



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Estudio Numérico de la Propagación de Haces Paraxiales

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Gonzalo Condado Tepox

asesorado por

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco

Puebla Pue.
Julio 2018

Índice general

Agradecimientos	V
Resumen	VII
Introducción	IX
1. Fundamentos Teóricos	1
1.1. Ecuación de Onda	1
1.2. Ecuación de Helmholtz	2
1.3. Difracción	2
1.3.1. Método de Propagación del Haz	4
1.4. Ecuación Paraxial de Helmholtz	7
2. Haces Gaussianos	9
2.1. Introducción	9
2.2. Función de Onda Gaussiana	9
2.2.1. Distribución de Intensidad	10
2.3. Análisis de Resultados	16
3. Funciones Hermite-Gauss	17
3.1. Introducción	17
3.2. Haces Hermite-Gauss	17
3.2.1. Distribución de Intensidad	19
3.3. Haces Hermite-Gauss Elegantes	32
3.3.1. Distribución de Intensidad	34
3.4. Análisis de Resultados	46
4. Funciones Laguerre-Gauss.	47
4.1. Haces Laguerre-Gauss.	47
4.1.1. Distribución de Intensidad	50
4.2. Haces Laguerre-Gauss Elegantes	63
4.2.1. Distribuciones de Intensidad	65
4.3. Análisis de Resultados	78
5. Conclusiones	79
Bibliografía	81

Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco por haber aceptado ser mi asesor de tesis de licenciatura. Le doy gracias por su tiempo dedicado a resolver mis dudas, por el gran apoyo que siempre ha mostrado, así como por la enorme paciencia y los conocimientos que me ha brindado durante todo este tiempo.

A la Dra. Marcela Maribel Méndez Otero, la Dra. María del Rosario Pastrana Sánchez, el Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez y el Dr. Cruz Meneses Fabian por aceptar ser parte del Jurado Revisor de esta tesis.

A la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP por haberme dado la oportunidad de realizar mis estudios de licenciatura en Física.

Quiero agradecer a mi padre Urbano Condado Rojas y mi madre Guadalupe Tepox Romero por el enorme sacrificio que hicieron para que yo pudiera llegar hasta este punto de mi carrera, porque gracias a su confianza y el cariño que me dieron pude seguir adelante. A mis hermanos y hermanas porque me demostraron que son personas en las que puedo confiar plenamente.

A mis amigos de la licenciatura: Jonhatan Bernabé, Ricardo Flores, Karina Gonzalez y Moisés Zeleny porque gracias a ellos pasé momentos divertidos y geniales, fueron de gran ayuda en varias ocasiones y gracias a ellos mi paso por la licenciatura fue mucho más entretenido. Quiero agradecer en especial a mis amigas: Daniela Blanco Lira por ser una gran amiga que en varias ocasiones se tomó la molestia de motivarme para concluir la licenciatura además de que pasé momentos fascinantes en su compañía y a Angela Morales Alonso por alentarme a ser siempre positivo, a no darme por vencido a la primera y seguir intentando hasta agotar todas las posibilidades, pero más que eso, por hacer agradables los momentos juntos y el haberme ofrecido su ayuda y amistad en todo este tiempo.

Resumen

En este trabajo de tesis se estudia la propagación de algunos haces paraxiales que son solución a la ecuación paraxial de Helmholtz: los haces Gaussianos, los haces Hermite-Gauss, Hermite-Gauss Elegantes, el conjunto de haces Laguerre-Gauss y Laguerre-Gauss Elegantes.

Los haces Gaussianos son los más estudiados, ya que en la mayoría de los láseres su funcionamiento es con base en un resonador de espejos esféricos donde los modos se acoplan a la superficie de ellos, emiten un haz de luz que presenta éste tipo de distribución transversal de intensidad, con un pico en el centro el cual contiene la mayor intensidad y un decrecimiento hacia los bordes en forma exponencial. Es por esto que estudiar la manera en que se propagan en el espacio libre o en algún otro medio ayuda a darles un mejor uso y aplicación que pueda mejorar y facilitarnos la vida.

Como segunda solución están los haces Hermite-Gauss, son una familia de funciones en las que se combinan los polinomios de Hermite con los haces Gaussianos. Son obtenidos al proponer una solución a la ecuación paraxial de Helmholtz en coordenadas cartesianas usando un argumento real en los polinomios de Hermite. Por otro lado están los haces Hermite-Gauss Elegantes introducidos por Siegman donde se usa un argumento complejo en ambas partes, es decir, tanto los polinomios de Hermite como la función gaussiana contienen un argumento complejo. La solución analítica se obtiene de la misma forma que los haces anteriores, se propone una solución en coordenadas rectangulares y se resuelve mediante el método de separación de variables.

Las funciones Laguerre-Gauss son la tercera solución a la ecuación paraxial de Helmholtz introducida en este trabajo, al igual que los Hermite-Gauss están: los haces Laguerre-Gauss con un argumento real en los polinomios asociados de Laguerre y los Laguerre-Gauss Elegantes con argumento complejo que comparten los polinomios asociados de Laguerre y la función de onda Gaussiana. De manera similar que en los casos anteriores se obtiene la forma analítica de estos haces por un proceso equivalente pero ahora en coordenadas cilíndricas. Esta solución nos permite conocer la distribución transversal de la intensidad de dicho haz para cualquier posición de propagación a campo lejano (difracción de Fraunhofer). En muchas ocasiones no es fácil encontrar una solución en forma analítica, por lo que se recurre a métodos numéricos para poder conocer la evolución del perfil de intensidad de la onda al propagarse en el espacio libre o en algún otro medio. El método de propagación del paso dividido de Fourier es una simulación numérica que nos permite conocer la evolución del perfil de intensidad para una función de entrada o haz de entrada mediante el uso de la función de transferencia.

Palabras clave: paraxial, propagación, difracción.

Introducción

En la naturaleza existen fenómenos que forman parte de la vida cotidiana de la humanidad y que son de gran importancia e interés, por lo que comprenderlos permite darles un mejor uso o aplicación en otras áreas del conocimiento. La luz es el fenómeno con el que estamos siempre en contacto, tanto que, de momento no le damos gran importancia pero que sin éste nuestra vida sería diferente. Es por esto que desde tiempos remotos el hombre se ha sentido atraído por este tipo de fenómenos luminosos, que despertaron en él su gran curiosidad.

Los filósofos griegos Pitágoras, Demócrito, Empedocles, Platón, Aristóteles y otros desarrollaron varias teorías de la naturaleza de la luz: como la propagación rectilínea de la luz o la ley de reflexión enunciada por Euclides (300 A.C.) El fenómeno de difracción fue visto primero por el profesor Francesco María Grimaldi (1618-1663), y que es la desviación de la propagación rectilínea que ocurre cuando la luz avanza más allá de una obstrucción [1].

Es así como la óptica, una de las áreas de la física que hace de su interés y objeto de estudio a la luz se fue desarrollando hasta llegar a la generación del primer láser (light amplification by stimulated emission of radiation, por sus siglas en inglés) en 1960 por T. H. Maiman [2], conformado por un cristal de rubí como medio activo y una cavidad óptica de Fabry-Perot como resonador óptico, que consiste de dos espejos planos alineados sobre un eje, paralelos y separados por una distancia grande comparada con el tamaño de los espejos ($L = m\lambda/2$). Son dispositivos que amplifican la radiación de frecuencias en el infrarrojo, visible y regiones del ultravioleta del espectro electromagnético.[3, 4]

Más tarde comenzaron a surgir los láseres en los que usaron como medio activo algún gas, el de helio-neón (He-Ne), por ejemplo. Este avance sugirió nuevas técnicas y experimentos, inclusive el desarrollo de una nueva rama de la óptica, la óptica no lineal, que se encarga de estudiar los fenómenos donde la luz al propagarse en un medio modifica las propiedades ópticas de éste [5], así mismo este avance permitió el desarrollo de nuevos láseres, que con base en radiación infrarroja y medios cuadráticamente no lineales convierten esta radiación en el rango del visible [6]. La distribución transversal de intensidad del haz que sale del láser depende de la cavidad del resonador y la forma de los espejos [7]. Estos patrones de distribución de intensidad son llamados modos *TEM*. Los láseres más comunes son los de resonadores de espejos esféricos donde se generan modos que se acoplan a la superficie esférica de los espejos [8]. Con el uso de estos dispositivos se ha tenido que dedicar un mayor estudio a los haces generados por este tipo de resonadores esféricos, ya que tienen la característica principal de emitir haces del modo fundamental (*TEM*₀₀) o haces Gaussianos. La variación transversal de la intensidad de este modo es en forma *Gaussiana* con una intensidad pico en el centro y un decrecimiento exponencial hacia los bordes. También se ha dedicado el estudio a la generación de otros diferentes tipos de haz o campos de luz láser. Estos tipos de haz son conocidos como haces paraxiales, ya que el ángulo que hace el rayo con respecto al eje de propagación es muy pequeño ($\sin\theta \approx \theta$) y son solución a la ecuación paraxial de Helmholtz. Tienen propiedades únicas: como un estrecho rango de frecuencias o un alto grado de colimación [9]. Gran parte de este estudio está orientado a la propagación de estos haces en el espacio libre donde la difracción juega el papel más importante o su interacción con la materia en la óptica no lineal: para medir el índice de refracción no lineal y el coeficiente de

absorción no lineal mediante la *técnica de barrido en z* [10] o la auto modulación espacial de fase de un haz Gaussiano al atravesar un medio no lineal [11].

Existen otros conjuntos de haces paraxiales que son solución a la ecuación paraxial de Helmholtz: los haces Hermite-Gaussianos y Laguerre-Gaussianos. Surgen del producto de las funciones Hermite con la función Gaussiana en coordenadas cartesianas o del producto de los polinomios asociados de Laguerre con la función Gaussiana en coordenadas cilíndricas [12]. Existe una variante de estos haces paraxiales: los haces Hermite-Gauss Elegantes y los Laguerre-Gauss Elegantes introducidos por Siegman en 1973, donde a diferencia de los anteriores estos tienen una forma más simétrica, es decir, contienen el mismo argumento complejo los polinomios de Hermite, los polinomios asociados de Laguerre y la función Gaussiana, mientras que en los no elegantes el argumento complejo sólo se encuentra en la función Gaussiana [13, 14, 15, 16]. Se ha dedicado en gran medida el estudio a la generación y propagación de estos haces, al igual que los haces Gaussianos: como la generación de alta calidad de haces Laguerre-Gauss de orden superior usando un cristal líquido de silicio como modulador espacial de luz [17]. La generación y propagación de haces Laguerre-Gauss polarizados cilíndricamente mediante la inserción apropiada de una ventanilla de Brewster dentro de un simple confinamiento simétrico circular del resonador laser [18]. Todavía hay pocos estudios utilizando haces Laguerre-Gauss en la interacción luz-tejido, especialmente en imagen del cerebro, pero se ha hecho la propagación de un haz Laguerre-Gauss a través del tejido del cerebro de un ratón [19].

Los haces Hermite-Gauss son una cómoda descripción de la salida de los láseres cuya cavidad no es radialmente simétrica, sino que cuenta con una distinción entre horizontal y vertical. Sus propiedades han sido estudiadas tanto en el vacío como en turbulencia atmosférica [20]. Se ha estudiado numéricamente la evolución de las propiedades de la intensidad media, difusión y direccionalidad de un haz Hermite-Gauss Elegante parcialmente coherente en turbulencia atmosférica [21].

En este trabajo de tesis se hace la comparación del *Método de Propagación del Paso Dividido de Fourier* [22] con la solución analítica obtenida a partir de la ecuación paraxial de Helmholtz para la propagación de algunos haces paraxiales a campo lejano (difracción de Fraunhofer) en el espacio libre, como son los haces Gaussianos, los Hermite-Gauss, Hermite-Gauss Elegantes, los Laguerre-Gauss y Laguerre-Gauss Elegantes.

En el primer capítulo se introducen algunos de los conceptos necesarios para el entendimiento de la propagación de los haces paraxiales como la difracción. Se da una explicación del método numérico y el código del programa necesario para la propagación de los haces. Posteriormente, en el Capítulo 2 se presenta la primera solución a la ecuación paraxial de Helmholtz, es decir, los haces Gaussianos, se presentan algunas de sus distribuciones de intensidad para diferentes distancias de propagación obtenidas por ambos métodos de estudio y con un breve análisis de los resultados de esa sección.

En el Capítulo 3 se dan a conocer otras dos funciones que satisfacen la ecuación paraxial de Helmholtz: las funciones Hermite-Gauss y Hermite-Gauss Elegantes, las primeras son los polinomios de Hermite con un argumento real multiplicada por la función Gaussiana, mientras que en las segundas son dichos polinomios pero con argumento complejo multiplicados por la función Gaussiana. Se dan los resultados de la simulación numérica de la propagación para algunos modos de estos haces y se hace la comparación respectiva con las gráficas de la solución analítica.

En el Capítulo 4 se hace el análisis de las funciones Laguerre-Gauss y Laguerre-Gauss Elegantes como otras soluciones a la ecuación paraxial de Helmholtz en coordenadas cilíndricas. Estos haces son el producto de los polinomios asociados de Laguerre con la función Gaussiana, en donde los primeros tienen un argumento real y la parte Gaussiana un argumento complejo, por otro lado, en los haces elegantes los polinomios asociados de Laguerre comparten un argumento complejo con la función Gaussiana. Se obtiene la expresión para la intensidad a partir de la solución analítica en cada una de estas soluciones, se grafican el perfil y distribución transversal de intensidad para diferentes valores de z y se comparan con los resultados del método de propagación para las mismas posiciones de z . En la última sección se presentan las conclusiones del análisis de resultados.

Capítulo 1

Fundamentos Teóricos

En este capítulo se mencionan algunos conceptos teóricos necesarios para la comprensión de los haces paraxiales: Gaussianos (HG), los modos de más bajo orden; los Hermite-Gauss (HHG) y Laguerre-Gauss (HLG), modos de orden superior. En la sección 1.1 se introduce la ecuación de onda, deducida a partir de las ecuaciones de Maxwell. En la sección 1.2 se da a conocer la ecuación de Helmholtz derivada de la ecuación de onda. Posteriormente en la sección 1.3 se presenta una breve descripción del concepto de difracción y un método de simulación numérica para hacer la propagación de los haces paraxiales mediante el uso de la función de transferencia en el espacio libre. En la última sección 1.4 se presenta la ecuación paraxial de Helmholtz, con la cual se podrán obtener los haces paraxiales, haciendo uso del método de separación de variables en coordenadas cartesianas y cilíndricas para los HHG y HLG, respectivamente.

1.1. Ecuación de Onda

El logro supremo de la teoría de James Clerk Maxwell fue quizá la predicción de la existencia de las ondas electromagnéticas y darse cuenta de que la luz podía comprenderse como un tipo de onda electromagnética [23]. De las ecuaciones de Maxwell se puede deducir la ecuación de onda:

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.1)$$

donde la función real $u(\mathbf{r}, t)$, conocida como función de onda dependiente de la posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$ y del tiempo t , representa una onda electromagnética que se propaga a la velocidad de la luz en el vacío de $c_0 \approx 3.0 \times 10^8 m/s$. $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ es el operador Laplaciano en coordenadas rectangulares.

Una solución a la ecuación de onda es una función armónica en el tiempo, dada por:

$$u(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}) \cos [2\pi\nu t + \phi(\mathbf{r})], \quad (1.2)$$

donde $A(\mathbf{r})$ es la amplitud, el argumento del coseno es la fase, $\phi(\mathbf{r})$ es la fase inicial de la función armónica, ν es la frecuencia temporal. La intensidad óptica $I(\mathbf{r}, t)$ se define como la potencia óptica por unidad de área y es proporcional al promedio temporal de la función de onda al cuadrado:

$$I(\mathbf{r}, t) = 2 \langle u^2(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (1.3)$$

donde el operador $\langle \cdot \rangle$ denota el promedio sobre un intervalo de tiempo que es mucho más grande que el tiempo de un ciclo óptico.

Es conveniente representar la función de onda real $u(\mathbf{r}, t)$ en términos de una función compleja:

$$U(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}) \exp(i\phi(\mathbf{r})) \exp(i2\pi\nu t), \quad (1.4)$$

conocida como función de onda compleja. Describe la onda completamente y también satisface la ecuación de onda (1.1); la función de onda $u(\mathbf{r}, t)$ es simplemente la parte real de $U(\mathbf{r}, t)$.

La ecuación (1.4) puede ser escrita de la forma:

$$U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}) \exp(i\omega t), \quad (1.5)$$

con $U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp(i\phi(\mathbf{r}))$ conocida como la amplitud compleja y $\omega = 2\pi\nu$ la frecuencia angular. Entonces la función de onda real se relaciona de la siguiente manera:

$$u(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{U(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)\}. \quad (1.6)$$

1.2. Ecuación de Helmholtz

Usando la función de onda compleja dada por $U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)$ y sustituyendo en la ecuación de onda (1.1), podemos obtener la ecuación diferencial:

$$(\nabla^2 + k^2)U(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.7)$$

conocida como **ecuación de Helmholtz**, donde

$$k = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\omega}{c}, \quad (1.8)$$

es el número de onda.

1.3. Difracción

Una de las consecuencias que tiene la naturaleza ondulatoria de la luz es que algunos experimentos no pueden ser explicados mediante el uso de la óptica de rayos (óptica geométrica) como lo es el fenómeno de *difracción*, que se basa en la desviación de las ondas al encontrar un obstáculo o al atravesar una rendija. También ocurre cuando una onda de luz confinada a un espacio finito se propaga, como en el caso de las fuentes de luz láser [14].

La Óptica de Fourier proporciona una descripción de la propagación de la luz mediante el análisis armónico (transformada de Fourier) y sistemas lineales. El análisis armónico se basa en la expansión de una función arbitraria $f(t)$ como una superposición de funciones armónicas en el tiempo con diferentes frecuencias. Si la respuesta del sistema a cada función armónica es conocida, la respuesta a una función arbitraria en la entrada es fácilmente determinada mediante el uso de la transformada de Fourier en la entrada y la superposición en la salida [22].

En el caso de una función $f(x, y)$ con variables x y y que representan las coordenadas espaciales en el plano xy también se puede poner como una superposición de funciones armónicas de la forma: $F(\nu_x, \nu_y) \exp[-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)]$, donde $F(\nu)$ es la amplitud compleja y ν_x y ν_y son las frecuencias

espaciales. $F(\nu)$ es llamada la transformada de Fourier de $f(x, y)$ [24]. A continuación se muestra la transformada de Fourier bidimensional en el espacio:

$$\begin{aligned} F(k_x, k_y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(ik_x x + ik_y y) dx dy \\ &= \mathcal{F}_{xy} \{f(x, y)\}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Y la transformada inversa de Fourier es:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y) \exp(-ik_x x - ik_y y) dk_x dk_y \\ &= \mathcal{F}_{xy}^{-1} \{F(k_x, k_y)\}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

donde $k_x = \nu_x 2\pi$ y $k_y = \nu_y 2\pi$.

Sea una función de onda dada por:

$$U(x, y, z; t) = \psi(x, y, z) \exp(-i\omega t). \quad (1.11)$$

Se sustituye en la ecuación de onda (1.1) en coordenadas rectangulares y se obtiene la ecuación de Helmholtz para ψ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0. \quad (1.12)$$

Ahora aplicamos la transformada de Fourier para obtener:

$$\frac{d^2 \Psi}{dz^2} + k^2 \left(1 - \frac{k_x^2}{k^2} - \frac{k_y^2}{k^2} \right) \Psi = 0, \quad (1.13)$$

donde Ψ es la transformada de Fourier de ψ . Resolviendo la ecuación se tiene:

$$\Psi(k_x, k_y; z) = \Psi_0(k_x, k_y) \exp \left[-ik \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k^2} - \frac{k_y^2}{k^2}} z \right], \quad (1.14)$$

con

$$\Psi_0(k_x, k_y) = \Psi(k_x, k_y; z = 0) = \mathcal{F}_{xy} \{ \psi(x, y; z = 0) \} = \mathcal{F}_{xy} \{ \psi_0(x, y) \}, \quad (1.15)$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{\Psi(k_x, k_y; z)}{\Psi_0(k_x, k_y)} &= \mathcal{H}(k_x, k_y; z) \\ &= \exp \left[-ik \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k^2} - \frac{k_y^2}{k^2}} z \right]. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Con $\mathcal{H}(k_x, k_y; z)$ la *función de transferencia*.

Si consideramos que $k_x^2 + k_y^2 \ll k^2$, lo que significa que las componentes x y y del vector de propagación de la onda son relativamente pequeñas, entonces la ecuación anterior se transforma en:

$$\begin{aligned}
\frac{\Psi(k_x, k_y; z)}{\Psi_0(k_x, k_y)} &= \mathcal{H}(k_x, k_y; z) \\
&= \exp \left[-ik \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k^2} - \frac{k_y^2}{k^2}} z \right] \\
&\simeq \exp(-ikz) \exp \left[\frac{iz(k_x^2 + k_y^2)}{2k} \right] \\
&= H(k_x, k_y; z).
\end{aligned} \tag{1.17}$$

$H(k_x, k_y; z)$ es la aproximación paraxial de la función de transferencia $\mathcal{H}(k_x, k_y; z)$.

Un sistema lineal puede estar caracterizado en el dominio espacial por su *función de respuesta al impulso* o en el dominio de Fourier mediante su *función de transferencia*, donde la función de transferencia es la transformada de Fourier de la función de respuesta al impulso[24].

La función de transferencia $H(k_x, k_y)$ es un factor que multiplicado por una función armónica de entrada con frecuencias $\nu_x = k_x/2\pi$ y $\nu_y = k_y/2\pi$ produce a la salida una función armónica.

$$H(k_x, k_y; z) = \exp(-ik_0 z) \exp \left(\frac{i(k_x^2 + k_y^2)z}{2k_0} \right), \tag{1.18}$$

es la función de transferencia en el espacio libre [22].

Esta función es la que dará paso a la simulación numérica de los haces paraxiales posteriormente.

1.3.1. Método de Propagación del Haz

Para analizar la propagación de un haz láser a menudo se hace de forma numérica ya que obtener una solución analítica que describa dicho comportamiento en muchas ocasiones no es sencillo.

En esta sección se describe un método para analizar la propagación de un haz de luz en el espacio libre, conocido como *método de propagación del paso dividido de Fourier* el cual toma en cuenta el efecto de difracción mediante el uso de la función de transferencia en el espacio libre. La ventaja que tiene este método es que puede ser usado en difracción de Fresnel y difracción de Fraunhofer. El método consiste en tomar un haz de entrada por ejemplo para $z = z_0$ se tiene la función de onda $\psi(x, y, z = z_0)$ la cual pasaremos al espacio de Fourier aplicando la transformada de Fourier:

$$\Psi(k_x, k_y; z = z_0) = \mathcal{F}\{\psi(x, y; z = z_0)\}. \tag{1.19}$$

Ahora se hace la propagación en el espacio de Fourier multiplicando por la función de transferencia del espacio libre Ec. (1.18) para una distancia de propagación Z . Cabe mencionar que en este punto el efecto de difracción ya se ha considerado, entonces se tiene a la salida pero aún en el dominio de Fourier la siguiente expresión:

$$\Psi(k_x, k_y; z = z_0 + Z) = H(k_x, k_y; Z) \mathcal{F}\{\psi(x, y; z = z_0)\}. \tag{1.20}$$

Como que se quiere conocer la distribución y perfil de intensidad de la función de onda en la salida, entonces se regresa al dominio espacial la ecuación anterior aplicando la transformada inversa de Fourier, de este modo se tiene:

$$\psi(x, y, z = z_0 + Z) = \mathcal{F}^{-1}\{\Psi(k_x, k_y; z = z_0 + Z)\}. \quad (1.21)$$

Ésta última expresión da el campo propagado en el espacio libre una distancia Z (salida) en el dominio espacial. Mediante esta función se podrá obtener el perfil y distribución transversal de la intensidad del haz en esa posición, de la forma:

$$I(x, y, z) = |\psi(x, y, z = z_0 + Z)|^2. \quad (1.22)$$

A continuación se muestra el código del programa en MATLAB usado para simular la propagación de los haces analizados en esta tesis.

```
%Propagación del Haz Gaussiano
clear

N = 511; %Número muestra
L = 0.45*10^-3; %Área a visualizar
Ld = 632*10^-9; %Longitud de onda del haz en metros
ko = (2*pi)/Ld; %Número de onda
wo = 20*10^-6; %Cintura del haz
zo = 1.98*10^-3; %Distancia de Rayleigh

s = 5; %Número de zo's que se propagará el haz

dx = L/N; %tamaño del segmento
M=N+1;
for q=1:M %Generación de los ejes
for p=1:M
% Eje espacial
x(p) = (p-1)*dx-L/2;
y(q) = (q-1)*dx-L/2;

%Eje de frecuencia
Kx(p) = (2*pi*(p-1))/(N*dx)-((2*pi*(M-1))/(N*dx))/2;
Ky(q) = (2*pi*(q-1))/(N*dx)-((2*pi*(M-1))/(N*dx))/2;
end
end

[X,Y] = meshgrid(x,y); %Malla en el dominio espacial
[KX,KY] = meshgrid(Kx,Ky); %Malla en el dominio de Fourier
r = (X.^2+Y.^2);
Z=s*zo; %Distancia de propagación

%Haz de entrada en z=0
```

```

Gauss_ini = exp(-(r)./(wo^2));
a = max(max(abs(Gauss_ini)));

%Energía inicial del haz Gaussiano
Energia_ini = dx*dx*sum(sum(abs(Gauss_ini).^2))

%Función de transferencia en el espacio libre
H = exp(-j*ko*Z)*exp((KX.^2+KY.^2)*((j*Z)/(2*ko)));

%Haz Gaussiano inicial en el dominio de frecuencias
FG = fft2(Gauss_ini);

%Haz Gaussiano propagado en el dominio de frecuencias
FG_pro = fftshift(FG).*H;

%Haz Gaussiano propagado en el dominio espacial
Gauss_pro = ifft2(FG_pro);

%Energía del haz propagado
Energia_pro = dx*dx*sum(sum(abs(Gauss_pro).^2))

%Eje en escala mm
x = x*10^3;
y = y*10^3;

figure; %Genera la gráfica del haz de entrada
mesh(x,y,(abs(Gauss_ini./a)).^2)
title('Perfil HG Inicial en Z=0')
xlabel('x [mm]')
ylabel('y [mm]')
axis auto

figure; %Genera la gráfica del haz de salida
mesh(x,y,(abs(Gauss_pro./a)).^2)
title(['Perfil HG Propagado en Z=', num2str(s),'z_{0}'])
xlabel('x [mm]')
ylabel('y [mm]')
axis auto

```

Este código es para la propagación de un haz gaussiano, sin embargo, para los haces Hermite-Gauss, Hermite-Gauss Elegantes, Laguerre-Gauss y Laguerre-Gauss Elegantes sólo hace falta cambiar la función de entrada así como otras líneas del código. Cabe mencionar que este método puede ser usado posteriormente para analizar la propagación de un haz de luz en medios no homogéneos o no lineales.

1.4. Ecuación Paraxial de Helmholtz

Una manera de construir una onda paraxial es a partir de una onda plana $A \exp(-ikz)$, considerada como una onda portadora y modulando su envolvente compleja A mediante una función $A(\mathbf{r})$ que varía lentamente con la posición. La amplitud compleja es entonces:

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp(-ikz). \quad (1.23)$$

La variación de la envolvente compleja $A(\mathbf{r})$ con la posición debe ser muy pequeña para una propagación de una distancia del orden de una longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$.

Sustituyendo la amplitud compleja (1.23) en la ecuación de Helmholtz (1.7), se reduce a:

$$\frac{\partial^2 A(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A(\mathbf{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A(\mathbf{r})}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial A(\mathbf{r})}{\partial z} = 0. \quad (1.24)$$

Ahora, como ya se mencionó anteriormente que la dependencia en z de la envolvente compleja es causada básicamente por los efectos de la difracción, entonces en general su variación en z será lenta, así como también las variaciones transversales debido al ancho finito del haz. Esta variación lenta de $A(\mathbf{r})$ con respecto a z puede ser expresada matemáticamente por la *aproximación paraxial* [14]:

$$\left| \frac{\partial^2 A(\mathbf{r})}{\partial z^2} \right| \ll \left| 2k \frac{\partial A(\mathbf{r})}{\partial z} \right| \quad \text{ó} \quad \left| \frac{\partial^2 A(\mathbf{r})}{\partial x^2} \right| \quad \text{ó} \quad \left| \frac{\partial^2 A(\mathbf{r})}{\partial y^2} \right|. \quad (1.25)$$

Por lo tanto, despreciando la segunda parcial con respecto a z en la ecuación (1.24), se tiene que:

$$\nabla_T^2 A(\mathbf{r}) - i2k \frac{\partial A(\mathbf{r})}{\partial z} = 0, \quad (1.26)$$

es conocida como **ecuación paraxial de Helmholtz**. Donde $\nabla_T^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ es el operador Laplaciano transversal en coordenadas rectangulares. Entonces para que la función (1.23) cumpla con la ecuación de Helmholtz (1.7), la envolvente compleja $A(\mathbf{r})$ debe satisfacer la ecuación (1.26). La ecuación (1.26) es la aproximación de envolvente lentamente variable de la ecuación de Helmholtz.

En las secciones siguientes se hará uso de esta ecuación para obtener algunas de sus soluciones analíticas: los Haces Gaussianos, los haces Hermite-Gaussianos, Hermite-Gaussianos Elegantes, los haces Laguerre-Gaussianos y Laguerre-Gaussianos Elegantes. Y se graficarán a diferentes distancias de propagación para poder ser comparados con el método de propagación de la sección anterior.

Capítulo 2

Haces Gaussianos

2.1. Introducción

El láser es una fuente óptica capaz de emitir haces de luz que al propagarse su energía experimenta un leve esparcimiento en su sección transversal, de modo que sus rayos forman ángulos pequeños con el eje de propagación y se denominan rayos paraxiales, a los cuales se les asocia frentes de onda con una ligera curvatura llamados frentes de onda paraxiales.

En un gran número de láseres, el haz de salida corresponde al modo gaussiano de más bajo orden, el TEM_{00} o modo fundamental. Estos haces gaussianos son solución a la ecuación paraxial de Helmholtz, de los cuales se hablará en el capítulo presente.

2.2. Función de Onda Gaussiana

En esta sección se dará a conocer una solución analítica importante a la ecuación paraxial de Helmholtz, ésta solución se conoce como función de onda Gaussiana o simplemente haz Gaussiano.

Considere una envolvente compleja $A(\mathbf{r})$ de la siguiente forma [12]:

$$A(\mathbf{r}) = \frac{A}{q(z)} \exp \left[-ik \frac{\rho^2}{2q(z)} \right], \quad \rho^2 = x^2 + y^2. \quad (2.1)$$

Donde $q(z) = z + iz_0$ es una función compleja y z_0 es una constante real, mejor conocida como **distancia de Rayleigh**.

Primero se debe separar la función compleja $1/q(z) = 1/(z + iz_0)$ en su respectiva parte real y parte imaginaria para obtener la amplitud y la fase de la envolvente compleja por separado, esto de la forma:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi W^2(z)}, \quad (2.2)$$

donde $W(z)$ y $R(z)$ son los parámetros del haz, ancho y radio de curvatura, respectivamente. Entonces sustituyendo (2.2) en (2.1) y haciendo uso de la ecuación (1.23), la amplitud compleja de un haz gaussiano es:

$$U_G(\mathbf{r}) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp \left[-\frac{\rho^2}{W^2(z)} \right] \exp \left[-ikz - ik \frac{\rho^2}{2R(z)} + i\zeta(z) \right]. \quad (2.3)$$

Donde $A_0 = A_1/iz_0$ es una constante y todos los demás parámetros están relacionados con la distancia de Rayleigh z_0 y la longitud de onda λ dados a continuación:

- » El ancho del haz, $W(z)$, determina el radio de la sección transversal del haz para cualquier z . En $z = 0$, se obtiene la cintura del haz, $W_0 = \left(\frac{\lambda z_0}{\pi}\right)^{1/2}$, el valor mínimo que $W(z)$ puede alcanzar y donde los frentes de onda son prácticamente planos. En la distancia de Rayleigh el ancho del haz tiene el valor de $W(z_0) = \sqrt{2}W_0$, posición en la que el área transversal se duplica, $S = 2S_0$, con S_0 el área en $z = 0$ de radio W_0 . Y se define de la siguiente manera:

$$W(z) = W_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.4)$$

- » El radio de curvatura, $R(z)$. Es la medida de la curvatura de los frentes de onda para cualquier z , en la distancia de Rayleigh $R(z_0) = 2z_0$, se obtiene la máxima curvatura de los frentes de onda. Se define como:

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right]. \quad (2.5)$$

- » $\zeta(z)$ es un factor de fase conocido como **efecto Guoy** y representa un retraso de la fase en los frentes de onda del haz Gaussiano que va de $-\pi/2$ en $z = -\infty$ a $\pi/2$ en $z = \infty$, con respecto al frente de una onda plana o de una onda esférica en la misma posición y está definida de la forma [12]:

$$\zeta(z) = \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_0} \right). \quad (2.6)$$

2.2.1. Distribución de Intensidad

La distribución de intensidad de un haz Gaussiano en cualquier plano transversal es una función Gaussiana con simetría circular centrada alrededor del eje del haz. El ancho de esta función es mínimo en la cintura del haz y va creciendo de manera gradual conforme z crece. Sus frentes de onda son aproximadamente planos cerca de la cintura, pero se van curvando de forma suave y se transforman en esféricos lejos de la cintura del haz.

La intensidad óptica $I(x, y, z) = |U(x, y, z)|^2$ de los haces Gaussianos es:

$$I(x, y, z) = I_0 \left(\frac{W_0}{W(z)} \right)^2 \exp \left[-\frac{2(x^2 + y^2)}{W^2(z)} \right] \quad (2.7)$$

Donde $I_0 = |A_0|^2$ es el valor de la intensidad en $z = 0$. El ancho del haz Gaussiano $W(z)$ aumenta con la distancia z y en z_0 como ya se mencionó anteriormente $W(z_0) = \sqrt{2}W_0$ por lo que el área de la distribución de intensidad en esa posición crece al doble de la de su cintura de modo que la intensidad en eje se reduce a la mitad (Fig. 2.3 y 2.4), $I(0, 0, z_0) = I_0/2$.

CAPÍTULO 2. HACES GAUSSIANOS

2.2. FUNCIÓN DE ONDA GAUSSIANA

A continuación se presentan algunas gráficas del haz Gaussiano (HG) obtenidas mediante la ecuación 2.7 y su respectiva comparación con las gráficas hechas mediante la simulación del método de propagación del paso dividido de Fourier descrito en la sección 1.3.1 para diferentes distancias de propagación.

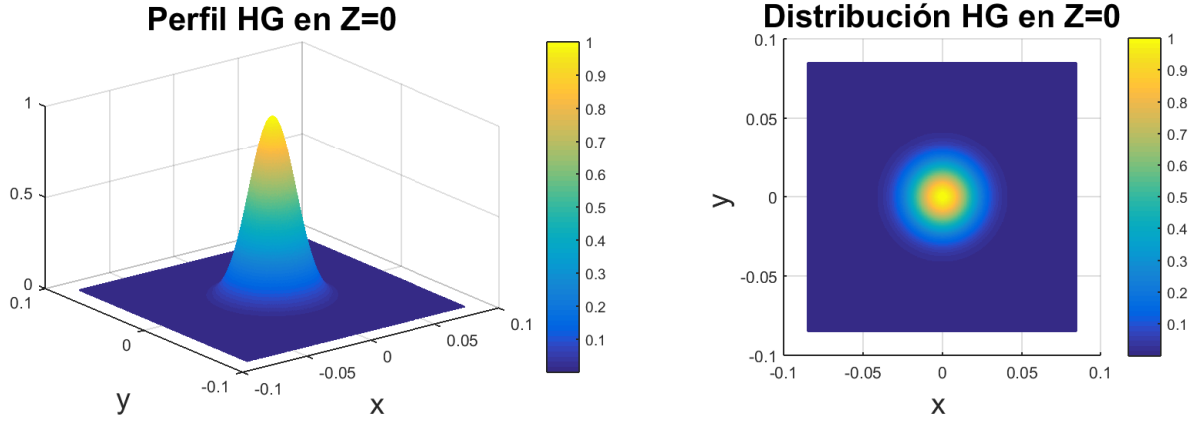


Figura 2.1: Gráficas del perfil y distribución de intensidad para el haz Gaussiano en $z = 0$ usando la ecuación (2.7).

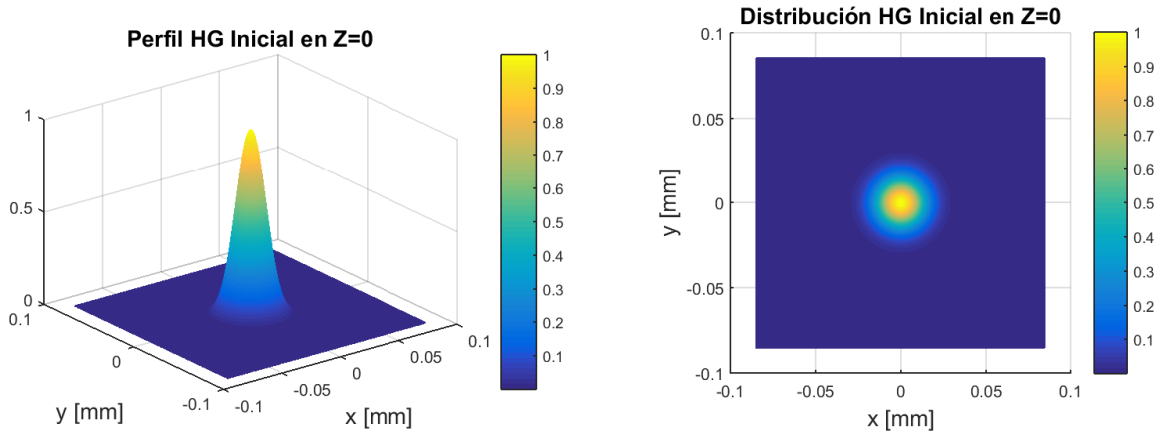


Figura 2.2: Gráficas del perfil y distribución de intensidad del haz Gaussiano en $z = 0$. Haz inicial para el método de propagación por difracción.

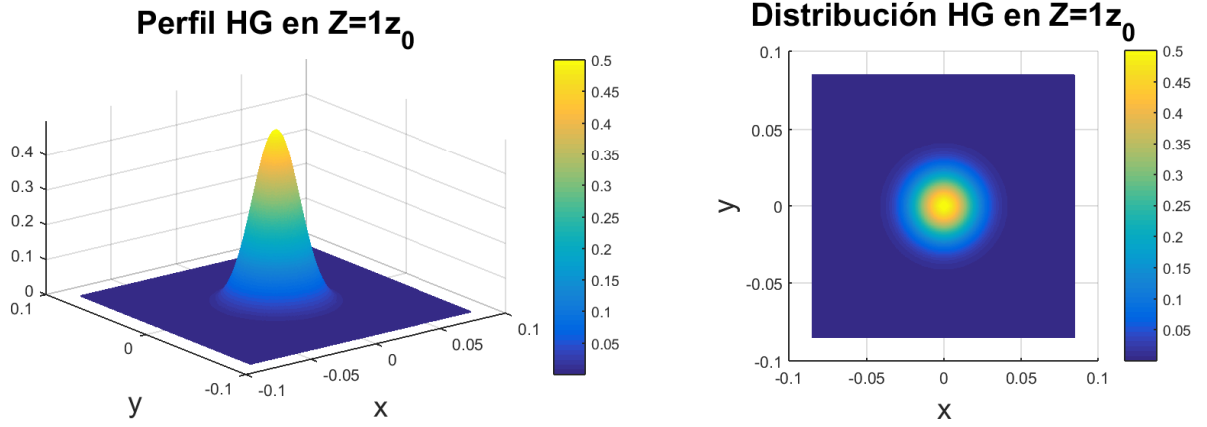


Figura 2.3: Gráficas del perfil y distribución de intensidad para el haz Gaussiano en $z = z_0$ usando la ecuación (2.7).

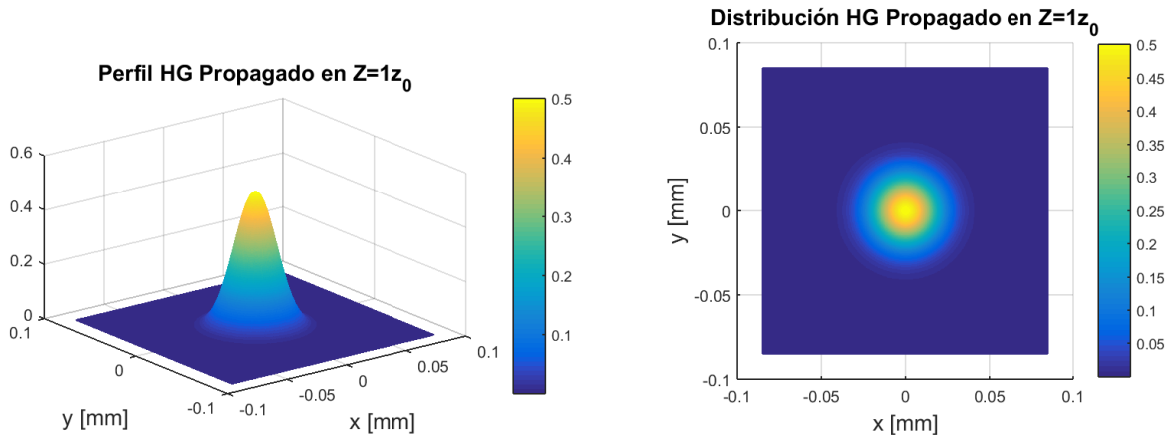


Figura 2.4: Gráficas del perfil y distribución de intensidad del haz Gaussiano mediante el método de propagación en $z = z_0$.

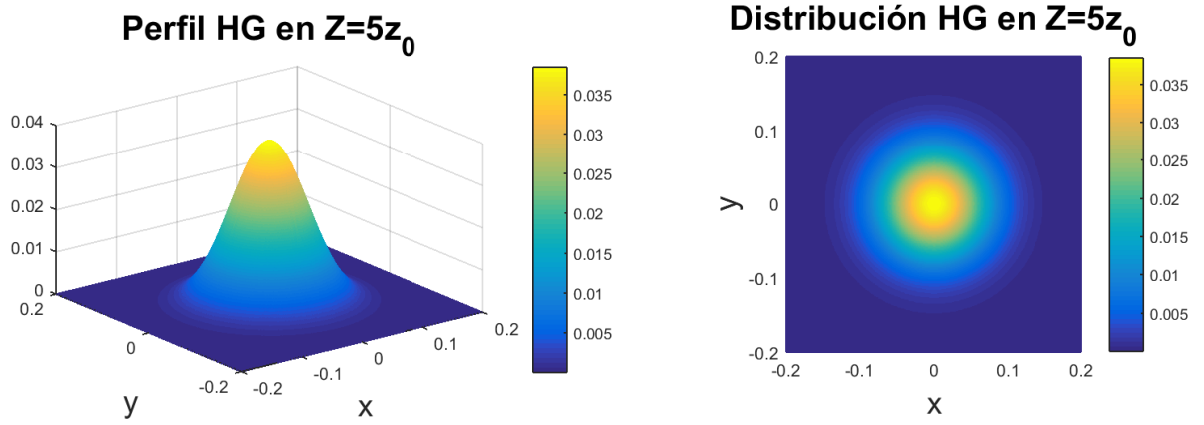


Figura 2.5: Gráfica del perfil y distribución de intensidad para el haz Gaussiano en $z = 5z_0$ usando la ecuación (2.7).

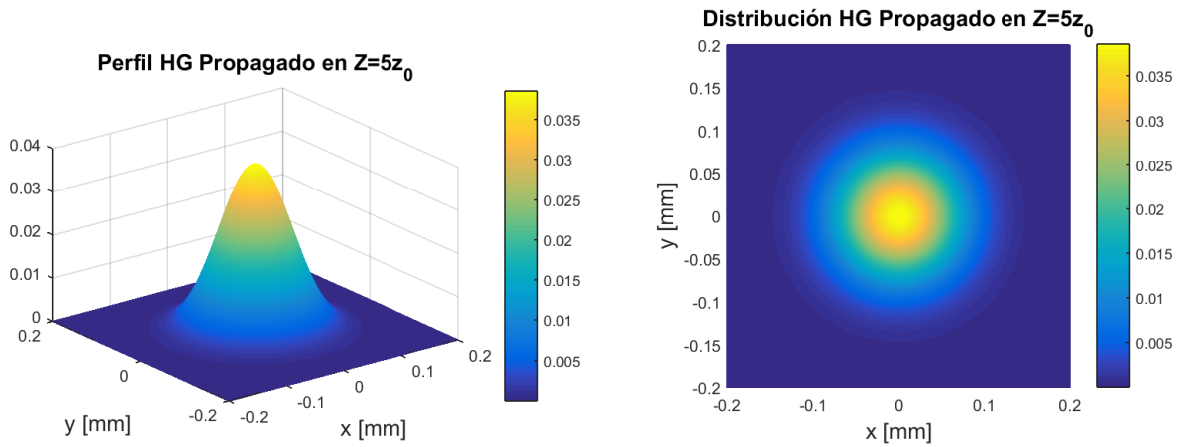


Figura 2.6: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Gaussiano mediante el método de propagación en $z = 5z_0$.

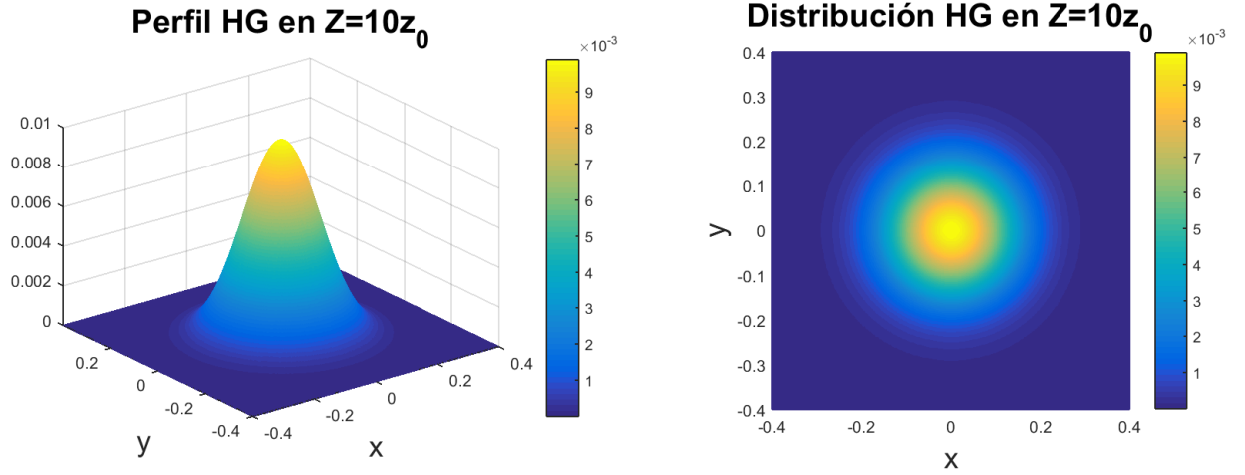


Figura 2.7: Gráficas del perfil y distribución de intensidad para el haz Gaussiano en $z = 10z_0$ usando la ecuación (2.7).

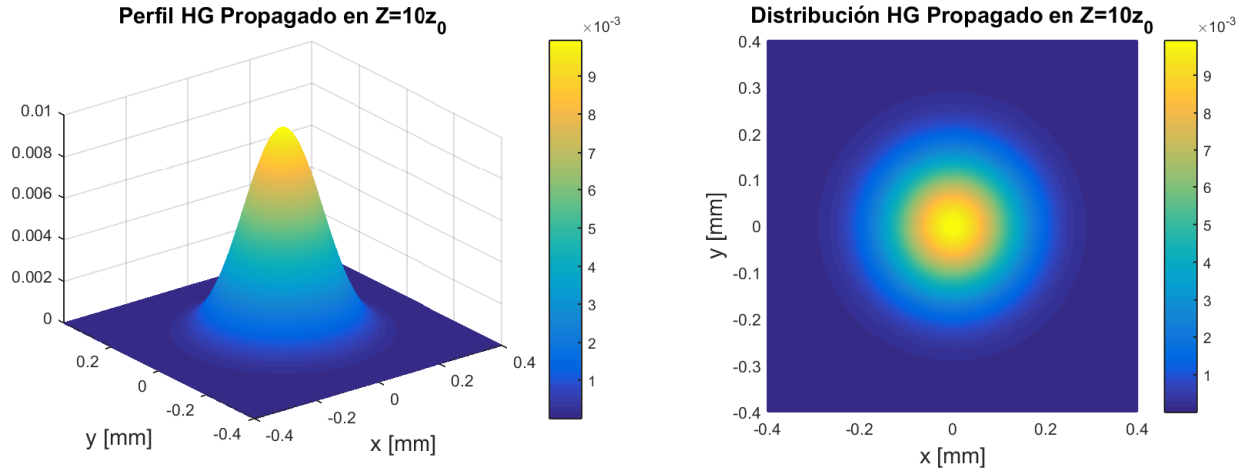


Figura 2.8: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Gaussiano mediante el método de propagación en $z = 10z_0$.

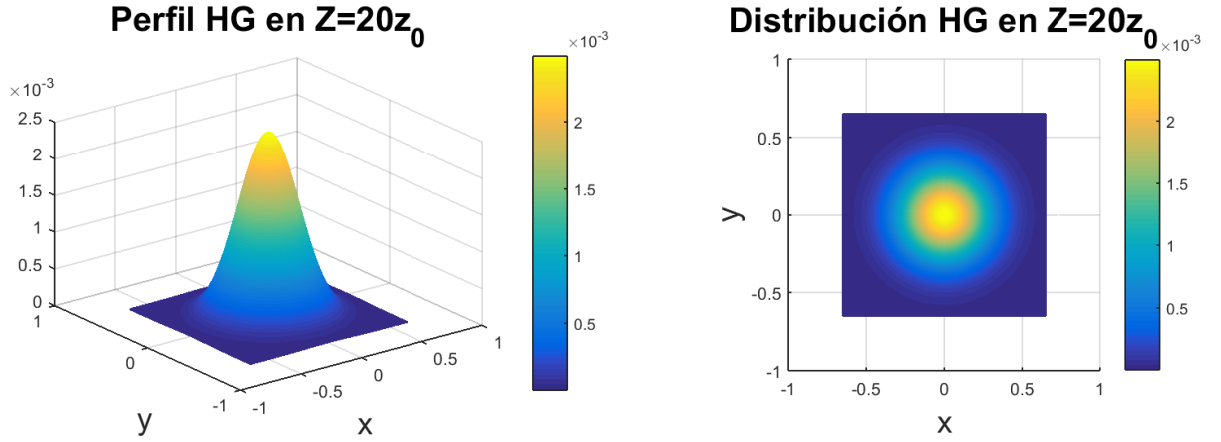


Figura 2.9: Gráficas del perfil y distribución de intensidad para el haz Gaussiano en $z = 20z_0$ usando la ecuación (2.7).

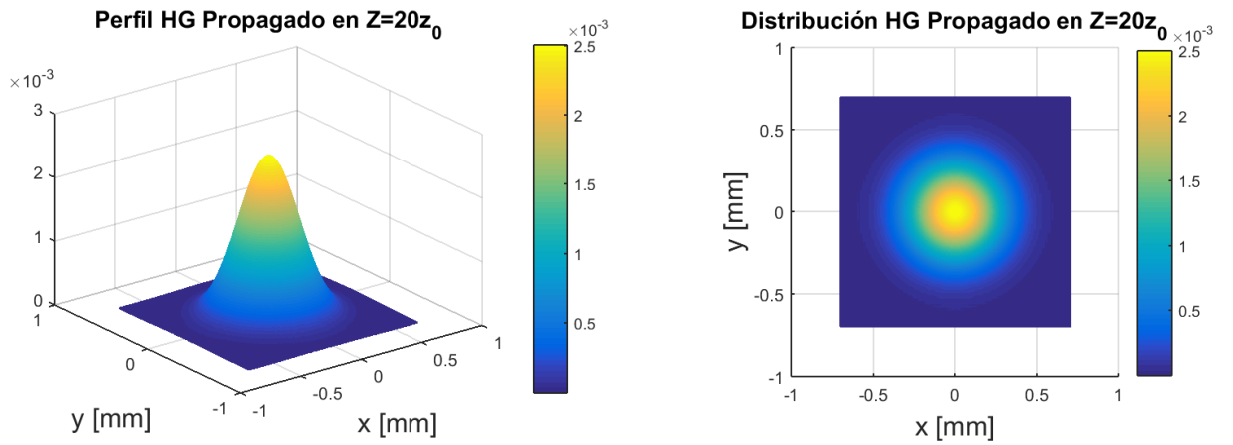


Figura 2.10: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Gaussiano mediante el método de propagación en $z = 20z_0$.

2.3. Análisis de Resultados

Las gráficas obtenidas por medio de la solución analítica son muy similares a las que podemos encontrar en la literatura, en las que se puede observar que para una distancia de propagación de $z = z_0$, la distancia de Rayleigh, la intensidad pico decrece a la mitad de su valor máximo, figura 2.3, como se puede encontrar en la literatura [12].

En los resultados obtenidos por medio del método de propagación del paso dividido de Fourier podemos observar que al propagarse su perfil y distribución transversal de intensidad sigue siendo Gaussiano al igual que en las gráficas generadas usando la solución analítica Ec. 2.7. La intensidad pico del haz disminuye a la mitad al ser propagado una distancia de Rayleigh, entonces, las gráficas de la figura 2.4 coinciden con las gráficas de la figura 2.3. De forma similar para las distancias de propagación en $z = 5z_0$, $z = 10z_0$ y $z = 20z_0$ las gráficas coinciden con las del resultado por solución analítica.

Capítulo 3

Funciones Hermite-Gauss

3.1. Introducción

En el capítulo anterior se introdujo a los haces Gaussianos como primera solución a la ecuación paraxial de Helmholtz. Ahora, en este capítulo se hablará de los haces Hermite-Gauss, una familia de funciones que son solución a la ecuación paraxial de Helmholtz en coordenadas cartesianas. En la sección (3.2) se presentan las funciones Hermite-Gauss, en las cuales los polinomios de Hermite están en función de un argumento puramente real, mientras que la parte Gaussiana tiene un argumento complejo.

Siegman introdujo una nueva forma para las funciones Hermite-Gauss que satisfacen la ecuación paraxial de Helmholtz pero que tienen una forma más simétrica [13], de modo que tanto los polinomios de Hermite como la parte Gaussiana presentan un argumento complejo similar y se conocen como funciones “Hermite-Gauss Elegantes”. Estas funciones son presentadas en la sección (3.3).

3.2. Haces Hermite-Gauss

Considere una onda de envolvente compleja:

$$A(x, y, z) = X \left[\frac{\sqrt{2}x}{W(z)} \right] Y \left[\frac{\sqrt{2}y}{W(z)} \right] \exp[Z(z)] A_G(x, y, z), \quad (3.1)$$

con

$$A_G(x, y, z) = \frac{A_1}{q(z)} \exp \left[-ik \frac{x^2 + y^2}{2q(z)} \right], \quad q(z) = z + iz_0 \quad (3.2)$$

y $X \left[\sqrt{2}x/W(z) \right]$, $Y \left[\sqrt{2}y/W(z) \right]$ y $Z(z)$ son funciones reales a determinar mediante el uso del método de separación de variables.

Sustituyendo la ecuación (3.1) en la ecuación paraxial de Helmholtz (1.26) y tomando en consideración que $A_G(x, y, z)$ satisface la ecuación paraxial de Helmholtz, se tiene que:

$$\frac{1}{X} \left[\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{2}{A_G} \frac{\partial A_G}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial x} - 2ik \frac{\partial X}{\partial z} \right] + \frac{1}{Y} \left[\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{2}{A_G} \frac{\partial A_G}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial y} - 2ik \frac{\partial Y}{\partial z} \right] + 2k \frac{\partial Z}{\partial z} = 0. \quad (3.3)$$

Haciendo uso de un cambio de variable: $u = \sqrt{2}x/W(z)$ y $v = \sqrt{2}y/W(z)$, la ecuación (3.3) queda de la siguiente manera:

$$\frac{1}{X} \left\{ \frac{d^2 X}{du^2} - 2u \frac{dX}{du} \right\} + \frac{1}{Y} \left\{ \frac{d^2 Y}{dv^2} - 2v \frac{dY}{dv} \right\} + kW^2(z) \frac{dZ}{dz} = 0. \quad (3.4)$$

En el lado izquierdo de la ecuación (3.4) hay tres términos, cada uno de los cuales es una función de una variable independiente, por lo que cada uno de éstos debe ser constante. Entonces se tiene que:

$$\frac{d^2 X}{du^2} - 2u \frac{dX}{du} + 2lX = 0, \quad (3.5)$$

$$\frac{d^2 Y}{dv^2} - 2v \frac{dY}{dv} + 2mY = 0 \quad (3.6)$$

y

$$kW^2(z) \frac{dZ}{dz} = 2(l+m). \quad (3.7)$$

Con $l, m = 0, 1, 2, 3, \dots$ Comparando las ecuaciones (3.5) y (3.6) con la ecuación diferencial de Hermite ($d^2 H_n(x)/dx^2 - 2xdH_n(x)/dx + 2nH_n(x) = 0$), entonces: $X(u) = H_l(u)$ y $Y(v) = H_m(v)$, donde $H_l(u)$ y $H_m(v)$ son los polinomios de Hermite [25].

Puesto que $W(z) = (\lambda z_0/\pi)^{1/2} [1 + (z/z_0)^2]^{1/2}$ y $k = 2\pi/\lambda$, la ecuación (3.7) queda de la forma:

$$z_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right] \frac{dZ}{dz} = (l+m). \quad (3.8)$$

Resolviendo esta ecuación se llega a:

$$Z(z) = (l+m) \arctg \left(\frac{z}{z_0} \right) = (l+m)\zeta(z). \quad (3.9)$$

Por lo tanto la envolvente compleja (3.1) es ahora:

$$A_{l,m}(x, y, z) = H_l \left(\frac{\sqrt{2}x}{W(z)} \right) H_m \left(\frac{\sqrt{2}y}{W(z)} \right) \exp[i(l+m)\zeta(z)] A_G(x, y, z). \quad (3.10)$$

Y la amplitud compleja de un haz Hermite-Gaussiano es:

$$U_{l,m}(x, y, z) = A_{l,m} \left[\frac{W_0}{W(z)} \right] H_l \left(\frac{\sqrt{2}x}{W(z)} \right) H_m \left(\frac{\sqrt{2}y}{W(z)} \right) \times \exp \left[-\frac{(x^2 + y^2)}{W^2(z)} \right] \exp \left[-ikz - ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + i(l + m + 1)\zeta(z) \right]. \quad (3.11)$$

Donde $H_{l,m}$ son los polinomios de Hermite y $A_{l,m}$ es una constante. Una onda óptica con amplitud compleja dada por (3.11) se conoce como haz Hermite-Gaussiano de orden (l, m) . El haz Hermite-Gaussiano de orden $(0, 0)$ es simplemente el haz Gaussiano. Los haces Hermite-Gauss tienen fase similar a la de un haz Gaussiano excepto por un exceso de fase dado por $(l + m + 1)$ que no depende de las coordenadas x y y .

3.2.1. Distribución de Intensidad

La intensidad óptica $I(x, y, z) = |U_{l,m}(x, y, z)|^2$ para los haces Hermite-Gauss con argumento real es:

$$I(x, y, z) = I_0 \left[\frac{W_0}{W(z)} \right]^2 \left[H_l \left(\frac{\sqrt{2}x}{W(z)} \right) \right]^2 \left[H_m \left(\frac{\sqrt{2}y}{W(z)} \right) \right]^2 \exp \left[-\frac{2(x^2 + y^2)}{W^2(z)} \right]. \quad (3.12)$$

Donde $I_0 = |A_{l,m}|^2$. A continuación se muestran el perfil y la distribución de intensidad para algunos modos de los haces Hermite-Gauss (HHG) graficados a partir de la ecuación anterior junto con los resultados del método de propagación para estos haces usando el programa descrito en la sección 1.3.1 pero ahora con la función de entrada 3.11 en $z = 0$ propagada a diferentes distancias en términos de la distancia de Rayleigh.

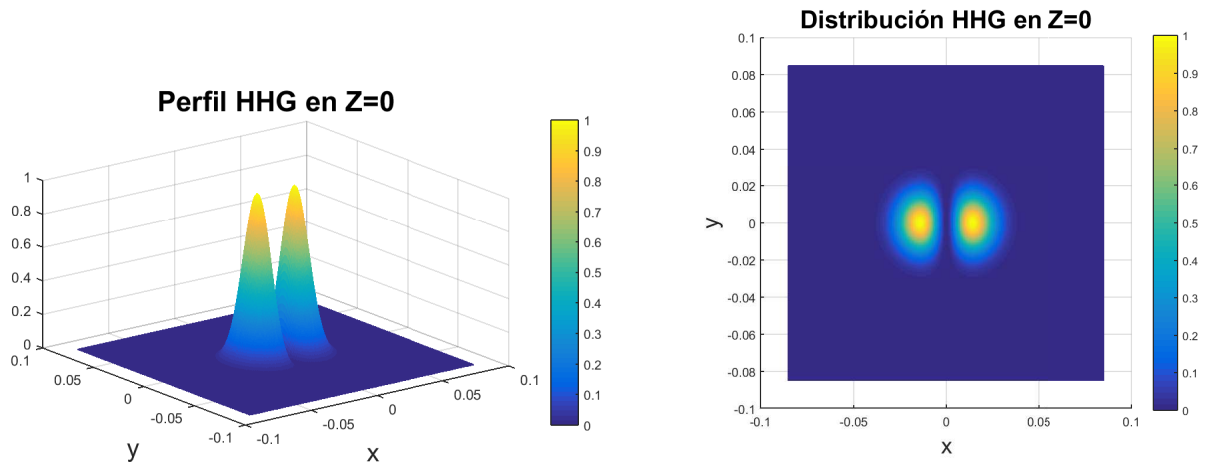


Figura 3.1: Gráficas del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano de orden $(1, 0)$ para $z = 0$ usando la ecuación (3.12).

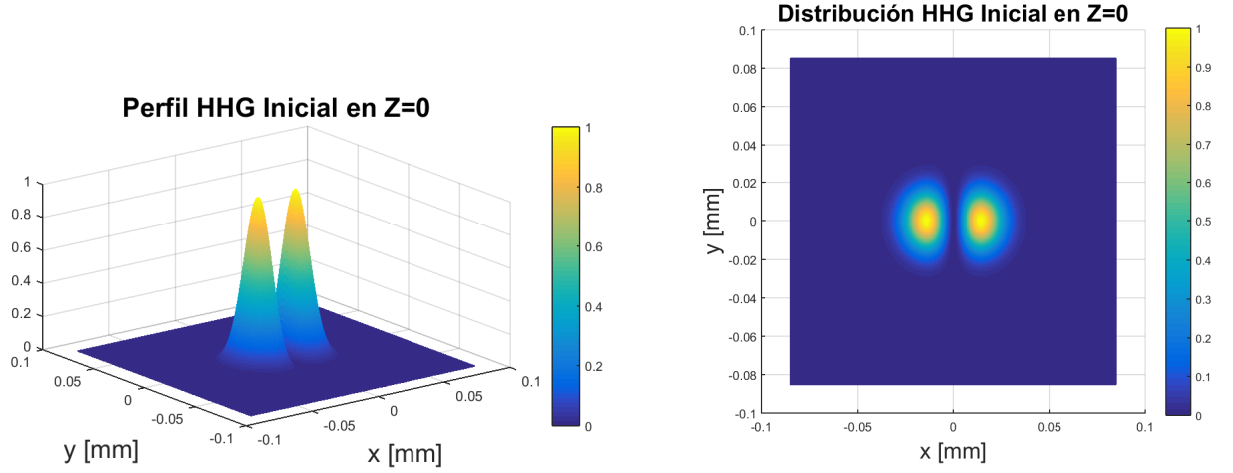


Figura 3.2: Gráficas del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano de orden (1,0) para $z = 0$ (haz de entrada), usando el método de propagación.

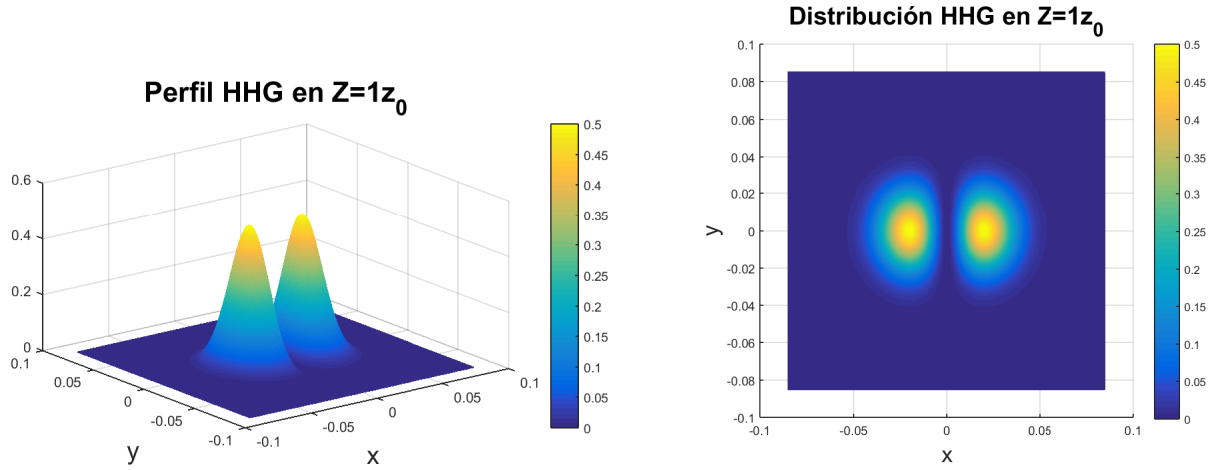


Figura 3.3: Gráficas del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano de orden (1,0) para $z = z_0$ usando la ecuación (3.12).

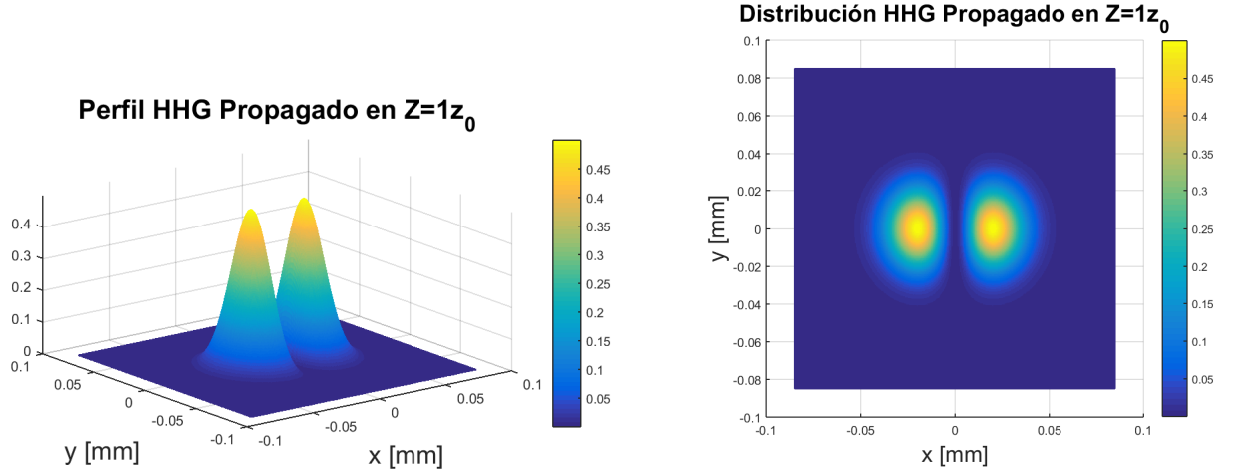


Figura 3.4: Gráficas del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano de orden (1,0) para $z = z_0$, usando el método de propagación.

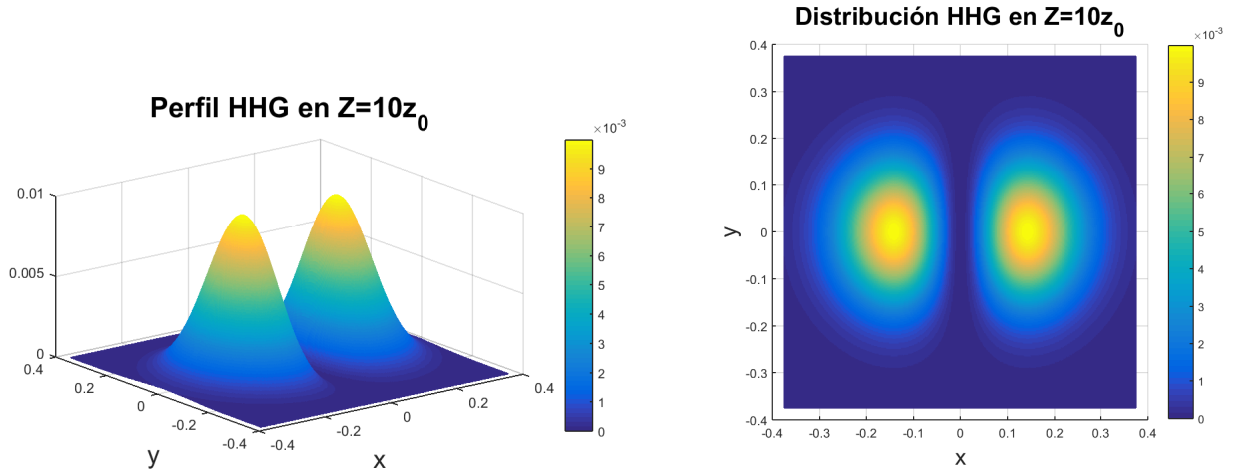


Figura 3.5: Gráficas del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano de orden (1,0) para $z = 10z_0$ usando la ecuación (3.12).

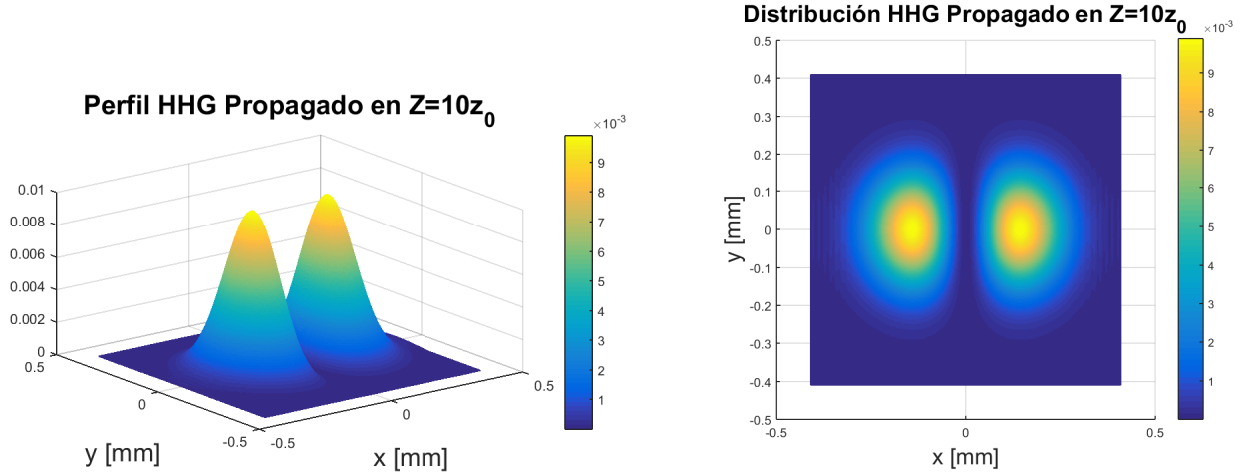


Figura 3.6: Gráficas del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano de orden (1,0) para $z = 10z_0$, usando el método de propagación.

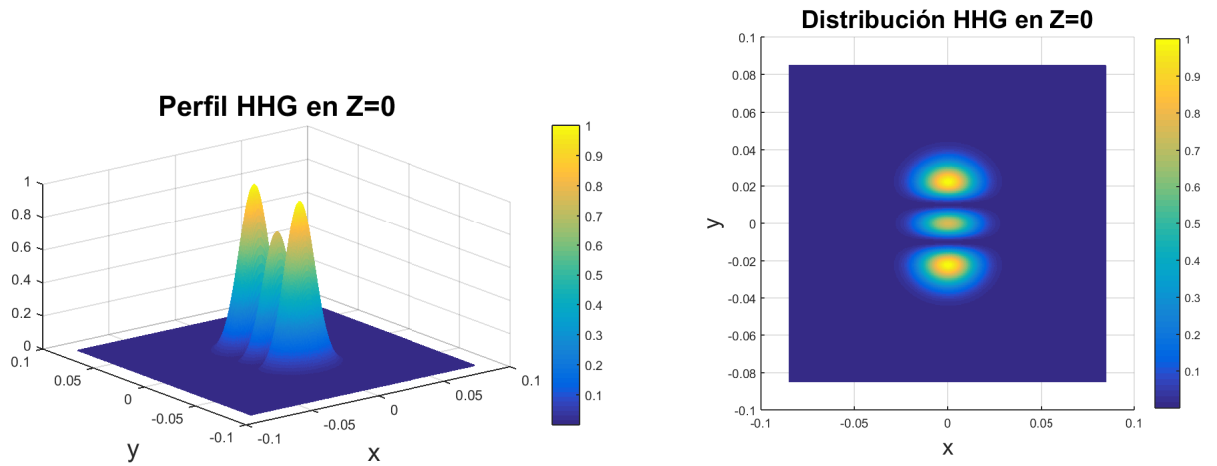


Figura 3.7: Gráficas del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano de orden (0,2) para $z = 0$ usando la ecuación (3.12).

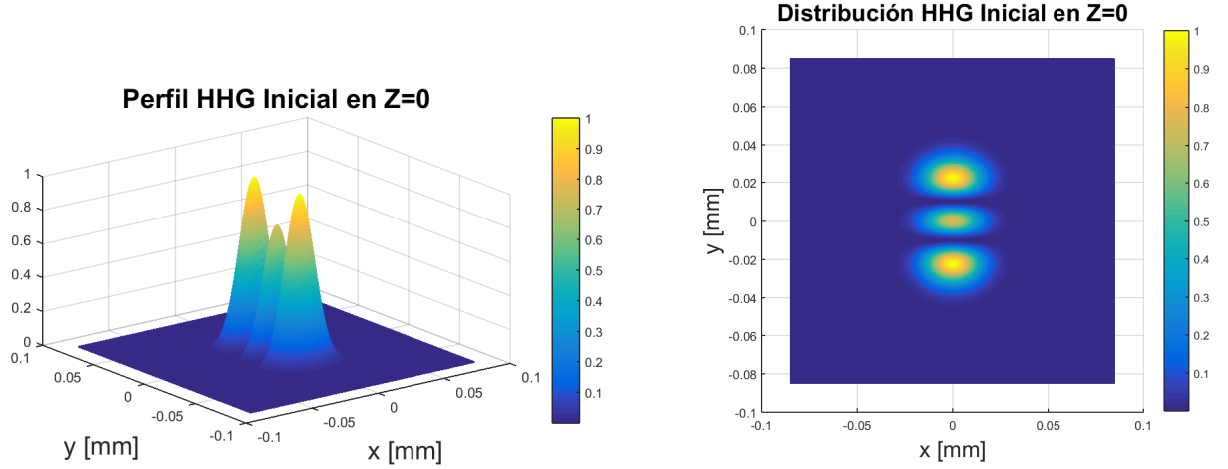


Figura 3.8: Gráficas del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano de orden (0,2) para $z = 0$ (haz de entrada), usando el método de propagación.

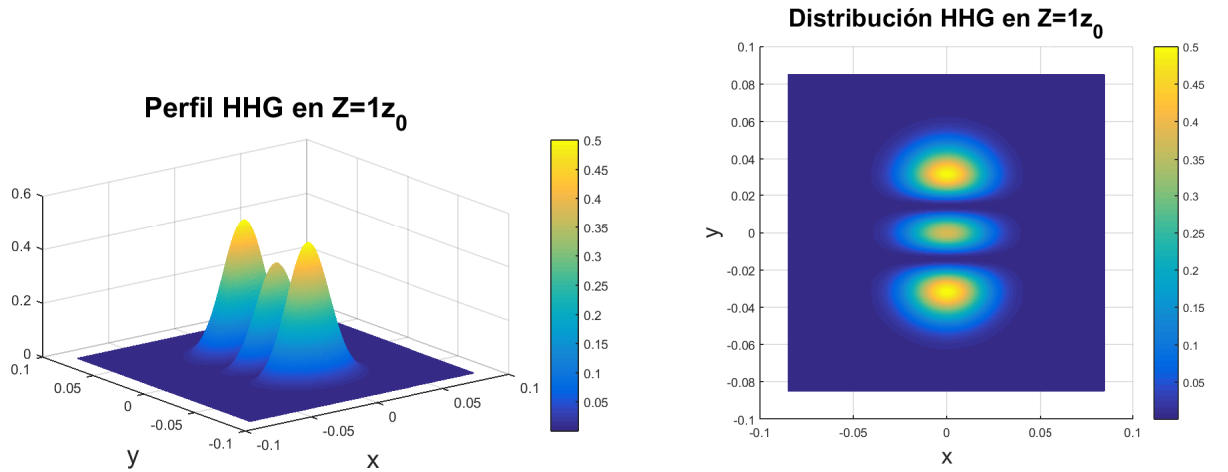


Figura 3.9: Gráficas del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano de orden (0,2) para $z = z_0$ usando la ecuación (3.12).

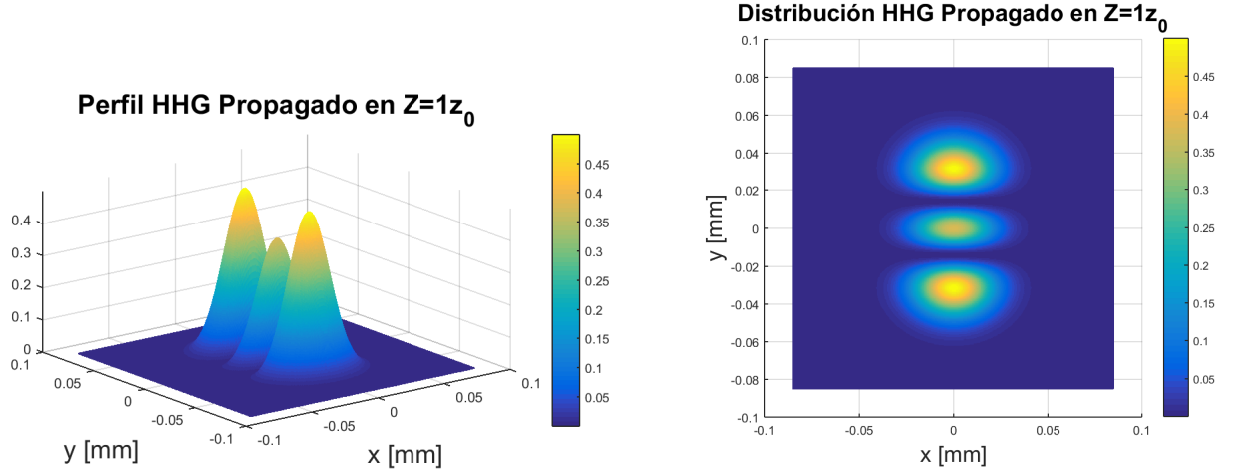


Figura 3.10: Gráficas del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano de orden $(0, 2)$ para $z = z_0$, usando el método de propagación.

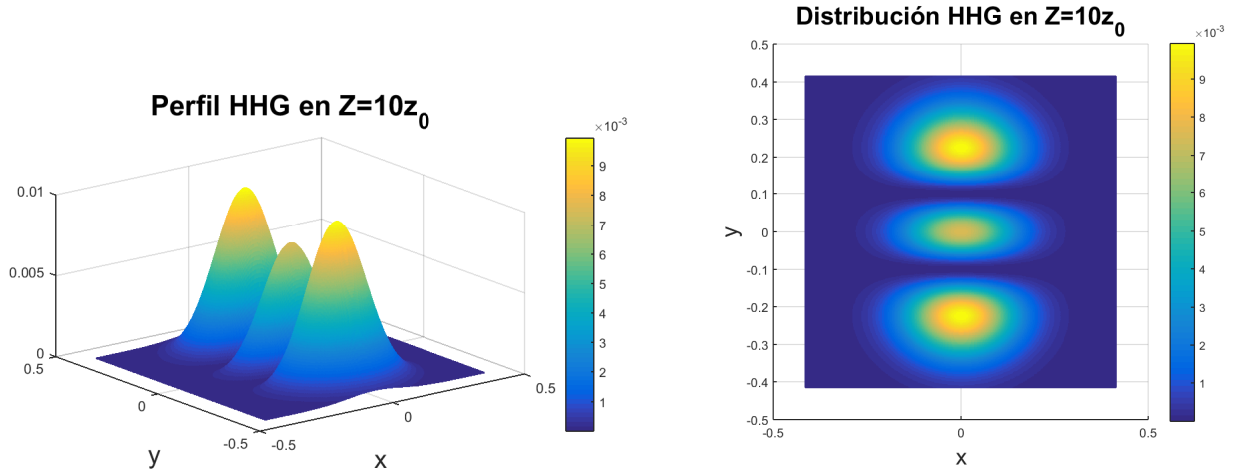


Figura 3.11: Gráficas del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano de orden $(0, 2)$ para $z = 10z_0$ usando la ecuación (3.12).

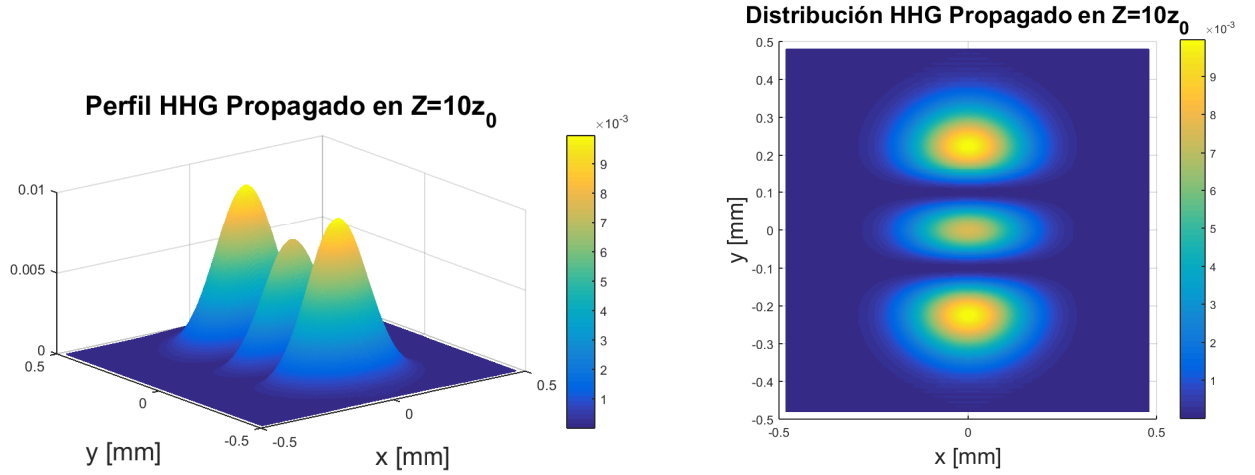


Figura 3.12: Gráficas del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano de orden $(0, 2)$ para $z = 10z_0$, usando el método de propagación.

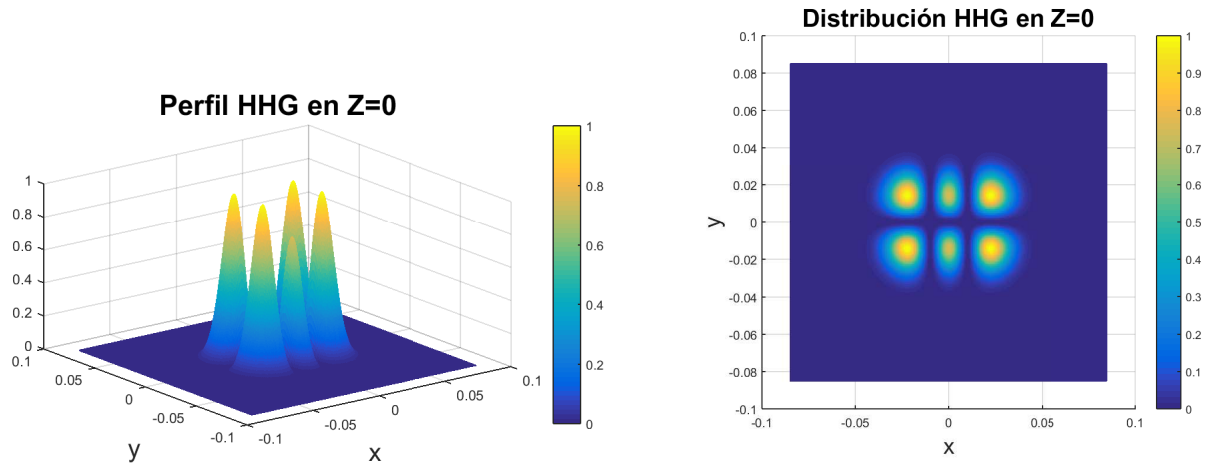


Figura 3.13: Gráfica del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano de orden $(2, 1)$ para $z = 0$ usando la ecuación (3.12).

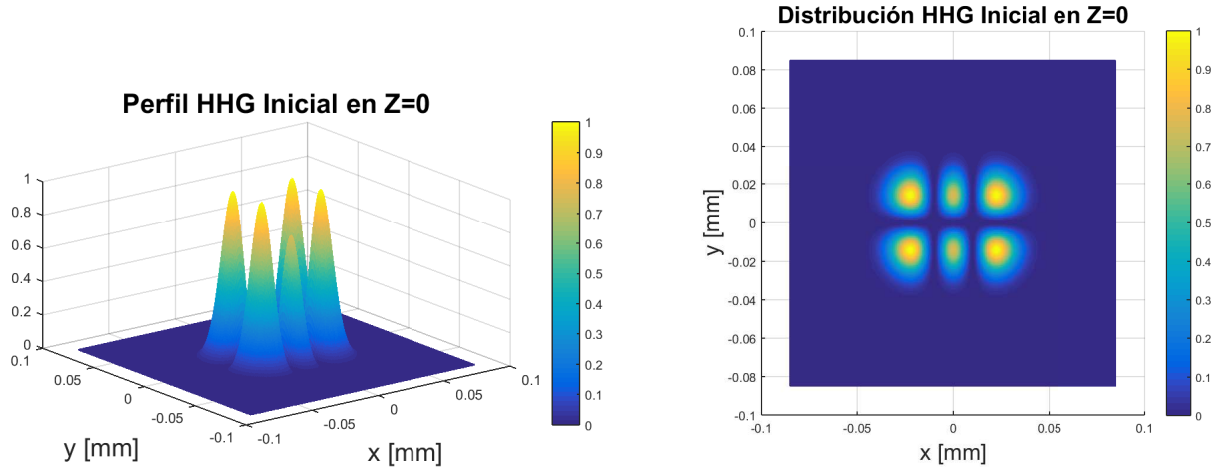


Figura 3.14: Gráfica del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano de orden (2,1) para $z = 0$ (haz de entrada), usando el método de propagación.

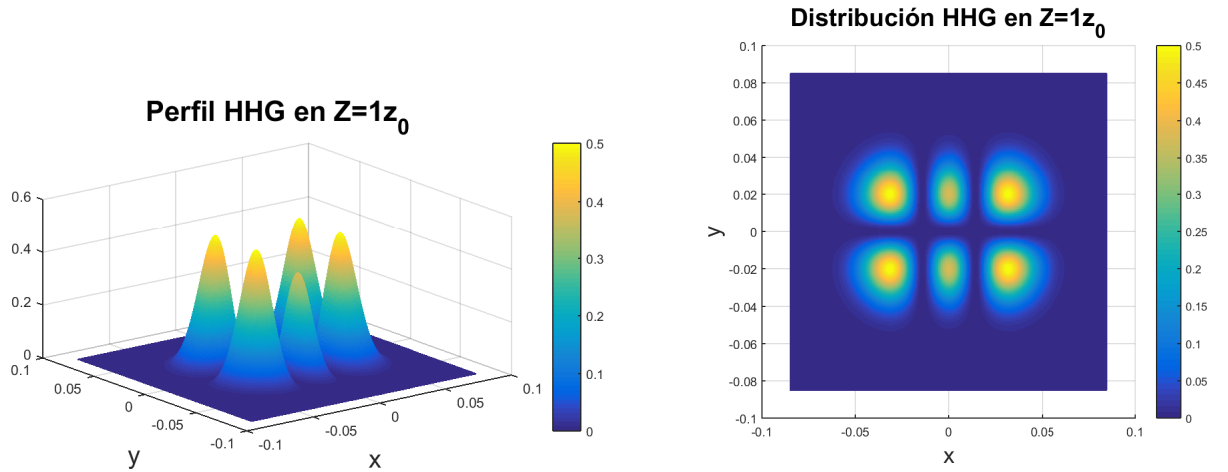


Figura 3.15: Gráfica del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano de orden (2,1) para $z = z_0$ usando la ecuación (3.12).

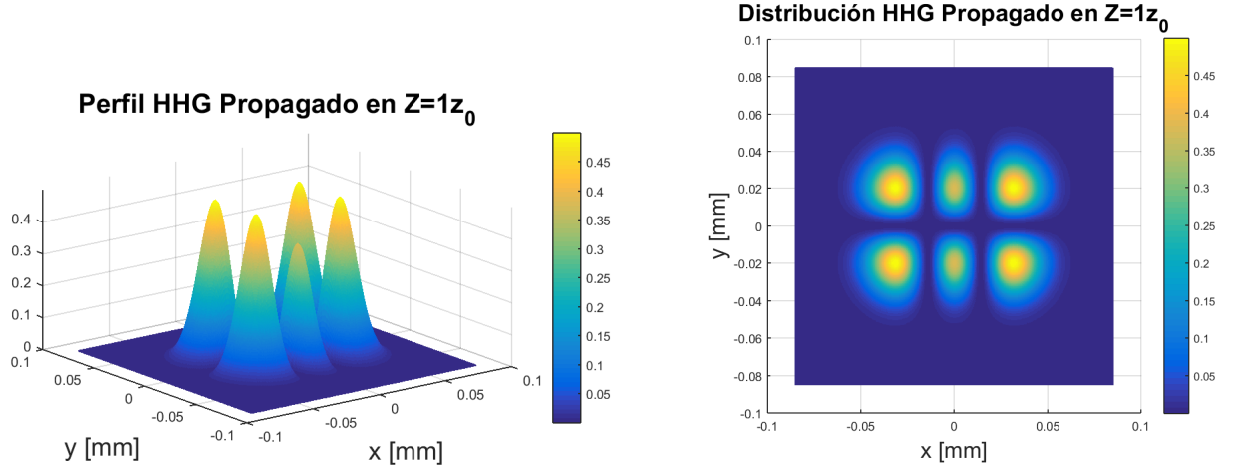


Figura 3.16: Gráficas del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano de orden (2,1) para $z = z_0$, usando el método de propagación.

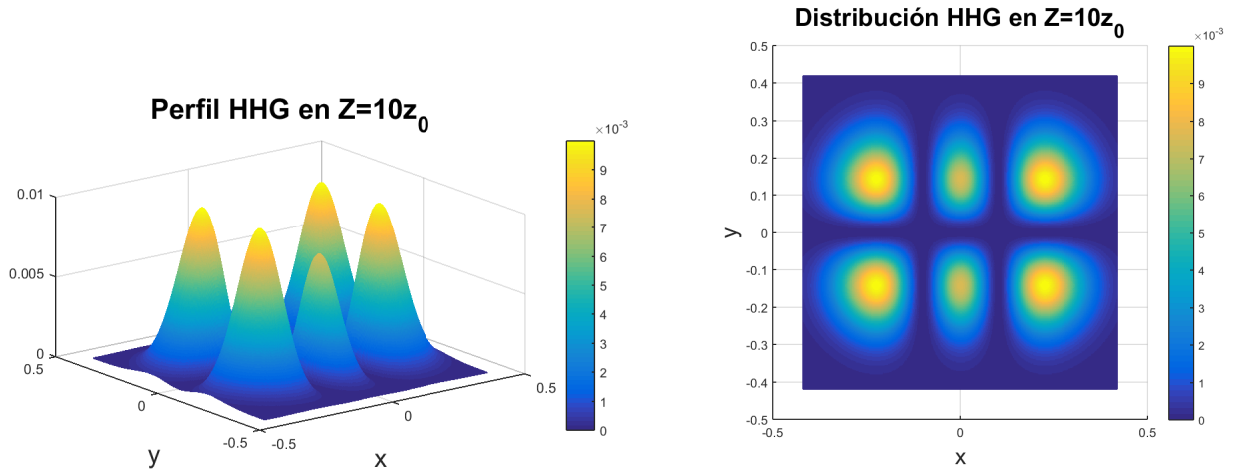


Figura 3.17: Gráficas del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano de orden (2,1) para $z = 10z_0$ usando la ecuación (3.12).

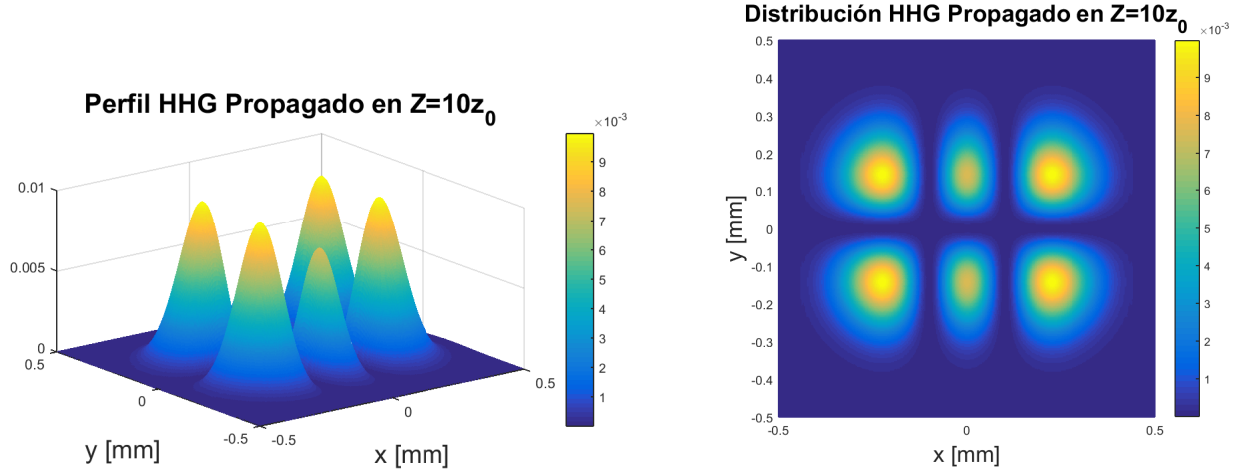


Figura 3.18: Gráfica del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano de orden (2,1) para $z = 10z_0$, usando el método de propagación.

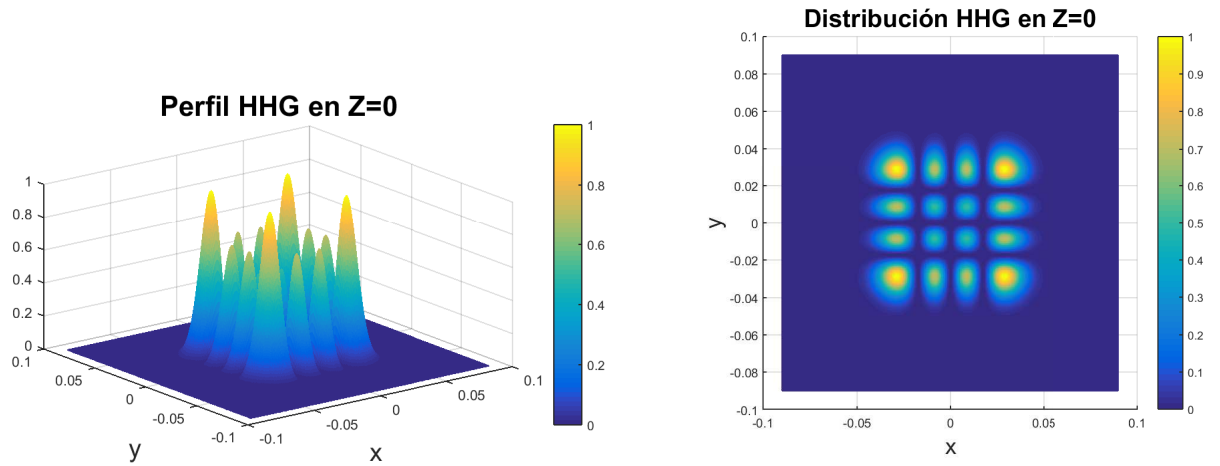


Figura 3.19: Gráficas del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano de orden (3,3) para $z = 0$ usando la ecuación (3.12).

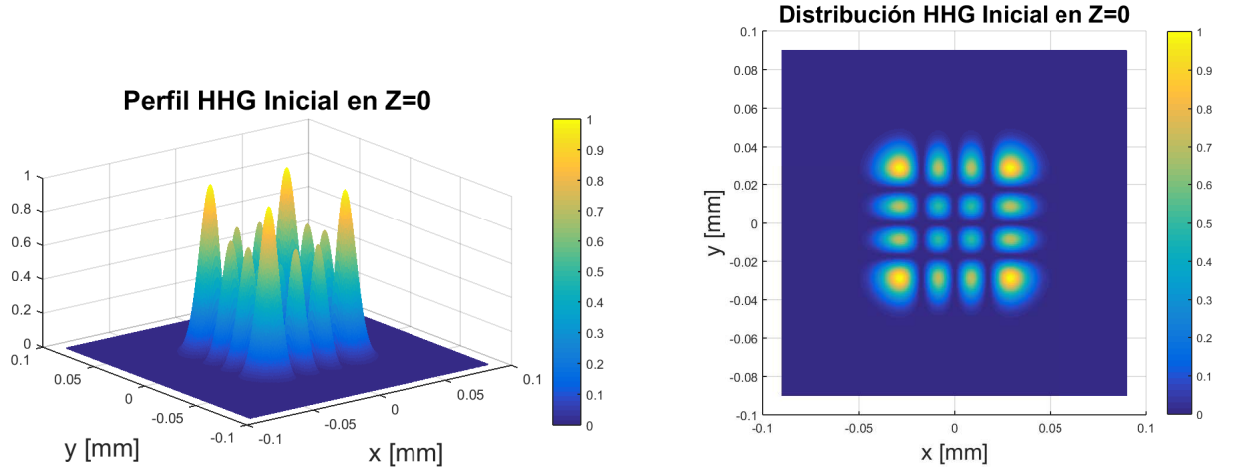


Figura 3.20: Gráfica del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano de orden (3,3) para $z = 0$ (haz de entrada), usando el método de propagación.

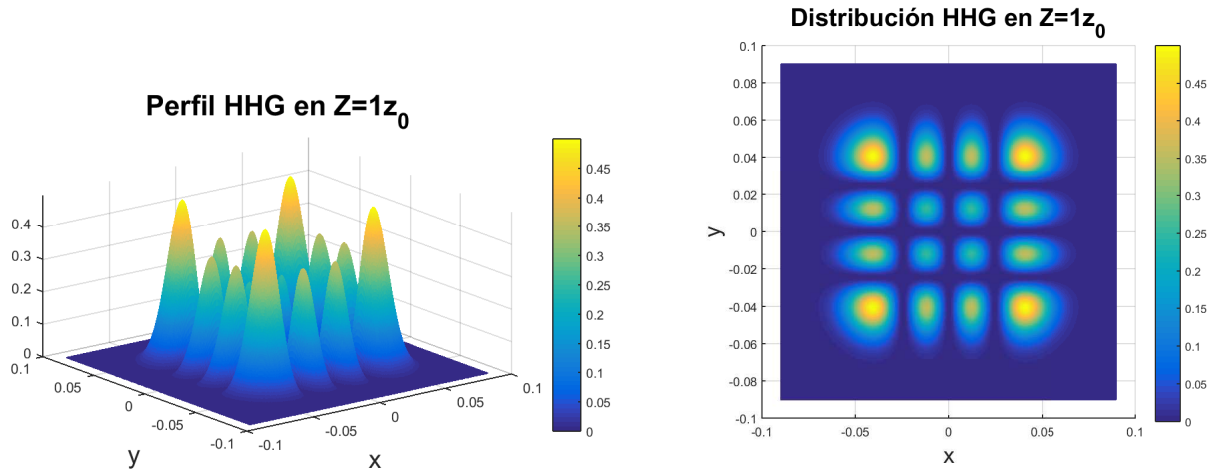


Figura 3.21: Gráficas del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano de orden (3,3) para $z = z_0$ usando la ecuación (3.12).

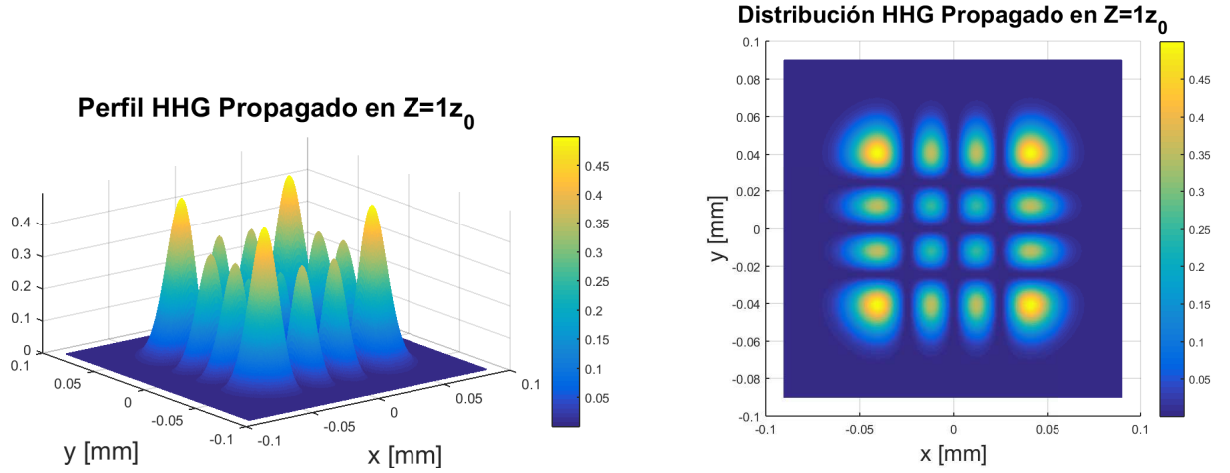


Figura 3.22: Gráficas del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano de orden (3,3) para una distancia de propagación $z = z_0$.

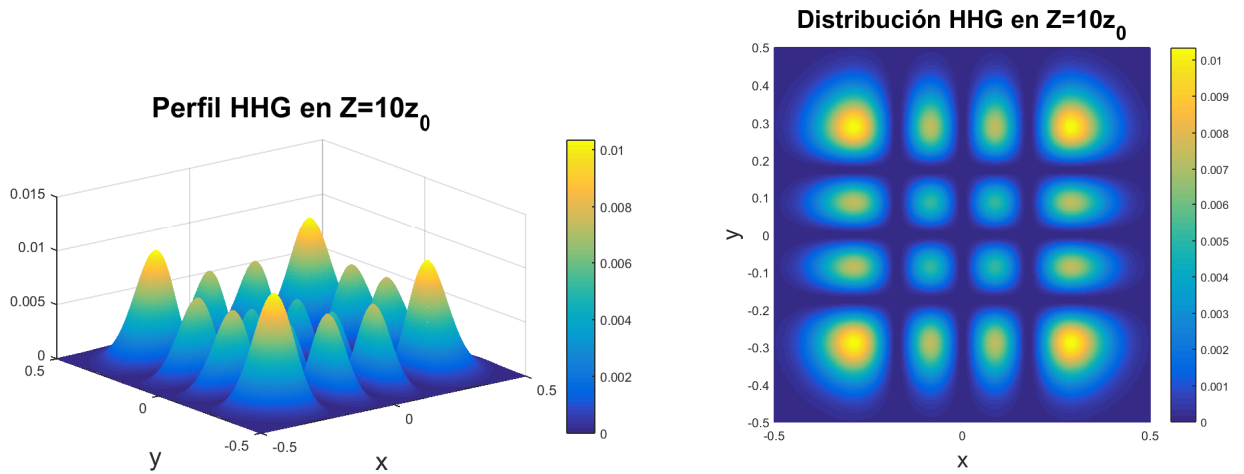


Figura 3.23: Gráficas del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano de orden (3,3) para $z = 10z_0$ usando la ecuación (3.12).

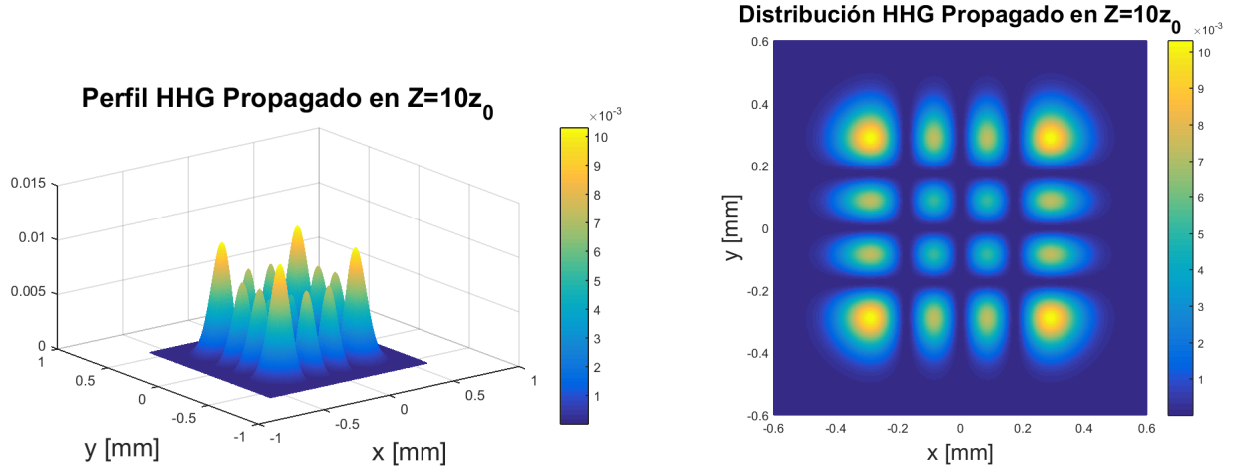


Figura 3.24: Gráficas del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano de orden (3,3) para una distancia de propagación $z = 10z_0$.

3.3. Haces Hermite-Gauss Elegantes

Sea una onda de amplitud compleja dada por:

$$U(x, y, z) = \Psi(x, y, z) \exp(-ikz), \quad (3.13)$$

con envolvente compleja [13]

$$\Psi(x, y, z) = A(q)X(\sqrt{cx})Y(\sqrt{cy}) \times \exp[-c(x^2 + y^2)], \quad (3.14)$$

donde

$$c \equiv \frac{ik}{2q(z)}. \quad (3.15)$$

Sustituyendo (3.14) en (1.26), se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \left\{ \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - 4cx \frac{\partial X}{\partial x} - 2ik \frac{\partial X}{\partial z} \right\} + \frac{1}{Y} \left\{ \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - 4cy \frac{\partial Y}{\partial y} - 2ik \frac{\partial Y}{\partial z} \right\} - \\ \frac{2ik}{A} \frac{\partial A}{\partial z} + \left\{ -4c + 4c^2(x^2 + y^2) + 2ik(x^2 + y^2) \frac{dc}{dz} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Considerando los cambios de variable $u = \sqrt{cx}$ y $v = \sqrt{cy}$, entonces:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \sqrt{c} \frac{dX}{du}, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = c \frac{d^2 X}{du^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial X}{\partial z} = -\frac{\sqrt{cx}}{2q} \frac{dX}{du}, \quad (3.17)$$

similarmente

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \sqrt{c} \frac{dY}{dv}, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = c \frac{d^2 Y}{dv^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = -\frac{\sqrt{cy}}{2q} \frac{dY}{dv}. \quad (3.18)$$

$$\text{Como} \quad \frac{dq(z)}{dz} = 1 \quad \text{entonces} \quad \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{dA}{dq}. \quad (3.19)$$

Reemplazando (3.17), (3.18) y (3.19) en la expresión (3.16) se obtiene:

$$\frac{1}{X} \left\{ c \frac{d^2 X}{du^2} - 2c^{3/2} x \frac{dX}{du} \right\} + \frac{1}{Y} \left\{ c \frac{d^2 Y}{dv^2} - 2c^{3/2} y \frac{dY}{dv} \right\} - \frac{2ik}{A} \frac{dA}{dq} - 4c = 0. \quad (3.20)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{X} \left\{ \frac{d^2 X}{du^2} - 2u \frac{dX}{du} \right\} + \frac{1}{Y} \left\{ \frac{d^2 Y}{dv^2} - 2v \frac{dY}{dv} \right\} - \left(\frac{4q}{A} \frac{dA}{dq} + 4 \right) = 0. \quad (3.21)$$

Aplicando el método de separación de variables a ésta última, se llega a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{4q}{A} \frac{dA}{dq} + 4 = -p, \quad (3.22)$$

$$\frac{d^2 Y}{dv^2} - 2v \frac{dY}{dv} - sY = 0, \quad (3.23)$$

$$\frac{d^2 X}{du^2} - 2u \frac{dX}{du} + (p + s)X = 0. \quad (3.24)$$

Haciendo $-s = 2m$ y $(p + s) = 2l$ con $l, m = 0, 1, 2, \dots$ Las ecuaciones (3.23) y (3.24) toman la forma siguiente:

$$\frac{d^2 Y}{dv^2} - 2v \frac{dY}{dv} + 2mY = 0. \quad (3.25)$$

$$\frac{d^2 X}{du^2} - 2u \frac{dX}{du} + 2lX = 0. \quad (3.26)$$

Estas ecuaciones tienen una forma similar a la ecuación diferencial de Hermite, de modo que $X(u) = H_l(u)$ y $Y(v) = H_m(v)$, con $H_{l,m}$ los polinomios de Hermite pero ahora con argumento complejo dado por $u = \left(\frac{ik}{2q(z)}\right)^{1/2} x$ y $v = \left(\frac{ik}{2q(z)}\right)^{1/2} y$.

Resolviendo la ecuación (3.22) queda de la forma:

$$A(q) = \left(\frac{q_0}{q(z)}\right)^{(l+m+2)\frac{1}{2}}. \quad (3.27)$$

Por lo tanto la envolvente compleja de los haces Hermite-Gauss Elegantes se obtiene de sustituir $A(q)$, $X(u)$ y $Y(v)$ en la ecuación (3.14):

$$\Psi_{l,m}(x, y, z) = \left(\frac{q_0}{q(z)}\right)^{(l+m+2)\frac{1}{2}} H_l(\sqrt{c}x) H_m(\sqrt{c}y) \times \exp[-c(x^2 + y^2)]. \quad (3.28)$$

3.3.1. Distribución de Intensidad

A continuación se muestran los perfiles y distribuciones de intensidad de algunos modos de los haces Hermite-Gauss Elegantes (HHGE) usando la ecuación 3.29 y el método de propagación del paso dividido de Fourier con la función 3.28 evaluada en $z = 0$ como haz de entrada.

La intensidad óptica para estos haces está dada por:

$$I(x, y, z) = |\Psi_{l,m}(x, y, z)|^2$$

$$\left| \left(\frac{q_0}{q(z)} \right)^{(l+m+2)\frac{1}{2}} H_l(\sqrt{c}x) H_m(\sqrt{c}y) \times \exp[-c(x^2 + y^2)] \right|^2. \quad (3.29)$$

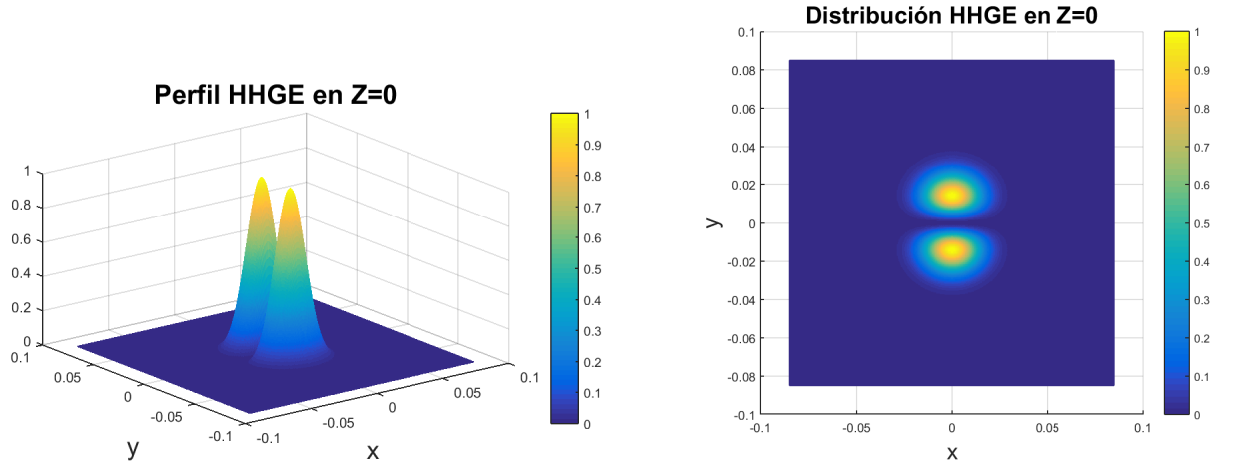


Figura 3.25: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Hermite-Gauss Elegante de orden (0,1) para $z = 0$ usando la ecuación (3.29).

CAPÍTULO 3. FUNCIONES HERMITE-GAUSS

3.3. HACES HERMITE-GAUSS ELEGANTES

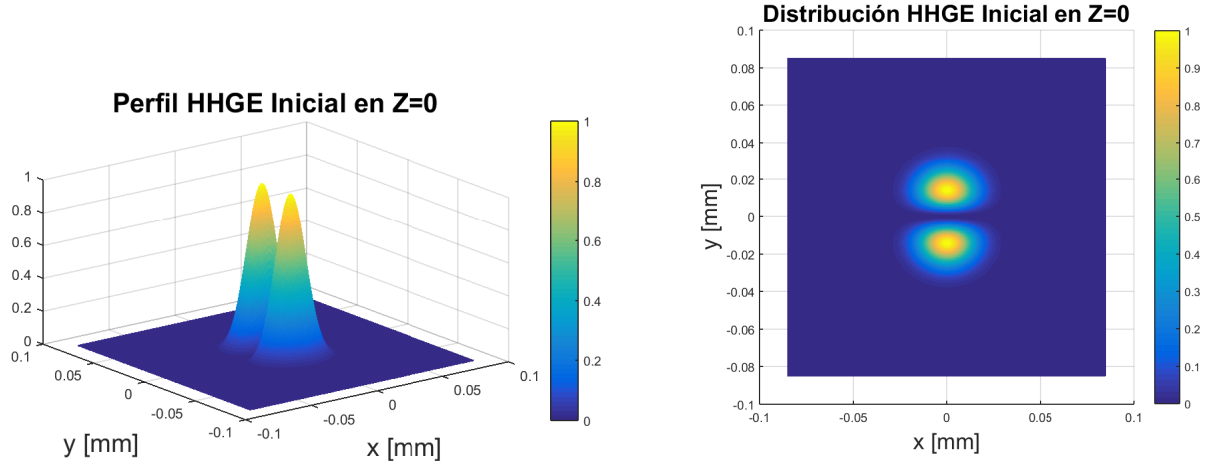


Figura 3.26: Gráficas del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano Elegante de orden $(0, 1)$ en $z = 0$. Haz de entrada para el método de propagación.

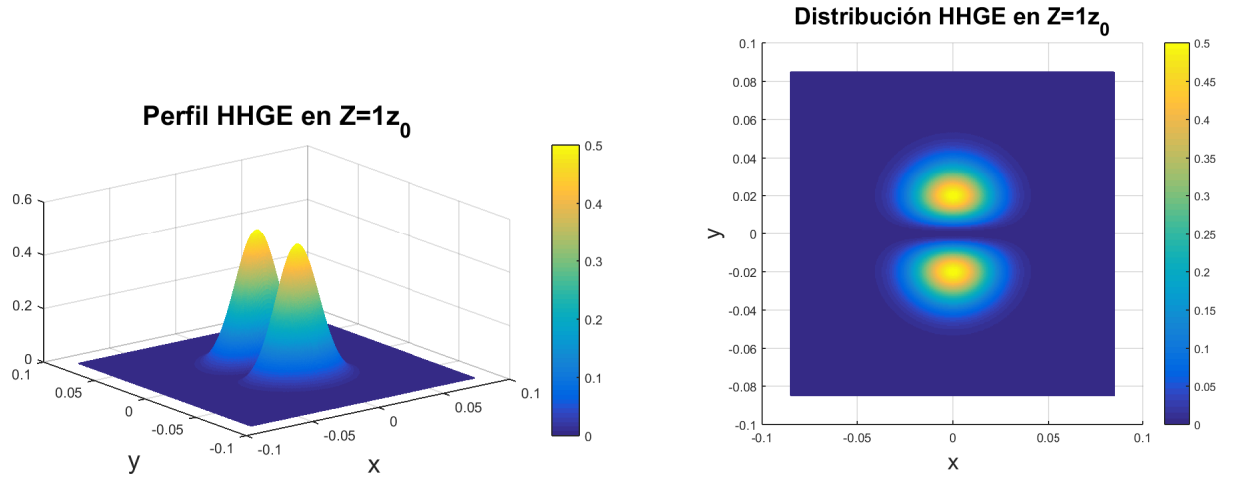


Figura 3.27: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Hermite-Gauss Elegante de orden $(0, 1)$ para $z = z_0$ usando la ecuación (3.29).

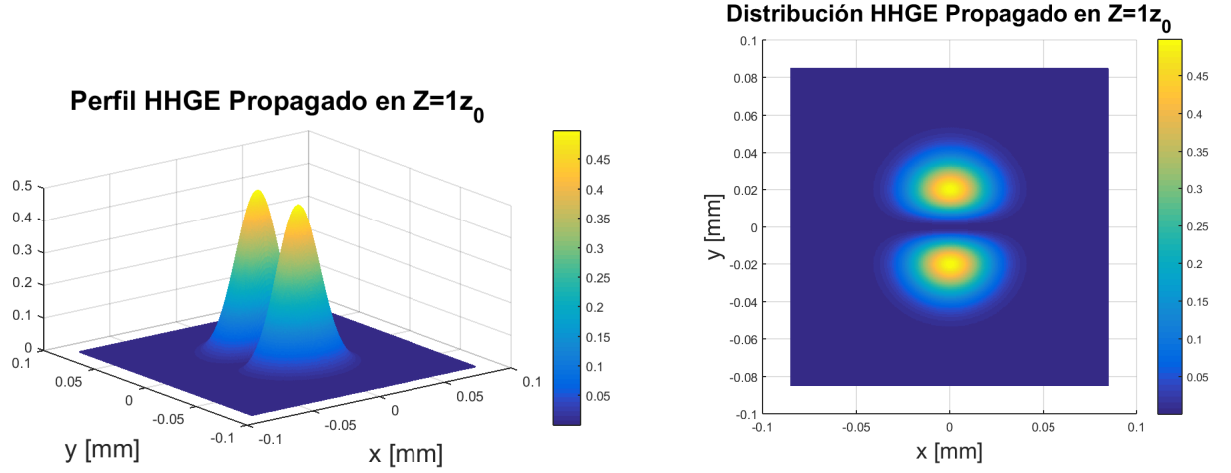


Figura 3.28: Gráfica del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano Elegante de orden $(0, 1)$ para una distancia de propagación $z = z_0$.

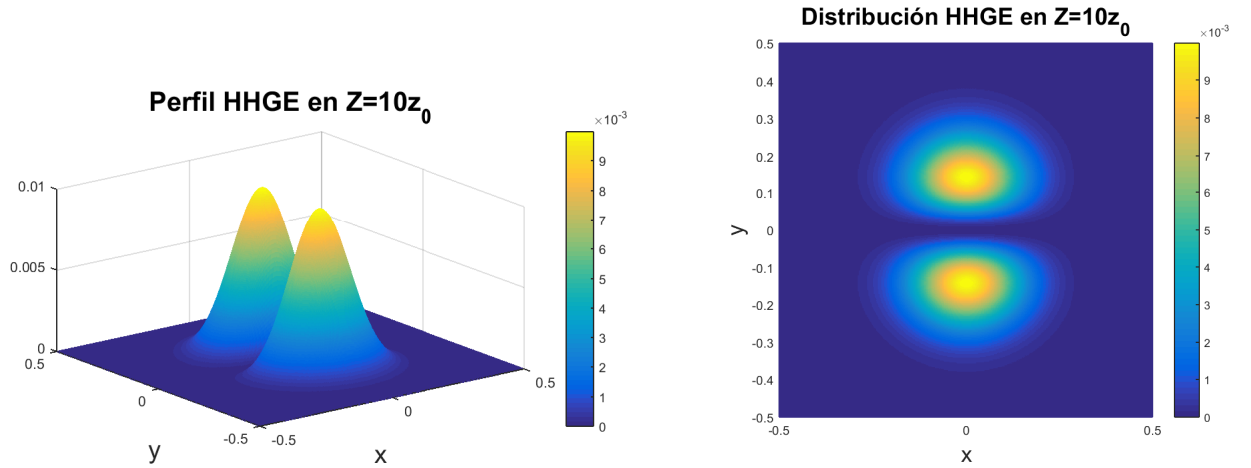


Figura 3.29: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Hermite-Gauss Elegante de orden $(0, 1)$ para $z = 10z_0$ usando la ecuación (3.29).

CAPÍTULO 3. FUNCIONES HERMITE-GAUSS

3.3. HACES HERMITE-GAUSS ELEGANTES

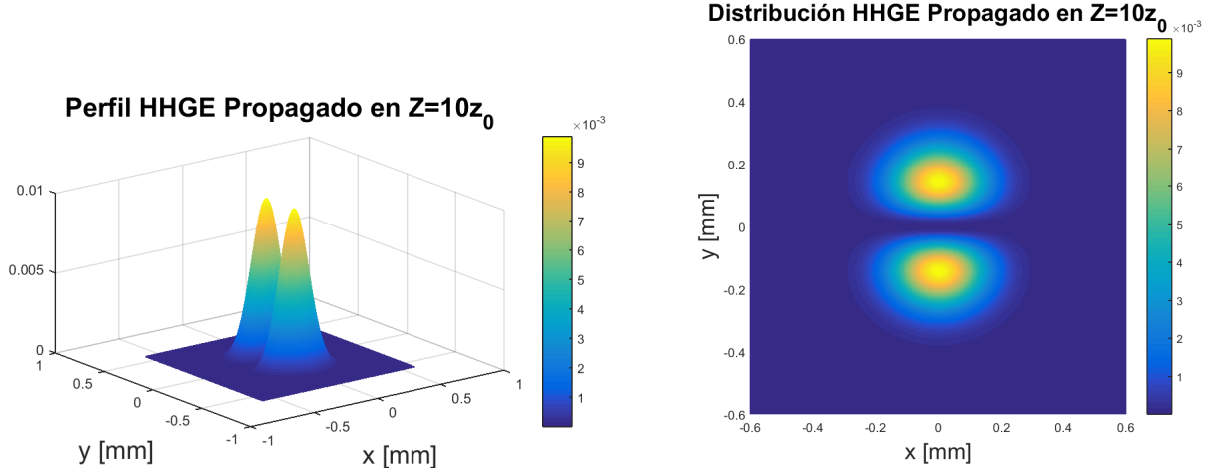


Figura 3.30: Gráfica del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano Elegante de orden $(0,1)$ para una distancia de propagación $z = 10z_0$.

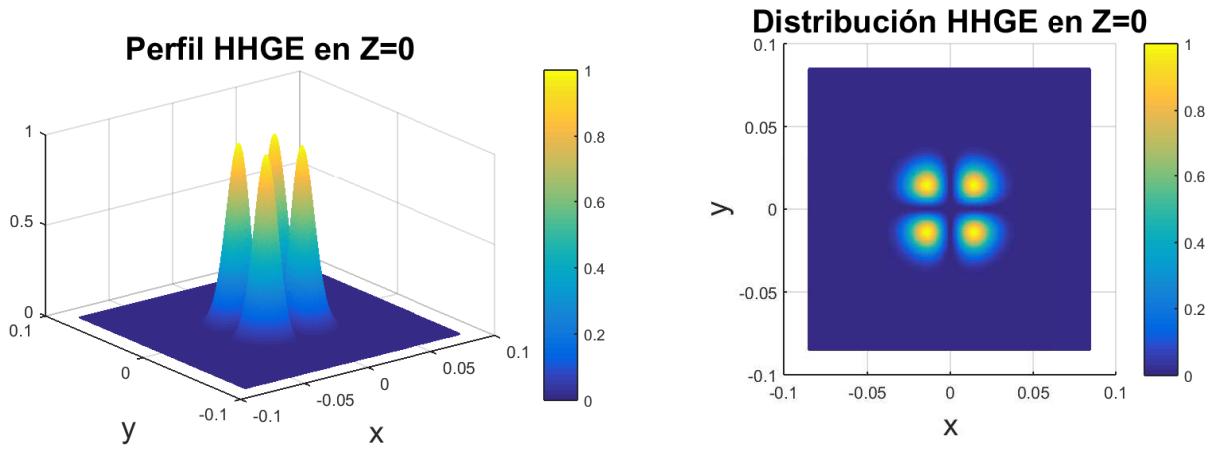


Figura 3.31: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Hermite-Gauss Elegante de orden $(1,1)$ para $z = 0$ usando la ecuación (3.29).

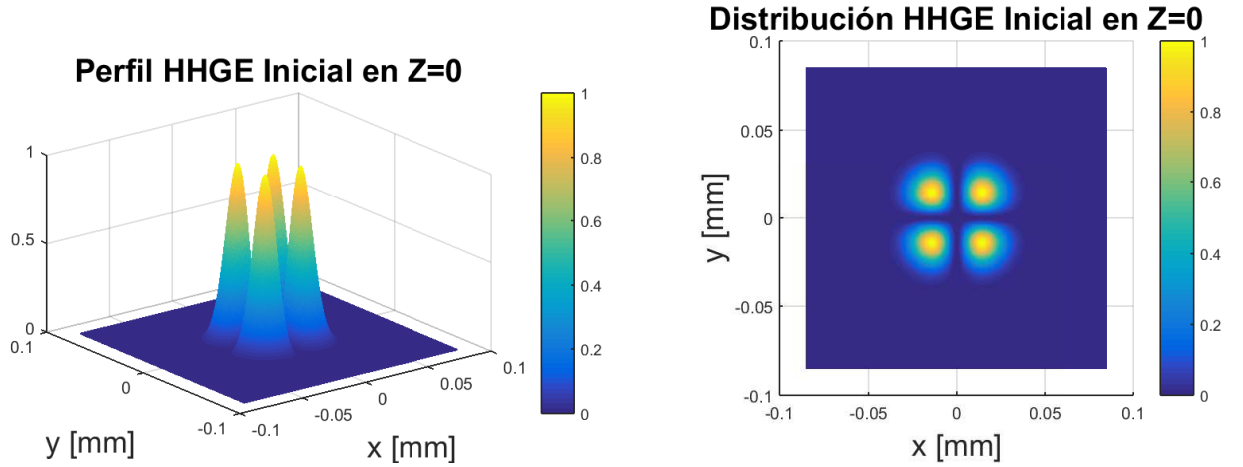


Figura 3.32: Gráficas del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano Elegante de orden (1,1) en $z = 0$. Haz de entrada para el método de propagación.

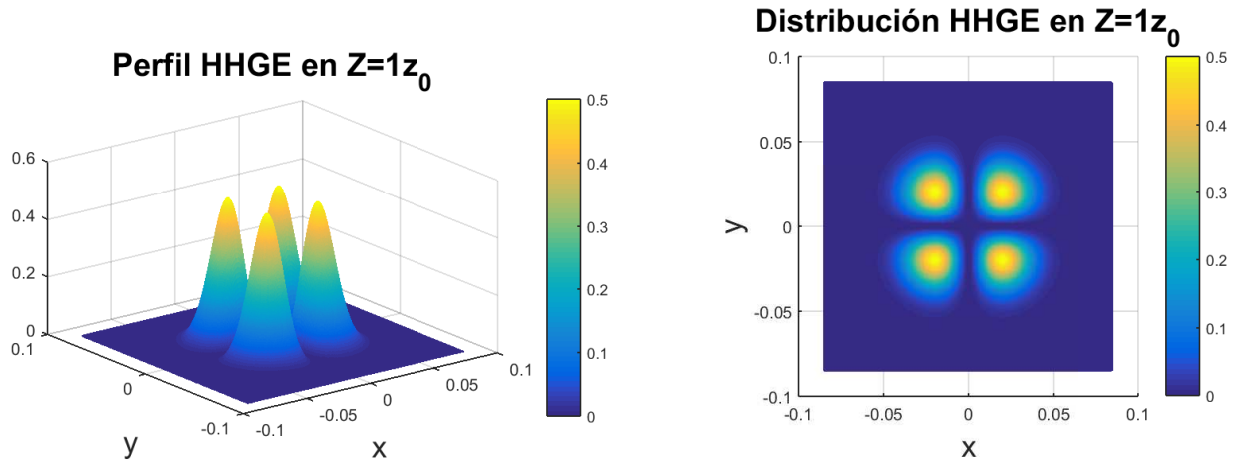


Figura 3.33: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Hermite-Gauss Elegante de orden (1,1) para $z = z_0$ usando la ecuación (3.29).

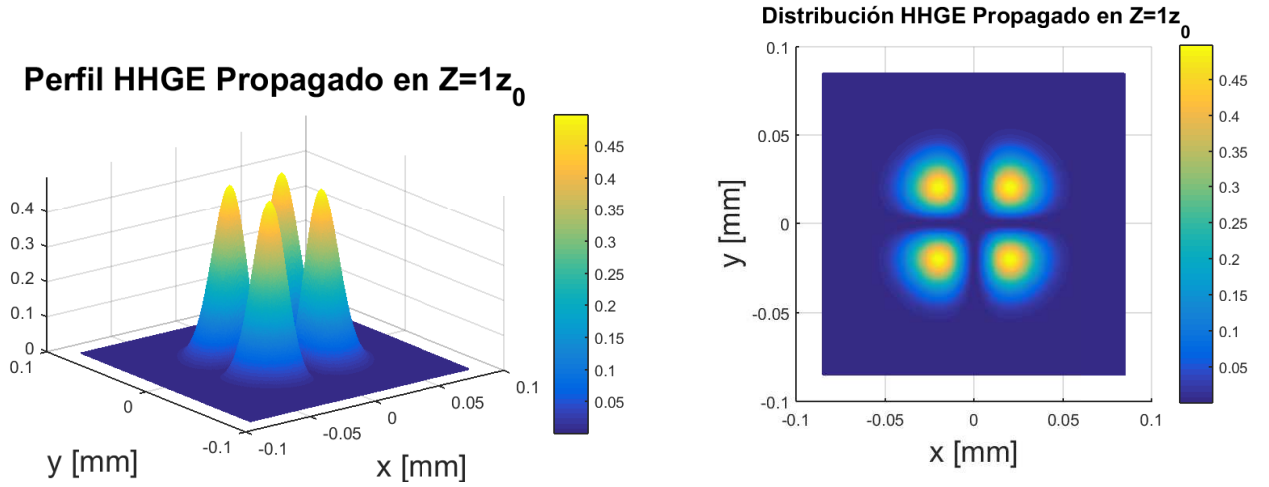


Figura 3.34: Gráfica del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano Elegante de orden (1,1) para una distancia de propagación $z = z_0$.

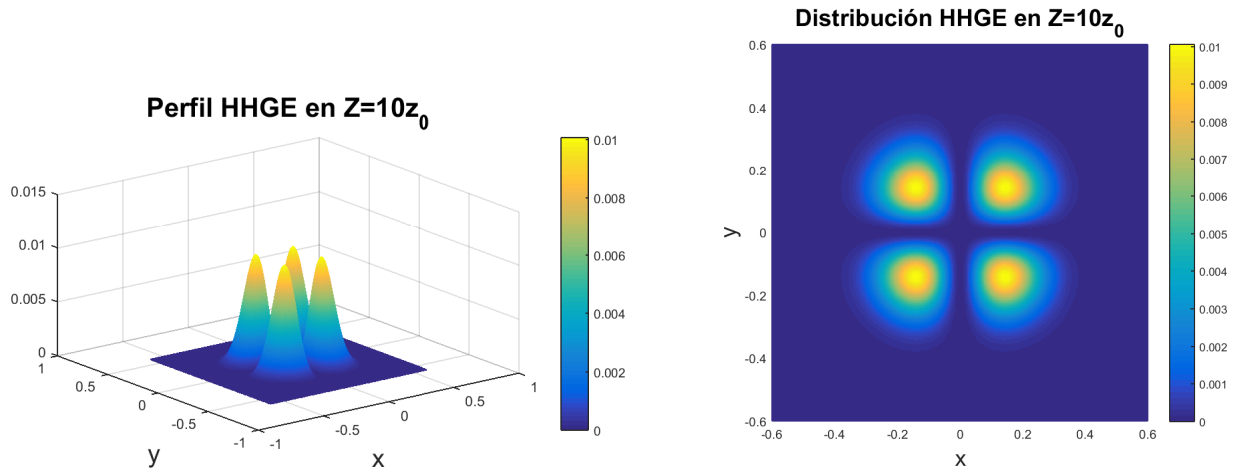


Figura 3.35: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Hermite-Gauss Elegante de orden (1,1) para $z = 10z_0$ usando la ecuación (3.29).

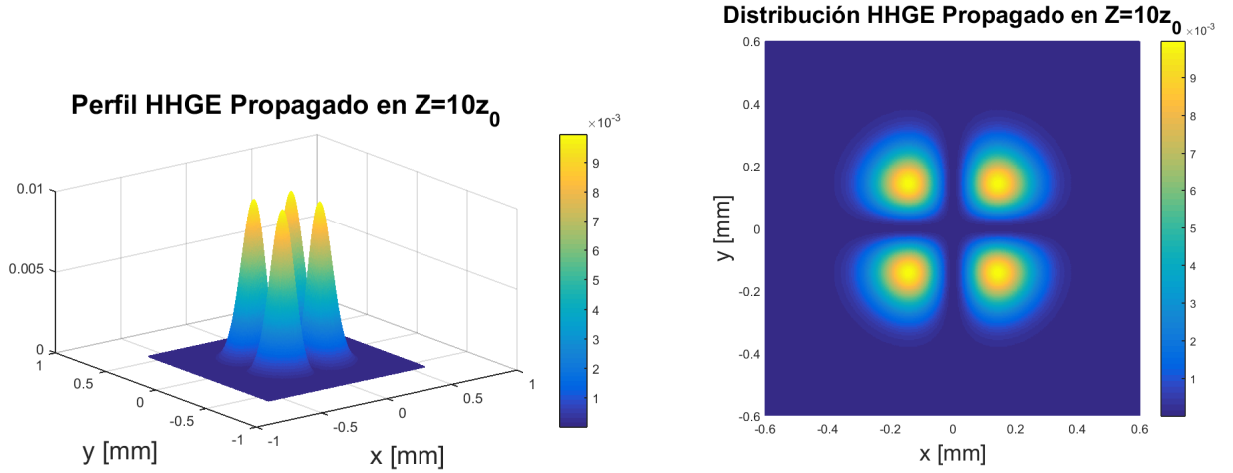


Figura 3.36: Gráfica del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano Elegante de orden (1,1) para una distancia de propagación $z = 10z_0$.

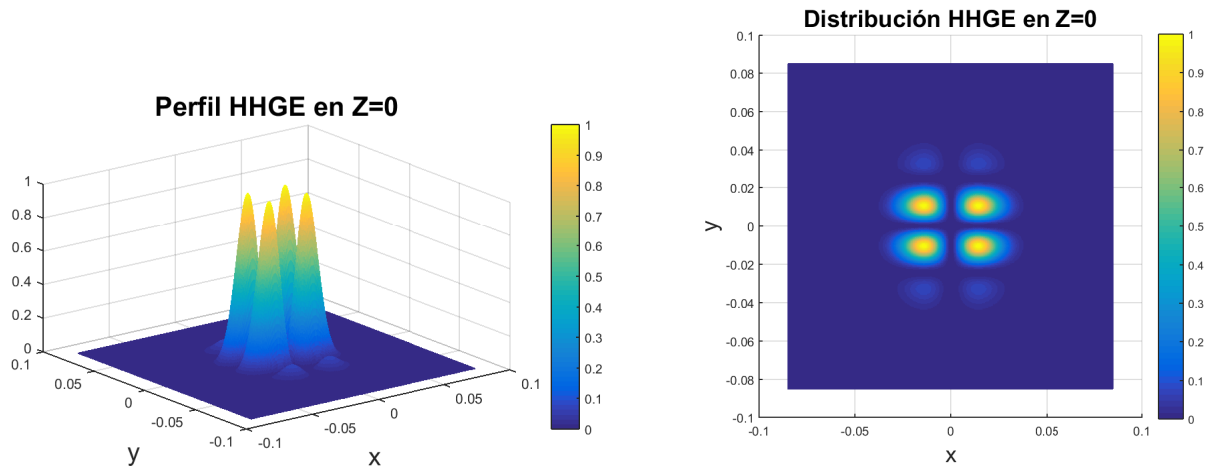


Figura 3.37: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Hermite-Gauss Elegante de orden (1,3) para $z = 0$ usando la ecuación (3.29).

CAPÍTULO 3. FUNCIONES HERMITE-GAUSS

3.3. HACES HERMITE-GAUSS ELEGANTES

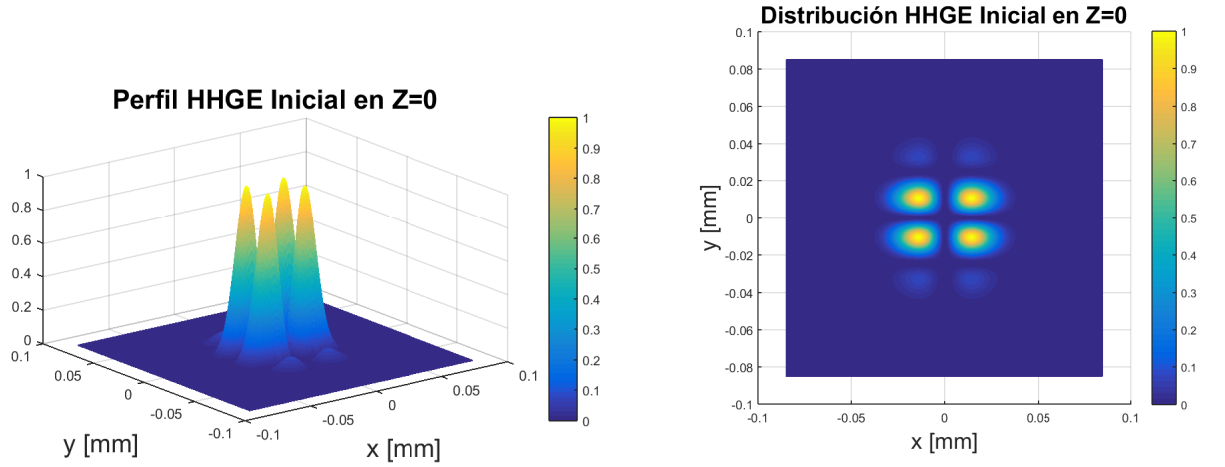


Figura 3.38: Gráficas del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano Elegante de orden (1,3) en $z = 0$. Haz de entrada para el método de propagación.

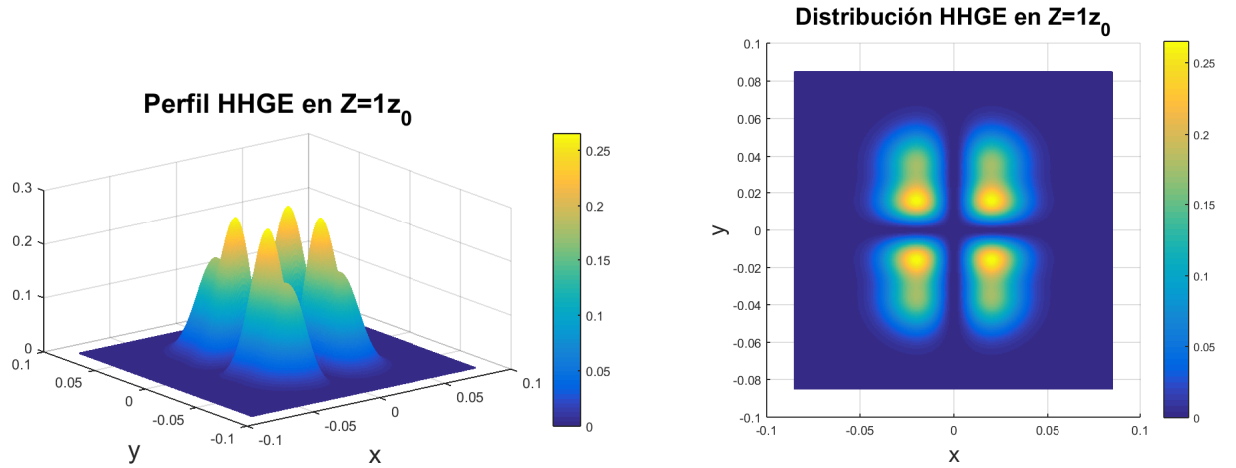


Figura 3.39: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Hermite-Gauss Elegante de orden (1,3) para $z = z_0$ usando la ecuación (3.29).

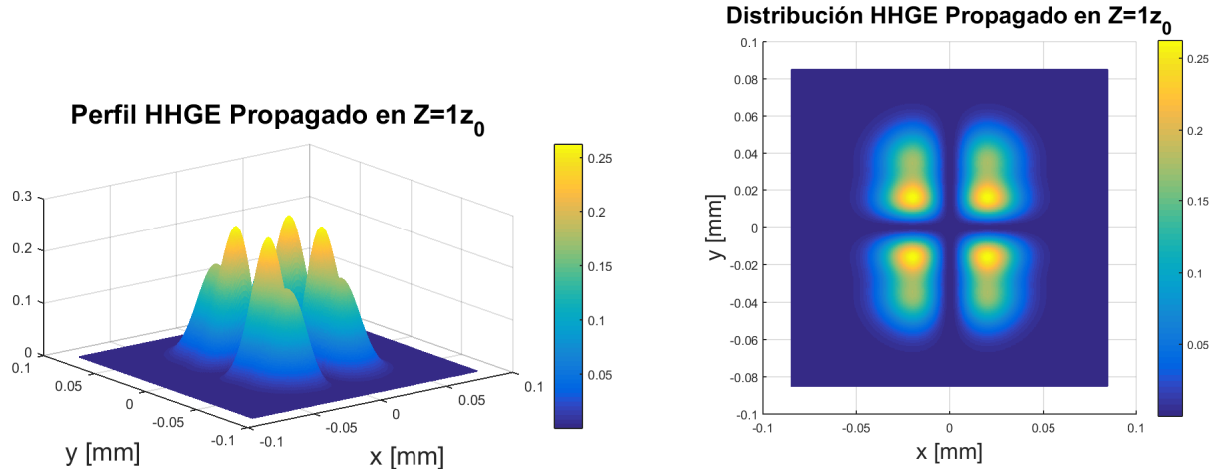


Figura 3.40: Gráfica del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano Elegante de orden (1,3) para una distancia de propagación $z = z_0$.

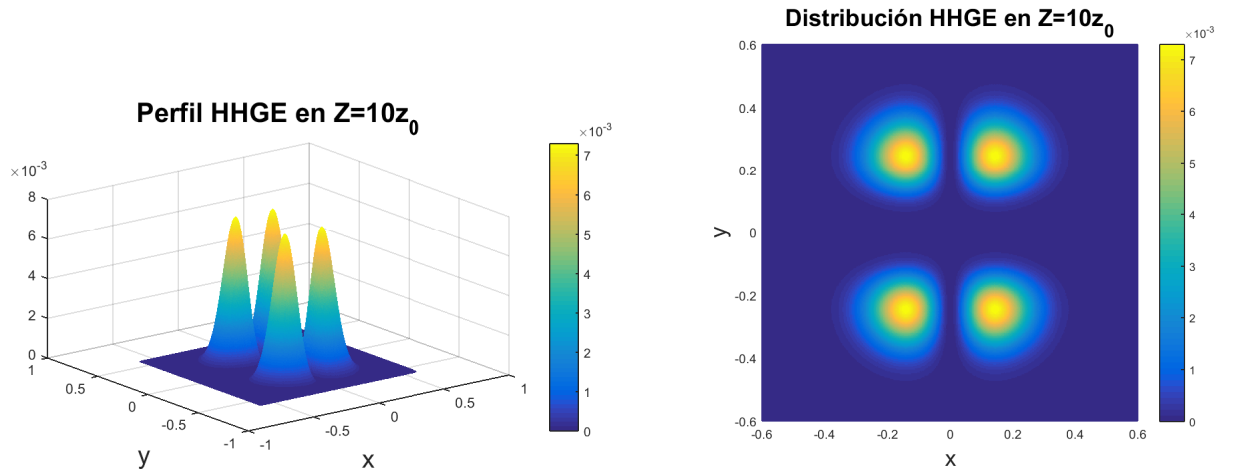


Figura 3.41: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Hermite-Gauss Elegante de orden (1,3) para $z = 10z_0$ usando la ecuación (3.29).

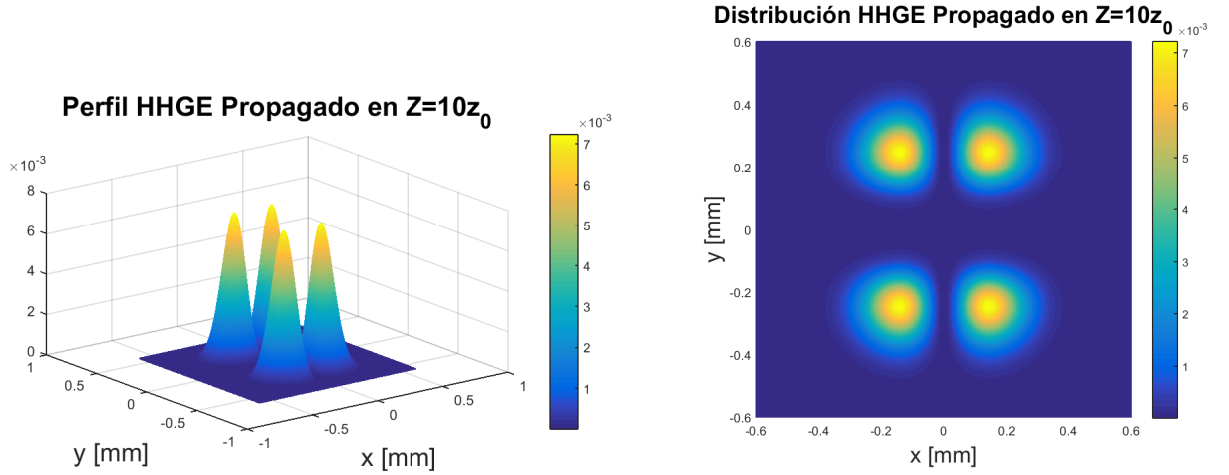


Figura 3.42: Gráfica del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano Elegante de orden (1,3) para una distancia de propagación $z = 10z_0$.

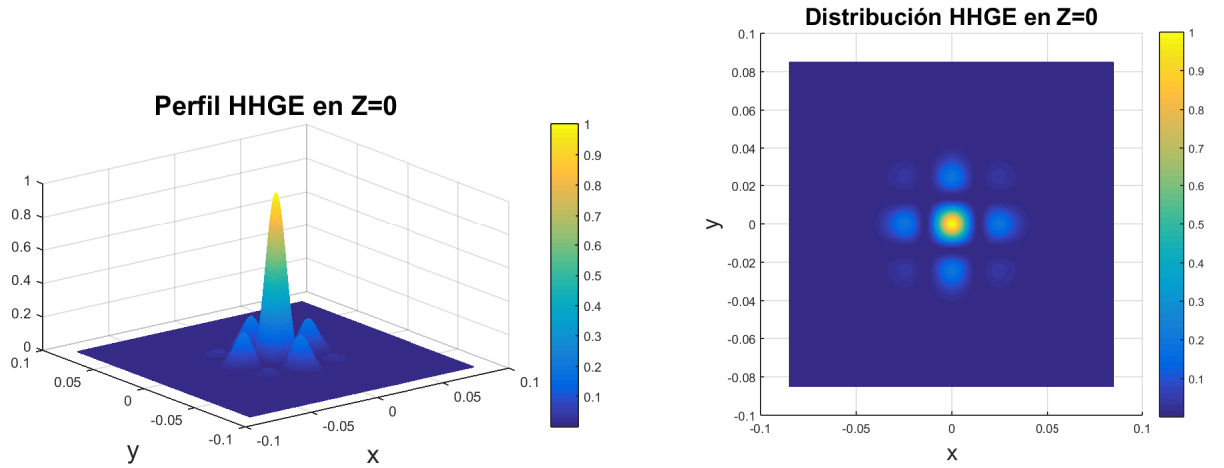


Figura 3.43: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Hermite-Gauss Elegante de orden (2,2) para $z = 0$ usando la ecuación (3.29).

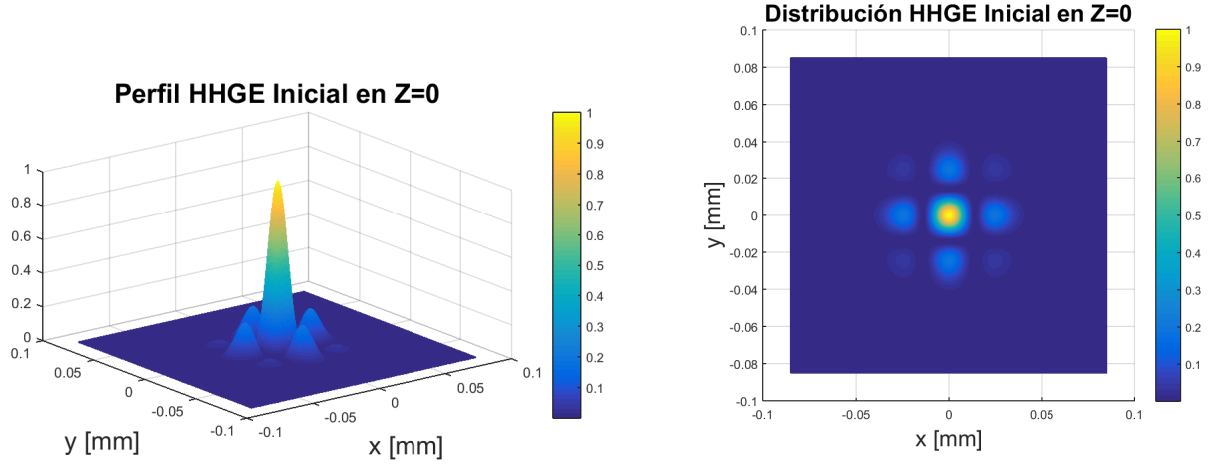


Figura 3.44: Gráficas del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano Elegante de orden (2,2) en $z = 0$. Haz de entrada para el método de propagación.

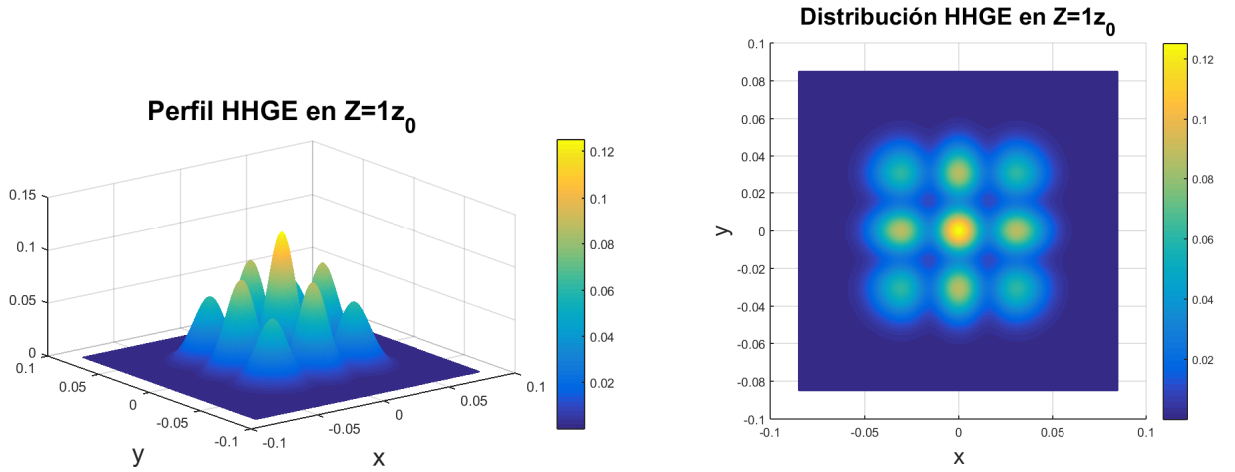


Figura 3.45: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Hermite-Gauss Elegante de orden (2,2) para $z = z_0$ usando la ecuación (3.29).

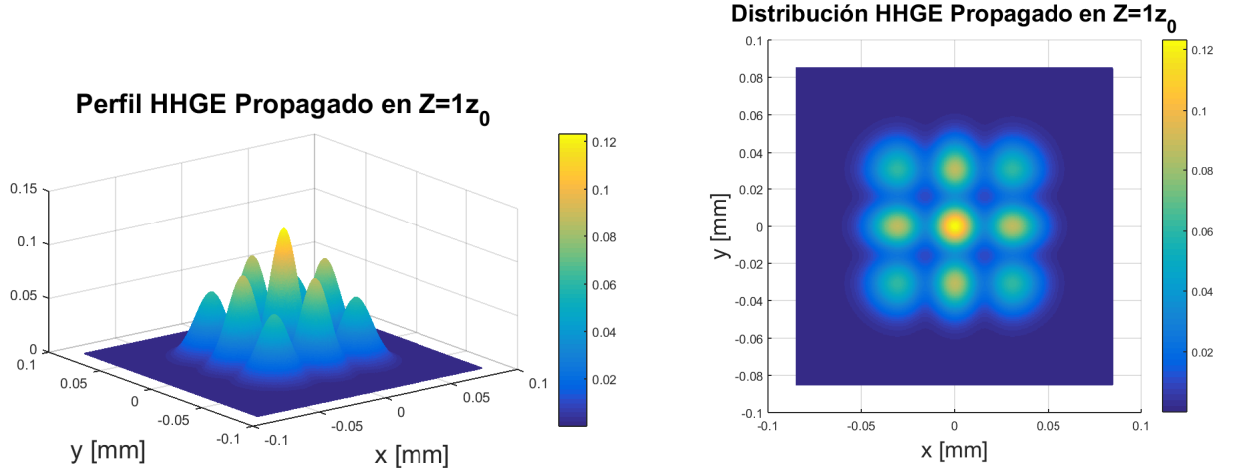


Figura 3.46: Gráfica del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano Elegante de orden (2,2) para una distancia de propagación $z = z_0$.

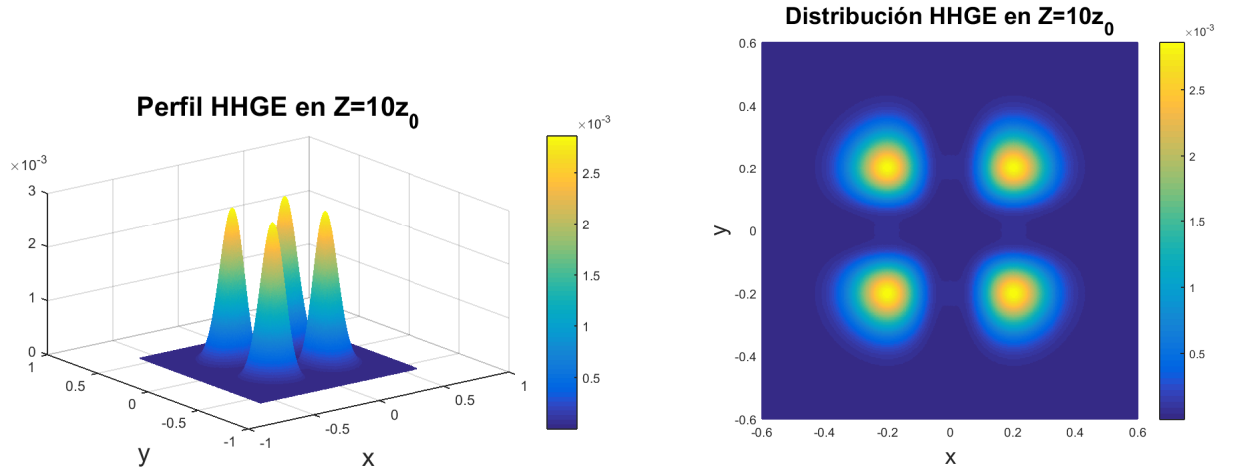


Figura 3.47: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Hermite-Gauss Elegante de orden (2,2) para $z = 10z_0$ usando la ecuación (3.29).

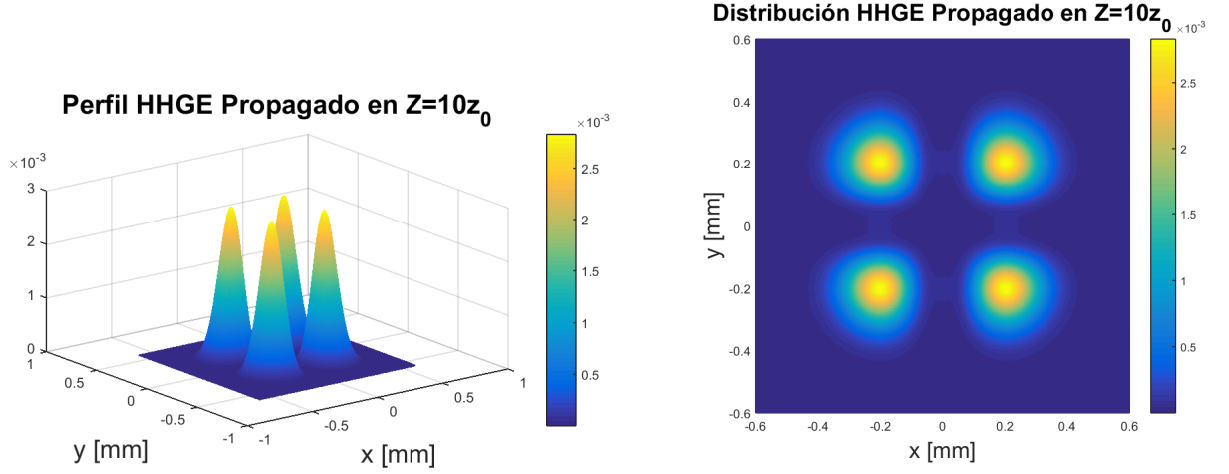


Figura 3.48: Gráfica del perfil y distribución de intensidad de un haz Hermite-Gaussiano Elegante de orden (2,2) para una distancia de propagación $z = 10z_0$.

3.4. Análisis de Resultados

Los resultados obtenidos en los haces Hermite-Gauss, al igual que en los haces gaussianos coinciden para ambos métodos, es decir, las gráficas generadas a partir de la simulación para la propagación de los haces son idénticas a las del perfil y distribución de intensidad reproducidas por la solución de la ecuación paraxial dada por la expresión (3.12). Se encuentra que el número de picos del perfil de intensidad es $l + 1$, $m + 1$ o $(l + 1)(m + 1)$, pero los picos centrales muestran una menor intensidad que los del exterior (o bordes) como en las figuras 3.23 y ??.

En el caso de los haces Hermite-Gauss Elegantes los resultados obtenidos no son diferentes a los producidos en los haces anteriores, es decir, el perfil en sí sigue siendo el mismo para ambos métodos: mediante el programa de simulación y la solución analítica de la ecuación paraxial de Helmholtz dada por 3.29.

Algo más que se puede observar en las gráficas de los haces Hermite-Gauss Elegantes es que para los modos donde l o m son mayores a uno, el perfil de intensidad continua cambiando hasta $z = 5z_0$ a partir de esa distancia el perfil de intensidad mantiene su forma con cuatro picos de intensidad y se van separando a medida que l y m crecen.

Capítulo 4

Funciones Laguerre-Gauss.

Además de los haces Hermite-Gauss, existe otra familia de soluciones que puede ser obtenida al resolver la ecuación paraxial de Helmholtz en coordenadas cilíndricas con el método de separación de variables, a este nuevo conjunto de soluciones se conoce como funciones Laguerre-Gauss o haces Laguerre-Gauss y al igual que los Hermite-Gauss Elegantes existen los haces Laguerre-Gauss Elegantes. En la sección siguiente se obtiene la solución analítica de las funciones Laguerre-Gauss que presentan un argumento real en los polinomios asociados de Laguerre y un argumento complejo para la función Gaussiana. En la sección 4.2 se introducen los haces Laguerre-Gauss Elegantes, los cuales tienen un argumento complejo tanto en los polinomios asociados de Laguerre como en la función Gaussiana.

4.1. Haces Laguerre-Gauss.

En coordenadas cilíndricas la ecuación (1.26) tiene el aspecto siguiente:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A(\rho, \phi, z)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A(\rho, \phi, z)}{\partial \phi^2} - 2ik \frac{\partial A(\rho, \phi, z)}{\partial z} = 0. \quad (4.1)$$

Sea una envolvente compleja:

$$A(\rho, \phi, z) = F \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{W(z)} \right) \Phi(\phi) \exp(iZ(z)) A_G(\rho, z), \quad (4.2)$$

con

$$A_G(\rho, z) = \frac{A_1}{q(z)} \exp \left[-ik \frac{\rho^2}{2q(z)} \right], \quad q(z) = z + iz_0, \quad (4.3)$$

la envolvente Gaussiana en coordenadas cilíndricas; $F(\cdot)$, $\Phi(\phi)$ y $Z(z)$ son funciones reales a determinar.

Sustituyendo la ecuación (4.2) en la ecuación (4.1), nuevamente $A_G(\rho, z)$ satisface la ecuación paraxial de Helmholtz. Se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{F} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{2}{A_G} \frac{\partial A_G}{\partial \rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} - 2ik \frac{\partial F}{\partial z} \right\} + \frac{1}{\Phi \rho^2} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + 2k \frac{dZ}{dz} = 0. \quad (4.4)$$

Haciendo un cambio de variable $u = \frac{\sqrt{2}\rho}{W(z)}$ y aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{1}{F} \left\{ \frac{d^2 F}{du^2} + \frac{1}{u^2} \frac{dF}{du} [u - 2u^3] \right\} + \frac{1}{\Phi u^2} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + kW^2(z) \frac{dZ}{dz} = 0. \quad (4.5)$$

De la cual se pueden obtener las siguientes relaciones al utilizar el método de separación de variables:

$$kW^2(z) \frac{dZ}{dz} = p, \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2, \quad (4.7)$$

$$\frac{d^2 F}{du^2} + \frac{dF}{du} \left[\frac{1}{u} - 2u \right] + \left(p - \frac{m^2}{u^2} \right) F = 0. \quad (4.8)$$

De la ecuación (4.6) se obtiene que:

$$Z(z) = \frac{p}{2} \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_0} \right) + c, \quad c = cte. \quad (4.9)$$

Resolviendo la ecuación (4.7) obtenemos una expresión para la función $\Phi(\phi)$:

$$\Phi(\phi) = B \exp(\pm im\phi), \quad B = cte. \quad (4.10)$$

Aplicando un nuevo cambio de variable $v = u^2$ y la regla de la cadena, la ecuación (4.8) se transforma en:

$$v^2 \frac{d^2 F}{dv^2} + v \frac{dF}{dv} (1 - v) + \frac{1}{4} (pv - m^2) F = 0. \quad (4.11)$$

Para determinar una solución a la ecuación (4.11) se hace uso del método de Frobenius, de la forma:

$$F(v) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j v^{s+j}. \quad (4.12)$$

Reemplazando (4.12) en (4.11), se obtiene la ecuación indicial:

$$s^2 - \frac{m^2}{4} = 0, \quad \text{entonces} \quad s = \pm \frac{m}{2}. \quad (4.13)$$

Se elige la raíz positiva ya que proporciona una solución en el origen, por otro lado, la raíz negativa diverge en el origen por lo que no puede ser considerada como una solución física, entonces:

$$\begin{aligned}
 F(v) &= v^{m/2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j v^j \\
 &= v^{m/2} P(v).
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Sustituyendo (4.14) en la ecuación (4.11) se llega a la siguiente expresión para $P(v)$:

$$vP''(v) + (m+1-v)P'(v) + \left(\frac{p}{4} - \frac{m}{2}\right)P(v) = 0. \tag{4.15}$$

Ahora, se compara esta ecuación con la ecuación diferencial asociada de Laguerre:

$$xL_n^{k''}(x) + (k+1-x)L_n^{k'} + nL_n^k = 0. \tag{4.16}$$

Como la solución a esta ecuación diferencial son los polinomios asociados de Laguerre, $L_n^m(v)$, entonces $P(v) = L_n^m(v)$ donde n es un entero:

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{p}{4} - \frac{m}{2}, \\
 \text{entonces} \\
 p &= 4n + 2m.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Sustituyendo las expresiones de $F(v)$, $\Phi(\phi)$ y $Z(z)$ en la envolvente compleja (4.2), se tiene:

$$A(\rho, \phi, z) = \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{W(z)}\right)^m L_n^m\left(\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right) \exp(\pm im\phi) \exp[i(2n+m)\zeta(z)] A_G \tag{4.18}$$

Por lo tanto la amplitud compleja de los haces Laguerre-Gauss es:

$$\begin{aligned}
 U_{LG}(\rho, \phi, z) &= A_0 \frac{W_0}{W(z)} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{W(z)}\right)^m L_n^m\left(\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right) \exp\left[-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right] \times \\
 &\quad \exp\left\{-ikz - ik\frac{\rho^2}{2R(z)} + i(2n+m+1)\zeta(z) \pm im\phi\right\}.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Donde A_0 es una constante y las expresiones de W_0 , $W(z)$, $R(z)$ y $\zeta(z)$ están dados como en las secciones anteriores. Los haces Laguerre-Gauss presentan una fase de Guoy similar a la de los haces Hermite-Gauss que no depende de la coordenada transversal.

4.1.1. Distribución de Intensidad

La distribución transversal de intensidad está determinada por los polinomios asociados de Laguerre y la función Gaussiana:

$$I_{LG}(\rho, z) = |U_{LG}(\rho, \phi, z)|^2 = I_0 \left(\frac{W_0}{W(z)} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{W(z)} \right)^{2m} \left[L_n^m \left(\frac{2\rho^2}{W^2(z)} \right) \right]^2 \exp \left[-\frac{2\rho^2}{W^2(z)} \right]. \quad (4.20)$$

Donde $I_0 = |A_0|^2$. A continuación se muestran el perfil y la distribución de intensidad de algunos modos de los haces Laguerre-Gauss (HLG) mediante los dos métodos: usando la ecuación para la distribución de intensidad (4.20) y el programa de simulación para la propagación de los haces presentado en la sección 1.3.1, ahora con la ecuación (4.19) en $z = 0$ como haz de entrada.

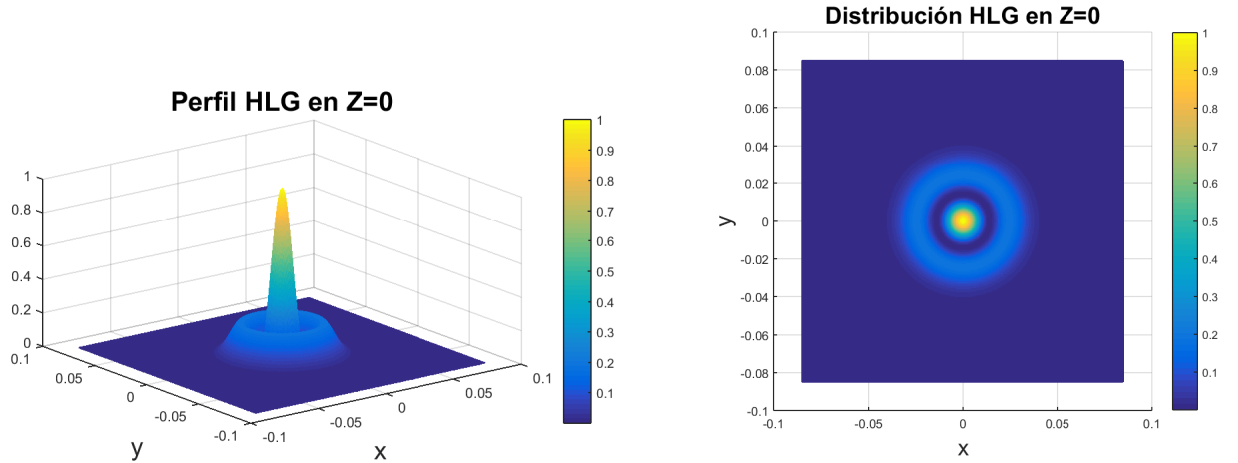


Figura 4.1: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Laguerre-Gauss de orden (0,1) en $z = 0$ usando la ecuación (4.20).

CAPÍTULO 4. FUNCIONES LAGUERRE-GAUSS.

4.1. HACES LAGUERRE-GAUSS.

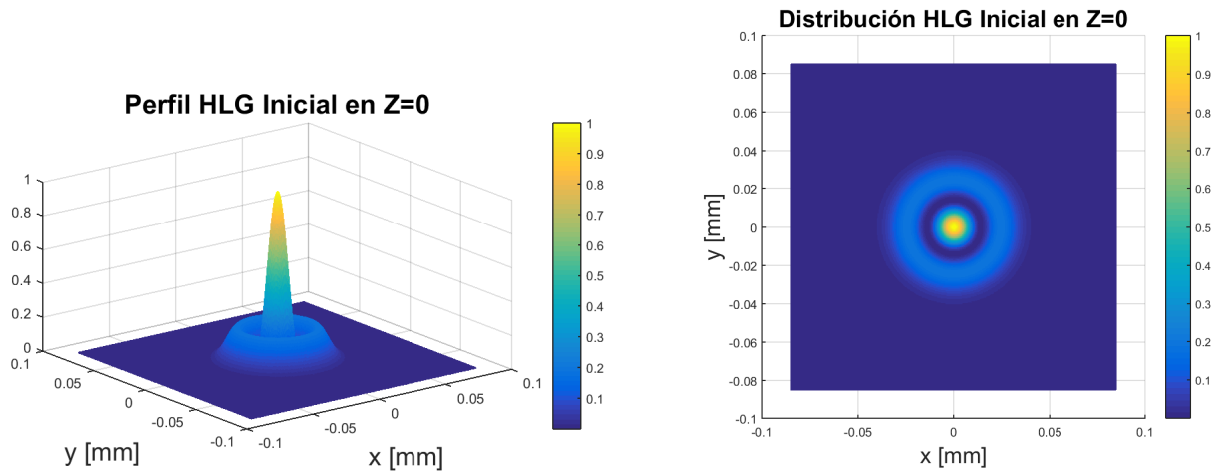


Figura 4.2: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Laguerre-Gauss de orden $(0,1)$ en $z = 0$. Haz de entrada para el método de propagación.

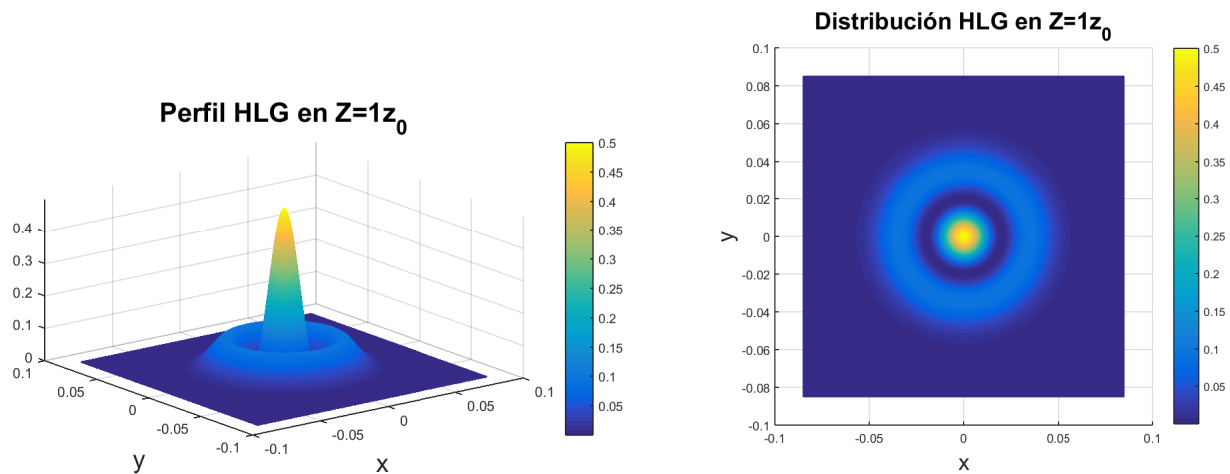


Figura 4.3: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Laguerre-Gauss de orden $(0,1)$ en $z = z_0$ usando la ecuación (4.20).

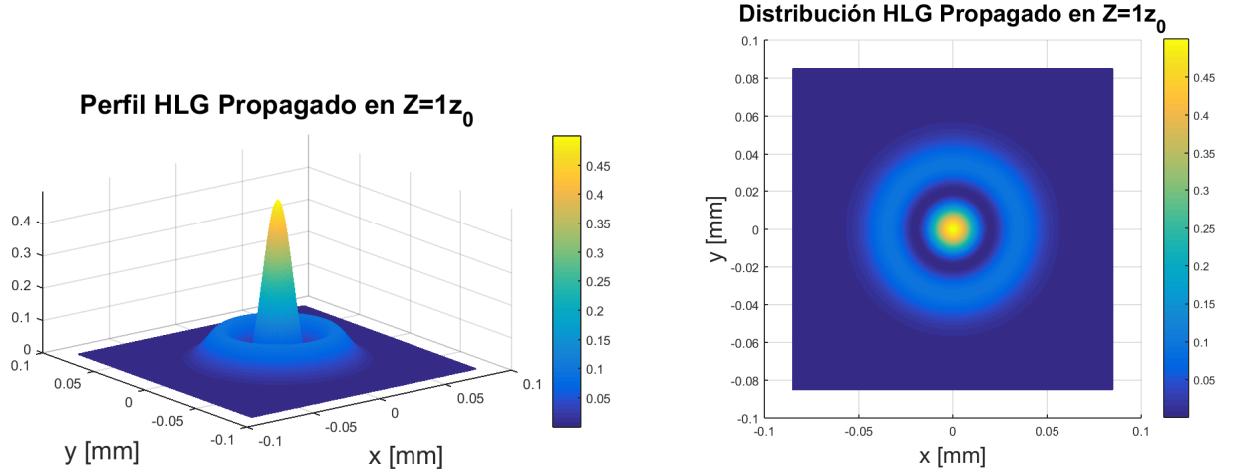


Figura 4.4: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Laguerre-Gauss de orden $(0,1)$ mediante el método de propagación para $z = z_0$.

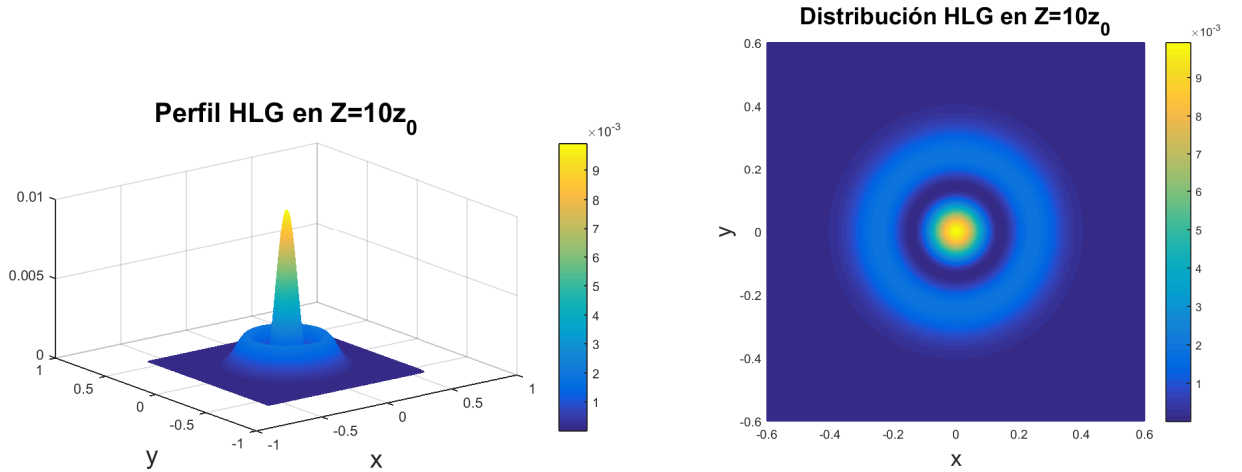


Figura 4.5: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Laguerre-Gauss de orden $(0,1)$ en $z = 10z_0$ usando la ecuación (4.20).

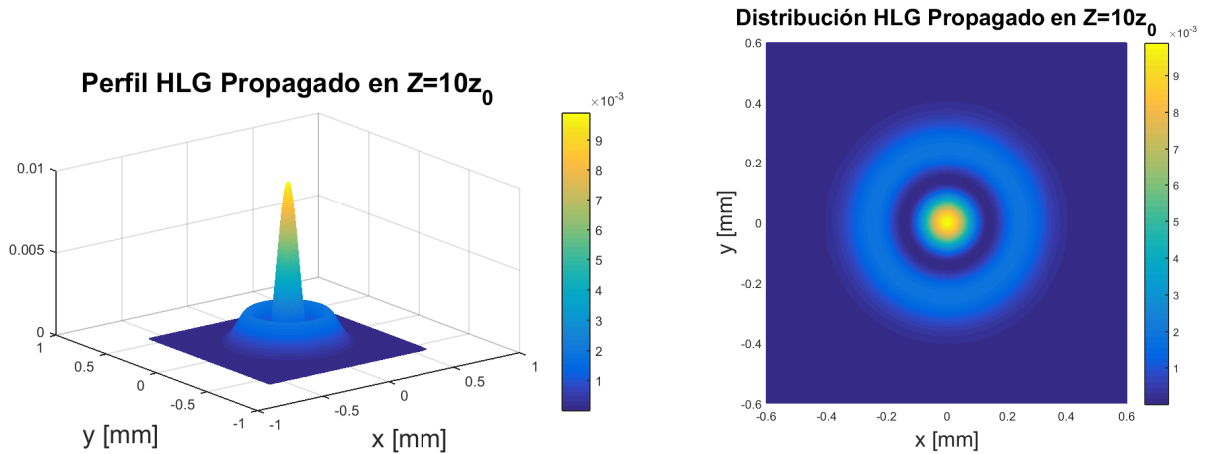


Figura 4.6: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Laguerre-Gauss de orden $(0,1)$ mediante el método de propagación para $z = 10z_0$.

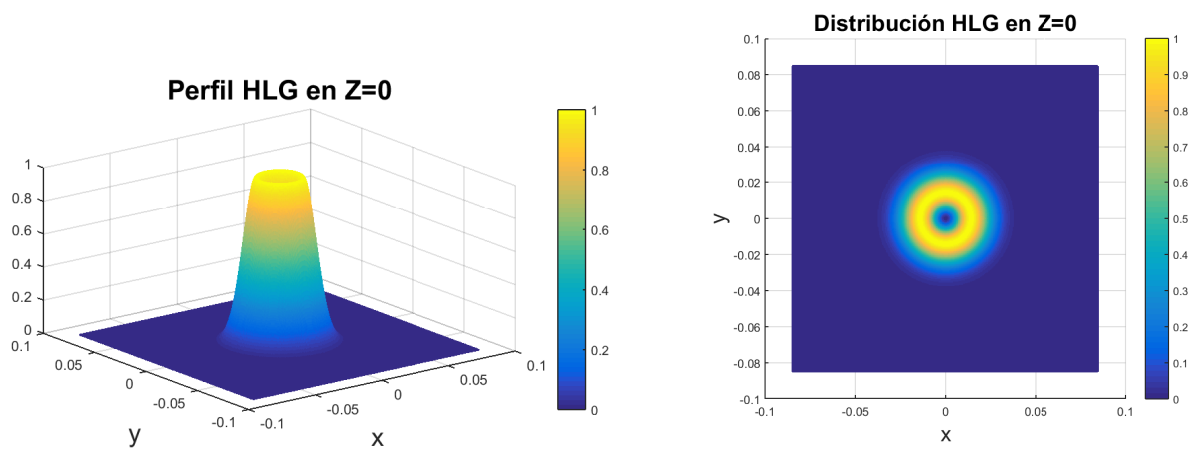


Figura 4.7: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Laguerre-Gauss de orden $(1,0)$ en $z = 0$ usando la ecuación (4.20).

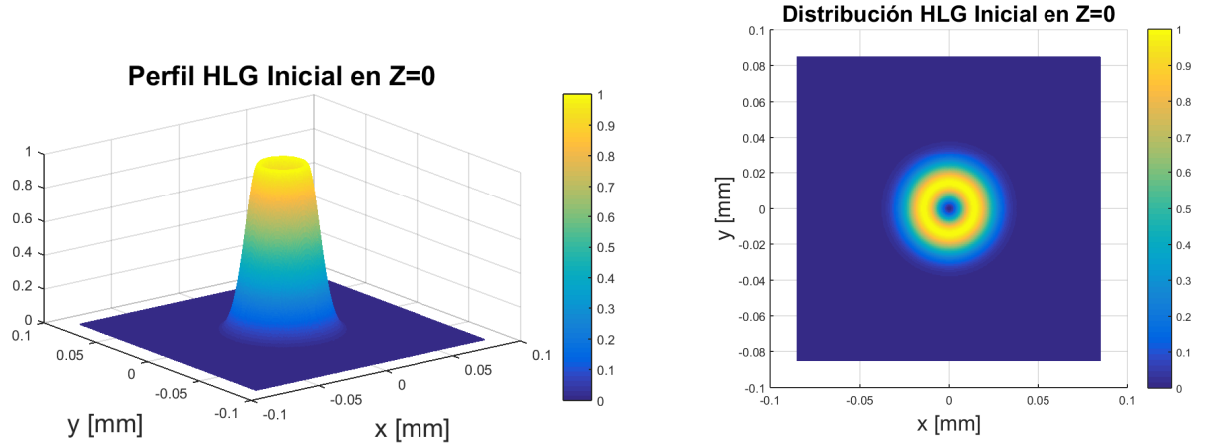


Figura 4.8: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Laguerre-Gauss de orden $(1,0)$ en $z = 0$. Haz de entrada para el método de propagación.

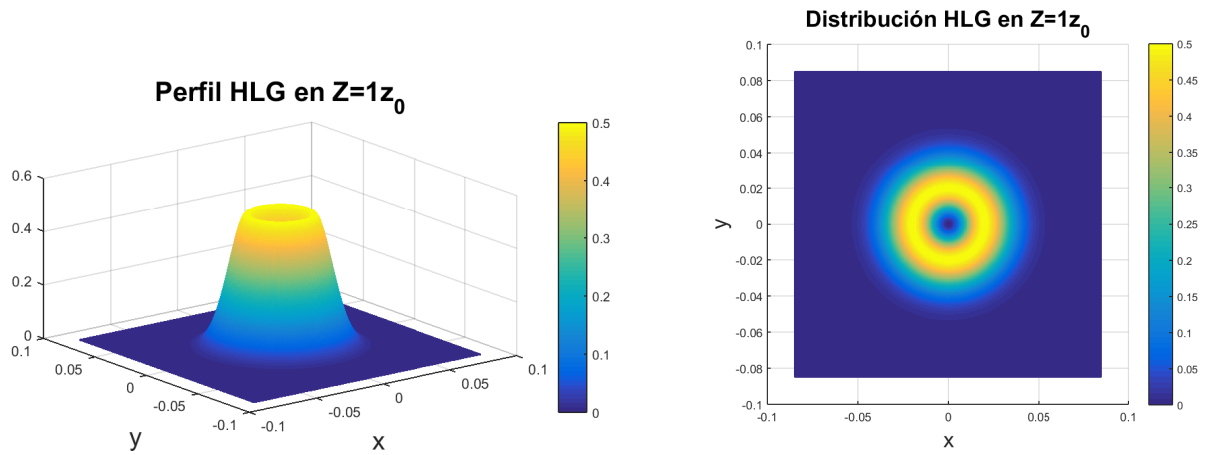


Figura 4.9: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Laguerre-Gauss de orden $(1,0)$ en $z = z_0$ usando la ecuación (4.20).

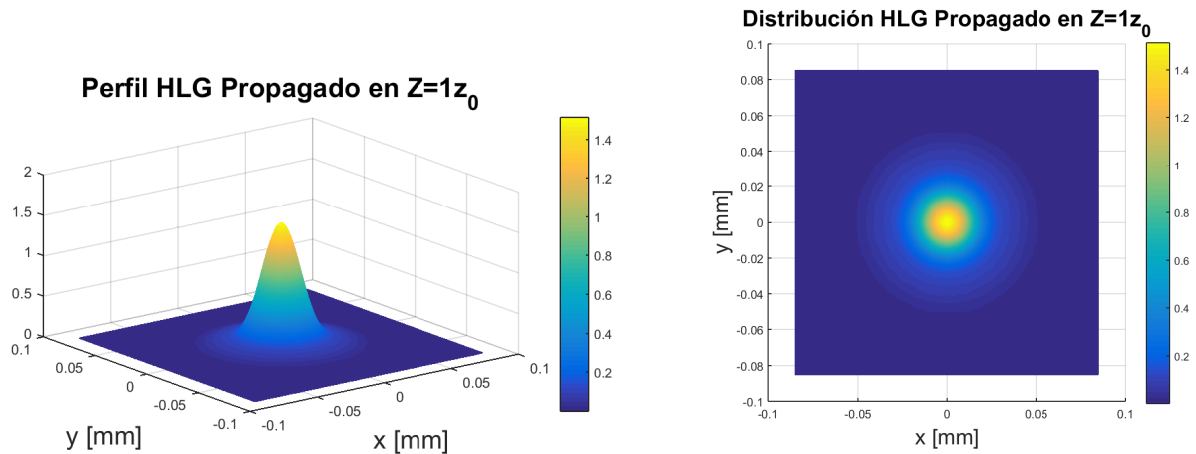


Figura 4.10: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Laguerre-Gauss de orden $(1,0)$ mediante el método de propagación para $z = z_0$.

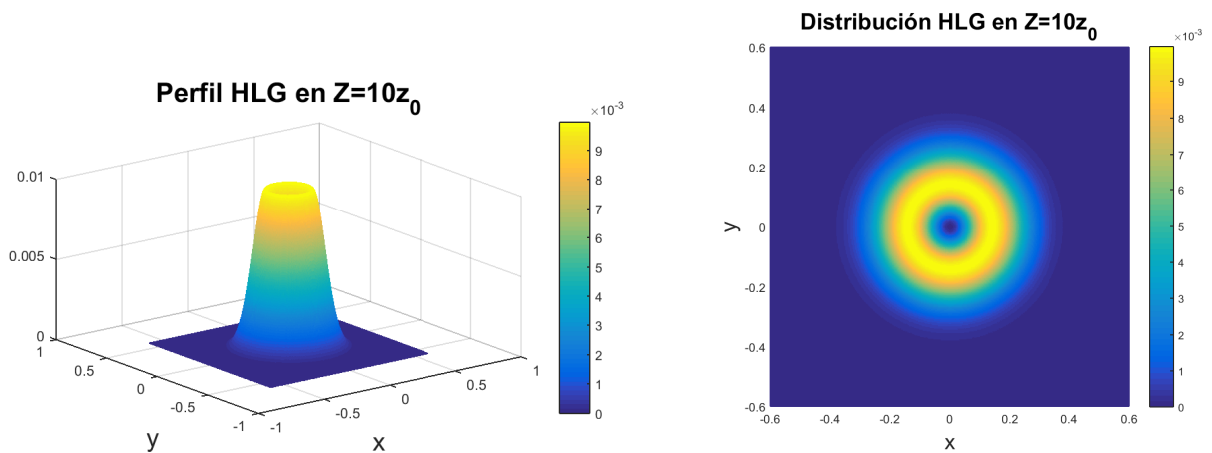


Figura 4.11: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Laguerre-Gauss de orden $(1,0)$ en $z = 10z_0$ usando la ecuación (4.20).

CAPÍTULO 4. FUNCIONES LAGUERRE-GAUSS.

4.1. HACES LAGUERRE-GAUSS.

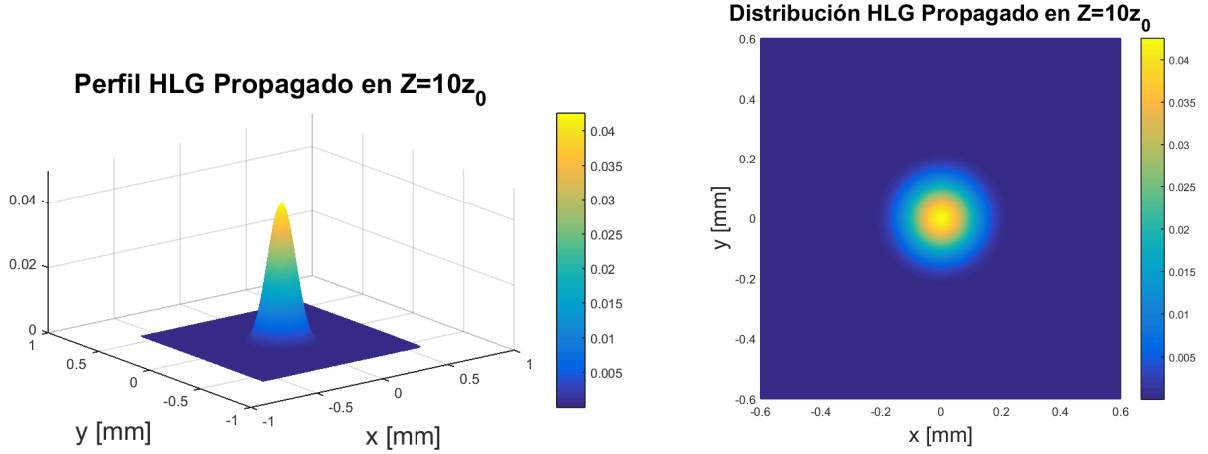


Figura 4.12: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Laguerre-Gauss de orden $(1,0)$ mediante el método de propagación para $z = 10z_0$.

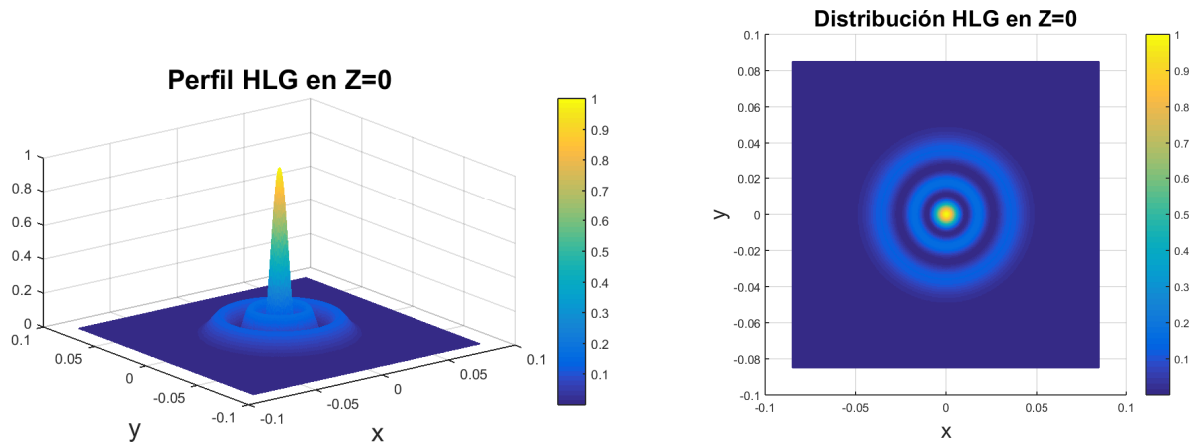


Figura 4.13: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Laguerre-Gauss de orden $(0,2)$ en $z = 0$ usando la ecuación (4.20).

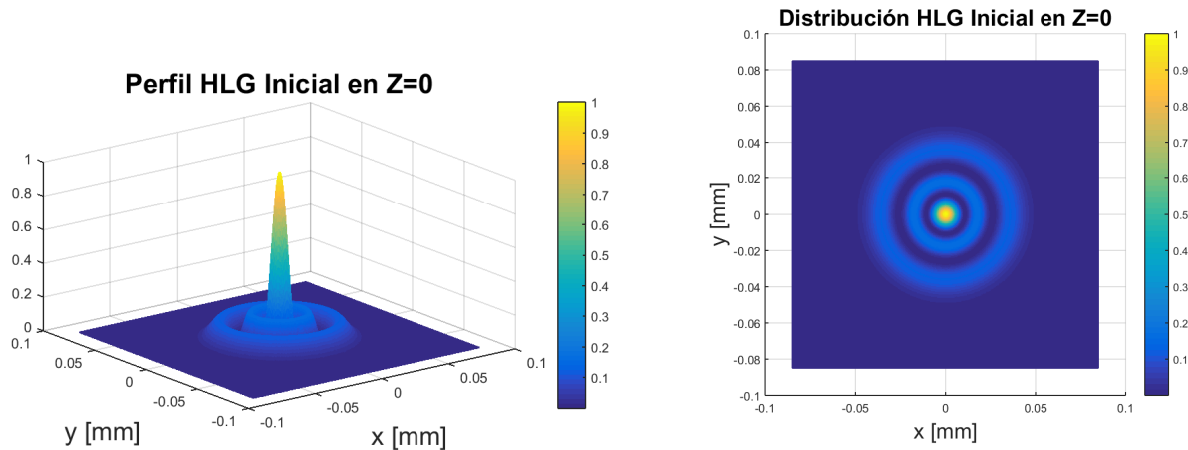


Figura 4.14: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Laguerre-Gauss de orden $(0, 2)$ en $z = 0$. Haz de entrada para el método de propagación.

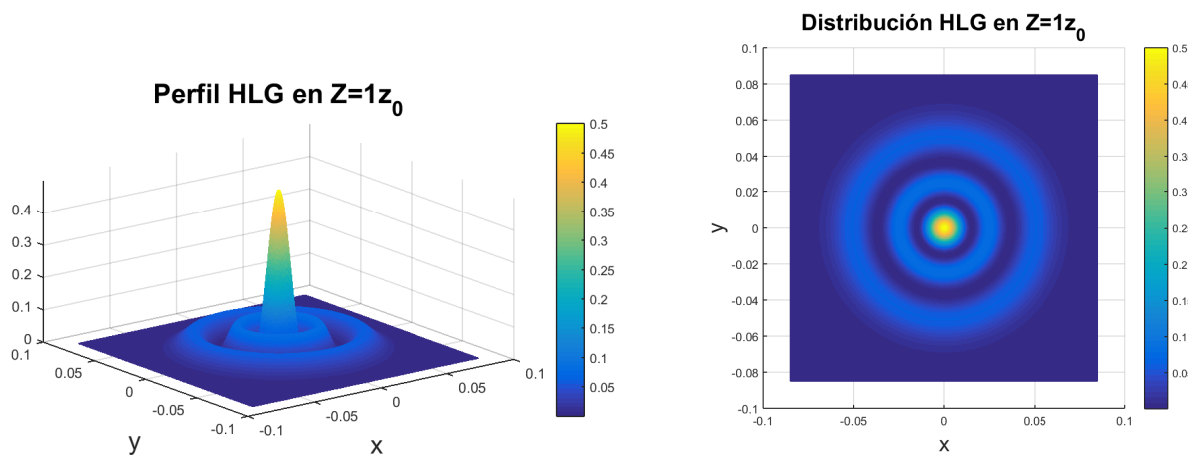


Figura 4.15: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Laguerre-Gauss de orden $(0, 2)$ en $z = z_0$ usando la ecuación (4.20).

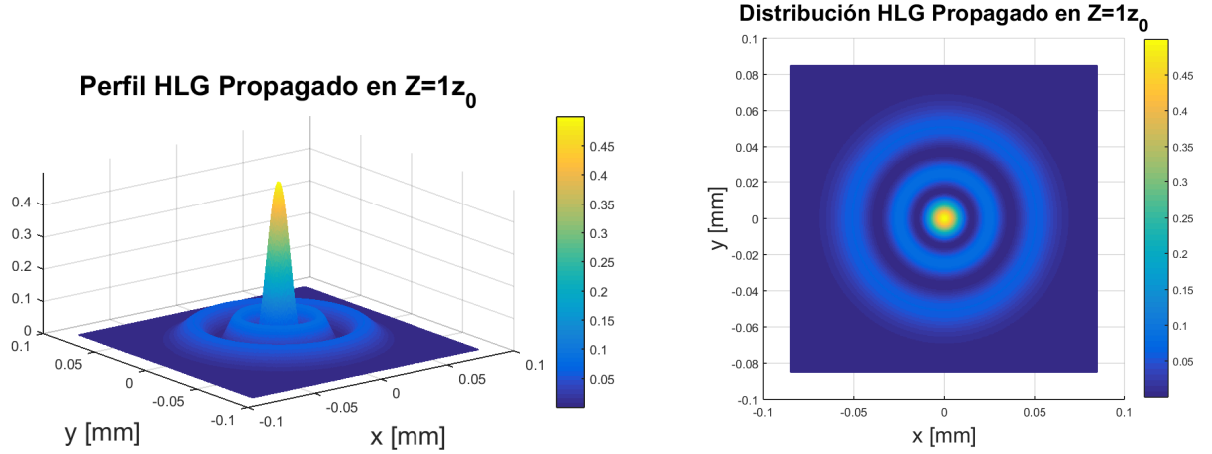


Figura 4.16: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Laguerre-Gauss de orden $(0,2)$ mediante el método de propagación para $z = z_0$.

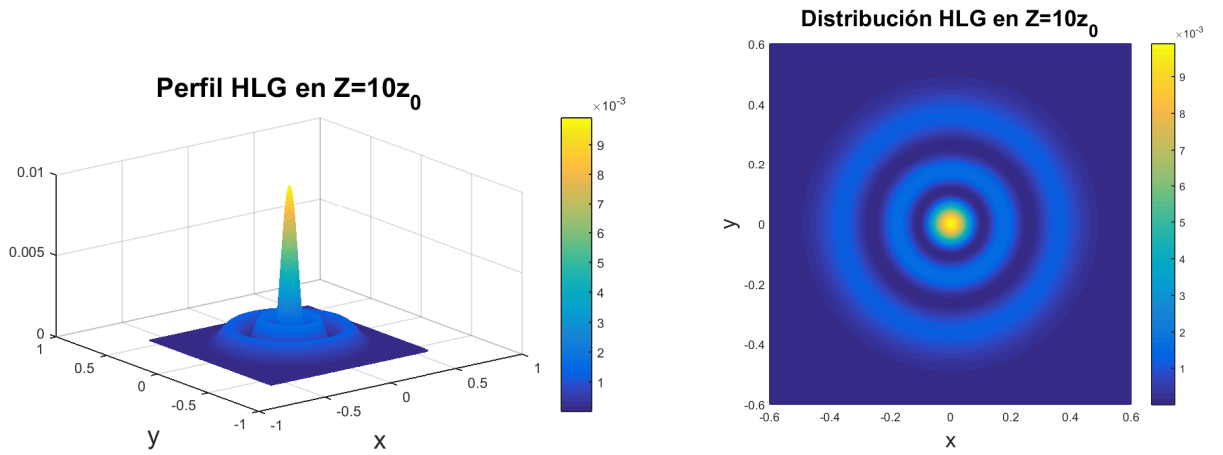


Figura 4.17: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Laguerre-Gauss de orden $(0,2)$ en $z = 10z_0$ usando la ecuación (4.20).

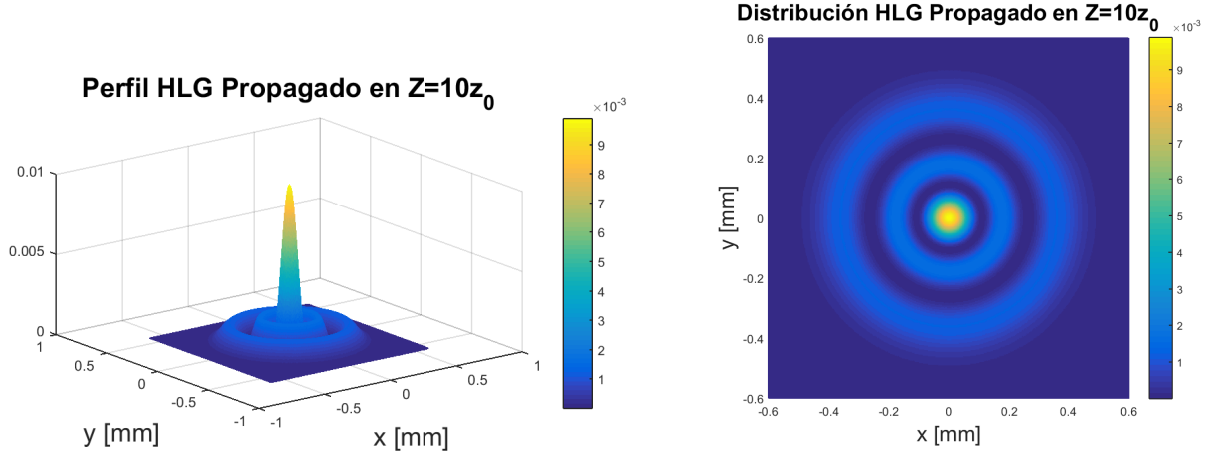


Figura 4.18: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Laguerre-Gauss de orden $(0,2)$ mediante el método de propagación para $z = 10z_0$.

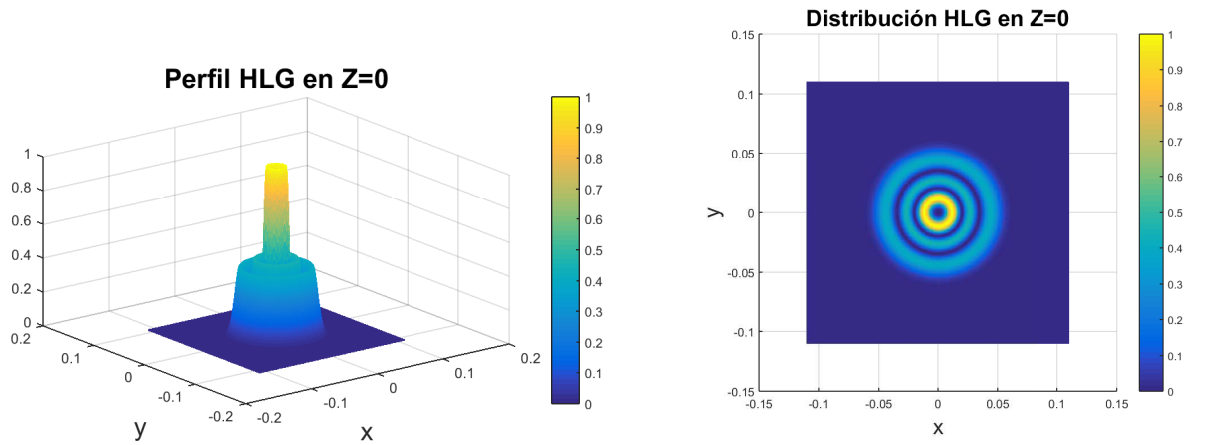


Figura 4.19: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Laguerre-Gauss de orden $(2,2)$ en $z = 0$ usando la ecuación (4.20).

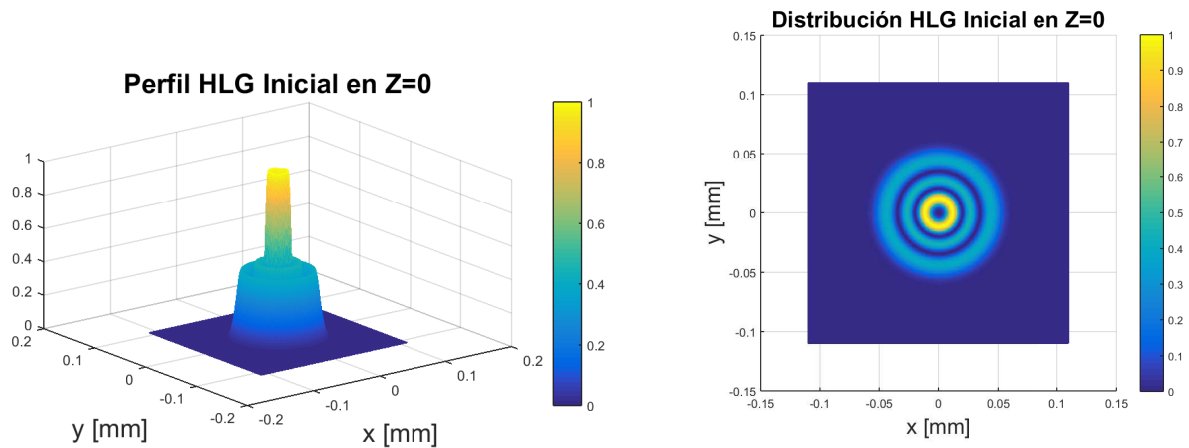


Figura 4.20: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Laguerre-Gauss de orden (2,2) en $z = 0$. Haz de entrada para el método de propagación.

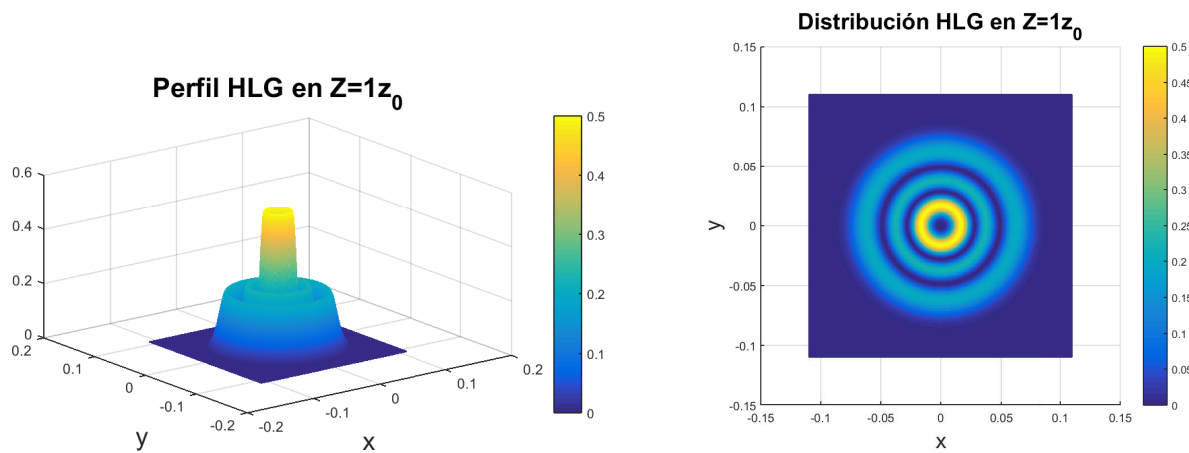


Figura 4.21: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Laguerre-Gauss de orden (2,2) en $z = z_0$ usando la ecuación (4.20).

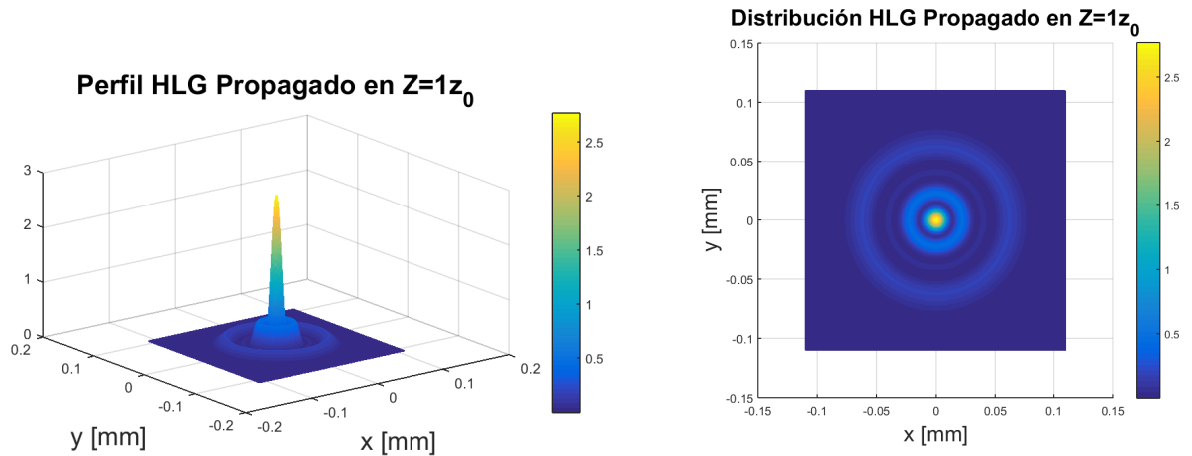


Figura 4.22: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Laguerre-Gauss de orden (2,2) mediante el método de propagación para $z = z_0$.

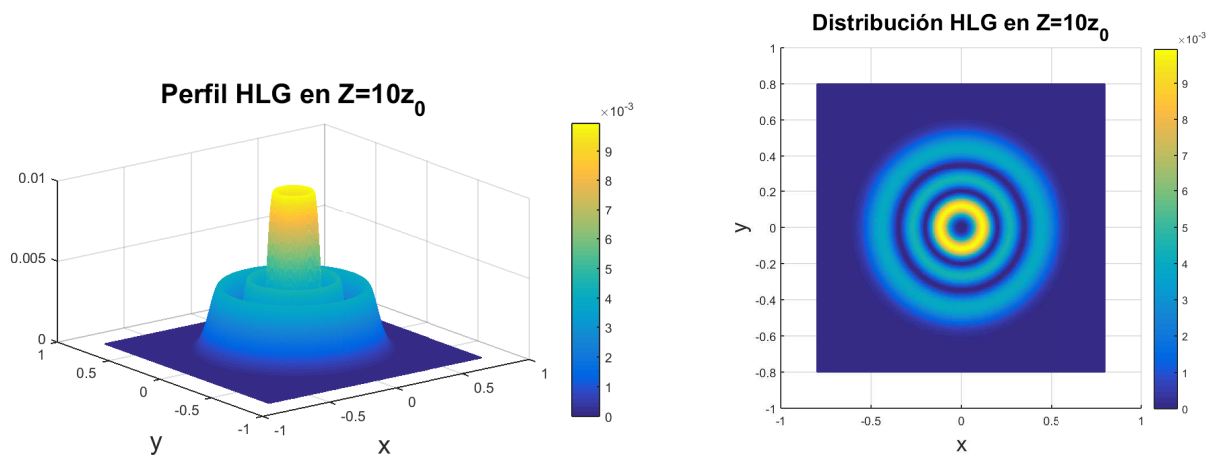


Figura 4.23: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Laguerre-Gauss de orden (2,2) en $z = 10z_0$ usando la ecuación (4.20).

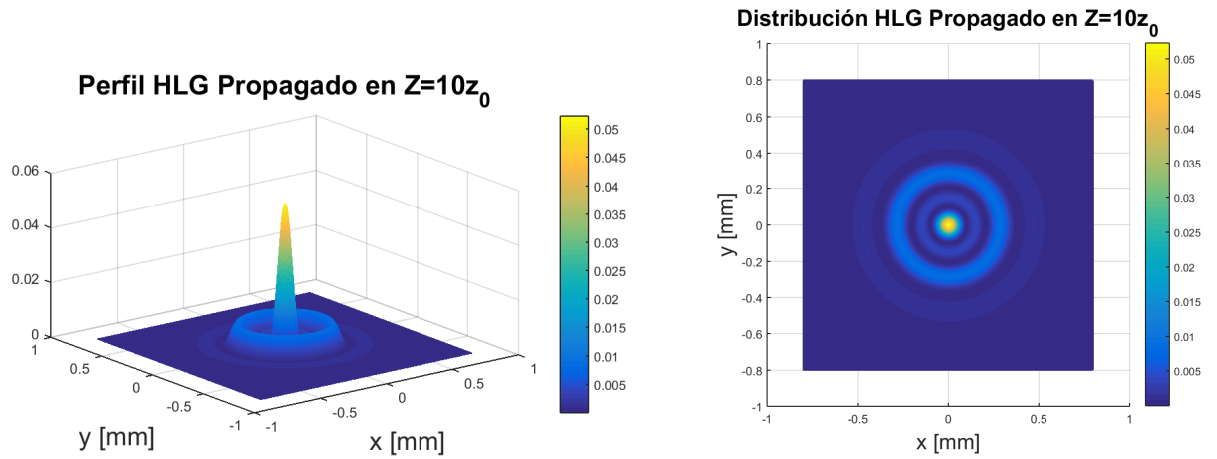


Figura 4.24: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Laguerre-Gauss de orden (2,2) mediante el método de propagación para $z = 10z_0$.

4.2. Haces Laguerre-Gauss Elegantes

Considere una amplitud compleja dada por:

$$U(\rho, \phi, z) = \Psi(\rho, \phi, z) \exp(-ikz). \quad (4.21)$$

Con envolvente compleja de la forma:

$$\Psi(\rho, \phi, z) = A(q)G(\sqrt{c}\rho)\Phi(\phi) \exp(-c\rho^2), \quad (4.22)$$

donde

$$c \equiv \frac{ik}{2q}. \quad (4.23)$$

Sustituyendo la ecuación (4.22) en la ecuación paraxial de Helmholtz (4.1), se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{G} \left\{ \frac{\partial^2 G}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial G}{\partial \rho} (1 - 4c\rho^2) - 2ik \frac{\partial G}{\partial z} \right\} + \frac{1}{\Phi \rho^2} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} - \frac{2ik}{A} \frac{dA}{dz} - 4c = 0. \quad (4.24)$$

Haciendo un nuevo cambio de variable $u = \sqrt{c}\rho$, la expresión (4.24) se transforma en:

$$\frac{1}{Gc} \left\{ c \frac{d^2 G}{du^2} + \frac{\sqrt{c}}{\rho} \frac{dG}{du} (1 - 2c\rho^2) \right\} + \frac{1}{\Phi \rho^2 c} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} - \frac{4q}{A} \frac{dA}{dq} - 4 = 0, \quad (4.25)$$

$$\text{con} \quad \frac{dA}{dz} = \frac{dA}{dz} \frac{dq}{dz} = \frac{dA}{dq} \quad \text{y} \quad \frac{dq}{dz} = 1.$$

Aplicando el método de separación de variables a la ecuación (4.25), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$-\frac{4q}{A} \frac{dA}{dq} - 4 = p, \quad (4.26)$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2, \quad (4.27)$$

$$u^2 \frac{d^2 G}{du^2} + u \frac{dG}{du} (1 - 2u^2) + (u^2 p - m^2) G = 0. \quad (4.28)$$

Realizando el cambio de variable, $v = u^2$, la ecuación (4.28) pasa a ser:

$$v^2 \frac{d^2 G}{dv^2} + v \frac{dG}{dv} (1 - v) + \frac{1}{4} (vp - m^2) G = 0. \quad (4.29)$$

Esta ecuación es similar a la ecuación (4.11), por lo que se puede hacer uso del método de Frobenius para determinar una solución:

$$G(v) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j v^{s+j}. \quad (4.30)$$

Sustituyendo (4.30) en (4.29), se obtiene la ecuación indicial:

$$s^2 - \frac{m^2}{4} = 0, \quad \text{por lo tanto} \quad s = \pm \frac{m}{2}. \quad (4.31)$$

Considerando sólo la raíz positiva la ecuación (4.30) es:

$$G(v) = v^{m/2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j v^j = v^{m/2} Q(v). \quad (4.32)$$

Ahora se sustituye (4.32) en (4.29) nuevamente para obtener:

$$vQ''(v) + (m+1-v)Q'(v) + \left(\frac{p}{4} - \frac{m}{2}\right)Q(v) = 0 \quad (4.33)$$

Comparando con la ecuación diferencial asociada de Laguerre (4.16), $Q(v) = L_n^m(v)$, con

$$\begin{aligned} n &= \frac{p}{4} - \frac{m}{2}, \\ \text{entonces} \\ p &= 4n + 2m. \end{aligned} \quad (4.34)$$

y

$$G(v) = v^{m/2} L_n^m(v) = (\sqrt{c}\rho)^m L_n^m(c\rho^2). \quad (4.35)$$

De la ecuación (4.26) se obtiene que:

$$A(q) = \left(\frac{q_0}{q(z)} \right)^{(1+p/4)}. \quad (4.36)$$

Resolviendo la ecuación (4.27) obtenemos una expresión para la función $\Phi(\phi)$:

$$\Phi(\phi) = B \exp(\pm im\phi), \quad B = cte. \quad (4.37)$$

Sustituyendo las expresiones de $G(v)$, $\Phi(\phi)$ y $A(q)$ en la envolvente compleja (4.22), se tiene:

$$\Psi(\rho, \phi, z) = \left(\frac{q_0}{q(z)} \right)^{(2n+m+2)\frac{1}{2}} (\sqrt{c}\rho)^m L_n^m(c\rho^2) \exp(\pm im\phi) \exp(-c\rho^2). \quad (4.38)$$

Por lo tanto la amplitud compleja de los haces Laguerre-Gauss Elegantes es:

$$U_{n,m}(\rho, \phi, z) = \left(\frac{q_0}{q(z)} \right)^{(2n+m+2)\frac{1}{2}} (\sqrt{c}\rho)^m L_n^m(c\rho^2) \times \exp \{ -ikz - c\rho^2 \pm im\phi \}. \quad (4.39)$$

4.2.1. Distribuciones de Intensidad

La intensidad óptica de los modos Laguerre-Gauss Elegantes (HLGE) viene dada por:

$$\begin{aligned} I(\rho, z) &= |U_{n,m}(\rho, \phi, z)|^2 \\ &= \left| \left(\frac{q_0}{q(z)} \right)^{(2n+m+2)\frac{1}{2}} (\sqrt{c}\rho)^m L_n^m(c\rho^2) \times \exp \{ -ikz - c\rho^2 \pm im\phi \} \right|^2. \end{aligned} \quad (4.40)$$

La distribución y perfil de intensidad de algunos modos a campo lejano se presentan a continuación:

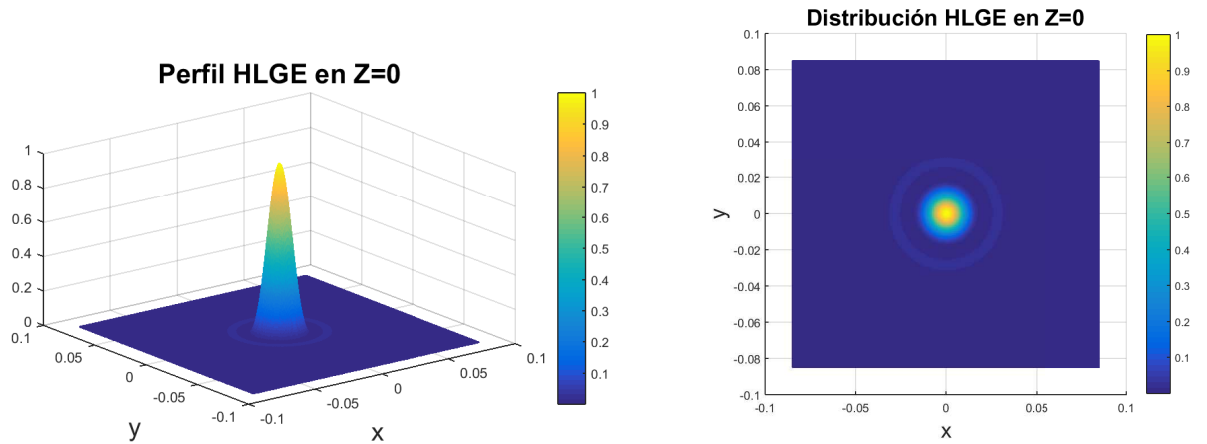


Figura 4.25: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Laguerre-Gauss Elegante de orden (0,1) en $z = 0$ usando la ecuación (4.40).

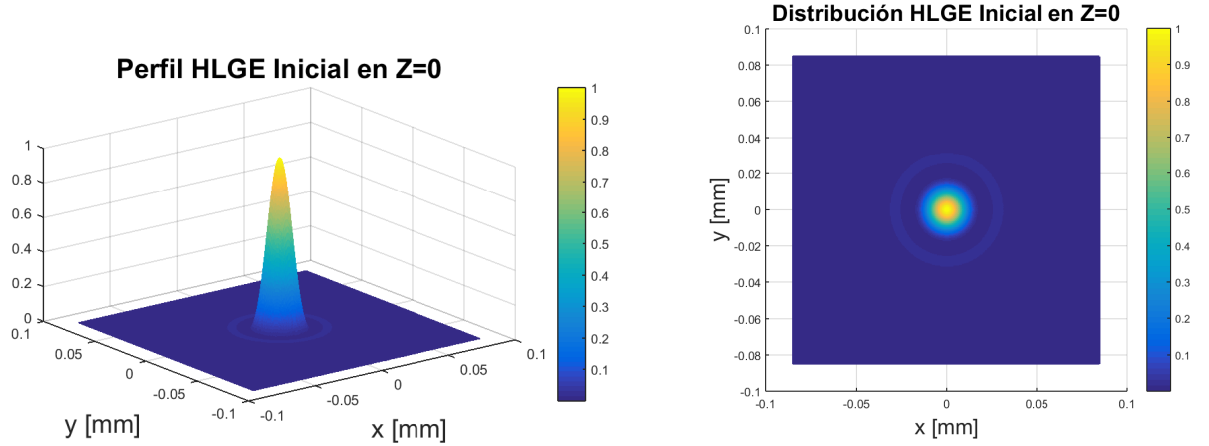


Figura 4.26: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Laguerre-Gauss Elegante de orden $(0,1)$ en $z = 0$. Haz de entrada para el método de propagación.

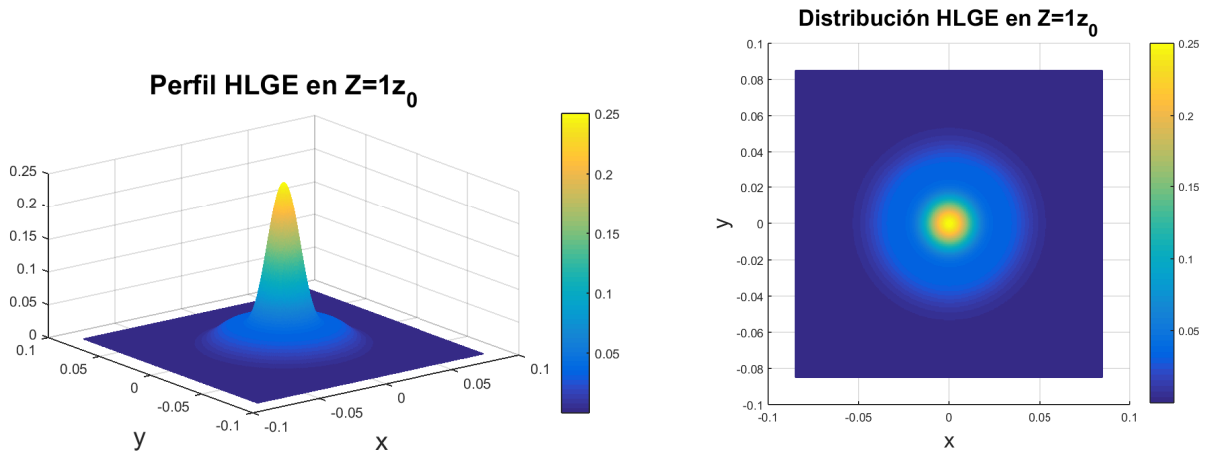


Figura 4.27: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Laguerre-Gauss Elegante de orden $(0,1)$ en $z = z_0$ usando la ecuación (4.40).

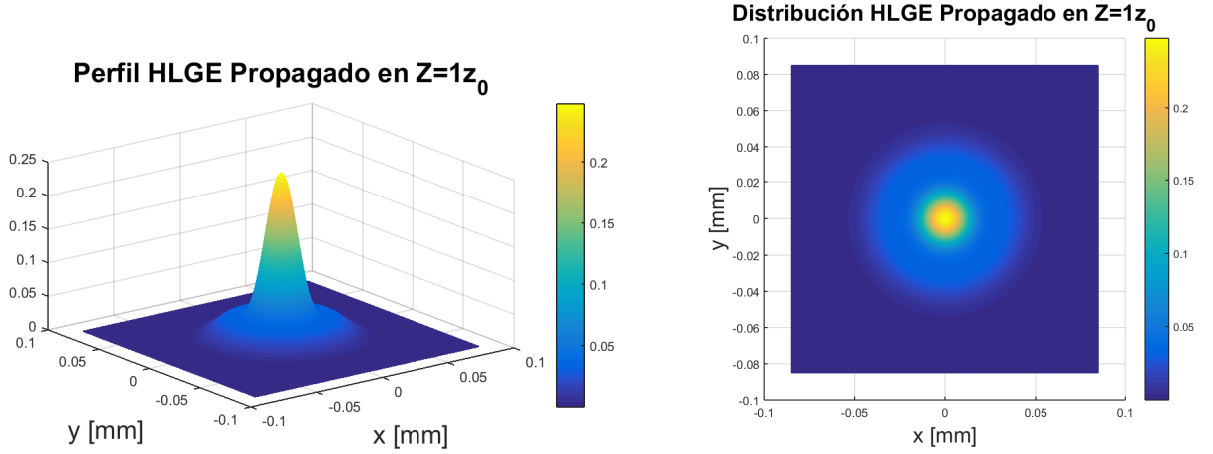


Figura 4.28: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Laguerre-Gauss Elegante de orden $(0,1)$ mediante el método de propagación para $z = z_0$.

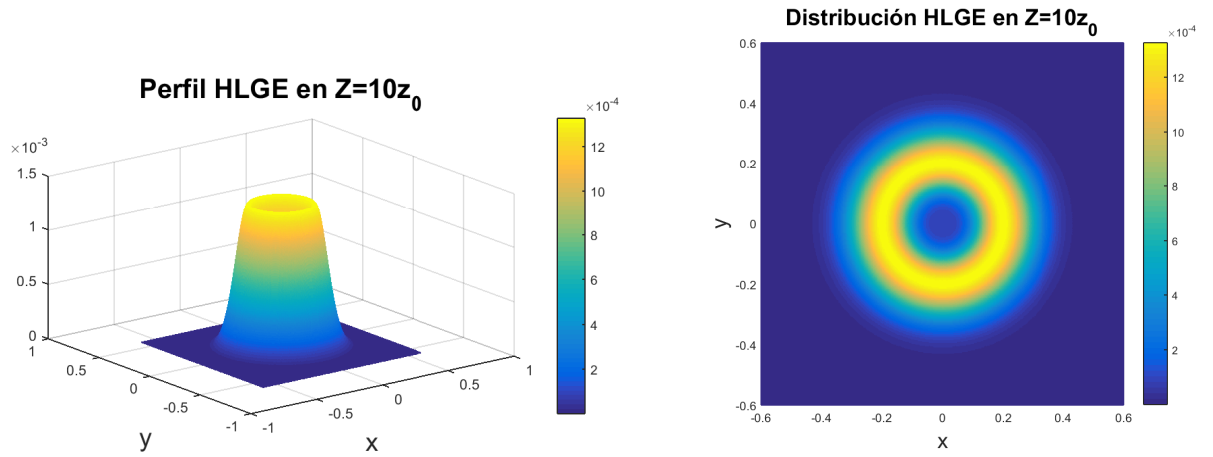


Figura 4.29: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Laguerre-Gauss Elegante de orden $(0,1)$ en $z = 10z_0$ usando la ecuación (4.40).

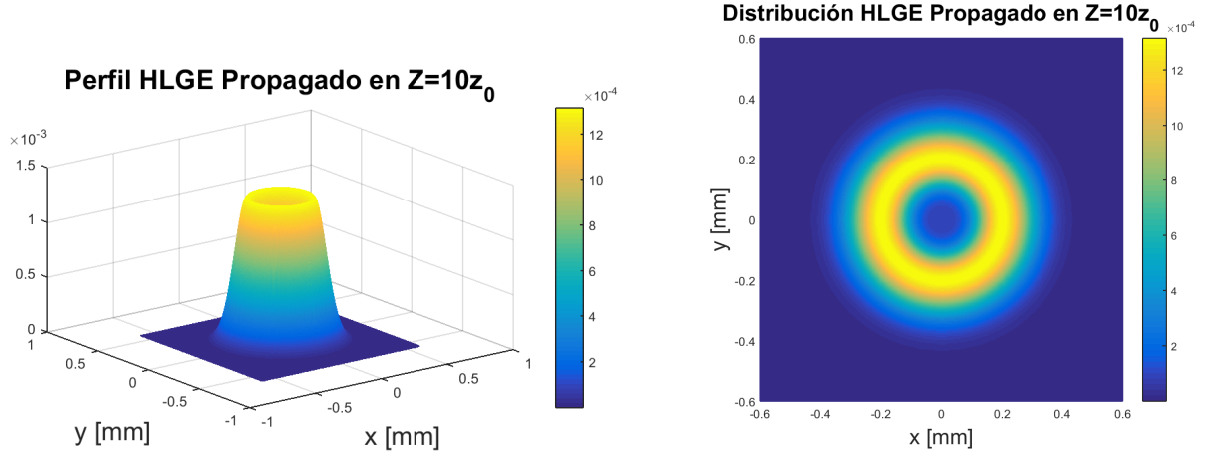


Figura 4.30: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Laguerre-Gauss Elegante de orden $(0,1)$ mediante el método de propagación para $z = 10z_0$.

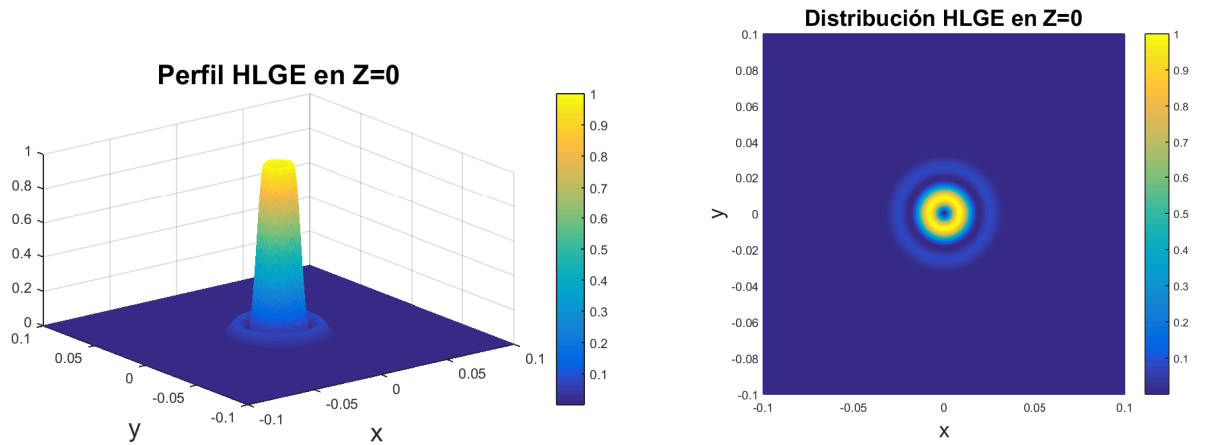


Figura 4.31: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Laguerre-Gauss Elegante de orden $(1,3)$ en $z = 0$ usando la ecuación (4.40).

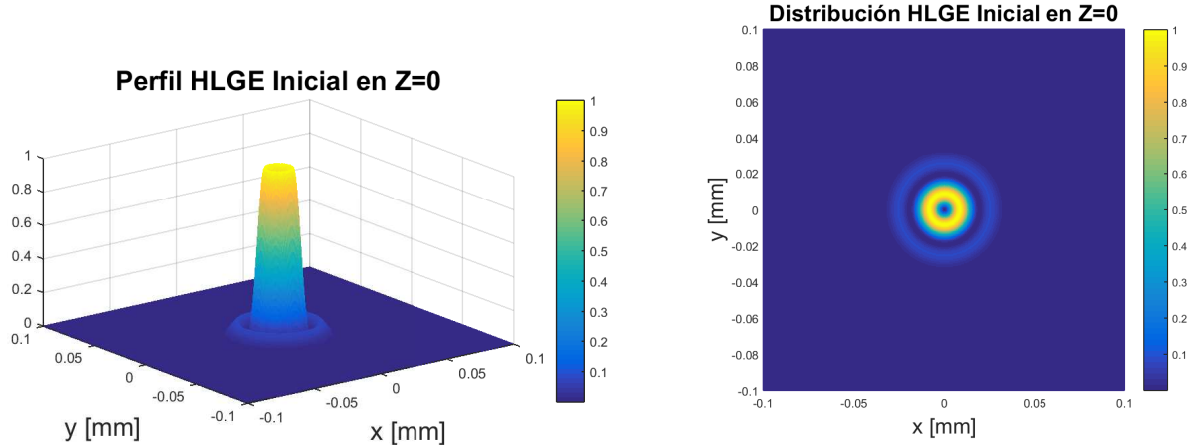


Figura 4.32: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Laguerre-Gauss Elegante de orden (1,3) en $z = 0$. Haz de entrada para el método de propagación.

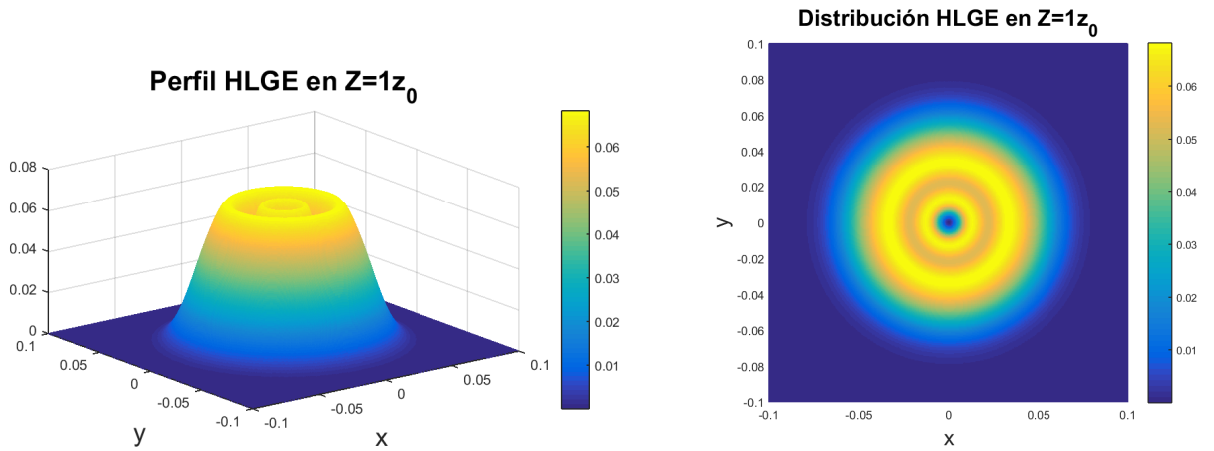


Figura 4.33: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Laguerre-Gauss Elegante de orden (1,3) en $z = z_0$ usando la ecuación (4.40).

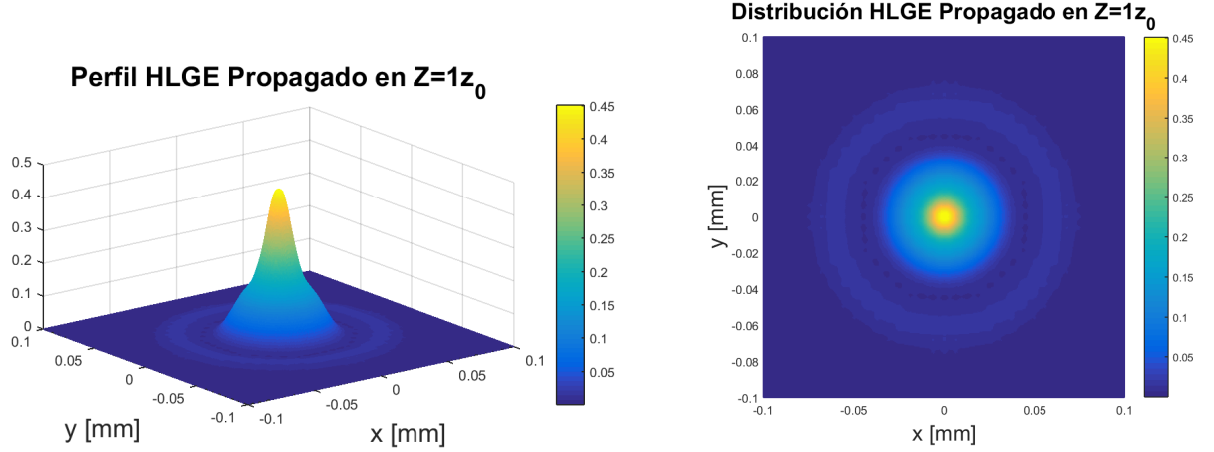


Figura 4.34: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Laguerre-Gauss Elegante de orden $(1,3)$ mediante el método de propagación para $z = z_0$.

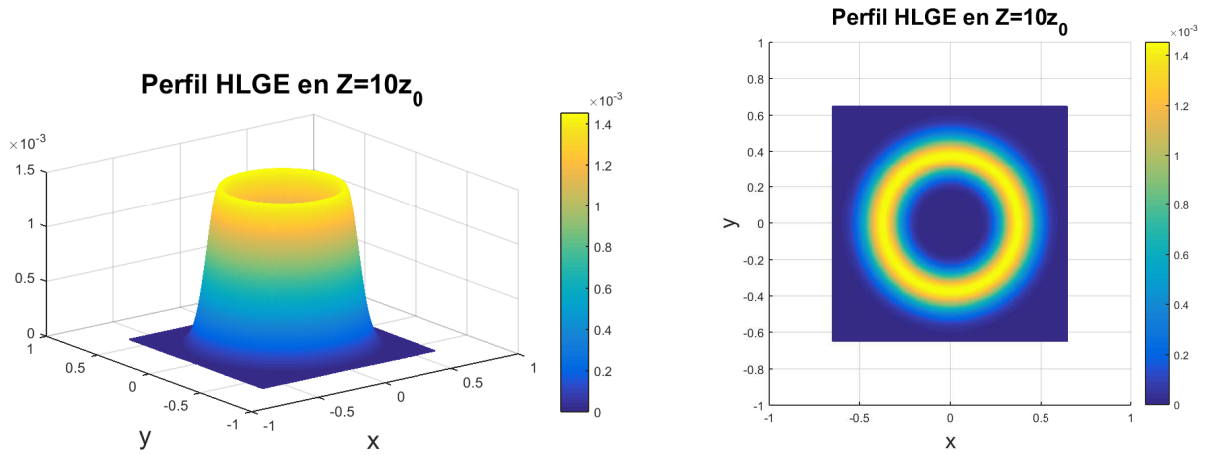


Figura 4.35: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Laguerre-Gauss Elegante de orden $(1,3)$ en $z = 10z_0$ usando la ecuación (4.40).

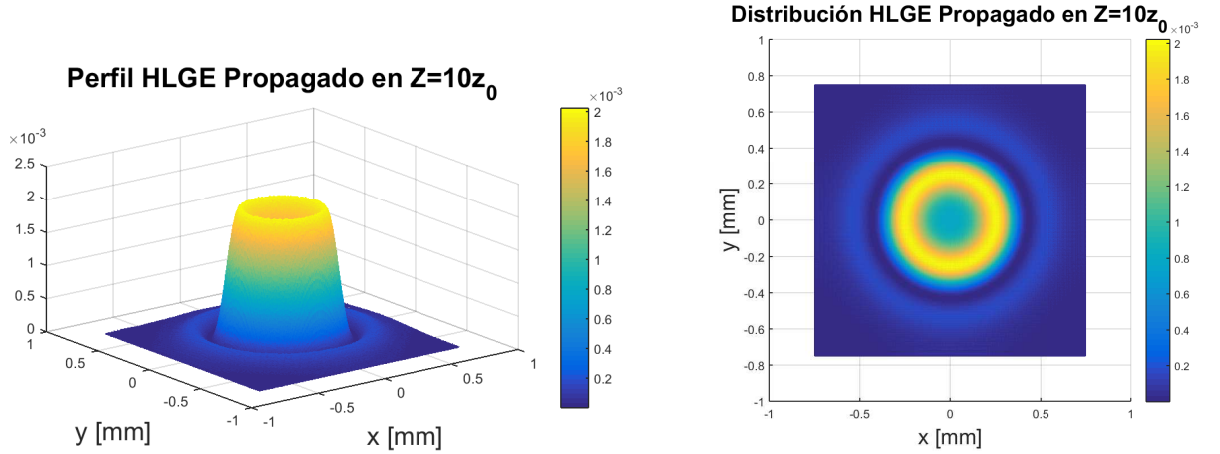


Figura 4.36: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Laguerre-Gauss Elegante de orden (1,3) mediante el método de propagación para $z = 10z_0$.

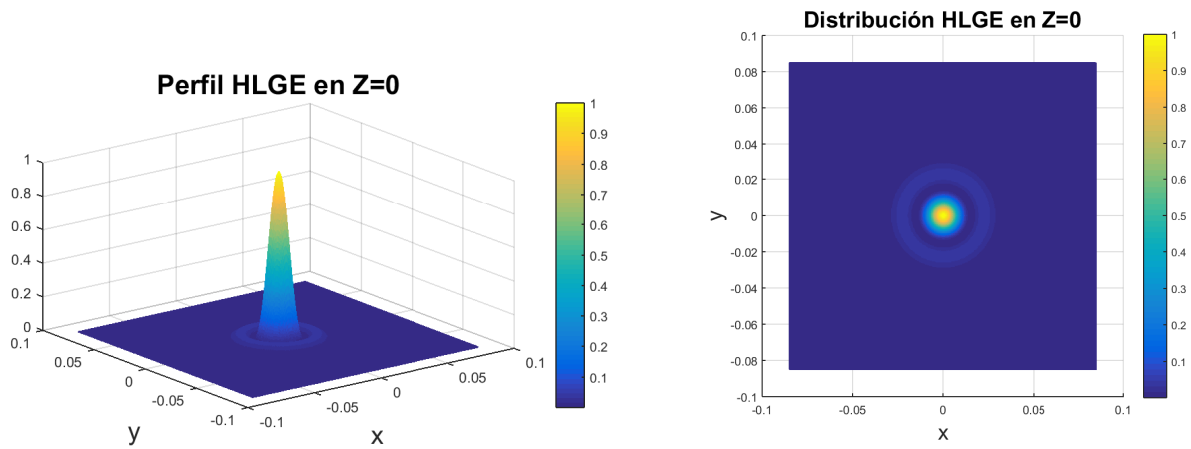


Figura 4.37: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Laguerre-Gauss Elegante de orden (0,2) en $z = 0$ usando la ecuación (4.40).

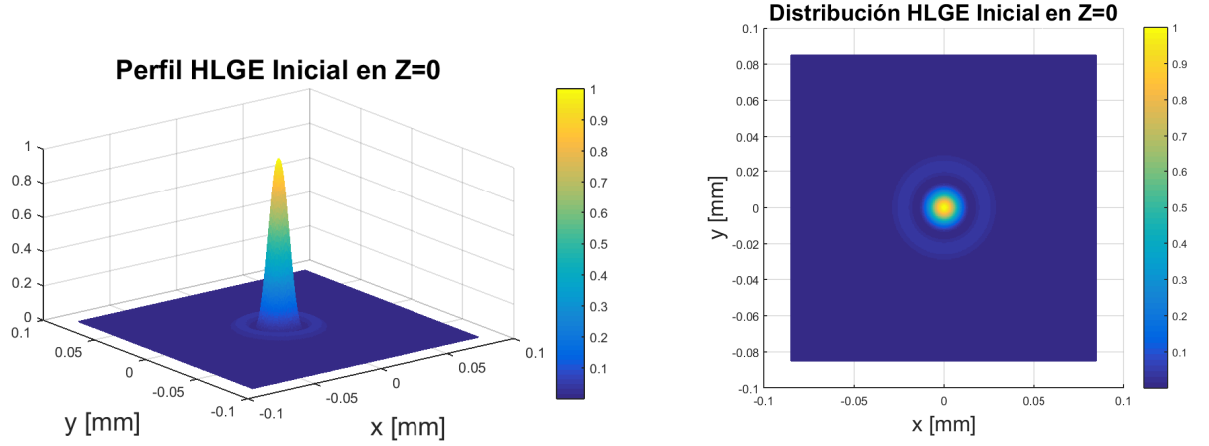


Figura 4.38: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Laguerre-Gauss Elegante de orden $(0, 2)$ en $z = 0$. Haz de entrada para el método de propagación.

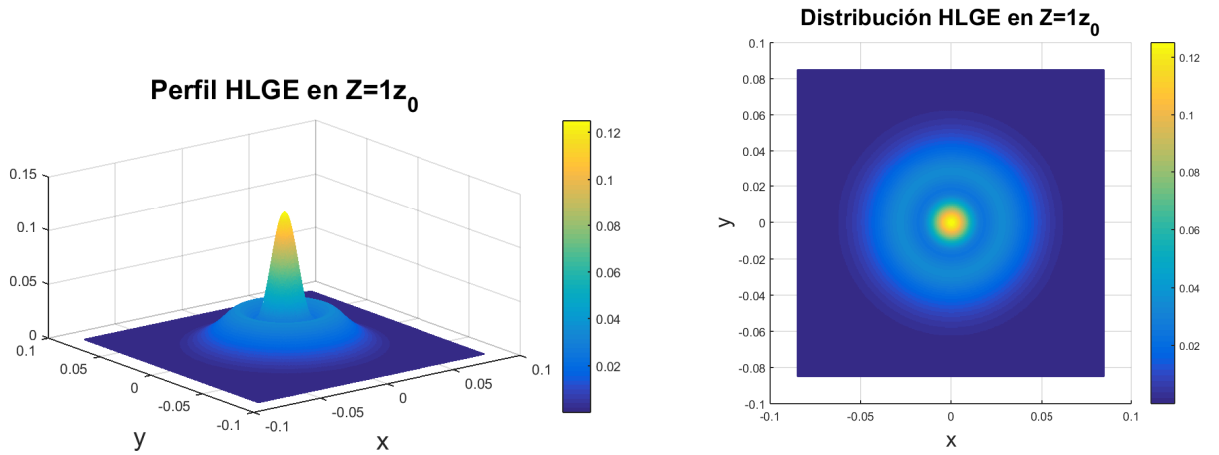


Figura 4.39: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Laguerre-Gauss Elegante de orden $(0, 2)$ en $z = z_0$ usando la ecuación (4.40).

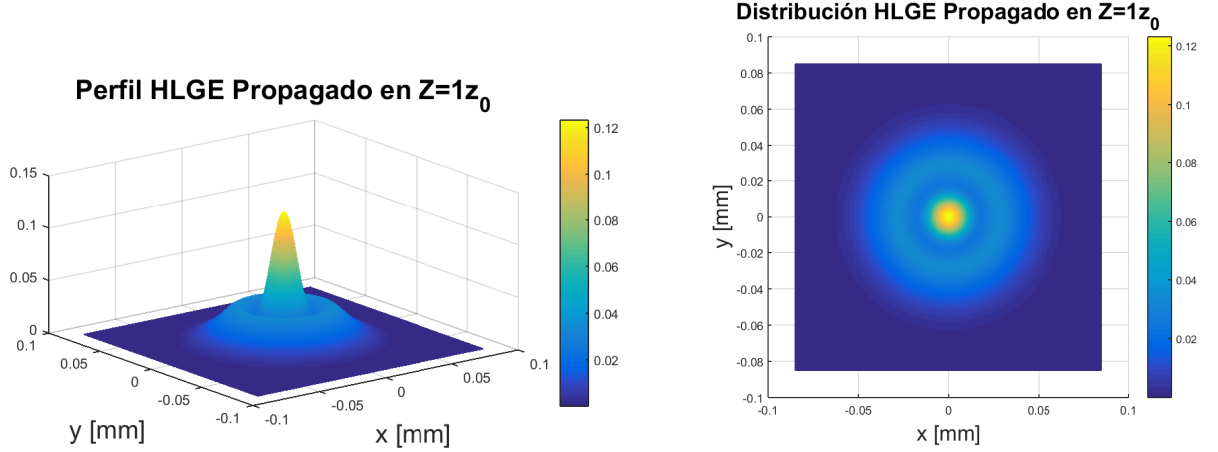


Figura 4.40: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Laguerre-Gauss Elegante de orden $(0,2)$ mediante el método de propagación para $z = z_0$.

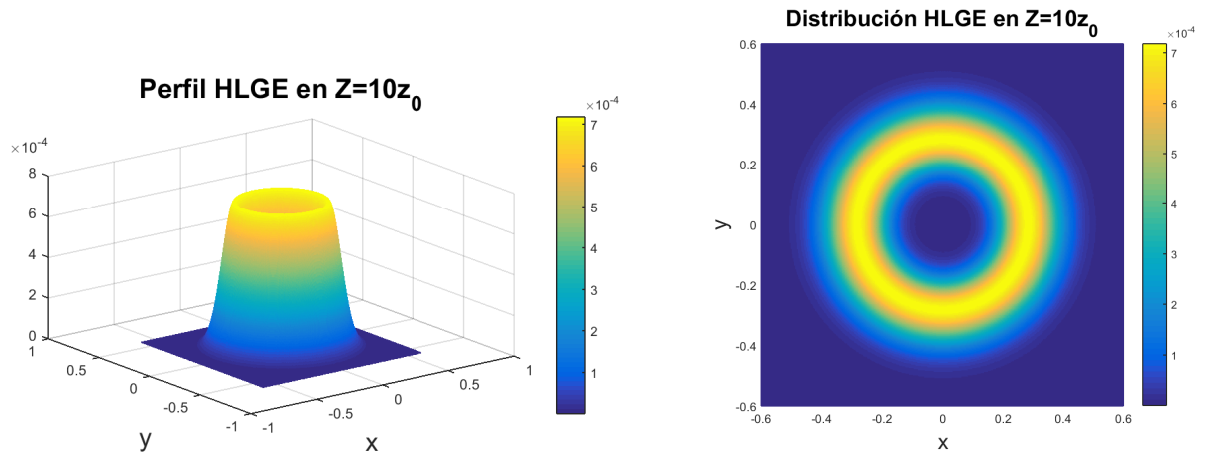


Figura 4.41: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Laguerre-Gauss Elegante de orden $(0,2)$ en $z = 10z_0$ usando la ecuación (4.40).

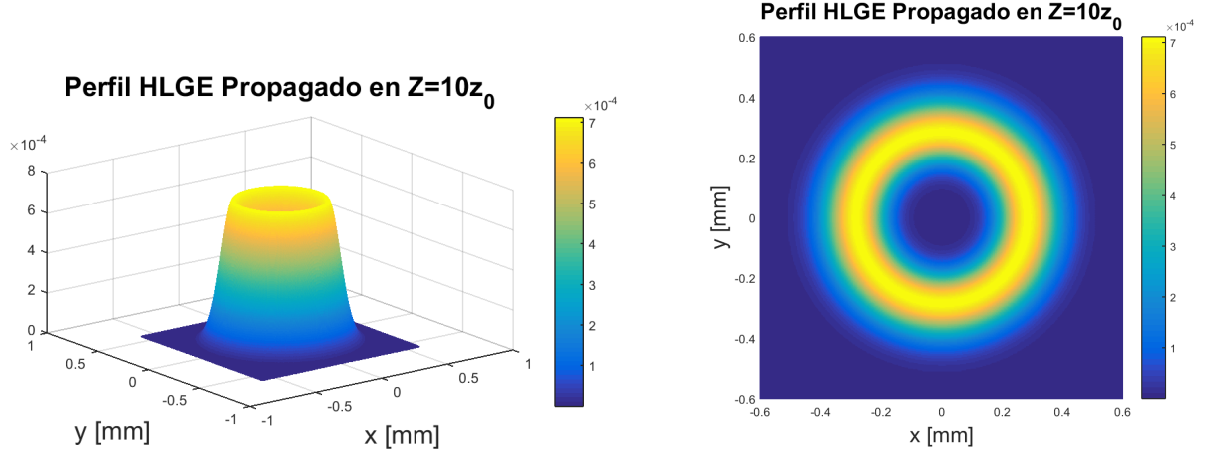


Figura 4.42: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Laguerre-Gauss Elegante de orden $(0,2)$ mediante el método de propagación para $z = 10z_0$.

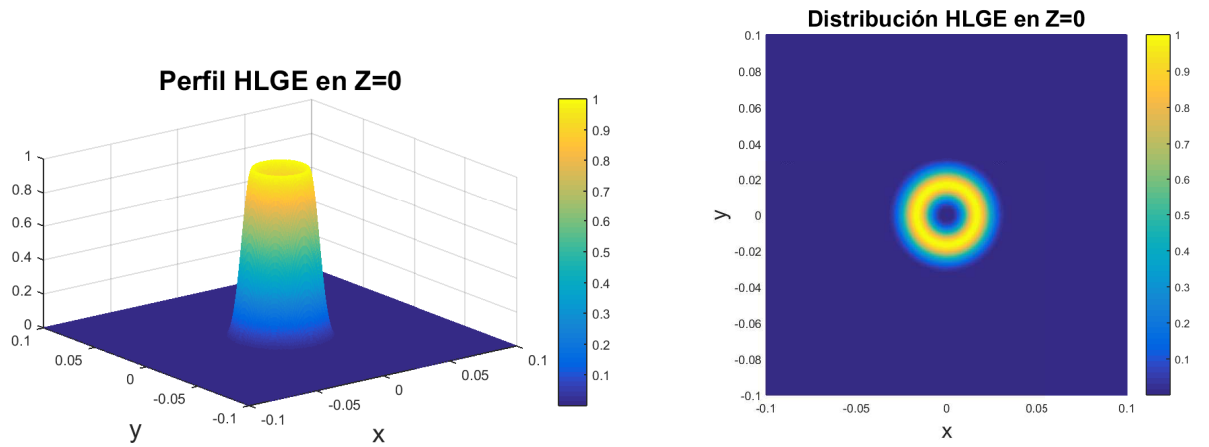


Figura 4.43: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Laguerre-Gauss Elegante de orden $(2,1)$ en $z = 0$ usando la ecuación (4.40).

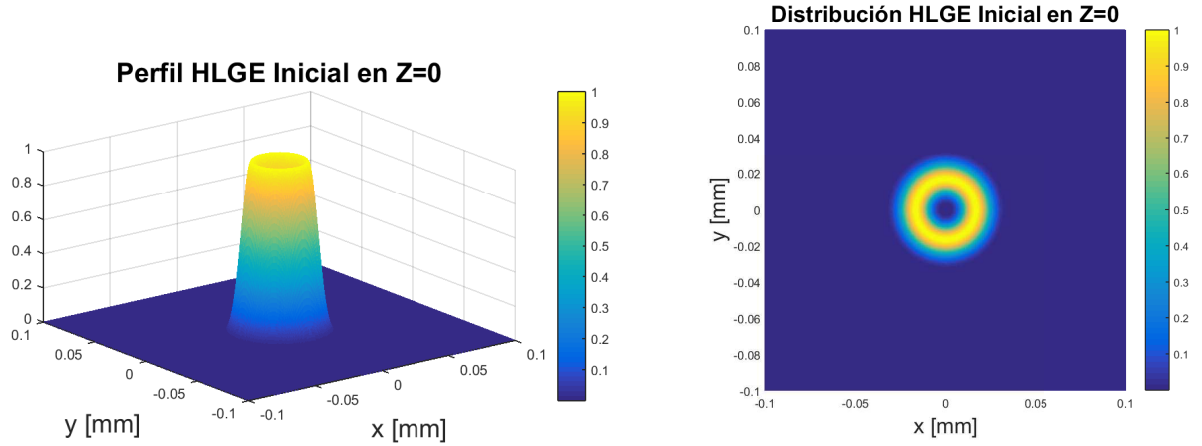


Figura 4.44: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Laguerre-Gauss Elegante de orden $(2,1)$ en $z = 0$. Haz de entrada para el método de propagación.

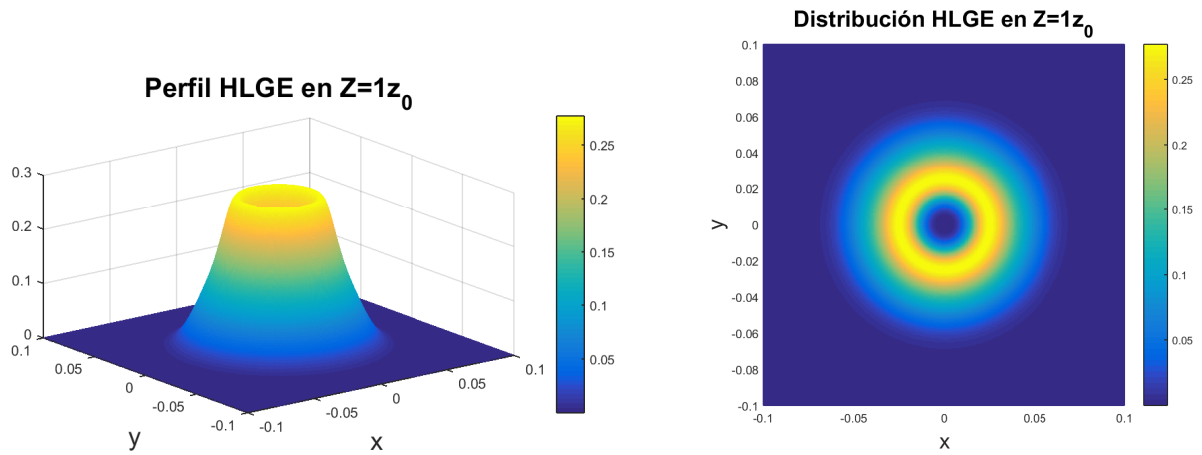


Figura 4.45: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Laguerre-Gauss Elegante de orden $(2,1)$ en $z = z_0$ usando la ecuación (4.40).

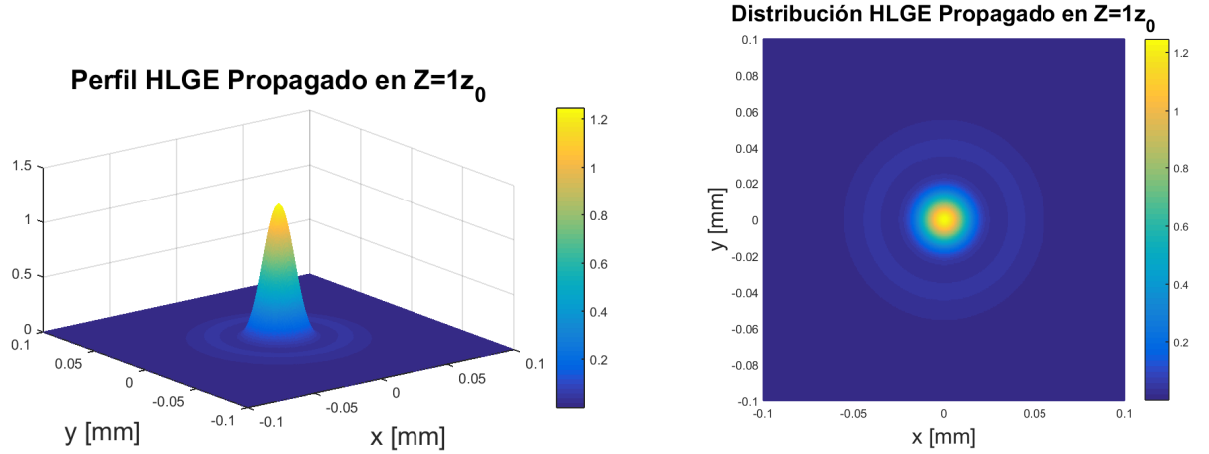


Figura 4.46: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Laguerre-Gauss Elegante de orden $(2,1)$ mediante el método de propagación para $z = z_0$.

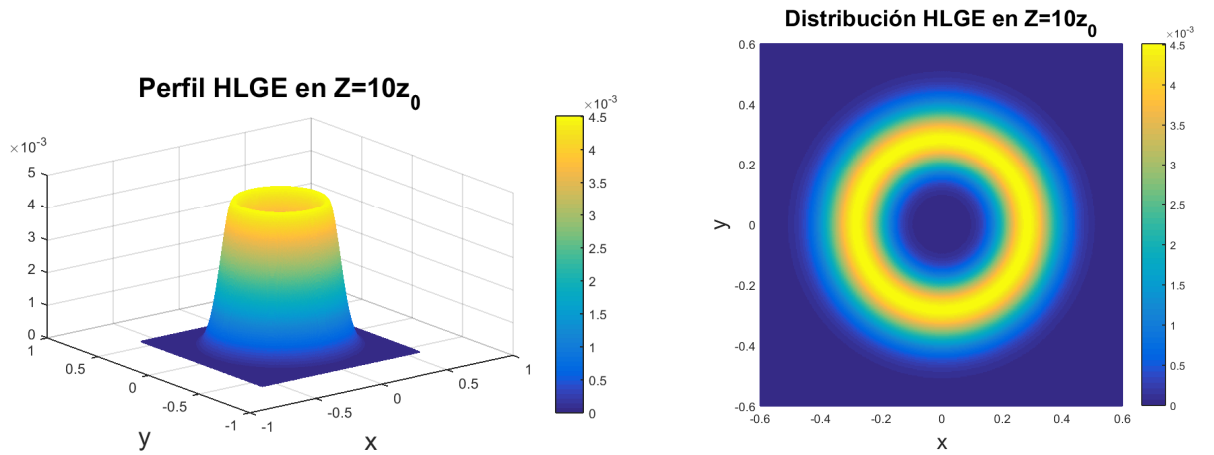


Figura 4.47: Gráfica del perfil y distribución transversal de la intensidad de un haz Laguerre-Gauss Elegante de orden $(2,1)$ en $z = 10z_0$ usando la ecuación (4.40).

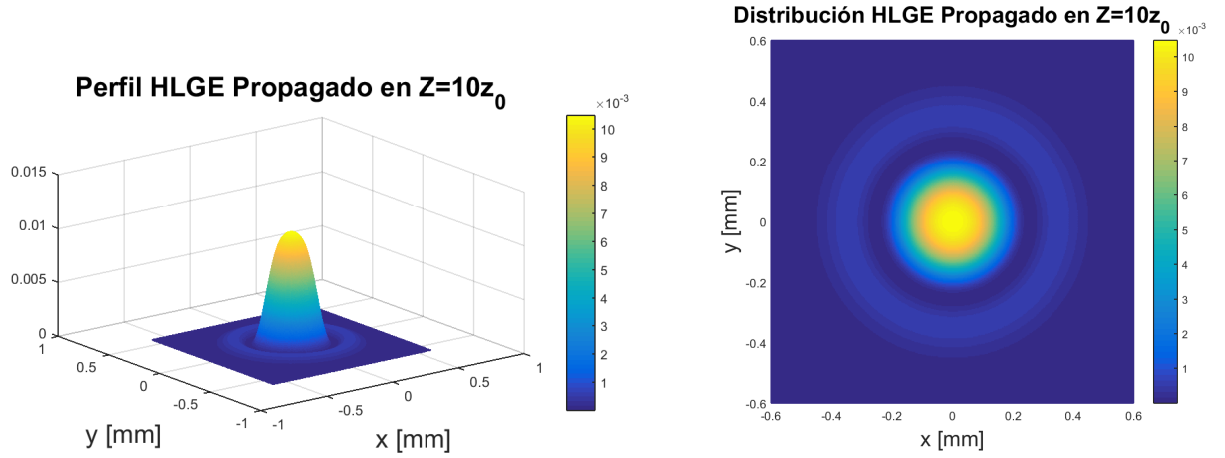


Figura 4.48: Gráfica del perfil y distribución de intensidad del haz Laguerre-Gauss Elegante de orden $(2,1)$ mediante el método de propagación para $z = 10z_0$.

4.3. Análisis de Resultados

En la literatura se pueden encontrar gráficos de los haces Laguerre-Gauss como los generados aquí por la solución a la ecuación paraxial de Helmholtz que son comparados con los resultados obtenidos de la simulación de estos haces mediante el método de propagación del paso dividido de Fourier. Se observa que el perfil de intensidad depende de m , n o de $m + n$ en forma separada, es decir, para $m = 0$ y $n > 0$ la distribución de intensidad del perfil es n anillos más un spot (mancha) brillante central con la mayor intensidad en el centro y el anillo exterior ligeramente más ancho que los interiores. Por otro lado cuando $m > 0$ y $n = 0$, sólo se muestra un anillo que incrementa su radio a medida que m crece. En los resultados obtenidos de la propagación se observa que para los modos donde $m = 0$ las gráficas del perfil y distribución de intensidad concuerdan con los obtenidos de la solución. Por otro lado, cuando $m > 0$ tenemos una distribución de intensidad transversal con un anillo central (con spot oscuro en el centro) para los resultado de la solución analítica, en cambio para las gráficas generadas por medio del método de propagación el spot central oscuro desaparece dando lugar a un spot brillante (pico) con una mayor intensidad comparada con la gráfica de la solución analítica para una misma posición de propagación manteniendo el mismo número de anillos.

Las gráficas de los haces Laguerre-Gauss Elegantes dados por la solución a la ecuación paraxial tiene un perfil de intensidad que al igual que los Hermite-Gauss Elegantes deja de cambiar para una distancia mayor a $5z_0$, presentando siempre un anillo que incrementa su radio a medida que m, n crecen. Los resultados del método de propagación concuerda con los analíticos para cuando $m = 0$ y $n > 0$. Para $m, n > 1$ los resultados mediante el método de propagación muestran una mancha central brillante con un anillo que presenta una muy baja intensidad, el perfil es completamente diferente al del resultado analítico.

Capítulo 5

Conclusiones

Los haces Gaussianos (HG) reproducidos con el método de propagación del paso dividido de Fourier, el cual involucra la función de transferencia en el espacio libre, coinciden completamente con el perfil y distribución de intensidad de los resultados generados mediante la solución analítica para cada una de las distancias de propagación. Por lo que el resultado numérico cumplen que para una distancia de propagación igual a la distancia de Rayleigh la intensidad pico del haz decae a la mitad de su máximo.

Por otro lado, los haces Hermite-Gauss (HHG) bajo las mismas condiciones su perfil de intensidad es dependiente de los parámetros l y m de los polinomios de Hermite, pero al igual que los haces Gaussianos, el perfil no cambia para cada uno de los modos a medida que la distancia de propagación z sigue creciendo, es decir, en la difracción de Fraunhofer. Como ya se sabe en el caso para $l = m = 0$ tenemos el modo fundamental, esto es, el haz Gaussiano por lo que su perfil coincide con el de la solución Gaussiana. Haciendo la comparación de los resultados obtenidos mediante la solución analítica con los de la simulación numérica, se observa que son idénticos en la forma del perfil y distribución transversal de intensidad para cada uno de los modos en cada una de las distancias de propagación.

En el caso de los haces Hermite-Gauss Elegantes (HHGE) en comparación con los HHG el perfil de los modos en el cual $l, m = 0, 1$ son muy similares, tanto en los HHGE como en los HHG, para estos casos el perfil de intensidad se mantiene para $z \geq z_0$. Por otro lado, en los modos donde $l \geq 2$ y $m = 0$ la distribución de intensidad se presenta en dos lóbulos ubicados en forma horizontal (a lo largo del eje x) que van mostrando una mayor separación entre sí a medida que l crece. De forma similar cuando $l = 0$ y $m \geq 2$ pero con los lóbulos distribuidos ahora de manera vertical (a lo largo del eje y). El último caso es cuando $l, m \geq 2$, dando como resultado la combinación de los dos casos anteriores, es decir, la distribución de intensidad se da en cuatro lóbulos que se van separando al crecer l y m . En estos casos el perfil de intensidad ya no cambia a partir de un $z \geq 5z_0$. Estos mismos resultados son reproducidos con el método de propagación del paso dividido de Fourier.

Los resultados arrojados por el método de propagación para las funciones Laguerre-Gauss y Laguerre-Gauss Elegantes con los resultados de la solución analítica para el caso de los modos en donde $m = 0$ y $n \geq 0$. Para los otros caso hay una gran discrepancia ya que por el lado del método de propagación obtenemos siempre un spot central (pico) brillante y del lado de la solución para $m \geq 1$ obtenemos un anillo central con la mayor intensidad.

Bibliografía

- [1] Eugene Hecht. *Optics*. Addison Wesley, 4th edition.
- [2] T. H. Maiman. Stimulated optical radiation in ruby. *Nature*, 87:943, 1960.
- [3] A. E. Siegman. *Lasers*. 1986.
- [4] A. E. Siegman. Laser beams and resonators: The 1960s. *IEEE Journal of Spacial Topics in Quantum Electronics*, XX:100–108, 1999.
- [5] Robert W. Boyd. *Nonlinear Optics*. Third edition.
- [6] P. A. Apanasevich, A. A. Kananovich, and G. I. Timofeeva. Influence of resonator on sum-frequency cw generation power in an srs-laser. *Journal of Applied Spectroscopy*, 80(2):184–190, 2013.
- [7] H. Kogelnik and T. Li. Laser beams and resonators. *Appl. Opt.*, 5:1550–1556, 1966.
- [8] F. L Pedrotti and et al. *Introduction to Optics*. Second edition, 1993.
- [9] William T. Silfvast. *Lasers Fundamentals*. Second edition, 2004.
- [10] M. Sheik-Bahae and et al. Sensitive measurement of optical nonlinearities using a single beam. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 26(4), 2017.
- [11] E. V. Garcia Ramirez, M. L. Arroyo Carrasco, and at al. Far field intensity distributions due to spatial self phase modulation of a gaussian beam by a thin nonlocal nonlinear media. *Optics Express*, 18(21), 2010.
- [12] B. E. A. Saleh and M. C. Teich. *Fundamentals of Photonics*. 1991.
- [13] A. E. Siegman. Hermite- gaussian functions of complex argument as optical-beam eigenfunctions. *J. Opt. Soc. Am.*, 63:1093, 1973.
- [14] A. E. Siegman. *Lasers*. 1986.
- [15] S. Saghafi and C. J. R. Sheppard. Near field and far field of elegant hermite-gaussian and laguerre-gaussian modes. *Journal of Modern Optics*, 45(10), 1998.
- [16] E. Zauderer. Complex argument hermite-gaussian and laguerre-gaussian beams. *J. Opt. Soc. Am.*, 3:465, 1986.
- [17] N. Matsumoto, T. Ando, and et al. Generation of high-quality higher-order laguerre-gaussian beams using liquid-crystal-on-silicon spatial light modulators. *J. Opt. Soc. Am.*, 25(7), 2008.
- [18] Anthony A. Tovar. Production and propagation of cylindrically polarized laguerre-gaussian laser beams. *J. Opt. Soc. Am.*, 15(10), 1998.

- [19] Lingyan Shi and et al. Propagation of gaussian and laguerre-gaussian vortex beams through mouse brain tissue. *J. Biophotonics*, 10:1756–1760, 2017.
- [20] X. Chu. Evolution of beam quality and shape of hermite-gaussian beam in non-kolmogorov turbulence. *Progress in Electromagnetics Research*, 120:339–353, 2011.
- [21] F. Wang and et al. Partially coherent elegant hermite-gaussian beams in turbulent atmosphere. *Appl Phys*, 103:461–469, 2010.
- [22] Ting-Chung Poon and Taegeun Kim. *Engineering Optics With MATLAB*.
- [23] D. Halliday, R. Resnick, and J. Walker. *Fundamentals of physics*. Ninth edition, 2011.
- [24] B. E. A. Saleh and M. C. Teich. *Fundamentals of Photonics*. 1991.
- [25] F. E. Harris G. B. Arfken, H. J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, seventh edition, 2013.