

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



**Proceso de Poisson aplicado a los arribos de un
establecimiento**

*Tesis presentada al Colegio de Matemáticas para la obtención del
título de:*

LICENCIADA EN ACTUARÍA

Presenta:

Ariana Cristal Romero Zahuantitla

Directores de Tesis:

Dra. Hortencia Josefina Reyes Cervantes

Dr. Francisco Solano Tajonar Sanabria

Puebla, Pue.
Mayo 2022

DEDICATORIA

*A mis padres
!Muchas gracias!*

Agradecimientos

A mis padres Feliciano D. Zahuantitla Salas y J.L. Adrian Romero Pozo, por el apoyo incondicional en todo momento, por todos los consejos, por el amor y la confianza que me tienen.

A mis directores de tesis, la Dra. Hortencia Josefina Reyes Cervantes y el Dr. Francisco Solano Tajonar Sanabria, por compartir el conocimiento y tiempo para desarrollar este trabajo, también para el Jurado de tesis, la Maestra Brenda Zavala López, el Maestro José Hernández Asunción y el Doctor Fernando Velasco Luna.

A mi hermana Azucena Naiti Romero Zahuantitla, por su cariño y comprensión a lo largo de la vida.

A Esaul Capilla Potrero por el apoyo profesional y el cariño que me brinda en todo momento.

A todos los maestros que a lo largo de mis estudios hicieron posible este logro.

A todos los amigos que han formado parte de mi formación profesional.

A todas las mascotas que he tenido a lo largo de mi vida.

Y a todas las personas y familiares que nunca dejaron de confiar en mí.

Índice general

Introducción	1
1. Conceptos básicos de probabilidad	3
1.1. Conceptos de probabilidad	3
1.2. Variables aleatorias	5
1.3. Distribuciones de probabilidad	7
1.3.1. Distribución Bernoulli	7
1.3.2. Distribución Binomial	8
1.3.3. Distribución Poisson	9
1.3.4. Distribución Uniforme	11
1.3.5. Distribución Exponencial	11
2. Procesos Estocásticos	13
2.1. Conceptos básicos de un proceso estocástico	13
2.2. Procesos de conteo	16
3. Aplicación	25
3.1. Planteamiento del problema	25

3.2. Registro de información	26
3.3. Desarrollo	28
Conclusiones	35
A. Anexo I: Código en R para generar gráficas	37
Bibliografía	38

Introducción

En este trabajo se estudia y trabaja con un proceso estocástico en tiempo continuo y espacio de estados discreto, el cual, además de su importancia teórica, tiene un papel importante en el estudio de una gran número de fenómenos aleatorios. A tal proceso se le conoce como Proceso Poisson.

El proceso Poisson es un proceso puntual importante con un rol equivalente al de la distribución normal en estadística, se le considera el proceso más aleatorio y da una buena descripción de muchos procesos de la vida real, como por ejemplo: a) las llamadas telefónicas que llegan a una central; b) arribos de clientes para un servicio; c) número de accidentes en un cierto lugar, etc.

Así, el proceso de Poisson puede sonar un tema complicado, tal vez muchos lectores ni siquiera conocen el nombre. Aunque sea desconocido para muchos, el proceso Poisson es un proceso que se puede encontrar en las diferentes actividades diarias que se realizan, ir al médico, ingresar a una tienda, llegar a un estacionamiento, llegar a un cajero, etc.

A continuación se da a conocer de manera detallada el presente trabajo.

Hay un negocio dedicado a la venta de abarrotes ubicado en un pequeño barrio en el estado de Tlaxcala, este negocio se inicio aproximadamente en el año 2015, con el paso del tiempo, el negocio funcionó de manera espectacular, conforme el negocio crecía, los clientes solicitaban más y más productos que ya no estaban incluidos en el apartado de los abarrotes, productos de papelería, semillas, chiles secos, alimento para ganado, inclusive herramientas como martillos, taladros y más, así que los dueños decidieron crear un apartado dentro del mismo establecimiento que fuera exclusivamente productos de ferretería, dicho apartado se creó en el año 2019, y esta decisión fué todo un éxito pues hoy en día el número de personas que asiste a comprar productos de ferretería es casi igual al número de personas que asiste a comprar productos de la tienda.

Lo interesante es que a pesar de la situación por la que se atraviesa a nivel mundial por el tema de la pandemia, esto no fue motivo para que el apartado de ferretería tuviera afecciones, pues los ingresos en este apartado ya igualan y en algunos casos superan a los ingresos del apartado de la tienda.

Se decidió realizar el siguiente trabajo, para analizar el número de clientes que llegan a cada apartado y el comportamiento que tienen, todo esto mediante un registro de las llegadas a cada apartado.

Para lograr el análisis acertado, esta tesis se encuentra estructurada como sigue:

En el Capítulo 1 se abordarán las herramientas de probabilidad necesarias en este trabajo, tales como: definiciones, teoremas y algunos ejemplos que ayudarán comprender mejor los conceptos, también se mencionan las principales distribuciones de probabilidad discretas y continuas, pues se utilizarán para adecuar la información registrada.

En el Capítulo 2 se revisarán y estudiarán la parte correspondiente a la teoría de procesos estocásticos entre la cual se encuentran los procesos de conteo y en especial el proceso de Poisson, las propiedades que tienen y al igual que en el Capítulo 1 se muestran algunos ejemplos que son de ayuda para comprender mejor un proceso contador.

Y en el Capítulo 3 se muestran los registros de llegada de los clientes, y se aplican las definiciones y conceptos vistos en los capítulos 1 y 2 para finalmente realizar un análisis en base a la información recabada.

Al final de los capítulos se añaden las conclusiones obtenidas en la aplicación, y algunas sugerencias que pueden ser de gran ayuda y ventaja para los dueños del establecimiento.

Capítulo 1

Conceptos básicos de probabilidad

El desarrollo de este capítulo presenta los conceptos básicos de la teoría de probabilidad, así como también, una pequeña descripción de temas que son importantes para definir los conceptos básicos. Se inicia con la definición de una variable aleatoria y se desarrolla hasta aterrizar con las distribuciones que serán de gran utilidad.

1.1. Conceptos de probabilidad

Para empezar, se puede definir a la probabilidad como el cálculo asociado a un evento o suceso aleatorio, esta definición engloba un mundo de definiciones y conceptos que son de gran importancia para el desarrollo de la tesis, por consiguiente definimos a continuación.

Definición 1.1.1 *Un conjunto es una colección de elementos que comparten una misma propiedad.*

Por ejemplo, el conjunto de las abejas melíferas, dónde la característica que comparten es la de producir miel.

Definición 1.1.2 *El espacio muestral Ω es el conjunto de todos los resultados posibles que pueden suceder en un experimento aleatorio ϵ .*

Donde un experimento aleatorio se entiende como aquel experimento que admite repetición bajo las mismas condiciones pero que al realizarlo no se puede precisar que resultado va a ocurrir.

Nota: Dado que el espacio muestral Ω puede ser un conjunto, entonces se tiene que es finito, infinito y numerable o infinito y no numerable.

Si algún subconjunto $A \subset \Omega$ ha ocurrido, se le llamará evento o suceso.

Definición 1.1.3 Sea F la colección de subconjuntos del espacio muestral Ω asociado a un experimento aleatorio, decimos que F es una σ -álgebra si:

- $\emptyset, \Omega \in F$.
- Si $A \in F \Rightarrow A^C \in F$.
- Si A, B son eventos y $A, B \in F$, entonces $A \cup B \in F$.
- Sea $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ una colección numerable de eventos en F , entonces

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in F. \quad (1.1)$$

Para ilustrar el concepto de σ -álgebra, se tiene el siguiente ejemplo, $F = \{\emptyset, \Omega\}$, el lector puede verificar que F es una σ -álgebra.

Por consiguiente, se especifica que (Ω, F) es un espacio de medida, donde Ω es el conjunto de todos los resultados posibles y F es la σ -álgebra de los subconjuntos de Ω .

Definición 1.1.4 Sea ϵ un experimento aleatorio y Ω un espacio muestral asociado con ϵ . Para cada evento A asignamos un número real designado como $P(A)$ y denominado probabilidad de A , el cual cumple lo siguiente:

- $0 \leq P(A) \leq 1$.
- $P(\Omega) = 1$.
- Si $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ son eventos mutuamente excluyentes dos a dos, entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \quad (1.2)$$

Definición 1.1.5 A la terna (Ω, F, P) , formada por el espacio muestral, la σ -álgebra y la medida de probabilidad se le llama espacio de probabilidad.

1.2. Variables aleatorias

En esta sección se considera a (Ω, F, P) un espacio de probabilidad base, donde Ω es el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio ϵ , esto es, el conjunto que contiene a todos los posibles resultados del experimento aleatorio, y además se conoce que Ω puede ser un conjunto finito, infinito y numerable o un conjunto infinito y no numerable; y los posibles resultados del experimento no necesariamente son numéricos. La componente F es la σ -álgebra de eventos la cual nos asegura que a todo elemento de F siempre es posible asignarle una medida de probabilidad y la componente P es llamada la función de probabilidad que permite asignar la probabilidad correspondiente a cualquier evento A .

Definición 1.2.1 *Sea ϵ un experimento aleatorio y Ω el espacio muestral asociado al experimento. Se dice que X es una variable aleatoria si asigna un número $X(s)$ a cada uno de los elementos $s \in \Omega$, es decir, una variable aleatoria es una función que asigna valores reales y que está definida sobre el espacio muestral Ω , esto es:*

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow R \\ s &\mapsto X(s) = x. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Definición 1.2.2 *Sea (Ω, F, P) el espacio de probabilidad base. Sea $X : \Omega \longrightarrow R$ una variable aleatoria.*

Se dice que X es una variable aleatoria discreta si su recorrido R_X es finito o infinito y numerable, es decir, $R_X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N, \dots\}$ y además, para todo posible resultado $x_i \in R_X$ siempre es posible asignar un número real $p(x_i) = p(X = x_i)$ tal que:

$$1. p(x_i) \geq 0, \quad \forall x_i \in R_X.$$

$$2. \sum_{R_X} p(x_i) = 1.$$

A $p(x_i)$ se le llama la función de probabilidad puntual (fdpp) y a $(x_i, P(x_i))$ se le llama la distribución de probabilidad de X .

Definición 1.2.3 *Sea (Ω, F, P) el espacio de probabilidad base. Sea $X : \Omega \longrightarrow R$ una variable aleatoria. Se dice que X es una variable aleatoria continua si su recorrido R_X es infinito y no numerable, es decir, $R_X = (-\infty, \infty), (a, b), [a, b), [a, b]$ y además, existe una función $f(x)$ llamada función de densidad continua, que cumple:*

$$1. f(x) \geq 0, \quad \forall x \in R_X.$$

$$2. \int_{R_X} f(x)dx = 1.$$

$$3. P(a < X < b) = P(a = X < b) = P(a < X = b) = P(a = X = b) = \int_a^b f(x)dx.$$

A $f(x)$ también se le llama función de densidad de probabilidad (fdp).

Definición 1.2.4 Sea $X : \Omega \rightarrow R$ una variable aleatoria (discreta o continua), se define a la función de distribución (acumulativa) de X denotada con $F(x)$, de la siguiente forma:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i), \quad (X \text{ discreta}), \tag{1.4}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \quad (X \text{ continua}).$$

Con las definiciones descritas arriba es importante hablar de algunas características importantes de una variable aleatoria, se conocen como la esperanza matemática y la varianza.

Definición 1.2.5 Sea $X : \Omega \rightarrow R$ una variable aleatoria discreta con fdpp $p(x_i)$ y recorrido $R_X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_N, \dots\}$, se define la esperanza matemática de X denotada con $E[X]$ como:

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} kP(k), \quad \text{siempre que } \sum_{k=0}^{\infty} |k| P(k) < \infty. \tag{1.5}$$

Definición 1.2.6 Sea $X : \Omega \rightarrow R$ una variable aleatoria continua con fdp $f(x)$ y recorrido $R_X = (-\infty, \infty)$, la esperanza matemática de X se denota con $E[X]$ y se define como:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \quad \text{siempre que } \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx < \infty. \tag{1.6}$$

Definición 1.2.7 Sea $X : \Omega \rightarrow R$ una variable aleatoria ya sea discreta o continua. La varianza de X se denota con $Var[X]$ o $V[X]$ y existe siempre que exista el segundo momento, se define como:

$$V[X] = E[(X - E[X])^2] \geq 0. \tag{1.7}$$

Propiedad 1.2.8 Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria (discreta o continua), se cumple lo siguiente:

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2. \quad (1.8)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} V[X] &= E[(X - E[X])^2] \\ &= E[X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2] \\ &= E[X^2] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2 \\ &= E[X^2] - (E[X])^2. \blacksquare \end{aligned}$$

Para más detalles de la esperanza matemática y la varianza se puede consultar [9] y [5]; enseguida se revisan algunas distribuciones que serán importantes para el desarrollo del presente trabajo.

1.3. Distribuciones de probabilidad

Dada una variable aleatoria X es de importancia determinar que distribución tiene; en esta sección se presentan algunas distribuciones discretas y continuas estudiadas en los cursos de probabilidad.

1.3.1. Distribución Bernoulli

Sea ϵ el experimento aleatorio cuyo resultado se clasifica únicamente como éxito o fracaso, y sea X una variable aleatoria, donde es igual a 1 si el resultado del experimento es un éxito, y 0 si el resultado del experimento es un fracaso; la probabilidad de éxito se denota como p y la probabilidad de fracaso se denota como q , donde $q = 1 - p$ y también $0 \leq p \leq 1$.

Definición 1.3.1 Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria discreta, se dice que $X \sim \text{Ber}(p)$, X tiene distribución Bernoulli si:

$$p(x) = \begin{cases} p, & \text{para } x = 1, \\ q = 1 - p, & \text{para } x = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Con $0 \leq p \leq 1$ la probabilidad de éxito.

Propiedad 1.3.2 Sea $X : \Omega \rightarrow R$ una variable aleatoria, $X \sim \text{Ber}(p)$, se cumple:

1. $E[X] = p$.
2. $V[X] = pq$.

Demostración:

Para la propiedad 1) se utiliza la definición de esperanza matemática, esto es:

$$E[X] = \sum_{k=1}^2 kP(k) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p. \blacksquare$$

Para la propiedad 2) se utiliza la definición de varianza, para luego calcular el segundo momento.

$$E[X^2] = \sum_{k=1}^2 k^2 P(k) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p. \blacksquare$$

Por definición,

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = p - p^2 = p - p \cdot p = p \cdot (1 - p) = pq. \blacksquare$$

1.3.2. Distribución Binomial

Definición 1.3.3 Sea $X : \Omega \rightarrow R$ una variable aleatoria discreta, se dice que $X \sim \text{Bin}(n, p)$, si X representa el número de éxitos que ocurren en n realizaciones independientes de un experimento aleatorio ϵ donde solo puede ocurrir un éxito o fracaso, y además, su función de probabilidad puntual está dada por:

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\} \text{ y } 0 \leq p \leq 1. \quad (1.10)$$

X representa el número de éxitos en n repeticiones independientes del experimento, es decir, son n ensayos Bernoulli, y además si n es pequeña, los términos individuales de la distribución binomial son relativamente sencillos de calcular, caso contrario a que si n es muy grande.

Propiedad 1.3.4 Sea $X : \Omega \rightarrow R$ una variable aleatoria, $X \sim Bin(n, p)$, se cumple:

1. $E[X] = np$.

2. $V[X] = npq$.

Con lo ya definido se resumen 3 puntos importantes para la distribución binomial:

1. Para cada prueba se tiene únicamente dos posibles resultados, que se conocen como éxito y fracaso.

2. El resultado de cada prueba realizada es independiente del resultado de otras pruebas, y la probabilidad de éxito no cambia de una prueba a otra realizadas de manera disjunta.

3. Para esta distribución la importancia recae en el número de éxitos que ocurren y no el orden en que suceden.

1.3.3. Distribución Poisson

Esta distribución es de importancia en el presente trabajo, se describirá su distribución.

Definición 1.3.5 Sea $X : \Omega \rightarrow R$ una variable aleatoria discreta, se dice que $X \sim Poisson(\lambda)$ si:

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ y } \lambda > 0. \quad (1.11)$$

Propiedad 1.3.6 Sea $X : \Omega \rightarrow R$ una variable aleatoria tal que $X \sim Poisson(\lambda)$, entonces se cumple:

1. $E[X] = \lambda$.

2. $V[X] = \lambda$.

Esta distribución es la única que posee la característica de que su media y su varianza sea la misma, λ . Además, se interpreta como el número de ocurrencias (éxitos) en una unidad unitaria

de medida, esta unidad puede ser en términos de tiempo, volumen, espacio, etc., para este trabajo la unidad de medida será el tiempo.

Existe una manera en que se relacionan la distribución binomial con la distribución Poisson, también, se puede afirmar que la distribución de Poisson aproxima a la distribución binomial cuando se cumplen ciertas especificaciones.

Teorema 1.3.7 Sea $X \sim \text{Bin}(n, p)$, cuando $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ tal que $np \rightarrow \lambda$, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

Demostración:

De la función de probabilidad puntual de la binomial se tiene que

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} p^k q^{n-k}. \end{aligned}$$

Sea $np = \lambda$, despejando p se obtiene, $p = \frac{\lambda}{n}$, además, como $q = 1 - p$, se sigue que $q = 1 - \frac{\lambda}{n} = \frac{n - \lambda}{n}$, de esta forma, sustituyendo p en q en la última igualdad, y tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ se llega a que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(X = k) &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\lambda^k}{k!} \left[(1) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right] \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \right] \\ &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}. \end{aligned}$$

Esto debido a que $n \rightarrow \infty$ tal que $np = \lambda$ permanece constante, también $p \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ de no ser así, np no permanecería constante; y los términos de la forma $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ tienden a 1 cuando n tiende a infinito, y por definición del número e , $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$ tiende a $e^{-\lambda}$, cuando n tiende a infinito, por lo tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}. \blacksquare$$

Una manera simple de interpretar dicho teorema, es que se puede aproximar las probabilidades de una distribución binomial a través de una distribución Poisson, siempre que n sea grande y p sea pequeña y se cumpla que $np = \lambda$.

La distribución binomial tiene 2 parámetros, n y p , mientras que en la distribución de Poisson solo se trabaja con 1 parámetro $\lambda = np$, a este parámetro normalmente se le designa como la intensidad de la distribución.

1.3.4. Distribución Uniforme

Definición 1.3.8 Sea $X : \Omega \rightarrow R$ una variable aleatoria continua, se dice que $X \sim U(a, b)$, X tiene distribución uniforme si:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \quad a, b \in R, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (1.13)$$

Propiedad 1.3.9 Sea $X : \Omega \rightarrow R$ una variable aleatoria tal que $X \sim U(a, b)$, entonces se cumple:

1. $E[X] = \frac{a+b}{2}$.
2. $V[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$.

1.3.5. Distribución Exponencial

Definición 1.3.10 Sea $X : \Omega \rightarrow R$ una variable aleatoria continua, $\lambda > 0$, se dice que $X \sim \exp(\lambda)$, X tiene distribución exponencial si:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (1.14)$$

Propiedad 1.3.11 Sea $X : \Omega \rightarrow R$ una variable aleatoria tal que $X \sim \exp(\lambda)$, entonces se cumple:

$$1. E[X] = \frac{1}{\lambda}.$$

$$2. V[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Para las demostraciones de las propiedades de esperanza matemática y de varianza de cada distribución se utiliza la definición correspondiente para el caso discreto o para el caso continuo, en todos los casos se procede a calcular el primer y segundo momento de cada distribución y después aplicar la definición de varianza, tal como se realiza para la Propiedad 1.3.2. de la distribución bernoulli y como se menciona en [5].

Una propiedad importante de la distribución exponencial es la que se conoce como pérdida de memoria, la cual se refiere a que la probabilidad de un evento no depende en absoluto de algún otro evento ocurrido anteriormente, por ejemplo el tiempo de vida o funcionamiento de un artículo o componente se puede modelar a través de la distribución exponencial, la falta de memoria de esta distribución se puede entender que mientras el artículo o componente siga funcionando se le considera como nuevo, esto es, no hay desgaste.

Propiedad 1.3.12 Sea $X : \Omega \rightarrow R$ una variable aleatoria continua, tal que $X \sim \exp(\lambda)$, entonces para cualesquiera $s, t \geq 0$ con $s, t \in R$ se cumple:

$$P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s). \quad (1.15)$$

Demostración: De la definición de probabilidad condicional, se tiene que

$$P(X > s + t \mid X > t) = \frac{P(X > s + t, X > t)}{P(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = P(X > s). \blacksquare$$

De acuerdo con [8], si pensamos en X como la vida útil de algún instrumento, entonces $P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s)$ establece que la probabilidad de que el instrumento viva al menos $s + t$ horas, dado que ya sobrevivió t horas, es la misma que la probabilidad inicial de que viva durante al menos s horas. En otras palabras, si el instrumento sobrevive hasta el tiempo t , entonces la distribución del tiempo restante que sobreviva es la misma que la distribución de vida útil original; esto quiere decir que el instrumento no recuerda que ya ha estado en uso durante un tiempo t .

Las distribuciones mencionadas son esenciales para el desarrollo del capítulo que comienza a continuación.

Capítulo 2

Procesos Estocásticos

En este capítulo se realiza una descripción de términos que corresponden a la teoría de procesos estocásticos, en particular de una cadena de Markov. El desarrollo de dicho capítulo surge de la necesidad de comprender lo que es un proceso estocástico para después poder aplicarlo al problema de interés.

2.1. Conceptos básicos de un proceso estocástico

Existe un factor en la vida cotidiana que tiene un impacto en todo lo que existe, el tiempo, para el presente trabajo funcionará como el factor que sucede mientras que un sistema o fenómeno tiene un comportamiento o evolución aleatoria, para estudiar este tipo de sistemas se requiere de la teoría de procesos estocásticos. Así, que se inicia presentando los siguientes conceptos.

Definición 2.1.1 *Un proceso estocástico es una sucesión de variables aleatorias $\{X(t) : t \in T\}$, donde T es un conjunto de índices, a T se le denomina el tiempo y el rango común de las variables aleatorias se le llama espacio de estados S .*

De lo anterior se tiene que un proceso estocástico se define como el producto del espacio paramétrico T y el espacio muestral Ω , esto es:

$$X : T \times \Omega \longrightarrow S.$$

Tal que a la pareja (t, ω) se le asocia el estado $X(t, \omega)$, dicho de otra forma, un sistema o

fenómeno aleatorio puede estar en cualquiera de sus estados y al transcurrir el tiempo puede ir de un estado a otro, entonces, $X(t)$ es el estado en el sistema respecto al tiempo t , y así puede modelarse el sistema para analizar su evolución a lo largo del tiempo.

Si $t \in T = \{0, 1, 2, \dots\}$ se dice que el proceso es a tiempo discreto, mientras que si $t \in T = [0, \infty)$ el proceso será llamado un proceso a tiempo continuo.

Una característica muy particular es la probabilidad condicional de cualquier evento futuro es independiente de los eventos pasados, es decir, cualquier evento sucedido anteriormente al evento actual no afectará en absoluto al evento futuro, a esto se le conoce como la propiedad markoviana, de forma explícita se tiene la siguiente:

Definición 2.1.2 *Una cadena de Markov es un proceso estocástico a tiempo discreto que cumple con lo siguiente:*

$$P(X_{n+1} = x_{(n+1)} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{(n+1)} \mid X_n = x_n). \quad (2.1)$$

Donde $\{X_n\}$ es un proceso estocástico que denota su valor en el tiempo n . En palabras un poco más simples, una cadena de Markov es un proceso estocástico en donde la probabilidad de ocurrencia de un evento depende solamente del evento anterior inmediato, esta propiedad se le conoce como pérdida de memoria, pues no necesita recordar más allá que el evento anterior inmediato.

Definición 2.1.3 *Sea $x, y \in S$, S un espacio de estados, se define la probabilidad de transición como:*

$$p(x, y) = P(X_{(n+1)} = y \mid X_n = x). \quad (2.2)$$

Es decir, es la probabilidad de pasar del estado n al estado $n + 1$ en un paso.

De las definiciones mencionadas anteriormente veamos un ejemplo común para interpretar lo que es una cadena de Markov, este ejemplo incluye dos casos conocidos, las caminatas aleatorias y la ruina del jugador.

Primero, las caminatas aleatorias son un proceso estocástico a tiempo discreto donde $X_n = i$ denota el estado del proceso al tiempo n , función de transición de probabilidad dada por,

$$P(X_{(n+1)} = j \mid X_n = i) = \begin{cases} p, & \text{si } j = i + 1, \\ q, & \text{si } j = i - 1, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

En donde p es la probabilidad de avanzar y q es la probabilidad de retroceder.

Por ejemplo, en un volado, se tienen dos jugadores A y B, cada uno, apuesta una unidad monetaria, el jugador A gana el volado cuando ocurre águila con probabilidad p y pierde cuando sale sol con probabilidad $q = 1 - p$, la manera correcta de describir el modelo es 1 si es águila y cero si es sol. Si el capital inicial del jugador A es $a \in N$ unidades monetarias, se puede expresar el capital del jugador A después de n volados como:

$$S_n = a + \sum_{i=1}^n kX_i.$$

Entonces, S_n es una sucesión compuesta por el capital inicial más la sumatoria de los resultados obtenidos en cada volado. A S_n se le conoce como caminata aleatoria, se aclara también que cada volado, es decir, cada X_i es una variable aleatoria independiente pues el resultado de un volado no depende en absoluto de algún otro y k es la cantidad monetaria ganada en cada evento, en este caso cero y uno.

Segundo, sin pérdida de generalidad, pensemos en el tiempo en que después de n volados el jugador llegue a un capital igual a cero. Retomando la descripción del modelo para el jugador A, el resultado es 1 si es águila y -1 si es sol. El interés se centra en la probabilidad de que S_n sea igual a cero; a esto se le conoce como la ruina del jugador.

Por ende las caminatas aleatorias y la ruina del jugador son dos ejemplos de procesos estocásticos que en particular son cadenas de Markov, adicionalmente son ejemplos de procesos estocásticos donde se analiza la evolución de los volados a lo largo del tiempo, en el caso de la ruina del jugador, hasta que el capital de jugador sea cero.

Un proceso estocástico parece tener una definición hasta cierto punto compleja, pero en la vida real no siempre es así pues hay actividades cotidianas que se pueden modelar con un proceso estocástico, de manera más sencilla, un proceso estocástico es un proceso que no se puede predecir pues se mueve al azar, un claro ejemplo puede ser la ocurrencia de sismos, el clima, etc.

2.2. Procesos de conteo

La importancia de mencionar los procesos de conteo es debido a que el conteo es una manera de analizar la evolución de un sistema en específico a través del tiempo, lógicamente la idea recae en el hecho de contar el número de eventos que ocurren, además, los procesos de conteo nos ayudarán en el siguiente capítulo a interpretar la información que nos interesa.

En el capítulo anterior se presentó la distribución de Poisson que se interpreta como el número de éxitos que ocurren en un intervalo unitario de tiempo, espacio, volumen o cualquier otra medida. Si X se distribuye Poisson con parámetro λ , es usual en probabilidad decir que X es una variable contadora, esto es, cuenta el número de éxitos que ocurren en el intervalo de tiempo unitario.

Con esta idea de variable contadora se puede abordar el concepto de proceso contador, el cual se define a continuación.

Definición 2.2.1 *Un proceso contador $N = \{N(t); t \geq 0\}$ es un proceso que representa el número total de eventos que ocurren en el tiempo t .*

Por ejemplo, suponga que $N(t)$ es el número de automóviles que llega a un estacionamiento en el tiempo t , entonces $N = \{N(t); t \geq 0\}$ es un proceso contador; ya que éste determina el número de eventos que ocurren en el tiempo t , en el cual el evento de ocurrencia es la llegada de un automóvil al estacionamiento, este es un ejemplo de proceso contador, caso contrario a que si $N(t)$ fuera el número de automóviles que hay en el estacionamiento al tiempo t , note que la diferencia se debe a que en un proceso contador nos interesa el número de eventos que ocurren al tiempo t , y no el número de autos que se encuentran en el estacionamiento en el tiempo t .

Una pregunta interesante para el caso anterior sería, ¿ $N(t)$ incluye los automóviles que salen del estacionamiento?, la respuesta es no, pues nuevamente el evento es que un automóvil llegue al estacionamiento, el hecho de que un automóvil salga del estacionamiento es un evento independiente que no tiene nada que ver con el evento de interés.

Con el ejemplo anterior se debe resaltar que un proceso contador cuenta con propiedades que aunque parecen inmediatas, muchas veces no son tan visibles, las cuales se mencionan a continuación:

Propiedad 2.2.2 *Sea $N = \{N(t); t \geq 0\}$ un proceso contador, entonces cumple con lo siguiente:*

- a) $N(t) \geq 0$.
- b) $N(t)$ es un entero.

- c) $N(t)$ es no decreciente, es decir, para $s < t$, $N(s) < N(t)$.
- d) Para $s < t$, la cantidad $N(t) - N(s)$ representa el número de eventos que ocurren en el intervalo $(s, t]$.

Como el proceso contará el número de eventos ocurridos, es claro que no pueden ocurrir eventos negativos ni mucho menos fraccionados. Además, en el ejemplo del número de automóviles que llegan a un estacionamiento, supongamos que a las 10 hrs. del día han llegado 10 automóviles, es lógico que a la 11hrs. el número de automóviles que han llegado es mayor que el número de los que habían llegado a las 10, además, si restamos el total de los que llegaron a las 10 de los que llegaron a las 11, tendremos el número total de los automóviles que llegaron en el intervalo de $(10,11]$.

Uno de los procesos contadores más utilizados en la probabilidad y en otras ramas de la ciencia es el proceso de Poisson debido a que en muchas situaciones modela la ocurrencia de eventos durante una unidad de tiempo t , el cual es fijado de acuerdo a la finalidad del trabajo, a continuación se define lo que es un proceso de Poisson.

Definición 2.2.3 Un Proceso de Poisson es un proceso contador $N = \{N(t); t \geq 0\}$ con intensidad λ , $\lambda > 0$, si satisface las siguientes condiciones:

- a) $N(0) = 0$.
- b) El proceso N tiene incrementos estacionarios e independientes.
- c) $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h), \forall t \geq 0$.
- d) $P(N(t+h) - N(t) > 1) = o(h), \forall t \geq 0$.

Donde el término $o(h)$ es el orden de h .

De manera más precisa tenemos lo siguiente, una función $f(x)$ es de orden $o(h)$ si cumple:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Como ejemplo de esto, esta la función $f(x) = x^3$ es $o(h)$, pues:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 = 0.$$

Hay que recordar que un proceso contador tiene incrementos estacionarios, si el número de eventos que ocurren en el intervalo $(s, s + t)$ tiene la misma distribución para toda s y que estos incrementos son independientes si el número de eventos que ocurren en intervalos de tiempo disjuntos son independientes, como se menciona en [8].

En los incisos c) y d) se infiere que en un intervalo suficientemente pequeño $(t, t + \delta)$ no puede ocurrir más de un evento. Esto elimina la posibilidad de múltiples eventos en un momento de tiempo y la posibilidad de un número infinito de eventos en un intervalo finito. En otras palabras, si N es un proceso de Poisson, entonces en cualquier intervalo infinitesimal no puede ocurrir una explosión.

Teorema 2.2.4 *Para cualquier proceso contador $N = \{N(t); t \geq 0\}$ que satisface las condiciones de a) a d) mencionadas en la definición anterior, el número de eventos en cualquier intervalo de longitud t se distribuye Poisson con media λt . Esto es $\forall s, t \geq 0$*

$$P(N(t + s) - N(s) = n) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Demostración:

En esta demostración nos extenderemos un poco, debido a que este resultado es una parte importante de los proceso de Poisson, se utilizará la probabilidad condicional, función generadora de probabilidad, todos estos términos fueron vistos a lo largo de las materias cursadas en donde se estudió a detalle cada uno.

Supongamos que $P_n(t) = P(N(t) = n)$ es la probabilidad de que exactamente n eventos ocurran hasta el tiempo t . Entonces escribimos la probabilidad de que no ocurra ningún evento al tiempo $t + h$ como:

$$\begin{aligned} P_0(t + h) &= P\{N(t + h) = 0\} = P\{N(t) = 0, N(t + h) - N(t) = 0\} \\ &= P\{N(t) = 0\} P\{N(t + h) - N(t) = 0\} \\ &= P_0(t)[1 - P\{N(t + h) - N(t) = 1\}] = P_0(t)[1 - \lambda h + o(h)]. \end{aligned}$$

Nótese que se utiliza el hecho de que un proceso de Poisson tiene incrementos estacionarios e independientes y también la condición del inciso c), entonces se llega a lo siguiente:

$$P_0(t + h) = P_0(t)[1 - \lambda h + o(h)].$$

De la igualdad anterior, restamos $P_0(t)$, dividimos entre h y luego aplicamos el límite cuando $h \rightarrow 0$, todo en ambos lados de la igualdad, tenemos

$$P'_0(t+h) = -\lambda P_0(t). \quad (2.4)$$

De manera similar para $n \geq 1$ y usando las mismas condiciones tenemos que para $P_n(t)$

$$P'_n = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t). \quad (2.5)$$

Ahora, sea $P(z, t)$ la función generadora de probabilidad de nuestra $N(t)$, (recordemos que $N(t)$ es el número de eventos ocurridos al tiempo t), definida como sigue:

$$P(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n.$$

Luego, calculamos la derivada parcial en ambos lados de la igualdad y sustituimos (2.4) y (2.5), tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(t) z^n = -\lambda \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} P_{n-1}(t) z^n \\ &= -\lambda P(z, t) + \lambda z P(z, t) = \lambda(z-1)P(z, t). \end{aligned}$$

Si integramos en ambos lados de la igualdad, más aún, teniendo en cuenta que $P_0(0) = 1$ y $P_n(0) = 0, n > 0$, se tiene $P(z, 0) = 1$, entonces $c(z) = 0$, donde $c(z)$ es la constante que se obtiene al realizar la integración y aplicando propiedades de logaritmo obtenemos:

$$P(z, t) = e^{\lambda t(z-1)}.$$

La cual es la función generadora de probabilidad de una variable aleatoria Poisson con intensidad λt , por lo tanto,

$$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \blacksquare$$

También se hará notar que el proceso de Poisson juega un papel muy importante en el desarrollo de este trabajo, donde los eventos corresponden al número de personas que llegan a un establecimiento en una unidad de tiempo.

Denotemos a T_n como el tiempo transcurrido del evento n al evento $n + 1$, es decir, T_1 es el tiempo en que ocurre el primer evento de un proceso de Poisson, es interesante entonces, conocer la distribución que tiene T_n , para esto, enunciamos el siguiente teorema.

Teorema 2.2.5 *Los tiempos de ocurrencia de un evento a otro, conocido también como tiempos de arribo en un proceso de Poisson con intensidad λ , son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas exponencialmente con media $\frac{1}{\lambda}$.*

Demostración:

Para la demostración del teorema basta considerar el tiempo $W_1 = T_1$ como el tiempo en que ocurre el primer evento, entonces si se considera que exceda t , lo vemos como la probabilidad de que no ocurra el primer evento, esto es:

$$P(W_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}.$$

Entonces la función de distribución del tiempo de ocurrencia es

$$P(W_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Lo anterior nos indica que W_1 es una variable aleatoria con distribución exponencial y media $\frac{1}{\lambda}$; sin embargo, faltaría analizar el caso de la ocurrencia de los demás eventos, pero esto no es problema, pues, recordando la propiedad de falta de memoria de la distribución exponencial que se mencionó en el capítulo anterior, se asegura que la distribución es la misma para todos los eventos de ocurrencia en la unidad de tiempo, con esto queda demostrado el teorema. ■

Ahora, denotemos a S_n como el tiempo de espera hasta que ocurre el n -ésimo evento, es decir, es la suma de todo el tiempo transcurrido desde el primer evento hasta el evento n , esto se expresa como

$$S_n = \sum_{i=1}^n T_i, \quad \text{para todo } n \geq 1. \quad (2.6)$$

Del teorema anterior, se puede determinar la distribución de S_n , para lo cual se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.2.6 *Sea S_n el tiempo de espera hasta que ocurre el n -ésimo evento, entonces, S_n se distribuye Gamma con parámetros n, λ .*

Demostración:

Este resultado no debe causar sorpresa pues se sabe que la suma de dos o más variables aleatorias distribuidas exponencial se distribuye Gamma con parámetros $n_i, \lambda_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ donde n representa el número de sumandos y λ es el parámetro de la distribución exponencial, entonces utilizando la función generadora de momentos, el hecho de que S_n es la suma de cada T_i y el teorema anterior, se tiene que:

Sea $T_n \sim exp(\lambda)$, entonces $M_{T_n}(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1}$, por consiguiente

$$\begin{aligned} M_{T_n}(t) &= M_{\sum_{i=1}^n T_i}(t) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1} \\ &= \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1} \dots \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1} \\ &= \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-n}. \end{aligned}$$

Donde $\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-n}$ corresponde a la función generadora de probabilidad de una variable que se distribuye Gamma con parámetros n, λ ; que es lo que se quería demostrar ■

Una vez especificada la distribución del tiempo de ocurrencia entre eventos y el tiempo de espera, se prosigue a analizar la forma en que ocurren los eventos, es decir, como se comportan los eventos que ocurren en el intervalo de tiempo $(0, t]$, pues a ciencia cierta no se sabe en qué momento ocurrirá un evento, para esto se enuncia el siguiente teorema.

Teorema 2.2.7 *Dado que $N(t) = n$, sean $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ los tiempos de ocurrencia de los n eventos, se dice que $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ tienen las mismas distribuciones que los estadísticos de orden que corresponden a n variables aleatorias independientes distribuidas uniformemente en el intervalo $(0, t]$.*

Demostración:

Antes de comenzar con la prueba se considera primordial expresar con términos simples la interpretación de este teorema; dado que $N(t) = n$, es decir, que ya ocurrieron n eventos en el tiempo t , se dice que los eventos ocurren de forma uniforme en el intervalo $(0, t]$, esto debido a que no sabemos en qué momento ocurre exactamente un evento. También se necesita obtener la función de densidad condicional de $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$, dado n , esto es

$$\begin{aligned} f(T_1, \dots, T_n | n) &= \frac{f(T_1, \dots, T_n, n)}{P(N(t) = n)} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda(T_1 - T_0)} \lambda e^{-\lambda(T_2 - T_1)} \dots \lambda e^{-\lambda(T_1 - T_0)} \lambda e^{-\lambda(t - T_n)}}{\frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}} \\ &= \frac{n!}{t^n}. \end{aligned}$$

Con $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$, esto teniendo en cuenta que $T_1 = t_1, T_2 = t_2, \dots, T_n = t_n$, $N(t) = n$, y además $T_1 = t_1 - t_0, T_2 = t_2 - t_1, \dots, T_n = t_n - t_{n-1}, T_{n+1} > t - t_n$. ■

Sin pérdida de generalidad, en el ejemplo del evento en que un automóvil llega a un estacionamiento, suponga que por la mañana el número de arribos se comporta como una Poisson con intensidad λ_1 , mientras que por la tarde se comporta como una Poisson con intensidad λ_2 , o que si el estacionamiento tiene 2 entradas y que el número de arribos por la entrada 1 se comporta como una Poisson con intensidad λ_1 y que el número de arribos por la entrada 2 se comporta como una Poisson con intensidad λ_2 ¿En ambos casos, podríamos afirmar que al final del día el número total de llegadas al estacionamiento se comporta como una Poisson con intensidad $\lambda_1 + \lambda_2$?

Para ambos casos la respuesta es afirmativa, y esto se debe a la propiedad reproductiva de la distribución Poisson que nos dice que si dos variables aleatorias se distribuyen Poisson cada una con su respectivo parámetro, entonces la suma de esas variables aleatorias se distribuye Poisson con parámetro igual a la suma de los parámetros correspondientes.

En un proceso de Poisson a esto se le conoce como superposición y se enuncia a continuación:

Teorema 2.2.8 Sean $N_1(t), \dots, N_n(t)$ procesos de Poisson independientes con intensidad $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ respectivamente, entonces la suma $N_1(t) + \dots + N_n(t)$ se distribuye como un proceso de Poisson con intensidad $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$, a esta propiedad se le conoce como superposición del proceso de Poisson.

Demostración:

Para la demostración podemos utilizar nuevamente la función generadora de momentos.

Sea $N(t) \sim Poiss(\lambda)$, entonces su función generadora de momentos está dada por $M_N(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$, $\forall t \in R$, entonces:

$$\begin{aligned} M_{N_1+\dots+N_n} &= M_{\sum_{i=1}^n N_i(t)} \\ &= \prod_{i=1}^n M_{N_i}(t) \\ &= \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i(e^t-1)} \\ &= e^{(\lambda_1+\dots+\lambda_n)(e^t-1)}. \end{aligned}$$

Lo cual es la función generadora de momentos de una distribución Poisson con parámetro $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$. ■

Existe un ejemplo que para nuestro interés es muy importante, este ejemplo se conoce como competencia o carrera de proceso de Poisson el cual menciona [1] puede interpretarse debido a que los tiempos de ocurrencia se distribuyen de manera exponencial, las carreras de Poisson son forma de aplicar el teorema de superposición, de manera más clara. Si retomamos el ejemplo del estacionamiento, se considera que el estacionamiento tiene dos accesos, a saber, el acceso A y el acceso B, en este caso nos interesa saber, cual es la probabilidad de que ingresen más automóviles por el acceso A que por el acceso B, o cual es la probabilidad de que del total de los automóviles exactamente la mitad ingrese por el acceso A y la otra mitad por el acceso B.

Este ejemplo va a ser de ayuda para el desarrollo del capítulo siguiente.

Así pues, en este capítulo se presentaron conceptos y resultados de los procesos contadores y en particular del proceso de Poisson que son la parte fundamental de este trabajo, todo lo abordado hasta aquí da paso al siguiente capítulo para que de manera clara y concisa se realice la aplicación y el análisis de las definiciones, teoremas y corolarios descritos.

Capítulo 3

Aplicación

En este capítulo se realiza una aplicación de la teoría de procesos de Poisson que como ya se dijo es un proceso contador, el más aleatorio, razón por la cual este proceso se puede aplicar a diferentes situaciones reales.

Para este trabajo, se aplica esta teoría para estudiar el comportamiento de la llegada de clientes a cierto establecimiento, esto con la finalidad de buscar alguna estrategia de mejor atención al cliente en cuanto al tiempo de espera.

3.1. Planteamiento del problema

El establecimiento del que se habla durante todo el trabajo se encuentra ubicado en una pequeña comunidad del estado de Tlaxcala, actualmente en el establecimiento se encuentran dos apartados, tienda y ferretería, en la tienda se encuentran desde productos de canasta básica, dulces, refrescos, productos de higiene personal, chiles secos, semillas, comida para mascotas y animales de granja, artículos de papelería, frutas, verduras, vinos y licores, regalos, entre otros; en ferretería se cuenta con productos que van desde tornillos, martillos, tubería, hasta máquinas un poco más complejas como plantas para soldar, compresoras de aire, taladros, etc.

Ambos apartados se encuentran en el mismo local, con la distinción de que los productos que corresponden a la tienda se exhiben en la parte de enfrente del negocio, mientras que los de ferretería al fondo, más aún, los productos de la tienda se exhiben con la finalidad de que sea de autoservicio, y en la ferretería tienen que solicitar el producto y después pagar.

A pesar de que ambos apartados corresponden a un mismo dueño, los artículos se despachan en

diferente lugar y se administran por separado, es decir, a final del día se manejan como negocios independientes.

El apartado de ferretería se inició después de la tienda y el número de clientes que llegaba a la ferretería era en promedio 3 clientes que llegaban al día, poco a poco fue aumentando el número de clientes hasta la actualidad, hay ocasiones que el número de clientes que entra a la ferretería es igual que el de la tienda y hay casos que incluso lo sobrepasa, aunado a esto, en el establecimiento en general cuenta con 5 empleados que laboran de lunes a viernes, y 6 empleados los fines de semana, de todos estos empleados hay un empleado que es exclusivo de la ferretería, mientras que el resto pertenece a ambos apartados.

Entre semana se reciben también a 12 proveedores en promedio al día, y deben atenderse de tal manera que no retrase la atención al cliente; esto debido a que cuando llega un proveedor se requiere de por lo menos 20 minutos de atención, pues en lo que el proveedor levanta el pedido, ingresa los productos al establecimiento y se hace la revisión de los productos que se compran y se le realiza el pago correspondiente.

Además de todo esto, el tiempo que tardan los clientes en ferretería es mayor que el de los clientes en tienda esto en la mayoría de casos, lógicamente esto hace que la gente se acumule y que los empleados no se den abasto en ambos apartados, por esto es que surgió el interés de estudiar el número de arribos al establecimiento, con la finalidad de que el cliente no espere demasiado para ser atendido.

Se pretende recalcar si el apartado de ferretería fue una buena opción, y en base al análisis y aplicación de lo mencionado en los capítulos anteriores, proponer algunas ventajas y consejos para un mejor funcionamiento en general.

3.2. Registro de información

Para comenzar con la aplicación, es importante mencionar que la información se refiere a que un éxito ocurre cuando un cliente arriba al establecimiento, y que no se toma en cuenta el tiempo que tarda en el establecimiento hasta que se retira, tampoco se tomaron en cuenta factores que podrían afectar la ocurrencia de un éxito como el clima, fechas festivas, promociones, proveedores nuevos, competencia en la zona, etc.

En el registro de arribos, la unidad de tiempo utilizada es de 1 hora, y $T_0 = 6 : 00$ AM, es decir, nuestro tiempo inicial es a las 6 : 00 de la mañana, pues es el horario en que abre el establecimiento, es importante mencionar que ambos apartados inician y terminan en el mismo horario.

Primero, se realizaron observaciones sobre el número de llegadas al establecimiento, las obser-

vaciones se realizaron durante la semana del 17 al 23 de Mayo de 2021, en donde se observó el número de clientes que llegan en una hora.

Además como el establecimiento cuenta con dos apartados, se contaron los registros para cada apartado y luego se sumó para obtener un registro general, quedando de la siguiente manera:

Horario	T	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
06:00 a. m.	0	0	0	0	0	0	0	0
07:00 a. m.	1	26	22	22	8	9	39	28
08:00 a. m.	2	25	40	19	21	17	29	39
09:00 a. m.	3	28	19	10	24	35	33	22
10:00 a. m.	4	8	29	11	19	45	7	24
11:00 a. m.	5	22	20	24	19	39	39	23
12:00 p. m.	6	21	19	31	20	21	29	15
01:00 p. m.	7	27	31	41	17	13	32	33
02:00 p. m.	8	23	24	28	9	25	27	22
03:00 p. m.	9	26	18	28	40	21	17	25
04:00 p. m.	10	32	22	42	26	41	22	23
05:00 p. m.	11	19	26	18	23	22	22	29
06:00 p. m.	12	36	23	27	33	21	47	31
07:00 p. m.	13	26	17	25	28	23	27	16
08:00 p. m.	14	32	40	25	27	22	29	60
09:00 p. m.	15	23	26	36	51	47	33	34
10:00 p. m.	16	29	21	37	33	24	39	46
11:00 p. m.	17	22	30	10	16	24	25	30

Figura 3.1: Arribos del apartado de tienda.

Horario	T	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
06:00 a. m.	0	0	0	0	0	0	0	0
07:00 a. m.	1	10	5	7	3	9	5	13
08:00 a. m.	2	12	1	13	5	8	9	8
09:00 a. m.	3	2	17	14	21	15	17	16
10:00 a. m.	4	6	13	1	18	18	6	12
11:00 a. m.	5	7	11	18	17	7	5	14
12:00 p. m.	6	18	10	7	18	16	8	15
01:00 p. m.	7	7	9	6	7	4	14	16
02:00 p. m.	8	15	8	17	9	14	5	8
03:00 p. m.	9	19	13	4	10	9	17	7
04:00 p. m.	10	13	12	9	6	24	7	16
05:00 p. m.	11	10	19	15	19	9	8	12
06:00 p. m.	12	6	8	14	5	19	5	9
07:00 p. m.	13	12	16	9	23	9	22	12
08:00 p. m.	14	4	5	20	4	14	25	4
09:00 p. m.	15	17	12	1	12	15	6	3
10:00 p. m.	16	3	11	4	7	12	3	26
11:00 p. m.	17	9	17	7	6	3	14	5

Figura 3.2: Arribos del apartado de ferretería.

Según la Tabla 3.1 del apartado de tienda tenemos un promedio de llegada de los clientes igual a 26, mientras que en el apartado de ferretería según la Tabla 3.2 se tiene un promedio de llegada de clientes igual a 11; sumando ambas tablas tenemos un promedio de llegada de clientes igual a 37 como se muestra a continuación.

Horario	T	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
06:00 a. m.	0	0	0	0	0	0	0	0
07:00 a. m.	1	36	27	29	11	18	44	41
08:00 a. m.	2	37	41	32	26	25	38	47
09:00 a. m.	3	30	36	24	45	50	50	38
10:00 a. m.	4	14	42	12	37	63	13	36
11:00 a. m.	5	29	31	42	36	46	44	37
12:00 p. m.	6	39	29	38	38	37	37	30
01:00 p. m.	7	34	40	47	24	17	46	49
02:00 p. m.	8	38	32	45	18	39	32	30
03:00 p. m.	9	45	31	32	50	30	34	32
04:00 p. m.	10	45	34	51	32	65	29	39
05:00 p. m.	11	29	45	33	42	31	30	41
06:00 p. m.	12	42	31	41	38	40	52	40
07:00 p. m.	13	38	33	34	51	32	49	28
08:00 p. m.	14	36	45	45	31	36	54	64
09:00 p. m.	15	40	38	37	63	62	39	37
10:00 p. m.	16	32	32	41	40	36	42	72
11:00 p. m.	17	31	47	17	22	27	39	35

Figura 3.3: Arribos totales.

Del total de los registros que se muestran en la Tabla 3.3, aproximadamente el 70.91 % de los registros pertenecen al apartado de Tienda, mientras que el resto pertenece al apartado de Ferretería.

Se mencionó anteriormente que el número de arribos que llegan a un establecimiento se puede modelar con un proceso de Poisson, así pues, basándonos en esto, considere que si $X \sim Poisson(\lambda_1)$ denota el número de clientes que arriban en el apartado de la tienda y $Y \sim Poisson(\lambda_2)$ denota el número de clientes que arriban en el apartado de la ferretería, entonces $Z \sim Poisson(\lambda)$ donde $Z = X + Y$. Según las Tablas 3.1, 3.2 y 3.3, $\lambda_1 = 26$, $\lambda_2 = 11$ y $\lambda = 37$, esto es por la propiedad de superposición del proceso de Poisson, entonces, en promedio arriban al establecimiento 37 clientes en un intervalo de tiempo de una hora de los cuales 26 acuden en promedio a la tienda y 11 a la ferretería.

3.3. Desarrollo

De manera gráfica se muestra el comportamiento de ambos apartados, tienda y ferretería, pero antes es importante mencionar que la manera en que se trabajó la información es punto clave para

entender el hecho de que el proceso tiene incrementos estacionarios e independientes, además de cumplir con las demás propiedades especificadas en la Definición 2.1.5, para la organización de la información, basta con recordar los tiempos de arribo, por ejemplo, si $T_1 = 24$ y $T_2 = 20$, entonces se dice que al primer tiempo llegan 24 clientes, mientras que al tiempo 2 han llegado 44 clientes, las gráficas se muestran a continuación:

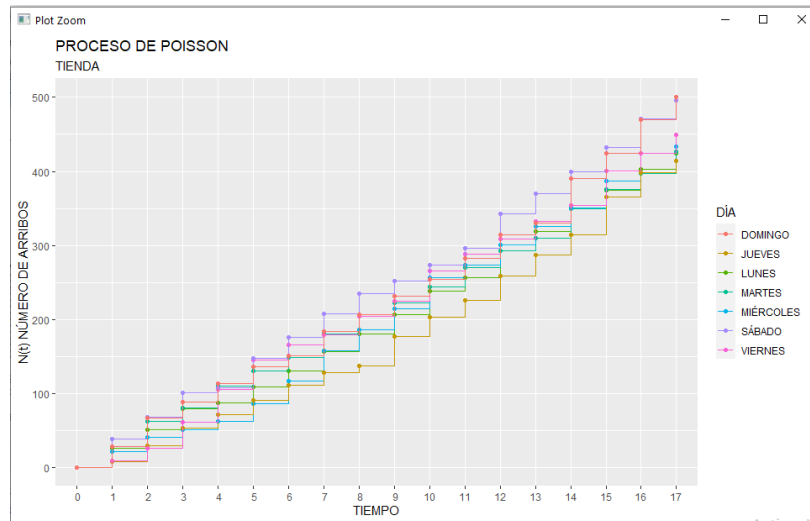


Figura 3.4: Arribos de el apartado de tienda en el mes de mayo.

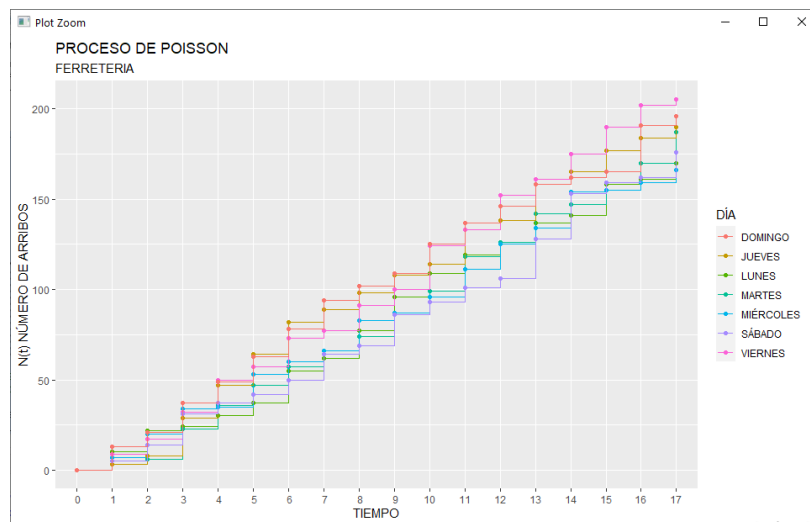


Figura 3.5: Arribos de el apartado de ferretería en el mes de mayo.

Estas gráficas fueron generadas con la ayuda del lenguaje de programación R, los códigos utilizados se muestran en los anexos al final de este trabajo.

De las Gráficas 3.4 y 3.5 se observan dos aspectos importantes, primero que en algunos casos el número de llegada de clientes en el apartado de tienda es casi igual al número de llegada de clientes en el apartado de ferretería, es decir, los saltos entre un tiempo y otro son de la misma magnitud, y segundo en ambas gráficas se coincide que los días que ingresan más clientes es en el transcurso del fin de semana.

En las Tablas 3.1 y 3.2 hay registros marcados en amarillo, estos registros corresponden a tiempos en los cuales el número de clientes en ambos apartados es el mismo y los registros marcados en rojo representan que el número de clientes que llega a la ferretería es mayor al número de los que llega a la tienda, esto nos lleva a formular las siguientes dos preguntas:

Una manera diferente de ver dicha situación, es que cuando llega un cliente al establecimiento solo existen 2 posibilidades, se dirige a la tienda o a la ferretería, según nuestros datos la probabilidad de que un cliente llegue a la tienda es de 0.7091, mientras que la probabilidad de que lleguen a la tienda es de 0.2909, además, la intensidad del proceso de Poisson es de 37 clientes por hora.

¿Cuál es la probabilidad de que en una hora 20 clientes lleguen a la tienda y 14 a la ferretería?

Sea X el número de clientes que llegan al establecimiento y se dirigen a la tienda, y Y el número de clientes que llegan al establecimiento y se dirigen a la ferretería, como ya se estudió, X y Y son variables aleatorias independientes con parámetros $(0.7091)(37) = 26.2367$ y $(0.2909)(37) = 10.7638$, redondeados serían 26 y 11 respectivamente pues por la naturalidad del problema no podemos representar una llegada como un valor no entero, lo obtenido es correcto de acuerdo a los datos recabados, así pues:

$$P(X = 20) = \frac{26^{20}e^{-26}}{20!} = 0.0418, \quad y \quad P(Y = 14) = \frac{11^{14}e^{-11}}{14!} = 0.0728.$$

Por lo tanto,

$$P(X = 20, Y = 14) = P(X = 20)P(Y = 14) = (0.0418)(0.0728) = 0.0030.$$

Ahora bien, el objetivo es conocer el caso en que los clientes que lleguen a la ferretería sean más que los que llegan a la tienda, es decir, la probabilidad de que en una hora 14 clientes lleguen a la tienda y 20 a la ferretería, entonces tenemos:

$$P(X = 14) = \frac{26^{14}e^{-26}}{14!} = 0.0038, \quad y \quad P(Y = 20) = \frac{11^{20}e^{-11}}{20!} = 0.0046.$$

Por lo tanto,

$$P(X = 14, Y = 20) = P(X = 14)P(Y = 20) = (0.0038)(0.0046) = 0.000017.$$

Las probabilidades disminuyen para X y Y pero esto no quiere decir que no sea posible; y para no dejar un caso sin revisar, veamos la probabilidad de que en una hora 17 clientes lleguen a la tienda y 17 a la ferretería

$$P(X = 17) = \frac{26^{17}e^{-26}}{17!} = 0.0163, \quad y \quad P(Y = 17) = \frac{11^{17}e^{-11}}{17!} = 0.0237.$$

Por lo tanto,

$$P(X = 17, Y = 17) = P(X = 17)P(Y = 17) = (0.0163)(0.0237) = 0.0004.$$

Entonces la probabilidad de que en ambos apartados arriben el mismo número de clientes es mayor que la probabilidad de el número de arribos a cualquier apartado sea mayor que otro, de cierta manera tenemos incierto el hecho de que el número de clientes que arriban al apartado de ferretería pueda ser mayor que el número de clientes que arriban a la tienda; por esta razón a continuación se realizará un nuevo registro y una simulación para realizar comparaciones y analizar la situación.

En el mes de noviembre se realizó un nuevo registro de arribos durante la semana del 22 al 28 de noviembre del año 2021, este nuevo registro se realizó con las mismas especificaciones ya mencionadas del primer registro, y se realizó con la finalidad de hacer notar el crecimiento de arribos en el apartado de ferretería, la información queda de la siguiente manera:

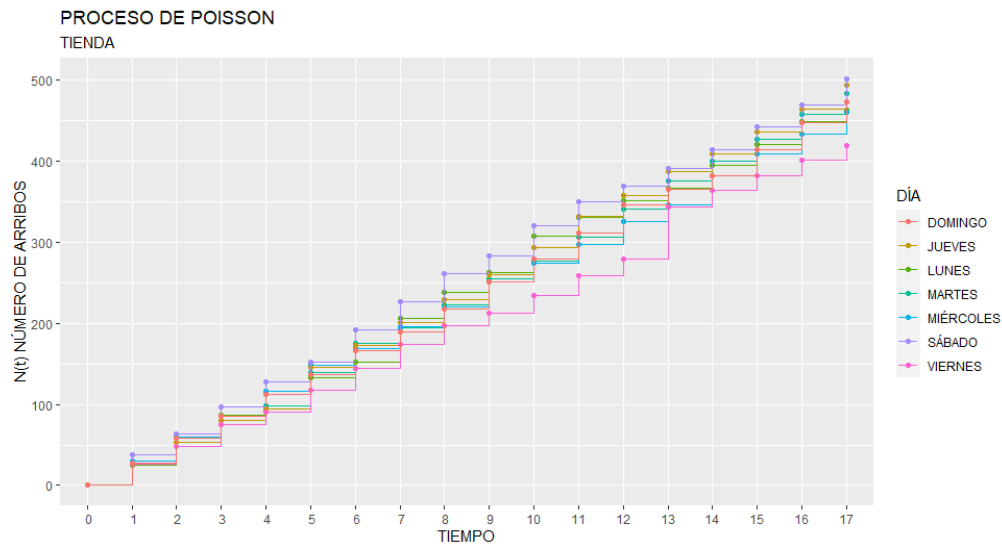


Figura 3.6: Arribos de el apartado de tienda en el mes de noviembre.

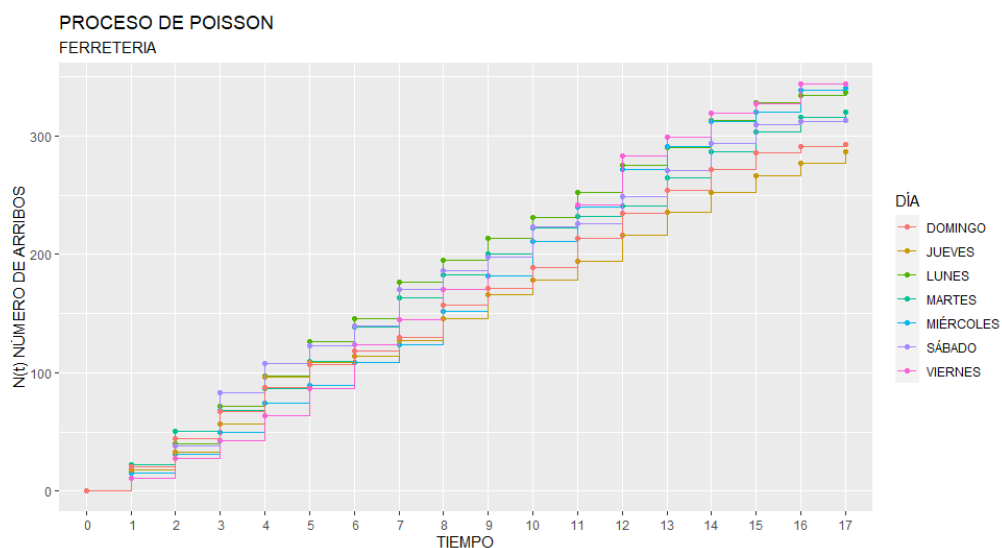


Figura 3.7: Arribos de el apartado de ferreteria en el mes de noviembre.

Según la información mostrada, el número de arribos a la ferreteria en gran magnitud mientras que la tienda tuvo un incremento poco notable, una vez más, la razón por la cual se hayan dado los incrementos puede depender de diferentes factores que para este trabajo no se consideran de interés

Según los datos mostrados, en el 18 % de los tiempos de arribo el número de clientes que llega a la ferreteria sobrepasa el número de clientes que llega a la tienda y en el 5 % el número de clientes

es el mismo en ambos apartados, claramente si comparamos con lo registrado en el mes de Mayo y lo registrado en noviembre el crecimiento de la ferretería es muy notorio a comparación de la tienda.

Para complementar realizamos los mismos cálculos que se realizaron para mayo, y podemos analizar mejor, es este caso $X \sim Poisson(\lambda_1)$ denota el número de clientes que arriban en el apartado de la tienda y $Y \sim Poisson(\lambda_2)$ denota el número de clientes que arriban en el apartado de la ferretería, entonces $Z \sim Poisson(\lambda)$ donde $Z = X + Y$. Según la información de las Gráficas 3.6, 3.7, $\lambda_1 = 28$, $\lambda_2 = 19$ y $\lambda = 47$

Nuevamente, sean X y Y variables aleatorias independientes que representan el número de clientes que llegan al establecimiento y se dirigen al apartado correspondiente, cada una con parámetro correspondiente $\lambda_1 = 28$ $\lambda_2 = 19$, así pues:

$$P(X = 20) = \frac{28^{20}e^{-28}}{20!} = 0.0249, \quad y \quad P(Y = 14) = \frac{19^{14}e^{-19}}{14!} = 0.0514.$$

Por lo tanto,

$$P(X = 20, Y = 14) = P(X = 20)P(Y = 14) = (0.0249)(0.0514) = 0.0013.$$

la probabilidad disminuyó en comparación con lo obtenido en Mayo

Ahora bien, si quisiéramos conocer el caso en que los clientes que lleguen a la ferretería sean más que los que llegan a la tienda, es decir, la probabilidad de que en una hora 14 clientes lleguen a la tienda y 20 a la ferretería, entonces tenemos:

$$P(X = 14) = \frac{28^{14}e^{-28}}{14!} = 0.0014, \quad y \quad P(Y = 20) = \frac{19^{20}e^{-19}}{20!} = 0.0866.$$

Por lo tanto,

$$P(X = 14, Y = 20) = P(X = 14)P(Y = 20) = (0.0014)(0.0866) = 0.000125.$$

Las probabilidades disminuyen para X y Y pero esto no quiere decir que no sea posible; y para no dejar un caso sin revisar, veamos la probabilidad de que en una hora 17 clientes lleguen a la tienda y 17 a la ferretería

$$P(X = 17) = \frac{28^{17}e^{-28}}{17!} = 0.0078, \text{ y } P(Y = 17) = \frac{19^{17}e^{-19}}{17!} = 0.0863.$$

Por lo tanto,

$$P(X = 17, Y = 17) = P(X = 17)P(Y = 17) = (0.0078)(0.0863) = 0.0007.$$

Es muy notable que de los registros el mes de mayo al mes de noviembre hubo un gran incremento en el apartado de ferretería.

También se sabe que en promedio un cliente en la ferretería consume 35 pesos, mientras que en la tienda el promedio de consumo por cliente es de 31 pesos, es decir, aproximadamente se tiene una venta de \$ 14,299 en el apartado de tienda y \$ 8,925 en el apartado de ferretería, si a esto le agregamos el hecho de que en el margen de ganancias en ferretería es de un 20 % mientras que de la tienda el margen de ganancia en promedio es del 8 % tenemos que en la tienda se tiene una ganancia real del \$ 1,138.32, y para la ferretería la ganancia real es de \$ 1,785, obviamente se tendría que hacer un análisis más profundo para tener un registro de los productos que se venden, sus precios y sus porcentajes de rentabilidad.

En este trabajo más allá de dar algún tipo de recomendación sobre el manejo del negocio, se demostró que el negocio tiene un buen potencial de crecimiento en cuanto al número de clientes que ingresan, pero el objetivo del presente trabajo principalmente es mostrar que el número de arribos al establecimiento es un proceso de Poisson que cumple con las propiedades mencionadas.

Conclusiones

En este trabajo se analiza el número de arribos al establecimiento ya mencionado, y corrobora que se comporta como un proceso de Poisson cumpliendo las propiedades y teoremas que este implica, lo cual se cumplió de manera correcta.

Primero se realizó un registro de datos, se adecuó la información según los teoremas mencionados en el Capítulo 2, en esta parte lo más importante recae en la distribución del tiempo de ocurrencia entre eventos y el tiempo de espera, pues sin esto las gráficas no mostrarían información alguna.

Además, para generar las gráficas se utilizó R, pues en otro lenguaje de programación pudo ser más complicado.

Luego, con la información obtenida se hizo el cálculo de algunas probabilidades, para hacer notar que era lo más probable que ocurriera, y se observó el crecimiento del apartado de ferretería.

Tanto en los registros de Mayo y de Noviembre se calcularon probabilidades para eventos en que el número de clientes fuera mayor en uno que en otro y que fueran iguales, para esto se utilizó el tema de las carreras de Poisson, esto para hacer notar que si interpretamos la llegada de los clientes a cada apartado como una carrera de Poisson la probabilidad de que lleguen más clientes a la ferretería que a la tienda no pasa desapercibida, en un tiempo no muy lejano pueden llegar más clientes a la ferretería que a la tienda, es decir, el apartado de ferretería puede llegar a prosperar más que la tienda.

De manera general se puede decir lo siguiente:

1. *El arribo de los clientes a cada apartado se comportan como un proceso de Poisson, cumpliendo con la distribución de los tiempos de arribo y los tiempos de espera junto con la propiedad de pérdida de memoria.*

2. *En la información recabada se muestra el crecimiento notable que tiene la ferretería, se corrobora con los cálculos ya realizados como una carrera de Poisson dónde el apartado de*

ferretería tiene una probabilidad considerablemente buena de alcanzar al apartado de tienda en un tiempo no muy lejano.

3. *En cuanto a información adicional, se puede asegurar que en un futuro el negocio de ferretería puede prosperar más que el negocio de tienda, esto si tomamos en cuenta el pequeño análisis que se realizó sobre las ventas y los márgenes de ganancia.*

Se puede indagar más sobre la información recabada pero se sale del objetivo del trabajo, tal vez en un futuro se podrían tomar en cuenta el tiempo que tarda cada cliente en el establecimiento, y el análisis en cuanto a ventas y margen de ganancias y así podría manejarse una mejor organización en cuanto al número de personas que se necesitan para atender de mejor forma a los clientes, pero todo esto se podría tomar en cuenta para un trabajo futuro.

Como conclusión final se invita a los dueños de ambos establecimientos a trabajar de manera constante, en especial poner mucha atención en el apartado de ferretería pues parece tener un buen crecimiento.

Apéndice A

Anexo I: Código en R para generar gráficas

```
library(ggplot2)
TIENDA<-data.frame("Tiempo"=c(0:17),"LU"=c(datos),"MA"=c(datos),"MI"=c(datos),"JU"=c(datos),
                  "VI"=c(datos),"SA"=c(datos),"DO"=c(datos))

ggplot(data = TIENDA,
       aes(x=Tiempo, y=N(t), color=DÍA))+
  geom_step(aes(x=Tiempo, y=LU, color="LUNES"))+geom_point(aes(x=Tiempo, y=LU, color="LUNES"))+
  geom_step(aes(x=Tiempo, y=MA, color="MARTES"))+geom_point(aes(x=Tiempo, y=MA, color="MARTES"))+
  geom_step(aes(x=Tiempo, y=MI, color="MIÉRCOLES"))+geom_point(aes(x=Tiempo, y=MI, color="MIÉRCOLES"))+
  geom_step(aes(x=Tiempo, y=JU, color="JUEVES"))+geom_point(aes(x=Tiempo, y=JU, color="JUEVES"))+
  geom_step(aes(x=Tiempo, y=VI, color="VIERNES"))+geom_point(aes(x=Tiempo, y=VI, color="VIERNES"))+
  geom_step(aes(x=Tiempo, y=SA, color="SÁBADO"))+geom_point(aes(x=Tiempo, y=SA, color="SÁBADO"))+
  geom_step(aes(x=Tiempo, y=DO, color="DOMINGO"))+geom_point(aes(x=Tiempo, y=DO, color="DOMINGO"))+
  labs(
    x = "TIEMPO",          # título del eje x
    y = "N(t) NÚMERO DE ARRIBOS", # título del eje y
    title = "PROCESO DE POISSON", # título principal de la figura
    subtitle = "TIENDA")+scale_x_discrete(limit=c(0:17))

FERRETERIA<-data.frame("Tiempo"=c(0:17),"LU"=c(datos),"MA"=c(datos),"MI"=c(datos),"JU"=c(datos),
                      "VI"=c(datos),"SA"=c(datos),"DO"=c(datos))

ggplot(data = FERRETERIA,
       aes(x=Tiempo, y=N(t), color=DÍA))+
  geom_step(aes(x=Tiempo, y=LU, color="LUNES"))+geom_point(aes(x=Tiempo, y=LU, color="LUNES"))+
  geom_step(aes(x=Tiempo, y=MA, color="MARTES"))+geom_point(aes(x=Tiempo, y=MA, color="MARTES"))+
  geom_step(aes(x=Tiempo, y=MI, color="MIÉRCOLES"))+geom_point(aes(x=Tiempo, y=MI, color="MIÉRCOLES"))+
  geom_step(aes(x=Tiempo, y=JU, color="JUEVES"))+geom_point(aes(x=Tiempo, y=JU, color="JUEVES"))+
  geom_step(aes(x=Tiempo, y=VI, color="VIERNES"))+geom_point(aes(x=Tiempo, y=VI, color="VIERNES"))+
  geom_step(aes(x=Tiempo, y=SA, color="SÁBADO"))+geom_point(aes(x=Tiempo, y=SA, color="SÁBADO"))+
  geom_step(aes(x=Tiempo, y=DO, color="DOMINGO"))+geom_point(aes(x=Tiempo, y=DO, color="DOMINGO"))+
  labs(
    x = "TIEMPO",          # título del eje x
    y = "N(t) NÚMERO DE ARRIBOS", # título del eje y
    title = "PROCESO DE POISSON", # título principal de la figura
    subtitle = "FERRETERIA"
  )+scale_x_discrete(limit=c(0:17))
```


Bibliografía

- [1] Durrett, R. (2012). *Essentials of Stochastic Processes*. North Carolina: Springer.
- [2] Harry H. Panjer, G. E. (1994). *INSURANCE RISK MODELS*.
- [3] Hoel, P. G., Port, S. C., & Stone, C. J. (s.f.). *Introduction to Stochastic Processes*. Los Angeles: Houghton mifflin company.
- [4] Martinez, J. (6 de Agosto de 2016). *RPubs by RStudio*. Obtenido de <https://rpubs.com/JavierMtzG/ProcesoPoisson>
- [5] Meyer, P. L. (1992). *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*. México: Addison-Wesley Iberoamericana.
- [6] Mishura, Y., & Ragulina, O. (2016). *Ruin Probabilities*. Gran Bretaña: Istte Press.
- [7] Panjer, H. H., & Willmot, G. E. (1994). *Insurance Risk Models*. United States of America: Society of actuaries.
- [8] Ross, S. M. (2019). *Introduction to Probability Models*. Academic press.
- [9] Wackerly, D. D., Mendenhall III, W., & Scheaffer, R. L. (2010). *Estadística matemática con aplicaciones*. México: Cengage Learning.
- [10] Averill M., L., & W. David, K. (2015). *Simulation Modeling and Analysis*. New York: McGraw-Hill.