo,

$$\begin{aligned} \phi'(r)\phi'(t)^{-1} &= \psi(\phi(r)\phi(t)^{-1}) = \psi(\phi(rt'x)\phi(tt'x)^{-1}) = \psi(\phi(r'tx)\phi(tt'x)^{-1}) \\ &= \psi(\phi(r')\phi(t')^{-1}) = \phi'(r')\phi'(t')^{-1} \end{aligned}$$

Ahora veamos que es morfismo de anillos. Sean $r_1, r_2 \in R$ y $t_1, t_2 \in R - P$, se sigue que,

$$\begin{aligned} \psi(\phi(r_1)\phi(t_1)^{-1} + \phi(r_2)\phi(t_2)^{-1}) &= \psi(\phi(r_1t_2 + r_2t_1)\phi(t_1t_2)^{-1}) = \phi'(r_1t_2 + r_2t_1)\phi'(t_1t_2)^{-1} \\ &= \phi'(r_1)\phi'(t_1)^{-1} + \phi'(r_2)\phi'(t_2)^{-1} = \psi(\phi(r_1)\phi(t_1)^{-1}) + \psi(\phi(r_2)\phi(t_2)^{-1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi((\phi(r_1)\phi(t_1)^{-1})(\phi(r_2)\phi(t_2)^{-1})) &= \psi(\phi(r_1r_2)\phi(t_1t_2)^{-1}) = \phi'(r_1r_2)\phi'(t_1t_2)^{-1} \\ &= (\phi'(r_1)\phi'(t_1)^{-1})(\phi'(r_2)\phi'(t_2)^{-1}) = \psi(\phi(r_1)\phi(t_1)^{-1})\psi(\phi(r_2)\phi(t_2)^{-1}). \end{aligned}$$

Por lo que, ψ es morfismo de anillos, ahora veamos que es isomorfismos, sean $r \in R$ y $t \in R - P$, empecemos por comprobar que $\ker \psi = \{0_{S'}\}$, es claro que $0_{S'}$ no es inverso, entonces

$$\begin{aligned} \ker \psi &= \{\phi(r)\phi(t)^{-1} \in S \mid \psi(\phi(r)\phi(t)^{-1}) = 0_{S'}\} \\ &= \{\phi(r)\phi(t)^{-1} \in S \mid \phi'(r)\phi'(t)^{-1} = 0_{S'}\} \\ &= \{\phi(r)\phi(t)^{-1} \in S \mid \phi'(r) = 0_{S'}\} \\ &= \{\phi(r)\phi(t)^{-1} \in S \mid r \in \ker \phi'\}, \end{aligned}$$

es decir, existe $t_0 \in R - P$ tal que $t_0r = 0$, de esto modo tenemos que,

$$\phi(r)\phi(t)^{-1} = \phi(t_0)\phi(t_0)^{-1}\phi(r)\phi(t)^{-1} = \phi(t_0r)\phi(t_0t)^{-1} = \phi(0)\phi(t_0t)^{-1} = \phi(0)\phi(1)^{-1} = 0_{S'},$$

así, $\ker \psi = \{0_{S'}\}$. Por otro lado, para todo $\phi'(r)\phi'(t) \in S'$, existe $\phi(r)\phi(t) \in S$ tal que $\psi(\phi(r)\phi(t)^{-1}) = \phi'(r)\phi'(t)$. Por lo tanto, ψ es isomorfo y hace conmutar al siguiente diagrama, donde $\phi' = \psi \circ \phi$.

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ \phi \swarrow & & \searrow \phi' \\ S & \xrightarrow{\psi} & S' \end{array}$$

■

Ahora que hemos visto que las localizaciones son únicas salvo isomorfismos, construyamos una localización en particular.

Sean $E = E(R/P)$ y $H = \text{End}_R(E)$ el anillo de endomorfismos de E . Definiremos a $\psi : R \rightarrow H$ de la siguiente manera,

$$(\psi(r))(e) = re, \text{ donde } r \in R \text{ y } e \in E. \quad (3.1)$$

Veamos que es un morfismo de anillos.

Sean $r, r' \in R$ y $e \in E$, entonces

$$(\psi(r + r'))(e) = (r + r')e = re + r'e = \psi(r)(e) + \psi(r')(e).$$

$$(\psi(rr'))(e) = rr'e = r(\psi(r'))(e) = (\psi(r))(\psi(r')(e)) = (\psi(r) \circ \psi(r'))(e).$$

También es fácil ver que,

$$\ker \psi = \text{Ann}_R E$$

Lema 3.2. *Con el ψ dado en (3.1). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $t \notin P$
2. $\psi(t)$ es invertible en H .

Demostración. Como P es ideal primo, sabemos por el Lema 1.6 que E es inescindible, supongamos $t \in P$ y sea $x \in R - P$, entonces $(\psi(t))(x) = tx = 0$, ya que $tx \in P$, así $0 \neq R - P \subseteq \ker \psi$ y por la contraposición del Lema 1.7, $\psi(t)$ no es invertible. Entonces la contraposición de esto es, si $\psi(t)$ es invertible, entonces $t \notin P$.

Ahora supongamos que $t \notin P$ y nuevamente por el Lema 1.7 solo queda demostrar que $\ker \psi(t) = 0$, sea $x \in \ker \psi(t) \cap (R/P)$ entonces $x = r + P$, donde $r \in R$, y $tx = (\psi(t))(x) = 0$, por lo que $tr \in P$, como $t \notin P$, queda que $r \in P$ y $x = 0$ entonces $\ker \psi(t) \cap (R/P) = 0$, además como R/P es esencial en E , concluimos que $\ker \psi(t) = 0$. ■

Ahora denotemos a S como el conjunto de todos los elementos de H de la forma $\psi(r)\psi(t)^{-1}$, donde $r \in R$ y $t \in R - P$ y por el Lema 3.1, S es un subanillo conmutativo de H , como $\psi(R) \subseteq S$ consideremos el morfismo de anillos $\phi : R \rightarrow S$ como $\phi(r) = \psi(r)$.

Proposición 3.2. *Sea ϕ como el descrito anteriormente. entonces ϕ es una localización de R con respecto a P .*

Demostración. Sea $t \in R - P$, entonces $\phi(t)^{-1} = \phi(1)\phi(t)^{-1} \in S$, así $\phi(t)$ es un elemento invertible de S , entonces por como son los elementos de S y por el Lema 3.2, queda demostrar que $\ker \phi = \{r \in R \mid \exists t \in R - P, tr = 0\}$. Sea $r \in \ker \phi = \text{Ann}_R E$, entonces por el Lema 1.5 hay un elemento $t \in R - P$ tal que $tr = 0$.

Por otro lado, si $r \in R$ es tal que existe $t \in R - P$, $tr = 0$, entonces

$$\phi(r) = \phi(r)\phi(t)\phi(t)^{-1} = \phi(rt)\phi(t)^{-1} = \phi(0)\phi(t)^{-1} = 0.$$

Por lo que, $r \in \ker \phi$. ■

Con esto además de construir nuestra localización hemos demostrado su existencia y con anterioridad su unicidad(salvo isomorfismos) de este subanillo de endomorfismo, por lo que, diremos que S es una localización de R con respecto a P y las localizaciones de R con respecto a P las denotaremos como R_P y cuando nos queramos referir al morfismo de anillos lo llamaremos el morfismo canónico de R a R_P .

Proposición 3.3. *Los elementos no invertibles de R_P forman un ideal y este ideal es el único ideal máximo de R_P .*

Demostración. Podemos tomar el R_P construido anteriormente. Entonces, sea $\phi(r)\phi(t)^{-1} \in R_P$, con $r \in R$ y $t \in R - P$. Primero probemos que $\phi(r)\phi(t)^{-1}$ es invertible si y solo si $\phi(r)$ es invertible.

Sea $\phi(r)\phi(t)^{-1}$ invertible entonces existe un elemento $\phi(r_1)\phi(t_1)^{-1} \in R_P$ con $r_1 \in R$ y $t_1 \in R - P$ tal que $(\phi(r)\phi(t)^{-1})(\phi(r_1)\phi(t_1)^{-1}) = 1$, sabemos que el inverso de $\phi(t)^{-1}$ es $\phi(t)$, entonces si sustituimos,

$$(\phi(r)\phi(t)^{-1})(\phi(r_1)\phi(t_1)^{-1}) = (\phi(r)\phi(t)^{-1})(\phi(t)\phi(t_1)^{-1}) = \phi(r)\phi(t_1)^{-1} = 1$$

por lo que $\phi(r)$ es invertible. Ahora, supongamos que $\phi(r)$ es invertible, entonces el inverso de $\phi(r)\phi(t)^{-1}$ es $\phi(t)\phi(r)^{-1}$. Por el Lema 3.2, $\phi(r)$ es invertible si y solo si $r \notin P$. Por lo tanto, por contraposición, $\phi(r)\phi(t)^{-1} \in R_P$, con $r \in R$ y $t \in R - P$, no es invertible si y solo si $r \in P$. Veamos que forma un ideal, para ello recordemos nuestras operaciones en R_P pero ahora con $r \in P$.

Sean $x \in R$, $r_1, r_2 \in P$ y $t_1, t_2 \in R - P$. Entonces

$$\begin{aligned} \phi(r_1)\phi(t_1)^{-1} + \phi(r_2)\phi(t_2)^{-1} &= \phi(r_1t_2 + r_2t_1)\phi(t_1t_2)^{-1}, \\ -\phi(r_1)\phi(t_1)^{-1} &= \phi(-r_1)\phi(t_1)^{-1}, \\ (\phi(r_1)\phi(t_1)^{-1})(\phi(x)\phi(t_2)^{-1}) &= \phi(r_1x)\phi(t_1t_2)^{-1}. \end{aligned}$$

Observemos que como P es ideal primo, entonces $r_1t_2 + r_2t_1, -r, rx \in P$, de este modo, los elementos no invertibles de R_P forman un ideal y como R_P es conmutativo, es un ideal bilateral. Supongamos que los elementos no invertibles de R_P no forman al único ideal máximo R_P , eso quiere decir que existe algún ideal propio I de R_P , tal que $x \in I$ y $x \notin \{\phi(r)\phi(t)^{-1} \in R_P | r \in P\}$, pero eso quiere decir que x es invertible, entonces $I = R_P$ ya que $\phi(1)\phi(1)^{-1} \in I$ lo que es una contradicción ya que I es propio. ■

Al conjunto de todos los elementos no invertibles de R_P lo denotaremos como PR_P , que explícitamente sería el conjunto $\phi(P)R_P$. Cuando todos los elementos que no son invertibles, en un anillo, forman un ideal, el anillo es llamado *quasi-local*.

Ahora a los R_P -módulos les daremos estructura de R -módulo.

Proposición 3.4. *Sean R_P una localización de R con respecto a P , $\phi : R \rightarrow R_P$ el morfismo canónico y A, B R_P -módulos. Entonces A tiene estructura de R -módulo y $\text{Hom}_R(A, B) = \text{Hom}_{R_P}(A, B)$.*

Demostración. Para darle estructura de R -módulo, proponemos

$$ra = \phi(r)a, \text{ con } r \in R \text{ y } a \in A$$

Recordamos que, si $r \in R$ y $t \in R - P$, $\phi(r) = \phi(r)\phi(1)^{-1} \in R_P$ y $\phi(t)^{-1} = \phi(1)\phi(t)^{-1} \in R_P$. Entonces, sean $r, r_1, r_2 \in R$ y $a, a_1, a_2 \in A$

$$\begin{aligned} (r_1r_2)a &= \phi(r_1r_2)a = (\phi(r_1)\phi(r_2))a = \phi(r_1)(\phi(r_2)a) = r_1(\phi(r_2)a) = r_1(r_2a), \\ (r_1 + r_2)a &= \phi(r_1 + r_2)a = (\phi(r_1) + \phi(r_2))a = \phi(r_1)a + \phi(r_2)a = r_1a + r_2a, \\ r(a_1 + a_2) &= \phi(r)(a_1 + a_2) = \phi(r)a_1 + \phi(r)a_2 = ra_1 + ra_2, \\ 1a &= \phi(1)a = \phi(1)\phi(1)^{-1}a = a. \end{aligned}$$

Por lo que A también es un R -módulo y de este modo, todo R_P -submódulo de A es R -submódulo. Ahora si $\alpha \in \text{Hom}_{R_P}(A, B)$, entonces sean $r \in R$ y $a_1, a_2 \in A$, entonces

$$\alpha(ra_1 + r_2a) = \alpha(\phi(r)a_1 + a_2) = \phi(r)\alpha(a_1) + \alpha(a_2) = r\alpha(a_1) + \alpha(a_2),$$

se sigue que $\alpha \in \text{Hom}_R(A, B)$. Por otro lado, si $\alpha \in \text{Hom}_R(A, B)$, entonces sean $r \in R$, $t \in R - P$ y $a, a_1, a_2 \in A$, entonces

$$\begin{aligned}\alpha(a) &= \alpha(\phi(t)\phi(t)^{-1}a) = \alpha(t\phi(t)^{-1}a) = t\alpha(\phi(t)^{-1}a) = \phi(t)\alpha(\phi(t)^{-1}a), \\ \phi(t)^{-1}\alpha(a) &= \alpha(\phi(t)^{-1}a).\end{aligned}$$

Recordemos que A también es un R -módulo, de este modo,

$$\begin{aligned}\alpha(a_1 + a_2) &= \alpha(a_1) + \alpha(a_2), \\ \alpha(\phi(r)\phi(t)^{-1}a_1) &= \alpha(r\phi(t)^{-1}a_1) = r\alpha(\phi(t)^{-1}a_1) = \phi(r)\phi(t)^{-1}\alpha(a_1),\end{aligned}$$

tenemos que, $\alpha \in \text{Hom}_{R_P}(A, B)$. Por lo tanto, $\text{Hom}_R(A, B) = \text{Hom}_{R_P}(A, B)$. ■

Corolario 3.1. *Si R es neteriano(artiniano), entonces cualquier R_P es neteriano(artiniano).*

Demostración. Sea un cadena de ideales de R_P ascendente(descendente), por la proposición anterior, también es una cadena ascendente(descendente) de R -módulos y como R es neteriano(artiniano), las cadenas se estacionan como R -módulos pero también como R_P -módulos. ■

Proposición 3.5. *Sean $\phi : R \rightarrow R_P$ una localización de R con respecto a P y A un R_P -módulo, si A es inyectivo como un R -módulo, entonces es inyectivo como R_P -módulo.*

Desmotración. Sea B un R_P -módulo que extiende a A , entonces B también es un R -módulo. como A es inyectivo como R -módulo es un sumando directo de B , $B = A + C$ suma directa, siendo C un R -submódulo de B , $C \subseteq B$. Como A, B son R_P -módulos, solo debemos probar que C es un R_P -submódulo de B , para que A sea inyectivo como R_P -módulo. Sean $c \in C$ y $t \in R - P$, entonces $\phi(t)^{-1}c \in B$, luego existen $a \in A$, $c_1 \in C$ tales que $\phi(t)^{-1}c = a + c_1$, así $c = \phi(t)(a + c_1)$, como $a + c_1 \in B$, tenemos

$$ta + tc = t(a + c_1) = \phi(t)(a + c_1) = \phi(t)a + \phi(t)c_1 = ta + \phi(t)c_1$$

De este modo, $ta + tc = ta + \phi(t)c_1$ se sigue, $tc = \phi(t)c$.

Ya que $\phi(t)c_1 = tc_1 \in C$, entonces $c = ta + \phi(t)c_1$, se sigue que $ta = c - \phi(t)c_1 \in C$, también como $A \cap C = 0$, $ta = 0$, por lo que $c = \phi(t)c_1$ y $\phi(t)^{-1}c = c_1 \in C$. Si $r \in R$

$$\phi(r)\phi(t)^{-1}c = r\phi(t)^{-1}c = rc_1 \in C$$

Por lo tanto, C es un R_P -submódulo de B . ■

Nota. La implicación inversa de la proposición anterior también es cierta pero a fines de esta tesis, no es necesaria.

Proposición 3.6. *Sean $E = E(R/P)$ un R -módulo y R_P una localización de R con respecto a P , entonces E es un R_P -módulo.*

Demostración. Por la Proposición 3.1, sabemos que R_P es único salvo isomorfismos, entonces sea R_P el subanillo de el anillo de endomorfismos de E , visto en la Proposición 3.2. Para darle estructura de R_P -módulo a E , proponemos,

$$r_P e = r_P(e), \text{ con } r_P \in R_P \text{ y } e \in E$$

como estamos en un subanillo de endomorfismo de E , $r_p(e) \in E$. Sean $r, r_1, r_2 \in R_P$ y $e, e_1, e_2 \in E$, entonces,

$$\begin{aligned}(r_1 r_2)e &= (r_1 \circ r_2)(e) = (r_1)(r_2(e)) = (r_1)(r_2 e) = r_1(r_2 e), \\ (r_1 + r_2)e &= (r_1 + r_2)(e) = (r_1)(e) + (r_2)(e) = r_1 e + r_2 e, \\ r(e_1 + e_2) &= (r)(e_1 + e_2) = (r)(e_1) + (r)(e_2) = r e_1 + r e_2, \\ \phi(1)\phi(1)^{-1}e &= Id_E e = Id_E(e) = e.\end{aligned}$$

Por lo tanto, E es un R_P -módulo. ■

Corolario 3.2. *Sea $E = E(R/P)$. N es un R -submódulo de E si y solo si N es un R_P -submódulo de E .*

Demostración. De la propisición anterior, es claro que todo R -submódulo de E es R_P -submódulo y por la Proposición 3.4 todo R_P -módulo es R -módulo, por lo tanto, N es R -submódulo de E . ■

Corolario 3.3. *Sea $E = E(R/P)$, E es inescindible en R si y sólo si E es inescindible en R_P .*

Demostración. Se sigue del Corolario 3.2. ■

Corolario 3.4. *Sea $E = E(R/P)$, E es neteriano(artiniano) en R si y sólo si E es neteriano(artiniano) en R_P .*

Demostración. Por el Corolario 3.2 se sigue que toda cadena ascendente(descendente) es cadena de R -módulos y a la vez de R_P -módulos, por lo que se estaciona en R si y solo si se estaciona en R_P . ■

Proposición 3.7. *Sean $E = E(R/P)$ un R -módulo, entonces E es isomorfo a la cápsula inyectiva de un R_P -módulo simple.*

Demostración. Por la Proposición 3.6, E es un R_P -módulo y ya que E es inyectivo como R -módulo, por la Proposición 3.5, es inyectivo como R_P -módulo. También recordemos que E , por el Lema 1.6, es inescindible como R -módulo y ya vimos que todo R_P -submódulo de E es R -submódulo, entonces E es inescindible como R_P -submódulo. De este modo, E es un R_P -módulo inyectivo inescindible y sea $0 \neq x \in R/P$, entonces x es anulado por todo elemento de P en R , sean $r \in R$, $t \in R - P$, si $\phi(r)\phi(t)^{-1} \in 0 :_{R_P} x$

$$0 = \phi(r)\phi(t)^{-1}x = \phi(t)^{-1}\phi(r)x = \phi(t)^{-1}rx,$$

se sigue que $rx = 0$, así $r \in P$ y $\phi(r)\phi(t)^{-1} \in PR_P$, ahora si $\phi(r)\phi(t)^{-1} \in PR_P$, entonces

$$\phi(r)\phi(t)^{-1}x = \phi(t)^{-1}\phi(r)x = \phi(t)^{-1}rx = \phi(t)^{-1}(0) = 0,$$

luego $\phi(r)\phi(t)^{-1} \in 0 :_{R_P} x$ y x es anulado por todo elemento no invertible de R_P , el conjunto PR_P . Por el Corolario 1.3 $E \cong E(R_P/(0 : x)) = E(R_P/PR_P)$, y como PR_P es máximo y único, si S es un R_P -módulo simple, $S \cong R_P/PR_P$. Se concluye, $E \cong E(R_P/PR_P) \cong E(S)$. ■

Lema 3.3. *Sean R un anillo conmutativo y P un ideal primo de R . Si $E = E(R/P)$ es neteriano (resp. artiniano), entonces R_P es artiniano (resp. neteriano)*

Demostración: Sean I, J ideales de R_P y denotemos al conjunto $I^* = \{e \in E \mid Ie = 0\}$. Veamos que I^* es un R_P -submódulo de E . Sean $i \in I$, $e, e_1, e_2 \in I^*$ y $r \in R_P$, entonces

$$\begin{aligned} i(e_1 + e_2) &= ie_1 + ie_2 = 0 + 0 = 0, \\ i(re) &= (ie)r = (0)r = 0, \end{aligned}$$

así $(e_1 + e_2) \in I^*$ y $re \in I^*$.

Ahora veamos que si $I \subseteq J$, entonces $J^* \subseteq I^*$. Sea $x \in J^*$, entonces $Ix \subseteq Jx = 0$, se sigue que $Ix = 0$, así $x \in I^*$. Se deduce que $I = J$, entonces $I^* = J^*$.

Por otro lado demostramos la otra implicación, supongamos que $I^* = J^*$ y que existe un $x \in J$ tal que $x \notin I$. Sabemos que $I :_{R_P} x = \{r_p \in R_P \mid r_p x \in I\}$ es un ideal de R_P , entonces $I : x \subseteq PR_P$, donde PR_P denota al único ideal máximo de R_P . Denotamos $\bar{x} = x + I$ y veamos que existe un morfismo $\psi : R_P \bar{x} \rightarrow R/P$ tal que $\psi(\bar{x}) \neq 0$. Proponemos, si $r_p \in R_P$, entonces $\psi(r_p \bar{x}) = r_p + P = r_p 1_R + P \in R/P$ ya que R/P es un R_P -submódulo de E , se sigue que $\psi(\bar{x}) = 1_R + P$. Veamos que es morfismo de módulos, sean $r_1, r_2 \in R_P$.

$$\begin{aligned} \psi(r_p r_1 \bar{x} + r_2 \bar{x}) &= \psi((r_p r_1 + r_2) \bar{x}) = r_p r_1 + r_2 + P \\ &= (r_p(r_1) + P) + (r_2 + P) = r_p \psi(r_1 \bar{x}) + \psi(r_2 \bar{x}), \end{aligned}$$

como $0 : \bar{x} = I : x \subseteq PR_P$ y el anulador de R/P en R_P es PR_P , el morfismo está bien definido. Luego como E es inyectivo tenemos el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} R_P \bar{x} & \xrightarrow{i_{R_P/I}} & R_P/I \\ \psi \downarrow & & \searrow \phi \\ R/P & & \\ i_E \downarrow & \swarrow & \\ E & & \end{array}$$

donde $i_E \circ \psi = \phi \circ i_{R_P/I}$, así

$$1_R + P = \psi(\bar{x}) = i_E(\psi(\bar{x})) = \phi(i_{R_P/I}(\bar{x})) = \phi(\bar{x}),$$

también notemos que si $i \in I$, entonces $i\phi(\bar{1}) = \phi(i(1 + I)) = \phi(0 + I) = 0$, se sigue que $\phi(\bar{1}) \in I^* = J^*$, de este modo

$$1_R + P = \phi(\bar{x}) = \phi(x(\bar{1})) = x\phi(\bar{1}) = 0$$

lo que nos lleva a una contradicción. Por lo que, $I = J$. Ahora también que $I = J$ si y solo si $I^* = J^*$.

Supongamos que E es neteriano (resp. artinian) y sea la cadena descendente (resp. ascendente) de ideales de R_P

$$\begin{aligned} \cdots \subseteq I_3 \subseteq I_2 \subseteq I_1 \\ (\text{repc. } I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots), \end{aligned}$$

entonces tenemos la siguiente cadena ascendente (resp. descendente) de R_P -submódulos de E ,

$$\begin{aligned} I_1^* \subseteq I_2^* \subseteq I_3^* \subseteq \cdots \\ (\text{repc. } \cdots \subseteq I_3^* \subseteq I_2^* \subseteq I_1^*), \end{aligned}$$

ya que E es neteriano (resp. artinian) como R_P -módulo, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $I_k^* = I_{k+1}^*$. Por lo tanto, $I_k = I_{k+1}$, es decir, R_P es neteriano (resp. artinian). ■

3.2. Dualización y caracterización de anillos neterianos y artinianos.

En esta sección, M denotará ideal máximo de R y S a un R -módulo simple, R sigue siendo conmutativo salvo que se diga de lo contrario.

Primero recordemos una de las caracterizaciones de anillos neterianos vista en la Proposición 1.15.

Un anillo izquierdo R es neteriano si y solo si todo R -módulo f.g. es neteriano.

Ahora veamos una caracterización de anillos artinianos.

Proposición 3.8. *Un anillo izquierdo R es artiniano si y solo si todo R -módulo f.g. es f.i.*

Demostración. Si R es artiniano, por la proposición 1.15 todo R -módulo f.g. es artiniano y por la Proposición 2.7 todo R -módulo f.g. y artiniano es f.i. Por otro lado, supongamos que todo R -módulo f.g. es f.i. entonces, sabemos que todo anillo cociente es generado por el $1_R + I$, con I su respectivo ideal de cada cociente, por lo que, todo anillo cociente es f.i. y por la Proposición 2.3, R es artiniano. ■

La dualización de estas propiedades serían

(P) todo módulo f.i. es artiniano.

(Q) todo módulo f.i. es f.g.

respectivamente. Si suponemos un R anillo izquierdo con la propiedad Q , entonces todo R -módulo A f.i. A es neteriano, ya que todo submódulo de un f.i. es nuevamente f.i. entonces todo submódulo de A es f.g. es decir, A neteriano. Si además R es conmutativo, por la Proposición 2.7 todo R -módulo f.i. y neteriano es artiniano. Entonces en todo anillo conmutativo (Q) implica (P) . Similar a la propiedad, anillo artiniano implica anillo neteriano, de donde provienen (Q) y (P) .

Ahora caractericemos las propiedades (P) y (Q) .

Teorema 3.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Todo R -módulo f.i. es artiniano.*
2. *R_M es neteriano para todo ideal máximo M de R .*

Demostración. Sea A un R -módulo f.i. entonces $A \cong E(S_1) \oplus \cdots \oplus E(S_n)$, entonces $A \cong E(R/M_1) \oplus \cdots \oplus E(R/M_n)$, con M_i ideales máximos de R , donde $i \in \{1, \dots, n\}$, de esta manera todo R -módulo f.i. es artiniano si y solo si todo R -módulo de la forma $E(R/M)$ es artiniano.

Sea $E = E(R/M)$ un R -módulo. Supongamos que E es artiniano, entonces por el Lema 3.3, R_M es neteriano

Solo nos falta demostrar que si R_M es neteriano, entonces el R -módulo de la forma $E = E(R/M)$ es artiniano, para todo M R -módulo máximo. Supongamos que R_M es neteriano y por la Proposición 3.7, E es f.i. en R_M , por [2, Proposition 3] todo f.i. sobre un anillo neteriano, es artiniano. Entonces E es artiniano en R_M y por el Corolario 3.4 E es artiniano en R . ■

Teorema 3.2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Todo R -módulo f.i. es f.g.*
2. *R_M es artiniano para todo ideal máximo M de R .*

Localización con respecto a un ideal primo.

3.2 Dualización y caracterización de anillos neterianos y artinianos.

Demostración. Nuevamente, sea A un R -módulo f.i. entonces $A \cong E(S_1) \oplus \cdots \oplus E(S_n)$, entonces $A \cong E(R/M_1) \oplus \cdots \oplus E(R/M_n)$, con M_i ideales máximos de R , donde $i \in \{1, \dots, n\}$, de esta manera todo R -módulo f.i. es f.g. si y solo si todo R -módulo de la forma $E(R/M)$ es f.g.

Suponemos que todo R -módulo f.i. es f.g., entonces todo R -módulo f.i. es neteriano, ya que todo R -submódulo de un f.i. es nuevamente f.i. y por tanto f.g. Similar a la primera implicación del Teorema 3.1, tomamos $E = E(R/M)$ con M cualquier ideal máximo de R , entonces E es neteriano y por el Lema 3.3, R_M es artiniano.

Por otro lado, solo nos falta demostrar que si R_M es artiniano, entonces el R -módulo de la forma $E = E(R/M)$ es f.g., para todo M R -módulo máximo, supongamos que R_M es artiniano, entonces R_M es neteriano y por el Teorema 3.1, E es un R -módulo artiniano, por el Corolario 3.4 es artiniano en R_M y por el Teorema 2.1 como E es un R_M -módulo artiniano y R_M es artiniano, entonces E es un R_M -módulo neteriano, luego es un R -módulo neteriano. Por lo tanto, E es un R -módulo f.g. ■

Capítulo 4

Conclusiones

El Lema 2.1 del capítulo 2 nos da una equivalencia la cual nos dice que un R -módulo M es finitamente incrustado si y solo si su $\text{zoc}(M)$ es esencial en M y finitamente generado, recordando que el zoco de un módulo es semisimple y que un módulo semisimple finitamente generado es finitamente cogenerado, entonces M es finitamente incrustado si y solo si $\text{zoc}(M)$ es esencial en M y es finitamente cogenerado, la cual es una equivalencia de que un módulo sea finitamente cogenerado. Así

M es finitamente incrustado si y solo si M es finitamente cogenerado.

Además, durante el capítulo 2 se expusiera varias propiedades que dualizaban con las de finitamente generado, algunas de estas propiedades fueron las proposición 2.1, 2.2, la Proposición 1.14 con la Proposición 2.3, entre otras. Motivo por el cual se consideraba al concepto de finitamente incrustado como el dual de finitamente generado.

En el capítulo 3 se hizo una construcción muy particular de una localización con respecto a un ideal primo, sobre el anillo de endomorfismos de una cápsula inyectiva del cociente del anillo con un ideal primo. Esta localización nos dio pauta a descubrir que la cápsula inyectiva del cociente del anillo con un ideal primo como módulo del anillo tiene una copia exacta como módulo de la localización del anillo. Esto nos brindaron muchas propiedades para el módulo, tanto como módulo del anillo como módulo de la localización. En los casos donde el ideal primo fuera máximo, nos ayudaron a demostrar las caracterizaciones de las propiedades (P) y (Q) de Peter Vámos en [1] de una forma distinta.

Bibliografía

- [1] Vámos, P., *The dual of the notion of "finitely generated"*, J. London Math. Soc. 43 (1968), 643-6.
- [2] Matlis, E., *Modules with descending chain condition*, Trans. Amer. Math. Soc., 97(1960), 495-508.
- [3] Sharpe, D. W. y Vámos, P., *Injective modules*, London: Cambridge University Press, (1972)
- [4] Kasch F., *Modules and rings*, London: Academic Press Inc., (1982)