Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Análsis Hamiltoniano de la acción de Chern-Simons en términos de nuevas variables

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Víctor Julián Pérez Aquino

Asesorado por

Dr. Alberto Escalante Hernández
Dr. José de Jesús Toscano Chávez

Puebla Pue.
5 de junio de 2023

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Análsis Hamiltoniano de la acción de Chern-Simons en términos de nuevas variables

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Víctor Julián Pérez Aquino

Asesorado por

Dr. Alberto Escalante Hernández
Dr. José de Jesús Toscano Chávez

Puebla Pue.
5 de junio de 2023

Título: Análsis Hamiltoniano de la acción de Chern-Simons en términos de nuevas variables
Estudiante: Víctor Julián Pérez Aquino

COMITÉ

Dra. Ana Aurelia Avilez López
Presidente

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Secretario

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla
Vocal

Dr. Héctor Novales Sánchez
Vocal

Dr. Alberto Escalante Hernández
Asesor

Dr. José de Jesús Toscano Chávez
Co-asesor

Índice general

Dedicado a la memoria de mi mejor amigo J. F. C. M.

Agradecimientos

Agradezco a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas por haberme abierto las puertas y mostrame el gran panorama de la ciencia en México y el mundo.

Mi más profundo respecto y agradecimiento a mis asesores por haberme dado la oportunidad de su trabajo de investigación. Estoy agradecido especialmente con el Dr. Alberto Escalante Hernández, quien me mostró que la investigación es demandante, requiere constancia y esfuerzo,pero que sobre todo, es realmente apasionate, que cada sacrificio cuenta y que cada idea vale la pena ser explorada. De igual forma, gracias por sus palabras y consejos que me han alentado a seguir con este proyecto de convertirme en científico.

Gracias a mis sinodales por haber aceptado mi solicitud, por sus comentarios y correcciones que ayudaron a mejorar la última versión del trabajo. Es un honor presentar la culminación de esta etapa de mi vida frente a reconocidos miembros investigadores de esta Universidad.

Estoy infinitamente agradecido con mi familia, quienes son el soporte principal de este proyecto. Gracias por haberme dado todo, impulsar mis sueños, celebrar mis triunfos, ayudarme a aprender de mis fracasos y aunque mi ausencia halla representado un doloroso sacrificio para ustedes, gracias por haberme dado alas para llegar hasta aquí. Gracias a mamá y papá por mostrarme que el amor no tiene límites, a la abuela por cuidar siempre de mi, pero sobre todo, infinitas gracias a mi hermana, la mejor amiga que nunca pude haber pedido. Los amo.

Agradezco a Arturo, Eber, Joaquín, Kevin, Mariana y Silvana, quienes desde el primer día han hecho que la carrera resulte mucho menos complicada gracias a su genialidad y alegría. Nunca olvidaré a los físicos que un día decidieron asistir a las Noches de Ciencia en el Bar y se convirtieron en mis mejores amigos.

Y por último, gracias a Sofía, quien me escuchó, comprendió, motivó y apoyó en cada segundo, y más aún, me enseñó que más allá de los teoremas y definiciones, está el amor, y no siempre necesita una demostración.

Gracias.

Resumen

En este trabajo se realiza el análisis Hamiltoniano de la acción de Chern-Simons en tres dimensiones usando unas nuevas variables. Nuestro análisis nos permitirá conocer exhaustivamente las características presentes en la teoría. En particular, presentamos una nueva estructura de las restricciones que presentan una forma más compacta de lo que se ha reportado en la literatura. En adición, usando las mismas variables que se introdujeron en la teoría de Chern-Simons, también analizamos la teoría de gravedad topológicamente masiva.

Introducción

La necesidad en describir la naturaleza del movimiento de los cuerpos motivó a Isaac Newton y físicos de la época al descubrimiento y desarrollo de las leyes de Newton y posteriormente a una reformulación, un poco más sofisticada pero equivalente, basada en el principio de mínima acción de Hamilton. Ambas formulaciones proporcionan un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden en las derivadas temporales por resolver. La introducción de un nuevo formalismo llamado Hamiltoniano simplificó el problema al dar lugar a ecuaciones de primer orden a través del principio variacional.

Por otra parte, en la física moderna se ha considerado la posibilidad de describir sistemas con Lagrangianas que tienen derivadas de alto orden respecto a la variable temporal, dando como consecuencia que al hacer la variación se produzcan ecuaciones diferenciales de orden superior. Fue Mikhail Ostrogradski, en 1850 [1], quien propuso por primera vez una formulación canónica para una Lagrangiana de un sistema regular de un orden arbitrario finito en las derivadas; la formulación Hamiltoniana para sistemas singulares fue propuesta un siglo después por Dirac. Es bien sabido que las teorías de alto orden en las derivadas tienen un gran interés en la física. En efecto, con los trabajos desarrollados por Ostrogradski analizando la formulación Hamiltoniana de sistemas de alto orden, hasta nuestros días, dichos sistemas siguen teniendo un alto atractivo para la comunidad. Sistemas de alto orden aparecen en problemas como la generalización de la electrodinámica [2], [3], [4], [5], teoría de cuerdas [6], modelos para explicar el problema de la energía oscura [7], [8], y por supuesto en generalizaciones de gravedad, donde se incluyen términos cuadráticos en la curvatura y de dichos términos emergen derivadas de alto orden. Tales generalizaciones son relevantes porque al menos por conteo de potencias se asegura que dichas teorías modificadas de gravedad son renormalizables [9], [10].

Para estudiar los sistemas de alto orden en las derivadas temporales y que además sean singulares, se tiene a la mano el formalismo conocido como Dirac-Ostrogradski [DO] [11]. En efecto, en dicho método lo que se considera es realizar una extensión del espacio fase. Básicamente, lo que se hace es asociar el momento canónico conjugado al campo y a la derivada temporal del campo. Después, se realiza la identificación de las restricciones de manera usual como se hace en el formalismo de Dirac. Sin embargo, debido a que los sistemas de alto orden no son triviales, la identificación de las restricciones y por lo tanto de las simetrías, no es un ejercicio fácil de llevar a cabo. Debido a lo anterior, la comunidad ha estado buscando métodos alternativos al formalismo [DO] para realizar el análisis de sistemas de alto orden. Respecto a este punto, se tiene también a la mano el formalismo canónico llamado Gitman-Lyakhovich-Tyutin ([GLT]) [12], [13], [14]. El formalismo de [GLT] es una extensión del formalismo de [DO], en dicho método lo que se considera es introducir unos cambios de variables y asociarles multiplicadores de Lagrange, de tal manera que el orden de las derivadas temporales se reduzca y así poder trabajar como si se tuviera una teoría singular de orden uno. El formalismo [GLT] ha sido aplicado a modelos sencillos, pero no ha sido explotado del todo en una teoría de campo, salvo trabajos recientes en donde ha sido usado para analizar modelos de juguete y de gravedad [14], [15], [16] y a una teoría de alto orden llamada gravedad topológicamente masiva [17]. Por otra parte, en otros trabajos se han analizado teorías de alto orden usando una forma cercana al formalismo [GLT], donde el uso de nuevas variables ha permitido realizar el análisis canónico de una manera más corta y elegante. Sin embargo, aunque no es precisamente el formalismo [GLT] nosotros lo llamaremos tipo [GLT] por su cercanía [18].

En el presente trabajo de tesis de licenciatura, se propone estudiar la teoría conocida como la acción de Chern-Simons [CS] en tres dimensiones, la cual es una teoría de alto orden. Cabe mencionar que la teoría de [CS] es una teoría topológica, es decir, no presenta grados de libertad. Sin embargo, contiene todas las simetrías que se conocen en gravedad real. Otro punto a considerar es que al acoplar el término de Chern-Simons a la acción de Einstein-Hilbert [EH-CS], la teoría resultante tiene un grado de libertad masivo; es decir, esa teoría describe la propagación de un gravitón con masa. Por otro lado, es bien conocido, que las teorías de alto orden presentan un problema de acuerdo con el teorema de Ostrogradski. En efecto, las teorías de alto orden en las derivadas temporales presentan generalmente campos fantasmas, esto es, campos con energía de norma negativa. De hecho, este es un problema común, incluso en modelos de gravedad como por ejemplo en la teoría de Weyl [16], donde se presume que los grados de libertad masivos son fantasmas y aunque la teoría se considera ser renormalizable, el problema de los campos fantasma ha sido un tema de investigación de los últimos años. Respecto a este tema se puede consultar un trabajo reciente de cómo tratar y exorcizar los campos fantasma usando el formalismo canónico [19]. A pesar de que llegar al punto de ver si un campo es fantasma o no está fuera del alcance del presente trabajo, se presenta una propuesta para el análsis Hamiltoniano de la teoría [CS] Y [EH-CS] haciendo uso de un esquema diferente. Se propone un conjunto de cambios de variables para reducir las derivadas temporales de segundo orden a unas de primer orden.

La presente tesis está organizada de la siguiente manera: en el capítulo 1 se presenta un análisis de la acción linealizada de Einstein-Hilbert más un término de Chern-Simons, el cual hace que la teoría se convierta en una de alto orden en las derivadas temporales, y se analiza usando el formalismo de [DO]. En el capítulo 2 se presenta el formalismo tipo GLT aplicado al término de Chern-Simons pero ahora en términos de nuevas variables. Dichas variables nos ayudarán a que esta teoría deje de ser de alto orden, luego usaremos el formalismo de Dirac para analizar la teoría. En el capítulo 3 se presenta nuevamente la aplicación del formalismo tipo GLT pero ahora aplicado al sistema de alto orden [EH-CS], se desarrolla el algoritmo de Dirac. Por último, en el capítulo 4 se presentan las conclusiones.

Capítulo 1

Formalismo de Dirac-Ostrogradski aplicado al sistema Einstein-Chern-Simons

En este capítulo se explora el formalismo de Dirac-Ostrogradski aplicado a la teoría singular de alto orden de [EH-CS] linealizada. Dicho análisis es un resumen de lo que se reporta en [20].

Como ya se comentó antes, el método de Dirac-Ostrogradski consiste en extender el espacio fase, considerando como variables canónicas a los campos, sus derivadas temporales y sus respectivos momentos conjugados. Pero uno de los puntos que vale la pena remarcar, es que ahora las derivadas temporales de los campos se consideran variables canónicas. Posterior a esta extensión del espacio fase, se aplica el formalismo de Dirac para sistemas singulares.

Cuando se intenta cuantizar la Lagrangiana de [EH] no se obtiene una teoría finita en el sentido de que los infinitos no pueden eliminarse por renormalización. Pero si uno incluye un término de [CS] a la teoría, la inconsistencia mencionada no existirá más [21], [22].

Los términos de [CS] se proponen como términos de masa en teorías de norma con dimensión impar debido a que no alteran la simetría de norma [23]. Es interesante también mencionar que la teoría de la relatividad general en (2+1) dimensiones puede describirse como una teoría de [CS], como se menciona en [24].

La densidad Lagrangiana de [EH] se representa como

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}R, \tag{1.1}$$

donde g es el determinante de la métrica del espacio-tiempo y R el escalar de Ricci. Es importante mencionar que en este análisis se trabaja con la convención de signos diag. $(+,-,-)$ para la métrica.

Considerando el escenario de un campo gravitacional débil, la métrica se puede escribir como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{1.2}$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ representa la métrica de Minkowski y $h_{\mu\nu}$ es una pequeña perturbación.

Introduciendo (1.2) en la densidad Lagrangiana (1.1) obtenemos lo que se conoce como gravedad linealizada, considerando solamente hasta términos cuadráticos para el campo $h_{\mu\nu}$

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{1}{4}\partial_\lambda h_{\mu\nu}\partial^\lambda h^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\partial_\lambda h^\mu_\mu \partial^\lambda h^\nu_\nu + \frac{1}{2}\partial_\lambda h^\lambda_\mu \partial^\mu h^\nu_\nu - \frac{1}{2}\partial_\lambda h^\lambda_\mu \partial_\nu h^{\nu\mu}. \tag{1.3}$$

Por otro lado, la densidad Lagrangiana correspondiente al término de Chern-Simons puede escribirse como

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{1}{\mu}\epsilon^{\lambda\mu\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\sigma}(\partial_\mu \Gamma^\sigma_{\rho\nu} + \frac{2}{3}\Gamma^\sigma_{\mu\xi}\Gamma^\xi_{\nu\rho}), \tag{1.4}$$

donde $\epsilon^{\lambda\mu\nu}$ representa al tensor Levi-Civita y $\Gamma^\rho_{\lambda\sigma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}(\partial_\lambda g_{\sigma\alpha} + \partial_\sigma g_{\lambda\alpha} - \partial_\alpha g_{\lambda\sigma})$ son los símbolos de Christoffel.

Nuevamente, considerando la aproximación de campo gravitacional débil (1.2) en (1.4) y considerando términos de segundo orden obtenemos

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\epsilon^{\lambda\mu\nu}}{2\mu}\left(\partial_\sigma h^\rho_\lambda \partial_\rho \partial_\mu h^\sigma_\nu - \partial_\sigma h^\rho_\lambda \partial^\sigma \partial_\mu h_{\rho\nu} \right). \tag{1.5}$$

Sumando ambas densidades (1.3) y (1.5) y haciendo la descomposición 2+1 tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = {} & \frac{1}{4}(\dot{h}_{ij}\dot{h}^{ij} - \dot{h}^i_i \dot{h}^j_j) + (\partial^i h^j_j - \partial_j h^{ij})\dot{h}^0_i - \frac{1}{2}\partial_i h_{0j}\partial^i h^{0j} - \frac{1}{4}\partial_i h_{jk}\partial^i h^{jk} \\
& + \frac{1}{2}\partial_i h^{00}\partial^i h^j_j + \frac{1}{4}\partial_i h^j_j \partial^i h^k_k - \frac{1}{2}\partial_i h^i_j \partial^j h^{00} - \frac{1}{2}\partial_i h^i_j \partial^j h^k_k + \frac{1}{2}\partial_i h^i_0 \partial_j h^{j0} + \frac{1}{2}\partial_i h^i_j \partial_k h^{kj} \\
& + \frac{\epsilon^{ij}}{\mu}\Bigg(\dot{h}^k_0 \partial_k \partial_i h_{0j} - \partial_i \partial_k h_{00}\dot{h}^k_j - \partial_i h^k_0 \ddot{h}_{kj} + \ddot{h}^k_i \partial_k h_{0j} + \frac{1}{2}\partial_k \partial_l h^l_i \dot{h}^k_j + \frac{1}{2}\dot{h}^k_i \ddot{h}_{kj} \\
& + \frac{1}{2}\nabla^2 h^0_i \dot{h}_{0j} + \frac{1}{2}\nabla^2 h^k_i \dot{h}_{kj} + \partial_k h^l_0 \partial_i \partial_l h^k_j - \nabla^2 h^k_0 \partial_i h_{kj} - \nabla^2 h_{00}\partial_i h_{0j}\Bigg).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Ahora podemos notar que estamos trabajando con una teoría de alto orden en las derivadas temporales, lo cual significa, como lo requiere el formalismo de Ostrogradski, que el espacio fase debe expandirse considerando a $\dot{h}_{\mu\nu}$ como una variable canónica.

Como se sabe, en una teoría de alto orden la definición de los momentos se reescribe como

$$\pi^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{h}_{\mu\nu}} - 2\partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \dot{h}_{\mu\nu})}, \tag{1.7}$$

$$s^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{h}_{\mu\nu}}, \tag{1.8}$$

así, usando (1.6), (1.7) y (1.8), se obtienen los siguientes momentos conjugados

$$\pi^{00} = 0, \tag{1.9a}$$
$$\pi^{0i} = \frac{1}{2}\left(\partial^i h^j_j - \partial_j h^{ij} \right) + \frac{1}{2\mu}\left(2\epsilon^j k \partial_j \partial^i h^0_k - \epsilon^{ij}\nabla^2 h_{0j} \right), \tag{1.9b}$$
$$\begin{aligned}\pi^{ij} &= \frac{1}{2}\left(\dot{h}^{ij} - \eta^{ij}\dot{h}^k_k\right) \\ &+ \frac{\epsilon^{ik}}{4\mu}\left(2\partial_k\partial^j h^{00} - \partial^j\partial_l h^l_k + 2\ddot{h}^j_k - \nabla^2 h^j_k 2\partial_k \dot{h}^j_0 - 2\partial^j \dot{h}^0_k + (i \leftrightarrow j)\right),\end{aligned} \tag{1.9c}$$
$$s^{00} = 0, \tag{1.9d}$$
$$s^{0i} = 0, \tag{1.9e}$$
$$s^{ij} = \frac{1}{2\mu}\left[\epsilon^{ik}(\partial_k h^j_0 + \partial^j h_{0k} - \frac{1}{2}\dot{h}^j_k) + (i \leftrightarrow j)\right], \tag{1.9f}$$

donde $i \leftrightarrow j$ representa al término inmediatamente anterior pero con los índices i y j intercambiados.

Con los momentos canónicos calculados, se identifican las siguientes restricciones primarias

$$\Omega = \pi^{00} \approx 0, \tag{1.10a}$$
$$\Omega^i = \pi^{0i} - \frac{1}{2}\left(\partial^i h^j_j - \partial_j h^{ij}\right) - \frac{1}{2\mu}\left(2\epsilon^j k \partial_j \partial^i h^0_k - \epsilon^{ij}\nabla^2 h^0_j\right) \approx 0, \tag{1.10b}$$
$$\Lambda = \pi^i_i + \frac{1}{2}\dot{h}^i_i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu}\partial_j\partial_k h^k_i \approx 0, \tag{1.10c}$$
$$\Theta = s^{00} \approx 0, \tag{1.10d}$$
$$\Theta^i = s^{0i} \approx 0, \tag{1.10e}$$
$$\Theta^{ij} = s^{ij} - \frac{1}{2\mu}\left[\epsilon^{ik}(\partial_k h^j_0 + \partial^j h_{0k} - \frac{1}{2}\dot{h}^j_k + (i \leftrightarrow j)\right]. \tag{1.10f}$$

Usando los momentos canónicos (1.9) y las restricciones primarias (1.10), la densidad hamiltoniana primaria se escribe como

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 = \pi^{ij}\dot{h}_{ij} &- \frac{1}{4}\Big(\dot{h}_{ij}\dot{h}^{ij} + 2\partial_i h_{0j}\partial^i h^{0j} + \partial_i h_{jk}\partial^i h^{jk} - \dot{h}^i_i \dot{h}^j_j \\ &- 2\partial_i h^{00}\partial^i h^j_j - \partial_i h^j_j \partial_i h^k_k + 2\partial_i h^i_j \partial^j h^{00} \\ &+ 2\partial_i h^i_j \partial^j h^k_k - 2\partial_i h^i_0 \partial_j h^{j0} - 2\partial_i h^i_j \partial_k h^{kj} \Big) \\ &+ \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu}\Big(2\partial_i\partial_k h_{00}\dot{h}^k_j - 2\partial_k h^l_0 \partial_i \partial_l h^k_j + 2\nabla^2 h^k_0 \partial_i h_{kj} \\ &+ 2\nabla^2 h_{00}\partial_i h_{0j} - \partial_k \partial_l h^l_i \dot{h}^k_j - \nabla^2 h^k_i \dot{h}_{kj} \Big) \\ &+ \lambda\Omega + \lambda_i \Omega^i + \rho\Theta + \rho_i\Theta^i + \rho_{ij}\Theta^{ij} + \xi\Lambda.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Después se aplican las condiciones de consistencia a las restriciones primarias (1.10) y posteriormente a las restricciones resultantes de éstas y se realiza la separación de restricciones de primera y segunda clase como se comenta en el apéndice A en A.4 y A.5. Así, después de hacer lo comentado, tenemos

Restricciones de primera clase

$$\Omega = \pi^{00} \approx 0, \tag{1.12a}$$

$$\Theta = s^{00} \approx 0, \tag{1.12b}$$

$$\Theta^{i} = s^{0i} \approx 0, \tag{1.12c}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{i} = {} & \partial_j s^{ij} - \pi^{0i} + \frac{1}{2}\left(\partial^i h^j_j - \partial_j h^{ij}\right) \\ & - \frac{1}{4\mu}\left(2\epsilon^{ji}\partial_k\partial_j h^{0k} + \epsilon^{ij}\nabla^2 h_{j0} - \epsilon^{jk}\partial_k \dot{h}^i_j + \epsilon^{ij}\partial_k \dot{h}^k_j\right) \approx 0, \end{aligned} \tag{1.12d}$$

$$\xi^{i} = \partial_j \pi^{ij} + \frac{1}{2}\left(\nabla^2 h^i_0 + \partial_j\partial^i h^{j0}\right) - \frac{\epsilon^{jk}}{4\mu}\partial_j\left(\partial_l\partial^i h^l_k + \nabla^2 h^i_k\right) \approx 0, \tag{1.12e}$$

$$\Gamma = \partial_i\partial_j s^{ij} - \frac{1}{2}\left(\partial_i\partial_j h^{ij} + \nabla^2 h^i_i\right) + \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu}\partial_i\left(4\nabla^2 h_{0j} + 3\partial_k \dot{h}^k_j\right) \approx 0. \tag{1.12f}$$

Restricciones de segunda clase

$$\Theta^{ij} = s^{ij} - \frac{1}{2\mu}\left[\epsilon^{ik}(\partial_k h^j_0 + \partial^j h_{0k} - \frac{1}{2}\dot{h}^j_k + (i \leftrightarrow j)\right] \approx 0, \tag{1.13a}$$

$$\Lambda = \pi^i_i + \frac{1}{2}\dot{h}^i_i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu}\partial_j\partial_k h^k_i \approx 0. \tag{1.13b}$$

Podemos observar que en este sistema se identifican 9 restricciones de primera clase y 4 restricciones de segunda clase, en un sistema con 24 variables canónicas $h_{\mu\nu}$, $\dot{h}_{\mu\nu}$, $\pi^{\mu\nu}$ y $s^{\mu\nu}$, luego el conteo de grados de libertad se realiza como sigue

$$DOF = \frac{1}{2}\Big(\,(24) - 2(9) - 4\,\Big) = 1. \tag{1.14}$$

Es importante notar que mediante este formalismo es posible observar un término lineal en los momentos en la Hamiltoniana primaria (1.11), el cual puede estar asociado a una inestabilidad de Ostrogradski que aparece en los sistemas de alto orden. Sin embargo, esto no es tan evidente debido a que el término lineal es una mera consecuencia de la transformada de Legendre. En las siguientes secciones dicho término aparecerá de una forma diferente y podremos comentar algo respecto a este punto.

Capítulo 2

Formalismo tipo GLT aplicado al término de Chern-Simons de alto orden

Existe una formulación canónica para sistemas de alto orden conocida como formalismo Gitman-Lyakhovich-Tyutin [GLT], el cual es una generalización del formalismo de Dirac-Ostrogradski y consiste en la introducción de campos extra con la intención de reducir las derivadas de alto orden. Al final del proceso, los grados de libertad no físicos introducidos por estos campos pueden ser removidos usando las restricciones de segunda clase e introduciendo los paréntesis de Dirac.

En la sección anterior, se analizó el sistema [CS] aplicando el formalismo [DO], pero una de las limitantes de este método es que es extenso y la identificación de las restricciones no es tan sencilla. Es por eso que en esta sección se propone analizar este sistema como se reporta en [18], introduciendo los siguientes cambios de variables

$$K_{ij} = \frac{1}{2}\left(\dot{h}_{ij} - \partial_i h_{0j} - \partial_j h_{0i}\right), \tag{2.1}$$

estas variables son un tipo de curvatura extrínseca. A pesar de que no hacemos un análisis con el formalismo GLT, estos cambios de variables permiten que las Lagrangianas de alto orden que se pretenden estudiar en esta tesis, se conviertan en unas de primer orden en las derivadas temporales.

La densidad Lagrangiana asociada al sistema [CS] que se analiza en esta sección es exactamente la misma mencionada en la sección anterior, la ecuación (1.4), que al introducir la métrica (1.2) obtenemos (1.5). En este caso, usando la convención de signos $(-,+.+)$ para la métrica, la separación 2+1 resulta

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{CS} = -\frac{\epsilon^{ij}}{\mu}\Big(&\ddot{h}_{ik}\partial^k h_{0j} + \ddot{h}_{ki}\partial_j h_0^k - \dot{h}_j^k \ddot{h}_{ki} + \dot{h}_{ki}\partial_j\partial^k h_{00} + \dot{h}_{0k}\partial_i\partial^k h_{j0} \\ &+ \frac{1}{2}\dot{h}_{0i}\nabla^2 h_{0j} - \frac{1}{2}\dot{h}_{ki}\nabla^2 h_j^k + \frac{1}{2}\dot{h}_i^k \partial_k\partial_l h_j^l + \partial_i h_{0j}\nabla^2 h_{00} \\ &-\partial_i h_{kj}\nabla^2 h_0^k - \partial_k h_{l0}\partial_i\partial^l h_j^k\Big),\end{aligned} \tag{2.2}$$

y al introducir los cambios de variable (2.1), obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{CS} = \frac{\epsilon^{ij}}{\mu}&\Big(2K_j^k\dot{K}_{ki} - 2K_{ik}\partial_j\partial^k h_{00} - K_i^k\partial_k\partial_l h_j^h + K_{ki}\nabla^2 h_j^k \\ &+\frac{1}{2}h_0^k\partial_i\nabla^2 h_{kj} - \frac{1}{2}h_0^k\partial_k\partial_l\partial_i h_j^l\Big) + \alpha^{ij}\left(\dot{h}_{ij} - 2\partial_i h_{0j} - 2K_{ij}\right),\end{aligned} \tag{2.3}$$

donde hemos introducido el multiplicador de lagrange α^{ij}, el cual nos asegura que al variar la Lagrangiana obtenemos las mismas ecuaciones de movimiento de [CS].

2.1. Sistema singular

Notemos que la densidad Lagrangiana es ahora una funcional de la forma

$$\mathcal{L}_{CS} = \mathcal{L}_{CS}(h_{\mu\nu}, K_{ij}, \alpha_{ij}, \dot{h}_{\mu\nu}, \dot{K}_{ij}, \dot{\alpha}_{ij}),$$

es decir, el sistema ha dejado de ser de alto orden y el formalismo canónico que aplicaremos es el de Dirac.

Dado que el objetivo de la tesis es presentar el formalismo de Dirac aplicado a los sistemas con este nuevo cambio de variables, esta sección se desarrolla con más detalle.

Tal como se muestra en la sección A.1 del apéndice A, la matriz Hessiana se define como

$$H_{ij} = \frac{\partial}{\partial\dot{Q}^j}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{Q}^i}, \tag{A.2}$$

donde Q^i representa las variables campo del sistema.

Luego, para el sistema (2.3), dado que no depende de términos cuadráticos en las velocidades de las variables canónicas ni términos cruzados, la matriz Hessiana toma la forma

$$(H_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{h}_{\mu\nu}\partial\dot{h}_{\mu\nu}} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{h}_{\mu\nu}\partial\dot{K}_{ij}} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{h}_{\mu\nu}\partial\dot{\alpha}_{ij}} \\ \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{K}_{ij}\partial\dot{h}_{\mu\nu}} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{K}_{ij}\partial\dot{K}_{ij}} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{K}_{ij}\partial\dot{\alpha}_{ij}} \\ \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{\alpha}_{ij}\partial\dot{h}_{\mu\nu}} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{\alpha}_{ij}\partial\dot{K}_{ij}} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{\alpha}_{ij}\partial\dot{\alpha}_{ij}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Evidentemente $\det(H_{ij}) = 0$, lo que significa que (H_{ij}) no es una matriz invertible, o en este contexto, $\mathcal{L}$ es efectivamente una teoría singular.

Otro dato que vale la pena mencionar es que no hay filas ni columnas linealmente independientes en (H_{ij}), lo que significa que al momento de definir los momentos canónicos conjugados, ninguna velocidad podrá despejarse y, por lo tanto, todos los momentos se convierten en restricciones primarias.

2.2. Restricciones primarias

Siguiendo el algoritmo, se definen los momentos canónicos conjugados de las variables dinámicas

$$\pi^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{h}_{\mu\nu}},\ \tau^{ij} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\alpha}_{ij}},\ P^{ij} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{K}_{ij}}, \tag{2.5}$$

calculando explícitamente

$$\pi^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{00}} = 0, \tag{2.6a}$$

$$\pi^{0i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{0i}} = 0, \tag{2.6b}$$

$$\pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{ij}} = \alpha^{ij}, \tag{2.6c}$$

$$\tau^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}_{ij}} = 0, \tag{2.6d}$$

$$P^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{K}_{ij}} = \frac{1}{\mu}\left(\epsilon^{ik} K^j_k + \epsilon^{jk} K^i_k\right). \tag{2.6e}$$

Dado que el rango de matriz Hessiana es cero, todos los momentos se promueven a restricciones primarias

$$\phi^{00} : \pi^{00} \approx 0, \tag{2.7a}$$

$$\phi^{0i} : \pi^{0i} \approx 0, \tag{2.7b}$$

$$\phi^{ij} : \pi^{ij} - \alpha^{ij} \approx 0, \tag{2.7c}$$

$$\psi^{ij} : \tau^{ij} \approx 0, \tag{2.7d}$$

$$\Sigma^{ij} : P^{ij} - \frac{1}{\mu}\left(\epsilon^{ik} K^j_k + \epsilon^{jk} K^i_k\right) \approx 0. \tag{2.7e}$$

Una forma segura de identificar las restricciones primarias independientes que a través de su evolución generan restricciones secundarias es construyendo una matriz cuyas entradas son los paréntesis de Poisson entre todas las restricciones primarias, como se muestra a continuación

$$M_1 = \begin{array}{c} \\ \phi^{00} \\ \phi^{0i} \\ \phi^{ij} \\ \psi^{ij} \\ \Sigma^{ij} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \phi^{00} & \phi^{0k} & \phi^{kl} & \psi^{kl} & \Sigma^{kl} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\delta^{ij}_{kl}\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\delta^{ij}_{jl}\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \{\Sigma^{ij}, \Sigma^{kl}\} \end{pmatrix} \end{array}, \tag{2.8}$$

donde

$$\{\Sigma^{ij}, \Sigma^{kl}\} = \frac{1}{\mu}\left(\epsilon^{kj}\delta^{il} + \epsilon^{ki}\delta^{jl} + \epsilon^{lj}\delta^{ik} + \epsilon^{li}\delta^{jk}\right)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}). \tag{2.9}$$

Se puede comprobar que los vectores nulos para la matriz (2.8) están dados por

$$\vec{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{V_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{V_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta_{ij} \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

luego, las restricciones primarias independientes que al evolucionar generan restricciones secundarias son

$$\vec{V_1} \cdot \vec{\Phi} = \phi^{00}, \tag{2.11}$$

$$\vec{V_2} \cdot \vec{\Phi} = \phi^{0i}, \tag{2.12}$$

$$\vec{V}_3 \cdot \vec{\Phi} = \left(P^{ij} - \frac{1}{\mu}(\epsilon^{im} K^j_m + \epsilon^{jm} K^i_m) \cdot \delta_{ij} \right) = P^i_i = P = \Sigma, \tag{2.13}$$

donde se ha definido el vector de restricciones primarias como

$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi^{00} \\ \phi^{0i} \\ \phi^{ij} \\ \psi^{ij} \\ \Sigma^{ij} \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Podemos notar que las expresiones (2.11) y (2.12) son restricciones que ya habíamos obtenido, pero (2.13) es una restricción primaria nueva a la cual hay que aplicarle la condición de consistencia.

Ahora podemos definir la estructura simpléctica, es decir, los paréntesis de Poisson fundamentales entre las variables canónicas

$$\{h_{\alpha\beta}(x), \pi^{\mu\nu}(y)\} = \frac{1}{2}(\delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta + \delta^\nu_\alpha \delta^\mu_\beta)\delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \tag{2.15a}$$

$$\{K_{ij}(x), P^{lm}(y)\} = \frac{1}{2}(\delta^l_i \delta^m_j + \delta^m_i \delta^l_j)\delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \tag{2.15b}$$

$$\{\alpha_{ij}(x), \tau^{lm}(y)\} = \frac{1}{2}(\delta^l_i \delta^m_j + \delta^m_i \delta^l_j)\delta^2(\vec{x} - \vec{y}). \tag{2.15c}$$

2.3. Hamiltoniana canónica y primaria

Procedemos a construir la densidad hamiltoniana canónica. Usando la definición (A.7) después de unos cuantos cálculos obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c =& \frac{\epsilon^{ij}}{\mu}(2K_{ki}\partial_j \partial^k h_{00} + K^k_i \partial_k \partial_l h^l_j - K_{ki}\nabla^2 h^k_j \\ & - \frac{1}{2} h^k_0 \partial_i \nabla^2 h_{kj} + \frac{1}{2} h^k_0 \partial_k \partial_l \partial_i h^l_j) + 2\pi^{ij}(\partial_i h_{0j} + K_{ij}). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Luego, la densidad hamiltoniana primaria (A.8) se expresa como

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 =& \frac{\epsilon^{ij}}{\mu}(2K_{ki}\partial_j \partial^k h_{00} + K^k_i \partial_k \partial_l h^l_j - K_{ki}\nabla^2 h^k_j \\ & - \frac{1}{2} h^k_0 \partial_i \nabla^2 h_{kj} + \frac{1}{2} h^k_0 \partial_k \partial_l \partial_i h^l_j) + 2\pi^{ij}(\partial_i h_{0j} + K_{ij}) \\ & + \lambda_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu} + \zeta_{ij}\psi^{ij} + \xi_{ij}\Sigma^{ij}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

donde $\lambda_{\mu\nu}$, ζ_{ij} y ξ_{ij} son multiplicadores de lagrange que nos permite codificar la información de las restricciones en la nueva densidad hamiltoniana.

Podemos ver que la Hamiltoniana es más compacta que (1.11) y también tenemos términos lineales en la variable π^{ij}, que están asociados a una posible inestabilidad de Ostrogradski.

2.4. Condiciones de consistencia a restricciones primarias

Con la densidad hamiltoniana primaria podemos aplicar las condiciones de consistencia, tal como se menciona en la sección A.4. Aplicando integración por partes y usando las definiciones de los paréntesis de Poisson fundamentales (2.15) obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{\phi}^{00} = \{\phi^{00}(x), H_1(y)\} &= -\frac{2}{\mu}\int \epsilon^{ij}K_{ik}\partial_j\partial^k\{\pi^{00}, h_{00}\}d^3y \\ &= -\frac{2}{\mu}\int \epsilon^{ij}\delta^2(\vec{x}-\vec{y})\partial^k\partial_j K_{ik}d^3y = -\frac{2}{\mu}\epsilon^{ij}\partial^k\partial_j K_{ik} \approx 0,\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}\dot{\phi}^{0m} = \{\phi^{0m}(x), H_1(y)\} = &-\int \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu}\partial_i\nabla^2 h_j^k\{\pi^{0m}, h_{0k}\}d^3y + \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu}\partial^k\partial_l\partial_i h_j^l\{\pi^{0m}, h_{0k}\}d^3y \\ &+ 2\int \pi^{ij}\partial_i\{\pi^{0m}, h_{0j}\}d^3y \\ &= \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial_i\nabla^2 h_j^m - \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial^m\partial_l\partial_i h_j^l + \partial_i\pi^{im} \approx 0,\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}\dot{\phi}^{mn} = \{\phi^{mn}(x), H_1(y)\} = &\int \frac{\epsilon^{ij}}{\mu}K_i^k\partial_k\partial^l\{\pi^{mn}, h_{lj}\}d^3y - \int \frac{\epsilon^{ij}}{\mu}K_i^k\nabla^2\{\pi^{mn}, h_{kj}\}d^3y \\ &- \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu}h_0^k\partial_i\nabla^2\{\pi^{mn}, h_{kj}\}d^3y + \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu}h_0^k\partial_k\partial^l\partial_i\{\pi^{mn}, h_{lj}\}d^3y \\ &+ \int \zeta^{ij}\{-\alpha^{mn}, \tau_{ij}\}d^3y \\ &= -\frac{1}{2\mu}(\epsilon^{in}\partial_k\partial^m K_i^k + \epsilon^{im}\partial_k\partial^n K_i^k) \\ &+ \frac{1}{2\mu}(\epsilon^{in}\nabla^2 K_i^m + \epsilon^{im}\nabla^2 K_i^n) \\ &- \frac{1}{4\mu}(\epsilon^{in}\partial_i\nabla^2 h_0^m + \epsilon^{im}\partial_i\nabla^2 h_0^n) \\ &+ \frac{1}{4\mu}(\epsilon^{in}\partial_k\partial^m\partial_i h_0^k + \epsilon^{im}\partial_k\partial^n\partial_i h_0^k) - \zeta^{mn} \approx 0,\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\dot{\psi}^{mn} = \{\psi^{mn}(x), H_1(y)\} = -\int \lambda^{ij}\{\tau^{ij}, \alpha_{ij}\}d^3y = \lambda^{mn} \approx 0, \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}\dot{\Sigma}^{mn} = \{\Sigma^{mn}(x), H_1(y)\} = &\frac{1}{2\mu}\Big(\epsilon^{mj}(2\partial_j\partial^n h_{00} - \partial^n\partial_l h_j^l + \nabla^2 h_j^n) \\ &+\epsilon^{nj}(2\partial_j\partial^m h_{00} - \partial^m\partial_l h_j^l + \nabla^2 h_j^m)\Big) \\ &+ \frac{2}{\mu}\left(\xi_i^m\epsilon^{in} + \xi_i^n\epsilon^{im}\right) \approx 0.\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}\dot{\Sigma} = &\int \frac{2\epsilon^{ij}}{\mu}\partial_j\partial^k h_{00}\{P(x), K_{ik}(y)\}d^3y + \int \frac{\epsilon^{ij}}{\mu}\partial_k\partial_l h_j^l\{P(x), K_i^k(y)\}d^3y \\ &- \int \frac{\epsilon^{ij}}{\mu}\nabla^2 h_j^k\{P(x), K_{ik}(y)\}d^3y + \int 2\pi^{ij}\{P(x), K_{ij}(y)\}d^3y \\ &- \frac{1}{\mu}\int \xi^{ij}\left[\epsilon^{im}\{P(x), K_{ik(y)}\}d^3y\right] \\ &= -\frac{\epsilon^{ij}}{\mu}\partial_i\partial_l h_j^l - 2\pi \approx 0\end{aligned} \quad . \tag{2.23}$$

Es importante notar que en la ecuación (2.13) se produce una nueva restricción independiente que proporciona información de cómo deben considerarse las restricciones Σ^{ij}. Es decir, se tiene que

$$P \approx 0 \Rightarrow P_1^1 = -P_2^2,$$

por lo que, solo dos de las tres restricciones codificadas en Σ^{ij} son independientes, y se consideran como sigue

$$\Sigma^{11} : P^{11} - \frac{2}{\mu} K_2^1 \approx 0, \tag{2.24}$$

$$\Sigma^{12} : P^{12} - \frac{1}{\mu}(K_2^2 - K_1^1) \approx 0 \tag{2.25}$$

y

$$P \approx 0. \tag{2.26}$$

En resumen, se hallan dos restricciones más, las cuales se promueven a restricciones secundarias

$$S = -\frac{2}{\mu}\epsilon^{ij}\partial_j\partial^k K_{ik} \approx 0, \tag{2.27a}$$

$$S^{0m} = \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial_i\nabla^2 h_j^m - \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial^m\partial_l\partial_i h_j^l + \partial_i\pi^{im} \approx 0, \tag{2.27b}$$

$$W = -\frac{\epsilon^{ij}}{\mu}\partial_i\partial_l h_j^l - 2\pi \approx 0. \tag{2.27c}$$

y relaciones con los multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2\mu}(\epsilon^{in}\partial_k\partial^m K_i^k + \epsilon^{im}\partial_k\partial^n K_i^k) + \frac{1}{2\mu}(\epsilon^{in}\nabla^2 K_i^m + \epsilon^{im}\nabla^2 K_i^n) \\ &\quad -\frac{1}{4\mu}(\epsilon^{in}\partial_i\nabla^2 h_0^m + \epsilon^{im}\partial_i\nabla^2 h_0^n) + \frac{1}{4\mu}(\epsilon^{in}\partial_k\partial^m\partial_i h_0^k + \epsilon^{im}\partial_k\partial^n\partial_i h_0^k) \\ &\quad - \zeta^{mn} \approx 0, \end{aligned} \tag{2.28a}$$

$$\lambda^{mn} \approx 0, \tag{2.28b}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\mu}\left(\epsilon^{mj}(2\partial_j\partial^n h_{00} - \partial^n\partial_l h_j^l + \nabla^2 h_j^n) + \epsilon^{nj}(2\partial_j\partial^m h_{00} - \partial^m\partial_l h_j^l + \nabla^2 h_j^m)\right) \\ &\quad + \frac{2}{\mu}\left(\xi_i^m\epsilon^{in} + \xi_i^n\epsilon^{im}\right) \approx 0. \end{aligned} \tag{2.28c}$$

2.5. Condición de consistencia sobre las restricciones secundarias

Siguiendo el algoritmo de Dirac, a continuación se presenta la condición de consistencia sobre las restricciones secundarias (2.27)

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -\frac{2}{\mu}\int \xi^{ij}(y)\epsilon^{mn}\partial_n\partial_p\{K^{mp}(x), P_ij(y)\}d^3y \\ &= \frac{2}{\mu}\epsilon^{im}\partial_m\partial_j\xi_i^j, \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{S}^{0m} &= \int \frac{\epsilon^{pq}}{4\mu}(2\partial^i h_0^j + 2K^{ij})\Big[\,\partial_p\nabla^2\{h_q^m(x),\pi_{ij}(y)\} - \partial^m\partial_r\partial_p\{h_q^r(x),\pi_{ij}(y)\}\,\Big]d^3y \\
&- \int \frac{\epsilon^{ij}}{\mu}\Big[\,-K_i^k\partial_p\partial_k\partial^l\{\pi^{pm}(x),h_{lj}(y)\} + K_i^k\partial_p\nabla^2\{\pi^{pm}(x),h_{kj}(y)\} \\
&+\frac{1}{2}h_0^k\partial_p\partial_i\nabla^2\{\pi^{pm}(x),h_{kj}(y)\} - \frac{1}{2}h_0^k\partial_p\partial_k\partial^l\partial_i^{\{}\pi^{pm}(x),h_{lj}(y)\}\,\Big]d^3y \\
&+ \int \lambda^{ij}\frac{\epsilon^{pq}}{4\mu}\left[\partial_p\nabla^2\{h_q^m(x),\pi_{ij}(y)\} - \partial^m\partial_r\partial_p\{h_q^r(x),\pi_{ij}(y)\}\right]d^3y \\
&= \frac{\epsilon^{pq}}{4\mu}(\partial_p\nabla^2\lambda_q^m - \partial^m\partial_r\partial_p\lambda_q^r),
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{W} &= -\int \frac{2\epsilon^{mn}}{\mu}(\partial_i h_{0j} + K_{ij})\partial_m\partial^p\{h_{np}(x),\pi^{ij}(y)\}d^3y \\
&+ \int \frac{2}{\mu}\delta_{mn}\epsilon^{ij}\Big[\,-K_i^k\partial_k\partial^l\{\pi^{mn}(x),h_{lj}(y)\} + K_i^k\nabla^2\{\pi^{mn}(x),h_{kj}(y)\} \\
&+\frac{1}{2}h_0^k\partial_i\nabla^2\{\pi^{mn}(x),h_{kj}(y)\} - \frac{1}{2}h_0^k\partial_k\partial^l\partial_i\{\pi^{mn}(x),h_{lj}(y)\}\,\Big]d^3y \\
&- \int \frac{\epsilon^{mn}}{\mu}\lambda^{ij}\partial_m\partial_p\{h_n^p(x),\pi_{ij}\}d^3y \\
&= -\frac{4}{\mu}\epsilon^{ij}\partial_i\partial_k K_j^k - \frac{\epsilon^{ij}}{\mu}\partial_i\partial_p\lambda_j^p,
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

Por (2.28b), sabemos que $\lambda^{ij} \approx 0$, haciendo que (2.31) parezca una nueva restricción, pero esta en realidad es linealmente dependiente de (2.27a).

Como resultado de esto tenemos más información sobre los multiplicadores de lagrange

$$
\frac{2}{\mu}\epsilon^{im}\partial_m\partial_j\xi_i^j \approx 0 \tag{2.32a}
$$

$$
\frac{\epsilon^{pq}}{4\mu}(\partial_p\nabla^2\lambda_q^m - \partial^m\partial_r\partial_p\lambda_q^r) \approx 0 \tag{2.32b}
$$

2.6. Restricciones de primera y segunda clase

Finalmente, todas las restricciones del sistema son

$$\phi^{00} : \pi^{00} \approx 0, \tag{2.33a}$$
$$\phi^{0i} : \pi^{0i} \approx 0, \tag{2.33b}$$
$$\phi^{ij} : \pi^{ij} - \alpha^{ij} \approx 0, \tag{2.33c}$$
$$\psi^{ij} : \tau^{ij} \approx 0, \tag{2.33d}$$
$$\Sigma^{11} : P^{11} - \frac{2}{\mu} K_2^1 \approx 0, \tag{2.33e}$$
$$\Sigma^{12} : P^{12} - \frac{1}{2}(K_2^2 - K_1^1) \approx 0, \tag{2.33f}$$
$$\Sigma : P \approx 0, \tag{2.33g}$$
$$S : -\frac{2}{\mu}\epsilon^{ij}\partial_j\partial^k K_{ik} \approx 0, \tag{2.33h}$$
$$S^{0m} : \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial_i\nabla^2 h_j^m - \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial^m\partial_l\partial_i h_j^l + \partial_i\pi^{im} \approx 0, \tag{2.33i}$$
$$W : -\frac{1}{\mu}\epsilon^{ij}\partial_i\partial_l h_j^l - 2\pi \approx 0, \tag{2.33j}$$

A continuación se presenta la identificación de restricciones de primera y segunda clase. Para esto se construye una matriz cuyas entradas son los paréntesis de Poisson entre todas las restricciones encontradas, esto es

$$M = \begin{array}{c} \\ \phi^{00} \\ \phi^{0i} \\ \phi^{ij} \\ \psi^{ij} \\ \Sigma^{11} \\ \Sigma^{12} \\ \Sigma \\ S \\ S^{0p} \\ W \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} \phi^{00} & \phi^{0k} & \phi^{kl} & \psi^{kl} & \Sigma^{11} & \Sigma^{12} & \Sigma & S & S^{0m} & W \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \{\phi^{ij},\psi^{kl}\} & 0 & 0 & 0 & 0 & \{\phi^{ij},S^{0m}\} & \{\phi^{ij},W\} \\ 0 & 0 & \{\psi^{ij},\phi^{kl}\} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \{\Sigma^{11},\Sigma^{12}\} & 0 & \{\Sigma^{11},S\} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \{\Sigma^{12},\Sigma^{11}\} & 0 & 0 & \{\Sigma^{12},S\} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \{S,\Sigma^{11}\} & \{S,\Sigma^{12}\} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{S^{0p},\phi^{kl}\} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{W,\phi^{kl}\} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.34}$$

donde los paréntesis no triviales tienen la forma

$$\{\phi^{ij},\psi^{kl}\} = \frac{1}{2}(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk})\delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \tag{2.35}$$

$$\{\phi^{ij},S^{0m}\} = \frac{1}{8\mu}\left(-\epsilon^{kj}\delta^{im}\partial_k\nabla^2 - \epsilon^{ki}\delta^{jm}\partial_k\nabla^2 + \epsilon^{kj}\partial^m\partial^i\partial_k + \epsilon^{ki}\partial^m\partial^j\partial_k\right)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \tag{2.36}$$

$$\{\phi^{ij},W\} = \frac{1}{2\mu}(\epsilon^{mj}\partial_m\partial^i + \epsilon^{mi}\partial_m\partial^j)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \tag{2.37}$$

$$\{\Sigma^{11},S\} = \frac{2}{\mu}\partial_2\partial^1\delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \tag{2.38}$$

$$\{\Sigma^{12},S\} = \frac{1}{\mu}(\partial_2\partial^2 - \partial_1\partial^1)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \tag{2.39}$$

$$\{\Sigma^{11}, \Sigma^{12}\} = -\frac{2}{\mu}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}). \tag{2.40}$$

Tal y como se menciona en la sección A.5 del apéndice A, las restricciones de de primera clase son aquellas las cuales su paréntesis de Poisson con todas las restricciones, incluidas ellas mismas, son cero o una combinación lineal de restricciones, de lo contrario son de segunda clase.

En (2.34) podemos apreciar que

$$\phi^{00}, \qquad \phi^{0i}, \qquad \Sigma$$

son restricciones de primera clase y, como se comentó al final de la sección A.5 del apéndice A,

$$S, \qquad S^{0i}, \qquad W \tag{2.41}$$

también son restricciones de primera clase, pero no todos sus paréntesis de Poisson con las demás restricciones son cero. Es por eso que, después de una cuidadosa inspección, se proponen ciertas modificaciones en (2.41). Reescribiendo las restricciones del sistema

$$\phi^{00} : \pi^{00} \approx 0, \tag{2.42a}$$

$$\phi^{0i} : \pi^{0i} \approx 0, \tag{2.42b}$$

$$\phi^{ij} : \pi^{ij} - \alpha^{ij} \approx 0, \tag{2.42c}$$

$$\psi^{ij} : \tau^{ij} \approx 0, \tag{2.42d}$$

$$\Sigma^{11} : P^{11} - \frac{2}{\mu}K^1_2 \approx 0, \tag{2.42e}$$

$$\Sigma^{12} : P^{12} - \frac{1}{2}(K^2_2 - K^1_1) \approx 0, \tag{2.42f}$$

$$\Sigma : P \approx 0, \tag{2.42g}$$

$$S : \frac{2}{\mu}\epsilon^{ij}\partial_j\partial^k K_{ik} - \frac{1}{2}\partial_i\partial_j P^{ij} + \frac{1}{2\mu}\partial_i\partial_j(\epsilon^{ik}K^j_k + \epsilon^{jk}K^i_k) \approx 0, \tag{2.42h}$$

$$\begin{aligned} S^{0m} : \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial_i\nabla^2 h^m_j - \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial^m\partial_l\partial_i h^l_j + \partial_i\pi^{im} \\ - \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial_i\nabla^2\tau^m_j + \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial^m\partial_l\partial_i\tau^l_j \approx 0, \end{aligned} \tag{2.42i}$$

$$W : \pi + \frac{1}{2\mu}\epsilon^{ij}\partial_i\partial_l h^l_j - \frac{1}{2\mu}\epsilon^{ij}\partial_i\partial_l\tau^l_j \approx 0, \tag{2.42j}$$

dando como resultado que la matriz (2.34) se aprecie así

$$M' = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccccccc} \phi^{00} & \phi^{0k} & \phi^{kl} & \psi^{kl} & \Sigma^{11} & \Sigma^{12} & \Sigma & S & S^{0m} & W \end{array} \\ \begin{array}{c} \phi^{00} \\ \phi^{0i} \\ \phi^{ij} \\ \psi^{ij} \\ \Sigma^{11} \\ \Sigma^{12} \\ \Sigma \\ S \\ S^{0p} \\ W \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \{\phi^{ij}, \psi^{kl}\} & 0 & 0 & 0 & 0 & \{\phi^{ij}, S^{0m}\} & \{\phi^{ij}, W\} \\ 0 & 0 & \{\psi^{ij}, \phi^{kl}\} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \{\Sigma^{11}, \Sigma^{12}\} & 0 & \{\Sigma^{11}, S\} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \{\Sigma^{12}, \Sigma^{11}\} & 0 & 0 & \{\Sigma^{12}, S\} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.43}$$

donde los paréntesis no triviales son (2.35) y (2.40). Luego, podemos observar que hay

Restricciones de primera clase:

$$\Gamma_1 : \pi^{00} \approx 0, \tag{2.44a}$$
$$\Gamma_2^{0i} : \pi^{0i} \approx 0, \tag{2.44b}$$
$$\Gamma_3 : P \approx 0, \tag{2.44c}$$
$$\Gamma_4 : \frac{2}{\mu}\epsilon^{ij}\partial_j\partial^k K_{ik} - \frac{1}{2}\partial_i\partial_j P^{ij} + \frac{1}{2\mu}\partial_i\partial_j(\epsilon^{ik}K_k^j + \epsilon^{jk}K_k^i) \approx 0, \tag{2.44d}$$
$$\begin{aligned}\Gamma_5^{0m} : &\frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial_i\nabla^2 h_j^m - \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial^m\partial_l\partial_i h_j^l + \partial_i\pi^{im} \\ &- \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial_i\nabla^2\tau_j^m + \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial^m\partial_l\partial_i\tau_j^l \approx 0,\end{aligned} \tag{2.44e}$$
$$\Gamma_6 : \pi + \frac{1}{2\mu}\epsilon^{ij}\partial_i\partial_l h_j^l - \frac{1}{2\mu}\epsilon^{ij}\partial_i\partial_l\tau_j^l \approx 0. \tag{2.44f}$$

Restricciones de segunda clase:

$$\chi_1^{ij} : \pi^{ij} - \alpha^{ij} \approx 0, \tag{2.45a}$$
$$\chi_2^{ij} : \tau^{ij} \approx 0, \tag{2.45b}$$
$$\chi_3 : P^{11} - \frac{2}{\mu}K_2^1 \approx 0, \tag{2.45c}$$
$$\chi_4 : P^{12} - \frac{1}{2}(K_2^2 - K_1^1) \approx 0. \tag{2.45d}$$

Procedemos a hacer el conteo de grados de libertad, considerando un total de 24 variables del espacio fase, 8 restricciones de primera clase y 8 de segunda clase

$$DOF = \frac{1}{2}\Big(24 - 2(8) - 8 \Big) = 0, \tag{2.46}$$

es decir, esta es una teoría topológica.

2.7. Transformaciones de norma

Dada la definición (A.15), podemos construir el generador de transformaciones de norma

$$\begin{aligned}G = \int \Bigg[&\varepsilon^1\pi^{00} + \varepsilon^3 P + \varepsilon^4\left(\frac{2}{\mu}\epsilon^{ij}\partial_j partial^k K_{ik} - \frac{1}{2}\partial_i\partial_j P^{ij}\right. \\ &+ \left.\frac{1}{2\mu}\partial_i\partial_j(\epsilon^{ik}K_k^j + \epsilon^{jk}K_k^i)\right) + \varepsilon_m^5\left(\frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial_i\nabla^2 h_j^m - \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial^m\partial_l\partial_i h_j^l\right. \\ &+ \left.\partial_i\pi^{im} - \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial_i\nabla^2\tau_j^m + \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial^m\partial_l\partial_i\tau_j^l\right) \\ &\varepsilon^6\left(\pi + \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu}\partial_i\partial_l h_j^l - \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu}\partial_i\partial_l\tau_j^l \right) \Bigg] d^3y\end{aligned} \tag{2.47}$$

Calculamos las transformaciones de norma infinitesimales usando (A.16)

$$\delta h_{00} = \varepsilon^1, \tag{2.48a}$$

$$\delta h_{0i} = \varepsilon^2_i, \tag{2.48b}$$

$$\delta h_{ij} = -\frac{1}{2}(\partial_i \varepsilon^5_j + \partial_j \partial_j \varepsilon^5_j) + \varepsilon^6 \delta_{ij}, \tag{2.48c}$$

$$\delta K_{ij} = \varepsilon^3 \delta_{ij} - \partial_i \partial_j \varepsilon^3, \tag{2.48d}$$

$$\delta \alpha_{ij} = \frac{1}{8\mu}\Big(\epsilon^p{}_i \partial_p \nabla^2 \varepsilon^5_j + \epsilon^p{}_j \partial_p \nabla^2 \varepsilon^5_i + \epsilon^p{}_i \partial^m \partial_j \partial_p \varepsilon^5_m + \epsilon^p{}_j \partial^m \partial_i \partial_p \varepsilon^5_m \Big) \tag{2.48e}$$
$$- \frac{1}{4\mu}\left(\epsilon^p{}_i \partial_p \partial_j \varepsilon^6 + \epsilon^p{}_j \partial_p \partial_i \varepsilon^6\right),$$

$$\delta \pi_{00} = 0, \tag{2.48f}$$

$$\delta \pi_{0i} = 0, \tag{2.48g}$$

$$\delta \pi_{ij} = \frac{1}{8\mu}\Big(\epsilon^p{}_j \partial_p \nabla^2 \varepsilon^5_i + \epsilon^p{}_i \partial_p \nabla^2 \varepsilon^5_j - \epsilon^p{}_j \partial^m \partial_i \partial_p \varepsilon^5_m - \epsilon^p{}_i \partial^m \partial_j \partial_p \varepsilon^5_m \tag{2.48h}$$
$$-2\epsilon^p{}_i \partial_p \partial_j \varepsilon^6 - 2\epsilon^p{}_j \partial_p \partial_i \varepsilon^6 \Big),$$

$$\delta P_{ij} = -\frac{1}{2\mu}\Big(\epsilon_i{}^q \partial_q \partial_j \varepsilon^4 + \epsilon_j{}^q \partial_q \partial_i \varepsilon^4 \Big), \tag{2.48i}$$

$$\delta \tau_{ij} = 0. \tag{2.48j}$$

Un comentario pertinente es que al escribir las transformaciones (2.48a), (2.48b) y (2.48c) de forma covariante esta resulta como

$$\delta h_{\mu\nu} = (\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu) + \eta_{\mu\nu}\varepsilon, \tag{2.49}$$

donde se ha escogido

$$\varepsilon^1 = 2\partial_0 \varepsilon_0 - \varepsilon, \tag{2.50a}$$

$$\varepsilon^2_i = \partial_0 \varepsilon_i - \partial_i \varepsilon_0, \tag{2.50b}$$

$$\varepsilon^5_i = -2\epsilon_i, \tag{2.50c}$$

$$\varepsilon^6 = \varepsilon. \tag{2.50d}$$

La expresión (2.49) se conoce como transformación conforme, y la invariancia bajo esta transformación es una simetría propia del sistema [CS], tal como se reporta en [24]. A pesar de que estudiamos [CS] en términos de nuevas variables, obtenemos las simetrías ya conocidas.

Es importante comentar que la estructura de las restricciones (2.44) y (2.45) es mucho más compacta que aquella reportada en [17]. En este sentido esperamos que las construcción de los paréntesis de Dirac sea más sencilla de lo reportado en la literatura.

Capítulo 3

Formalismo tipo GLT aplicado al sistema de alto orden Einstein-Chern-Simons

En la sección anterior se analizó el sistema de alto orden Chern-Simons aplicando tipo GLT propuesto: introduciendo el siguiente cambio de variable

$$K_{ij} = \frac{1}{2}\left(\dot{h}_{ij} - \partial_i h_{0j} - \partial_j h_{0i}\right). \tag{2.1}$$

En esta sección se presenta el análisis del sistema Einstein-Hilbert-Chern-Simons aplicando el mismo formalismo tipo GLT, considerando el cambio de variable (2.1).

Como se halló en la sección anterior, la teoría Chern-Simons es una teoría topológica. La teoría Einstein-Hilbert también lo es [24], pero al considerar la suma de las dos, obtenemos una teoría con un grado de libertad, como se menciona en la ecuación (1.14). Es interesante comentar que al analizar la teoría con este nuevo enfoque obtenemos el mismo resultado, como se menciona más adelante en esta sección.

La densidad Lagrangiana asociada al sistema [EH-CS] que se analiza en esta sección es la suma de (1.1) y (1.4), en esta ocasión usando la convención de signos $(-,+,+)$. Al introducir los cambios de variable (2.1), la parte correspondiente al término de Chern-Simons es justamente (2.3), mientras que para [EH] es

$$\mathcal{L}_{EH} = K_{ij}K^{ij} - K^i_i K^j_j - \frac{1}{2}h_{00}R_{ij}{}^{ij} - \frac{1}{2}h^{ij}\left(R_{ikj}{}^{k} - \frac{1}{2}\delta_{ij}R_{lm}{}^{lm}\right), \tag{3.1}$$

entonces densidad lagrangiana por analizar toma la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ECS} = K_{ij}K^{ij} - K^i_i K^j_j - \frac{1}{2}h_{00}R_{ij}{}^{ij} - \frac{1}{2}h^{ij}\left(R_{ikj}{}^{k} - \frac{1}{2}\delta_{ij}R_{lm}{}^{lm}\right) \\ + \frac{\epsilon^{ij}}{\mu}\left(2K^k_j\dot{K}_{ki} - 2K_{ik}\partial_j\partial^k h_{00} - K^k_i\partial_k\partial_l h^h_j + K_{ki}\nabla^2 h^k_j\right. \\ \left. + \frac{1}{2}h^k_0\partial_i\nabla^2 h_{kj} - \frac{1}{2}h^k_0\partial_k\partial_l\partial_i h^l_j\right) + \alpha^{ij}\left(\dot{h}_{ij} - 2\partial_i h_{0j} - 2K_{ij}\right),\end{aligned} \tag{3.2}$$

donde nuevamente hemos introducido el multiplicador de lagrange α^{ij}, el cual nos asegura que la Lagrangiana presentada nos da las mismas ecuaciones de movimiento de [EH-CS].

3.1. Sistema singular

Notemos que la densidad Lagrangiana es ahora una funcional de la forma

$$\mathcal{L}_{ECS} = \mathcal{L}_{ECS}(h_{\mu\nu}, K_{ij}, \alpha_{ij}, \dot{h}_{\mu\nu}, \dot{K}_{ij}, \dot{\alpha}_{ij}),$$

es decir, el sistema ha dejado de ser de alto orden y el formalismo canónico que usaremos es el algoritmo convencional de Dirac. A continuación se desarrolla con más detalle el formalismo.

La matriz Hessiana se define como

$$H_{ij} = \frac{\partial}{\partial \dot{Q}^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^i} \tag{A.2}$$

luego, para el sistema en particular [EH-CS], dado que $\mathcal{L}_{CS}$ no depende de términos cuadráticos en las velocidades de las variables canónicas ni términos cruzados, la matriz Hessiana es

$$(H_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{\mu\nu} \partial \dot{h}_{\mu\nu}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{\mu\nu} \partial \dot{K}_{ij}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{\mu\nu} \partial \dot{\alpha}_{ij}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{K}_{ij} \partial \dot{h}_{\mu\nu}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{K}_{ij} \partial \dot{K}_{ij}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{K}_{ij} \partial \dot{\alpha}_{ij}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}_{ij} \partial \dot{h}_{\mu\nu}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}_{ij} \partial \dot{K}_{ij}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}_{ij} \partial \dot{\alpha}_{ij}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Evidentemente $\det(H_{ij}) = 0$, lo que significa que (H_{ij}) no es una matriz invertible, o en este contexto, $\mathcal{L}$ es efectivamente una teoría singular.

Otro dato que vale la pena mencionar es que no hay filas ni columnas linealmente independientes en (H_{ij}), lo que significa que al momento de definir los momentos canónicos conjugados, ninguna velocidad podrá despejarse y, por lo tanto, todos los momentos se convierten en restricciones primarias.

3.2. Restricciones primarias

Siguiendo el algoritmo, se definen los momentos canónicos conjugados

$$\pi^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{\mu\nu}}, \qquad \tau^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}_{ij}}, \qquad P^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{K}_{ij}}, \tag{3.4}$$

calculando explícitamente

$$\pi^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{00}} = 0, \tag{3.5a}$$

$$\pi^{0i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{0i}} = 0, \tag{3.5b}$$

$$\pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{ij}} = \alpha^{ij}, \tag{3.5c}$$

$$\tau^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}_{ij}} = 0, \tag{3.5d}$$

$$P^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{K}_{ij}} = \frac{1}{\mu}\left(\epsilon^{ik} K^j_k + \epsilon^{jk} K^i_k\right). \tag{3.5e}$$

$$\tag{3.5f}$$

Dado que el rango de matriz Hessiana es cero, todos los momentos se promueven a restricciones primarias.

$$\phi^{00} : \pi^{00} \approx 0, \tag{3.6a}$$
$$\phi^{0i} : \pi^{0i} \approx 0, \tag{3.6b}$$
$$\phi^{ij} : \pi^{ij} - \alpha^{ij} \approx 0, \tag{3.6c}$$
$$\psi^{ij} : \tau^{ij} \approx 0, \tag{3.6d}$$
$$\Sigma^{ij} : P^{ij} - \frac{1}{\mu}\left(\epsilon^{ik}K^j_k + \epsilon^{jk}K^i_k\right) \approx 0. \tag{3.6e}$$
$$\tag{3.6f}$$

Con esto podemos definir la estructura simpléctica hasta este punto, es decir, los paréntesis de Poisson fundamentales entre las variables canónicas

$$\{h_{\alpha\beta}(X), \pi^{\mu\nu}(Y)\} = \frac{1}{2}(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta + \delta^\nu_\alpha\delta^\mu_\beta)\delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \tag{3.7a}$$
$$\{K_{ij}(x), P^{lm}(y)\} = \frac{1}{2}(\delta^l_i\delta^m_j + \delta^m_i\delta^l_j)\delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \tag{3.7b}$$
$$\{\alpha_{ij}(x), \tau^{lm}(y)\} = \frac{1}{2}(\delta^l_i\delta^m_j + \delta^m_i\delta^l_j)\delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \tag{3.7c}$$

3.3. Hamiltoniana canónica y primaria

Procedemos a construir la densidad de hamiltoniana canónica A.7. Después de unos cuantos cálculos

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_C = &-K_{ij}K^{ij} + K^j_jK^i_i + \frac{1}{2}h_{00}R_{ij}{}^{ij} + \frac{1}{2}h^{ij}\left(R_{ikj}{}^k - \frac{1}{2}\delta_{ij}R_{lm}{}^{lm} \right)\\ &+ \frac{\epsilon^{ij}}{\mu}\Big(2K_{ki}\partial_j\partial^k h_{00} + K^k_i\partial_k\partial_l h^l_j - K_{ki}\nabla^2 h^k_j\\ &-\frac{1}{2}h^k_0\partial_i\nabla^2 h_{kj} + \frac{1}{2}h^k_0\partial_k\partial_l\partial_i h^l_j \Big) + 2\pi^{ij}\left(\partial_i h_{0j} + K_{ij} \right)\end{aligned} \tag{3.8}$$

Luego, la densidad de hamiltoniana primaria se expresa como

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 = &-K_{ij}K^{ij} + K^j_jK^i_i + \frac{1}{2}h_{00}R_{ij}{}^{ij} + \frac{1}{2}h^{ij}\left(R_{ijk}{}^k - \frac{1}{2}\delta_{ij}R_{lm}{}^{lm} \right)\\ &\frac{\epsilon^{ij}}{\mu}\Big(2K_{ki}\partial_j\partial^k h_{00} + K^k_i\partial_k\partial_l h^l_j - K_{ki}\nabla^2 h^k_j\\ &-\frac{1}{2}h^k_0\partial_i\nabla^2 h_{kj} + \frac{1}{2}h^k_0\partial_k\partial_l\partial_i h^l_j \Big) + 2\pi^{ij}\left(\partial_i h_{0j} + K_{ij} \right)\\ &+ \lambda_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu} + \zeta_{ij}\psi^{ij} + \xi_{ij}\Sigma^{ij}\end{aligned} \tag{3.9}$$

donde $\lambda_{\mu\nu}$, ζ_{ij} y ξ_{ij} son multiplicadores de lagrange que nos permite codificar la información de las restricciones en la nueva densidad hamiltoniana.

3.4. Condiciones de consistencia a restricciones primarias

Con la densidad hamiltoniana primaria podemos aplicar las condiciones de consistencia, tal como se menciona en la sección A.4 del apéndice A.

Aplicando integración por partes y las definiciones de los paréntesis de Poisson fundamentales (3.7)

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi}^{00} = \{\phi^{00}(x), H_1(y)\} &= \int \frac{1}{2} R_{ij}{}^{ij}\{\pi^{00}(x), h_{00}(y)\} d^3y - \frac{2}{\mu}\int \epsilon^{ij} K_{ik}\partial_j\partial^k\{\pi^{00}(x), h_{00}(y)\} d^3y \\
&= -\int \frac{1}{2} R_{ij}{}^{ij}\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) d^3y - \frac{2}{\mu}\int \epsilon^{ij}\delta^2(\vec{x}-\vec{y})\partial^k\partial_j K_{ik}(y) d^3y \\
&= -\frac{1}{2} R_{ij}{}^{ij} - \frac{2}{\mu}\epsilon^{ij}\partial^k\partial_j K_{ik} \approx 0,
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi}^{0m} = \{\phi^{0m}(x), H_1(y)\} &= -\int \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu}\partial_i\nabla^2 h^k_j\{\pi^{0m}, h_{0k}\} d^3y + \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu}\partial^k\partial_l\partial_i h^l_j\{\pi^{0m}, h_{0k}\} d^3y \\
&+ 2\int \pi^{ij}\partial_i\{\pi^{0m}, h_{0j}\} d^3y \\
&= \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial_i\nabla^2 h^m_j - \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial^m\partial_l\partial_i h^l_j + \partial_i\pi^{im} \approx 0,
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi}^{mn} = \{\phi^{mn}(x), H_1(y)\} &= \int \Bigg[\frac{1}{2} h_{00}\{\pi^{mn}, R_{ij}{}^{ij}\} + \frac{1}{2}(R_{ikj}{}^{k} - \frac{1}{2}\delta_{ij}R_{lk}{}^{lk})\{\pi^{mn}, h^{ij}\} \\
&+ \frac{1}{2} h^{ij}\{\pi^{mn}, R_{ikj}{}^{k} - \frac{1}{2}\delta_{ij}R_{lk}{}^{lk}\}\Bigg] d^3y \\
&+ \int \frac{\epsilon^{ij}}{\mu} K^k_i\partial_k\partial^l\{\pi^{mn}, h_{lj}\} d^3y - \int \frac{\epsilon^{ij}}{\mu} K^k_i\nabla^2\{\pi^{mn}, h_{kj}\} d^3y \\
&- \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu} h^k_0\partial_i\nabla^2\{\pi^{mn}, h_{kj}\} d^3y + \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu} h^k_0\partial_k\partial^l\partial_i\{\pi^{mn}, h_{lj}\} d^3y \\
&+ \int \zeta^{ij}\{-\alpha^{mn}, \tau_{ij}\} d^3y \\
&= -\frac{1}{2}\partial^m\partial^n h_{00} + \frac{1}{2}\delta^{mn}\nabla^2 h_{00} - \frac{1}{2}(R^m{}_k{}^{nk} - \frac{1}{2}\delta^{mn}R_{lk}{}^{lk}) + \frac{1}{4}\delta^{mn}\partial_i\partial_j h^{ij} \\
&- \frac{1}{4}\partial_i\partial^n h^{im} - \frac{1}{4}\nabla^2 h^{mn} + \frac{1}{4}\partial^m\partial^n h^i_i + \frac{1}{4}\delta^{mn}\nabla^2 h^{ij} \\
&- \frac{1}{2\mu}(\epsilon^{in}\partial_k\partial^m K^k_i + \epsilon^{im}\partial_k\partial^n K^k_i) + \frac{1}{2\mu}(\epsilon^{in}\nabla^2 K^m_i + \epsilon^{im}\nabla^2 K^n_i) \\
&- \frac{1}{4\mu}(\epsilon^{in}\partial_i\nabla^2 h^m_0 + \epsilon^{im}\partial_i\nabla^2 h^n_0) + \frac{1}{4\mu}(\epsilon^{in}\partial_k\partial^m\partial_i h^k_0 + \epsilon^{im}\partial_k\partial^n\partial_i h^k_0) \\
&- \zeta^{mn} \approx 0,
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

$$
\dot{\psi}^{mn} = \{\psi^{mn}(x), H_1(y)\} = -\int \lambda^{ij}(y)\{\tau^{ij}(x), \alpha_{ij}(y)\} d^3y = \lambda^{mn} \approx 0, \tag{3.13}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\Sigma}^{mn} &= \{\Sigma^{mn}(x), H_1(y)\} \\
&= \int \Big[-\{P^{mn}, K_{ij}K^{ij}\} + \{P^{mn}, K^j_j K^i_i\} + \frac{\epsilon^{ij}}{\mu}\big(2\partial_j\partial^k h_{00}\{P^{mn}, K_{ki}\} \\
&+\partial^k\partial_l h^l_j\{P^{mn}, K_{ki}\} - \nabla^2 h^k_j\{P^{mn}, K_{ki}\}\big) + 2\pi^{ij}\{P^{mn}, K_{ij}\} \\
&\xi^{ij}\{P^{mn} - \frac{1}{\mu}(\epsilon^{mk}K^n_k + \epsilon^{nk}K^m_k), P_{ij} - \frac{1}{\mu}(\epsilon_{ik}K^k_j + \epsilon_{jk}K^k_i)\}\Big] d^3y \\
&= 2K^{mn} - 2K^i_i\delta^{mn} + \frac{1}{\mu}\Big(-\epsilon^{nj}\partial_j\partial^m h_{00} - \epsilon^{mj}\partial_j\partial^n h_{00} - \frac{1}{2}\epsilon^{nj}\partial^m\partial_l h^l_j \\
&-\frac{1}{2}\epsilon^{im}\partial^n\partial_l h^l_j + \frac{1}{2}\epsilon^{nj}\nabla^2 h^m_j + \frac{1}{2}\epsilon^{im}\nabla^2 h^n_j\Big) - 2\pi^{mn} \\
&+ \frac{2}{\mu}\Big(\xi^m_i\epsilon^{in} + \xi^n_i\epsilon^{im}\Big) \approx 0.
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

Para logra identificar las restricciones primarias que a través de su evolución nos producen restricciones secundarias aplicamos el mismo mecanismo que en la sección pasada: se construye una matriz cuyas entradas son los paréntesis de Poisson entre todas las restricciones primarias, como se muestra a continuación

$$
M_1 = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} \phi^{00} & \phi^{0k} & \phi^{kl} & \psi^{kl} & \Sigma^{kl} \end{array} \\
\begin{array}{c} \phi^{00} \\ \phi^{0i} \\ \phi^{ij} \\ \psi^{ij} \\ \Sigma^{ij} \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\delta^{ij}_{kl}\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2}\delta^{ij}_{jl}\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \{\Sigma^{ij}, \Sigma^{kl}\}
\end{pmatrix}
\end{array}, \tag{3.15}
$$

donde

$$
\{\Sigma^{ij}, \Sigma^{kl}\} = \frac{1}{\mu}\left(\epsilon^{kj}\delta^{il} + \epsilon^{ki}\delta^{jl} + \epsilon^{lj}\delta^{ik} + \epsilon^{li}\delta^{jk}\right)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}). \tag{3.16}
$$

Se puede comprobar que los vectores nulos para la matriz 3.15 son

$$
\vec{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{V_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{V_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta_{ij} \end{pmatrix}, \tag{3.17}
$$

luego, las restricciones primarias independientes que producen restricciones secundarias son

$$
\vec{V_1} \cdot \vec{\Phi} = \phi^{00}, \tag{3.18}
$$

$$
\vec{V_2} \cdot \vec{\Phi} = \phi^{0i}, \tag{3.19}
$$

$$
\vec{V_3} \cdot \vec{\Phi} = \left(P^{ij} - \frac{1}{\mu}(\epsilon^{im}K^j_m + \epsilon^{jm}K^i_m) \cdot \delta_{ij}\right) = P^i_i = P = \Sigma, \tag{3.20}
$$

donde se ha definido el vector de restricciones primarias

$$
\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi^{00} \\ \phi^{0i} \\ \phi^{ij} \\ \psi^{ij} \\ \Sigma^{ij} \end{pmatrix}. \tag{3.21}
$$

Luego, (3.20) (la cual es la misma que en el caso de solo Chern-Simons) es una restricción primaria a la cual hay que aplicarle la condición de consistencia

$$
\begin{aligned}
\dot{\Sigma} = &\int \Big[-2K_{ij}\{P(x), K^{ij}(y)\} + 2K^{j}_{j}\{P(x), K(y)\}\Big]\, d^3y + \int \frac{2\epsilon^{ij}}{\mu}\partial_j\partial^k h_{00}\{P(x), K_{ik}(y)\}d^3y \\
&+ \int \frac{\epsilon^{ij}}{\mu}\partial_k\partial_l h^l_j\{P(x), K^k_i(y)\}d^3y - \int \frac{\epsilon^{ij}}{\mu}\nabla^2 h^k_j\{P(x), K_{ik}(y)\}d^3y \\
&+ \int 2\pi^{ij}\{P(x), K_{ij}(y)\}d^3y - \frac{1}{\mu}\int \xi^{ij}\Big[\,\epsilon^{im}\{P(x), K_{ik}(y)\}d^3y\,\Big] \\
&= -2K - \frac{\epsilon^{ij}}{\mu}\partial_i\partial_l h^l_j - 2\pi \approx 0
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

donde $K = K^i_i$ y $\pi = \pi^i_i$.

Nuevamente es importante notar que en la ecuación 3.20 se produce una nueva restricción independiente que proporciona información de cómo deben considerarse las restricciones Σ^{ij}. Se tiene que

$$P \approx 0 \Rightarrow P^1_1 = -P^2_2,$$

por lo que, solo dos de las tres restricciones codificadas en Σ^{ij} son independientes, y se consideran como sigue

$$\Sigma^{11} : P^{11} - \frac{2}{\mu}K^1_2 \approx 0, \tag{3.23}$$

$$\Sigma^{12} : P^{12} - \frac{1}{\mu}(K^2_2 - K^1_1) \approx 0 \tag{3.24}$$

y

$$P \approx 0. \tag{3.25}$$

En resumen, se hallan tres restricciones más, las cuales se promueven a restricciones secundarias

$$S = -\frac{1}{2}R_{ij}{}^{ij} - \frac{2}{\mu}\epsilon^{ij}\partial_j\partial^k K_{ik} \approx 0, \tag{3.26a}$$

$$S^{0m} = \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial_i\nabla^2 h^m_j - \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial^m\partial_l\partial_i h^l_j + \partial_i\pi^{im} \approx 0, \tag{3.26b}$$

$$W = 2K + \frac{\epsilon^{ij}}{\mu}\partial_i\partial_l h^l_j + 2\pi \approx 0, \tag{3.26c}$$

y las siguientes relaciones con los multiplicadores de Lagrange

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\partial^m\partial^n h_{00}+\frac{1}{2}\delta^{mn}\nabla^2 h_{00}-\frac{1}{2}(R^m{}_k{}^{nk}-\frac{1}{2}\delta^{mn}R_{lk}{}^{lk})+\frac{1}{4}\delta^{mn}\partial_i\partial_j h^{ij}\\
&-\frac{1}{4}\partial_i\partial^n h^{im}-\frac{1}{4}\nabla^2 h^{mn}+\frac{1}{4}\partial^m\partial^n h^i_i+\frac{1}{4}\delta^{mn}\nabla^2 h^{ij}\\
&-\frac{1}{2\mu}(\epsilon^{in}\partial_k\partial^m K^k_i+\epsilon^{im}\partial_k\partial^n K^k_i)\\
&+\frac{1}{2\mu}(\epsilon^{in}\nabla^2 K^m_i+\epsilon^{im}\nabla^2 K^n_i)\\
&-\frac{1}{4\mu}(\epsilon^{in}\partial_i\nabla^2 h^m_0+\epsilon^{im}\partial_i\nabla^2 h^n_0)\\
&+\frac{1}{4\mu}(\epsilon^{in}\partial_k\partial^m\partial_i h^k_0+\epsilon^{im}\partial_k\partial^n\partial_i h^k_0)-\zeta^{mn}\approx 0, &&(3.27a)\\
&\lambda^{mn}\approx 0, &&(3.27b)\\
&2K^{mn}-2K^i_i\delta^{mn}+\frac{1}{\mu}\Bigg(-\epsilon^{nj}\partial_j\partial^m h_{00}-\epsilon^{mj}\partial_j\partial^n h_{00}-\frac{1}{2}\epsilon^{nj}\partial^m\partial_l h^l_j\\
&-\frac{1}{2}\epsilon^{im}\partial^n\partial_l h^l_j+\frac{1}{2}\epsilon^{nj}\nabla^2 h^m_j+\frac{1}{2}\epsilon^{im}\nabla^2 h^n_j\Bigg)-2\pi^{mn}\\
&+\frac{2}{\mu}\Big(\xi^m_i\epsilon^{in}+\xi^n_i\epsilon^{im}\Big)\approx 0. &&(3.27c)
\end{aligned}
$$

3.5. Condición de consistencia sobre las restricciones secundarias

Siguiendo el algoritmo de Dirac, a continuación se presenta la condición de consistencia sobre las restricciones secundarias

$$
\begin{aligned}
\dot{S}=&\int\Big[-(\partial_i h_{0j}+K_{ij})\Big(\partial^p\partial^q\{h_{pq}(x),\pi^{ij}(y)\}-\delta^{pq}\nabla^2\{h_{pq}(x),\pi^{ij}\}\Big)\\
&-\frac{1}{2}\lambda^{ij}\left(\partial_p\partial_q\{h^{pq}(x),\pi_{ij}(y)\}-\delta^{pq}\nabla^2\{h_{pq}(y),\pi_{ij}\}\right)-\frac{2}{\mu}\xi^{ij}\epsilon^{mn}\partial_n\partial_p\{K^{mp}(x),P_ij(y)\}\Big]d^3y\\
&=-\partial^i\partial^j(\partial_i h_{0j})+\nabla^2(\partial_i h^i_0+K^i_i)-\frac{1}{2}\partial_i\partial_j\lambda^{ij}+\frac{1}{2}\nabla^2\lambda^i_i-\frac{2}{\mu}\epsilon^{im}\partial_m\partial_j\xi^j_i\approx 0,
\end{aligned}
\qquad (3.28)
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{S}^{0m} &= \int \Bigg[\frac{\epsilon^{pq}}{2\mu}(\partial_i h_{0j} + K_{ij}) + \partial_p \nabla^2 \{h^m_q(x), \pi^{ij}(y)\} - \frac{\epsilon^{pq}}{2\mu}(\partial_i h_{0j} + K_{ij})\partial^m \partial_r \partial_p \{h^r_q(x), \pi^{ij}(y)\} \\
&+ \frac{1}{2} h_{00} \Big(\partial_p \partial^i \partial^j \{\pi^{pm}(x), h_{ij}\} - \delta^{ij} \partial_p \nabla^2 \{\pi^{pm}(x), h_{ij}(y)\} \Big) + \frac{1}{2} h^{ij} \partial_p \{\pi^{pm}(x), R_{ikj}{}^k\} \\
&- \frac{1}{4} \delta_{ij} h^{ij} \partial_p \{\pi^{pm}(x), R_{lk}{}^{lk}(y)\} + \frac{1}{2}(R_{ikj}{}^k - \frac{1}{2}\delta_{ij} R_{lk}{}^{lk})\partial_p \{\pi^{pm}(x), h^{ij}(y)\} \\
&- \frac{\epsilon^{ij}}{\mu} \Big(- K^k_i \partial_p \partial_k \partial^l \{\pi^{pm}(x), h_{lj}(y)\} + K^k_i \partial_p \nabla^2 \{\pi^{pm}(x), h_{kj}(y)\} \\
&+ \frac{1}{2} h^k_0 \partial_p \partial_i \nabla^2 \{\pi^{pm}(x), h_{kj}(y)\} - \frac{1}{2} h^k_0 \partial_p \partial_k \partial^l \partial^{\{}_i \pi^{pm}(x), h_{lj}(y)\} \Big) \\
&+ \lambda^{ij} \frac{\epsilon^{pq}}{4\mu} \Big(\partial_p \nabla^2 \{h^m_q(x), \pi_{ij}(y)\} - \partial^m \partial_r \partial_p \{h^r_q(x), \pi_{ij}(y)\} \Big) \Bigg] d^3y \\
&= \frac{\epsilon^{pq}}{4\mu}(\partial_p \nabla^2 \lambda^m_q - \partial^m \partial_r \partial_p \lambda^r_q) \approx 0,
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{W} &= \int \Bigg[2\xi^{ij} \{K(x), P_{ij}(y)\} + 2\frac{\epsilon^{ij}}{\mu}(\partial_, h_{0n} + K_{mn})\partial_i \partial^l \{h_{lj}(x), \pi^{mn}\} \\
&+ \lambda_{mn} \frac{\epsilon^{ij}}{\mu} \partial_i \partial^l \{h_{lj}(x), \pi^{mn}\} + 2h_{00} \{\pi(x), R_{ij}{}^{ij}(y)\} \\
&+ (R_{ikj}{}^k - \frac{1}{2}\delta_{ij} R_{lm}{}^{lm})\{\pi(x), h^{ij}\} + h_{ij}\{\pi(x), R_{ikj}{}^k(y)\} - \frac{1}{2} h^i_i \{\pi, R_{lm}{}^{lm}\} \\
&+ 2\frac{\epsilon^{ij}}{\mu} \Big(K^k_i \partial_k \partial_l \{\pi(x), h^l_j(y)\} - K_{ki} \nabla^2 \{\pi(x), h^k_j\} \\
&- \frac{1}{2} h^k_0 \partial_i \nabla^2 \{\pi(x), h_{kj}\} + \frac{1}{2} h^k_0 \partial_k \partial_l \partial_i \{\pi(x), h^l_j(y)\} \Big) \Bigg] d^3y \\
&= 2\xi^i_i + \frac{1}{\mu}(\epsilon^{in} \partial_i \partial^m + \epsilon^{im} \partial_i \partial^n)(\partial_m h_{0n} + K_{mn}) + \frac{1}{\mu}(\epsilon^{in} \partial_i \partial^m + \epsilon^{im} \partial_i \partial^n)\lambda_{mn} \\
&+ 2\nabla^2 h_{00} - \frac{2\epsilon^{ij}}{\mu}(\partial_k \partial_j K^k_i + \frac{1}{2}\partial_i \nabla^2 h_{j0}) \approx 0.
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Como resultado de esto tenemos más información sobre los multiplicadores de lagrange

$$
-\partial^i \partial^j (\partial_i h_{0j}) + \nabla^2 (\partial_i h^i_0 + K^i_i) - \frac{1}{2}\partial_i \partial_j \lambda^{ij} + \frac{1}{2}\nabla^2 \lambda^i_i - \frac{2}{\mu}\epsilon^{im}\partial_m \partial_j \xi^j_i \approx 0, \tag{3.31a}
$$

$$
\frac{\epsilon^{pq}}{4\mu}(\partial_p \nabla^2 \lambda^m_q - \partial^m \partial_r \partial_p \lambda^r_q) \approx 0, \tag{3.31b}
$$

$$
\begin{aligned}
&2\xi^i_i + \frac{1}{\mu}(\epsilon^{in}\partial_i \partial^m + \epsilon^{im}\partial_i \partial^n)(\partial_m h_{0n} + K_{mn}) + \frac{1}{\mu}(\epsilon^{in}\partial_i \partial^m + \\
&\epsilon^{im}\partial_i \partial^n)\lambda_{mn} + 2\nabla^2 h_{00} - \frac{2\epsilon^{ij}}{\mu}(\partial_k \partial_j K^k_i + \frac{1}{2}\partial_i \nabla^2 h_{j0}) \approx 0.
\end{aligned}
\tag{3.31c}
$$

3.6. Restricciones de primera y segunda clase

Hasta este punto podemos decir que las restricciones del sistema están dadas por

$$\phi^{00} : \pi^{00} \approx 0, \tag{3.32a}$$

$$\phi^{0i} : \pi^{0i} \approx 0, \tag{3.32b}$$

$$\phi^{ij} : \pi^{ij} - \alpha^{ij} \approx 0, \tag{3.32c}$$

$$\psi^{ij} : \tau^{ij} \approx 0, \tag{3.32d}$$

$$\Sigma^{11} : P^{11} - \frac{2}{\mu} K_2^1 \approx 0, \tag{3.32e}$$

$$\Sigma^{12} : P^{12} - \frac{1}{2}(K_2^2 - K_1^1) \approx 0, \tag{3.32f}$$

$$\Sigma : P \approx 0, \tag{3.32g}$$

$$S : -\frac{1}{2} R_{ij}{}^{ij} - \frac{2}{\mu} \epsilon^{ij} \partial_j \partial^k K_{ik} \approx 0, \tag{3.32h}$$

$$S^{0m} : \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu} \partial_i \nabla^2 h_j^m - \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu} \partial^m \partial_l \partial_i h_j^l + \partial_i \pi^{im} \approx 0, \tag{3.32i}$$

$$W : 2K + \frac{1}{\mu} \epsilon^{ij} \partial_i \partial_l h_j^l + 2\pi \approx 0. \tag{3.32j}$$

Un total de 16 restricciones. A continuación se presenta la identificación de restricciones de primera y segunda clase. Para esto se construye una matriz cuyas entradas son los paréntesis de Poisson entre todas las restricciones

$$M = \begin{array}{r} \\ \phi^{00} \\ \phi^{0i} \\ \phi^{ij} \\ \psi^{ij} \\ \Sigma^{11} \\ \Sigma^{12} \\ \Sigma \\ S \\ S^{op} \\ W \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} \phi^{00} & \phi^{0k} & \phi^{kl} & \psi^{kl} & \Sigma^{11} & \Sigma^{12} & \Sigma & S & S^{0m} & W \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \{\phi^{ij}, \psi^{kl}\} & 0 & 0 & 0 & \{\phi^{ij}, S\} & \{\phi^{ij}, S^{0m}\} & \{\phi^{ij}, W\} \\ 0 & 0 & \{\psi^{ij}, \phi^{kl}\} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \{\Sigma^{11}, \Sigma^{12}\} & 0 & \{\Sigma^{11}, S\} & 0 & \{\Sigma^{11}, W\} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \{\Sigma^{12}, \Sigma^{11}\} & 0 & 0 & \{\Sigma^{12}, S\} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \{\Sigma, W\} \\ 0 & 0 & \{S.\phi^{kl}\} & 0 & \{S, \Sigma^{11}\} & \{S, \Sigma^{12}\} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{S^{0p}, \phi^{kl}\} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{W, \phi^{kl}\} & 0 & \{W, \Sigma^{11}\} & 0 & \{W, \Sigma\} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{3.33}$$

donde los paréntesis no triviales son

$$\{\phi^{ij}, \psi^{kl}\} = -\frac{1}{2} \left(\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk} \right) \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \tag{3.34}$$

$$\{\phi^{ij}, S\} = \frac{1}{2} \left(\partial^i \partial^j - \delta^{ij} \nabla^2 \right) \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \tag{3.35}$$

$$\{\phi^{ij}, S^{0m}\} = \frac{1}{8\mu} \Big(-\epsilon^{kj} \delta^{im} \partial_k \nabla^2 - \epsilon^{ki} \delta^{jm} \partial_k \nabla^2 + \epsilon^{kj} \partial^m \partial^i \partial_k + \epsilon^{ki} \partial^m \partial^j \partial_k \Big) \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \tag{3.36}$$

$$\{\phi^{ij}, W\} = -\frac{1}{2\mu} \Big(\epsilon^{mj} \partial_m \partial^i + \epsilon^{mi} \partial_m \partial^j \Big) \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \tag{3.37}$$

$$\{\Sigma^{11}, S\} = \frac{2}{\mu} \partial_2 \partial^1 \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \tag{3.38}$$

$$\{\Sigma^{12}, S\} = \frac{1}{\mu} \Big(\partial_2 \partial^2 - \partial_1 \partial^1 \Big) \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \tag{3.39}$$

$$\{\Sigma^{11}, \Sigma^{12}\} = -\frac{2}{\mu}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \tag{3.40}$$

$$\{\Sigma^{11}, W\} = -2\delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \tag{3.41}$$

$$\{W, \Sigma\} = 4\delta^2(\vec{x} - \vec{y}). \tag{3.42}$$

En (3.33) podemos apreciar que

$$\phi^{00}, \qquad \phi^{0i},$$

son restricciones de primera clase y por lo comentado en la sección A.5 del apéndice A,

$$S, \qquad S^{0i}, \tag{3.43}$$

también son restricciones de primera clase, pero no todos sus paréntesis de Poisson con las demás restricciones son cero. Es por eso que, después de una cuidadosa inspección, se proponen ciertas modificaciones en (3.43). Reescribiendo las restricciones del sistema

$$\phi^{00} : \pi^{00} \approx 0, \tag{3.44a}$$

$$\phi^{0i} : \pi^{0i} \approx 0, \tag{3.44b}$$

$$\phi^{ij} : \pi^{ij} - \alpha^{ij} \approx 0, \tag{3.44c}$$

$$\psi^{ij} : \tau^{ij} \approx 0, \tag{3.44d}$$

$$\Sigma^{11} : P^{11} - \frac{2}{\mu}K_2^1 \approx 0, \tag{3.44e}$$

$$\Sigma^{12} : P^{12} - \frac{1}{2}(K_2^2 - K_1^1) \approx 0, \tag{3.44f}$$

$$\Sigma : P \approx 0, \tag{3.44g}$$

$$S : -\frac{1}{2}R_{ij}{}^{ij} + \frac{2}{\mu}\epsilon^{ij}\partial_j\partial^k K_{ik} - \frac{1}{2}\partial_i\partial_j P^{ij} + \frac{1}{2\mu}\partial_i\partial_j(\epsilon^{ik}K_k^j + \epsilon^{jk}K_k^i)$$

$$\frac{1}{2}(\partial^i\partial^j - \nabla^2)\tau_{ij} \approx 0, \tag{3.44h}$$

$$S^{0m} : \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial_i\nabla^2 h_j^m - \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial^m\partial_l\partial_i h_j^l + \partial_i\pi^{im}$$

$$-\frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial_i\nabla^2\tau_j^m + \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial^m\partial_l\partial_i\tau_j^l \approx 0, \tag{3.44i}$$

$$W : 2K + \frac{1}{2\mu}\epsilon^{ij}\partial_i\partial_l h_j^l + 2\pi \approx 0. \tag{3.44j}$$

Se puede mostrar que haciendo los paréntesis de Poisson entre estas restricciones, algunos de estos que erandiferente de cero, ahora son igual a cero. Luego, la matriz (3.33) se reescribe como

$$M' = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} \phi^{00} & \phi^{0k} & \phi^{kl} & \psi^{kl} & \Sigma^{11} & \Sigma^{12} & \Sigma & S & S^{0m} & W \end{array} \\ \begin{array}{c} \phi^{00} \\ \phi^{0i} \\ \phi^{ij} \\ \psi^{ij} \\ \Sigma^{11} \\ \Sigma^{12} \\ \Sigma \\ S \\ S^{0p} \\ W \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \{\phi^{ij}, \psi^{kl}\} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \{\phi^{ij}, W\} \\ 0 & 0 & \{\psi^{ij}, \phi^{kl}\} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \{\Sigma^{11}, \Sigma^{12}\} & 0 & 0 & 0 & \{\Sigma^{11}, W\} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \{\Sigma^{12}, \Sigma^{11}\} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \{\Sigma, W\} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{W, \phi^{kl}\} & 0 & \{W, \Sigma^{11}\} & 0 & \{W, \Sigma\} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{3.45}$$

donde los paréntesis no triviales son (3.34), (3.37), (3.40), (3.41) y (3.42).

Ahora es fácil distinguir aquellas restricciones cuyos paréntesis de Poisson con todas las restricciones son cero.

Restricciones de primera clase:

$$\Gamma_1 : \pi^{00} \approx 0, \tag{3.46a}$$

$$\Gamma_2^i : \pi^{0i} \approx 0, \tag{3.46b}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_3 : &\frac{1}{2}R_{ij}{}^{ij} + \frac{2}{\mu}\epsilon^{ij}\partial_j\partial^k K_{ik} - \frac{1}{2}\partial_i\partial_j P^{ij} \\ &+ \frac{1}{2\mu}\partial_i\partial_j(\epsilon^{ik}K_k^j + \epsilon^{jk}K_k^i) + \frac{1}{2}(\partial^i\partial^j - \nabla^2)\tau_{ij} \approx 0,\end{aligned} \tag{3.46c}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_4^m : &\frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial_i\nabla^2 h_j^m - \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial^m\partial_l\partial_i h_j^l + \partial_i\pi^{im} \\ &- \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial_i\nabla^2\tau_j^m + \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial^m\partial_l\partial_i\tau_j^l \approx 0.\end{aligned} \tag{3.46d}$$

Restricciones de segunda clase

$$\chi_1^{ij} : \pi^{ij} - \alpha^{ij} \approx 0, \tag{3.47a}$$

$$\chi_2^{ij} : \tau^{ij} \approx 0, \tag{3.47b}$$

$$\chi_3 : P^{11} - \frac{2}{\mu}K_2^1 \approx 0, \tag{3.47c}$$

$$\chi_4 : P^{12} - \frac{1}{2}(K_2^2 - K_1^1) \approx 0, \tag{3.47d}$$

$$\chi_5 : P \approx 0, \tag{3.47e}$$

$$\chi_6 : 2K + \frac{\epsilon^{ij}}{\mu}\partial_i\partial_l h_j^l + 2\pi \approx 0. \tag{3.47f}$$

Procedemos a hacer el conteo de grados de libertad, considerando un total de 24 variables del espacio fase, 6 restricciones de primera clase y 10 de segunda clase

$$DOF = \frac{1}{2}\Big(\ 24 - 2(6) - 10\ \Big) = 1, \tag{3.48}$$

es decir, un sistema con un grado de libertad.

3.7. Transformaciones de norma

Tal y como se define en (A.15), el generador de transformaciones de norma está dado por

$$G = \int d^3y\varepsilon^i\Gamma_i. \tag{3.49}$$

En este caso en particular,

$$
\begin{aligned}
G = \int \Bigg[& \varepsilon^1 \pi^{00} + \varepsilon^2_m \pi^{0m} + \varepsilon^4 \left(\frac{2}{\mu} \epsilon^{ij} \partial_j \partial^k K_{ik} - \frac{1}{2} \partial_i \partial_j P^{ij} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2\mu} \partial_i \partial_j (\epsilon^{ik} K^j_k + \epsilon^{jk} K^i_k) \right) + \varepsilon^5_m \left(\frac{\epsilon^{ij}}{4\mu} \partial_i \nabla^2 h^m_j - \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu} \partial^m \partial_l \partial_i h^l_j \right. \\
& \left. \partial_i \pi^{im} - \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu} \partial_i \nabla^2 \tau^m_j + \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu} \partial^m \partial_l \partial_i \tau^l_j \right) \\
& + \varepsilon^6 \left(\pi + \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu} \partial_i \partial_l h^l_j - \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu} \partial_i \partial_l \tau^l_j \right) \Bigg] d^3 y.
\end{aligned} \tag{3.50}
$$

Calculamos las transformaciones de norma infinitesimales tal y como se menciona en A.16

$$\delta h_{00} = \varepsilon^1, \tag{3.51a}$$
$$\delta h_{0i} = \varepsilon^2_i, \tag{3.51b}$$
$$\delta h_{ij} = -\frac{1}{2}(\partial_j \varepsilon^4_i + \partial_i \varepsilon^4_j), \tag{3.51c}$$
$$\delta K_{ij} = -\partial_i \partial_j \varepsilon^3, \tag{3.51d}$$
$$
\begin{aligned}
\delta \alpha_{ij} = & \frac{1}{4} \Big(2\partial_i \partial_j \varepsilon^3 - \delta^m_i \delta^n_j \nabla^2 \varepsilon^3 - \delta^n_i \delta^m_j \nabla^2 \varepsilon^3 \Big) \\
& + \frac{1}{8\mu} \Big(-\epsilon^k{}_j \partial_i \partial^m \partial_k \varepsilon^4_m - \epsilon^k{}_i \partial_j \partial^m \partial_k \varepsilon^4_m + \epsilon^k{}_j \partial^m \partial_n \partial_k \varepsilon^4_i + \epsilon^k{}_i \partial^m \partial_n \partial_k \varepsilon^4_j \Big),
\end{aligned} \tag{3.51e}
$$
$$\delta \pi_{00} = 0, \tag{3.51f}$$
$$\delta \pi_{0i} = 0, \tag{3.51g}$$
$$
\begin{aligned}
\delta \pi_{ij} = & -\frac{1}{2} \Big(\partial_i \partial_j - \delta_{ij} \nabla^2 \Big) \varepsilon^3 + \frac{1}{8\mu} \left(\epsilon^k{}_j \partial_k \nabla^2 \varepsilon^4_i + \epsilon^k{}_i \partial_k \nabla^2 \varepsilon^4_j \right) \\
& + \frac{1}{8\mu} \Big(\epsilon^k{}_j \partial_i + \epsilon^k{}_i \partial_j \Big) \partial^m \partial_k \varepsilon^4_m,
\end{aligned} \tag{3.51h}
$$
$$\delta P_{ij} = -\frac{1}{2\mu} \Big(\epsilon_{il} \partial_j + \epsilon_{jl} \partial_i \Big) \partial^l \varepsilon^3, \tag{3.51i}$$
$$\delta \tau_{ij} = 0. \tag{3.51j}$$

Podemos ver que las transformaciones de norma para el campo $h_{\mu\nu}$ se puede escribir en forma covariante como

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu. \tag{3.52}$$

Una diferencia respecto a [CS] es que a no aparece en (3.52) el término $\eta_{\mu\nu}\varepsilon$ que está asociado a una transormación conforme y es de esperarse este resultado porque la simetría de norma de [EH-CS] son los difeomorfismos tal como [EH].

Capítulo 4

Conclusiones

Se analizaron las teorías singulares de alto orden [CS] y [EH-CS] haciendo uso de nuevas variables que son un tipo de curvatura extrínseca del espacio-tiempo. Esto permitió que el orden de las derivadas disminuyera de segundo a primer orden. Posteriormente, usando el método de Dirac se identificaron para ambos sistemas las restricciones, se lograron separar entre primera y segunda clase, se hizo el conteo de grados de libertad y se encontraron las transformaciones de norma. Es importante mencionar que para el sistema [EH-CS], las restricciones (3.46) y (3.47) resultan de forma más compacta que (1.12) y (1.13) en el sentido en que presentan menos términos, por lo tanto, en futuros trabajos su manipulación será más sencilla. Otro punto importante a comentar es que a pesar de que en [20] el sistema [EH-CS] se analiza de forma diferente a la que se presenta aquí, podemos observar que en ambas Hamiltonianas, (1.11) y (3.9), aparece explícitamente un término lineal en π^{ij}, el cual podría estar asociado a una inestabilidad de Ostrogradski. El término lineal presente en (1.11) es el producto $\pi^{ij}\dot{h}_{ij}$ y es mera consecuencia de la transformada de Legendre. Por otro lado, en (3.9), el término lineal es $\pi^{ij}K_{ij}$, de la misma forma que, por ejemplo, en la Hamiltoniana (B.4) del apéndice B. Para futuros trabajos, esto puede representar una ventaja al momento de preguntarse si este término está asociado a una inestabilidad de Ostrogradsky y posiblemente intentar eliminarla. Además, la Hamiltoniana obtenida en el presente trabajo, (3.9), se escribe de forma más compacta, cosa que podría facilitar futuros análisis.

Por último, es interesante mencionar que la parte asociada al sistema [EH] de la Lagrangiana [EH-CS], (3.2), toma una forma particular parecida a la del sistema conocido como Gravedad ADM, reportado en [25]. Se dice entonces que nuestra Lagrangiana es una versión perturbativa del modelo ADM más Chern-Simons, dado que se usó la expansión de la métrica (1.2). ADM no es una teoría renormalizable, pero, como se menciona en [26], el modelo conocido como Gravedad de Horava presumiblemente sí lo es. Es por esto que podría resultar de interés construir una versión perturbativa de la gravedad de Horava a partir de (3.2), persiguiendo el objetivo de averiguar si esta versión también es presumiblemente renormalizable.

En conclusión, el presente trabajo de tesis puede considerarse como un primer paso al estudio de las inestabilidades de Ostrogradski presentes en el sistema [EH-CS] y en la construcción de un modelo perturbativo de la Gravedad de Horava; en este sentido a hay algo al respecto reportado en [27]

Apéndice A

Algoritmo de Dirac-Bergmann

En la mecánica analítica elemental se estudian sistemas a través de la formulación lagrangiana y hamiltoniana. Un sistema que puede ser descrito mediante una lagrangiana y pasar a la formulación hamiltoniana mediante el uso de la transfomada de Legendre se conoce como *sistema regular*.

En esta sección se hace una revisión del algoritmo que nos permite pasar del formalismo lagrangiano al hamiltoniano considerando sistemas no regulares recuperado de [28] y [29]. Esta serie de pasos resumidos es resultado de investigaciones de personas como Dirac, Bergmann, entre otros. La intención es adquirir la perspectiva necesaria para facilitar la implementación del algoritmo de Dirac-Bergmann para teorías de campo.

A.1. Sistemas singulares

Existen sistemas a los cuales no se le es posible aplicar la transformada de Legendre (sistemas no regulares) y se les conocen como sistemas singulares.

La formade identificar un sistema regular de uno singular es a partir del determinante de la matriz Hessiana, cuyas entradas son las segundas derivadas de la densidad lagrangiana respecto de las velocidades de las variables canónicas.

Sea L una lagrangiana de campo tal que

$$L\left(\phi^1, \phi^2, ..., \phi^N, \dot{\phi^1}, \dot{\phi^2}, ..., \dot{\phi^N}\right) = \int d^3\mathcal{L}\left(\phi^1, \phi^2, ..., \phi^N, \dot{\phi^1}, \dot{\phi^2}, ..., \dot{\phi^N}\right) \tag{A.1}$$

donde $\mathcal{L}$ es una densidad lagrangiana que depende de los campos ϕ^n y de sus derivadas temporales, donde $n = 1, 2, ..., N$, siendo N el número de variables de campo del sistema.

Las entradas de la matriz Hessiana se definen como

$$(H_{ij}) = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}^j}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^i}. \tag{A.2}$$

Luego, si $\det(H_{ij}) = 0$, entonces $\mathcal{L}$ es un sistema singular, de lo contrario, es un sistema regular.

$$\det(H_{ij}) \begin{cases} = 0, & \mathcal{L} \text{ es singular} \\ \\ \neq 0, & \mathcal{L} \text{ es regular} \end{cases} \tag{A.3}$$

El hecho de que $\det(H_{ij}) = 0$ significa que la matriz Hessiana no es invertible, es decir, no todas las filas o columnas son linealmente independientes. En este contexto, significa que no todas las velocidades pueden ser despejadas de la definición de los momentos, tal como se hace para un sistema regular. Esta es una de las razones por las cuales no es posible aplicar la transformada de Legendre a este tipo de sistemas.

La definición de los momentos canónicos conjugados es igual que para un sistema regular, es decir,

$$\pi^n(x,t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_n(x,t)} \tag{A.4}$$

y de aquellos momentos en los cuales no se pueden despejar las velocidades, pero sí se pueden construir relaciones tales que

$$\psi_1^m(\phi^1, ..., \phi^N) = 0 \tag{A.5}$$

A.2. Restricciones primarias

Las restricciones se refieren a relaciones que limitan la dinámica del sistema, es decir, el número de grados de libertad del disminuye debido a la existencia de éstas. En otras palabras, lo que nos muestran estas relaciones es que no todas las variables del espacio fase son independientes, y el movimiento se limita a una hipersuperficie en el espacio de configuraciones.

A (A.5) se les conoce como restricciones primarias porque son las primeras que aparece usando este formalismo.

El número de restricciones primarias es el número de filas o columnas que no son linealmente independientes en la matriz hessiana (H_{ij}), es decir, la nulidad.

La forma más eficaz de obtener las restricciones primarias independientes es hallando los vectores nulos de (H_{ij}) y multiplicando cada uno por un vector cuyas entradas son las relaciones (A.5).

A.3. Hamiltoniana Canónica y Hamiloniana Primaria

Se define la hamiltoniana canónica a través de la transformada de Legendre

$$H_c(t) = \int d^3x \mathcal{H}_c(x) = \int d^3x \pi_i(x,t)\dot{\phi}^i(x,t) - L(t), \tag{A.6}$$

donde

$$\mathcal{H}_c(x) = \pi_i(x)\dot{\phi}^i(x) - \mathcal{L}(x), \tag{A.7}$$

pero como se mencionó anteriormente, la transformada de Legendre no contiene la información completa del sistema, es por eso que se construye la hamiltoniana primaria, la cual codifica la información de las restricciones a través de multiplicadores de lagrange

$$H_1(t) = H_c(t) + \int d^3x \lambda_i(x,t)\psi_1^i(x,t) \tag{A.8}$$

donde λ_i son multiplicadores de lagrange.

La importancia de la hamiltoniana primaria reside en que ésta genera la evolución temporal de cualquier función F en la hipersuperficie de restricciones primarias a través de los paréntesis de Poisson, tal y como se definen en la mecánica elemental

$$\dot{F}(t) = \{F, H_1\}. \tag{A.9}$$

A.4. Condiciones de consistencia

Un requerimiento importante para que el sistema tenga consistencia es que las restricciones no cambien con el tiempo. A esto se le conoce como condición de consistencia, y se expresa como

$$\dot{\psi}_1^i \approx 0 \tag{A.10}$$

donde se usa la igualdad débil, es decir, la igualdad se cumple solo en la superficie de restricciones. Pero considerando (A.9) y (A.8), podemos escribir

$$\dot{\psi}_1^i = \int \left[\{\psi_1^i(x), \mathcal{H}_c(y)\} + \{\psi^i(x), \lambda_j(y)\psi_1^j(y)\}\right] d^3y \approx 0. \tag{A.11}$$

Esta condición puede implicar que una expresión ψ_2^i resulte de $\dot{\psi}_1^i$, es decir

$$\dot{\psi}_1^i = \psi_2^i$$

y que por lo tanto

$$\psi_2^i \approx 0. \tag{A.12}$$

A las relaciones (A.12) se les conoce como restricciones secundarias.Dado que estas son nuevas restricciones, se debe exigir nuevamente la condición de consistencia, tal como en (A.11), lo cual posiblemente produzca restricciones superiores. En ese caso, se repite el proceso hasta haber hallado todas las restricciones del sistema.

A.5. Restricciones de primera y segunda clase

Sea F una funcional del espacio fase. Se dice que es de primera clase si su paréntesis de Poisson con todas las restricciones es débilmente cero

$$\{F(x), \Psi_n(y)\} \approx 0, \tag{A.13}$$

con $n = 1, ...,$ número total de restricciones. De lo contrario, F es de segunda clase.

Es así como podemos identificar si las restricciones del sistema son de primera o segunda clase. Las restricciones de primera clase se denotan por Γ, mientras que las de segunda clase por χ.

La importancia de esta separación radica en el conteo de grados de libertad de la teoría, el cual está dado por

$$DOF = \left[\begin{pmatrix}\text{núm. De variables}\\ \text{en el espacio fase}\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}\text{núm. De restricciones}\\ \text{de primera clase}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{núm. De restricciones}\\ \text{de segunda clase}\end{pmatrix}\right]. \tag{A.14}$$

También es importante mencionar que las restricciones de primera clase son generadores infinitesimales de transformaciones de norma.

Las restricciones de segunda clase están asociadas con la definición de los paréntesis de Dirac, los cuales definen una nueva estructura simpléctica del sistema ahora que sabemos que no todas las variables del espacio fase son independientes.

Un resultado importante que sebe mencionar es el siguiente teorema[28]

TEOREMA: El paréntesis de Poisson de dos funciones de primera clase, también es de primera clase.

Además, se puede demostrar que la hamiltoniana primaria H_1 es de primera clase. Esto nos permite saber que al momento de aplicar la condición de consistencia (A.11) a las restricciones primarias de primera clase, estas producirán restricciones secundarias de primera clase.

A.6. Transformaciones de norma

Se define al generador infinitesimal de transformaciones de norma como

$$G = \int d^3y \ \ \varepsilon^i(y)\Gamma_i(y), \tag{A.15}$$

donde ε_i es un parámetro infinitesimal.

Siendo ϕ_i una variable campo canónica, su transformación infinitesimal de norma está dada por

$$\delta\phi_i = \{\phi_i(x), G\}. \tag{A.16}$$

Las transformaciones de norma nos dicen que cierto punto sobre la hipersuperficie de restricciones es equivalente a otro. Esto es, dos puntos diferentes unidos por una transformación de norma representan el mismo estado físico. En otras palabras, nos permiten conocer las simetrías del sistema. Si las simetrías del sistema son las mismas a pesar de ser representado por Lagrangianas diferentes, podemos asegurar que se trabaa con el mismo sistema.

Apéndice B

La inestabilidad de Ostrogradski en teorías de alto orden

En este apartado se pretende explicar con un ejemplo muy sencillo la inestabilidad de Ostrogradski, tomando la explicación reportada en [30].

Es bien sabido que la segunda ley de movimiento de Newton se escribe como

$$\ddot{q} = \frac{F(q)}{m}, \tag{B.1}$$

esto es, el movimiento es descrito por una ecuación diferencial de segundo orden sobre la variable dinámica. ¿Qué pasaría si en vez de una teoría de segundo orden, Newton hubiera escogido representar esta ley con una de cuarto orden en las derivadas temporales? Por ejemplo

$$q^{(4)} = \frac{d\alpha}{dq}, \tag{B.2}$$

siendo α una función de q. Esta ecuación de movimiento se puede obtener del siguiente principio de acción de alto orden

$$S = \int dt \left(\frac{1}{2}\ddot{q}^2 - \alpha(q) \right). \tag{B.3}$$

El espacio fase cuatridimensional del sistema puede describirse con dos variables y sus respectivos momentos conjugados (P_1, Q_1) y (P_2, Q_2), con la Hamiltoniana

$$H = P_1 Q_2 + \frac{P_2^2}{2} + \alpha(Q_1). \tag{B.4}$$

Podemos observar que en (B.4) existe un término lineal asociado al momento P_1, lo que significa que la Hamiltoniana no está acotada por abajo. Esto implica que el sistema pueda adoptar valores de energía negativos, entonces se dice que existe una inestabilidad de Ostrogradski.

Cabe mencionar que en este ejemplo se presenta una inestabilidad clásica, pero en la teoría cuántica, valores de energía negativa implican estados de norma negativa (y por lo tanto, indefinidos) o estados de energía negativa (y por lo tanto, una producción incontrolable de partículas).

El teorema de Ostrogradski enuncia lo siguiente [1]:

Si una Lagrangiana de alto orden en las derivadas temporales es no degenerada, entonces existe al menos una inestabilidad en la Hamiltoniana del sistema.

No degenerado significa que el término con derivada de mayor orden puede escribirse en función de las variables canónicas. Además, en [30] se demuestra que las inestabilidades presentes en los sistemas con estas características pueden ser eliminadas introduciendo restricciones, asegurándose de la reducción de la dimensión del espacio fase. Por otro lado, las teorías degeneradas de alto orden en realidad no sufren de esta inestabilidad, puede ser eliminado a partir de las ecuaciones de movimiento.

Teorías como [CS] y [EH-CS] son de alto orden y degeneradas, uno podría pensar entonces que en realidad éstas no sufren de la inestabilidad de Ostrogradsky, pero la característica que hace la diferencia es que estos sistemas son singulares. Luego, la situación de sistemas singulares de alto orden y degenerados es incierta, y debe hacerse un análisis más profundo para saber si existen inestabilidades o no, tal como la construcción de la Hamiltoniana extendida del sistema [18][28].

Bibliografía

[1] M Ostrogradski. “Memoires de l’Academie Imperiale des Science de Saint-Petersbourg, IV”. En: (1850).

[2] Boris Podolsky. “A generalized electrodynamics part I—non-quantum”. En: *Physical Review* 62.1-2 (1942), pág. 68.

[3] Boris Podolsky y Chihiro Kikuchi. “A generalized electrodynamics part II—quantum”. En: *Physical Review* 65.7-8 (1944), pág. 228.

[4] Boris Podolsky y Chihiro Kikuchi. “Auxiliary conditions and electrostatic interaction in generalized quantum electrodynamics”. En: *Physical Review* 67.5-6 (1945), pág. 184.

[5] John Archibald Wheeler y Richard Phillips Feynman. “Classical electrodynamics in terms of direct interparticle action”. En: *Reviews of modern physics* 21.3 (1949), pág. 425.

[6] DA Eliezer y RP Woodard. “The problem of nonlocality in string theory”. En: *Nuclear Physics B* 325.2 (1989), págs. 389-469.

[7] GW Gibbons. “Phantom matter and the cosmological constant”. En: *arXiv preprint hep-th/0302199* (2003).

[8] Richard Woodard. “Avoiding dark energy with 1/r modifications of gravity”. En: *The invisible universe: Dark matter and dark energy* (2007), págs. 403-433.

[9] Kellogg S Stelle. “Renormalization of higher-derivative quantum gravity”. En: *Physical Review D* 16.4 (1977), pág. 953.

[10] ES Fradkin y Arkady A Tseytlin. “Renormalizable asymptotically free quantum theory of gravity”. En: *Nuclear Physics B* 201.3 (1982), págs. 469-491.

[11] Dmitriy M Gittman e Igor V Tyutin. *Quantization of Fields with Constraints*. Springer, 1990.

[12] DM Gitman, SL Lyakhovich e IV Tyutin. “Izvestiya Vuz. Fiz. 26, 61 (1983)”. En: *Sov. Phys. J* 26 (1984), pág. 730.

[13] DM Gitman, SL Lyakhovich e IV Tyutin. “Canonical quantization of the Yang-Mills Lagrangian with higher ds derivatives”. En: *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenij, Fizika* 28.7 (1985), págs. 37-40.

[14] RN Ghalati, N Kiriushcheva y SV Kuzmin. “Two-dimensional metric and tetrad gravities as constrained second-order systems”. En: *Modern Physics Letters A* 22.01 (2007), págs. 17-28.

[15] Josef Klusoň, Markku Oksanen y Anca Tureanu. “Hamiltonian analysis of curvature-squared gravity with or without conformal invariance”. En: *Physical review D* 89.6 (2014), pág. 064043.

[16] Sarmishtha Kumar. “Lagrangian and Hamiltonian formulations of higher order Chern–Simons theories”. En: *International Journal of Modern Physics A* 18.09 (2003), págs. 1613-1622.

[17] Alberto Escalante y Jorge Hernández Aguilar. “New canonical analysis for higher order topologically massive gravity”. En: *The European Physical Journal C* 81.7 (2021), pág. 678.

[18] Alberto Escalante y P García. “Hamiltonian analysis for new massive gravity”. En: *arXiv preprint arXiv:2302.07999* (2023).

[19] Alberto Escalante y J Aldair Pantoja-González. “Canonical analysis for Chern–Simons modification of general relativity”. En: *Annals of Physics* 451 (2023), pág. 169246.

[20] J Barcelos-Neto y TG Dargam. “Constrained analysis of topologically massive gravity”. En: *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields* 67 (1995), págs. 701-705.

[21] Stanley Deser, Roman Jackiw y S Templeton. “Three-dimensional massive gauge theories”. En: *Physical Review Letters* 48.15 (1982), pág. 975.

[22] Stanley Deser y Z Yang. “Is topologically massive gravity renormalisable?” En: *Classical and Quantum Gravity* 7.9 (1990), pág. 1603.

[23] Ana Aurelia Avilez López. *Aproximación perturbativa para teorías de orden superior en la formulación hamiltoniana*. Tésis de maestría. Available at `https://repositorio.unam.mx/contenidos/95540`. México, 2009.

[24] Chih-Kai Chang. “2+ 1 Dimensional Gravity and Chern-Simons Theory”. En: ().

[25] RICCARDO CAPOVILLA. “CANONICAL GRAVITY”. En: *Particles And Fields-Proceedings Of The 1993 Workshop*. World Scientific. 1994, pág. 217.

[26] Jorge Bellorin y Alvaro Restuccia. “On the consistency of the Hořava theory”. En: *International Journal of Modern Physics D* 21.03 (2012), pág. 1250029.

[27] Alberto Escalante y P García. “Perturvative λR model for Horava gravity”. Por publicarse. 2023.

[28] Marc Henneaux y Claudio Teitelboim. *Quantization of gauge systems*. Princeton university press, 1992.

[29] Walter Greiner, Joachim Reinhardt y col. *Field quantization*. Springer Science & Business Media, 1996.

[30] Tai-jun Chen y col. “Higher derivative theories with constraints: Exorcising Ostrogradski’s Ghost”. En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2013.02 (2013), pág. 042.