Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Introducción a la teoría de prerradicales sobre R-Mod

Tesis presentada al

Posgrado de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

por

Oscar Pérez López

Asesores de tesis

Dr. César Cejudo Castilla
Dr. Ivan Fernando Vilchis Montalvo

Puebla Pue.
noviembre de 2019

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Introducción a la teoría de prerradicales sobre R-Mod

Tesis presentada al

Posgrado de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Maestría en Ciencias Matemáticas

por

Oscar Pérez López

Asesores de tesis

Dr. César Cejudo Castilla
Dr. Ivan Fernando Vilchis Montalvo

Puebla Pue.
noviembre de 2019

A mis padres

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que de alguna u otra manera formaron parte de este trabajo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico otorgado durante la maestría.

A mi madre Minerva López Lucero por todo su apoyo incondicional, confianza y cariño.

A mis amigos por todos los momentos dentro y fuera de la escuela que hemos compartido (no digo nombre para que no se ofenda nadie).

A mis sinodales por su valiosa retroalimentación, Dr. Alejandro Alvarado García, Dr. Iván Martínez Ruíz, Dr. José Juan Angoa Amador y Dr. Mauricio Gabriel Medina Bárcenas.

Finalmente agradezco a mis asesores: Dr. César Cejudo Castilla y Dr. Ivan Fernando Vilchis Montalvo por su paciencia, apoyo y dirección en el desarrollo de este trabajo y de sus enseñanzas en el aula, sin las cuales no tendría claro cuál es el camino profesional que deseo seguir.

A todos ustedes, muchas gracias.

Introducción

En 1964 Maranda introduce los conceptos de prerradical, prerradical idempotente y radical [8]. Posteriormente, en 1982, Bican, Kepka y Němec hacen un compendio de todo lo que se tenía hasta ese momento de la teoría de prerradicales aplicada a la teoría de módulos y anillos [1].

En México, en los años 2002-2004, F. Raggi, J. Ríos Montes, H. A. Rincón Mejía, R. Fernández Alonso y C. J. Signoret Poillon estudiaron la estructura reticular de todos los prerradicales sobre un anillo R y caracterizaron a los anillos artinianos simples, semisimples y V-anillos en términos de prerradicales [9, 10, 11].

Recientemente, en [4], los autores demuestran que para un anillo local artiniano de ideales principales de longitud n, la retícula de prerradicales es distributiva y finita de cardinalidad 2^n.

Otro problema interesante que se ha abordado en literatura es el siguiente: ¿Cómo tiene que ser un anillo R para que la retícula de prerradicales asociada a R sea un conjunto? Por ejemplo, si R es semisimple la retícula de prerradicales es finita. También se puede preguntar ¿Cuándo la retícula de prerradicales asociada a un anillo no es conjunto? En [5], los autores demuestran que para el anillo de los enteros la retícula de prerradicales es una clase propia. De hecho, el año pasado se demostró en [6] que la retícula de prerradicales es una clase propia si R es un anillo de polinomios sobre un campo, o si es una K-álgebra de dimensión finita de tipo salvaje.

En base a lo antes dicho nos damos cuenta de la importancia de los prerradicales para el estudio de módulos y anillos. Es por esto que en este trabajo tratamos de desarrollar de manera minuciosa algunos temas de prerradicales para que en un futuro si alguien desea adentrarse en este tema tenga una base para comenzar. Así mismo buscamos tener las bases para poder continuar con el tema de prerradicales pero desde la investigación y poder aportar nuevos conceptos, nuevas relaciones con la teoría de módulos y nuevas caracterizaciones de anillos con esta bella teoría.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Módulos

En este capítulo daremos notaciones, definiciones y algunas propiedades básicas de la teoría de módulos. R siempre denotará un anillo asociativo con uno distinto de cero y en caso contrario se hará la aclaración.

1.1.1. Módulos y morfismos de módulos

Definición 1.1. *Sean R un anillo y M un grupo abeliano. M es llamado **R-módulo izquierdo** si existe una función*

$$\begin{array}{rcl} R \times M & \to & M \\ (r, x) & \mapsto & rx \end{array}$$

sujeta a los siguientes axiomas:

(1) $a(x + y) = ax + ay$.

(2) $(a + b)x = ax + bx$.

(3) $(ab)x = a(bx)$.

(4) $1x = x$.

para todo $a, b \in R$ y para todo $x, y \in M$.

De manera similar se definen los ***R*-módulos derechos** pero con los elementos de R operando del lado derecho de los elementos de M. Denotamos por R-Mod a la clase de todos los R-módulos izquierdos y por Mod-R a la clase de todos los R-módulos derechos. Si $M \in R$-Mod lo denotamos por ${}_RM$ y si $M \in$ Mod-R lo denotamos por M_R. A partir de ahora la palabra **módulo izquierdo** significará R-módulo izquierdo.

Ejemplo 1.

(1) Si R es un campo (semicampo o un anillo con división), entonces todo R-espacio vectorial es un módulo izquierdo.

(2) La clase de los grupos abelianos coincide con $\mathbb{Z}$-Mod.

(3) Si R es un anillo, podemos pensar en R como un módulo izquierdo con el producto definido en R.

Definición 1.2. *Sean $M \in R$-Mod y L un subconjunto no vacío de M. L es llamado **submódulo** de M (denotado por $L \leq M$) si L es un subgrupo aditivo de M y para todo $a \in R$ y para todo $x \in L$ se cumple que $ax \in L$.*

Ejemplo 2.

(1) Si I es un ideal izquierdo de R, entonces ${}_RI$ es un submódulo de ${}_RR$.

*(2) Si $M \in R$-Mod y $\{M_i\}_{i \in I}$ es una familia de submódulos de M, entonces la **suma***

$$\sum_{i \in I} M_i = \left\{ \sum_{i \in I} x_i \;\middle|\; \begin{array}{c} x_i \in M_i \text{ y } x_i = 0 \\ \text{para casi todo } i \in I \end{array} \right\}$$

es un submódulo de M.

*(3) Si $M \in R$-Mod y $\{M_i\}_{i \in I}$ es una familia de submódulos de M, entonces la **intersección** $\bigcap\limits_{i \in I} M_i$ es un submódulo de M.*

(4) Si I es un ideal izquierdo de R y $M \in R$-Mod, entonces

$$IM = \left\{ \sum_{i \in I} r_i x_i \;\middle|\; \begin{array}{c} r_i \in R, x_i \in M \text{ y } r_i = 0 \\ \text{para casi todo } i \in I \end{array} \right\}$$

es un submódulo de M.

Definición 1.3. *Si $M \in R$-Mod y L es submódulo de M, entonces*

$$M/L = \{\overline{x} \mid x \in M\}$$

*donde la operación suma es la suma usual de grupos cocientes aditivos y la multiplicación por escalar está definida como $a\overline{x} = \overline{ax}$ para todo $a \in R$ y para todo $\overline{x} \in M/L$, es llamado **módulo cociente** de M sobre L.*

Notar que M es abeliano así que M/L es siempre un grupo abeliano.

Lema 1.4. ***(Ley modular)*** *Sean $K, L, M, N \in R$-Mod tales que $K, L, M \leq N$ y $L \leq M$, entonces*

$$(K + L) \cap M = (K \cap M) + L.$$

Demostración. $(K + L) \cap M \subseteq (K \cap M) + L$: Sea $x \in (K + L) \cap M$, entonces $x \in M$ y existen $k \in K$ y $l \in L$ tales que $x = k + l$. Como $L \leq M$ tenemos que $k = x - l \in M$, entonces $k \in K \cap M$. Por lo tanto $x = k + l \in (K \cap M) + L$.

$(K \cap M) + L \subseteq (K + L) \cap M$: Sea $x \in (K \cap M) + L$, entonces existen $y \in K \cap M$ y $l \in L$ tales que $x = y + l$. Por lo tanto $x = y + l \in K + L$ y $x = y + l \in M + L = M$, es decir $x = y + l \in (K + L) \cap M$. □

Definición 1.5. *Sean M y N dos módulos izquierdos. Una función $f : M \longrightarrow N$ es llamada **morfismo de módulos izquierdos** o **morfismo de módulos**, si para todo $a \in R$ y para todo $x, y \in M$ se cumple lo siguiente:*

(1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(2) $f(ax) = af(x)$.

Ejemplo 3. *Sean $L, M \in R$-Mod tales que $L \leq M$. Los siguientes son ejemplos de morfismos de módulos:*

*(1) El **morfismo identidad*** $M \xrightarrow{1_M} M$ *tal que* $m \longmapsto m$.

*(2) El **morfismo inclusión*** $L \overset{\iota}{\hookrightarrow} M$ *tal que* $l \longmapsto l$.

*(3) El **morfismo natural*** $M \xrightarrow{\pi} M/L$ *tal que* $m \longmapsto \overline{m}$.

Al conjunto de todos los morfismos de M a N lo vamos a denotar por $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ y cuando $M = N$, $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ será escrito como $\mathrm{End}_R(M)$.

Proposición 1.1.1. *Sean* $M, N, K \in R$*-Mod. Si* $f : M \longrightarrow N$ *y* $g : N \longrightarrow K$ *son dos morfismos de módulos, entonces* $gf = g \circ f$ *es un morfismo de módulos.*

Demostración. Sean $a \in R$ y $x, y \in M$, entonces

$$\begin{aligned} (gf)(x+y) &= g(f(x+y)) \\ &= g(f(x)+f(y)) \\ &= g(f(x))+g(f(y)) \\ &= (gf)(x)+(gf)(y) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (gf)(ax) &= g(f(ax)) \\ &= g(af(x)) \\ &= ag(f(x)) \\ &= a(gf)(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto gf es un morfismo de módulos. □

Definición 1.6. *Sea* $f : M \longrightarrow N$ *un morfismo de módulos. Entonces:*

(1) f *es llamado **monomorfismo** si dados* $g, h : K \longrightarrow M$ *tales que* $fg = fh$*, entonces* $g = h$.

(2) f *es llamado **epimorfismo** si dados* $g, h : N \longrightarrow K$ *tales que* $gf = hf$*, entonces* $g = h$.

(3) f *es llamado **isomorfismo** si y sólo si existe un morfismo* $f' : N \longrightarrow M$ *tal que* $ff' = 1_N$ *y* $f'f = 1_M$.

Definición 1.7. *Sean* $M, N \in R$*-Mod y* $f : M \longrightarrow N$ *un morfismo de módulos. Definimos los siguientes conjuntos:*

*(1) La **imagen** de* f*, Im*(f)*, dada por:*

$$\mathit{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in M\}.$$

*(2) El **núcleo** de* f*, Ker*(f)*, dado por:*

$$\mathit{Ker}(f) = \{x \in M \mid f(x) = 0\}.$$

*(3) La **imagen inversa** de* $N' \leq N$ *bajo* f*, dada por:*

$$f^{-1}(N') = \{x \in M \mid f(x) \in N'\}.$$

Observación 1.8. *Sean* $M, N \in R$*-Mod y* $f : M \longrightarrow N$ *un morfismo de módulos. Entonces:*

(1) $Im(f) \leq N$.

(2) $Ker(f) \leq M$.

(3) Si $N' \leq N$, *entonces* $f^{-1}(N') \leq M$.

Teorema 1.9. *Sean* $M, N \in R$*-Mod y* $f : M \longrightarrow N$ *un morfismo de módulos, entonces:*

(1) f *es inyectiva si y sólo si* f *es monomorfismo.*

(2) f *es suprayectiva si y sólo si* f *es epimorfismo.*

(3) f *es biyectiva si y sólo si* f *es isomorfismo.*

Demostración. (1) Supongamos que f es inyectiva y sean $g, h : K \longrightarrow M$ tales que $fg = fh$. Sea $x \in K$, entonces tenemos que $(fg)(x) = (hf)(x)$, es decir, $f(g(x)) = f(h(x))$. Como f es inyectiva se sigue que $g(x) = h(x)$ y como $x \in K$ fue arbitrario concluimos que $g = h$.

Supongamos que f es monomorfismo y sean $x, y \in M$ tales que $f(x) = f(y)$, entonces $f(x-y) = 0$. Consideremos los siguientes morfismos:

$$\begin{aligned} \iota : R(x-y) &\to M \\ a(x-y) &\mapsto a(x-y) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} zer : R(x-y) &\to M \\ a(x-y) &\mapsto 0 \end{aligned}$$

Afirmamos que $f\iota = fzer$. En efecto, sea $a(x-y) \in R(x-y)$, entonces $(f\iota)(a(x-y)) = f(\iota(a(x-y))) = f(a(x-y)) = af(x-y) = a0 = 0$ y $(fzer)(a(x-y)) = f(zer(a(x-y))) = f(0) = 0$. Por lo tanto $f\iota = fzer$ y como f es monomorfismo se sigue que $\iota = zer$. Entonces $x - y = \iota(x-y) = zer(x-y) = 0$, es decir, $x - y = 0$. Por lo tanto $x = y$ de donde f es inyectiva.

(2) Supongamos que f es suprayectiva y sean $g, h : N \longrightarrow K$ tales que $gf = hf$. Sea $y \in N$, como f es suprayectiva existe $x \in M$ tal que $y = f(x)$. Por lo tanto $g(y) = g(f(x)) = (gf)(x) = (hf)(x) = h(f(x)) = h(y)$ y como $y \in N$ fue arbitrario concluimos que $g = h$.

Supongamos que f es epimorfismo y consideremos los siguientes morfismos:

$$\begin{aligned} \pi : N &\to N/\mathrm{Im}(f) \\ x &\mapsto \overline{x} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} zer : N &\to N/\mathrm{Im}(f) \\ x &\mapsto \overline{0} \end{aligned}$$

Afirmamos que $\pi f = zerf$, sea $x \in M$, entonces $(\pi f)(x) = \pi(f(x)) = \overline{f(x)} = \overline{0} = zer(f(x)) = (zerf)(x)$. Por lo tanto $\pi f = zerf$ y como f es epimorfismo concluimos que $\pi = zer$. Entonces $0 = N/\mathrm{Im}(f)$ de donde $N = \mathrm{Im}(f)$, es decir, f es suprayectiva.

(3) Se sigue de (1) y (2). □

Ejemplo 4.

(1) El morfismo inclusión es un monomorfismo.

(2) El morfismo natural es un epimorfismo.

(3) El morfismo identidad es un isomorfismo.

Sean $M, N \in R$-Mod y $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de módulos. Entonces:

(1) Si f es monomorfismo diremos que M se **sumerge** en N.

(2) Si f es epimorfismo diremos que N es la **imagen homomorfa** de M

(3) Si f es isomorfismo diremos que M es **isomorfo** a N y lo denotamos por $M \cong N$.

Definición 1.10. *Sean* $M, N \in R$*-Mod y* $f : M \longrightarrow N$ *un morfismo de módulos.*

*(1) Llamamos **coimagen** al cociente $M/Ker(f)$ y lo denotamos por $Coim(f)$.*

*(2) Llamamos **conúcleo** al cociente $M/Im(f)$ y lo denotamos por $Coker(f)$.*

Proposición 1.1.2. *Sean $M, N \in R$-Mod y $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de módulos. Entonces:*

(1) f es monomorfismo si, y sólo si, $Ker(f) = 0$.

(2) f es epimorfismo si, y sólo si, $Coker(f) = 0$

Demostración. (1) Supongamos que f es monomorfismo, entonces por (1) del Teorema 1.9, f es inyectiva. Sea $x \in \mathrm{Ker}(f)$, entonces $f(x) = 0 = f(0)$ y como f es inyectiva se sigue que $x = 0$. Por lo tanto $\mathrm{Ker}(f) = 0$.

Supongamos que $\mathrm{Ker}(f) = 0$ y sean $x, y \in M$ tales que $f(x) = f(y)$. Entonces $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$, es decir, $x - y \in \mathrm{Ker}(f) = 0$. Por lo tanto $x = y$ y en consecuencia f es inyectiva. Entonces por (1) del Teorema 1.9 concluimos que f es monomorfismo.

(2) Supongamos que f es epimorfismo, entonces por (2) del Teorema 1.9 f es suprayectiva, es decir, $\mathrm{Im}(f) = N$. Luego, $\mathrm{Coker}(f) = N/\mathrm{Im}(f) = 0$.

Supongamos que $\mathrm{Coker}(f) = 0$, entonces tenemos que $N/\mathrm{Im}(f) = 0$ de donde $N = \mathrm{Im}(f)$ y por (2) del Teorema 1.9 concluimos que f es epimorfismo. □

Proposición 1.1.3. *Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de módulos.*

(1) Si $M' \leq M$, entonces $f^{-1}(f(M')) = M' + Ker(f)$.

(2) Si $N' \leq N$, entonces $f(f^{-1}(N')) = N' \cap Im(f)$.

(3) Si $g : N \longrightarrow K$ es un morfismo, entonces

(a) $Ker(gf) = f^{-1}(Ker(g))$.

(b) $Im(gf) = g(Im(f))$.

Demostración. (1) $f^{-1}(f(M')) \subseteq M' + \mathrm{Ker}(f)$:

$$\begin{aligned}
\text{Sea } x \in f^{-1}(f(M')) \quad &\Rightarrow \quad f(x) \in f(M') \\
&\Rightarrow \quad \exists\, m' \in M' \text{ tal que } f(x) = f(m') \\
&\Rightarrow \quad f(x) - f(m') = 0 \\
&\Rightarrow \quad f(x - m') = 0 \\
&\Rightarrow \quad x - m' \in \mathrm{Ker}(f) \\
&\Rightarrow \quad \exists\, m \in \mathrm{Ker}(f) \text{ tal que } m = x - m' \\
&\Rightarrow \quad x = m' + m \in M' + \mathrm{Ker}(f).
\end{aligned}$$

$M' + \mathrm{Ker}(f) \subseteq f^{-1}(f(M'))$:

$$\begin{aligned}
\text{Sea } x \in M' + \mathrm{Ker}(f) \quad &\Rightarrow \quad x = m' + m \\
& \quad \text{con } m' \in M' \text{ y } m \in \mathrm{Ker}(f) \\
&\Rightarrow \quad f(x) = f(m' + m) \\
&\Rightarrow \quad f(x) = f(m') + f(m) \\
&\Rightarrow \quad f(x) = f(m') \in f(M') \\
&\Rightarrow \quad x \in f^{-1}(f(M')).
\end{aligned}$$

(2) $f(f^{-1}(N')) \subseteq N' \cap \mathrm{Im}(f)$:

$$\begin{aligned}
\text{Sea } x \in f(f^{-1}(N')) \quad &\Rightarrow \quad \exists\, m \in f^{-1}(N') \text{ tal que } x = f(m) \\
&\Rightarrow \quad x \in N' \cap \mathrm{Im}(f).
\end{aligned}$$

$N' \cap \mathrm{Im}(f) \subseteq f(f^{-1}(N'))$:

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in N' \cap \mathrm{Im}(f) &\Rightarrow x \in N' \text{ y } x \in \mathrm{Im}(f) \\ &\Rightarrow x \in N' \text{ y } \exists\, m \in M \\ &\ \text{tal que } x = f(m) \\ &\Rightarrow m \in f^{-1}(N') \\ &\Rightarrow x = f(m) \in f(f^{-1}(N')). \end{aligned}$$

(3) Sea $g : N \longrightarrow K$ un morfismo, entonces

(a) $\mathrm{Ker}(gf) = f^{-1}(\mathrm{Ker}(g))$:

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(gf) &\Leftrightarrow gf(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow g(f(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x) \in \mathrm{Ker}(g) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(\mathrm{Ker}(g)). \end{aligned}$$

(b) $\mathrm{Im}(gf) \subseteq g(\mathrm{Im}(f))$:

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in \mathrm{Im}(gf) &\Rightarrow \exists\, m \in M \text{ tal que } x = gf(m) \\ &\Rightarrow x = g(f(m)) \\ &\Rightarrow x \in g(\mathrm{Im}(f)). \end{aligned}$$

$g(\mathrm{Im}(f)) \subseteq \mathrm{Im}(gf)$:

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in g(\mathrm{Im}(f)) &\Rightarrow \exists\, n \in \mathrm{Im}(f) \text{ tal que } x = g(n) \\ &\Rightarrow \exists\, m \in M \text{ tal que } n = f(m) \\ &\Rightarrow x = g(f(m)) \\ &\Rightarrow x = gf(m) \in \mathrm{Im}(gf). \end{aligned}$$

□

Proposición 1.1.4. *Sean* $f : M \longrightarrow N$ *y* $g : N \longrightarrow K$ *dos morfismos de módulos. Entonces:*

(1) Si gf *es monomorfismo,* f *es monomorfismo.*

(2) Si gf *es epimorfismo,* g *es epimorfismo.*

Demostración. (1) Sean $x, y \in M$ tales que $f(x) = f(y)$, entonces $(gf)(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = (gf)(y)$. Como gf es monomorfismo se sigue que $x = y$ y en consecuencia f es monomorfismo.

(2) Como gf es epimorfismo, por (3) de la Proposición 1.1.3, $g(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{Im}(gf) = K$. Como $\mathrm{Im}(f) \leq N$, entonces $g(\mathrm{Im}(f)) \leq g(N) \leq K$. Por lo tanto $g(N) = K$, es decir, g es epimorfismo. □

Las siguientes propiedades son claras.

Lema 1.11. *Sea* $f : M \longrightarrow N$ *un morfismo de módulos y sean* $\{M_i \mid M_i \leq M, i \in I\}$, $\{N_i \mid N_i \leq N, i \in I\}$. *Entonces:*

(1) $f\left(\sum_{i \in I} M_i\right) = \sum_{i \in I} f(M_i)$.

(2) $f^{-1}\left(\sum_{i \in I} N_i\right) \geq \sum_{i \in I} f^{-1}(N_i)$.

(3) Si $N_i \leq Im(f)$ *para cada* $i \in I$*, entonces* $f^{-1}\left(\sum_{i\in I} N_i\right) = \sum_{i\in I} f^{-1}(N_i)$.

(4) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} N_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(N_i)$.

(5) $f\left(\bigcap_{i\in I} M_i\right) \leq \bigcap_{i\in I} f(M_i)$.

(6) Si $Ker(f) \leq M_i$ *para cada* $i \in I$*, entonces* $f\left(\bigcap_{i\in I} M_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(M_i)$.

Teorema 1.12. ***(Primer Teorema de Isomorfismo de módulos)*** *Si* $f : M \longrightarrow N$ *es un morfismo de módulos, entonces*

$$Im(f) \cong M/Ker(f).$$

Demostración. Definamos la siguiente función:

$$\begin{array}{rcl} g : M/\mathrm{Ker}(f) & \to & \mathrm{Im}(f) \\ \overline{x} & \mapsto & f(x). \end{array}$$

Notemos que g está bien definida y es inyectiva. En efecto, sean $\overline{x}, \overline{y} \in M/\mathrm{Ker}(f)$, entonces

$$\begin{array}{rcl} \overline{x} = \overline{y} & \Leftrightarrow & x - y \in \mathrm{Ker}(f) \\ & \Leftrightarrow & f(x-y) = 0 \\ & \Leftrightarrow & f(x) - f(y) = 0 \\ & \Leftrightarrow & f(x) = f(y). \end{array}$$

Por lo tanto g está bien definida y es inyectiva, además es claro que es suprayectiva. Ahora veamos que g es morfismo. Sean $r \in R$ y $\overline{x}, \overline{y} \in M/\mathrm{Ker}(f)$, entonces

$$\begin{array}{rcl} g(r\overline{x} + \overline{y}) & = & g(\overline{rx} + \overline{y}) \\ & = & g(\overline{rx + y}) \\ & = & f(rx + y) \\ & = & rf(x) + f(y) \\ & = & rg(\overline{x}) + g(\overline{y}). \end{array}$$

Por lo tanto g es un morfismo biyectivo, es decir, un isomorfismo. □

Teorema 1.13. ***(Segundo Teorema de Isomorfismo de módulos)*** *Sean* $N \in R$*-Mod y* $L, M \leq N$*, entonces*

$$(L + M)/L \cong M/(L \cap M).$$

Demostración. Sea $\pi : M + L \longrightarrow (M + L)/L$ el morfismo natural. Consideremos $\pi_{|M}$, entonces

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(\pi_{|M}) & = & \{m \in M \mid m + L = 0\} \\ & = & \{m \in M \mid m \in L\} \\ & = & M \cap L, \end{array}$$

e

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\pi_{|M}) &= \{m+L \mid m \in M\}\\ &= \{(m+l)+L \mid m \in M \text{ y } l \in L\}\\ &= (M+L)/L.\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el Teorema 1.12, $(M+L)/L = \mathrm{Im}(\pi_{|M}) \cong M/\mathrm{Ker}(\pi_{|M}) = M/(M \cap L)$. □

Teorema 1.14. ***(Tercer Teorema de Isomorfismo de módulos)*** *Sean $L, M, N \in R$-Mod tales que $L \leq M \leq N$. Entonces*

$$N/M \cong (N/L)/(M/L).$$

Demostración. Definamos f como sigue:

$$\begin{aligned}f : N/L &\to N/M\\ n+L &\mapsto n+M.\end{aligned}$$

Es claro que f está bien definida y es morfismo de módulos. Además,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f) &= \{n+L \mid n+M = 0\}\\ &= \{n+L \mid n \in M\}\\ &= M/L,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \{n+M \mid n \in N\}\\ &= N/M.\end{aligned}$$

Entonces, por el Teorema 1.12, $N/M = \mathrm{Im}(f) \cong (N/L)\mathrm{Ker}(f) = (N/L)/(M/L)$. □

Definición 1.15. *Sea $M \in R$-Mod. Definimos el* ***anulador*** *de M en R de la siguiente manera:*

$$(0 : M) = \{r \in R \mid rx = 0 \textit{ para todo } x \in M\}.$$

Observación 1.16.

(1) Sea $M \in R$-Mod, entonces $(0 : M)$ es un ideal bilateral de R.

(2) Para cada $x \in M$, $(0 : x) = \{a \in R \mid ax = 0\}$.

(3) Si I es un ideal bilateral de R tal que $I \leq (0 : M)$, entonces M es un R/I-módulo izquierdo con la suma de M y el producto dado por $\overline{a}x = ax$ para toda $\overline{a} \in R/I$ y $x \in M$.

1.1.2. Sucesiones exactas de módulos

Definición 1.17. *Una sucesión de morfismos de módulos*

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

es llamada ***exacta*** *en M_i si Ker(f_i) = Im(f_{i-1}). Si es exacta en cada módulo la llamaremos* ***sucesión exacta****. En particular, una sucesión exacta de la forma $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ se llamará* ***sucesión exacta corta****.*

Observación 1.18. *Si $0 \xrightarrow{\alpha} L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{\beta} 0$ es una sucesión exacta corta, entonces f es monomorfismo y g epimorfismo.*

Demostración. f es monomorfismo: Como la sucesión es exacta corta tenemos que $0 = \mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Ker}(f)$. Por lo tanto f es monomorfismo.

g es epimorfismo: Como la sucesión es exacta corta tenemos que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(g) = N$. Por lo tanto g es epimorfismo. $\square$

La siguiente propiedad es clara:

Proposición 1.1.5. *Sean $L, M \in R$-Mod tales que $L \leq M$, entonces la siguiente sucesión es exacta corta:*

$$0 \xrightarrow{\alpha} L \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M/L \xrightarrow{\beta} 0\ .$$

Si $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta, entonces $L \cong \mathrm{Im}(f)$ y por el Teorema 1.12, $N \cong M/\mathrm{Im}(f)$. Por lo tanto, una sucesión exacta corta se puede formar con una inclusión seguida de una proyección.

Lema 1.19. ***(Del quinto)*** *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mu"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(es decir, $\mu f = f'\alpha$ y $\lambda g = g'\mu$) con filas de sucesiones exactas cortas.

(1) Si α y λ son monomorfismos, entonces μ es monomorfismo.

(2) Si α y λ son epimorfismos, entonces μ es epimorfismo.

(3) Si α y λ son isomorfismos, entonces μ es isomorfismo.

Demostración. (1) μ es monomorfismo: Supongamos que α y λ son monomorfismos. Sea $x \in \mathrm{Ker}(\mu)$, entonces $\lambda(g(x)) = g'(\mu(x)) = g'(0) = 0$. Como λ es monomorfismo se sigue que $g(x) = 0$, es decir, $x \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$ (ya que la fila superior es exacta corta). Entonces existe $l \in L$ tal que $f(l) = x$ y en consecuencia $f'(\alpha(l)) = \mu(f(l)) = \mu(x) = 0$. Como $f'\alpha$ es monomorfismo, entonces $l = 0$. Luego $x = f(l) = f(0) = 0$.

(2) μ es epimorfismo: Supongamos que α y λ son epimorfismos. Sea $y \in M'$, entonces $g'(y) \in N'$ y como λ es epimorfismo, existe $n \in N$ tal que $\lambda(n) = g'(y)$. Como g es epimorfismo, existe $m \in M$ tal que $g(m) = n$. Entonces $g'(y) = \lambda(n) = \lambda(g(m)) = g'(\mu(m))$ de donde $g'(y - \mu(m)) = g'(y) - g'(\mu(m)) = 0$, es decir, $y - \mu(m) \in \mathrm{Ker}(g') = \mathrm{Im}(f')$ (ya que la fila inferior es exacta corta). Entonces existe $l' \in L'$ tal que $f'(l') = y - \mu(m)$ y como α es epimorfismo, existe $l \in L$ tal que $\alpha(l) = l'$. Luego, $y - \mu(m) = f'(l') = f'(\alpha(l)) = \mu(f(l))$. Por lo tanto $\mu(f(l) - m) = y$.

(3) Se sigue de (1) y (2). $\square$

1.1.3. Suma y producto directo de módulos

Definición 1.20. *Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos definimos su producto como sigue:*

$$\prod_{i\in I} M_i = \left\{ \alpha : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} M_i \;\middle|\; \alpha(i) \in M_i \ \forall\ i \in I \right\}.$$

Observación 1.21.

(1) $x_i = \alpha(i)$ es llamado el i-ésimo componente de α.

(2) Si $\alpha \in \prod_{i\in I} M_i$, *entonces* $\alpha = (\alpha(i)) = (x_i)$.

(3) Si $M_i = M$ *para cada* $i \in I$, *escribimos* $\prod_{i\in I} M_i = M^I$.

Si $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia de módulos, entonces $\prod_{i\in I} M_i$ es un módulo izquierdo sobre R con las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} + : \prod_{i\in I} M_i \times \prod_{i\in I} M_i &\to \prod_{i\in I} M_i \\ ((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) &\mapsto (x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i + y_i)_{i\in I} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} * : R \times \prod_{i\in I} M_i &\to \prod_{i\in I} M_i \\ (a, (x_i)_{i\in I}) &\mapsto a * (x_i)_{i\in I} = (ax_i)_{i\in I} \end{aligned}$$

Y es llamado **producto directo** de la familia $\{M_i\}_{i\in I}$.

Definición 1.22. *Sea* $\{M_i\}_{i\in I}$ *una familia de módulos. Si* $\alpha \in \prod_{i\in I} M_i$ *definimos su* ***soporte*** *como:*

$$sop(\alpha) = \{i \in I \mid \alpha(i) \neq 0\}.$$

Definición 1.23. *Sea* $\{M_i\}_{i\in I}$ *una familia de módulos. El conjunto:*

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \left\{ \alpha \in \prod_{i\in I} M_i \mid sop(\alpha) \text{ es finito} \right\} \leq \prod_{i\in I} M_i.$$

Es llamado la ***suma directa (externa)*** *de la familia* $\{M_i\}_{i\in I}$. *En particular, si* $M_i = M$ *para cada* $i \in I$, *entonces escribimos* $\bigoplus_{i\in I} M_i = M^{(I)}$.

Observación 1.24. *Sea* $\{M_i\}_{i\in I}$ *una familia de módulos.*

(1) Si I *es finito, entonces* $\prod_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I} M_i$.

(2) Para cada $j \in I$ *tenemos los siguientes morfismos:*

(a) La ***inclusión natural:*** $\iota_j : M_j \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$, *donde* $\iota_j(i) = m_j$ *si* $j = i$ *y* 0 *si* $j \neq 1$.

(b) La ***proyección natural:*** $\pi_j : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_j$.

Y son tales que $\pi_i\iota_i = 1_{M_i}$ *para cada* $i \in I$, *mientras que* $\pi_i\iota_j = 0$ *si* $i \neq j$.

(3) Para $\bigoplus_{i\in I} M_i$ *también se tienen definidos los morfismos anteriores y son tales que* $\sum_{i\in I} \iota_i\pi_i = 1_{\bigoplus_{i\in I} M_i}$.

Definición 1.25. *Sea $M \in R$-Mod y sean $M_1, M_2 \leq M$. Decimos que M la* ***suma directa (interna)*** *de M_1 y M_2 si:*

(1) $M = M_1 + M_2$.

(2) $M_1 \cap M_2 = 0$.

Y lo escribimos como $M = M_1 \oplus M_2$.

Observación 1.26. *Si $M = M_1 \oplus M_2$, entonces todo $m \in M$ es escrito de una única manera como $m = m_1 + m_2$ con $m_1 \in M_1$ y $m_2 \in M_2$. M_1 y M_2 son llamados* ***sumandos directos*** *de M.*

Definición 1.27. *Sea $M \in R$-Mod y sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de submódulos de M. Decimos que M es la* ***suma directa (interna)*** *de la familia $\{M_i\}_{i\in I}$ si:*

(1) $M = \sum_{i\in I} M_i$.

(2) $M_i \bigcap \left(\sum_{j\neq i} M_j\right) = 0$ *para todo* $i \in I$.

Y lo escribimos como $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ y los M_i son llamados ***sumandos directos*** *de M.*

Observación 1.28. *Si M es la suma directa interna de la familia $\sum_{i\in I} M_i$, entonces todo elemento $m \in M$ es escrito de una única manera como: $m = m_1 + \cdots + m_r$, con $m_k \in M_{i_k}$ e $i_K \in I$ para cada $k \in \{1, \ldots, r\}$.*

Definición 1.29.

(1) Sea $f : L \longrightarrow M$ un monomorfismo. Decimos que f es un ***monomorfismo que se escinde*** *si existe un morfismo $f' : M \longrightarrow L$ tal que $f'f = 1_M$.*

(2) Sea $g : M \longrightarrow N$ un epimorfismo. Decimos que g es un ***epimorfismo que se escinde*** *si existe un morfismo $g' : N \longrightarrow M$ tal que $gg' = 1_N$.*

Proposición 1.1.6.

(1) Si $f : L \longrightarrow M$ es un monomorfismo que se escinde, entonces $Im(f)$ es sumando directo de M.

(2) Si $g : M \longrightarrow N$ es un epimorfismo que se escinde, entonces $Ker(g)$ es sumando directo de M.

Demostración. (1) Como f es un monomorfismo que se escinde existe un morfismo $f' : M \longrightarrow L$ tal que $f'f = 1_M$. Afirmamos que $M = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f')$. En efecto, sea $x \in M$, entonces $f'(x) \in L$ de donde $f(f'(x)) \in M$. Además si $z = x - f(f'(x))$, entonces

$$\begin{aligned} f'(z) &= f'(x - f(f'(x)) \\ &= f'(x) - f'(f(f'(x))) \\ &= f'(x) - (f'f)(f'(x)) \\ &= f'(x) - 1_M(f'(x)) \\ &= f'(x) - f'(x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

es decir, $z \in \mathrm{Ker}(f')$. Por lo tanto $x = f(f'(x)) + z \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f')$. Sea $y \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f')$, entonces $y \in \mathrm{Im}(f)$ e $y \in \mathrm{Ker}(f')$, es decir, $y = f(x)$ para algún $x \in L$ y $f'(y) = 0$, entonces $0 = f'(y) = f'(f(x)) = x$. Por lo tanto $x = 0$ de donde $y = f(x) = f(0) = 0$ y en consecuencia $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f') = 0$. Así hemos demostrado que $M = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f')$ y en consecuencia, $\mathrm{Im}(f)$ es sumando directo de M.

(2) Como g es un epimorfismo que se escinde existe un morfismo $g' : N \longrightarrow M$ tal que $gg' = 1_N$. Afirmamos que $M = \mathrm{Im}(g') \oplus \mathrm{Ker}(g)$. En efecto, sea $x \in M$, entonces $x = g'(g(x)) + (x - g'(g(x)))$. Notemos que $x - g'(g(x)) \in \mathrm{Ker}(g)$:

$$\begin{aligned} g(x - g'(g(x))) &= g(x) - g(g'(g(x))) \\ &= g(x) - (gg')(g(x)) \\ &= g(x) - 1_N(g(x)) \\ &= g(x) - g(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $x - g'(g(x)) \in \mathrm{Ker}(g)$ y en consecuencia $x \in \mathrm{Im}(g') + \mathrm{Ker}(g)$. Ahora sea $y \in \mathrm{Im}(g') \cap \mathrm{Ker}(g)$, entonces $y \in \mathrm{Im}(g')$ e $y \in \mathrm{Ker}(g)$, es decir, $y = g'(x)$ para algún $x \in N$ y $g(y) = 0$. Entonces $x = g(g'(x)) = g(y) = 0$ y en consecuencia $y = 0$. Por lo tanto $\mathrm{Im}(g') \cap \mathrm{Ker}(g) = 0$. Así hemos demostrado que $M = \mathrm{Im}(g') \oplus \mathrm{Ker}(g)$, es decir, $\mathrm{Ker}(g)$ es sumando directo de M. □

Definición 1.30. *Decimos que la sucesión exacta corta* $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *se escinde si:*

(1) $M \cong L \oplus N$.

(2) El siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\iota_L"] & L \oplus N \arrow[r, "\pi_N"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

es decir, $\alpha f = \iota_L$ *y* $g = \pi_N \alpha$.

Proposición 1.1.7. *Las siguientes condiciones son equivalentes para una sucesión exacta corta* $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *:*

(1) La sucesión se escinde.

(2) Existe $f' : M \longrightarrow L$ *tal que* $f'f = 1_L$.

(3) Existe $g' : N \longrightarrow M$ *tal que* $gg' = 1_N$.

Demostración. (1)⇒(2) Supongamos que la sucesión se escinde, entonces tenemos el diagrama conmutativo 1.1, es decir, $\alpha f = \iota_L$ y $g = \pi_N \alpha$. Sea $f' = \pi_L \alpha : M \longrightarrow L$, entonces $f'f = (\pi_L \alpha) f = \pi_L(\alpha f) = \pi_L \iota_L = 1_L$.

(2)⇒(1) Supongamos que existe $f' : M \longrightarrow L$ tal que $f'f = 1_L$. Veamos que existe α tal que hace conmutar el diagrama 1.1, es decir, $\alpha f = \iota_L$ y $g = \pi_N \alpha$. Sea $\alpha = \iota_L f' + \iota_N g$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha f &= (\iota_L f' + \iota_N g) f \\ &= (\iota_L f') f + (\iota_N g) f \\ &= \iota_L (f'f) + \iota_N (gf) \\ &= \iota_L 1_L \\ &= \iota_L \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \pi_N \alpha &= \pi_N(\iota_L f' + \iota_N g) \\ &= \pi_N(\iota_L f') + \pi_N(\iota_N g) \\ &= (\pi_N \iota_L f)' + (\pi_N \iota_N) g \\ &= 1_N g \\ &= g \end{aligned}$$

Luego, el diagrama 1.1 conmuta y por el Lema 1.19, α es isomorfismo.

(1)$\Rightarrow$(3) Supongamos que la sucesión se escinde, entonces tenemos el diagrama conmutativo 1.1, es decir, $\alpha f = \iota_L$ y $g = \pi_N \alpha$. Como α es isomorfismo existe $\alpha^{-1} : L \oplus N \longrightarrow M$ y como $g = \pi_N \alpha$, entonces $g\alpha^{-1} = \pi_N$. Sea $g' = \alpha^{-1}\iota_N : N \longrightarrow M$, entonces $gg' = g(\alpha^{-1}\iota_N) = (g\alpha^{-1})\iota_N = \pi_N \iota_N = 1_N$.

(3)$\Rightarrow$(1) Supongamos que existe $g' : N \longrightarrow M$ tal que $gg' = 1_N$. Veamos que existe $\beta : L \oplus N \longrightarrow M$ tal que el diagrama de abajo conmuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\iota_L"] \arrow[d, equal] & L \oplus N \arrow[r, "\pi_N"] \arrow[d, dashed, "\beta"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es decir, $\beta\iota_L = f$ y $g\beta = \pi_N$. Sea $\beta = f\pi_L + g'\pi_N$, entonces

$$\begin{aligned}
\beta\iota_L &= (f\pi_L + g'\pi_N)\iota_L \\
&= (f\pi_L)\iota_L + (g'\pi_N)\iota_L \\
&= f(\pi_L\iota_L) + g'(\pi_N\iota_L) \\
&= f1_L \\
&= f
\end{aligned}
\qquad \text{y} \qquad
\begin{aligned}
g\beta &= g(f\pi_L + g'\pi_N) \\
&= g(f\pi_L) + g(g'\pi_N) \\
&= (gf)\pi_L + (gg')\pi_N \\
&= 1_N\pi_N \\
&= \pi_N
\end{aligned}$$

Luego, el diagrama conmuta y por el Lema 1.19, β es isomorfismo. □

1.1.4. Módulos libres

Definición 1.31. *Sea $M \in R$-Mod y sea $X = \{x_i\}_{i\in I}$ un subconjunto de M.*

(1) Decimos que X es un ***conjunto generador*** *de M si para todo $x \in M$ se cumple que $x = \sum_{i\in I} a_i x_i$, con $a_i \in R$ para cada $i \in I$ y $a_i = 0$ excepto para un número finito.*

(2) Decimos que X es ***linealmente independiente*** *si para toda sucesión finita $i_1, \ldots, i_n$ de elementos distintos de I y para todo $a_1, \ldots, a_n \in R$ tales que $a_1x_{i_1} + \cdots + a_nx_{i_n} = 0$, entonces $a_1 = \cdots = a_n = 0$.*

(3) Decimos que M es ***libre*** *si X es linealmente independiente y genera a M.*

Si $M \in R$-Mod y X es un subconjunto linealmente independiente que genera a M, entonces X es llamado **base** de M.

Observación 1.32. *Sea $M \in R$-Mod y sea $X = \{x_i\}_{i\in I}$ una base de M, entonces todo elemento de M tiene una única representación.*

Demostración. Sea $x \in M$ y supongamos que $x = a_1x_{i_1} + \cdots + a_nx_{i_n} = b_1x_{i_1} + \cdots + b_nx_{i_n}$ con $i_1, \ldots i_n \in I$ distintos y $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in R$, entonces $(a_1 - b_1)x_{i_1} + \cdots + (a_n - b_n)x_{i_n} = 0$. Por lo tanto, como X es linealmente independiente se sigue que $a_1 - b_1 = \cdots = a_n - b_n = 0$, es decir, $a_1 = b_1, \ldots a_n = b_n$ y en consecuencia x tiene una única representación. □

Lema 1.33. *Si $f : M \longrightarrow N$ es un isomorfismo de módulos y M es libre, entonces N es libre.*

Demostración. Supongamos que f es isomorfismo y que M es libre, entonces existe $X = \{x_i\}_{i\in I}$ base de M. Veamos que $Y = \{f(x_i)\}_{i\in I}$ es base de N.

***Y* genera a *N*:** Sea $y \in N$, entonces existe $x \in M$ tal que $y = f(x)$ y como M es libre $x = \sum_{i\in I} a_i x_i$ con $a_i \in R$ y $x_i \in X$ para cada $i \in I$. Luego, $y = f(x) = \sum_{i\in I} a_i f(x_i)$.

***Y* es linealmente independiente:** Sean $a_i \in R$ y $f(x_i) \in Y$ para cada $i \in I$ tales que $\sum_{i\in I} a_i f(x_i) = 0$, entonces tenemos que $f\left(\sum_{i\in I} a_i x_i\right) = 0$, es decir, $\sum_{i\in I} a_i x_i \in \operatorname{Ker}(f) = 0$. Luego, $\sum_{i\in I} a_i x_i = 0$ y como X es base de M concluimos que $a_i = 0$ para cada $i \in I$. $\square$

Proposición 1.1.8. *Sea $M \in R$-Mod, entonces M es libre si y sólo si $M \cong R^{(I)}$ para algún conjunto I.*

Demostración. Supongamos que M es libre, entonces existe $X = \{x_i\}_{i\in I}$ base de M. Definamos a f de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} f : R^{(I)} & \to & M \\ (a_i)_{i\in I} & \mapsto & \sum_{i\in I} a_i x_i. \end{array}$$

Es claro que f es morfismo de módulos. Veamos que f es epimorfismo. Sea $x \in M$, entonces $x = \sum_{i\in I} a_i x_i = f((a_i)_{i\in I})$, es decir, f es suprayectiva. Ahora veamos que f es monomorfismo, sea $(a_i)_{i\in I} \in \operatorname{Ker}(f)$, entonces $\sum_{i\in I} a_i x_i = f((a_i)_{i\in I}) = f((a_i)_{i\in I}) = 0$, es decir, $\sum_{i\in I} a_i x_i = 0$. Como $X = \{x_i\}_{i\in I}$ es base de M se sigue que $a_i = 0$ para cada $i \in I$ y en consecuencia $(a_i)_{i\in I} = 0$, es decir, $\operatorname{Ker}(f) = 0$. Por lo tanto f es inyectiva.

Suficiencia: Primero veamos que $R^{(I)}$ es libre para todo $I \neq \varnothing$. Recordemos que $R^{(I)} = \bigoplus_{i\in I} R_i$ donde cada $R_i = R$. Luego, $R^{(I)} = \{\ \alpha : I \longrightarrow R \ \mid \alpha(i) \in R \text{ para todo } i \in I \text{ y } sop(\alpha) < \infty\}$. Sea $X = \{\delta_i\}_{i\in I}$ donde $\delta_i : I \longrightarrow R$ está dada por:

$$\delta_i(j) = \begin{cases} 1_R & si \quad j = i \\ \\ 0_R & si \quad j \neq i \end{cases}$$

Es claro que $sop(\delta_i)$ es finito, entonces para cada $i \in I$ tenemos que $\delta_i \in R^{(I)}$. Sea $\alpha \in R^{(I)}$, entonces $sop(\alpha)$ es finito. Sea $sop(\alpha) = \{a_{i_1}, \ldots a_{i_n}\}$ y sea $k \in I$, entonces $\alpha(k) = a_{i_k}$ si $k \in \{i_1, \ldots, i_n\}$ y $a_{i_k} = 0$ si $k \notin \{i_1, \ldots, i_n\}$. Sea $\alpha \in R^{(I)}$, afirmamos que $\alpha = \sum_{j=1}^{n} a_{i_j}\delta_{i_j}$. En efecto, sea $k \in I$ entonces tenemos los siguientes casos:

- Caso 1: $k \notin \{i_1, \ldots, i_n\}$, entonces $\alpha(k) = 0$ y por otro lado $\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_j}\delta_{i_j}\right)(k) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_j}\delta_{i_j}(k) = 0$. Por lo tanto $\alpha = \sum_{j=1}^{n} a_{i_j}\delta_{i_j}$.

- Caso 2: $k \in \{i_1, \ldots, i_n\}$, entonces $\alpha(k) = a_{i_{j_0}}$ y por otro lado $\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_j}\delta_{i_j}\right)(k) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_j}\delta_{i_j}\right)(i_{j_0}) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_j}\delta_{i_j}(i_{j_0}) = a_{i_{j_0}} 1 = a_{i_{j_0}}$. Por lo tanto $\alpha = \sum_{j=1}^{n} a_{i_j}\delta_{i_j}$.

Así, hemos demostrado que $X = \{\delta_i\}_{i\in I}$ es un subconjunto de $R^{(I)}$ que lo genera. Ahora veamos que $X = \{\delta_i\}_{i\in I}$ es linealmente independiente. Supongamos que $\sum_{j=1}^{n} a_{i_j}\delta_{i_j} = 0$, entonces $a_{i_{j_0}} = a_{i_{j_0}}1 = \sum_{j=1}^{n} a_{i_j}\delta_{i_j}(i_{j_0}) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_j}\delta_{i_j}\right)(i_{j_0}) = 0(i_{j_0}) = 0_R$, es decir, $a_{i_{j_0}} = 0_R$. Como i_{j_0} fue arbitrario concluimos que $a_{i_{j_0}} = 0_R$ para todo $j \in \{1,\ldots,n\}$. Por lo tanto $X = \{\delta_i\}_{i\in I}$ es linealmente independiente y en consecuencia una base para $R^{(I)}$. Por lo tanto $R^{(I)}$ es libre y como $M \cong R^{(I)}$, por el Lema 1.33, M es libre. □

Proposición 1.1.9. *Todo módulo es cociente de un libre.*

Demostración. Sea $M \in R$-Mod y sea X un conjunto generador de M. Consideremos la siguiente función:

$$\begin{array}{rcl} f : R^{(X)} & \to & M \\ (a_x)_{x\in X} & \mapsto & \displaystyle\sum_{x\in X} a_x m_x. \end{array}$$

Es claro que f es un epimorfismo, entonces por el Teorema 1.12, $R^{(X)}/\mathrm{Ker}(f) \cong M$, es decir, M es cociente de un libre. □

1.1.5. Módulos noetherianos y módulos finitamente generados

Definición 1.34. *Sean $M \in R$-Mod y $X = \{x_i\}_{i\in I}$ un conjunto de generadores de M. Si X es finito decimos que M es* ***finitamente generado****.*

Definición 1.35. *Sea $M \in R$-Mod. Decimos que:*

(1) M es ***cíclico*** *si es generado por un elemento y lo denotamos por $M := Rx = \{ax \mid a \in R\}$.*

(2) M es ***simple*** *si es distinto de cero y sus únicos submódulos son 0 y M.*

Proposición 1.1.10. *Sean $L, M \in R$-Mod tales que $L \leq M$.*

(1) Si M es finitamente generado, entonces M/L es finitamente generado.

(2) Si L y M/L son finitamente generados, entonces M es finitamente generado.

Demostración. (1) Como M es finitamente generado existe $\{x_1,\ldots,x_n\}$ subconjunto de M tal que para todo $x \in M$, $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ con $a_i \in R$ para cada $i \in I$. Veamos que $\{\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n}\}$ genera a M/L. Sea $\overline{x} \in M/L$, entonces $\overline{x} = x+L = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + L = \sum_{i=1}^{n}(a_i x_i + L) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i+L) = \sum_{i=1}^{n} a_i\overline{x_i}$. Por lo tanto M/L es finitamente generado.

(2) Sean $\{x_i,\ldots,x_n\}$ y $\{\overline{y_1},\ldots,\overline{y_n}\}$ conjuntos generadores de L y M/L respectivamente. Sea $x \in M$, entonces $x + L = \overline{x} = \sum_{j=1}^{m} a_j\overline{y_j} = \sum_{j=1}^{m} a_j(y_j + L) = \sum_{j=1}^{m}(a_j y_j + L) = \sum_{j=1}^{m} a_j y_j + L$. Por lo tanto $x - \sum_{j=1}^{m} a_j y_j \in L$, entonces $x - \sum_{j=1}^{m} a_j y_j = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ y en consecuencia $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{j=1}^{m} a_j y_j$. Por lo tanto M es finitamente generado. □

Lema 1.36. *Si $f : M \longrightarrow N$ es un isomorfismo de módulos y N es finitamente generado, entonces M es finitamente generado.*

Demostración. Como f es isomorfismo podemos considerar la función $f^{-1}: N \longrightarrow M$ que también es isomorfismo. Sea $y \in M$, entonces existe $x \in N$ tal que $y = f^{-1}(x)$. Como $x \in N$ y N es finitamente generado, $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. Luego, $y = f^{-1}(x) = f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f^{-1}(a_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i f^{-1}(x_i)$. Por lo tanto M es finitamente generado. □

Proposición 1.1.11. *Sea* $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta corta de módulos. Si L y N son finitamente generados, entonces M es finitamente generado.*

Demostración. Como L es finitamente generado y $L \cong \mathrm{Im}(f)$, por el Lema 1.36, $\mathrm{Im}(f)$ es finitamente generado. Por otro lado, como g es epimorfismo, por el Teorema 1.12, $M/\mathrm{Im}(f) = M/\mathrm{Ker}(f) \cong N$ y como N es finitamente generado, por el Lema 1.36, $M/\mathrm{Im}(f)$ es finitamente generado. Por lo tanto, por (2) de la Proposición 1.1.10, M es finitamente generado. □

Definición 1.37. *$M \in R$-Mod es llamado* ***noetheriano*** *si todo submódulo de M es finitamente generado.*

Proposición 1.1.12. *Un módulo izquierdo M es noetheriano si y sólo si toda cadena ascendente de submódulos propios de M es finita.*

Demostración. Sea $L_1 < L_2 < \cdots L_m < \cdots$ una cadena ascendente de submódulos propios de M. Entonces $L = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} L_i$ es un submódulo propio de M y por hipótesis es finitamente generado, es decir, existe $\{x_i, \ldots, x_n\}$ subconjunto finito de L que lo genera. Por lo tanto existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\{x_i, \ldots, x_n\}$ es subconjunto de L_{n_0}. Entonces $L = L_{n_0}$ y $L_m = L_{n_0}$ para todo $m \geq n_0$.

Sea $L \leq M$, veamos que L es finitamente generado. Si $L = 0$ terminamos. Supongamos que $L \neq 0$, entonces existe $0 \neq x_1 \in L$. Consideremos $L_1 = Rx_1 \leq L$. Si $L_1 \neq L$, entonces existe $x_2 \in L$ tal que $x_2 \notin L_1$. Consideremos $L_2 = Rx_1 + Rx_2 \leq L$. Repitiendo este procedimiento, obtenemos la cadena $L_1 < L_2 < \cdots$ que por hipóteis es finita, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $L_n = L_{n+1}$. Luego, $L = L_n = Rx_1 + \cdots + Rx_n$. Por lo tanto L es finitamente generado y en consecuencia M es noetheriano. □

Lema 1.38. *Si $f: M \longrightarrow N$ es un isomorfismo de módulos y M es noetheriano, entonces N es noetheriano.*

Demostración. Sea $N' \leq N$, veamos que N' es finitamente generado. Como $f^{-1}(N') \leq M$ y M es noetheriano se sigue que $f^{-1}(N')$ es finitamente generado. Entonces como $f^{-1}(N') \cong N'$, por el Lema 1.36, N' es finitamente generado. Por lo tanto N es noetheriano. □

Proposición 1.1.13. *Sean $M \in R$-Mod y $L \leq M$. Entonces M es noetheriano si y sólo si L y M/L son noetherianos.*

Proposición 1.1.14. *Sea* $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta corta de módulos.*

(1) Si M es noetheriano, entonces L y N son noetherianos.

(2) Si L y N son noetherianos, entonces M es noetheriano.

Demostración. (1) L es noetheriano: Como f es monomorfismo, entonces $L \cong \mathrm{Im}(f)$. Y como $\mathrm{Im}(f) \leq M$ y M es noetheriano, por la Proposición 1.1.13, $\mathrm{Im}(f)$ es noetheriano. Luego, por el Lema 1.38, L es noetheriano.

N es noetheriano: Como g es epimorfismo, por el Teorema 1.12, $M/\mathrm{Ker}(g) \cong N$. Y como M es noetheriano, por la Proposición 1.1.13, $M/\mathrm{Ker}(g)$ es noetheriano. Luego, por el Lema 1.38, N es noetheriano.

(2) Como f es monomorfismo se sigue que $L \cong \mathrm{Im}(f)$ y como L es noetheriano, por el Lema 1.38, $\mathrm{Im}(f)$ es noetheriano. Por otro lado, como g es epimorfismo, por el Teorema 1.12, $M/\mathrm{Im}(f) = M/\mathrm{Ker}(g) \cong N$ y como N es noetheriano, por el Lema 1.1.13, $M/\mathrm{Im}(f)$ es noetheriano. Por lo tanto, por la Proposición 1.1.12, M es noetheriano. □

Definición 1.39. *Decimos que un anillo R es un* ***anillo noetheriano izquierdo*** *si ${}_RR$ es noetheriano.*

1.1.6. Módulos proyectivos e inyectivos

Definición 1.40. *Un módulo izquierdo P es llamado* ***proyectivo*** *si existe un morfismo $h : P \longrightarrow N$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama con fila exacta:*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es decir, $f = gh$.

Lema 1.41. *Todo módulo libre es proyectivo.*

Demostración. Sea $F \in R$-Mod libre, veamos que existe un morfismo $h : F \longrightarrow N$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama con fila exacta:

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es decir, $f = gh$. Como F es libre existe $\{x_i\}_{i\in I}$ base de F, entonces para cada $i \in I$, $f(x_i) \in N$ y como g es epimorfismo existen $y_i \in M$ tales que $f(x_i) = g(y_i)$ para cada $i \in I$. Definamos a h de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} h : F &\to M \\ x_i &\mapsto y_i, \end{aligned}$$

donde $f(x_i) = g(y_i)$ para cada $i \in I$. Es claro que h es morfismo. Luego, $f(x_i) = g(y_i) = g(h(x_i)) = (gh)(x_i)$, es decir, el diagrama anterior conmuta. Por lo tanto F es proyectivo. □

Proposición 1.1.15. *Sea $\{P_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos izquierdos. $P = \bigoplus_{i\in I} P_i$ es proyectivo si y sólo si todo P_i es proyectivo*

Demostración. Supongamos que P es proyectivo. Veamos que existe un morfismo $h : P_i \longrightarrow N$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama con fila exacta:

$$\begin{tikzcd} & P_i \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es decir, $f = gh$. Como P es proyectivo tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d, "h'"] & P_i \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es decir, $gh' = f\pi_i$. Consideremos $\iota_j : P_j \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} P_i$ y sea $h := h'\iota_j$. Entonces $gh = g(h'\iota_j) = (gh')\iota_j = (f\pi_j)\iota_j = f(\pi_j\iota_j) = f1_{P_j} = f$, es decir, $gh = f$.

Supongamos que todo P_i es proyectivo. Veamos que existe un morfismo $h : P \longrightarrow N$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama con fila exacta:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es decir, $f = gh$. Por hipótesis, para cada $i \in I$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} P_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[d, "h_i"] & P \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es decir, $gh_i = f\iota_i$. Sea $h := \sum_{i\in I} h_i\pi_i$, entonces tenemos lo siguiente: $gh = g\left(\sum_{i\in I} h_i\pi_i\right) = \sum_{i\in I} g(h_i\pi_i) = \sum_{i\in I}(gh_i)\pi_i = \sum_{i\in I}(f\iota_i)\pi_i = \sum_{i\in I} f(\iota_i\pi_i) = f\left(\sum_{i\in I}\iota_i\pi_i\right) = f1_P = f$, es decir, $f = gh$. □

Proposición 1.1.16. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un módulo izquierdo P:*

(1) P es proyectivo.

(2) P es isomorfo a un sumando directo de un libre.

(3) Toda sucesión exacta corta $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ se escinde.

Demostración. (1)⇒(2) Supongamos que P es proyectivo, por la Proposición 1.1.9, existe un epimorfismo $g : R^{(I)} \longrightarrow P$ con I un conjunto no vacío y $R^{(I)}$ libre. Como P es proyectivo y g epimorfismo tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "1_P"] \\ R^{(I)} \arrow[r, "g"] & P \end{tikzcd}$$

es decir, $gh = 1_P$. Luego, g se escinde y por (2) de la Proposición 1.1.6, $R^{(I)} = \mathrm{Im}(h) \oplus \mathrm{Ker}(g)$. Afirmamos que h es monomorfismo. En efecto, sea $x \in \mathrm{Ker}(h)$, entonces $x = 1_P(x) = (gh)(x) = g(h(x)) = g(0) = 0$. Entonces h es monomorfismo y en consecuencia $P \cong \mathrm{Im}(h)$.

(2)⇒(1) Supongamos que $P \cong K$ con K sumando directo de F y F libre, entonces existe un isomorfismo α de P a K y H submódulo de F tal que $F = K \oplus H$. Veamos que existe un morfismo $h : P \longrightarrow N$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama con fila exacta:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es decir, $f = gh$. Como $F = K \oplus H$, entonces por el Lema 1.41 y la Proposición 1.1.15, K es proyectivo. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "h'"] & P \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es decir, $gh' = f\alpha$. Sea $h = h'\alpha^{-1}$, entonces $gh = g(h'\alpha^{-1}) = (gh')\alpha^{-1} = (f\alpha)\alpha^{-1} = f(\alpha\alpha^{-1}) = f1_P = f$, es decir, $gh = f$.

(3)⇒(1) Se sigue de la Proposición 1.1.7.

(3)⇒(2) Supongamos que toda sucesión exacta corta $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ se escinde. Como todo módulo izquierdo es cociente de un libre, existe un epimorfismo $g : F \longrightarrow P$ con F libre. Entonces tenemos la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(g) \longrightarrow F \longrightarrow P \longrightarrow 0$. Entonces, por hipótesis $F \cong P \oplus \mathrm{Ker}(g)$. Por lo tanto, por el Lema 1.41 y la Proposición 1.1.15, P es proyectivo. □

Definición 1.42. *Un módulo izquierdo E es llamado* ***inyectivo*** *si existe un morfismo $h : M \longrightarrow E$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama con fila exacta:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

es decir, $f = hg$.

Proposición 1.1.17. *Si E es un módulo inyectivo y E' es un sumando directo de E, entonces E' es inyectivo.*

Demostración. Supongamos que E es inyectivo. Veamos que existe un morfismo $h : M \longrightarrow E'$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama con fila exacta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & E' & \end{tikzcd}$$

es decir, $f = hg$. Como E es inyectivo tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[d, "h'"] \\ & E' \arrow[r, "\iota_{E'}"] & E \end{tikzcd}$$

es decir, $\iota_{E'} f = h'g$. Sea $h = \pi_{E'} h'$, entonces $hg = (\pi_{E'} h')g = \pi_{E'}(h'g) = \pi_{E'}(\iota_{E'} f) = (\pi_{E'}\iota_{E'})f = 1_{E'} f = f$, es decir, $hg = f$. □

Proposición 1.1.18. *Sea* $\{E_i\}_{i\in I}$ *una familia de módulos izquierdos. Entonces* $E = \prod_{i\in I} E_i$ *es inyectivo si y sólo si cada* E_i *es inyectivo.*

Demostración. Supongamos que E es inyectivo. Veamos que existe un morfismo $h : M \longrightarrow E_i$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama con fila exacta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & E_i & \end{tikzcd}$$

es decir, $f = hg$. Como E es inyectivo tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[d, "h'"] \\ & E_i \arrow[r, "\iota_i"] & E \end{tikzcd}$$

es decir, $\iota_i f = h'g$. Sea $h = \pi_i h'$, entonces $hg = (\pi_i h')g = \pi_i(h'g) = \pi_i(\iota_i f) = (\pi_i\iota_i)f = 1_{E_i}f = f$, es decir, $hg = f$.

Supongamos que todo E_i es inyectivo. Veamos que existe un morfismo $h : M \longrightarrow E$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama con fila exacta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

es decir, $f = hg$. Por hipótesis, para cada $i \in I$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[d, "h_i"] \\ & E \arrow[r, "\pi_i"] & E_i \end{tikzcd}$$

es decir, $\pi_i f = h_i g$. Sea $h = \sum_{i\in I} \iota_i h_i$, entonces tenemos que: $hg = \left(\sum_{i\in I} \iota_i h_i\right) g = \sum_{i\in I} (\iota_i h_i) g = \sum_{i\in I} \iota_i(h_i g) = \sum_{i\in I} \iota_i(\pi_i f) = \sum_{i\in I} (\iota_i \pi_i) f = \left(\sum_{i\in I} \iota_i \pi_i\right) f = 1_E f = f$, es decir, $hg = f$. □

Proposición 1.1.19. *Si* $N \in R$*-Mod y* M *un submódulo inyectivo de* N*, entonces* M *es sumando directo de* N*.*

Demostración. Sean $N \in R$-Mod y M un submódulo inyectivo de N. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "1_M"] & N \arrow[dl, "h"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

es decir, $h\iota = 1_M$. Por lo tanto ι es un monomorfismo que se escinde y por (1) de la Proposición 1.1.6 concluimos que $M = \iota(M)$ es un sumando directo de N. □

1.1.7. Cubiertas proyectivas y cápsulas inyectivas de módulos

Definición 1.43.

(1) Un submódulo K de un módulo izquierdo M es llamado ***superfluo*** *en M (denotado por $K \ll M$), si para todo $L \leq M$ tal que $K + L = M$, se tiene que $L = M$.*

(2) Un epimorfismo $g : M \longrightarrow N$ es llamado ***epimorfismo superfluo*** *si $Ker(f) \ll M$.*

Observación 1.44. *$K \ll M$ si y sólo si el morfismo natural $\pi : M \longrightarrow M/K$ es un epimorfismo superfluo.*

Proposición 1.1.20. *Sean $K, L, M, N \in R$-Mod.*

(1) Si $f : M \longrightarrow N$ y $g : N \longrightarrow L$ son epimorfismos, entonces gf es un epimorfismo superfluo si y sólo si f y g son superfluos.

(2) Si $K \leq L \subseteq M$, entonces $L \ll M$ si y sólo si $K \ll M$ y $L/K \ll M/K$.

(3) Si $\{K_i\}_{i=1}^{n}$ es una familia de submódulos superfluos de M, entonces $\sum_{i=1}^{n} K_i$ es superfluo en M.

(4) Si $K \ll M$ y $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo, entonces $f(K) \ll N$.

(5) Si $K \leq L \leq M$ y L es un sumando directo de M, entonces $K \ll M$ si y sólo si $K \ll L$.

Demostración. (1) Sean $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow L$ dos epimorfismos y supongamos que gf es un epimorfismo superfluo. Primero veamos que f es un epimorfismo superfluo. Sea $U \leq M$ tal que $\text{Ker}(f) + U = M$. Como $\text{Ker}(f) \leq \text{Ker}(gf)$ se sigue que $\text{Ker}(gf) + U = M$. Y como $\text{Ker}(gf) \ll M$ concluimos que $U = M$. Por lo tanto f es un epimorfismo superfluo.

Ahora veamos que g es un epimorfismo superfluo. Sea $U \leq N$ tal que $\text{Ker}(g)+U = N$, entonces $f^{-1}(\text{Ker}(g)+U) = f^{-1}(N) = M$. Pero como $\text{Ker}(g) \leq N = \text{Im}(f)$ y $U \leq N = \text{Im}(f)$, por el Lema 1.11 y la Proposición 1.1.3, $f^{-1}(\text{Ker}(g)+U) = f^{-1}(\text{Ker}(g))+f^{-1}(U) = \text{Ker}(gf)+f^{-1}(U)$. Luego, $\text{Ker}(gf) + f^{-1}(U) = M$. Y como $\text{Ker}(gf) \ll M$ concluimos que $f^{-1}(U) = M$. Entonces, por la Proposición 1.1.3, $U = N$. Por lo tanto g es un epimorfismo superfluo.

Sean $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow L$ dos epimorfismos y supongamos que tanto f como g son superfluos. Sea $U \leq M$ tal que $\text{Ker}(gf)+U = M$. Por la Proposición 1.1.3, $\text{Ker}(gf) = f^{-1}(\text{Ker}(g))$. Entonces tenemos que $f^{-1}(\text{Ker}(g))+U = M$. Y por el Lema 1.11 se sigue que $\text{Ker}(g)+f(U) = N$. Pero como $\text{Ker}(g) \ll N$ se sigue que $f(U) = N$ y en consecuencia $\text{Ker}(f) + U = M$. Y como $\text{Ker}(f) \ll M$ concluimos que $U = M$. Por lo tanto gf es un epimorfismo superfluo.

(2) Supongamos que $L \ll M$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$M \xrightarrow{f} M/K \xrightarrow{g} (M/K)/(L/K) \cong M/L$$

con f y g el morfismo natural. Observemos que $\text{Ker}(gf) = L \ll M$, es decir, $\text{Ker}(gf) \ll M$. Entonces por (1) tenemos que f y g son epimorfismos superfluos. Por lo tanto $K = \text{Ker}(f) \ll M$ y $L/K = \text{Ker}(g) \ll M/K$.

Supongamos que $K \ll M$ y $L/K \ll M/K$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$M \xrightarrow{f} M/K \xrightarrow{g} (M/K)/(L/K) \cong M/L$$

con f y g el morfismo natural. Como $K \ll M$ y $L/K \ll M/K$ tenemos que f y g son epimorfismos superfluos. Entonces por (1), $L = \text{Ker}(gf) \ll M$.

(3) $n=2$: Supongamos que K_1, K_2 son superfluos en M. Veamos que K_1+K_2 es superfluo en M. Sea $U \leq M$ tal que $K_1+K_2+U=M$. Como $K_1 \ll M$, $K_2+U=M$. Y como $K_2 \ll M$, $U=M$. Por lo tanto $K_1+K_2 \ll M$.

$n+1$: Sea $K_{i}{}_{i=1}^{n}$ una familia de submódulos superfluos de M. Supongamos que $\sum_{i=1}^{n} K_i \ll M$. Veamos que $\sum_{i=1}^{n+1} K_i \ll M$. Sea $U \leq M$ tal que $\sum_{i=1}^{n} K_i + K_{n+1} + U = \sum_{i=1}^{n+1} K_i + U = M$. Como $\sum_{i=1}^{n} K_i \ll M$ se sigue que $K_{n+1}+U=M$ y como $K_n \ll N$ concluimos que $U=M$. Por lo tanto $\sum_{i=1}^{n+1} K_i \ll M$.

(4) Sea $U \leq N$ tal que $f(K)+U=N$. Afirmamos que $M=K+f^{-1}(U)$, como K y $f^{-1}(U)$ son submódulos de M es suficiente demostrar que $M \leq K+f^{-1}(U)$. Sea $x \in M$, entonces $f(x) \in N$. Por lo tanto $f(x)=f(k)+u$ con $k \in K$ y $u \in U$. Entonces $f(x-k)=u \in U$ y en consecuencia $x-k \in f^{-1}(U)$. Por lo tanto $x \in K+f^{-1}(U)$ y como $K \ll M$ se sigue que $f^{-1}(U)=M$. Entonces $U \cap \operatorname{Im}(f) = f(f^{-1}(U)) = f(M)$ y en consecuencia $\operatorname{Im}(f) \leq U$. Como $f(K) \leq \operatorname{Im}(f)$, entonces $f(K) \leq U$, de donde $U=f(K)+U=N$, es decir, $U=N$. Por lo tanto $f(K) \ll N$.

(5) Supongamos que $K \leq L \leq M$ y que L es un sumando directo de M, entonces existe $H \leq M$ tal que $M = L \oplus H$.

Sea $f : M \longrightarrow L$ tal que $l+h \longmapsto l$. Como $K \leq L$, $f(K)=K$ y como $K \ll M$, por (4) se sigue que $K=f(K) \ll M$.

Sea $g : L \longrightarrow M$ tal que $l \longmapsto l+0$. Como $K \leq L$, $g(K)=K$ y como $K \ll M$ se sigue que $K=g(K) \ll M$. $\square$

Definición 1.45. *Una* ***cubierta proyectiva*** *de un módulo izquiero M es un par ordenado (P,φ), donde P es un módulo proyectivo y $\varphi : P \longrightarrow M$ es un epimorfismo superfluo.*

Definición 1.46.

(1) Un submódulo K de un módulo izquierdo M es llamado ***esencial*** *en M (denotado por $K \leq_{es} M$), si para todo $L \leq M$ tal que $K \cap L = 0$, se tiene que $L=0$.*

(2) Un monomorfismo $f : L \longrightarrow M$ es llamado ***monomorfismo esencial*** *si $Im(f) \leq_{es} M$.*

Observación 1.47. *$K \leq_{es} M$ si y sólo si $\iota : K \hookrightarrow M$ es un monomorfismo esencial.*

Lema 1.48. *$K \leq M$ es esencial en M si y sólo si para todo $0 \neq x \in M$ existe $0 \neq r \in R$ tal que $0 \neq rx \in K$.*

Demostración. Supongamos que K es esencial en M. Sea $0 \neq x \in M$, entonces $0 \neq Rx$, y como $K \leq_{es} M$, $K \cap Rx \neq 0$. Por lo tanto existe $0 \neq y \in K \cap Rx$, entonces $rx = y \in K$ para algún $r \in R$.

Supongamos que para todo $0 \neq x \in M$ existe $0 \neq r \in R$ tal que $0 \neq rx \in K$. Sea $0 \neq L \leq M$, entonces existe $0 \neq x \in L$ y por tanto en M. Entonces, por hipótesis existe $r \in R$ tal que $0 \neq rx \in K$. Por lo tanto $0 \neq rx \in K \cap L$ y en consecuencia $K \leq_{es} M$. $\square$

Proposición 1.1.21. *Sean $K, L, M \in R$-Mod.*

(1) Dos monomorfismos $f : K \longrightarrow L$ y $g : L \longrightarrow M$ son esenciales si y sólo si gf es esencial.

(2) Si $K \leq L \leq M$, entonces $K \leq_{es} M$ si y sólo si $K \leq_{es} L \leq_{es} M$.

(3) Si $h : K \longrightarrow M$ *es un morfismo y* $L \leq_{es} M$*, entonces* $h^{-1}(L) \leq_{es} K$.

(4) Si $K_1 \leq_{es} L_1 \leq M$ *y* $K_2 \leq_{es} L_2 \leq M$*, entonces* $K_1 \cap K_2 \leq_{es} L_1 \cap L_2$.

(5) Si $\{K_i\}_{i=1}^{n}$ *es una familia de submódulos esenciales de* M*, entonces* $\bigcap_{i=1}^{n} K_i \leq_{es} M$.

Demostración. Es dual a la demostración de la Proposición 1.1.20. $\square$

Definición 1.49. *Una* ***cápsula inyectiva*** *de un módulo izquierdo* M *es un par* (E, ψ)*, donde* E *es un módulo inyectivo y* $\psi : M \longrightarrow E$ *es un monomorfismo esencial.*

Observación 1.50. *Si* $M \in R$*-Mod, denotamos por* $E(M)$ *a su cápsula inyectiva y esta es única salvo isomorfismos.*

1.1.8. Módulos semisimples

Recordemos que un módulo izquierdo S es simple si es distinto de cero y sus únicos submódulos son los triviales.

Lema 1.51. *Un* R*-módulo izquierdo* M *es simple si y sólo si* $M \neq 0$ *y para todo* $0 \neq x \in M$, $M = Rx$.

Demostración. Supongamos que M es simple, entonces $M \neq 0$. Sea $0 \neq x \in M$, entonces $Rx \neq 0$ y puesto que $Rx \leq M$ tenemos que $Rx = M$.

Supongamos que $M \neq 0$ y que para todo $0 \neq x \in M$, $M = Rx$. Sea $0 \neq L \leq M$, entonces existe $0 \neq x \in L$ y por tanto en M. Entonces por hipótesis se sigue que $Rx = M$. Por lo tanto $L \leq M = Rx \leq L$, es decir, $L = M$ y en consecuencia M es simple. $\square$

Definición 1.52. *Decimos que un módulo izquierdo* M *es* ***semisimple*** *si es suma de simples. Esto es,*

$$M = \sum_{i \in I} S_i$$

donde cada S_i *es simple.*

Notemos que si $I = \varnothing$, entonces $M = \sum_{i \in \varnothing} S_i = \{0\}$.

Ejemplo 5. *Todo módulo simple es semisimple. En particular el* $\{0\}$ *es semisimple.*

Lema 1.53. *Sea* $M = \sum_{i \in I} S_i$ *donde cada* S_i *es simple. Si* $L \leq M$*, entonces existe* J *subconjunto de* I *tal que* $M = L \oplus \left(\bigoplus_{i \in J} S_i \right)$.

Demostración. Sea $\Gamma := \left\{ J \subseteq I \;\middle|\; L + \left(\sum_{i \in J} S_i \right) \text{ es directa} \right\}$. Como $\varnothing \subset I$ es tal que $L + \left(\bigoplus_{i \in \varnothing} S_i \right) = L + 0$ es directa se sigue que $\varnothing \in \Gamma$. Luego, $\Gamma \neq \varnothing$. Además es claro que Γ está ordenado por la inclusión. Sea $\Phi = \{J_\lambda\}_\Lambda$ una cadena de elementos de Γ y sea $J^* = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda$. Es claro que J^* es cota superior de Φ, veamos que $J^* \in \Gamma$. Sea $x \in L \bigcap \left(\bigoplus_{i \in J^*} S_i \right)$, entonces $x \in L$ y

$x \in \left(\bigoplus_{i\in J^*} S_i\right)$. Como $x \in \left(\bigoplus_{i\in J^*} S_i\right)$ existe $J' \subseteq J^*$ finito tal que $x \in \left(\sum_{i\in J'} S_i\right)$. Como Φ es una cadena existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $J' \subseteq J_\lambda$. Luego, $x \in L \bigcap \left(\bigoplus_{i\in J_\lambda} S_i\right) = 0$, es decir, $x = 0$. Por lo tanto $J^* \in \Gamma$. Entonces por el Lema de Zorn existe $J \subseteq I$ máximo tal que $M' = L + \left(\sum_{i\in J} S_i\right)$ es directa.

Ahora falta demostrar que $M = M'$. Como $M = \sum_{i\in I} S_i$, basta demostrar que $S_i \leq M'$ para cada $i \in I$. Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que existe $i_0 \in I$ tal que $S_{i_0} \nleq M'$. Notemos que $i_0 \notin J$ ya que de ser así $S_{i_0} \leq M'$ que es una contradicción. Entonces, $S_{i_0} \cap M' = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} M' + S_{i_0} &= \left(L + \left(\sum_{i\in J} S_i\right)\right) + S_{i_0} \\ &= L + \left(\left(\sum_{i\in J} S_i\right) + S_{i_0}\right) \\ &= L + \left(\sum_{i\in J\bigcup\{i_0\}} S_i\right). \end{aligned}$$

es directa. Por lo tanto $J \subset J \cup \{i_0\} \in \Gamma$ que es una contradicción por la elección de J. Luego, $S_i \leq M$ para cada $i \in I$. □

Observación 1.54. *Sea $M \in R$-Mod y supongamos que todo submódulo de M es sumando directo de M. Entonces:*

(1) Todo submódulo de M tiene está misma propiedad.

(2) Todo submódulo no nulo de M tiene un submódulo simple.

Demostración. (1) Sea $L \leq M$ y sea $K \leq L$, veamos que existe $K' \leq L$ tal que $L = K \oplus K'$. Como $K \leq L$ y $L \leq M$ tenemos que $K \leq M$. Por lo tanto existe $H \leq M$ tal que $M = K \oplus H$. Como $K \leq L$, por el Lema 1.4 tenemos que $L = M \cap L = (H \oplus K) \cap L = (H \cap L) \oplus K$. Por lo tanto, si $K' = H \cap L$ tenemos lo deseado.

(2) Sea $0 \neq x \in M$ y consideremos Rx. Como Rx es finitamente generado existe L submódulo máximo de Rx. Como L es submódulo de M existe K submódulo de M tal que $M = L \oplus K$. Luego, por el Lema 1.4, $(K \cap Rx) \oplus L = (K \oplus L) \cap Rx = M \cap Rx = Rx$. Por lo tanto $K \cap Rx \cong Rx/L$ es simple y en consecuencia Rx tiene un submódulo simple. □

Proposición 1.1.22. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un módulo izquierdo S.*

(1) M es semisimple.

(2) M es una suma directa de simples.

(3) Todo submódulo de M es un sumando directo.

Demostración. (1)⇒(2) Se sigue del Lema 1.53 tomando $L = 0$.

(2)⇒(1) Es claro.

(1)⇒(3) Se sigue del Lema 1.53.

(3)⇒(1) Sea L la suma de todos los submódulos simples de M. Veamos que $M = L$. Supongamos que $L < M$, entonces $M = L \oplus K$ para algún $K \leq M$. Como $K \leq M$, por (2) de la Observación 1.54 existe S submódulo simple de K. Luego, $S \cap L \leq K \cap L = 0$, es decir, $S \cap L = 0$ lo que contradice la elección de L. Por lo tanto $M = L$. □

Corolario 1.55. *Si* $M = \sum_{i\in I} S_i$ *donde cada* S_i *es simple y* $L \leq M$*, entonces* $L \cong \bigoplus_{i\in J} S_i$ *donde* J *es un subconjunto de* I*.*

Demostración. Como M es semisimple y $L \leq M$, por (3) de la Proposición 1.1.22, $M = L \oplus K$ para algún $K \leq M$. Luego, por el Teorema 1.14, $M/K \cong L$. Y como $K \leq M$, por el Lema 1.53, $M = K \oplus \left(\bigoplus_{i\in J} S_i\right)$ con J subconjunto de I. Luego, por el Teorema 1.14, $M/K \cong \bigoplus_{i\in J} S_i$. Por lo tanto $L \cong \bigoplus_{i\in J} S_i$ para algún $J \subseteq I$. □

Corolario 1.56. *Si* $M = \sum_{i\in I} S_i$ *donde cada* S_i *es simple y* $L \leq M$*, entonces* M/L *es semisimple.*

Demostración. Como $L \leq M$, por el Corolario 1.55, existe J subconjunto de I tal que $L \cong \bigoplus_{i\in J} S_i$. Entonces por el Teorema 1.12,

$$M/L \cong \left(\bigoplus_{i\in I} S_i\right) / \left(\bigoplus_{i\in J} S_i\right) \cong \bigoplus_{i\in I\setminus J} S_i.$$

□

1.1.9. Módulos MAX

Definición 1.57. *Un módulo izquierdo* M *es llamado* ***módulo MAX*** *si y sólo si todo submódulo distinto de cero* L *de* M *tiene al menos un submódulo máximo.*

Observación 1.58. *Un módulo izquierdo* M *es MAX si y sólo si todo submódulo distinto de cero de* M *tiene un cociente simple.*

Proposición 1.1.23. *Sea* M *un módulo izquierdo y sea* $0 \neq L \leq M$*. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) M *es MAX.*

(2) L *y* M/L *son MAX.*

Demostración. (1)⇒(2) L es MAX: Es claro.

M/L es MAX: Sea $0 \neq M'/L \leq M/L$, entonces $M' \leq M$. Como M es MAX existe K submódulo máximo de M'. Consideremos los siguientes casos:

- Caso 1. Si $K = K + L$, entonces $L \leq K$. Luego, M'/K es un cociente simple de M'/L.
- Caso 2. Si K es un submódulo propio de $K + L$, entonces $K + L = M'$. Como L es MAX, existe K' submódulo máximo de L. Luego, $M'/L = (K+L)/L \cong ((K+L)/K')/(L/K')$. En consecuencia L/K' es un cociente simple de M'/L.

Por lo tanto M/L es MAX.

(2)⇒(1) Sea $0 \neq M' \leq M$. Si $(M' + L)/L = 0$, entonces $M' + L = L$. Luego $M' \leq L$ y como L es MAX terminamos. Si $(M' + L)/L \neq 0$, como $(M' + L)/L \leq M/L$ y M/L es MAX, entonces $(M' + L)/L$ tiene un submódulo máximo K/L. Pero por el Teorema 1.13, $(M' + L)/L \cong M'/(L \cap M')$. Luego, M' tiene un cociente simple. □

Lema 1.59. *Sea* $f : M \longrightarrow N$ *un isomorfismo de módulos. Si* M *es MAX, entonces* N *es MAX.*

Demostración. Sea $0 \neq N' \leq N$, entonces $f^{-1}(N') \leq M$. Como M es MAX existe K submódulo máximo de $f^{-1}(N')$. Luego, $f(K)$ es submódulo máximo de N'. Por lo tanto N es MAX. $\square$

Proposición 1.1.24. *Sean $L, M, N \in R$-Mod y consideremos la siguiente sucesión exacta corta:*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0.$$

Si L y N son MAX, entonces M es MAX.

Demostración. Se sigue de la Proposición 1.1.23 y el Lema 1.59. $\square$

Proposición 1.1.25. *Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos izquierdos. Entonces $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ es MAX si y sólo si cada M_i es MAX.*

Demostración. Supongamos que $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ es MAX, entonces por la Proposición 1.1.23 y el Lema 1.59 concluimos que cada M_i es MAX.

Supongamos que cada M_i es MAX. Sea $0 \neq N \leq M$, entonces existe $0 \neq \sum_{i\in J} x_i \in N$ con J un subconjunto finito de I. Sea $i_0 \in J$ tal que $x_{i_0} \neq 0$ y consideremos el morfismo $\pi_{i_0}\iota_N : N \longrightarrow M_{i_0}$. Es claro que $0 \neq \pi_{i_0}\iota_N$. Como $\pi_{i_0}\iota_N(N) \leq M_{i_0}$ y M_{i_0} es MAX, $\pi_{i_0}\iota_N(N)$ tiene un cociente simple. Por lo tanto N tiene un cociente simple. Luego, M es MAX. $\square$

1.2. Clases de módulos

Definición 1.60. *Sea $\mathscr{C}$ una clases de módulos. Decimos que $\mathscr{C}$ es:*

(a) ***Abstracta*** *si es cerrada bajo isomorfismos. Esto es, si $M \cong N$ y $M \in \mathscr{C}$, entonces $N \in \mathscr{C}$.*

(b) ***Hereditaria*** *si es abstracta y cerrada bajo submódulos. Esto es, si $N \leq M$ y $M \in \mathscr{C}$, entonces $N \in \mathscr{C}$.*

(c) ***Cohereditaria*** *si es cerrada bajo imágenes homomorfas. Esto es, si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de módulos y $M \in \mathscr{C}$, entonces $f(M) \in \mathscr{C}$.*

(d) ***Estable*** *si cada $M \in \mathscr{C}$ tiene una presentación inyectiva en $\mathscr{C}$. Esto es, si hay un monomorfismo $\alpha : M \longrightarrow Q$ con $Q \in \mathscr{C}$ inyectivo.*

(e) ***Coestable*** *si cada $M \in \mathscr{C}$ tiene una presentación proyectiva en $\mathscr{C}$. Esto es, si hay un epimorfismo $\beta : P \longrightarrow M$ con $P \in \mathscr{C}$ proyectivo.*

(f) ***Cerrada bajo cocientes*** *si dados $M \in \mathscr{C}$ y $N \leq M$, entonces $M/N \in \mathscr{C}$.*

(g) ***Cerrada bajo sumandos directos*** *si dados $M \in \mathscr{C}$ y N sumando directo de M, entonces $N \in \mathscr{C}$.*

(h) ***Cerrada bajo productos*** *si dada $\{M_i\}_{i\in I} \leq \mathscr{C}$, se sigue que $\prod_{i\in I} M_i \in \mathscr{C}$.*

(i) ***Cerrada bajo sumas directas*** *si dada $\{M_i\}_{i\in I} \leq \mathscr{C}$, se sigue que $\bigoplus_{i\in I} M_i \in \mathscr{C}$.*

(j) ***Cerrada bajo extensiones*** *si para cada sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0.$$

con $L, N \in \mathscr{C}$ se tiene que $M \in \mathscr{C}$.

(k) *De **pretorsión** si es cohereditaria y cerrada bajo sumas directas, es decir, si es cerrada bajo cocientes y sumas directas.*

(l) ***Libre de pretorsión** si es hereditaria y cerrada bajo productos directos, es decir, si es cerrada bajo submódulos y productos directos.*

(m) *De **torsión** si es de pretorsión y cerrada bajo extensiones, es decir, si es cerrada bajo cocientes, sumas directas y extensiones.*

(n) ***Libre de torsión** si es libre de pretorsión y cerrada bajo extensiones, es decir, si es cerrada bajo submódulos, productos directos y extensiones.*

Ejemplo 6. *Los siguientes son ejemplos de clases de módulos con propiedades de cerradura.*

(1) *La clase de todos los módulos finitamente generados es cerrada bajo cocientes y extensiones.*

(2) *La clase de todos los módulos inyectivos es cerrada bajo sumandos directos y bajo productos.*

(3) *La clase de todos los módulos proyectivos es cerrada bajo sumas directas.*

(4) *La clase de todos los módulos noetherianos es cerrada bajo submódulos, cocientes y extensiones.*

(5) *La clase de todos los módulos semisimples es cerrada bajo submódulos, cocientes y sumas directas.*

(6) *La clase de todos los módulos MAX es cerrada bajo submódulos, cocientes, extensiones exactas y sumas directas.*

Demostración. (1) Ver Proposición 1.1.10.
(2) Ver Proposición 1.1.17 y Proposición 1.1.18.
(3) Ver Proposición 1.1.15.
(4) Ver Proposición 1.1.13 y Proposición 1.1.14.
(5) Ver Corolario 1.55, Corolario 1.56 y es claro que la clase de los semisimples es cerrada bajo sumas directas.
(6) Ver Proposición 1.1.23, Proposición 1.1.24 y Proposición 1.1.25. □

Proposición 1.2.1. *Sea $\mathscr{C}$ una clase de módulos. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *$\mathscr{C}$ es hereditaria.*

(2) *Para cada monomorfismo de módulos $f : M \longrightarrow N$ con $N \in \mathscr{C}$, se sigue que $M \in \mathscr{C}$.*

Demostración. (1)⇒(2) Supongamos que $\mathscr{C}$ es hereditaria y sea $f : M \longrightarrow N$ un monomorfismo de módulos con $N \in \mathscr{C}$. Como $f(M) \leq N$ por hipótesis se sigue que $f(M) \in \mathscr{C}$. Notemos que si correstringimos f a su imagen, entonces $M \cong f(M)$ de donde $M \in \mathscr{C}$.

(2)⇒(1) Supongamos que para cada monomorfismo de módulos $f : M \longrightarrow N$ con $N \in \mathscr{C}$, $M \in \mathscr{C}$. Sea $A \in \mathscr{C}$ y sea B un submódulo de A, consideremos el morfismo inclusión $\iota : B \hookrightarrow A$. Como ι es monomorfismo y $A \in \mathscr{C}$ por hipótesis se sigue que $B \in \mathscr{C}$, es decir, $\mathscr{C}$ es hereditaria. □

Proposición 1.2.2. *Sea $\mathscr{C}$ una clase de módulos abstracta. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *$\mathscr{C}$ es cohereditaria.*

(2) *$\mathscr{C}$ es cerrada bajo cocientes.*

Demostración. (1)⇒(2) Supongamos que $\mathscr{C}$ es cohereditaria. Sea $M \in \mathscr{C}$ y sea N un submódulo de M, veamos que $M/N \in \mathscr{C}$. Consideremos el morfismo natural $\pi : M \twoheadrightarrow M/N$, como π es epimorfismo se sigue que $\mathrm{Im}(\pi) = M/N$. Entonces por hipótesis concluimos que $M/N \in \mathscr{C}$.

(2)⇒(1) Supongamos que $\mathscr{C}$ es cerrada bajo cocientes. Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de módulos con $M \in \mathscr{C}$, veamos que $f(M) \in \mathscr{C}$. Por el Primer Teorema de Isomorfismo tenemos que $f(M) \cong M/\mathrm{Ker}(f^{|f(M)})$. Además como $\mathscr{C}$ es cerrada bajo cocientes y $M \in \mathscr{C}$ tenemos que $M/\mathrm{Ker}(f^{|f(M)}) \in \mathscr{C}$. Por lo tanto, como $\mathscr{C}$ es abstracta concluimos que $f(M) \in \mathscr{C}$, es decir, $\mathscr{C}$ es cohereditaria. □

Observación 1.61. *En la Proposición 1.2.2 si $\mathscr{C}$ no es abstracta sólo se cumple (1) implica (2).*

Observación 1.62. *Como todo módulo es cociente de un libre y todo libre es proyectivo, entonces todo módulo tiene una presentación proyectiva.*

Proposición 1.2.3. *Sea $\mathscr{C}$ una clase de módulos abstracta tal que $\mathscr{C}$ es cerrada bajo sumandos directos y todo módulo en $\mathscr{C}$ tiene cubierta proyectiva. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $\mathscr{C}$ es coestable.

(2) $\mathscr{C}$ es cerrada bajo cubiertas proyectivas.

Demostración. (1)⇒(2) Supongamos que $\mathscr{C}$ es coestable y sea $M \in \mathscr{C}$, entonces existe un epimorfismo $f : F \longrightarrow M$ con $F \in \mathscr{C}$ proyectivo. Y como $M \in \mathscr{C}$ existe $g : P \longrightarrow M$ cubierta proyectiva de M. Como F es proyectivo existe $h : F \longrightarrow P$ tal que $gh = f$. Afirmamos que h es epimorfismo. En efecto, sea $x \in P$, entonces $g(x) \in M$. Como f es epimorfismo existe $y \in F$ tal que $g(x) = f(y) = (gh)(y) = g(h(y))$. Entonces $g(x - h(y)) = 0$ y en consecuencia $x - h(y) \in \mathrm{Ker}(g)$. Luego, $x = h(y) + (x - h(y)) \in \mathrm{Im}(h) + \mathrm{Ker}(g)$ y como $\mathrm{Ker}(g) \ll P$ concluimos que $\mathrm{Im}(h) = P$. Por lo tanto h es epimorfismo y en consecuencia P es sumando directo de F.

(2)⇒(1) Es claro. □

Observación 1.63. *Como todo módulo tiene cápsula inyectiva, entonces todo módulo tiene una presentación inyectiva.*

Lema 1.64. *Sean $M \in R$-Mod y $N \leq M$, entonces $E(N)$ es isomorfo a un submódulo de $E(M)$.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & E(N) \\ & M \arrow[r, "h"] & E(M) \end{tikzcd}$$

con f, g y h el morfismo inclusión. Como $E(M)$ es inyectivo existe $k : E(N) \longrightarrow E(M)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & E(N) \arrow[d, "k"] \\ & M \arrow[r, "h"] & E(M) \end{tikzcd}$$

es decir, $hg = kf$. Afirmamos que k es monomorfismo. Supongamos lo contrario, sea $0 \neq x \in E(N)$ tal que $k(x) = 0$. Como $N \leq_{es} E(N)$, por el Lema 1.48, existe $r \in R$ tal que $0 \neq rx \in N$. Entonces $0 \neq rx = h(g(rx)) = k(f(rx)) = k(rx) = rk(x) = r0 = 0$ que es una contradicción. Por lo tanto k es monomorfismo y en consecuencia $E(N) \cong k(E(N)) \leq E(M)$. □

Proposición 1.2.4. *Sea $\mathscr{C}$ una clase de módulos abstracta cerrada bajo sumandos directos. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\mathscr{C}$ es estable.

(2) $\mathscr{C}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas.

Demostración. (1) Sean $M, Q \in \mathscr{C}$ tales que Q es inyectivo y $M \leq Q$. Por el Lema 1.64 tenemos que $E(M) \cong K$ con $K \leq Q$. Como $E(M)$ es inyectivo y $E(M) \cong K$ se sigue que K es inyectivo. Entonces por la Proposición 1.1.19, K es sumando directo de Q. Como $Q \in \mathscr{C}$ y $\mathscr{C}$ es cerrada bajo sumandos directos tenemos que $K \in \mathscr{C}$. Por lo tanto $E(M) \in \mathscr{C}$.

(2) Es claro. $\square$

Capítulo 2

Prerradicales

2.1. Propiedades básicas y definiciones

Este capítulo tiene un carácter introductorio. Se presentan algunas definiciones y resultados fáciles con respecto a las propiedades básicas de los prerradicales.

Definición 2.1. *Sea* $r : R\text{-}Mod \longrightarrow R\text{-}Mod$ *un funtor. Decimos que* r *es un* ***prerradical*** *en* R*-Mod si es un subfuntor del funtor identidad; esto es, si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) Para todo $M \in R\text{-}Mod$*,* $r(M) \leq M$*.*

(b) Para todo morfismo $f : M \longrightarrow N$*,* $f(r(M)) \leq r(N)$*. Esto es, el siguiente diagrama está bien definido y es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} r(M) \arrow[r, hook, "\iota_{r(M)}"] \arrow[d, "f_{|r(M)}"'] & M \arrow[d, "f"] \\ r(N) \arrow[r, hook, "\iota_{r(N)}"] & N \end{tikzcd}$$

donde $\iota_{r(M)}$ *e* $\iota_{r(N)}$ *son el morfismo inclusión.*

Observación 2.2. *Sea* r *un prerradical y sean* $M, N \in R\text{-}Mod$*. Entonces:*

(a) Si N *es submódulo de* M*, entonces* $r(N) \leq r(M)$*.*

(b) Si $f : M \longrightarrow N$ *es monomorfismo, entonces* $f_{|r(M)}$ *también lo es.*

Demostración. (a) Como N es submódulo de M podemos considerar el morfismo inclusión $\iota : N \longrightarrow M$. Y como r es prerradical se sigue que: $r(N) = \iota(r(N)) \leq r(M)$.

(b) Sean $x, y \in r(M)$ tales que $f_{|r(M)}(x) = f_{|r(M)}(y)$, entonces $f(x) = f(y)$ y como f es monomorfismo se sigue que $x = y$. Por lo tanto $f_{|r(M)}$ es monomorfismo. □

Lema 2.3. *Si* r *es un prerradical y* $f : M \longrightarrow N$ *es un isomorfismo, entonces:*

(1) $f(r(M)) = r(N)$*.*

(2) $r(M) = f^{-1}(r(N))$*.*

Demostración. (1) Como r es prerradical y f isomorfismo tenemos que $f(r(M)) \leq r(N)$ y $f^{-1}(r(N)) \leq r(M)$. Por lo tanto $f(r(M)) \leq r(N) \leq f(r(M))$ y en consecuencia $f(r(M)) = r(N)$.

(2) Se sigue de (1). □

Observación 2.4. *Si r es un prerradical y $M, N \in R$-Mod son tales que $M \cong N$, entonces $r(M) \cong r(N)$.*

Demostración. Supongamos que $M \cong N$, entonces existe un isomorfismo $f : M \longrightarrow N$. Entonces por (2) de la Observacíon 2.2, $f_{|r(M)}$ es monomorfismo y en consecuencia $r(M) \cong f(r(M))$. Pero por el Lema 2.3, $f(r(M)) = r(N)$. Luego, $r(M) \cong r(N)$. $\square$

Ejemplo 7. *Los siguientes son ejemplos de prerradicales en R-Mod.*

(a) El funtor identidad.

$$\begin{array}{rcl} id : R\text{-}Mod & \to & R\text{-}Mod \\ M & \mapsto & M. \end{array}$$

(b) El funtor nulo.

$$\begin{array}{rcl} zer : R\text{-}Mod & \to & R\text{-}Mod \\ M & \mapsto & 0. \end{array}$$

(c) El radical de un módulo.

$$\begin{array}{rcl} Rad : R\text{-}Mod & \to & R\text{-}Mod \\ M & \mapsto & \sum\limits_{A \ll M} A. \end{array}$$

(d) El soclo de un módulo.

$$\begin{array}{rcl} Soc : R\text{-}Mod & \to & R\text{-}Mod \\ M & \mapsto & \sum\limits_{\substack{B \leq M \\ B \ simple}} B. \end{array}$$

(e) Sea I un ideal bilateral de R, entonces

$$\begin{array}{rcl} r_I : R\text{-}Mod & \to & R\text{-}Mod \\ M & \mapsto & IM, \end{array}$$

es un prerradical.

(f) Recordemos que para un módulo M su submódulo singular está definido de la siguiente manera:

$$\mathcal{Z}(M) = \{x \in M \mid (0 : x) \leq_{es} R\}$$

donde $(0 : x)$ es el anulador de x en R. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Z} : R\text{-}Mod & \to & R\text{-}Mod \\ M & \mapsto & \mathcal{Z}(M) \end{array}$$

es un prerradical.

Demostración. (a) Es claro.
(b) Es claro.

(c) Es claro que si $M \in R$-Mod, entonces $\mathrm{Rad}(M) \leq M$. Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de módulos. Veamos que $f(\mathrm{Rad}(M)) \leq \mathrm{Rad}(N)$. Observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(\mathrm{Rad}(M)) &= f\left(\sum_{A \ll M} A\right) \\ &= \sum_{A \ll M} f(A). \end{aligned}$$

Pero por (4) de la Proposición 1.1.20 sabemos que $f(A) \ll N$. Por lo tanto $f(\mathrm{Rad}(M)) \leq \mathrm{Rad}(N)$.

(d) Es claro que si $M \in R$-Mod, entonces $\mathrm{Soc}(M) \leq M$. Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de módulos no nulo. Veamos que $f(\mathrm{Soc}(M)) \leq \mathrm{Soc}(N)$. Observemos que:

$$\begin{aligned} f(\mathrm{Soc}(M)) &= f\left(\sum_{\substack{B \leq M \\ B \text{ simple}}} B\right) \\ &= \sum_{\substack{B \leq M \\ B \text{ simple}}} f(B). \end{aligned}$$

Afirmamos que si B es simple, entonces $f(B)$ es simple o 0. En efecto, por el Teorema 1.12, $B/\mathrm{Ker}(f_{|B}) \cong f(B)$. Como B es simple se sigue que $\mathrm{Ker}(f_{|B}) = 0$ o $\mathrm{Ker}(f_{|B}) = B$. Si $\mathrm{Ker}(f_{|B}) = 0$, entonces $f(B)$ es simple. Si $\mathrm{Ker}(f_{|B}) = B$, entonces $f(B) = 0$. Por lo tanto la suma de módulos simples con respecto a un morfismo es una suma de módulos simples y módulos cero. Luego, $f(\mathrm{Soc}(M)) \leq \mathrm{Soc}(N)$.

(e) Es claro que para cada $M \in R$-Mod se cumple que $r_I(M) \leq M$. Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de módulos. Veamos que $f(r_I(M)) \leq r_I(N)$. Sea $f(x) \in f(r_I(M)) = f(IM)$, entonces $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ con $a_i \in I$ para cada $i \in \{1, \dots n\}$ y $x_i \in M$ para cada $i \in \{1, \dots n\}$. Como f es morfismo de módulos tenemos que $f(x) = f(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) \in IN$. Por lo tanto $f(r_I(M)) \leq r_I(N)$.

(f) Primero veamos que si $M \in R$-Mod, entonces $\mathcal{Z}(M) \leq M$.

(i) $0 \in \mathcal{Z}(M)$.

(ii) Sean $x, y \in \mathcal{Z}(M)$, veamos que $x+y \in \mathcal{Z}(M)$. Como $x, y \in \mathcal{Z}(M)$ tenemos que $(0 : x) \leq_{es} R$ y $(0 : y) \leq_{es} R$, entonces por (5) de la Proposición 1.1.21, $(0 : x) \cap (0 : y) \leq_{es} R$. Afirmamos que $(0 : x) \cap (0 : y) \leq (0 : x+y)$. En efecto, sea $a \in (0 : x) \cap (0 : y)$, entonces $ax = 0 = ay$, de donde $a(x+y) = ax+ay = 0$ y en consecuencia $a \in (0 : x+y)$. Por lo tanto $(0 : x) \cap (0 : y) \leq (0 : x+y)$ y por (2) de la Proposición 1.1.21 se sigue que $(0 : x + y) \leq_{es} R$, es decir, $x + y \in \mathcal{Z}(M)$.

(iii) Sean $0 \neq a \in R$ y $x \in \mathcal{Z}(M)$, veamos que $ax \in \mathcal{Z}(M)$. Sea $s \in R \backslash (0 : ax)$, entonces $0 \neq s \in R$ y $(sa)x = s(ax) \neq 0$. Como $x \in \mathcal{Z}(M)$ tenemos que $(0 : x) \leq_{es} R$. Entonces por el Lema 1.48 existe $0 \neq t \in R$ tal que $0 \neq t(sa) \in (0 : x)$, es decir, $(ts)(ax) = (t(sa))x = 0$. Por lo tanto, por el Lema 1.48 concluimos que $(0 : ax) \leq_{es} R$, es decir, $ax \in \mathcal{Z}(M)$.

Ahora veamos que si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de módulos, entonces $f(\mathcal{Z}(M)) \leq \mathcal{Z}(N)$. Sea $f(x) \in f(\mathcal{Z}(M))$, entonces $x \in \mathcal{Z}(M)$, es decir, $(0 : x) \leq_{es} R$. Afirmamos que $(0 : x) \leq (0 : f(x))$. En efecto, sea $a \in (0 : x)$, entonces $ax = 0$ y en consecuencia $af(x) = f(ax) = 0$, es decir, $a \in (0 : f(x))$. Por lo tanto $(0 : x) \leq (0 : f(x))$. Entonces por (2) de la Proposición 1.1.21, $(0 : f(x)) \leq_{es} R$, es decir, $f(x) \in \mathcal{Z}(N)$. Por lo tanto $f(\mathcal{Z}(M)) \leq \mathcal{Z}(N)$. □

Denotamos por R-pr a la clase de todos los prerradicales sobre R-Mod y definimos un orden parcial en R-pr como sigue:

$$r \preceq s \text{ si y sólo si para cada } M \in R\text{-Mod}, \ r(M) \leq s(M).$$

Definición 2.5. *Para un prerradical r, decimos que un módulo M es:*

*(a) de **r-torsión** si $r(M) = M$,*

*(b) **libre de r-torsión** si $r(M) = 0$.*

Denotamos por $\mathcal{T}_r$ a la clase de todos los módulos de r-torsión y por $\mathcal{F}_r$ a la clase de todos los módulos libres de r-torsión.

Observación 2.6. *Sea r un prerradical, entonces las clases $\mathcal{T}_r$ y $\mathcal{F}_r$ son abstractas.*

Demostración. Primero veamos que la clase $\mathcal{T}_r$ es abstracta. Sean $M, N \in R$-Mod y supongamos que $M \cong N$ y $M \in \mathcal{T}_r$. Como $M \cong N$ existe un isomorfismo $f : M \longrightarrow N$. Entonces por (1) del Lema 2.3, $r(N) = f(r(M)) = f(M) = N$, es decir, $N \in \mathcal{T}_r$.

Ahora veamos que la clase $\mathcal{F}_r$ es abstracta. Sean $M, N \in R$-Mod y supongamos que $M \cong N$ y $M \in \mathcal{F}_r$. Como $M \cong N$ existe un isomorfismo $f : M \longrightarrow N$. Entonces por (1) del Lema 2.3, $r(N) = f(r(M)) = f(0) = 0$, es decir, $N \in \mathcal{F}_r$. □

Observación 2.7. *Si $r, s \in R$-pr son tales que $r \preceq s$, entonces*

(a) $\mathcal{T}_r \subseteq \mathcal{T}_s$.

(b) $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_r$.

Demostración. Sean $r, s \in R$-pr y supongamos que $r \preceq s$.

(a) Sea $M \in \mathcal{T}_r$, entonces $M = r(M) \leq s(M) \leq M$, es decir, $s(M) = M$.

(b) Sea $M \in \mathcal{F}_s$, entonces $r(M) \leq s(M) = 0$, es decir, $r(M) = 0$. □

Definición 2.8. *Decimos que un prerradical r es:*

*(a) **idempotente** si $r(M) \in \mathcal{T}_r$, es decir, $r(r(M)) = r(M)$.*

*(b) **radical** si $M/r(M) \in \mathcal{F}_r$, es decir, $r(M/r(M)) = 0$.*

Proposición 2.1.1. *Sean r un prerradical, $M \in R$-Mod y N un submódulo de M. Entonces:*

(1) $r(N) \leq N \cap r(M)$.

(2) $(r(M) + N)/N \leq r(M/N)$.

(3) Si $r(N) = N$, entonces $N \leq r(M)$.

(4) Si $r(M/N) = 0$, entonces $r(M) \leq N$.

Demostración. Sea r un prerradical y sea N un submódulo de un módulo M.

(1) Veamos que $r(N) \leq N \cap r(M)$. Como r es un prerradical y N es submódulo de M tenemos que $r(N) \leq N$ y $r(N) \leq r(M)$. Por lo tanto $r(N) \leq N \cap r(M)$.

(2) Veamos que $(r(M) + N)/N \leq r(M/N)$. Sea $\pi : M \longrightarrow M/N$, el epimorfismo natural. Como r es un prerradical tenemos que $\pi(r(M)) \leq r(M/N)$, pero $\pi(r(M)) = (r(M) + N)/N$. Por lo tanto $(r(M) + N)/N \leq r(M/N)$.

(3) Supongamos que $r(N) = N$, entonces por (1) tenemos que $N \leq N \cap r(M)$, de donde $N \leq r(M)$.

(4) Si $r(M/N) = 0$, por (2) tenemos que $(r(M) + N)/N = 0$, de donde $r(M) + N = N$ y en consecuencia $r(M) \leq N$. □

Observación 2.9. *A todo prerradical r le podemos asociar el funtor $1/r : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ tal que $M \longmapsto M/r(M)$.*

Demostración. Es claro que $1/r$ manda módulos en módulos. Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de módulos y definamos

$$\begin{array}{rcl} (1/r)(f) : M/r(M) & \to & N/r(N) \\ \overline{x} & \mapsto & \overline{f(x)} \end{array}$$

Veamos que $(1/r)(f)$ está bien definido. Sean $x, y \in M$ tales que $\overline{x} = \overline{y}$, entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \overline{x} = \overline{y} & \Rightarrow & \overline{x} - \overline{y} = 0 \\ & \Rightarrow & \overline{x - y} = 0 \\ & \Rightarrow & x - y \in r(M) \\ & \Rightarrow & f(x - y) \in r(N) \text{ (ya que } f(r(M)) \leq r(N)) \\ & \Rightarrow & f(x) - f(y) \in r(N) \\ & \Rightarrow & \overline{f(x) - f(y)} = 0 \\ & \Rightarrow & \overline{f(x)} - \overline{f(y)} = 0 \\ & \Rightarrow & \overline{f(x)} = \overline{f(y)}. \end{array}$$

Por lo tanto $(1/r)(f)$ está bien definido. Ahora veamos que $(1/r)(f)$ es morfismo, sean $\overline{x}, \overline{y} \in M/r(M)$ y $a \in R$, entonces:

$$\begin{array}{rcl} (1/r)(f)(a\overline{x} + \overline{y}) & = & (1/r)(f)(\overline{ax} + \overline{y}) \\ & = & (1/r)(f)(\overline{ax + y}) \\ & = & \overline{f(ax + y)} \\ & = & \overline{af(x) + f(y)} \\ & = & \overline{af(x)} + \overline{f(y)} \\ & = & a\overline{f(x)} + \overline{f(y)} \\ & = & a(1/r)(f)(\overline{x}) + (1/r)(f)(\overline{y}) \end{array}$$

es decir, $(1/r)(f)$ es morfismo. Ahora veamos que $1/r$ preserva composiciones. Sean $f : M \longrightarrow N$ y $g : M \longrightarrow L$ morfismos de módulos y sea $\overline{x} \in M/r(M)$, entonces:

$$\begin{array}{rcl} ((1/r)(g)(1/r)(f))(\overline{x}) & = & (1/r)(g)((1/r)(f)(\overline{x})) \\ & = & (1/r)(g)(\overline{f(x)}) \\ & = & \overline{g(f(x))} \\ & = & \overline{(gf)(x)} \\ & = & (1/r)(gf)(\overline{x}). \end{array}$$

Por lo tanto $1/r$ preserva composiciones. Por último notemos que para todo $M \in R$-Mod y para todo $\overline{x} \in M/r(M)$ se cumple que: $(1/r)(1_M)(\overline{x}) = \overline{1_M(x)} = \overline{x} = 1_{(1/r)(M)}(\overline{x})$, es decir, $(1/r)(1_M) = 1_{(1/r)(M)}$. Por lo tanto $1/r$ es funtor. ☐

Lema 2.10. *Sean r un prerradical y $f : M \longrightarrow N$ un morfismo. Si f es epimorfimo, entonces $(1/r)(f)$ es epimorfismo.*

Demostración. Sea $y + r(N) \in N/r(N)$. Como $y \in N$ y f es epimorfismo existe $x \in M$ tal que $f(x) = y$. Luego, $y + r(N) = f(x) + r(N) = (1/r)(f)(x + r(M))$. Por lo tanto $(1/r)(f)$ es epimorfismo. $\square$

Proposición 2.1.2. *Sea r un prerradical y sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos. Entonces:*

(1) $r\left(\prod_{i\in I} M_i\right) \leq \prod_{i\in I} r(M_i)$.

(2) $r\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) = \bigoplus_{i\in I} r(M_i)$.

Demostración. Sean r un prerradical y $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos.

(1) Sea $\alpha = (a_i)_{i\in I} \in r\left(\prod_{i\in I} M_i\right)$, y para $j \in I$ consideremos la proyección natural $\pi_j : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_j$. Como r es prerradical se cumple que $\pi_j\left(r\left(\prod_{i\in I} M_i\right)\right) \leq r(M_j)$. Luego para cada $j \in I$ se tiene que $a_j = \pi_j(\alpha) \in r(M_j)$, de donde $\alpha \in \prod_{i\in I} r(M_i)$.

(2) Para cada $j \in I$ consideremos la j-ésima inclusión

$$\iota_j : M_j \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} r(M_i)$$

y la j-ésima proyección natural

$$\pi_j : \bigoplus_{i\in I} r(M_i) \longrightarrow M_j.$$

Como r es prerradical tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} M_j \arrow[r, hook, "\iota_j"] & \bigoplus_{i\in I} r(M_i) \\ r(M_j) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & r\left(\bigoplus_{i\in I} r(M_i)\right) \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \quad . \tag{2.1}$$

Y

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i\in I} r(M_i) \arrow[r, "\pi_j"] & M_j \\ r\left(\bigoplus_{i\in I} r(M_i)\right) \arrow[u, hook] \arrow[r] & r(M_j) \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \quad . \tag{2.2}$$

Primero veamos que $r\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \subseteq \bigoplus_{i\in I} r(M_i)$. En efecto, sea $\alpha = (a_i)_{i\in I} \in r\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right)$, entonces por el diagrama 2.2 tenemos que para cada $j \in I$, $a_j = \pi_j(\alpha) \in r(M_j)$. Por lo tanto $\alpha = (a_i)_{i\in I} \in$

$\bigoplus_{i\in I} r(M_i)$. Ahora veamos que $\bigoplus_{i\in I} r(M_i) \subseteq r\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right)$. Sea $\alpha \in \bigoplus_{i\in I} r(M_i)$, entonces $\alpha = (a_i)_{i\in I}$ donde $a_i \in r(M_i)$ para cada $i \in I$ y $a_i = 0$ para casi todo $i \in I$. Sea $sop(\alpha) = \{i_1, \ldots, i_n\}$, es decir, $a_{i_k} \neq 0$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$ y $a_l = 0$ para todo $l \neq a_{i_k}$ con $k \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces $\alpha = \sum_{j=1}^{n} \iota_{i_j}(a_{i_j})$, pero por el diagrama 2.1 tenemos que $\iota_{i_j}(a_{i_j}) \in r\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right)$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ ya que $a_{i_j} \in r(M_{i_j})$. Por lo tanto $\alpha \in r\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right)$. □

Lema 2.11. *Sea r un prerradical y sea N un submódulo de un módulo M. Si r es radical y $N \leq r(M)$, entonces $r(M/N) = r(M)/N$.*

Demostración. Por (2) de la Proposición 2.1.1 sabemos que $(r(M)+N)/N \leq r(M/N)$, pero como $N \leq r(M)$ se sigue que $(r(M)+N)/N = r(M)/N$, de donde $r(M)/N \leq r(M/N)$. Para la otra contención notemos que $N \leq r(M) \leq M$, luego por el Segundo Teorema de Isomorfismos tenemos que $(M/N)/(r(M)/N) \cong M/r(M)$. Entonces como $M/r(M) \in \mathcal{F}_r$ y $\mathcal{F}_r$ es una clase cerrada bajo isomorfismos se sigue que $(M/N)/(r(M)/N) \in \mathcal{F}_r$, es decir, $r((M/N)/(r(M)/N)) = 0$. Así, por (4) de la Poposición 2.1.1 tenemos que $r(M/N) \leq r(M)/N$. □

Definición 2.12. *Un submódulo N de un módulo izquierdo M es llamado **fuertemente invariante** si para todo $f \in End_R(M)$, $f(N) \leq N$.*

Proposición 2.1.3. *Si r es un prerradical, entonces:*

(1) $r(R)$ es un ideal bilateral de R.

(2) Para cada $M \in R$-Mod, $r(M)$ es un submódulo fuertemente invariante de M y $r(R)M \leq r(M)$.

(3) Si M es proyectivo, entonces $r(R)M = r(M)$.

Demostración. Sea r un prerradical.

(1) Para cada $a \in R$ consideremos el morfismo de módulos $f_a : R \longrightarrow R$ dado por $f(x) = xa$ para cada $x \in R$, entonces como r es prerradical se sigue que $r(R)a = f_a(r(R)) \leq r(R)$, de donde $r(R)$ es un ideal.

(2) Sea $M \in R$-Mod. Primero veamos que $r(M)$ es fuertemente invariante en M. Sea $f \in End(M)$, entonces como r es prerradical se sigue que $f(r(M)) \leq r(M)$. Esto es, $r(M)$ es fuertemente invariante en M.

Ahora veamos que $r(R)M \leq r(M)$. Notemos que para cada $m \in M$ la siguiente función es un morfismo de módulos:

$$\begin{array}{rcl} f_m : R & \to & M \\ a & \mapsto & am. \end{array}$$

En efecto, sean $a, b \in R$ y sea $c \in R$, entonces

$$\begin{array}{rcl} f_m(ca+b) & = & (ca+b)m \\ & = & (ca)m + bm \\ & = & c(am) + bm \\ & = & cf_m(a) + f_m(b). \end{array}$$

Por lo tanto f_m es un morfismo de módulos y como r es prerradical se sigue que $r(R)m = f_m(r(R)) \leq r(M)$. Por lo tanto $r(R)M \leq r(M)$.

(3) Afirmamos que si I es un conjunto no vacío, entonces $r(R)R^{(I)} = r(R^{(I)})$. En efecto, por (e) del Ejemplo 7 y por (2) de la Proposición 2.1.2 tenemos que:

$$\begin{aligned} r(R)R^{(I)} &= r(R)\bigoplus_{i\in I} R_i = r_{r(R)}\left(\bigoplus_{i\in I} R_i\right) \\ &= \bigoplus_{i\in I} r_{r(R)}(R_i) = \bigoplus_{i\in I} r(R)R_i \\ &= \bigoplus_{i\in I} r(R_i) = r(\bigoplus_{i\in I} R_i) \\ &= r(R^{(I)}), \end{aligned}$$

donde $R_i = R$ para cada $i \in I$. Sea M un módulo proyectivo, entonces por la Proposición 1.1.16, existe N sumando directo de $R^{(I)}$ tal que $M \cong N$, es decir, $R^{(I)} = N \oplus L$ y existe un isomorfismo $f : M \longrightarrow N$. Entonces

$$r(R^{(I)}) = r(N \oplus L) = r(N) \oplus r(L)$$

Y por el Lema 2.3 concluimos que $r(R^{(I)}) = f(r(M)) \oplus r(L)$. Por otro lado

$$\begin{aligned} r(R)N \oplus r(R)L &= r_{r(R)}(N) \oplus r_{r(R)}(L) = r_{r(R)}(N \oplus L) \\ &= r(R)(N \oplus L) = r(R)(R^{(I)}) \\ &= r(R^{(I)}). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} f(r(M)) \oplus r(L) &= r(R)N \oplus r(R)L \\ &= r(R)f(M) \oplus r(R)L \\ &= f(r(R)M) \oplus r(R)L. \end{aligned}$$

Por lo tanto $r(M) \oplus f^{-1}(r(L)) = r(R)M \oplus f^{-1}(r(R)L)$ y en consecuencia $r(M) = r(R)M$. □

Proposición 2.1.4. *Sea r un prerradical.*

(1) La clase $\mathcal{T}_r$ de módulos de r-torsión es una clase de pretorsión.

(2) Si r es un radical, entonces $\mathcal{T}_r$ es una clase de torsión.

(3) La clase $\mathcal{F}_r$ de módulos libres de r-torsión es una clase libre de pretorsión.

(4) Si r es idempotente, entonces $\mathcal{F}_r$ es una clase libre de torsión.

(5) $\mathcal{T}_r \cap \mathcal{F}_r = 0$ y para cada $T \in \mathcal{T}_r, F \in \mathcal{F}_r$, $Hom_R(T, F) = 0$.

(6) Si $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia de submódulos de r-torsión de un módulo M, entonces $\sum_{i\in I} M_i \in \mathcal{T}_r$.

(7) Si $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia de submódulos de un módulo M tal que para cada $i \in I$ $M/M_i \in \mathcal{F}_r$, entonces, $M/\left(\bigcap_{i\in I} M_i\right) \in \mathcal{F}_r$.

Demostración. Supongamos que r es un prerradical.

(1) Primero veamos que $\mathcal{T}_r$ es cerrada bajo cocientes. Sea $M \in \mathcal{T}_r$ y sea N un cociente de M. Como N es cociente de M, tenemos que $N = M/N'$ con N' un submódulo de M. Entonces por (2) de la Proposición 2.1.1, $(r(M) + N')/N' \leq r(M/N')$. Luego como $M \in \mathcal{T}_r$, $r(M) = M$, de donde

$$\begin{aligned} N &= M/N' \\ &= (M+N')/N' \\ &= (r(M)+N')/N' \\ &\leq r(M/N') \\ &= r(N), \end{aligned}$$

es decir, $N \leq r(N)$. Por lo tanto $r(N) = N$ y en consecuencia $\mathcal{T}_r$ es cerrada bajo cocientes.

Ahora veamos que la clase $\mathcal{T}_r$ es cerrada bajo sumas directas. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos de r-torsión, entonces por (2) de la Proposición 2.1.2, $r\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) = \bigoplus_{i\in I} r(M_i)$. Pero como $\{M_i\} \leq \mathcal{T}_r$, se sigue que $r(M_i) = M_i$ para cada $i \in I$. Así, $r\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) = \bigoplus_{i\in I} r(M_i) = \bigoplus_{i\in I} M_i$, es decir, $\bigoplus_{i\in I} M_i \in \mathcal{T}_r$.

(2) Sea $0 \longrightarrow N \xhookrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta con $N, M/N \in \mathcal{T}_r$. Como r es prerradical tenemos que $N = r(N) \leq r(M)$, luego por el Lema 2.11, $M/N = r(M/N) = r(M)/N$. Por lo tanto $r(M) = M$.

(3) Veamos que $\mathcal{F}_r$ es cerrada bajo submódulos. Sea $M \in \mathcal{F}_r$ y sea N un submódulo de M, entonces por (1) de la Proposición 2.1.1, $r(N) \leq N \cap r(M) = r(N) \cap 0 = 0$. Así $r(N) = 0$, es decir, $N \in \mathcal{F}_r$.

Ahora veamos que $\mathcal{F}_r$ es una clase cerrada bajo productos. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos libres de r-torsión, entonces por (1) de la Proposición 2.1.2, $r\left(\prod_{i\in I} M_i\right) \leq \prod_{i\in I} r(M_i)$. Pero como para cada $i \in I$ $M_i \in \mathcal{F}_r$, se sigue que $r(M_i) = 0$ y en consecuencia $r\left(\prod_{i\in I} M_i\right) = 0$, es decir, $\prod_{i\in I} M_i \in \mathcal{F}_r$.

(4) Sea $0 \longrightarrow N \xhookrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta con $N, M/N \in \mathcal{F}_r$. Como $M/N \in \mathcal{F}_r$, $r(M/N) = 0$, luego por (4) de la Proposición 2.1.1 tenemos que $r(M) \leq N$. Por lo tanto, $r(M) = r(r(M)) \leq r(N) = 0$, es decir, $r(M) = 0$.

(5) Sea $M \in \mathcal{T}_r \cap \mathcal{F}_r$, entonces $M \in \mathcal{T}_r$ y $M \in \mathcal{F}_r$, es decir, $r(M) = M$ y $r(M) = 0$. Luego $M = 0$ y por lo tanto $\mathcal{T}_r \cap \mathcal{F}_r = 0$.

Ahora, sea $f : T \longrightarrow F$ un morfismo de módulos, con $T \in \mathcal{T}_r$ y $F \in \mathcal{F}_r$. Como r es prerradical tenemos que $f(T) = f(r(T)) \leq r(F) = 0$, es decir, $f(T) = 0$. Y por lo tanto $f = 0$.

(6) Como $\sum_{i\in I} M_i$ es cociente de $\bigoplus_{i\in I} M_i$ se sigue de (1) que $\sum_{i\in I} M_i \in \mathcal{T}_r$.

(7) Sea $M \in R$-Mod y sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de submódulos de un módulo M tal que para cada $i \in I$, $M/M_i \in \mathcal{F}_r$. Definamos la siguiente función:

$$\begin{aligned} \alpha : M &\to \prod_{i\in I} M/M_i \\ m &\mapsto (\pi_i(m))_{i\in I}, \end{aligned}$$

con $\pi_i : M \longrightarrow M/M_i$ el morfismo natural para cada $i \in I$. Veamos que α es morfismo. Sean

$m, n \in M$ y $a \in R$, entonces

$$\begin{aligned}
\alpha(am+n) &= (\pi_i(am+n))_{i\in I} \\
&= (\pi_i(am)+\pi_i(n))_{i\in I} \\
&= (\pi_i(am))_{i\in I}+(\pi_i(n))_{i\in I} \\
&= (a\pi_i(m))_{i\in I}+(\pi_i(n))_{i\in I} \\
&= a(\pi_i(m))_{i\in I}+(\pi_i(n))_{i\in I} \\
&= a\alpha(m)+\alpha(n).
\end{aligned}$$

Por lo tanto α es morfismo. Ahora, notemos que $\mathrm{Ker}(\alpha) = \bigcap_{i\in I} M_i$ y además por el inciso (3), $\prod_{i\in I} M/M_i \in \mathcal{F}_r$. Entonces por el Primer Teorema de Isomorfismo existe un monomorfismo $\beta : M/\left(\bigcap_{i\in I} M_i\right) \longrightarrow \prod_{i\in I} M/M_i$. Por lo tanto tenemos lo siguiente:

$$M/\left(\bigcap_{i\in I} M_i\right) \cong \beta\left(M/\left(\bigcap_{i\in I} M_i\right)\right) \leq \prod_{i\in I} M/M_i \in \mathcal{F}_r.$$

Luego, $M/\left(\bigcap_{i\in I} M_i\right) \in \mathcal{F}_r$. $\square$

Definición 2.13. *Para un prerradical r y un módulo M definimos:*

(a) $\overline{r}(M) = \sum\{A \leq M \mid A \in \mathcal{T}_r\}$.

(b) $\widehat{r}(M) = \bigcap\{B \leq M \mid M/B \in \mathcal{F}_r\}$.

Proposición 2.1.5. *Sea r un prerradical.*

(1) $\overline{r}$ es un prerradical idempotente.

(2) $\overline{r} \preceq r$.

(3) $\mathcal{T}_r = \mathcal{T}_{\overline{r}}$.

(4) Si s es un prerradical idempotente y $s \preceq r$, entonces $s \preceq \overline{r}$. Por lo tanto $\overline{r}$ es el mayor prerradical idempotente tal que $\overline{r} \preceq r$.

Demostración. Supongamos que r es un prerradical.

(1) Primero veamos que $\overline{r}$ es prerradical. Es claro que para cada $M \in R$-Mod se cumple que $\overline{r}(M) \leq M$. Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de módulos y consideremos $f \circ \iota : \overline{r}(M) \longrightarrow N$ donde $\iota : \overline{r}(M) \longrightarrow M$ es el morfismo inclusión. Por (6) de la Proposición 2.1.4 sabemos que $\overline{r}(M) \in \mathcal{T}_r$ y como $\mathcal{T}_r$ es cerrada bajo imágenes homomorfas tenemos que $f(\overline{r}(M)) \in \mathcal{T}_r$. Por lo tanto $f(\overline{r}(M)) \leq \overline{r}(N)$.
Ahora veamos que $\overline{r}$ es idempotente. Como $\overline{r}(M) \in \mathcal{T}_r$ y $\overline{r}(M)$ es submódulo de si mismo se sigue que $\overline{r}(M) \leq \overline{r}(\overline{r}(M))$. La otra contención es consecuencia de que $\overline{r}$ es prerradical.

(2) Como $\overline{r}$ es prerradical tenemos que para cada $M \in R$-Mod, $\overline{r}(M) \leq M$, entonces $\overline{r}(M) = r(\overline{r}(M)) \leq r(M)$. Por lo tanto $\overline{r} \preceq r$.

(3) Por (2) y (a) la Observación 2.7 es suficiente demostrar que $\mathcal{T}_r \subseteq \mathcal{T}_{\overline{r}}$. Sea $M \in \mathcal{T}_r$, entonces $M \leq \overline{r}(M) \leq M$, es decir, $\overline{r}(M) = M$. Por lo tanto $M \in \mathcal{T}_{\overline{r}}$ y en consecuencia $\mathcal{T}_r \subseteq \mathcal{T}_{\overline{r}}$.

(4) Sea s un prerradical idempotente tal que $s \preceq r$. Notemos lo siguiente:

$$s(M) = s(s(M)) \leq r(s(M)) \leq s(M),$$

es decir, $s(M) \in \mathcal{T}_r$. Luego, como $s(M) \leq M$ tenemos que $s(M) \leq \overline{r}(M)$. Por lo tanto $s \preceq \overline{r}$. $\square$

Proposición 2.1.6. *Sea r un prerradical.*

(1) $\widehat{r}$ es un preradical.

(2) $r \preceq \widehat{r}$.

(3) $\mathcal{F}_r = \mathcal{F}_{\widehat{r}}$ y $\widehat{r}$ es radical.

(4) Si s es radical y $r \preceq s$, entonces $\widehat{r} \preceq s$. Por lo tanto $\widehat{r}$ es el menor radical tal que $r \preceq \widehat{r}$.

Demostración. (1) Primero veamos que $\widehat{r}$ es prerradical. Es fácil ver que para cada módulo M, $\widehat{r}(M) \leq M$. Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de módulos, veamos que $f(\widehat{r}(M)) \leq \widehat{r}(N)$, es decir, veamos que para cada $B \in \{B \leq N \mid N/B \in \mathcal{F}_r\}$, $f(\widehat{r}(M)) \leq B$. Sea $\mathscr{A} = \{A \leq M \mid M/A \in \mathcal{F}_r\}$ y consideremos la siguiente función

$$\begin{array}{rcl} \varphi : M/f^{-1}(B) & \to & N/B \\ \overline{x} & \mapsto & \overline{f(x)}. \end{array}$$

Veamos que φ está bien definida. Sean $x, y \in M$ tales que $\overline{x} = \overline{y}$, entonces

$$\begin{array}{rcl} \overline{x} = \overline{y} & \Leftrightarrow & \overline{x - y} = \overline{x} - \overline{y} = 0 \\ & \Leftrightarrow & x - y \in f^{-1}(B) \\ & \Leftrightarrow & f(x) - f(y) = f(x - y) \in B \\ & \Leftrightarrow & \overline{f(x)} - \overline{f(y)} = \overline{f(x) - f(y)} = 0 \\ & \Leftrightarrow & \overline{f(x)} = \overline{f(y)}. \end{array}$$

Por lo tanto φ está bien definida y además es inyectiva. Ahora veamos que φ es morfismo. Sean $\overline{x}, \overline{y} \in M/f^{-1}(B)$ y $a \in R$, entonces

$$\begin{array}{rcl} \varphi(a\overline{x} + \overline{y}) & = & \varphi(\overline{ax} + \overline{y}) \\ & = & \varphi(\overline{ax + y}) \\ & = & \overline{f(ax + y)} \\ & = & \overline{af(x) + f(y)} \\ & = & \overline{af(x)} + \overline{f(y)} \\ & = & a\overline{f(x)} + \overline{f(y)} \\ & = & a\varphi(\overline{x}) + \varphi(\overline{y}). \end{array}$$

Por lo tanto φ es morfismo y como es inyectivo se sigue que es monomorfismo.
Luego, como $N/B \in \mathcal{F}_r$ y $\mathcal{F}_r$ es una clase libre de pretorsión y por lo tanto hereditaria, tenemos que $M/f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_r$. Así $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ y en consecuencia $\widehat{r}(M) \leq f^{-1}(B)$, de donde $f(\widehat{r}(M)) \leq f(f^{-1}(B)) \leq B$.

(2) Por (7) de la Proposición 2.1.4 sabemos que $M/\widehat{r}(M) \in \mathcal{F}_r$. Entonces por (4) de la Proposición 2.1.1 se sigue que $r(M) \leq \widehat{r}(M)$.

(3) Por (2) y (b) de la Observación 2.7 es suficiente demostrar que $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{F}_{\widehat{r}}$. Sea $M \in \mathcal{F}_r$, entonces $M/r(M) = M/0 \cong M$ y como $\mathcal{F}_r$ es una clase abstracta se sigue que $M/r(M) \in \mathcal{F}_r$. Por lo tanto $\widehat{r}(M) \leq r(M) = 0$ y en consecuencia $M \in \mathcal{F}_{\widehat{r}}$.

Ahora veamos que $\widehat{r}$ es radical. Como $M/\widehat{r}(M) \in \mathcal{F}_r$, por(3) tenemos que $\widehat{r}(M/\widehat{r}(M)) = 0$, es decir, $\widehat{r}$ es radical.

(4) Supongamos que existe un radical s tal que $r \preceq s$. Veamos que $\widehat{r} \preceq s$. Sea $M \in R$-Mod, como s es radical tenemos que $M/s(M) \in \mathcal{F}_s$. Además como $r \preceq s$, por (b) de la Observación 2.7 tenemos que $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_r$. Por lo tanto $M/s(M) \in \mathcal{F}_r = \mathcal{F}_{\widehat{r}}$, es decir, $M/s(M) \in \mathcal{F}_{\widehat{r}}$. Entonces $\widehat{r}(M/s(M)) = 0$ y por la Proposición 2.1.1 (4) concluimos que $\widehat{r}(M) \leq s(M)$. Por lo tanto $\widehat{r} \preceq s$. $\square$

Proposición 2.1.7. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un prerradical r:*

(a) Si $M \in R$-Mod y $N \leq M$ es tal que $r(M) \leq N$, entonces $r(N) = r(M)$.

(b) r es idempotente.

(c) $r = \overline{r}$.

Demostración. (a)⇒(b) Sea $M \in R$-Mod. Como $r(M) \leq M$ es tal que $r(M) \leq r(M)$, por hipótesis tenemos que $r(r(M)) = r(M)$.

(b)⇒(c) Supongamos que r es idempotente. Como $\overline{r}$ es el mayor prerradical idempotente tal que $\overline{r} \preceq r$ concluimos que $r = \overline{r}$.

(c)⇒(b) Supongamos que $r = \overline{r}$ y sea $M \in R$-Mod, entonces $r(r(M)) = \overline{r}(\overline{r}(M)) = \overline{r}(M) = r(M)$. Por lo tanto r es idempotente.

(b)⇒(a) Supongamos que r es idempotente. Sean $M \in R$-Mod y $N \leq M$ tal que $r(M) \leq N$. Entonces $r(M) \leq r(N) \leq r(M)$, es decir, $r(N) = r(M)$. $\square$

Proposición 2.1.8. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un prerradical r:*

(a) Si $M \in R$-Mod y $N \leq M$ es tal que $N \leq r(M)$, entonces $r(M/N) = r(M)/N$.

(b) r es radical.

(c) $r = \widehat{r}$.

Demostración. (a)⇒(b) Sea $M \in R$-Mod. Como $r(M) \leq M$ y $r(M) \leq r(M)$, por hipótesis tenemos que $r(M/r(M)) = r(M)/r(M) = 0$. Por lo tanto r es radical.

(b)⇒(c) Supongamos que r es radical, entonces como $\widehat{r}$ es el menor radical tal que $r \preceq \widehat{r}$ concluimos que $r = \widehat{r}$.

(c)⇒(b) Supongamos que $r = \widehat{r}$. Sea $M \in R$-Mod, entonces tenemos que $r(M/r(M)) = \widehat{r}(M/\widehat{r}(M)) = 0$, es decir, r es radical.

(b)⇒(a) Ver Lema 2.11. $\square$

Observación 2.14. *Los operadores*

$$\begin{aligned} {}^{-}: R\text{-pr} &\to R\text{-pr} \\ r &\mapsto \overline{r} \end{aligned} \qquad y \qquad \begin{aligned} {}^{\wedge}: R\text{-pr} &\to R\text{-pr} \\ r &\mapsto \widehat{r} \end{aligned}$$

son idempotentes en el sentido de que si $r \in R$-pr, entonces $\overline{\overline{r}} = \overline{r}$ y $\widehat{\widehat{r}} = \widehat{r}$ y preservan la inclusión de prerradicales en el sentido de que si $r, s \in R$-pr son tales que $r \preceq s$, entonces $\overline{r} \preceq \overline{s}$.

Demostración. Primero veamos que el operador $^{-}$ preserva la inclusión de prerradicales. Sean $r, s \in R$-pr tales que $r \preceq s$, entonces tenemos que $\overline{r} \preceq s$. Pero como $\overline{s}$ es el mayor prerradical idempotente tal que $\overline{s} \preceq s$ concluimos que $\overline{r} \preceq \overline{s}$. Ahora veamos que el operador $^{-}$ es idempotente. Sea $r \in R$-pr. Como $\overline{r}$ es idempotente, por la Proposición 2.1.7 tenemos que $\overline{\overline{r}} = \overline{r}$, es decir, el operador $^{-}$ es idempotente.

Veamos que el operador $^{\wedge}$ es idempotente. Sean $r, s \in R$-pr tales que $r \preceq s$. Como $s \preceq \widehat{s}$ tenemos que $r \preceq \widehat{s}$, pero $\widehat{r}$ es el menor radical tal que $r \preceq \widehat{r}$. Por lo tanto $\widehat{r} \preceq \widehat{s}$. Ahora veamos que el operador $^{\wedge}$ es idempotente. Sea $r \in R$-pr. Como $\widehat{r}$ es radical, por la Proposición 2.1.8 tenemos que $\widehat{\widehat{r}} = \widehat{r}$, es decir, el operador $^{\wedge}$ es idempotente. $\square$

Teorema 2.15. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un prerradical r.*

(a) r es un radical idempotente.

(b) Para cada $M \in R$-Mod existe una única (salvo isomorfismos) sucesión exacta corta $0 \longrightarrow T \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow 0$ con $T \in \mathcal{T}_r$ y $F \in \mathcal{F}_r$.

(c) r es idempotente y $\mathcal{T}_r$ es cerrada bajo extensiones.

(d) r es radical y $\mathcal{F}_r$ es cerrada bajo extensiones.

(e) $\overline{r} = r = \widehat{r}$.

Demostración. Sea r un prerradical.

(a)⇒(b) Sea $M \in R$-Mod, como r es un radical idempotente tenemos que $r(M) \in \mathcal{T}_r$ y $M/r(M) \in \mathcal{F}_r$. Así la sucesión exacta corta buscada es

$$0 \longrightarrow r(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/r(M) \longrightarrow 0.$$

(b)⇒(e) Sea $M \in R$-Mod y consideremos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow T \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} F \longrightarrow 0$$

con $T \in \mathcal{T}_r$ y $F \in \mathcal{F}_r$.
Como $T \in \mathcal{T}_r$ y $\mathcal{T}_r$ es cerrada bajo imágenes homomorfas tenemos que $f(T) \in \mathcal{T}_r$ y como $f(T) \leq M$ se sigue que $f(T) \leq \overline{r}(M) \leq r(M)$. Por otro lado, como g es epimorfismo, por el Primer Teorema de Isomorfismos tenemos que $M/f(T) = M/Ker(g) \cong F$ y como $F \in \mathcal{F}_r$ se sigue que $M/f(T) \in \mathcal{F}_r$. Así, $r(M) \leq \widehat{r}(M) \leq f(T)$. Por lo tanto $\overline{r}(M) = r(M) = \widehat{r}(M)$.

(e)⇒(c) Como $r = \overline{r}$ se sigue que r es idempotente. Y como $r = \widehat{r}$, es decir, r es radical, por la Proposición 2.1.4 inciso 2 tenemos que $\mathcal{T}_r$ es cerrada bajo extensiones.

(c)⇒(d) Como r es idempotente, por la Proposición 2.1.4 inciso (4), $\mathcal{F}_r$ es cerrada bajo extensiones.
Ahora veamos que r es radical. Sea $M \in R$-Mod y sea $N \leq M$ tal que $r(M) \leq N$ y $N/r(M) = r(M/r(M))$. Consideremos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow r(M) \hookrightarrow N \twoheadrightarrow N/r(M) \longrightarrow 0.$$

Observemos lo siguiente:

$$r(N/r(M)) = r(r(M/r(M))) = r(M/r(M)) = N/r(M),$$

es decir, $N/r(M) \in \mathcal{T}_r$. Además como $r(M) \in \mathcal{T}_r$ y $\mathcal{T}_r$ es cerrada bajo extensiones se sigue que $N \in \mathcal{T}_r$. Así $N = r(N) \leq r(M)$, de donde $0 = N/r(M) = r(M/r(M))$, es decir, r es radical.

(d)⇒(a) Veamos que r es idempotente. Sea $M \in R$-Mod y consideremos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow r(M)/r(r(M)) \hookrightarrow M/r(r(M)) \twoheadrightarrow M/r(M) \longrightarrow 0.$$

Como r es radical se sigue que $M/r(M) \in \mathcal{F}_r$. Además como $r(r(M)) \leq r(M)$ y $r(r(M)) \leq r(r(M))$, por el Lema 2.11, se sigue que $r(r(M)/r(r(M))) = r(r(M))/r(r(M)) = 0$, de donde $r(M)/r(r(M)) \in \mathcal{F}_r$. Entonces como $\mathcal{F}_r$ es una clase libre de pretorsión (en particular cerrada bajo extensiones) se sigue que $M/r(r(M)) \in \mathcal{F}_r$, es decir, $r(M/r(r(M))) = 0$. Así por (4) de la Proposición 2.1.1 tenemos que $r(M) \leq r(r(M))$. Por lo tanto r es idempotente. □

Proposición 2.1.9. *Para un prerradical r las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\overline{r} = zer$.

(b) Para cada $0 \neq M \in R$*-Mod,* $r(M) \neq M$.

(c) Para cada $M \in R$*-Mod,* $r(M)$ *es superfluo en* M.

(d) $\mathcal{T}_r = 0$.

Demostración. Supongamos que r es un prerradical.

(a)⇒(b) Supongamos que existe $0 \neq M \in R$-Mod tal que $r(M) = M$, entonces $M \in \mathcal{T}_r$ y en consecuencia, $M = \overline{r}(M) = 0$ que es una contradicción. Por lo tanto para cada $0 \neq M \in R$-Mod, $r(M) \neq M$.

(b)⇒(c) Sea $N \leq M$ tal que $r(M) + N = M$, entonces $M/N = (r(M) + N)/N \leq r(M/N) \leq M/N$, es decir, $r(M/N) = M/N$. Entonces $M/N = 0$, de donde $N = M$.

(c)⇒(d) Supongamos que existe $0 \neq M \in \mathcal{T}_r$, entonces $r(M) + 0 = 0 + M = M$. Luego como $r(M)$ es superfluo en M se sigue que $0 = M$ que es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{T}_r = 0$.

(d)⇒(a) Es claro. □

Proposición 2.1.10. *Para un prerradical r las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\widehat{r} = id$.

(b) Para cada $0 \neq M \in R$*-Mod,* $r(M) \neq 0$.

(c) Para cada $M \in R$*-Mod,* $r(M)$ *es esencial en* M.

(d) $\mathcal{F}_r = 0$.

Demostración. Supongamos que r es un prerradical.

(a)⇒(b) Supongamos que existe $0 \neq M \in R$-Mod tal que $r(M) = 0$, entonces $M \in \mathcal{F}_r = \mathcal{F}_{\widehat{r}}$, es decir, $\widehat{r}(M) = 0$ que es una contradicción. Por lo tanto para cada $0 \neq M \in R$-Mod, $r(M) \neq 0$.

(b)⇒(c) Sea $N \leq M$ tal que $r(M) \cap N = 0$, entonces $r(N) = 0$, y en consecuencia $N = 0$.

(c)⇒(d) Supongamos que existe $0 \neq M \in \mathcal{F}_r$, entonces tenemos que $r(M) \cap M = 0 \cap M = 0$. Luego como $r(M)$ es esencial en M se sigue que $M = 0$ que es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{F}_r = 0$.

(d)⇒(a) Es claro. □

Proposición 2.1.11. *Sea r un prerradical.*

(1) Si r es idempotente, entonces:

$$F \in \mathcal{F}_r \text{ si y sólo si } Hom_R(T, F) = 0 \text{ para todo } T \in \mathcal{T}_r.$$

(2) Si r es radical, entonces:

$$T \in \mathcal{T}_r \text{ si y sólo si } Hom_R(T, F) = 0 \text{ para todo } F \in \mathcal{F}_r.$$

Demostración. (1) Por (5) de la Proposición 2.1.4 sólo demostraremos la suficiencia. Supongamos que para todo $T \in \mathcal{T}_r$ se cumple que $\mathrm{Hom}_R(T, F) = 0$. Como r es idempotente tenemos que $r(F) \in \mathcal{T}_r$. Consideremos el morfismo inclusión $\iota : r(F) \hookrightarrow F$, entonces $r(F) = \iota(r(F)) = 0$. Por lo tanto $F \in \mathcal{F}_r$.

(2) Por (5) de la Proposición 2.1.4 sólo demostraremos la suficiencia. Supongamos que para todo $F \in \mathcal{F}_r$ se cumple que $\mathrm{Hom}_R(T, F) = 0$. Como r es radical tenemos que $T/r(T) \in \mathcal{F}_r$. Consideremos el morfismo natural $\pi : T \twoheadrightarrow T/r(T)$, entonces $0 = \pi(T) = T/r(T)$, de donde $r(T) = T$. Por lo tanto $T \in \mathcal{T}_r$. □

Proposición 2.1.12. *Sea r un prerradical.*

(1) Si r es idempotente, entonces $\widehat{r}$ es idempotente.

(2) Si r es radical, entonces $\overline{r}$ es radical.

Demostración. Sea r un prerradical.

(1) Supongamos que r es idempotente y sea $M \in R$-Mod. Veamos que $\widehat{r}(M) = \widehat{r}(\widehat{r}(M))$. Como $\widehat{r}(M) = \bigcap\{A \leq M \mid M/A \in \mathcal{F}_r\}$ y $\widehat{r}(\widehat{r}(M)) = \{B \leq \widehat{r}(M) \mid \widehat{r}(M)/B \in \mathcal{F}_r\}$ es suficiente demostrar que $\mathcal{A} = \{A \leq M \mid M/A \in \mathcal{F}_r\}$ y $\mathcal{B} = \{B \leq \widehat{r}(M) \mid \widehat{r}(M)/B \in \mathcal{F}_r\}$ coinciden. Sea $B \in \mathcal{B}$, entonces $B \leq \widehat{r}(M) \leq M$. Luego por el Tercer Teorema de Isomorfismos tenemos que $(M/B)/(\widehat{r}(M)/B) \cong M/\widehat{r}(M)$ y como $M/\widehat{r}(M) \in \mathcal{F}_r$ se sigue que $(M/B)/(\widehat{r}(M)/B) \in \mathcal{F}_r$, es decir, $r((M/B)/(\widehat{r}(M)/B)) = 0$. Luego, por la Proposición 2.1.1 tenemos que $r(M/B) \leq \widehat{r}(M)/B$, entonces $r(M/B) = r(r(M/B)) \leq r(\widehat{r}(M)/B) = 0$ y en consecuencia $B \in \mathcal{A}$. La otra contención es clara.

(2) Supongamos que r es radical y sea M un módulo izquierdo. Veamos que $\overline{r}(M/\overline{r}(M)) = 0$, es decir, veamos que $\sum\{N/\overline{r}(M) \leq M/\overline{r}(M) \mid N/\overline{r}(M) \in \mathcal{T}_r\} = 0$. Sea $\mathscr{A} = \{N/\overline{r}(M) \leq M/\overline{r}(M) \mid N/\overline{r}(M) \in \mathcal{T}_r\}$ y sea $N/\overline{r}(M) \in \mathscr{A}$, entonces tenemos que $r(N/\overline{r}(M)) = N/\overline{r}(M)$. Por otro lado, como r es radical y $\overline{r}(M) \leq r(N)$ por el Lema 2.11 tenemos que $r(N/\overline{r}(M)) = r(N)/\overline{r}(M)$. Así $r(N)/\overline{r}(M) = N/\overline{r}(M)$, de donde $r(N) = N$, es decir, $N \in \mathcal{T}_r$. Luego, como $N \leq M$ se sigue que $N \leq \overline{r}(M)$ y en consecuencia $N/\overline{r}(M) = 0$. Por lo tanto $\overline{r}(M/\overline{r}(M)) = 0$. □

Corolario 2.16. *(1) Si $\mathcal{T}_r$ es cerrada bajo extensiones, entonces $\overline{r}$ es un radical idempotente.*

(2) Si $\mathcal{F}_r$ es cerrada bajo extensiones, entonces $\widehat{r}$ es un radical idempotente.

(3) $\widehat{\overline{r}}$ y $\overline{\widehat{r}}$ son radicales idempotentes.

(4) $\overline{r} \preceq \widehat{\overline{r}} \preceq \overline{\widehat{r}} \preceq \widehat{r}$.

(5) Si r es idempotente, entonces $\widehat{r} = \overline{\widehat{r}} = \widehat{\overline{r}}$ es un radical idempotente.

(6) Si r es radical, entonces $\overline{r} = \overline{\widehat{r}} = \widehat{\overline{r}}$ es un radical idempotente.

(7) Si $\mathcal{T}_r$ y $\mathcal{F}_r$ son cerradas bajo extensiones, entonces $\widehat{\overline{r}} \preceq r \preceq \overline{\widehat{r}}$.

(8) Si $\overline{\widehat{r}} = \widehat{\overline{r}}$ y tanto $\mathcal{T}_r$ como $\mathcal{F}_r$ son cerradas bajo extensiones, entonces r es un radical idempotente.

Demostración. (1) Como $\overline{r}$ es idempotente y $\mathcal{T}_{\overline{r}} = \mathcal{T}_r$ es cerrada bajo extensiones, por el Teorema 2.15 se sigue que $\overline{r}$ es un radical idempotente.

(2) Como $\widehat{r}$ es radical y $\mathcal{F}_{\widehat{r}} = \mathcal{F}_r$ es cerrada bajo extensiones, por el Teorema 2.15 se sigue que $\widehat{r}$ es un radical idempotente.

(3) Como $\overline{r}$ es idempotente, por (1) de la Proposición 2.1.12 tenemos que $\widehat{\overline{r}}$ es un radical idempotente. De manera análoga, como $\widehat{r}$ es radical, por (2) de la Proposición 2.1.12 tenemos que $\overline{\widehat{r}}$ es un radical idempotente.

(4) Es claro que $\overline{r} \preceq \widehat{\overline{r}}$. Además como $\overline{r} \preceq \widehat{r}$, por la Observación 2.4 tenemos que $\overline{r} = \overline{\overline{r}} \preceq \overline{\widehat{r}}$, es decir, $\overline{r} \preceq \overline{\widehat{r}}$. Pero por (3) sabemos que $\overline{\widehat{r}}$ es radical, y como $\widehat{\overline{r}}$ es el menor radical tal que $\overline{r} \preceq \widehat{\overline{r}}$ concluimos que $\widehat{\overline{r}} \preceq \overline{\widehat{r}}$. Resta demostrar que $\overline{\widehat{r}} \preceq \widehat{r}$ lo cual es claro.

(5) Como r es idempotente, por la Proposición 2.1.7 tenemos que $r = \overline{r}$. Entonces por (4) se sigue que $\overline{\widehat{r}} \preceq \widehat{r} = \widehat{\overline{r}} \preceq \overline{\widehat{r}}$. Por lo tanto $\widehat{r} = \overline{\widehat{r}} = \widehat{\overline{r}}$.

(6) Supongamos que r es radical, entonces por la Proposición 2.1.8 tenemos que $r = \widehat{r}$. Y por (4) concluimos que $\widehat{\overline{r}} \preceq \overline{\widehat{r}} = \overline{r} \preceq \widehat{\overline{r}}$, es decir, $\overline{r} = \overline{\widehat{r}} = \widehat{\overline{r}}$.

(7) Como $\mathcal{T}_r$ es cerrada bajo extensiones, por (1) y por la Proposición 2.1.8 tenemos que $\overline{r} = \widehat{\overline{r}}$. Y como $\mathcal{F}_r$ es cerrada bajo extensiones, por (2) y por la Proposición 2.1.7 tenemos que $\widehat{r} = \overline{\widehat{r}}$. Por lo tanto $\widehat{\overline{r}} = \overline{r} \preceq r \preceq \widehat{r} = \overline{\widehat{r}}$.

(8) Como $\mathcal{T}_r$ y $\mathcal{F}_r$ son cerradas bajo extensiones, por (7) tenemos que $\widehat{\overline{r}} \preceq r \preceq \overline{\widehat{r}}$. Y como $\overline{\widehat{r}} = \widehat{\overline{r}}$ se sigue que $r = \widehat{\overline{r}}$. □

Corolario 2.17. *Sean r, s dos prerradicales.*

(1) Si r es idempotente, entonces $r \preceq s$ si y sólo si $\mathcal{T}_r \subseteq \mathcal{T}_s$.

(2) Si r es radical, entonces $s \preceq r$ si y sólo si $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{F}_s$.

(3) Si r y s son idempotentes, entonces $r = s$ si y sólo si $\mathcal{T}_r = \mathcal{T}_s$.

(4) Si r y s son radicales, entonces $r = s$ si y sólo si $\mathcal{F}_r = \mathcal{F}_s$.

(5) Si r es un radical idempotente, $\mathcal{T}_r \subseteq \mathcal{T}_s$ y $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{F}_s$, entonces $r = s$.

Demostración. (1) Por (a) de la Observación 2.7 sólo demostraremos la suficiencia. Supongamos que $\mathcal{T}_r \subseteq \mathcal{T}_s$. Sea $M \in R$-Mod, como r es idempotente tenemos que $r(M) \in \mathcal{T}_r \subseteq \mathcal{T}_s$, es decir, $s(r(M)) = r(M)$. Por otro lado, como $r(M) \leq M$ se sigue que $r(M) = s(r(M)) \leq s(M)$. Por lo tanto $r \preceq s$.

(2) Por (b) de la Observación 2.7 sólo demostraremos la suficiencia. Supongamos que $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{F}_s$. Sea $M \in R$-Mod, como r es radical tenemos que $M/r(M) \in \mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{F}_s$, es decir, $s(M/r(M)) = 0$. Por lo tanto, por la Proposición 2.1.1 concluimos que $s(M) \leq r(M)$.

(3) Es consecuencia de (1).

(4) Es consecuencia de (2).

(5) Se sigue de (1) y (2). □

Teorema 2.18. *Sea r un prerradical. Entonces:*

(1) $r = id$ si y sólo si $r(R) = R$.

(2) $r = zer$ si y sólo si $r(M) = 0$ para todo módulo cocíclico.

Demostración. Sea r un prerradical.

(1) Supongamos que $r = id$, entonces $r(R) = id(R) = R$.

Ahora supongamos que $r(R) = R$, veamos que $r = id$. Sea $M \in R$-Mod, como todo módulo es cociente de un libre, existe un epimorfismo $f : \bigoplus_{i \in I} R_i \to M$, donde $R_i = R$ para cada $i \in I$. Entonces como r es prerradical tenemos que $f(r(\bigoplus_{i \in I} R_i)) \leq r(M)$, pero $f(r(\bigoplus_{i \in I} R_i)) = f(\bigoplus_{i \in I} r(R_i)) = f(\bigoplus_{i \in I} R_i) = M$. Por lo tanto $r(M) = M$ y en consecuencia $r = id$.

(2) Supongamos que $r = zer$, entonces $r(M) = zer(M) = 0$ para todo $M \in R$-Mod, en particular para los cocíclicos.

Ahora supongamos que $r(M) = 0$ para todo módulo cocíclico y sea $M \in R$-Mod. Como todo módulo se sumerge en un producto de módulos cocíclicos existe un monomorfismo $M \longrightarrow \prod_{i \in I} C_i$ donde C_i es cocíclico para cada $i \in I$. Luego, $f(r(M)) \leq r\left(\prod_{i \in I} C_i\right) \leq \prod_{i \in I} r(C_i) = 0$. Por lo tanto $r(M) = 0$ y como $M \in R$-Mod fue arbitrario concluimos que $r = zer$. □

Corolario 2.19. *Si $Soc = id$, entonces todo módulo es semisimple.*

Demostración. Se sigue del Teorema 2.18. □

Capítulo 3

Prerradicales hereditarios y coherditarios

3.1. Prerradicales hereditarios

Definición 3.1. *Sea r un prerradical. Decimos que r es:*

(a) ***hereditario*** *si para cada $M \in R$-Mod y para cada N submódulo de M, $r(N) = N \cap r(M)$.*

(b) ***superhereditario*** *si es hereditario y $\mathcal{T}_r$ es cerrada bajo productos directos.*

Ejemplo 8. *El prerradical $\mathcal{Z}$ definido en (f) del Ejemplo 7 de la página 32 es hereditario.*

En efecto, sea $M \in R$-Mod y sea N un submódulo de M. Como $\mathcal{Z}$ es prerradical, por (1) de la Proposición 2.1.1 se cumple que $\mathcal{Z}(N) \subseteq N \cap \mathcal{Z}(M)$. Veamos que $N \cap \mathcal{Z}(M) \subseteq \mathcal{Z}(N)$. Sea $x \in N \cap \mathcal{Z}(M)$, entonces $x \in N$ y $x \in \mathcal{Z}(M)$, es decir, $x \in N$ y $(0 : x)$ es esencial en R. Por lo tanto $x \in \mathcal{Z}(N)$.

Proposición 3.1.1. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un prerradical r:*

(a) r es exacto izquierdo como funtor.

(b) r es hereditario.

(c) r es idempotente y $\mathcal{T}_r$ es hereditaria.

Demostración. Sea r un prerradical.
(a)⇒(b) Sea N un submódulo de un módulo M y consideremos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0.$$

Como r es exacto izquierdo se sigue que

$$0 \longrightarrow r(N) \xrightarrow{\iota'} r(M) \xrightarrow{\pi_{|r(M)}} r(M/N) \ ,$$

es una sucesión exacta, es decir, $\iota'(r(N)) = Ker(\pi_{|r(M)})$. Pero $\iota'(r(N)) = r(N)$ y $Ker(\pi_{|r(M)}) = \{m \in r(M) \mid m + N = 0\} = \{m \in r(M) \mid m \in N\} = r(M) \cap N$, por lo que $r(N) = r(M) \cap N$. Por lo tanto r es hereditario.

(b)⇒(c) Primero veamos que r es idempotente. Sea $M \in R$-Mod, como r es hereditario y $r(M) \leq M$ tenemos que $r(r(M)) = r(M) \cap r(M) = r(M)$. Por lo tanto r es idempotente.

Ahora veamos que $\mathcal{T}_r$ es hereditaria. Sea $M \in \mathcal{T}_r$ y sea $N \leq M$, entonces $r(N) = N \cap r(M) = N \cap M = N$, es decir, $N \in \mathcal{T}_r$.

(c)$\Rightarrow$(b) Sea $M \in R$-Mod y sea N un submódulo de M, entonces por (1) de la Proposición 2.1.1, $r(N) \leq N \cap r(M)$. Por otro lado como $N \cap r(M) \leq r(M)$ y $r(M) \in \mathcal{T}_r$ tenemos que $N \cap r(M) \in \mathcal{T}_r$. Entonces $N \cap r(M) = r(N \cap r(M)) \leq r(N)$ ya que $N \cap r(M) \leq N$. Por lo tanto $r(N) = N \cap r(M)$.

(b)$\Rightarrow$(a) Sean $M \in R$-Mod y $N \leq M$. Consideremos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0.$$

Veamos que la sucesión

$$0 \longrightarrow r(N) \xrightarrow{\iota'} r(M) \xrightarrow{\pi_{|r(M)}} r(M/N)$$

es exacta. Notemos que $Ker(\pi_{|r(M)}) = r(M) \cap N = r(N) = \iota'(r(N))$. Por lo tanto la sucesión es exacta. $\square$

Corolario 3.2. *Todo prerradical hereditario es idempotente.*

Demostración. Es consecuencia de la Proposición 3.1.1 $\square$

Proposición 3.1.2. *Sea r un prerradical.*

(1) Si r es hereditario, entonces $\mathcal{F}_r$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas.

(2) Si r es radical y $\mathcal{F}_r$ es estable, entonces r es hereditario.

Demostración. (1) Sea $F \in \mathcal{F}_r$, veamos que $E(F) \in \mathcal{F}_r$. Como $F \leq E(F)$ y r es hereditario tenemos que $0 = r(F) = F \cap r(E(F))$. Por lo tanto $F \cap r(E(F)) = 0$ y como F es esencial en su cápsula inyectiva concluimos que $r(E(F)) = 0$, es decir, $E(F) \in \mathcal{F}_r$.

(2) Sean $M \in R$-Mod, $N \leq M$ y $K = (r(M) \cap N)/r(N)$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{g} & M/r(N) \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} & & \\ & & E(K) & & \end{array}$$

con f y g son el morfismo inclusión.

Como $E(K)$ es inyectivo, existe un morfismo $h : M/r(N) \longrightarrow E(K)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & M/r(N) \arrow[dl, "h"] \\ & E(K) & \end{tikzcd}$$

es decir, $f = hg$.

Afirmamos lo siguiente:

(i) $E(K) \in \mathcal{F}_r$.

(ii) $h(r(M/r(N))) = 0$.

(iii) $K \leq r(M/r(N))$.

En efecto, veamos que se cumple (i). Como $N/r(N) \in \mathcal{F}_r$ y $K \leq N/r(N)$, por (3) de la Proposición 2.1.4 se sigue que $K \in \mathcal{F}_r$. Y como $\mathcal{F}_r$ es una clase estable concluimos que $E(K) \in \mathcal{F}_r$.

Ahora veamos que se cumple (ii). Como r es prerradical y $h : M/r(N) \longrightarrow E(K)$ es un morfismo tenemos que $h(r(M/r(N))) \leq r(E(K)) = 0$, es decir, $h(r(M/r(N))) = 0$.

Por último veamos que se cumple (iii). Como r es radical y $r(N) \leq r(M)$, por el Lema 2.11, $r(M/r(N)) = r(M)/r(N)$. Y como $K \leq r(M)/r(N)$ concluimos que $K \leq r(M/r(N))$.

Entonces tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} f((r(M) \cap N)/r(N)) & \leq & f(r(M/r(N))) \\ & = & hg(r(M/r(N))) \\ & = & h(g(r(M/r(N)))) \\ & = & h(r(M/r(N))) \\ & = & 0. \end{array}$$

Por lo tanto $f = 0$ y en consecuencia $r(N) = r(M) \cap N$, es decir, r es hereditario. □

Corolario 3.3. *Si r es un prerradical hereditario, entonces $\widehat{r}$ es un radical hereditario.*

Demostración. Por (1) de la Proposición 3.1.2, $\mathcal{F}_{\widehat{r}} = \mathcal{F}_r$ es estable. Y como $\widehat{r}$ es radical, por (2) de la Proposición 3.1.2 se sigue que $\widehat{r}$ es hereditario. □

Proposición 3.1.3. *Sea r un prerradical hereditario. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) r es radical.

(2) $Q/r(Q) \in \mathcal{F}_r$ para todo $Q \in R$-Mod inyectivo.

Demostración. (1)⇒(2) Es claro.

(2)⇒(1) Sea $M \in R$-Mod. Consideremos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow r(E(M))/r(M) \xrightarrow{f} E(M)/r(M) \xrightarrow{g} E(M)/r(E(M)) \longrightarrow 0.$$

Veamos que $r(E(M)/r(M)) = r(E(M))/r(M)$. Como $E(M)$ es inyectivo, por hipótesis tenemos que $E(M)/r(E(M)) \in \mathcal{F}_r$. Además como $E(M)/r(E(M)) \cong (E(M)/r(M))/(r(E(M))/r(M))$ se sigue que

$$(E(M)/r(M))/(r(E(M))/r(M)) \in \mathcal{F}_r$$

Entonces por (4) de la Proposición 2.1.1 tenemos que:

$$r(E(M)/r(M)) \leq r(E(M))/r(M).$$

Para la otra contención, como $r(M) \leq E(M)$, entonces por (2) de la Proposición 2.1.1 tenemos que

$$\begin{array}{rcl} r(E(M))/r(M) & = & (r(E(M)) + r(M))/r(M) \\ & \leq & r(E(M)/r(M)). \end{array}$$

Por lo tanto $r(E(M)/r(M)) = r(E(M))/r(M)$. Además como r es hereditario y $M/r(M) \leq$

$E(M)/r(M)$ tenemos que

$$\begin{aligned} r\left(\frac{M}{r(M)}\right) &= \frac{M}{r(M)} \bigcap r\left(\frac{E(M)}{r(M)}\right) \\ &= \frac{M}{r(M)} \bigcap \frac{r(E(M))}{r(M)} \\ &= \frac{M \cap r(E(M))}{r(M)} \\ &= \frac{r(M)}{r(M)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto r es radical. □

Lema 3.4. *Si r un prerradical hereditario, entonces*

$$I = \bigcap \{K \mid K \textit{ es ideal izquierdo de } R \textit{ y } R/K \in \mathcal{T}_r\}$$

es un ideal bilateral de R.

Demostración. Como la intersección de ideales izquierdos es un ideal izquierdo, es suficiente demostrar que I absorbe por la derecha. Sean $a \in R$ y K un ideal izquierdo de R tal que $R/K \in \mathcal{T}_r$. Afirmamos que $(K : a) = \{b \in R \mid ba \in K\}$ es un ideal izquierdo de R. En efecto,

(i) $0 \in (K : a)$.

(ii) Sean $b, c \in (K : a)$, entonces $ba \in K$ y $ca \in K$. Por lo tanto $(b - c)a = ba - ca \in K$, es decir, $b - c \in (K : a)$.

(iii) Sean $x \in R$ y $b \in (K : a)$, entonces $ba \in K$. Como K es ideal izquierdo de R y $x \in R$ se sigue que $(xb)a = x(ba) \in K$. Por lo tanto $xb \in (K : a)$.

Ahora definamos la siguiente función:

$$\begin{aligned} f : R/(K : a) &\to R/K \\ x + (K : a) &\mapsto xa + K \end{aligned}$$

Veamos que f está bien definida y es inyectiva. Sean $x + (K : a), y + (K : a) \in R/(K : a)$, entonces

$$\begin{aligned} xa + K = ya + K &\Leftrightarrow (x - y)a = xa - ya \in K \\ &\Leftrightarrow x - y \in (K : a) \\ &\Leftrightarrow x + (K : a) = y + (K : a). \end{aligned}$$

Por lo tanto f está bien definida y es inyectiva. Además es claro que f es morfismo y en consecuencia monomorfismo. Por otro lado, como r es hereditario, por (c) de la Proposición 3.1.1, $\mathcal{T}_r$ es una clase hereditaria. Por lo tanto como f es monomorfismo y $R/K \in \mathcal{T}_r$, por la Proposición 1.2.1 concluimos que $R/(K : a) \in \mathcal{T}_r$. Entonces $I \leq (K : a)$ de donde $Ia \leq K$ y como esto ocurre para todo ideal izquierdo K de R con $R/K \in \mathcal{T}_r$ concluimos que $Ia \leq I$. □

Proposición 3.1.4. *Sea r un prerradical superhereditario y sea*

$$I = \bigcap \{K \mid K \textit{ es ideal izquierdo de } R \textit{ y } R/K \in \mathcal{T}_r\}.$$

Entonces:

(1) I es un ideal bilateral de R.

(2) $R/I \in \mathcal{T}_r$.

(3) $T \in \mathcal{T}_r$ si y sólo si $IT = 0$.

(4) $r(M) = \{x \in M \mid Ix = 0\}$ para todo $M \in R$-Mod.

(5) r es radical si y sólo si $I = I^2$.

Demostración. (1) Ver el Lema 3.4.

(2) Sea $X = \{K \mid K$ es ideal izquierdo de R y $R/K \in \mathcal{T}_r\}$ y definamos la siguiente función:

$$\begin{array}{rcl} f : R & \to & \prod_{K\in X} R/K \\ a & \mapsto & (a+K)_{K\in X} \end{array}$$

Es claro que f está bien definida y es morfismo. Entonces por el Primer Teorema de Isomorfismo existe un único monomorfismo $g : R/\mathrm{Ker}(f) \longrightarrow \prod_{K\in X} R/K$. Además notemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(f) & = & \{a \in R \mid (a+K)_{K\in X} = 0\} \\ & = & \{a \in R \mid a \in K \text{ para cada } K \in X\} \\ & = & \bigcap X. \end{array}$$

Entonces

$$R/I = R/\left(\bigcap X\right) = R/\mathrm{Ker}(f) \cong g(R/\mathrm{Ker}(f)) \leq \prod_{K\in X} R/K.$$

Por otro lado como r es superhereditario y $R/K \in \mathcal{T}_r$ para cada $K \in X$, se sigue que $\prod_{K\in X} R/K \in \mathcal{T}_r$. Por lo tanto $R/I \in \mathcal{T}_r$.

(3) Supongamos que $T \in \mathcal{T}_r$ y sea $x \in T$, entonces $R/(0:x) \cong Rx \leq T$. Como r es hereditario, por (c) de la Proposición 3.1.1, $\mathcal{T}_r$ es hereditaria y en consecuencia $R/(0:x) \in \mathcal{T}_r$. Entonces $I \leq (0:x)$ de donde $Ix = 0$ y como esto ocurre para todo $x \in T$ concluimos que $IT = 0$.

Supongamos que $IT = 0$ y que $r(T)$ es submódulo propio de T, entonces existe $x \in T$ tal que $x \notin r(T)$. Como $IT = 0$, entonces $I \leq (0:x)$. Y como $\mathcal{T}_r$ es cerrada bajo cocientes se sigue que:

$$Rx \cong R/(0:x) \cong (R/I)/((0:x)/I) \in \mathcal{T}_r,$$

es decir, $Rx \in \mathcal{T}_r$. Como $Rx \leq T$, entonces $Rx = r(Rx) \leq r(T)$ de donde $x \in r(T)$ que es una contradicción. Por lo tanto $T = r(T)$, es decir, $T \in \mathcal{T}_r$.

(4) Sean $M \in R$-Mod e $Y = \{x \in M \mid Ix = 0\}$, veamos que $r(M) = Y$. Sea $x \in r(M)$, como r es hereditario, por (c) de la Proposición 3.1.1, r es idempotente, de donde $r(M) \in \mathcal{T}_r$. Entonces por (3) se sigue que $Ir(M) = 0$. Por lo tanto para todo $x \in r(M)$, $Ix = 0$, es decir, $x \in Y$. Para la otra contención notemos que $Y \leq M$. En efecto,

- $0 \in Y$.
- Sean $x, y \in Y$, entonces $Ix = 0 = Iy$ de donde $I(x+y) = Ix + Iy = 0$, es decir, $x + y \in Y$.
- Sean $a \in R$ y $x \in Y$, entonces $I(ax) = (Ia)x = Ix = 0$, es decir, $ax \in Y$.

Además es claro que $IY = 0$, entonces por (3) tenemos que $Y \in \mathcal{T}_r$. Por lo tanto $Y = r(Y) \leq r(M)$.

(5) Supongamos que r es radical y consideremos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow R/I^2 \longrightarrow R/I \longrightarrow 0.$$

Como $I/I^2, R/I \in \mathcal{T}_r$ y r es radical, por (2) de la Proposición 2.1.4 se sigue que $R/I^2 \in \mathcal{T}_r$. Por lo tanto $I \leq I^2$.

Supongamos que $I = I^2$ y sea $M \in R$-Mod, veamos que $r(M/r(M)) = 0$. Sea $x + r(M) \in r(M/r(M))$, entonces $Ix + r(M) = I(x + r(M)) = 0$, es decir, $Ix \leq r(M)$ de donde $Ix = I^2x \leq Ir(M)$. Como r es hereditario, por (c) de la Proposición 3.1.1, r es idempotente, entonces por (3) tenemos que $Ir(M) = 0$. Por lo tanto $Ix = I^2x = 0$ de donde $x \in r(M)$. Así hemos demostrado que $r(M/r(M)) = 0$, es decir, r es radical. □

Proposición 3.1.5. *Sea I un ideal bilateral de R y para todo $M \in R$-Mod definamos $r(M) = \{x \in M \mid Ix = 0\}$. Entonces:*

(1) r es un prerradical superhereditario.

(2) $T \in \mathcal{T}_r$ si y sólo si $IT = 0$.

(3) $r(R) = (0 : I)_r = \{a \in R \mid Ia = 0\}$.

(4) $I = \bigcap\{K \mid K$ es ideal izquierdo de R y $R/K \in \mathcal{T}_r\}$

(5) r es radical si y sólo si $I = I^2$.

(6) $\mathcal{T}_r$ es estable.

Demostración. (1) Primero veamos que r es prerradical:

(i) Sea $M \in R$-Mod, veamos que $r(M) \leq M$.

- $0 \in r(M)$.
- Sean $x, y \in r(M)$, entonces $Ix = 0 = Iy$ de donde $I(x + y) = 0$ y en consecuencia $x + y \in r(M)$.
- Sean $a \in R$ y $x \in r(M)$, entonces $Ix = 0$. Por lo tanto $I(ax) = Ix = 0$, es decir, $ax \in r(M)$.

(ii) Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de módulos. Veamos que $f(r(M)) \leq r(N)$. Sea $f(x) \in f(r(M))$, entonces $x \in r(M)$, es decir, $Ix = 0$. Por lo tanto $If(x) = f(Ix) = f(0) = 0$, es decir, $f(x) \in r(N)$.

Ahora veamos que r es superhereditario:

(i) Sean $N, M \in R$-Mod tales que $N \leq M$, veamos que $r(N) = N \cap r(M)$. Por (1) de la Proposición 2.1.1 es suficiente demostrar que $N \cap r(M) \subseteq r(N)$. Sea $x \in N \cap r(N)$, entonces $x \in N$ y $x \in r(M)$, es decir, $x \in N$ e $Ix = 0$. Por lo tanto $x \in r(N)$.

(ii) Veamos que $\mathcal{T}_r$ es cerrada bajo productos directos. Sea $\{M_j\}_{j \in J} \subseteq \mathcal{T}_r$, veamos que $\prod_{j \in J} M_j \in \mathcal{T}_r$. Sea $\alpha \in \prod_{j \in J} M_j$, entonces $\alpha = (a_j)_{j \in J}$ con $a_j \in M_j$ para todo $j \in J$. Entonces $I\alpha = I(a_j)_{j \in J} = (Ia_j)_{j \in J} = (0)$. Por lo tanto $\alpha \in r(\prod_{i \in I} M_i)$.

(2) Supongamos que $T \in \mathcal{T}_r$, entonces $r(T) = T$. Por lo tanto $IT = Ir(T) = 0$.

Supongamos que $T \in R$-Mod y supongamos que $IT = 0$, entonces para todo $x \in T$ se cumple que $Ix = 0$ y en consecuencia $r(T) = T$.

(3) Es claro.

(4) Sea $X = \{K \mid K$ es ideal izquierdo de R y $R/K \in \mathcal{T}_r\}$. Como I es un ideal bilateral de R, por (2) se sigue que $R/I \in \mathcal{T}_r$ y en consecuencia $I \in X$. Por lo tanto $\bigcap X \subseteq I$. Para la otra contención sea $K \in X$ y $a \in I$. Como $1 + K \in R/K$, entonces $a + K = a(1 + K) = 0$, es decir, $a \in K$. Y como esto ocurre para todo $K \in X$ concluimos que $I \subseteq \bigcap X$. Por lo tanto $I = \bigcap\{K \mid K$ es ideal izquierdo de R y $R/K \in \mathcal{T}_r\}$.

(5) Ver Proposición 3.1.4.

(6) Sea $M \in \mathcal{T}_r$, veamos que $E(M) \in \mathcal{T}_r$. Sea $0 \neq x \in E(M)$, como M es esencial en $E(M)$ existe $0 \neq a \in R$ tal que $0 \neq ax \in M$. Entonces $I(ax) = (Ia)x = Ix = 0$. Por lo tanto $E(M) \in \mathcal{T}_r$. ☐

Teorema 3.5. *Existe una correspondencia biyectiva entre los ideales bilaterales y los prerradicales superhereditarios. Esta correspondencia induce una correspondencia biyectiva entre los ideales bilaterales idempotentes y los radicales superhereditarios.*

Demostración. Sea $\mathcal{I}$ el conjunto de todos los ideales bilaterales de R y sea R-prsh la clase de todos los prerradicales superhereditarios. Definamos:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{I} & \overset{\alpha}{\to} & R\text{-prsh} & \overset{\beta}{\to} & \mathcal{I} \\ I & \mapsto & r & \mapsto & \bigcap K \end{array}$$

donde $r(M) = \{x \in M \mid Ix = 0\}$ y K corre a través de todos los ideales izquierdos de R tal que $R/K \in \mathcal{T}_r$. Sea $I \in \mathcal{I}$, entonces

$$\begin{aligned} (\beta\alpha)(I) &= \beta(\alpha(I)) \\ &= \beta(r) \\ &= \bigcap K \\ &= I \text{ (por (4) de la Proposición 3.1.5)} \end{aligned}$$

Luego, $\beta\alpha = 1_{\mathcal{I}}$. De manera análoga obtenemos que $\alpha\beta = 1_{R\text{-prsh}}$. Por lo tanto existe una correspondencia biyectiva entre $\mathcal{I}$ y R-prsh. Y si r es radical, por (5) de la Proposición 3.1.5, $I = \bigcap K$ es idempotente. Luego, existe una correspondencia biyectiva entre los ideales bilaterales idempotentes y los radicales superhereditarios. ☐

3.1.1. El prerradical hereditario $\eta(r)$

Definición 3.6. *Sea r un prerradical. Definimos la relación $\eta(r)$ de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} \eta(r) : R\text{-}Mod &\to R\text{-}Mod \\ M &\mapsto M \cap r(E(M)). \end{aligned}$$

Observación 3.7. *Sean r un prerradical y $M \in R$-Mod, entonces $\eta(r)(M)$ no depende de la elección particular de $E(M)$.*

Demostración. Sea Q un módulo inyectivo tal que $M \leq Q$, entonces tenemos el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "1_M"] \arrow[d, hook, "\iota_1"] & M \arrow[d, hook, "\iota_2"] \\ E(M) \arrow[r, "h"] & Q \end{tikzcd}$$

es decir, $h\iota_i = \iota_2 1_M$. Por lo tanto $h(M \cap r(E(M))) = M \cap r(E(M))$. Por otro lado, como r es prerradical tenemos lo siguiente:

$$M \cap r(E(M)) = h(M \cap r(E(M))) \leq h(r(E(M))) \leq r(Q).$$

Por lo tanto $M \cap r(E(M)) \subseteq M \cap r(Q)$. De manera análoga, como $E(M)$ es inyectivo tenemos el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "1_M"] \arrow[d, hook, "\iota_2"] & M \arrow[d, hook, "\iota_1"] \\ Q \arrow[r, "h'"] & E(M) \end{tikzcd}$$

es decir, $h'\iota_2 = \iota_1 1_M$. Por lo tanto $h'(M \cap r(Q)) = M \cap r(Q)$ y como r es prerradical se sigue que:

$$M \cap r(Q) = h'(M \cap r(Q)) \leq h'(r(Q)) \leq r(E(M)).$$

Por lo tanto $M \cap r(Q) \subseteq M \cap r(E(M))$. □

Proposición 3.1.6. *Sea r un prerradical, entonces tenemos lo siguiente:*

(1) $\eta(r)$ es un prerradical hereditario y $r \preceq \eta(r)$.

(2) Si s es un prerradical hereditario tal que $r \preceq s$, entonces $\eta(r) \preceq s$, es decir, $\eta(r)$ es el menor prerradical hereditario tal que $r \preceq \eta(r)$.

(3) $F \in \mathcal{F}_{\eta(r)}$ si y sólo si $E(F) \in \mathcal{F}_r$.

(4) $T \in \mathcal{T}_{\eta(r)}$ si y sólo si $T \leq r(E(T))$.

(5) Si $Q/r(Q)$ es inyectivo y $r(Q/r(Q)) = 0$ para todo módulo inyectivo Q, entonces $\eta(r)$ es un radical hereditario.

Demostración. Supongamos que r es prerradical.

(1) Primero veamos que $\eta(r)$ es un prerradical. Es claro que para todo $M \in R$-Mod, $\eta(r)(M) \leq M$. Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de módulos, veamos que $f(\eta(r)(M)) \leq \eta(r)(N)$. Como $E(N)$ es inyectivo tenemos el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook, "\iota_M"] \arrow[d, "f"] & E(M) \arrow[d, "g"] \\ N \arrow[r, hook, "\iota_N"] & E(N) \end{tikzcd}$$

es decir, $g\iota_M = \iota_N f$. Por lo tanto $g(M \cap r(E(M))) = f(M \cap r(E(M)))$. Por otro lado, como r es prerradical y g es un morfismo de módulos tenemos lo siguiente:

$$g(M \cap r(E(M))) \leq g(r(E(M))) \leq r(E(N)),$$

de donde $f(M \cap r(E(M))) \leq r(E(N))$. Además como $f(M \cap r(E(M))) \leq N$ concluimos que $f(M \cap r(E(M))) \leq N \cap r(E(N))$, es decir, $f(\eta(r)(M)) \leq \eta(r)(N)$.

Ahora veamos que $\eta(r)$ es hereditario. Sea $M \in R$-Mod y sea N un submódulo de M, entonces $E(N) \leq E(M)$. Como $E(N)$ es inyectivo, por la Proposición 1.1.19 existe $K \leq E(M)$ tal que $E(M) = E(N) \oplus K$. También notemos que como $N \leq E(N)$, entonces $N \cap K \leq E(N) \cap K = 0$, es decir, $N \cap K = 0$. Y como r es prerradical, $r(K) \leq K$ de donde $N \cap r(K) \leq N \cap K = 0$, es decir, $N \cap r(K) = 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} N \cap \eta(r)(M) &= N \cap (M \cap r(E(M))) \\ &= (N \cap M) \cap r(E(M)) \\ &= N \cap r(E(M)) \\ &= N \cap r(E(N) \oplus K) \\ &= N \cap (r(E(N)) \oplus r(K)) \\ &= (N \cap r(E(N))) \oplus (N \cap r(K)) \\ &= (N \cap r(E(N))) \oplus 0 \\ &= N \cap r(E(N)) \\ &= \eta(r)(N). \end{aligned}$$

Por último veamos que $r \preceq \eta(r)$. Sea $M \in R$-Mod. Como r es prerradical y $M \leq E(M)$, entonces $r(M) \leq r(E(M))$. Por lo tanto $r(M) \leq M \cap r(E(M)) = \eta(r)(M)$, es decir, $r \preceq \eta(r)$.

(2) Sea s un prerradical hereditario tal que $r \preceq s$ y sea $M \in R$-Mod, entonces $\eta(r)(M) = M \cap r(E(M)) \leq M \cap s(E(M)) = s(M)$, es decir, $\eta(r)(M) \leq s(M)$. Luego, $\eta(r) \preceq s$.

(3) Supongamos que $F \in \mathcal{F}_{\eta(r)}$, entonces tenemos que $F \cap r(E(F)) = \eta(r)(F) = 0$, es decir, $F \cap r(E(F)) = 0$. Y como $F \leq_{es} E(F)$ se sigue que $r(E(F)) = 0$, es decir, $E(F) \in \mathcal{F}_r$.

Supongamos que $E(F) \in \mathcal{F}_r$, entonces tenemos que $r(E(F)) = 0$ y en consecuencia $\eta(r)(F) = F \cap r(E(F)) = 0$, es decir, $F \in \mathcal{F}_{\eta(r)}$.

(4) Supongamos que $T \in \mathcal{T}_{\eta(r)}$, entonces tenemos que $T \cap r(E(T))) = \eta(r)(T) = T$ de donde $T \leq r(E(T))$.

Supongamos que $T \leq r(E(T))$, entonces tenemos que $\eta(r)(T) = T \cap r(E(T)) = T$.

(5) Primero notemos que para todo módulo inyectivo Q se cumple que $\eta(r)(Q) = Q \cap r(E(Q)) = Q \cap r(Q) = r(Q)$. Entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \eta(r)\left(Q/\eta(r)(Q)\right) &= \eta(r)(Q/r(Q)) \\ &= r(Q/r(Q)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Y como $\eta(r)$ es hereditario, por la Proposición 3.1.3 concluimos que $\eta(r)$ es radical. $\square$

Para un prerradical r escribiremos $\widehat{\eta}(r)$ en lugar de $\widehat{\eta(r)}$.

Proposición 3.1.7. *Sea r un prerradical.*

(1) $\widehat{\eta}(r)$ es un radical hereditario, $r \preceq \widehat{\eta}(r)$ y $\eta(\widehat{r}) \preceq \widehat{\eta}(r)$.

(2) Si s es un radical hereditario y $r \preceq s$, entonces $\widehat{\eta}(r) \preceq s$, es decir, $\widehat{\eta}(r)$ es el menor radical hereditario tal que $r \preceq \widehat{\eta}(r)$.

(3) Si $\mathcal{F}_r$ es estable, entonces $\widehat{\eta}(r) = \widehat{r}$.

Demostración. Sea r un prerradical.

(1) Por (1) de la Proposición 3.1.6 sabemos que $\eta(r)$ es un prerradical hereditario. Entonces por el Corolario 3.3 concluimos que $\widehat{\eta}(r)$ es un radical hereditario.

Ahora veamos que $r \preceq \widehat{\eta}(r)$. Como $r \preceq \eta(r)$, por la Observación 2.14 tenemos que $r \preceq \widehat{r} \preceq \widehat{\eta}(r)$, es decir, $r \preceq \widehat{\eta}(r)$.

Por último veamos que $\eta(\widehat{r}) \preceq \widehat{\eta}(r)$. Como $\widehat{r} \preceq \widehat{\eta}(r)$ y $\widehat{\eta}(r)$ es un radical hereditario, por (2) de la Proposición 3.1.6 se sigue que $\eta(\widehat{r}) \preceq \widehat{\eta}(r)$.

(2) Se sigue de (4) de la Proposición 2.1.6 y (2) de la Proposición 3.1.6.

(3) Como $\widehat{r}$ es radical y $\mathcal{F}_{\widehat{r}} = \mathcal{F}_r$ es estable, entonces por (2) de la Proposición 3.1.2, $\widehat{r}$ es un radical hereditario. Pero como $r \preceq \widehat{r}$ por (1) y (2) concluimos que $\widehat{\eta}(r) = \widehat{r}$. $\square$

Observación 3.8. *Los operadores η y $\widehat{\eta}$ son idempotentes y si $r, s \in R$-pr son tales que $r \preceq s$, entonces $\eta(r) \preceq \eta(s)$ y $\widehat{\eta}(r) \preceq \widehat{\eta}(s)$.*

Demostración. Primero veamos que η es idempotente. Sea r un prerradical, veamos que $\eta(r) = \eta(\eta(r))$. Sea $M \in R$-Mod, entonces

$$\begin{aligned}
\eta(\eta(r))(M) &= M \cap \eta(r)(E(M)) \\
&= M \cap (E(M) \cap r(E(E(M)))) \\
&= M \cap (E(M) \cap r(E(M))) \\
&= M \cap r(E(M)) \\
&= \eta(r)(M).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\eta(r) = \eta(\eta(r))$, es decir, η es idempotente. Ahora veamos que si r y s son dos prerradicales tales que $r \preceq s$, entonces $\eta(r) \preceq \eta(s)$. Sea $M \in R$-Mod, entonces

$$\begin{aligned}
\eta(r)(M) &= M \cap r(E(M)) \\
&\leq M \cap s(E(M)) \\
&= \eta(s)(M).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\eta(r) \preceq \eta(s)$.

Veamos que $\widehat{\eta}$ es idempotente. Sea r un prerradical, por la Proposición 3.1.7 sabemos que $\widehat{\eta}(r)$ es un radical hereditario y que $\widehat{\eta}(\widehat{\eta}(r))$ es el menor radical hereditario tal que $\widehat{\eta}(r) \preceq \widehat{\eta}(\widehat{\eta}(r))$. Por lo tanto $\widehat{\eta}(r) = \widehat{\eta}(\widehat{\eta}(r))$, es decir, $\widehat{\eta}$ es idempotente. Ahora sean r y s dos prerradicales tales que $r \preceq s$, entonces $r \preceq \eta(r) \preceq \eta(s) \preceq \widehat{\eta}(s)$. Pero por (3) de la Proposición 3.1.7, $\widehat{\eta}(r)$ es el menor radical hereditario tal que $r \preceq \widehat{\eta}(r)$. Por lo tanto $\widehat{\eta}(r) \preceq \widehat{\eta}(s)$. $\square$

Proposición 3.1.8. *Si $Q/r(Q)$ es inyectivo y libre de r-torsión para todo módulo inyectivo Q, entonces $\eta(r) = \widehat{\eta}(r) = \eta(\widehat{r})$.*

Demostración. Como $Q/r(Q)$ es inyectivo y libre de r-torsión para todo módulo inyectivo Q, por (5) de la Proposición 3.1.6, $\eta(r)$ es un radical hereditario. Por lo tanto por (1) de la Proposición 3.1.6 y (2) de la Proposición 3.1.7 concluimos que $\eta(r) = \widehat{\eta}(r)$. Por otro lado, como $r \preceq \widehat{r}$, por la Observación 3.8 tenemos que $\eta(r) \preceq \eta(\widehat{r}) \preceq \widehat{\eta}(r) = \eta(r)$. Por lo tanto $\eta(r) = \widehat{\eta}(r) = \eta(\widehat{r})$. $\square$

3.2. Prerradicales cohereditarios

Definición 3.9. *Un prerradical r es llamado **cohereditario** si para todo $M \in R$-Mod y para todo submódulo N de M, $r(M/N) = (r(M) + N)/N$.*

Ejemplo 9.

(1) El prerradical Rad definido en (c) del Ejemplo 7 de la página 32 no es cohereditario.

(2) El prerradical Soc definido en (d) del Ejemplo 7 de la página 32 no es cohereditario.

(3) Sea I un ideal bilateral de R, entonces el prerradical r_I definido en (e) del Ejemplo 7 de la página 32 es cohereditario.

Demostración. (1) Veamoslo con un contraejemplo. Sea $\mathbb{Z}$ y $4\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$. Por un lado sabemos que $\mathrm{Rad}(\mathbb{Z}) = 0$ mientras que $\mathrm{Rad}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = \mathrm{Rad}(\mathbb{Z}_4) = \langle \overline{2} \rangle$. Así, $\mathrm{Rad}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = \langle \overline{2} \rangle \neq 0 = (\mathrm{Rad}(\mathbb{Z}) + 4\mathbb{Z})/4\mathbb{Z}$.

(2) Dea manera análoga a (1), $(\mathrm{Soc}(\mathbb{Z}) + 4\mathbb{Z})/4\mathbb{Z} = (0 + 4\mathbb{Z})/4\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = 0$ mientras que $\mathrm{Soc}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = \mathrm{Soc}(\mathbb{Z}_4) = \langle \overline{2} \rangle$ y en consecuencia Soc no es cohereditario.

(3) Sea $M \in R$-Mod y sea N un submódulo de M. Por (2) de la Proposición 2.1.1 es suficiente demostrar que $r(M/N) \subseteq (r(M)+N)/N$. Notemos que $r(M/N) = I(M/N) = (IM)/N$, entonces como $IM \subseteq IM + N$ tenemos que

$$\begin{aligned} r(M/N) &= (IM)/N \\ &\subseteq (IM+N)/N \\ &= (r(M)+N)/N. \end{aligned}$$

Por lo tanto r es cohereditario. □

El siguiente resultado nos ayudará a determinar cuando un prerradical es cohereditario.

Proposición 3.2.1. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un prerradical r:*

(a) r es cohereditario.

(b) r preserva epimorfismos.

(c) El funtor $1/r$ definido en la Observación 2.9 de la página 35 es exacto derecho.

(d) r es un radical y $\mathcal{F}_r$ es cohereditaria.

Demostración. (a)⇒(b) Supongamos que r es un prerradical y sea $f : M \longrightarrow N$ un epimorfismo de módulos. Veamos que $f(r(M)) = r(N)$. Como f es epimorfismo, por el Teorema 1.12 tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & N \\ M/\mathrm{Ker}(f) \arrow[ur, "g"] & \end{tikzcd}$$

es decir, $f = g\pi$, con g isomorfismo. Como g es isomorfismo, por el Lema 2.3 tenemos que $g(r(M/\mathrm{Ker}(f))) = r(N)$. Y como $f = g\pi$ se sigue que:

$$\begin{aligned} f(r(M)) &= (g\pi)(r(M)) \\ &= g(\pi(r(M))) \\ &= g((r(M)+\mathrm{Ker}(f))/\mathrm{Ker}(f)) \\ &= g(r(M/\mathrm{Ker}(f))) \\ &= r(N). \end{aligned}$$

Por lo tanto r preserva epimorfismos.

(b)⇒(c) Supongamos que r preserva epimorfismos y consideremos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0.$$

Veamos que la siguiente sucesión es exacta:

$$L/r(L) \xrightarrow{f'} M/r(M) \xrightarrow{g'} N/r(N) \longrightarrow 0.$$

- $\mathrm{Im}(f') = \mathrm{Ker}(g')$.
  Sea $\overline{y} \in \mathrm{Im}(f')$, entonces existe $\overline{x} \in L/r(L)$ tal que $\overline{y} = f'(\overline{x})$. Entonces tenemos lo siguiente:

$$g'(\overline{y}) = g'(f'(\overline{x})) = g'(\overline{f(x)}) = \overline{g(f(x))} = \overline{0}.$$

Por lo tanto $\overline{y} \in \mathrm{Ker}(g')$.

Ahora sea $\overline{x} \in \mathrm{Ker}(g')$, entonces:

$$\begin{aligned}
\overline{x} \in \mathrm{Ker}(g') &\Rightarrow g'(\overline{x}) = 0 \\
&\Rightarrow \overline{g(x)} = 0 \\
&\Rightarrow g(x) \in r(N) = g(r(M)) \\
&\Rightarrow g(x) = g(m) \text{ para algún } m \in r(M) \\
&\Rightarrow g(x-m) = 0 \\
&\Rightarrow x - m \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f) \\
&\Rightarrow x - m = f(l) \text{ para algún } l \in L \\
&\Rightarrow \overline{x} = \overline{f(l)} \\
&\Rightarrow \overline{x} = f'(\bar{l}) \in \mathrm{Im}(f').
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathrm{Im}(f') = \mathrm{Ker}(g')$.

- g' es epimorfismo.

  Sea $\overline{y} \in N/r(N)$, como $y \in N$ y g es epimorfismo existe $x \in M$ tal que $g(x) = y$, entonces $g'(\overline{x}) = \overline{g(x)} = \overline{y}$. Por lo tanto g' es epimorfismo.

(c)⇒(d) Primero veamos que r es radical. Sea $M \in R$-Mod y consideremos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow r(M) \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M/r(M) \longrightarrow 0.$$

Entonces por hipótesis tenemos que la siguiente sucesión es exacta:

$$r(M)/r(r(M)) \xrightarrow{\iota'} M/r(M) \xrightarrow{\pi'} (M/r(M))/r(M/r(M)) \longrightarrow 0.$$

Esto es, $\mathrm{Im}(\iota') = \mathrm{Ker}(\pi') = r(M/r(M))$. Además es claro que $\mathrm{Im}(\iota') = 0$. Por lo tanto $0 = r(M/r(M))$ y en consecuencia r es radical.

Ahora veamos que $\mathcal{F}_r$ es cohereditaria. Sea $M \in R$-Mod y sea N un submódulo de M, entonces por (3) de la Proposición 2.1.4, $N \in \mathcal{F}_r$. Consideremos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0.$$

Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$N \xrightarrow{\iota'} M \xrightarrow{\pi'} (M/N)/r(M/N) \longrightarrow 0.$$

Esto es, $N = \mathrm{Im}(\iota) = \mathrm{Im}(\bar{\iota}) = \mathrm{Ker}(\overline{\pi}) = r(M/N)$, entonces $N = r(M/N) \leq M/N$ y en consecuencia $r(M/N) = 0$. Por lo tanto $\mathcal{F}_r$ es cohereditaria.

(d)⇒(a) Sean $M \in R$-Mod y N un submódulo de M. Por la Proposición 2.1.1 es suficiente demostrar que $r(M/N) \subseteq (r(M) + N)/N$. Observemos lo siguiente:

(i) Como r es radical y $\mathcal{F}_r$ es una clase cohereditaria, tenemos que $(M/r(M))/((N + r(M))/r(M)) \in \mathcal{F}_r$.

(ii) Como $(M/r(M))/((N+r(M))/r(M)) \cong M/(r(M)+N)$, por (i) se sigue que $M/(r(M)+N) \in \mathcal{F}_r$.

(iii) Como $(M/N)/((N + r(M))/N) \cong M/(r(M) + N)$, entonces $r((M/N)/((N + r(M))/N)) \cong r(M/(r(M) + N)) = 0$, es decir, $r((M/N)/((N + r(M))/N)) = 0$. Por lo tanto $r(M/N) \subseteq (r(M) + N)/N$.

□

Corolario 3.10. *Todo prerradical cohereditario es radical.*

Demostración. Es una consecuencia de la Proposición 3.2.1. □

Definición 3.11. *Un anillo R es llamado* ***anillo perfecto izquierdo*** *si todo módulo izquierdo sobre R tiene cubierta proyectiva.*

Proposición 3.2.2. *Sea r un prerradical. Entonces:*

(1) Si r es cohereditario, entonces $\mathcal{T}_r$ es cerrada bajo cubiertas.

(2) Si r es cohereditario y R es perfecto izquierdo, entonces $\mathcal{T}_r$ es coestable.

(3) Si r es cohereditario, $M \in \mathcal{T}_r$ y $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ es una presentación proyectiva arbitraria de M, entonces $P = r(P) + f(A)$.

Demostración. (1) Sean $M, N \in R$-Mod tales que N es superfluo en M y $M/N \in \mathcal{T}_r$, veamos que $M \in \mathcal{T}_r$. Como $M/N \in \mathcal{T}_r$ se sigue que $r(M/N) = M/N$ y como r es cohereditario tenemos que $r(M/N) = (r(M) + N)/N$. Por lo tanto $(r(M) + N)/N = M/N$ de donde $r(M) + N = M$ y como N es superfluo en M se tiene que $r(M) = M$, es decir, $M \in \mathcal{T}_r$.

(2) Sea $M \in \mathcal{T}_r$, como R es perfecto izquierdo M tiene una cubierta proyectiva, es decir, existe un epimorfismo superfluo $\varphi : P \longrightarrow M$ con P proyectivo. Como φ es epimorfismo superfluo tenemos que $\operatorname{Ker}(\varphi)$ es superfluo en P y, por el Primer Teorema de Isomorfismos que $P/\operatorname{Ker}(\varphi) \cong M$. Como $M \in \mathcal{T}_r$ y $\mathcal{T}_r$ es abstracta se sigue que $P/\operatorname{Ker}(\varphi) \in \mathcal{T}_r$. Por lo tanto, por (1) concluimos que $P \in \mathcal{T}_r$.

(3) Como r es cohereditario y g epimorfismo, por (b) de la Proposición 3.2.1 se sigue que $g_{|r(P)} : r(P) \longrightarrow r(M) = M$ es epimorfismo. Sea $x \in P$, entonces $g(x) \in M$ y como $g_{|r(P)}$ es epimorfismo existe $y \in r(P)$ tal que $g(x) = g(y)$. Por lo tanto $x - y \in \operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Im}(f)$, entonces existe $a \in \operatorname{Im}(f)$ tal que $x - y = a$, de donde $x = y + a \in r(P) + \operatorname{Im}(f)$. □

Proposición 3.2.3. *Sea r un prerradical idempotente tal que para todo $T \in \mathcal{T}_r$ existe una presentación proyectiva*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} P \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

con $P = r(P) + f(A)$. Entonces r es cohereditario.

Demostración. Sean $M, N \in R$-Mod tales que $N \leq M$. Como r es idempotente se sigue que $r(M/N) \in \mathcal{T}_r$. Entonces por hipótesis tenemos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} r(M/N) \longrightarrow 0$$

con $P = r(P) + f(A)$ proyectivo. Como g es epimorfismo se sigue que: $r(M/N) = g(P) = g(r(P) + f(A)) = g(r(P)) + g(f(A)) = g(r(P))$. Y como P es proyectivo tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & & P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & r(M/N) \arrow[d, "\iota"] & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & M \arrow[r, "\pi"] & M/N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es decir, $\iota g = \pi h$. Como h es morfismo y r prerradical se sigue que $h(r(P)) \leq r(M)$. Por lo tanto tenemos lo siguiente: $r(M/N) = g(r(P)) = \pi(h(r(P))) \leq \pi(r(M)) = (r(M) + N)/N$. □

Corolario 3.12. *Sean R un anillo perfecto izquierdo y r un radical cohereditario. Entonces $\overline{r}$ es un radical cohereditario idempotente.*

Demostración. Como r es cohereditario y R es perfecto izquierdo, por (2) de la Proposición 3.2.2 se sigue que $\mathcal{T}_{\overline{r}} = \mathcal{T}_r$ es coestable, es decir, para todo $T \in \mathcal{T}_{\overline{r}}$ existe una presentación proyectiva

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} P \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

con $P \in \mathcal{T}_{\overline{r}}$. Entonces $P = \overline{r}(P) + f(A)$ y como $\overline{r}$ es idempotente, por la Proposición 3.2.3 tenemos que $\overline{r}$ es cohereditario. □

Definición 3.13. *Sea I un ideal bilateral de un anillo R. Decimos que I satisface la condición $\mathcal{A}$ si para todo $x \in I$ se cumple que $x \in Ix$.*

Proposición 3.2.4. *Sean r un radical cohereditario y $r(R) = I$. Entonces:*

(1) $r(M) = IM$ para todo $M \in R$-Mod.

(2) $T \in \mathcal{T}_r$ si y sólo si $IT = T$.

(3) $F \in \mathcal{F}_r$ si y sólo si $IF = 0$.

(4) Si I es un ideal derecho finitamente generado, entonces $\mathcal{T}_r$ es cerrada bajo productos directos.

(5) r es idempotente si y sólo si $I^2 = I$.

(6) r es hereditario si y sólo si I satisface la condición $\mathcal{A}$.

Demostración. (1) Por la Proposición 2.1.3 sabemos que I es un ideal bilateral de R y que $IM \subseteq M$ para cada $M \in R$-Mod. Veamos que $M \subseteq IM$. Como todo módulo es cociente de un libre, tenemos que existe un epimorfismo $g : R^{(J)} \longrightarrow M$ para algún conjunto J. Entonces como r es cohereditario, por (b) de la Proposición 3.2.1 tenemos que $g(r(R^{(J)})) = r(M)$. Pero como todo módulo libre es proyectivo, por (3) de la Proposición 2.1.3 se sigue que $r(R^{(J)}) = r(R)R^{(J)}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} IM &= Ig\left(R^{(J)}\right) \\ &= g\left(IR^{(J)}\right) \\ &= g\left(r(R)R^{(J)}\right) \\ &= g\left(r(R^{(J)})\right) \\ &= r(M). \end{aligned}$$

(2) Es claro.
(3) Es claro.

(4) Supongamos que I es un ideal derecho de R finitamente generado, entonces $I = \sum_{k=1}^{n} a_k R$. Sea $T = \prod_{i \in I} T_i$ con $T_i \in \mathcal{T}_r$ para cada $i \in I$. Veamos que $T \in \mathcal{T}_r$, es decir, $IT = T$. Sea $t \in T$, entonces $t = (t_i)_{i \in I}$ con $t_i \in T_i = IT_i$ para cada $i \in I$. Entonces $t_i = \sum_{j=1}^{m_i} b_{ij} t_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_k t'_{ik}$ para cada $i \in I$. Luego $t = \sum_{k=1}^{n} a_k t_k$ donde $t_k = (t'_{ik})_{i \in I}$. Por lo tanto $T \subseteq IT$ y en consecuencia $IT = T$.

(5) Supongamos que r es idempotente, entonces tenemos que $r(R) \in \mathcal{T}_r$. Por lo tanto $I^2 = Ir(R) = r(I) = r(r(R)) = r(R) = I$, es decir, $I = I^2$.

Supongamos que $I^2 = I$ y sea $M \in R$-Mod, entonces $r(r(M)) = Ir(M) = I^2M = IM = r(M)$. Por lo tanto r es idempotente.

(6) Supongamos que r es hereditario. Sea $x \in I$, entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} r(Rx) &= Rx \cap r(I) \\ &= Rx \cap r(r(R)) \\ &= Rx \cap r(R) \\ &= Rx. \end{aligned}$$

Por lo tanto $Rx = r(Rx) = I(Rx) = (IR)x = Ix$ y como $x \in Rx$ se sigue que $x \in Ix$.

Supongamos que I satisface la condición $\mathcal{A}$. Como r es radical, por (2) de la Proposición 3.1.2 es suficiente demostrar que $\mathcal{F}_r$ es estable. Sea $F \in \mathcal{F}_r$ y supongamos que $E(F) \notin \mathcal{F}_r$, es decir, $IE(F) \neq 0$. Entonces existen $a \in I$ y $x \in E(F)$ tal que $0 \neq ax \in IE(F)$. Como F es esencial en $E(F)$ y $ax \neq 0$, existe $b \in R$ tal que $0 \neq bax \in F$. Como $ba \in I$ y por hipótesis I satisface la condición $\mathcal{A}$, existe $c \in I$ tal que $ba = cba$. Entonces $0 \neq bax = cbax \in IF = 0$ que es una contradicción. Por lo tanto $IE(F) = 0$, es decir, $E(F) \in \mathcal{F}_r$. □

Corolario 3.14. *Sean r un radical cohereditario y $r(r(R)) = r(R)$. Entonces r es idempotente.*

Demostración. Como r es un radical cohereditario, por (1) de la Proposición 3.2.4, $r(M) = r(R)M$ para todo $M \in R$-Mod. Por lo tanto $r(R) = r(r(R)) = r^2(R)$ y por (5) de la Proposición 3.2.4 concluimos que r es idempotente. □

Definición 3.15. *Decimos que un prerradical se **coescinde** si es hereditario y cohereditario.*

Proposición 3.2.5. *Sean I un ideal bilateral de R y $r(M) = IM$ para todo $M \in R$-Mod. Entonces r es un radical cohereditario e $I = r(R)$.*

Demostración. Por (3) del Ejemplo 9 de la página 56 tenemos que $r(M) = IM$ es un prerradical cohereditario, entonces por el Corolario 3.10 concluimos que $r(M) = IM$ es radical. Además es claro que $I = r(R)$. □

Teorema 3.16. *Existe una correspondencia biyectiva entre los ideales bilaterales de R y los radicales cohereditarios en R-Mod. Esta correspondencia induce:*

- *Una correspondencia biyectiva entre los ideales bilaterales idempotentes de R y los radicales idempotentes cohereditarios en R-Mod.*
- *Una correspondencia biyectiva entre los ideales bilaterales de R que satisfacen la condición $\mathcal{A}$ y los radicales en r que se coescinden.*

Demostración. Sea $\mathcal{I}$ el conjunto de todos los ideales bilaterales de R y sea R-rch la clase de todos los radocales cohereditarios sobre R. Consideremos:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{I} & \overset{\alpha}{\to} & R\text{-rch} & \overset{\beta}{\to} & \mathcal{I} \\ I & \mapsto & r_I & \mapsto & r_I(R) \end{array}$$

Entonces por la Proposición 3.2.5 tenemos que $(\beta\alpha)(I) = \beta(\alpha(I)) = \beta(r_I) = r_I(R) = I$, es decir, $\beta\alpha = 1_{\mathcal{I}}$. Ahora consideremos

$$\begin{array}{ccccc} R\text{-rch} & \overset{\beta}{\to} & \mathcal{I} & \overset{\alpha}{\to} & R\text{-rch} \\ r & \mapsto & r(R) & \mapsto & r_{r(R)} \end{array}$$

Entonces por (1) de la Proposición 3.2.4, $(\alpha\beta)(r) = \alpha(\beta(r)) = \alpha(r(R)) = r_{r(R)} = r$, es decir, $\alpha\beta = 1_{R\text{-rch}}$. Luego, existe una correspondencia biyectiva entre $\mathcal{I}$ y R-rch. Además, si r es idempotente, entonces por (5) de la Proposición 3.2.4, la correspondencia anterior induce una correspondencia biyectiva entre los ideales bilaterales idempotentes de R y los radicales idempotentes cohereditarios en R-Mod. Y si r es hereditario, por (6) de la Proposición 3.2.4, la correspondencia anterior induce una correspondencia biyectiva entre los ideales bilaterales de R que satisfacen la condición $\mathcal{A}$ y los radicales en r que se coescinden. $\square$

Proposición 3.2.6. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un prerradical r:*

(a) r es exacto como funtor.

(b) r es exacto derecho.

(c) r se coescinde.

(d) r es un radical idempotente, $\mathcal{T}_r$ es hereditaria y $\mathcal{F}_r$ es cohereditaria.

Demostración. (a)⇒(b) Es claro.

(b)⇒(c) Sea $N \leq M$ y consideremos la sucesión exacta

$$N \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$$

Entonces por hipótesis tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$r(N) \xrightarrow{\iota'} r(M) \xrightarrow{\pi_{|r(M)}} r(M/N) \longrightarrow 0$$

es decir, $\iota'(r(N)) = \mathrm{Ker}(\pi_{|r(M)})$ y $\pi(r(M)) = r(M/N)$. Pero $\mathrm{Ker}(\pi_{|r(M)}) = N \cap r(M)$ y $\pi(r(M)) = (r(M)+N)/N$. Luego, $r(N) = N \cap r(M)$ y $r(M/N) = (r(M)+N)/N$, es decir, r es un prerradical hereditario y cohereditario. Por lo tanto r se coescinde.

(c)⇒(d) Sea sigue de la Proposición 3.1.1 y la Proposición 3.2.1.

(d)⇒(a) Supongamos que r es un radical idempotente, $\mathcal{T}_r$ es hereditaria y que $\mathcal{F}_r$ es cohereditaria. Entonces por la Proposición 3.1.1, r es un funtor exacto izquierdo y por la Proposición 3.2.1, r preserva epimorfismos. Por lo tanto r es exacto como funtor. $\square$

3.2.1. El prerradical cohereditario $\rho(r)$

Proposición 3.2.7. *Definamos $\rho(r)(M) = r(R)M$ para todo $M \in R$-Mod. Entonces:*

(1) $\rho(r)$ es un radical cohereditario y $\rho(r) \preceq r$.

(2) Si s es un radical cohereditario y $s \preceq r$, entonces $s \preceq \rho(r)$, es decir, $\rho(r)$ es el mayor radical cohereditario tal que $\rho(r) \preceq r$.

(3) Si $M \in R$-Mod y $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ es una presentación proyectiva para M, entonces $\rho(r)(M) = g(r(P))$.

(4) $\rho(r)$ es idempotente si y sólo si $r(R)$ es un ideal idempotente bilateral de R.

(5) Si $r(R)$ es un módulo proyectivo y $r(r(R)) = r(R)$, entonces $\rho(r)$ es idempotente.

(6) Si Rx es proyectivo y de r-torsión para todo $x \in r(R)$, entonces $\rho(r)$ es hereditario.

Demostración. (1) Por (2) de la Proposición 3.2.3, $\rho(r)$ es un radical cohereditario. Y por (2) de la Proposición 2.1.3, $\rho(r) \preceq r$.

(2) Sea s un radical cohereditario tal que $s \preceq r$, entonces por (1) de la Proposición 3.2.3, $s(M) = s(R)M$. Por lo tanto $s(M) = s(R)M \leq r(R)M = \rho(r)(M)$, es decir, $s \preceq \rho(r)$.

(3) Como P es proyectivo, por (3) de la Proposición 2.1.3, $r(P) = r(R)P = \rho(r)(P)$, de donde $g(r(P)) = g(\rho(r)(P))$. Por otro lado como $\rho(r)$ es cohereditario y g epimorfismo, por (b) de la Proposición 3.2.1, $g(\rho(r)(P)) = \rho(r)(M)$. Por lo tanto $\rho(r)(M) = g(r(P))$.

(4) Necesidad: Por (3) de la Proposición 2.1.3 se sigue que $\rho(r)(R) = r(R)$ y como $\rho(r)$ es idempotente tenemos que $r(R) = \rho(r)(R) = \rho(r)(\rho(r)(R)) = \rho(r)(r(R)) = r^2(R)$.

Suficiencia: Se sigue de (5) de la Proposición 3.2.4.

(5) Como $\rho(r)$ es un radical cohereditario, por el Corolario 3.14 es suficiente demostrar que $\rho(r)(\rho(r)(R)) = \rho(r)(R)$. Como $r(R)$ es proyectivo, por (3) tenemos que $\rho(r)(r(R)) = r(r(R))$, entonces $\rho(r)(\rho(r)(R)) = \rho(r)(r(R)) = r(r(R)) = r(R) = \rho(r)(R)$. Por lo tanto $\rho(r)$ es idempotente.

(6) Veamos que $r(R)$ satisface la condición $\mathcal{A}$. Sea $x \in r(R)$, entonces Rx es proyectivo y $r(Rx) = Rx$. Como Rx es proyectivo, por (3) tenemos que $\rho(r)(Rx) = r(Rx)$. Por lo tanto $Rx = r(Rx) = \rho(r)(Rx) = r(R)Rx = r(R)x$ de donde $s \in r(R)x$. Entonces $r(R)$ satisface la condición $\mathcal{A}$ y por (6) de la Proposición 3.2.4 concluimos que $\rho(r)$ es hereditario. □

Proposición 3.2.8. *Sean r un prerradical, I el mayor ideal bilateral idempotente de R contenido en $r(R)$ y $\xi(r)$ el radical cohereditario correspondiente a I. Entonces:*

(1) $\xi(r)$ es un radical cohereditario idempotente, $\xi(r) \preceq \overline{\rho}(r) \preceq \overline{r} \preceq r$ y $\xi(r) \preceq \rho(\overline{r}) \preceq \overline{r} \preceq r$.

(2) Si s es un radical cohereditario idempotente tal que $s \preceq r$, entonces $s \preceq \xi(r)$, es decir, $\xi(r)$ es el mayor radical cohereditario idempotente tal que $\xi(r) \preceq r$.

(3) Si $\mathcal{T}_r$ es coestable, entonces $\xi(r) = \overline{r}$.

(4) Si R es perfecto izquierdo, entonces $\xi(r) = \overline{\rho}(r)$.

Demostración. (1) Sea sigue de la Proposición 3.2.4 y la Proposición 3.2.5.

(2) Supongamos que existe un radical cohereditario idempotente s tal que $s \preceq r$, entonces $s(R) \leq r(R)$. Como s es idempotente, por la Proposición 3.2.4, $s(R)$ es un ideal bilateral idempotente de R. Luego, $s(R) \leq I$. Por lo tanto $s \preceq \xi(r)$

(3) Como $\overline{r}$ es idempotente y $\mathcal{T}_r = \mathcal{T}_{\overline{r}}$ es coestable, por la Proposición 3.2.3, $\overline{r}$ es un prerradical cohereditario idempotente. Luego, por la Proposición 3.2.1, $\overline{r}$ es un radical cohereditario idempotente. Como $\overline{r} \preceq r$, por (1) y (2) concluimos que $\xi(r) = \overline{r}$.

(4) Supongamos que R es un anillo perfecto izquierdo. Por la Proposición 3.2.7, $\rho(r)$ es un radical cohereditario. Luego, por el Corolario 3.3, $\overline{\rho}(r)$ es un radical cohereditario idempotente. Entonces por (1) y (2) concluimos que $\xi(r) = \overline{\rho}(r)$. □

Capítulo 4

Prerradicales estables y coestables

4.1. Prerradicales estables

Definición 4.1. *Sea r un prerradical. Decimos que un módulo M se* ***escinde*** *en r si $r(M)$ es sumando directo de M.*

Lema 4.2. *Sea r un prerradical. Si M se escinde en r y N es un sumando directo de M, entonces N se escinde en r.*

Demostración. Supongamos que M se escinde en r y que N es un sumando directo de M, entonces existen K, L submódulos de M tales que $M = r(M) \oplus K$ y $M = N \oplus L$. Entonces

$$\begin{aligned} M &= r(M) \oplus K \\ &= r(N \oplus L) \oplus K \\ &= (r(N) \oplus r(L)) \oplus K \\ &= r(N) \oplus (r(L) \oplus K). \end{aligned}$$

Sea $K' = r(L) \oplus K$, entonces

$$\begin{aligned} N &= M \cap N \\ &= (r(N) \oplus K') \cap N \\ &= r(N) \oplus (K' \cap N). \end{aligned}$$

Por lo tanto N se escinde en r. □

Proposición 4.1.1. *Sea r un prerradical y sea $M \in R$-Mod.*

(1) Si M se escinde, entonces $r(M) \in \mathcal{T}_r$ y $M/r(M) \in \mathcal{F}_r$.

(2) Si $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, entonces M se escinde si y sólo si cada M_i se escinde.

Demostración. Sea r un prerradical.

(1) Sea $M \in R$-Mod tal que M se escinde en r, es decir, $M = r(M) \oplus K$. Notemos que $r(K) = 0$, en efecto, por la Proposición 2.1.1, $r(K) \leq K \cap r(M) = 0$. Entonces tenemos que $r(M) = r(r(M)) \oplus r(K) = r(r(M))$, es decir, $r(M) \in \mathcal{T}_r$ y $r(M/r(M)) = r((r(M) \oplus K)/r(M)) = r(K) = 0$, es decir, $M/r(M) \in \mathcal{F}_r$.

(2) Supongamos que $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ se escinde, entonces por el Lema 4.2 se sigue que cada M_i se escinde.

Supongamos que cada M_i se escinde, entonces $M_i = r(M_i) \oplus K_i$ para cada $i \in I$. Entonces

$$\begin{aligned}\bigoplus_{i\in I} M_i &= \bigoplus_{i\in I}(r(M_i)\oplus K_i)\\ &= \bigoplus_{i\in I} r(M_i)\oplus \bigoplus_{i\in I} K_i\\ &= r\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right)\oplus \bigoplus_{i\in I} K_i.\end{aligned}$$

Por lo tanto $M = r(M) \oplus \bigoplus_{i\in I} K_i$ y en consecuencia M se escinde en r. □

Definición 4.3. *Un prerradical r es llamado **estable** si todo módulo inyectivo se escinde en r.*

Proposición 4.1.2. *Sea r un prerradical.*

(1) Si r es estable, entonces $\mathcal{T}_r$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas.

(2) Si r es idempotente y $\mathcal{T}_r$ es estable, entonces r es estable.

(3) Todo módulo inyectivo es de r-torsión si y sólo si $E(R) \in \mathcal{T}_r$.

(4) Si r es estable y hereditario, entonces r es radical.

Demostración. Sea r un prerradical.

(1) Sea $T \in \mathcal{T}_r$, veamos que $E(T) \in \mathcal{T}_r$. Como r es estable y $E(T)$ inyectivo existe $K \leq E(T)$ tal que $E(T) = r(E(T)) \oplus K$. Por otro lado como $T \leq E(T)$, entonces $T = r(T) \leq r(E(T))$ de donde $T \cap K \leq r(E(T)) \cap K = 0$, es decir, $T \cap K = 0$. Y como T es esencial en $E(T)$ concluimos que $K = 0$. Por lo tanto $E(T) = r(E(T))$, es decir, $E(T) \in \mathcal{T}_r$.

(2) Sea Q un módulo inyectivo. Como $r(Q) \leq Q$ tenemos que $E(r(Q)) \leq E(Q) = Q$, entonces $Q = E(r(Q)) \oplus K$. Como r es idempotente, $r(Q) \in \mathcal{T}_r$, y como $\mathcal{T}_r$ es estable, $E(r(Q)) \in \mathcal{T}_r$. Así, como $E(r(Q)) \leq Q$, entonces $E(r(Q)) = r(E(r(Q))) \leq r(Q) \leq E(r(Q))$, es decir, $r(Q) = E(r(Q))$. Por lo tanto $Q = r(Q) \oplus K$.

(3) Supongamos que todo módulo inyectivo es de r-torsión. Entonces $E(R) \in \mathcal{T}_r$.

Supongamos que $E(R) \in \mathcal{T}_r$ y sea Q un módulo inyectivo. Veamos que Q es de r-torsión, es decir, $r(Q) = Q$. Como todo módulo es cociente de un módulo libre, existe un epimorfismo $f : R^{(I)} \longrightarrow Q$. Y como $R \leq E(R)$ se sigue que $R^{(I)} \leq E(R)^{(I)}$. Entonces como Q es inyectivo tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R^{(I)} \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"] & E(R)^{(I)} \arrow[dl, "h"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

es decir, $f = h\iota$. Afirmamos que h es un epimorfismo. En efecto, sea $y \in Q$, como f es epimorfismo existe $x \in R^{(I)}$ tal que $y = f(x) = (h\iota)(x) = h(\iota(x)) = h(x)$. Por lo tanto h es epimorfismo y como $E(R) \in \mathcal{T}_r$, por (1) de la Proposición 2.1.4 se sigue que $E(R)^{(I)} \in \mathcal{T}_r$. Por lo tanto, por (1) de la Proposición 2.1.4 concluimos que $Q \in \mathcal{T}_r$.

(4) Sea Q un módulo inyectivo. Como r es estable, por Proposición 4.1.1, $r(Q/r(Q)) = 0$. Entonces por la Proposición 3.1.3, r es radical. □

Proposición 4.1.3. *Sea r un prerradical.*

(1) r es estable si y sólo si $\eta(r)$ es estable.

(2) Si r es estable, entonces $\overline{r}, \widehat{r}, \eta(r)$ son estables y $\eta(r) = \eta(\overline{r}) = \eta(\widehat{r}) = \widehat{\eta}(r)$.

Demostración. Afirmamos que si $Q \in R$-Mod es inyectivo, entonces $\eta(r)(Q) = r(Q)$. En efecto, $\eta(r)(Q) = Q \cap r(E(Q)) = Q \cap r(Q) = r(Q)$.

(1) Supongamos que r es estable y sea Q un módulo inyectivo, entonces $Q = r(Q) \oplus K = \eta(r)(Q) \oplus K$. Por lo tanto $\eta(r)$ es estable.

Supongamos que $\eta(r)$ es estable y sea Q un módulo inyectivo, entonces $Q = \eta(r)(Q) \oplus K = r(Q) \oplus K$. Por lo tanto r es estable.

(2) $\overline{r}$ es estable: Supongamos que r es estable y sea Q un módulo inyectivo, entonces $Q = r(Q) \oplus K$ y por (1) de la Proposición 4.1.1, $r(Q) \in \mathcal{T}_r = \mathcal{T}_{\overline{r}}$. Afirmamos que $\overline{r}(Q) = r(Q)$, en efecto, como $r(Q) \leq Q$, entonces $r(Q) = \overline{r}(r(Q)) \leq \overline{r}(Q) \leq r(Q)$. Por lo tanto $Q = \overline{r}(Q) \oplus K$.

$\widehat{r}$ es estable: Supongamos que r es estable y sea Q un módulo inyectivo, entonces $Q = r(Q) \oplus K$ y por (1) de la Proposición 4.1.1, $Q/r(Q) \in \mathcal{F}_r = \mathcal{F}_{\widehat{r}}$. Afirmamos que $\widehat{r}(Q) = r(Q)$, en efecto, como $Q/r(Q) \in \mathcal{F}_{\widehat{r}}$, por (4) de la Proposición 2.1.1, $\widehat{r}(Q) \leq r(Q) \leq \widehat{r}(Q)$. Por lo tanto $Q = \widehat{r}(Q) \oplus K$.

$\eta(r)$ es estable: Ver (1).

$\eta(r) = \eta(\overline{r}) = \eta(\widehat{r}) = \widehat{\eta}(r)$: Como $\eta(r)$ es estable y hereditario, por (4) de la Proposición 4.1.2, $\eta(r)$ es radical. Entonces como $\eta(r) \preceq \widehat{\eta}(r)$, por la Proposición 3.1.7, $\eta(r) = \widehat{\eta}(r)$. Además como $r \preceq \widehat{r}$, por la Observación 3.8, $\eta(r) \preceq \eta(\widehat{r}) \preceq \widehat{\eta}(r) = \eta(r)$. Por lo tanto $\eta(r) = \eta(\widehat{r}) = \widehat{\eta}(r)$. Por último notemos que como r es estable, entonces para todo $M \in R$-Mod se cumple que $r(E(M)) = \overline{r}(E(M))$, de donde $\eta(r)(M) = M \cap r(E(M)) = M \cap \overline{r}(E(M)) = \eta(\overline{r})(M)$. $\square$

El siguiente resultado nos da un importante criterio para determinar cuando un prerradical hereditario es estable:

Proposición 4.1.4. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un prerradical hereditario r:*

(a) Todo módulo $M \notin \mathcal{T}_r$ contiene un submódulo distinto de cero libre de r-torsión.

(b) $\mathcal{T}_r$ es cerrada bajo extensiones esenciales.

(c) Si $A \leq B \leq C$ son módulos y $B/A \in \mathcal{T}_r$, entonces existe $D \leq C$ tal que $D \cap B = A$ y $C/D \in \mathcal{T}_r$.

(d) Si $I \leq K$ son ideales izquierdos de R y $K/I = r(R/I)$, entonces existe un ideal izquierdo L de R tal que $L \cap K = I$ y $R/L \in \mathcal{T}_r$.

(e) Si $I \leq K \neq R$ son ideales izquierdos y $K/I = r(R/I)$, entonces existe un ideal izquierdo L de R tal que $L \neq I$ y $L \cap K = I$.

(f) r es estable.

Demostración. Sea r un prerradical hereditario.

(a)$\Rightarrow$(b) Sea $N \in \mathcal{T}_r$ un submódulo esencial de M. Veamos que $M \in \mathcal{T}_r$. Supongamos que $M \notin \mathcal{T}_r$, entonces existe $0 \neq K$ submódulo de M tal que $r(K) = 0$. Entonces $K \cap N \in \mathcal{T}_r \cap \mathcal{F}_r = 0$, es decir, $K \cap N = 0$. Y como N es esencial en M se sigue que $K = 0$ que es una contradicción. Por lo tanto $M \in \mathcal{T}_r$.

(b)$\Rightarrow$(c) Sea D un submódulo de C tal que D/A es máximo con respecto a que $D/A \cap B/A = 0$. Entonces $D \cap B = A$ y por el Segundo Teorema de Isomorfismos, $(B+D)/D \cong B/(D \cap B) = B/A \in \mathcal{T}_r$. Veamos que $(B+D)/D$ es esencial en C/D. Sea $G/D \leq C/D$ tal que $G/D \cap (B+D)/D = 0$, entonces $G \cap (B+D) = D$. Por lo tanto tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} A &= B \cap D \\ &= B \cap G \cap (B+D) \\ &= (B \cap G \cap B) + (B \cap G \cap D) \\ &= (B \cap G) + (B \cap D) \\ &= B \cap (G+D). \end{aligned}$$

Por lo tanto $B/A \cap (G+D)/A = 0$, y como D/A es máximo con la propiedad de que $D/A \cap B/A = 0$ tenemos que $D/A = (G+D)/A$. Entonces $D = G + D$ y en consecuencia $G = D$. Por lo tanto $G/D = D/D = 0$ de donde $(B+D)/D$ es esencial en C/D. Y como $(B+D)/D \in \mathcal{T}_r$, por (b) se sigue que $C/D \in \mathcal{T}_r$.

(c)⇒(d) Sean $I \leq K$ ideales izquierdos de R y $K/I = r(R/I)$. Como $K/I \leq R/I$ y r es hereditario tenemos que $r(K/I) = K/I \cap r(R/I) = K/I \cap K/I = K/I$, es decir, $K/I \in \mathcal{T}_r$. Entonces por hipótesis existe L ideal izquierdo de R tal que $L \cap K = I$ y $R/L \in \mathcal{T}_r$.

(d)⇒(e) Sean $I \leq K$ ideales izquierdos de R con $K \neq R$ y $K/I = r(R/I)$, entonces por hipótesis existe L ideal izquierdo de r tal que $L \cap K = I$ y $R/L \in \mathcal{T}_r$. Notemos que $I \neq L$ ya que si $I = L$, entonces $K/L = r(R/L) = R/L$ y en consecuencia $K = R$ que es una contradicción.

(e)⇒(f) Como r es hereditario, por la Proposición 3.1.1, r es idempotente. Entonces por (2) de la Proposición 4.1.2 es suficiente demostrar que $\mathcal{T}_r$ es estable. Supongamos lo contrario, sea $T \in \mathcal{T}_r$ tal que $E(T) \notin \mathcal{T}_r$. Entonces existe $x \in E(T)$ tal que $x \notin r(E(T))$ y, como r es hereditario y $Rx \leq E(T)$ tenemos que $r(Rx) = Rx \cap r(E(T))$. Además notemos que $Rx \cap r(E(T))$ es isomorfo a K/I con $I = (0 : x)$ y $K = (r(E(T)) : x) \neq R$. Entonces por (e), existe un ideal izquierdo L de R tal que $L \neq I$ y $L \cap K = I$. Sea $a \in L \setminus I$, entonces $a \in L$ y $a \notin I$ por lo que $ax \neq 0$.

Afirmamos que $r(E(T))$ es esencial en $E(T)$. En efecto, sea K un submódulo de $E(T)$ tal que $r(E(T)) \cap K = 0$. Como $T \leq E(T)$, $T = r(T) \leq r(E(T))$, entonces $T \cap K = 0$ y, como T es esencial en $E(T)$, $K = 0$. Por lo tanto $r(E(T))$ es esencial en $E(T)$.

Ahora, como $r(E(T))$ es esencial en $E(T)$ y $0 \neq ax \in E(T)$, existe $b \in R$ tal que $0 \neq bax \in r(E(T))$. Por lo tanto $ba \notin I$ y $ba \in L \cap K = I$ que es una contradicción. Así hemos demostrado que $E(T) \in \mathcal{T}_r$.

(f)⇒(a) Sea $M \in R$-Mod tal que $M \notin \mathcal{T}_r$. Afirmamos que $r(M)$ no es esencial en M. En efecto, supongamos que $r(M)$ es esencial en M. Como r es estable tenemos que $E(M) = r(E(M)) \oplus K$ y como $r(M) \leq r(E(M))$ se sigue que $r(M) \cap K \leq r(E(M)) \cap K = 0$, y en consecuencia $r(M) \cap K = 0$. Pero como $r(M)$ es esencial en M concluimos que $K = 0$. Por lo tanto $E(M) = r(E(M))$. Además como r es hereditario y $M \leq E(M)$, $r(M) = M \cap r(E(M)) = M \cap E(M) = M$, es decir, $r(M) = M$ que es una contradicción. Por lo tanto si $M \notin \mathcal{T}_r$, entonces $r(M)$ no es esencial en M por lo que existe $N \leq M$ tal que $0 = N \cap r(M) = r(N)$, es decir, $N \in \mathcal{F}_r$. □

Proposición 4.1.5. *Un prerradical r es estable si y sólo si la cápsula inyectiva de todo módulo cíclico se escinde.*

Demostración. Si r es estable es claro que la cápsula inyectiva de todo módulo cíclico se escinde.

Sin perdida de generalidad podemos suponer que r es hereditario. Sean $I \leq K \neq R$ ideales izquierdos tales que $K/I = r(R/I)$. Como R/I es cíclico, entonces $E(R/I) = r(E(R/I)) \oplus A$. Sea $L/I = A \cap R/I$ y sea $x \in L \cap K$, entonces $x + I \in L/I \cap K/I = A \cap R/I \cap K/I = A \cap K/I = A \cap r(R/I) \leq A \cap r(E(R/I)) = 0$. Entonces $x \in I$ y en consecuencia $I = L \cap K$. Supongamos que $I = L$, entonces $0 = L/I = A \cap R/I$ y como R/I es esencial en $E(R/I)$ concluimos que $A = 0$. Entonces $E(R/I) = r(E(R/I))$, es decir, $E(R/I) \in \mathcal{T}_r$. Como r es hereditario y $R/I \leq E(R/I) \in \mathcal{T}_r$, por (c) de la Proposición 3.1.1, $R/I \in \mathcal{T}_r$, es decir, $K/I = r(R/I) = R/I$ de donde $K = R$ que es una contradicción. Por lo tanto $I \neq L$ y por la Proposición 4.1.4 concluimos que r es estable. □

Proposición 4.1.6. *Sea r un prerradical estable. Si $\overline{r}$ es hereditario, entonces $\widehat{r}$ es hereditario.*

Demostración. Como $\overline{r}$ es hereditario, por (2) de la Proposición 3.1.6, $\eta(\overline{r}) = \overline{r}$. Y como r es estable, por (2) de la proposición 4.1.3, $\eta(\widehat{r}) = \eta(\overline{r})$. Por lo tanto $\eta(\widehat{r}) = \eta(\overline{r}) = \overline{r} \preceq \widehat{r} \preceq \eta(\widehat{r})$ y en consecuencia $\widehat{r}$ es hereditario. □

Corolario 4.4. *Sea r un prerradical estable. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $\mathcal{T}_r$ es hereditaria.

(b) $\overline{r}$ es hereditario.

(c) $\overline{r}$ es un radical hereditario.

Demostración. (a)⇒(b) Como $\mathcal{T}_r$ es hereditaria y $\mathcal{T}_{\overline{r}} = \mathcal{T}_r$, entonces $\mathcal{T}_{\overline{r}}$ es hereditaria. Y como $\overline{r}$ es idempotente, por la Proposición 3.1.1 concluimos que $\overline{r}$ es hereditario.

(b)⇒(c) Supongamos que $\overline{r}$ es hereditario. Como r es estable, por (4) de la Proposición 4.1.2, $\overline{r}$ es un radical hereditario.

(c)⇒(a) Como $\overline{r}$ es un radical hereditario, por la Proposición 3.1.1, $\mathcal{T}_r = \mathcal{T}_{\overline{r}}$ es hereditaria. □

Definición 4.5. *Decimos que un prerradical r se escinde si todo módulo se escinde en r.*

Proposición 4.1.7. *Todo prerradical que se escinde es radical idempotente.*

Demostración. Se sigue de (1) de la Proposición 4.1.1 □

4.2. Prerradicales coestables

Definición 4.6. *Un prerradical r es llamado **coestable** si todo módulo proyectivo se escinde en r.*

Proposición 4.2.1. *Sea r un prerradical. Entonces:*

(1) Si r es coestable, entonces $\mathcal{F}_r$ es coestable.

(2) Si r es radical y $\mathcal{F}_r$ coestable, entonces r es coestable.

(3) Si r es coestable y cohereditario, entonces r es idempotente.

Demostración. (1) Sea $F \in \mathcal{F}_r$ y sea $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} F \longrightarrow 0$ ua presentación proyectiva para F. Como r es coestable y P proyectivo, $P = r(P) \oplus K$ con $K \in \mathcal{F}_r$ proyectivo. Y como g es epimorfismo se sigue que $g(r(P)) \leq r(F) = 0$ de donde $r(P) \leq \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$. Entonces $\mathrm{Im}(f)/r(P) \leq P/r(P) \cong K$ y por el Tercer y Primer Teorema de Isomorfismo tenemos que $(P/r(P))/(\mathrm{Im}(f)/r(P)) \cong P/\mathrm{Im}(f) = P/\mathrm{Ker}(g) \cong F$. Por lo tanto tenemos la siguiente sucesión exacta corta: $0 \longrightarrow \mathrm{Im}(f)/r(P) \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow 0$ con $K \in \mathcal{F}_r$ proyectivo y en consecuencia $\mathcal{F}_r$ es coestable.

(2) Sea P un módulo proyectivo, como r es radical tenemos que $P/r(P) \in \mathcal{F}_r$, y como $\mathcal{F}_r$ es coestable existe una sucesión exacta corta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P/r(P) \longrightarrow 0$ con $B \in \mathcal{F}_r$. Como P es proyectivo tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "\pi"] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & P/r(P) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es decir, $\pi = gh$. Para h tenemos que $h(r(P)) \leq r(B) = 0$, es decir, $r(P) \leq \mathrm{Ker}(h)$. Definamos la siguiente función:

$$\begin{aligned} g' : P/r(P) &\to B \\ \overline{x} &\mapsto h(x) \end{aligned}$$

como $r(P) \leq \mathrm{Ker}(h)$ se sigue que g' está bien definida y como h es morfismo g' lo es. Además, $(g'\pi)(x) = g'(\pi(x)) = g'(\overline{x}) = h(x)$, es decir, $h = g'\pi$. Luego, $\pi = gh = g(g'\pi) = (gg')\pi$ y como π es epimorfismo se sigue que $1_{P/r(P)} = gg'$. Entonces, por la Proposición 1.1.7 la sucesión $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P/r(P) \longrightarrow 0$ se escinde, y por la Proposición 1.1.16, $P/r(P)$ es proyectivo. Entonces por la Proposición 1.1.16, la sucesión exacta corta

$0 \longrightarrow r(P) \xrightarrow{\iota} P \xrightarrow{\pi} P/r(P) \longrightarrow 0$ se escinde. Luego, por la Proposición 1.1.7 y la Proposición 1.1.6, $r(P)$ es sumando directo de P.

(3) Afirmamos que $\mathcal{F}_r$ es cerrada bajo extensiones. En efecto, sea

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta con $A, C \in \mathcal{F}_r$. Como r es coestable, por (1) $\mathcal{F}_r$ es coestable, entonces existen $\alpha : P_1 \longrightarrow A$ y $\lambda : P_2 \longrightarrow C$ epimorfismos con $P_1, P_2 \in \mathcal{F}_r$. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "\alpha"] & P_1 \oplus P_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\mu"] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como α y λ son epimorfismos, por (2) del Lema 1.19, μ es epimorfismo. Entonces, como r es cohereditario, $\mathcal{F}_r$ es cohereditario, y como $P_1 \oplus P_2 \in \mathcal{F}_r$ se sigue que $B \in \mathcal{F}_r$. Por lo tanto $\mathcal{F}_r$ es cerrada bajo extensiones.

Ahora veamos que r es idempotente. Sea $M \in R$-Mod y consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow r(M)/r(r(M)) \xrightarrow{\iota} M/r(r(M)) \xrightarrow{\pi} M/r(M) \longrightarrow 0$$

Como r es radical, $r(M)/r(r(M)), M/r(M) \in \mathcal{F}_r$. Luego, por la afirmación anterior se sigue que $M/r(r(M)) \in \mathcal{F}_r$. Entonces por (4) de la Proposición 2.1.1, $r(M) \leq r(r(M))$. Por lo tanto r es idempotente. $\square$

Lema 4.7. *Sea $f : M \longrightarrow N$ un isomorfismo de módulos. Si N se escinde en r, entonces M se escinde en r.*

Demostración. Como N se escinde en r y f es isomorfismo, por el Lema 2.3, $N = r(N) \oplus K = f(r(M)) \oplus K$. Luego, $M = f^{-1}(N) = r(M) \oplus f^{-1}(K)$. $\square$

Proposición 4.2.2. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un prerradical r:*

(1) R se escinde en r.

(2) Todo módulo libre se escinde en r.

(3) r es coestable.

Demostración. (1)$\Rightarrow$(2) Sea $F \in R$-Mod libre, entonces existe un conjunto I tal que $F \cong R^{(I)}$. Como R se escinde en r, por (2) de la Proposición 4.1.1, $R^{(I)}$ se escinde en r. Luego, por el Lema 4.7, F se escinde en r.

(2)$\Rightarrow$(3) Sea $P \in R$-Mod proyectivo. Entonces por la Proposición 1.1.16, $P \cong L$ con L sumando directo de un módulo libre F. Como todo módulo libre se escinde en r, por el Lema 4.2, L se escinde en r. Luego, por el Lema 4.7, P se escinde en r. Por lo tanto r es coestable.

(3)$\Rightarrow$(1) Como R es libre y todo libre es proyectivo, por hipótesis R se escinde en r. $\square$

Teorema 4.8. *Sea r un prerradical. Entonces:*

(1) r es coestable si y sólo si $\rho(r)$ es coestable.

(2) Si r es coestable, entonces $\overline{r}, \widehat{r}, \rho(r)$ son coestables y $\rho(r) = \rho(\overline{r}) = \overline{\rho}(r) = \xi(r) = \rho(\widehat{r})$.

Demostración. (1) Se sigue de (3) de la Proposición 2.1.3.

(2) $\overline{r}$ y $\widehat{r}$ son coestables: Como r es coestable, por la Proposición 4.2.2, $R = r(R) \oplus K$ y por (1) de la Proposición 4.1.1, $r(R) \in \mathcal{T}_r$ y $R/r(R) \in \mathcal{F}_r$. Luego, $\overline{r}(R) = \widehat{r}(R) = r(R)$ y en consecuencia $\overline{r}$ y $\widehat{r}$ son coestables.

$\rho(r) = \rho(\overline{r}) = \overline{\rho}(r) = \xi(r) = \rho(\widehat{r})$: Como $\rho(r)$ es coestable y cohereditario, por (3) de la Proposición 4.2.1, $\rho(r)$ es idempotente. Entonces como $\xi(r) \preceq \rho(r) \preceq r$, por (2) de la Proposicíon 3.2.8, $\xi(r) = \rho(r)$. Además como $\overline{r} \preceq r$, entonces $\rho(\overline{r}) \preceq \rho(r) = \xi(r)$. Luego, por (1) de la Proposición 3.2.8, $\xi(r) = \rho(\overline{r})$. Por último, como $r(R) = \widehat{r}(R)$, entonces para todo $M \in R$-Mod, $\rho(r)(M) = r(R)M = \widehat{r}(R)M = \rho(\widehat{r})(M)$. □

Teorema 4.9. *Sea r un radical cohereditario y consideremos los siguientes enunciados:*

(a) r es coestable.

(b) Todo módulo izquierdo $M \notin \mathcal{F}_r$ tiene un cociente no nulo que pertenece a $\mathcal{T}_r$.

(c) $\mathcal{F}_r$ es cerrada bajo cubiertas.

Entonces (a)⇒(b)⇒(c). Además, si R es perfecto izquierdo, entonces (c)⇒(a).

Demostración. (a)⇒(b) Como r es coestable, por la Proposición 4.2.1, $\mathcal{F}_r$ es coestable. Sea $M \in R$-Mod, como r es radical se sigue que $M/r(M) \in \mathcal{F}_r$. Entonces existe un epimorfismo $f : P \longrightarrow M/r(M)$ con $P \in \mathcal{F}_r$ proyectivo. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, "g"] & M/r(M) \end{tikzcd}$$

es decir, $f = gh$.

Afirmación: si $r(M) \ll M$, entonces h es epimorfismo. En efecto, sea $x \in M$, entonces $g(x) \in M/r(M)$. Como f es epimorfismo existe $y \in P$ tal que $g(x) = f(y)$. Luego, $g(x) = g(h(y))$ y en consecuencia $x - h(y) \in \mathrm{Ker}(g) = r(M)$. Entonces existe $a \in r(M)$ tal que $x - h(y) = a$. Por lo tanto $x = a - h(y) \in r(M) + \mathrm{Im}(h)$. Luego, $r(M) + \mathrm{Im}(h) = M$. Y como $r(M) \ll M$ concluimos que $\mathrm{Im}(h) = M$.

Como r es cohereditario, por la Proposición 3.2.1, $\mathcal{F}_r$ es cohereditaria. Luego, como $P \in \mathcal{F}_r$ y h es epimorfismo, $M \in \mathcal{F}_r$ que es una contradicción. Por lo tanto $r(M)$ no es superfluo en M, entonces existe K submódulo propio de M tal que $K + r(M) = M$. Entonces $0 \neq M/K = (K + r(M))/K \cong r(M)/(K \cap r(M))$. Como r es un radical cohereditario coestable, por la Proposición 4.2.1, r es idempotente. Luego, $r(M) \in \mathcal{T}_r$, y como $\mathcal{T}_r$ es cohereditaria se sigue que $r(M)/(K \cap r(M)) \in \mathcal{T}_r$. Por lo tanto $0 \neq M/K \in \mathcal{T}_r$.

(b)⇒(c) Sean $M, N \in R$-Mod tales que $N \ll M$ y $M/N \in \mathcal{F}_r$. Veamos que $M \in \mathcal{F}_r$. Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que $M \notin \mathcal{F}_r$, entonces por hipótesis existe $0 \neq M/K \in \mathcal{T}_r$. Como $\mathcal{T}_r$ es cohereditaria se sigue que $M/(N + K) \in \mathcal{T}_r$. Y como r es cohereditario, por la Proposición 3.2.1, $\mathcal{F}_r$ es cohereditaria, entonces $M/(N + K) \in \mathcal{F}_r$. Luego, $M/(N + K) \in \mathcal{T}_r \cap \mathcal{F}_r = 0$. Entonces $N + K = M$ y como $N \ll M$ se sigue que $K = M$ que es una contradicción. Por lo tanto $M \in \mathcal{T}_r$.

Si R es perfecto izquierdo, es claro que (c)⇒(a). □

Teorema 4.10. *Sea r un prerradical coestable. Si $\widehat{r}$ es cohereditario, entonces $\overline{r}$ es cohereditario.*

Demostración. Como $\rho(\widehat{r}) \preceq \widehat{r}$ y por hipótesis $\widehat{r}$ es cohereditario, por (2) de la Proposición 3.2.7, $\rho(\widehat{r}) = \widehat{r}$. Y como r es coestable, por el Teorema 4.8, $\rho(\overline{r}) \preceq \overline{r} \preceq \widehat{r} = \rho(\widehat{r}) = \rho(\overline{r})$. Por lo tanto $\overline{r}$ es cohereditario. □

Corolario 4.11. *Sea r un prerradical coestable. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\mathcal{F}_r$ es cohereditaria.

(b) $\widehat{r}$ es cohereditario.

(c) $\widehat{r}$ es un radical idempotente cohereditario.

Demostración. (a)⇒(b) Como $\mathcal{F}_{\widehat{r}} = \mathcal{F}_r$ es cohereditaria y $\widehat{r}$ radical, por la Proposición 3.2.1, $\widehat{r}$ es cohereditario.

(b)⇒(c) Supongamos que $\widehat{r}$ es cohereditario. Como r es coestable, por (2) del Teorema 4.8, $\widehat{r}$ es coestable. Luego, por (3) de la Proposición 4.2.1, $\widehat{r}$ es idempotente.

(c)⇒(a) Como $\widehat{r}$ es un radical idempotente cohereditario, entonces por la Proposición 3.2.1, $\mathcal{F}_r = \mathcal{F}_{\widehat{r}}$ es hereditaria. □

Capítulo 5

Operaciones entre prerradicales

5.1. Intersección y producto de prerradicales

Proposición 5.1.1. *Sea $\{r_i\}_{i\in I}$ una familia de prerradicales y sea $r(M) = \bigcap_{i\in I} r_i(M)$ para todo $M \in R$-Mod. Entonces:*

(1) r es prerradical.

(2) $\mathcal{T}_r = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_{r_i}$ y $\bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_{r_i} \subseteq \mathcal{F}_r$.

(3) Si cada r_i es radical, entonces r es radical.

(4) Si cada r_i es hereditario, entonces r es hereditario.

(5) $\eta(r) = \bigcap_{i\in I} \eta(r_i)$.

(6) Si cada r_i es estable, entonces r es estable.

(7) Si R es perfecto izquierdo y cada r_i se coescinde, entonces r se coescinde.

Demostración. (1) Sea $M \in R$-Mod, como cada r_i es prerradical se sigue que $r_i(M) \leq M$ para cada $i \in I$. Luego, $r(M) = \bigcap_{i\in I} r_i(M) \leq M$.

Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de módulos. Como cada r_i es prerradical se sigue que $f(r_i(M)) \leq r_i(N)$ para cada $i \in I$. Luego, $f(r(M)) = f\left(\bigcap_{i\in I} r_i(M)\right) \leq \bigcap_{i\in I} f(r_i(M)) \leq \bigcap_{i\in I} r_i(N) = r(N)$.

(2) $\mathcal{T}_r = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_{r_i}$: Sea $M \in \mathcal{T}_r$, entonces $M = r(M) = \bigcap_{i\in I} r_i(M)$. Luego, $r_i(M) = M$ para cada $i \in I$, es decir, $M \in \mathcal{T}_{r_i}$ para cada $i \in I$. Por lo tanto $M \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_{r_i}$. Ahora, sea $M \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_{r_i}$, entonces $M \in \mathcal{T}_{r_i}$ para cada $i \in I$, es decir, $r_i(M) = M$ para cada $i \in I$. Luego, $r(M) = \bigcap_{i\in I} r_i(M) = M$, es decir, $M \in \mathcal{T}_r$.

$\bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_{r_i} \subseteq \mathcal{F}_r$: Sea $M \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_{r_i}$, entonces existe $i \in I$ tal que $M \in \mathcal{F}_{r_i}$, es decir, existe $i \in I$ tal que $r_i(M) = 0$. Luego, $r(M) = 0$. Por lo tanto $M \in \mathcal{F}_r$.

(3) Sea $M \in R$-Mod y definamos la siguiente función: $f : M/r(M) \longrightarrow \prod_{i \in I} M/r_i(M)$ tal que $m + r(M) \longmapsto (m + r_i(M))_{i \in I}$. Es claro que f está bien definida y es monomorfismo. Como r es prerradical se sigue que $f(r(M/r(M))) \leq r\left(\prod_{i\in I} M/r_i(M)\right)$. Pero por (2) de la Proposición 2.1.2 y (2), $r\left(\prod_{i\in I} M/r_i(M)\right) \leq \prod_{i\in I} r(M/r_i(M)) = 0$. Luego, $f(r(M/r(M))) = 0$. Y como f es momomorfismo se sigue que $r(M/r(M)) = 0$. Por lo tanto r es radical.

(4) Supongamos que cada r_i es hereditario y sean $N, M \in R$-Mod tales que $N \leq M$, entonces $r_i(N) = N \cap r_i(M)$ para cada $i \in I$. Luego, $r(N) = \bigcap_{i\in I} r_i(N) = \bigcap_{i\in I}(N \cap r_i(M)) = N \cap \left(\bigcap_{i\in I} r_i(M)\right) = N \cap r(M)$, es decir, $r(N) = N \cap r(M)$. Por lo tanto r es hereditario.

(5) Sea $M \in R$-Mod, entonces $\eta(r)(M) = M \cap r(E(M)) = M \cap \left(\bigcap_{i\in I} r_i(E(M))\right) = \bigcap_{i\in I}(M \cap r_i(E(M))) = \bigcap_{i\in I} \eta(r_i)(M)$, es decir, $\eta(r)(M) = \bigcap_{i\in I} \eta(r_i)(M)$. Luego, $\eta(r) = \bigcap_{i\in I} \eta(r_i)$.

(6) Supongamos que cada r_i es estable, entonces por (1) de la Proposición 4.1.3, $\eta(r_i)$ es estable para cada $i \in I$. Luego, por (b) de la Proposición 4.1.4, $\mathcal{T}_{\eta(r_i)}$ es cerrada bajo extensiones esenciales para cada $i \in I$. Pero por (5) y (2), $\mathcal{T}_{\eta(r)} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_{\eta(r_i)}$ y en consecuencia $\mathcal{T}_{\eta(r)}$ es cerrada bajo extensiones esenciales. Entonces, por la Proposición 4.1.4, $\eta(r)$ es estable. Por lo tanto, por (1) de la Proposición 4.1.3, r es estable.

(7) r es hereditario: Se sigue de (4).

r es cohereditario: Como cada r_i se coescinde y R es perfecto izquierdo, por (2) de la Proposición 3.2.2, $\mathcal{T}_{r_i}$ es coestable para cada $i \in I$. Afirmamos que $\mathcal{T}_r$ es coestable. En efecto, sea $0 \longrightarrow A \longrightarrow P \longrightarrow T \longrightarrow 0$ una presentación proyectiva de T con $T \in \mathcal{T}_r$. Como $\mathcal{T}_r = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_{r_i}$ (por (2)) se sigue que $T \in \mathcal{T}_{r_i}$ para cada $i \in I$. Luego, $P \in \mathcal{T}_{r_i}$ para cada $i \in I$. Por lo tanto $P \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_{r_i} = \mathcal{T}_r$ y en consecuencia $\mathcal{T}_r$ es coestable. Entonces por la Proposición 3.2.3 concluimos que r es cohereditario. $\square$

Corolario 5.1. *Sea r un prerradical. Entonces:*

(1) $\widehat{r} = \cap s$, donde s corre a través de todos los radicales que contienen a r.

(2) $\eta(r) = \cap t$, donde t corre a través de todos los prerradicales hereditarios que contienen a r.

Demostración. (1) Sea sigue de la Proposición 5.1.1 y la Proposición 2.1.6.
(2) Se sigue de la Proposición 5.1.1 y la Proposición 3.1.6. $\square$

Definición 5.2. *Dados dos prerradicales r, s definimos el* ***producto*** *de r con s de la siguiente manera:*

$$(r \cdot s)(M) = r(s(M)) \text{ para todo } M \in R\text{-Mod.}$$

Proposición 5.1.2. *Sean r, s dos prerradicales, entonces:*

(1) $r \cdot s$ es un prerradical.

(2) $\mathcal{T}_{r\cdot s} = \mathcal{T}_r \cap \mathcal{T}_s$ y $\mathcal{F}_r \cup \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_{r\cdot s}$.

(3) $\overline{r \cap s} \preceq r \cdot s \preceq r \cap s$.

(4) Si $r \cap s$ *es idempotente, entonces* $r \cdot s = s \cdot r = r \cap s$.

Demostración. (1) Sea $M \in R$-Mod, entonces $s(M) \leq M$. Luego, $(r \cdot s)(M) = r(s(M)) \leq r(M) \leq M$, es decir, $(r \cdot s)(M) \leq M$.

Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de módulos. Como r y s son prerradicales es claro que $f(r(s(M))) \leq r(f(s(M)))$. Además, como s es prerradical, entonces $f(s(M)) \leq s(N)$. Luego, como r es prerradical, $r(f(s(M))) \leq r(s(N))$. Por lo tanto $f(r(s(M))) \leq r(s(N))$, es decir, $f((r \cdot s)(M)) \leq (r \cdot s)(N)$.

(2) $\mathcal{T}_{r \cdot s} = \mathcal{T}_r \cap \mathcal{T}_s$: Sea $M \in \mathcal{T}_{r \cdot s}$, entonces $r(s(M)) = (r \cdot s)(M) = M$. Como $s(M) \leq M$ se sigue que $r(s(M)) \leq r(M)$. Luego, $r(M) = M$, es decir, $M \in \mathcal{T}_r$. Además, como $M = r(s(M)) \leq s(M) \leq M$, entonces $s(M) = M$. Luego, $M \in \mathcal{T}_s$. Por lo tanto $M \in \mathcal{T}_r \cap \mathcal{T}_s$. Ahora, sea $M \in \mathcal{T}_r \cap \mathcal{T}_s$, entonces $M \in \mathcal{T}_r$ y $M \in \mathcal{T}_s$, es decir, $r(M) = M$ y $s(M) = M$. Luego, $(r \cdot s)(M) = r(s(M)) = r(M) = M$. Por lo tanto $M \in \mathcal{T}_{r \cdot s}$.

$\mathcal{F}_r \cup \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_{r \cdot s}$: Sea $F \in \mathcal{F}_r \cup \mathcal{F}_s$, entonces $F \in \mathcal{F}_r$ o $F \in \mathcal{F}_s$. Si $F \in \mathcal{F}_r$, entonces $r(F) = 0$. Luego, $(r \cdot s)(F) = r(s(F)) \leq r(F) = 0$, es decir, $(r \cdot s)(F) = 0$. Si $F \in \mathcal{F}_s$, entonces $s(F) = 0$. Luego, $(r \cdot s)(F) = r(s(F)) = r(0) = 0$, es decir, $(r \cdot s)(F) = 0$. Por lo tanto $F \in \mathcal{F}_{r \cdot s}$.

(3) Es claro que $r \cdot s \preceq r \cap s$. Veamos que $\overline{r \cap s} \preceq r \cdot s$. Por (2) y (2) de la Proposisión 5.1.1, $\mathcal{T}_{r \cdot s} = \mathcal{T}_r \cap \mathcal{T}_s = \mathcal{T}_{r \cap s} = \mathcal{T}_{\overline{r \cap s}}$. Luego, $\overline{r \cap s} \preceq r \cdot s$.

(4) Supongamos que $r \cap s$ es idempotente, entonces $r \cap s = \overline{r \cap s}$. Luego, por (3), $r \cdot s = s \cdot r = r \cap s$. □

Proposición 5.1.3. *Sean* $r, s \in R$*-pr. Entonces:*

(1) Si r *es hereditario, entonces* $r \cdot s = r \cap s$.

(2) Si r *es idempotente y* s *es hereditario, entonces* $r \cdot s$ *es idempotente y* $r \cdot s = \overline{r \cap s}$.

(3) Si r *y* s *son hereditarios, entonces* $r \cdot s = s \cdot r = r \cap s$ *es hereditario.*

(4) Si s *es hereditario, entonces* $\overline{rs} = \overline{r} \cdot \overline{s} = \overline{r} \cdot s$.

(5) Si r *y* s *son estables (coestables, se escinden), entonces* $r \cdot s$ *también lo es.*

Demostración. (1) Sea $M \in R$-Mod. Como $s(M) \leq M$ y r es hereditario, entonces $r(s(M)) = s(M) \cap r(M)$. Luego, $r \cdot s = r \cap s$.

(2) $r \cdot s$ es idempotente: Sea $M \in R$-Mod. Como $r(s(M)) \leq M$ y s es hereditario, se sigue que $s(r(s(M))) = r(s(M)) \cap s(M) = r(s(M))$, es decir, $(r \cdot s)(M) = r(s(M)) \in \mathcal{T}_s$. Luego,

$$\begin{aligned}
(r \cdot s)((r \cdot s)(M)) &= (r \cdot s)(r(s(M))) \\
&= r(s(r(s(M)))) \\
&= r(r(s(M))) \\
&= r(s(M)) \text{ (ya que } r \text{ es idempotente)} \\
&= (r \cdot s)(M).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $r \cdot s$ es idempotente.

$r \cdot s = \overline{r \cap s}$: Como $r \cdot s$ es idempotente, por (3) de la Proposición 5.1.2, $r \cdot s = \overline{r \cap s}$.

(3) Supongamos que r y s son hereditarios, entonces por (4) de la Proposición 5.1.1, $r \cap s$ es hereditario y en consecuencia idempotente. Luego, por (4) de la Proposición 5.1.2, $r \cdot s = s \cdot r = r \cap s$.

Veamos que $r \cdot s$ es hereditario. Sean $M \in R$-Mod y $N \leq M$, entonces

$$\begin{aligned} (r \cdot s)(N) &= r(s(N)) \\ &= r(N \cap s(M)) \\ &= N \cap s(M) \cap r(M) \\ &= N \cap (s \cap r)(M) \\ &= N \cap (s \cdot r)(M) \\ &= N \cap (r \cdot s)(M). \end{aligned}$$

Por lo tanto $r \cdot s$ es hereditario.

(4) Supongamos que s es hereditario, entonces s es idempotente y en consecuencia $s = \overline{s}$. Luego, $\overline{r} \cdot \overline{s} = \overline{r} \cdot s$. Por otro lado, como $\overline{r}$ es idempotente, por (2) $\overline{r} \cdot \overline{s}$ es idempotente. Además, por (2) de la Proposición 5.1.2, $\mathcal{T}_{\overline{r} \cdot \overline{s}} = \mathcal{T}_{\overline{r}} \cap \mathcal{T}_{\overline{s}} = \mathcal{T}_r \cap \mathcal{T}_s = \mathcal{T}_{r \cdot s} = \mathcal{T}_{\overline{r \cdot s}}$. Y como $\overline{r} \cdot \overline{s}$ y $\overline{r \cdot s}$ son idempotentes, por (3) del Corolario 2.17 concluimos que $\overline{r} \cdot \overline{s} = \overline{r \cdot s}$.

(5) Supongamos que r y s son estables y sea $Q \in R$-Mod inyectivo, entonces $Q = r(Q) \oplus A$ y $Q = s(Q) \oplus B$. Luego, $Q = r(s(Q) \oplus B) \oplus A = r(s(Q)) \oplus r(B) \oplus A$, es decir, $Q = (r \cdot s)(Q) \oplus C$ con $C = r(B) \oplus A$. Por lo tanto $r \cdot s$ es estable.

Los otros dos casos son análogos al primero. □

Proposición 5.1.4. *Sean r, s dos prerradicales. Entonces:*

(1) Si r y s son radicales, entonces $r \cdot s$ es radical.

(2) Si s es radical, entonces $\widehat{r \cdot s} = \widehat{r} \cdot \widehat{s} = \widehat{r} \cdot s$.

(3) Si r y s son cohereditarios, entonces $r \cdot s$ es cohereditario.

(4) Si r se coescinde y s es cohereditario, entonces $r \cdot s = \rho(r \cap s)$.

(5) Si r y s son cohereditarios y s es coestable, entonces $r \cdot s = \rho(r \cap s)$.

(6) Si r y s son cohereditarios y coestables, $r \cdot s = s \cdot r$.

(7) Si r y s se coescinden, entonces $r \cdot s = s \cdot r$ se coescinde.

(8) Si R es conmutativo y tanto r como s son cohereditarios, entonces $r \cdot s = s \cdot r$.

Demostración. (1) Supongamos que r y s son radicales. Sea $M \in R$-Mod, entonces por el Lema 2.11 tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (r \cdot s)(M/(r \cdot s)(M)) &= (r \cdot s)(M/r(s(M))) \\ &= r(s(M/r(s(M))) \\ &= r(s(M)/r(s(M))) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $r \cdot s$ es radical.

(2) Supongamos que s es radical, entonces $s = \widehat{s}$. Luego, $\widehat{r} \cdot \widehat{s} = \widehat{r} \cdot s$. Además, por (1) tenemos que $\widehat{r} \cdot s$ es radical, y como $r \cdot s \preceq \widehat{r} \cdot s$, por (4) de la Proposición 2.1.6, $\widehat{r \cdot s} \preceq \widehat{r} \cdot s$. Sean $M \in R$-Mod y $N = (\widehat{r \cdot s})(M)$, como $\widehat{r \cdot s}$ es radical, $M/N \in \mathcal{F}_{\widehat{r \cdot s}} = \mathcal{F}_{r \cdot s}$. Luego, $r(s(M/N)) = (\widehat{r \cdot s})(M/N) = 0$ de donde $s(M/N) \in \mathcal{F}_r = \mathcal{F}_{\widehat{r}}$. Entonces $(\widehat{r} \cdot s)(M/N) = \widehat{r}(s(M/N)) = 0$ y por (4) de la Proposición 2.1.1 concluimos que $(\widehat{r} \cdot s)(M) \leq N = (\widehat{r \cdot s})(M)$. Por lo tanto $\widehat{r} \cdot s \preceq \widehat{r \cdot s}$.

(3) Supongamos que r y s son cohereditarios, entonces por (1) de la Proposición 3.2.4, $(r \cdot s)(M) = r(s(M)) = r(s(R)M) = r(R)s(R)M$. Luego, por la Proposición 3.2.5, $r \cdot s$ es cohereditario.

(4) Por (3) y (1) de la Proposición 3.2.4 es suficiente demostrar que $(r \cdot s)(R) = (r \cap s)(R)$, es decir, $r(R)s(R) = r(R) \cap s(R)$. Como siempre se da que $r(R)s(R) \leq r(R) \cap s(R)$, sólo demostraremos

que $r(R) \cap s(R) \leq r(R)s(R)$. Sea $x \in r(R) \cap s(R)$, entonces $x \in r(R)$ y $x \in s(R)$. Como r se coescinde, por (6) de la Proposición 3.2.4, $x \in r(R)x$. Luego, $x \in r(R)s(R)$. Por lo tanto $r(R)s(R) = r(R) \cap s(R)$.

(5) Supongamos que s es coestable. Como R es libre y todo libre es proyectivo tenemos que $R = s(R) \oplus K$. Luego, $r(R) \cap s(R) = r(s(R) \oplus K) \cap s(R) = (r(s(R)) \oplus r(K)) \cap s(R) = (r(K) \cap s(R)) \oplus r(s(R))$. Como $K \cap s(R) = 0$ y $r(K) \leq K$ se sigue que $r(K) \cap s(R) = 0$. Por lo tanto $r(R) \cap s(R) = r(s(R))$.

(6) Se sigue de (5).

(7) Por (4) se sigue que $r \cdot s = s \cdot r$. Y por (3) y (3) de la Proposición 5.1.3, $r \cdot s$ se coescinde.

(8) Supongamos que R es conmutativo y que r y s son cohereditarios. Entonces por (1) de la Proposición 3.2.4, $(r \cdot s)(R) = r(s(R)) = r(R)s(R) = s(R)r(R) = s(r(R)) = (s \cdot r)(R)$. Sea $M \in R$-Mod, entonces por (3) y (1) de la Proposición 3.2.4, $(r \cdot s)(M) = (r \cdot s)(R)M = (s \cdot r)(R)M = (s \cdot r)(M)$. Por lo tanto $r \cdot s = s \cdot r$. □

Proposición 5.1.5. *Sean r, s dos prerradicales. Entonces:*

(1) Si r es cohereditario, entonces $\rho(r \cdot s) = \rho(r) \cdot \rho(s) = r \cdot \rho(s)$.

(2) Si $s(r)$ es proyectivo, entonces $\rho(r \cdot s) = \rho(r) \cdot \rho(s)$.

Demostración. (1) Supongamos que r es cohereditario, entonces para todo $M \in R$-Mod se cumple lo siguiente: $\rho(r \cdot s)(M) = (r \cdot s)(R)M = r(s(R))M = r(R)s(R)M$, $(\rho(r) \cdot \rho(s))(M) = \rho(r)(\rho(s)(M)) = \rho(r)(s(R)M) = r(R)s(R)M$ y $(r \cdot \rho(s))(M) = r(\rho(s)(M)) = r(s(R)M) = r(R)s(R)M$. Por lo tanto $\rho(r \cdot s) = \rho(r) \cdot \rho(s) = r \cdot \rho(s)$.

(2) Supongamos que $s(r)$ es proyectivo, entonces por (3) de la Proposición 2.1.3, $r(s(R)) = r(R)s(R)$. Sea $M \in R$-Mod, entonces

$$\begin{aligned} \rho(r \cdot s)(M) &= (r \cdot s)(R)M \\ &= r(s(R))M \\ &= r(R)s(R)M \\ &= r(R)(\rho(s)(M)) \\ &= \rho(\rho(s)(M)) \\ &= (\rho(r) \cdot \rho(s))(M). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\rho(r \cdot s) = \rho(r) \cdot \rho(s)$. □

Demostración. (1) Supongamos que r es cohereditario, entonces para todo $M \in R$-Mod se cumple lo siguiente: $\rho(r \cdot s)(M) = (r \cdot s)(R)M = r(s(R))M = r(R)s(R)M$, $(\rho(r) \cdot \rho(s))(M) = \rho(r)(\rho(s)(M)) = \rho(r)(s(R)M) = r(R)s(R)M$ y $(r \cdot \rho(s))(M) = r(\rho(s)(M)) = r(s(R)M) = r(R)s(R)M$. Por lo tanto $\rho(r \cdot s) = \rho(r) \cdot \rho(s) = r \cdot \rho(s)$.

(2) Supongamos que $s(r)$ es proyectivo, entonces por (3) de la Proposición 2.1.3, $r(s(R)) = r(R)s(R)$. Sea $M \in R$-Mod, entonces

$$\begin{aligned} \rho(r \cdot s)(M) &= (r \cdot s)(R)M \\ &= r(s(R))M \\ &= r(R)s(R)M \\ &= r(R)(\rho(s)(M)) \\ &= \rho(\rho(s)(M)) \\ &= (\rho(r) \cdot \rho(s))(M). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\rho(r \cdot s) = \rho(r) \cdot \rho(s)$. □

Definición 5.3. *Sea r un prerradical. Para todo número ordinal $\alpha \geq 1$ definimos el prerradical r^α como sigue: $r^1 = r$; $r^{\alpha+1} = r \cdot r^\alpha$; $r^\alpha = \bigcap\limits_{1 \leq \beta < \alpha} r^\beta$, si α es límite.*

Observación 5.4. *Sea r un prerradical, entonces existe un menor número ordinal β tal que $r^\beta = r^\kappa$ para todo $\kappa > \beta$.*

Demostración. Es claro ya que de no ser así tendríamos tantos intersectandos como números ordinales. $\square$

Observación 5.5. *Si r es un prerradical, entonces $\overline{r}^\alpha \preceq r^\alpha$ para todo número ordinal α.*

Demostración. Supongamos que la propiedad es cierta para todo $\gamma < \alpha$.

Si $\alpha = 1$ terminamos.

Si α es un ordinal sucesor, entonces $\alpha = \gamma + 1$. Luego,

$$\begin{aligned} \overline{r}^\alpha &= \overline{r}^{\gamma+1} \\ &= \overline{r} \cdot \overline{r}^\gamma \\ &\preceq \overline{r} \cdot r^\gamma \\ &\preceq r \cdot r^\gamma \\ &= r^{\gamma+1} \\ &= r^\alpha. \end{aligned}$$

Si α es un ordinal límite, entonces

$$\begin{aligned} \overline{r}^\alpha &= \bigcap_{1 \leq \beta < \alpha} \overline{r}^\beta \\ &\preceq \bigcap_{1 \leq \beta < \alpha} r^\beta \\ &= r^\alpha. \end{aligned}$$

$\square$

Proposición 5.1.6. *Si r es un prerradical, entonces $\overline{r} = r^\beta$ con β el menor número ordinal tal que $r^\beta = r^\kappa$ para todo $\kappa > \beta$.*

Demostración. Sea $s = r^\beta$ con β el menor número ordinal tal que $r^\beta = r^\kappa$ para todo $\kappa > \beta$. Entonces para todo $M \in R$-Mod, $s(M) = r^\beta(M) \geq \overline{r}^\beta(M) = \overline{r}(M)$. Luego, $s \geq \overline{r}$. Por último, como $s(M) = r^\beta(M)$, entonces $r(s(M)) = r(r^\beta(M)) = r \cdot r^\beta(M) = r^{\beta+1}(M) = s(M)$. Luego, $\overline{r} \geq s$. $\square$

Definición 5.6.

(1) Sea I un ideal izquierdo de R. Para todo número ordinal α definimos: ${}^1I = I$, ${}^{\alpha+1}I = I \cdot {}^\alpha I$ e ${}^\alpha I = \bigcap\limits_{1 \leq \beta < \alpha} {}^\beta I$, si α es límite.

(2) Sea I es un ideal derecho de R. Para todo número ordinal α definimos: $I^1 = I$, $I^{\alpha+1} = I^\alpha \cdot I$ e $I^\alpha = \bigcap\limits_{1 \leq \beta < \alpha} I^\beta$, si α es límite.

Observación 5.7. *Sea I un ideal izquierdo de R, entonces existe un menor número ordinal β tal que $I^\beta = I^\kappa$ para todo $\kappa > \beta$.*

Demostración. Es claro ya que de no ser así habría tantos intersectandos como números ordinales. □

Proposición 5.1.7. *Sea I un ideal bilateral de R y sea r su radical cohereditario asociado. Entonces $r^{\alpha}(R) = {}^{\alpha}I$ para todo número ordinal $\alpha \geq 1$. En particular, $\overline{r}(R) = {}^{\beta}I$ con β el menor número ordinal tal que $I^{\beta} = I^{\kappa}$ para todo $\kappa > \beta$.*

Demostración. Supongamos que la propiedad es cierta para todo $\gamma < \alpha$.
Si $\alpha = 1$ terminamos.
Si α es sucesor, entonces $\alpha = \gamma + 1$. Luego,

$$\begin{aligned} r^{\alpha}(R) &= r^{\gamma+1}(R) \\ &= (r \cdot r^{\gamma})(R) \\ &= r(r^{\gamma}(R)) \\ &= r({}^{\gamma}I) \\ &= I \cdot {}^{\gamma}I \\ &= {}^{\gamma+1}I \\ &= {}^{\alpha}I. \end{aligned}$$

Si α es límite, entonces $r^{\alpha}(R) = \bigcap_{1 \leq \beta < \alpha} r^{\beta}(R) = \bigcap_{1 \leq \beta < \alpha} {}^{\beta}I = {}^{\alpha}I$.

Por último, por la Proposición 5.1.6, $\overline{r}(R) = {}^{\beta}I$ con β el menor número ordinal tal que $I^{\beta} = I^{\kappa}$ para todo $\kappa > \beta$. □

5.2. Suma y coproducto de prerradicales

Proposición 5.2.1. *Sea $\{r_i\}_{i \in I}$ una familia de prerradicales y sea $r(M) = \sum_{i \in I} r_i(M)$ para todo $M \in R$-Mod. Entones:*

(1) r es prerradical.

(2) $\mathcal{F}_r = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_{r_i}$ y $\bigcup_{i \in I} \mathcal{T}_{r_i} \subseteq \mathcal{T}_r$.

(3) Si cada r_i es idempotente, entonces r es idempotente.

(4) Si cada r_i es cohereditario, entonces r es cohereditario.

(5) $\rho(r) = \sum_{i \in I} \rho(r_i)$.

(6) Si R es perfecto izquierdo y cada r_i es coestable, entonces r es coestable.

(7) Si cada r_i se coescinde, entonces r se coescinde.

Demostración. (1) Sea $M \in R$-Mod, como cada r_i es prerradical se sigue que $r_i(M) \leq M$ para cada $i \in I$. Luego, $r(M) = \sum_{i \in I} r_i(M) \leq M$.

Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de módulos. Como cada r_i es prerradical se sigue que $f(r_i(M)) \leq r_i(N)$ para cada $i \in I$. Luego, $f(r(M) = f\left(\sum_{i \in I} r_i(M)\right) = \sum_{i \in I} f(r_i(M)) \leq \sum_{i \in I} r_i(N) = r(N)$.

(2) $\mathcal{F}_r = \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_{r_i}$: Sea $M \in \mathcal{F}_r$, entonces $0 = r(M) = \sum_{i\in I} r_i(M)$. Luego, $r_i(M) = 0$ para cada $i \in I$. Entonces $M \in \mathcal{F}_{r_i}$ para cada $i \in I$, es decir, $M \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_{r_i}$. Ahora, sea $M \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_{r_i}$, entonces $M \in \mathcal{F}_{r_i}$ para cada $i \in I$. Luego, $r_i(M) = 0$ para cada $i \in I$. Por lo tanto $r(M) = \sum_{i\in I} r_i(M) = 0$, es decir, $M \in \mathcal{F}_r$.

$\bigcup_{i\in I} \mathcal{T}_{r_i} \subseteq \mathcal{T}_r$: Sea $M \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{T}_{r_i}$, entonces existe $i \in I$ tal que $M \in \mathcal{T}_{r_i}$, es decir, existe $i \in I$ tal que $r_i(M) = M$. Por lo tanto $r(M) = \sum_{i\in I} r_i(M) = M$, es decir, $M \in \mathcal{T}_r$.

(3) Supongamos que cada r_i es idempotente y sea $M \in R$-Mod. Entonces $r_i(M) = r_i(r_i(M))$ para cada $i \in I$. Luego, $r(M) = \sum_{i\in I} r_i(M) = \sum_{i\in I} r_i(r_i(M)) \leq \sum_{i\in I} r_i(r(M)) = r(r(M))$. Por lo tanto $r(M) = r(r(M))$ y en consecuencia r es idempotente.

(4) Supongamos que cada r_i es cohereditario. Sean $M, N \in R$-Mod tales que $N \leq M$. Entonces $r_i(M/N) = (r_i(M) + N)/N$ para cada $i \in I$. Luego, $r(M/N) = \sum_{i\in I} r_i(M/N) = \sum_{i\in I}(r_i(M) + N)/N = \left(\sum_{i\in I} r_i(M) + N\right)/N = (r(M) + N)/N$. Por lo tanto r es cohereditario.

(5) Sea $M \in R$-Mod, entonces $\rho(r)(M) = r(R)M = \left(\sum_{i\in I} r_i(R)\right) M = \sum_{i\in I} r_i(R)M = \sum_{i\in I} \rho(r_i)(M)$.

(6) Sin perdida de generalidad podemos suponer que cada r_i es un radical cohereditario. Entonces, por (4) r es un radical cohereditario. Veamos que $\mathcal{F}_r$ es cerrada bajo cubiertas. Sean $M, N \in R$-Mod tales que $N \ll M$ y $M/N \in \mathcal{F}_r$. Por (2), $\mathcal{F}_r = \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_{r_i}$, entonces $M/N \in \mathcal{F}_{r_i}$ para cada $i \in I$. Como cada r_i es coestable, por el Teorema 4.9, $\mathcal{F}_{r_i}$ es cerrada bajo cubiertas para cada $i \in I$. Luego, $M \in \mathcal{F}_{r_i}$ para cada $i \in I$. Por lo tanto $M \in \mathcal{F}_r$ y en consecuencia $\mathcal{F}_r$ es cerrada bajo cubiertas. Y como R es perfecto izquierdo, por el Teorema 4.9, r es coestable.

(7) Es claro. □

Corolario 5.8. *Sea r un prerradical. Entonces*

(1) $\overline{r} = \cap s$, donde s corre a través de todos los prerradicales idempotentes contenidos en r.

(2) $\rho(r) = \sum t$, donde t corre a través de todos los radicales cohereditarios contenidos en r.

Demostración. (1) Sea sigue de la Proposición 5.2.1 y la Proposición 2.1.5.

(2) Sea sigue de la Proposición 5.2.1 y la Proposición 3.2.7. □

Definición 5.9. *Sean r, s dos prerradicales. Definimos el* ***coproducto*** *de r con s como sigue:*

$$(r : s)(M)/r(M) = s(M/r(M)) \text{ para todo } M \in R\text{-Mod.}$$

Proposición 5.2.2. *Sean r, s dos prerradicales. Entonces:*

(1) $r : s$ es prerradical.

(2) $\mathcal{F}_{r:s} = \mathcal{F}_r \bigcap \mathcal{F}_s$ y $\mathcal{T}_r \bigcup \mathcal{T}_s \subseteq \mathcal{T}_{r:s}$.

(3) $r + s \preceq r : s \preceq \widehat{r + s}$.

(4) Si $r+s$ es radical, entonces $r+s = r : s = s : r$.

Demostración. (1) Sea $M \in R$-Mod, entonces tenemos que $(r : s)(M)/r(M) = s(M/r(M)) \leq M/r(M)$. Luego, $(r : s)(M) \leq M$.

Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo, entonces tenemos el morfismo $\overline{f} : M/r(M) \longrightarrow N/r(N)$. Como s es prerradical se sigue que $\overline{f}(s(M/r(M))) \leq s(N/r(N)) = (r : s)(N)/r(N)$. Pero $\overline{f}(s(M/r(M))) = \overline{f}((r : s)(M)/r(M)) = f((r : s)(M))/r(N)$. Entonces, $f((r : s)(M))/r(N) \leq (r : s)(N)/r(N)$. Por lo tanto $f((r : s)(M)) \leq (r : s)(N)$.

(2) Es claro.

(3) $r + s \preceq r : s$: Sea $M \in R$-Mod y sea $\pi_r : M \longrightarrow M/r(M)$ el epimorfismo natural. Como s es prerradical se sigue que $\pi_r(s(M)) \leq s(M/r(M)) = (r : s)(M)/r(M)$. Pero $\pi_r(s(M)) = (s(M)+r(M))/r(M)$. Por lo tanto $(s(M)+r(M))/r(M) \leq (r : s)(M)/r(M)$. Luego, $s(M)+r(M) \leq (r : s)(M)$.

$r : s \preceq \widehat{r+s}$: Por (2) y (2) de la Proposición 5.2.1, $\mathcal{F}_{r:s} = \mathcal{F}_{\widehat{r+s}}$. Luego, $r : s \preceq \widehat{r+s}$.

(4) Supongamos que $r+s$ es radical, entonces $r+s = \widehat{r+s}$, y por (3) concluimos que $r+s = r : s = s : r$. □

Proposición 5.2.3. *Sean r, s dos prerradicales. Entonces:*

(1) Si s es cohereditario, entonces $r : s = r + s$.

(2) Si r es cohereditario y s es radical, entonces $r : s$ es radical y $r : s = \widehat{r+s}$.

(3) Si r y s son cohereditarios, entonces $r : s = r + s = s : r$.

(4) Si r es cohereditario, entonces $\widehat{r : s} = \widehat{r} : \widehat{s} = r : \widehat{s}$.

(5) Si r y s son estables (coestables, se escinden), entonces $r : s$ también.

Demostración. (1) Supongamos que s es cohereditario y sea $M \in R$-Mod. Como $r(M) \leq M$ tenemos lo siguiente: $(r(M)+s(M))/r(M) = s(M/r(M)) = (r : s)(M)/r(M)$. Luego, $(r+s)(M) = r(M) + s(M) = (r : s)(M)$.

(2) Análogo a (2) de la Proposición 5.1.3.

(3) Supongamos que r y s son cohereditarios, entonces por la Proposición 5.2.1, $r + s$ es cohereditario y por tanto radical. Luego, por (4) de la Proposición 5.2.2, $r : s = r + s = s : r$.

(4) Supongamos que r es cohereditario, entonces r es radical y en consecuencia $r = \widehat{r}$. Luego, $\widehat{r} : \widehat{s} = r : \widehat{s}$. Por otro lado, como $\widehat{s}$ es radical, por (2), $r : \widehat{s}$ es radical. Además, por (2) de la Proposición 5.2.2, $\mathcal{F}_{r:\widehat{s}} = \mathcal{F}_r \bigcap \mathcal{F}_{\widehat{s}} = \mathcal{F}_r \bigcap \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_{r:s} = \mathcal{F}_{\widehat{r:s}}$. Y como $r : \widehat{s}$ y $\widehat{r : s}$ son radicales, por el Corolario 2.17, $r : \widehat{s} = \widehat{r : s}$.

(5) Análogo a (5) de la Proposición 5.1.3. □

Conclusión

En el Capítulo 2 se definió un orden parcial en la clase R-pr y en el Capítulo 3 se demostró que dada una familia de prerradicales $\{r_i\}_{i\in I}$, entonces $\bigcap\limits_{i\in I} r_i$ y $\sum\limits_{i\in I} r_i$ son prerradicales. Luego, podemos decir que R-pr es una gran retícula completa donde $\bigwedge\limits_{i\in I} r_i = \bigcap\limits_{i\in I} r_r$ y $\bigvee\limits_{i\in I} r_i = \sum\limits_{i\in I} r_i$.

En el Capítulo 2 se introduce el concepto de prerradical idempotente y radical. También se dan algunas relaciones entre estos prerradicales y sus teorías de torsión y libres de torsión asignadas. Posteriormente, dado un prerradical r se definieron los prerradicales $\overline{r}, \widehat{r}, \eta(r), \rho(r)$ y se establecen relaciones entre estos. Sin embargo, aún queda por resolver la siguiente pregunta: ¿Cuándo todo prerradical idempotente es radical? Lo cual es equivalente a preguntarnos ¿cuándo toda clase de pretorsión es libre de pretorsión?

En conclusión, en este trabajo se presentan algunos resultados básicos de la teoría de prerradicales sobre un anillo asociativo con $1 \neq 0$ que nos servirán de punto de partida para el estudio de las siguientes preguntas:

1. ¿Cuándo todo prerradical idempotente es radical?

2. ¿Cuándo la retícula R-pr es un conjunto?

Bibliografía

[1] Bican, L., Kepka, T., Němec, P., *Rings, Modules, and Preradicals*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 75, Marcel Dekker, Inc., New York, 1982.

[2] Dauns, J., Zhou, Y., *Classes of modules*, Pure and Applied Mathematics, 281, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.

[3] Fernández-Alonso, R., Herbera, D., *Finite lattices of preradicals and finite representation type rings*, International Electronic Journal of Algebra, 21(21), (2017), 103-120.

[4] Fernandez-Alonso, R., Gavito, S., *The lattice of preradicals over local uniserial rings*, Journal of Algebra and Its Applications, 5(06), (2006), 731-746.

[5] Fernández-Alonso, R., Gavito, S., Chimal-Dzul, H., *A class of rings for which the lattice of preradicals is not a set*, International Electronic Journal of Algebra, 9(9), (2011), 38-60.

[6] Fernández-Alonso, R., Gavito, S., Pérez-Terrazas, J. E., *On the connection between the representation type of an algebra and its lattice of preradicals*, Communications in Algebra, 46(1), (2018), 176-190.

[7] Kasch, F., *Modules and Rings*, Academic Press, 1982.

[8] Maranda, J. M., *Injective structures*, Transactions of the American Mathematical Society, 110(1), (1964), 98-135.

[9] Raggi, F., Ríos, J., Rincón, H. A., Fernández-Alonso, R., Signoret, C., *The lattice structure of preradicals*, Comm. Algebra, 30(3), (2002), 1533-1544.

[10] Raggi, F., Ríos, J., Rincón, H. A., Fernández-Alonso, R., Signoret, C., *The lattice structure of preradicals II*, J. Algebra APPL., 1(2), (2002), 201-214.

[11] Raggi, F., Ríos, J., Rincón, H. A., Fernández-Alonso, R., Signoret, C., *The lattice structure of preradicals III*, J. Pure APPL. Algebra, 190(1-3), (2004), 251-265.

[12] Raggi, F., Ríos, J., Gavito, S., Rincón, H., Fernández-Alonso, R., *Semicoprime preradicals*, Journal of Algebra and Its Applications, 11(06), (2012).

[13] Rincón-Mejía, H. A., Sandoval-Miranda, M. L. S., *On pseudocomplements and supplements in the big lattice of preradicals*, Journal of Algebra and Its Applications, 13(07), (2014), 1450043.

[14] Stenström, B., *Rings of quotients. An introduction to methods of ring theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975.

[15] Wisbauer, R., *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science Publishers, Philadelphia, PA, 1991.

Índice alfabético