Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Algunas características topológicas de ultrafiltros como subespacios del conjunto de Cantor

Tesis presentada para obtener el grado de
Licenciado en Matemáticas

Presenta
Fernando Mauricio Rivera Vega

Directores de tesis
Dr. Iván Martínez Ruiz
Dr. Fernando Hernández Hernández

Puebla, Pue.
Julio 2020

A todos para los
que he significado
algo como persona

"Quizás puedo describir mejor mi experiencia de hacer matemáticas comparándola con una travesía por una mansión oscura e inexplorada. Uno entra en la primera habitación de la mansión y está en la oscuridad. En una oscuridad completa. Vas tropezando y golpeando los muebles, pero poco a poco aprendes dónde está cada pieza del mobiliario. Al fin, tras seis meses más o menos, encuentras el interruptor de la luz y de repente todo está iluminado. Puedes ver exactamente dónde estás. Entonces vas a la siguiente habitación y te pasas otros seis meses en las tinieblas. Así, cada uno de estos progresos, aunque algunas veces son muy rápidos y se realizan en sólo un día o dos, son la culminación de meses precedentes de tropezones en la oscuridad, sin los que el avance sería imposible."

- Andrew Wiles

Agradecimientos

Al momento de escribir estás líneas no sé exactamente qué decir, así que dejaré que les hable mi yo interno, aquella persona a veces aún temerosa de la vida, aquella que siempre se escondió detrás de un carácter de suma seriedad, aquella persona que tiene la capacidad de querer e incluso algunas veces de amar.

Agradezco a mi familia, de manera particular a mi mamá *Elia* y mi hermano mayor *Luis*. Siento que el presente trabajo no es digno del esfuerzo que hicieron por los principios, valores y ayuda que me han brindado hasta el día de hoy. Gracias por nunca dejarme a la deriva, ambos fueron fundamentales para llegar a donde ahora estoy y a donde planeo llegar. Nunca se los podré pagar.

A *Laurita*, mi mejor amiga durante toda mi estancia en la Facultad. Durante casi todo este tiempo me escuchaste y permaneciste conmigo. En mis buenos recuerdos estarán aquellos días que pasamos juntos, cuando íbamos en busca de comida o simplemente de un lugar tranquilo donde sentarnos a platicar. Le debo mucho a tu compañía el haber llegado hasta aquí. Te quiero mucho.

A *Karen*, curiosamente nunca imaginé llegar a tener una amistad como la tuya en la Facultad. Tu compañía y consejos es algo de lo mejor que me llevaré en mis recuerdos de la Universidad. Quizás al pasar el tiempo perderemos contacto, pero espero sinceramente que la vida te sonría siempre, eres maravillosa y sumamente brillante, nunca te conformes con menos de lo que mereces.

A mis dos hermanos adoptivos, *Mano* y *Lupita*, ustedes me conocen mejor que cualquiera y saben que les estoy agradecido porque aunque pasen meses sin que los vea, siempre, absolutamente siempre van a saber de qué manera apoyarme y hacerme sonreír.

A mis (demás) amigos de la Facultad, *Nava, Uvencio, Felipe, Catalina, David, Erika, Uriel, Levent, Bruno, Alba, Toño, Santiago, Baruch, Altamirano y Coco.*; cada uno me ayudó e inspiró a su manera. Las conversaciones con ustedes fueron, en su momento, además de divertidas, sumamente diferentes, ¡vaya que sí!, y gracias por ello, me ayudaron a crecer como persona y a forjar un poco del carácter que ahora me define.

Al profesor *Parres*, que fue mi verdadero primer profesor de Matemáticas, y que, gracias a sus enseñanzas en la Facultad cuando yo era mucho más joven, me sacó de los malos pasos (yo quería estudiar alguna Ingeniería) y me mostró el verdadero y maravilloso camino de las Matemáticas.

A mis amiguitos que conocí por la OMM, *Saraí, Tania, Ceci, Memo, Ángel, Francisco, Jorge, Tish* y *Arturo*. Su amistad y logros siempre me inspiraron a esforzarme en tratar de ser un poco mejor en Matemáticas cada día.

A todos los amigos que conocí en Escuelas, Talleres y todo tipo de eventos de Matemáticas; *Sofía, Erick, Vere, Alondra, Héctor, Migue, Carlos, Pancho, Adame, Daniel, Antonio, Aldo, Chris, Bernardo, Gabriel, Ramón, Anaid, Brandon, Mariel, Juanito, Nohemí, Alfredo, joven Héctor, Isabel, Helam, Mónica* y *todos los que faltan*. Todos aquellos eventos y aventuras no hubieran sido lo mismo sin su presencia. Aprendí y me divertí muchísimo con ustedes, cada uno sabe las anécdotas que compartimos y la manera en que lo hicimos.

A mis profesores de la Facultad, *Iván*, *Ibarra*, *Carrasco*, *Andrade*, *Víctor Hugo* y *Oleg*. No con todos llegué a entablar una amistad, prueba de ello es que algunos de Ustedes ni siquiera están en la presentación de este trabajo. Aún así muchas gracias por compartir sus conocimientos conmigo de una manera tan amena y desafiante, pero sobretodo divertida, si es que consideramos al estrés como diversión, claro. De alguna manera el matemático que ahora soy, está conformado en gran medida por Ustedes.

A los profesores *Alejandro Ramírez Páramo (Siete)*, *Manuel Ibarra Contreras* y *David Meza Alcántara* por aceptar ser jurado de mi trabajo final en la Facultad, el haber leído las páginas que tanto trabajo me costaron escribir y por sus valiosas recomendaciones respecto a la escritura, estructura y contenido del mismo.

Al profesor *Iván Martínez Ruiz*, un maravilloso profesor y amigo. Le agradezco infinitamente por aceptar asesorarme en la elaboración del presente trabajo. Sin su experiencia y conocimientos estaría estancado y vagando sin rumbo. Usted me enseño (de manera indirecta) a no temerle a ningún área de las Matemáticas, que podemos hacer un poco de todo siempre.

A mi tocayo, el profesor *Fernando Hernández Hernández*, por aceptar, en un principio trabajar conmigo durante un verano los preeliminares del presente trabajo y posteriormente por aceptar ser mi co-asesor a pesar de la distancia y tomar parte de su tiempo para leer lo que le escribía. Sus consejos y observaciones fueron vitales en las partes donde tuve más complicaciones.

Finalmente, a todas aquellas personas que influyeron en mi épica travesía por la Facultad y en el deseo de convertirme en matemático; ¡Muchas gracias!

¡Salucita!

Fernando
Octubre 2019

Introducción

En 1908 F. Riesz introduce los conceptos de filtro y ultrafiltro ante la incapacidad que presentaban los intentos de axiomatización para definir la noción de espacio topológico que presentaron varios notables matemáticos, las cuales en su mayoría pretendían que la convergencia de sucesiones fuese su pilar fundamental. De manera particular, se quería que la operación de tomar límites de sucesiones fuera lo bastante fuerte para definir el operador cerradura de un espacio topológico. Pronto Riesz hace notar el potencial de los filtros y ultrafiltros para definir puntos de acumulación y llevar a cabo procesos de completación. A partir de que Henry Cartan en 1937 presenta con total formalidad estos instrumentos se comienza una revolución total en las Matemáticas, descubriendo muchas más utilidades de las que se pensaban. Actualmente los filtros y ultrafiltros son una eficaz herramienta en Topología y en la Teoría de Conjuntos.

De manera análoga, el conjunto de Cantor, llamado así por ser aporte de Georg Cantor en 1883, fue una pieza fundamental de su investigación respecto a su Hipótesis del Continuo planteada en 1878, sin embargo, con el pasar de los años dicho conjunto se comienza a encontrar en diversas áreas de las Matemáticas, aparentemente sin conexión alguna con la Teoría de Conjuntos.

Podemos identificar a un subconjunto de ω con un elemento del conjunto de Cantor 2^ω mediante su función característica, es decir, una función de la forma $f : \omega \to 2$. Lo anterior hace posible estudiar propiedades topológicas de cualquier subespacio $X \subseteq 2^\omega$. Algunos años atrás Jan van Mill le hace notar a Andrea Medini que existen $\mathfrak{c}$ ultrafiltros no principales no homeomorfos sobre ω junto con el hecho de que la topología de tales ultrafiltros como subespacios de 2^ω era aún un "territorio inexplorado". Es por lo anterior que el presente trabajo se centra de manera exclusiva en el caso donde $X = \mathcal{U}$ es un ultrafiltro no principal sobre ω. El caso donde $X = \mathcal{F}$ es simplemente un filtro sobre ω tiene un estudio riguroso en el Capítulo 4 de [2].

El objetivo principal del presente trabajo es mostrar que usando la propiedad de ser completamente Baire, ser denso homogéneo numerable y tener la propiedad del conjunto perfecto, bajo el Axioma de Martin para conjuntos parcialmente ordenados numerables, podremos distinguir los ultrafiltros no principales sobre ω salvo homeomorfismo; es decir, si P es una de las siguientes propiedades:

- $P =$ Ser completamente Baire.
- $P =$ Ser denso homogéneo numerable.
- $P =$ Cada subconjunto cerrado tiene la propiedad del conjunto perfecto.

mostraremos que existen ultrafiltros no principales $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq 2^\omega$ de modo que $\mathcal{U}$ tiene la propiedad P y $\mathcal{V}$ no.

En el capítulo 1 se presentan las definiciones formales de espacio métrico, topológico y las propiedades más importantes de éstos para el presente trabajo. Se introduce la noción de conjuntos de la primera y segunda categoría, y se exhibe el teorema de categoría de Baire así como algunas observaciones sobre éste. Se revisan rápidamente algunos conceptos sobre ordenes parciales, ordinales y cardinales. Además se presenta el conjunto de Cantor y una topología con la cual lo equiparemos la mayor parte de esta tesis, así como algunas de sus propiedades. En el capítulo 2 se presentan simplemente las propiedades generales y algunas particulares de filtros e ideales. En el capítulo 3 se introduce el Axioma de Martin y algunas de sus formas más débiles. Finalmente en el capítulo 4 se trabaja el objetivo principal; el mostrar que bajo el Axioma de Martin para conjuntos parcialmente ordenados numerables existen ultrafiltros no principales que podemos distinguir salvo homeomorfismo mediante las propiedades de ser completamente Baire, ser denso homogéneo numerable y la propiedad del conjunto perfecto.

Para nociones no definidas en el texto se puede consultar [4] para los conceptos en cuanto a Topología General se refiere y tanto [10] como [14] para una buena introducción y conceptos fundamentales, respectivamente, en Teoría de Conjuntos.

Índice General

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1. Espacios métricos y espacios topológicos

Definición 1.1. Dado un conjunto X, decimos que una función $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ es una métrica para X si cumple las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
2. Para cualesquiera puntos $x, y \in X$ se cumple que $d(x, y) = d(y, x)$.
3. Para cualesquiera puntos $x, y, z \in X$ se cumple que $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

A la pareja (X, d) le llamamos espacio métrico. A $d(x, y)$ le llamamos la distancia entre los puntos x y y en X.

Los espacios métricos fueron introducidos por M. Fréchet en 1906 y constituyeron la primera clase de espacios abstractos a la cual varias nociones y resultados relacionados a los espacios euclidianos, pudieron ser generalizadas.

Una bola abierta en un espacio métrico (X, d), es un conjunto de la forma

$$B(x, r) = \{a \in X : d(a, x) < r\}$$

donde $r > 0$ es el radio y $x \in X$ es el centro de la bola, es decir, $B(x, r)$ es una bola abierta centrada en x y de radio r.

Como en los espacios euclidianos, podemos hablar de sucesiones en espacios métricos. Sea X un conjunto no vacío y $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales. Una sucesión en X es simplemente una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$, de forma que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \in X$ y emplearemos la notación $\{x_n\}$ para la sucesión f y a los elementos x_n, los llamamos términos de la sucesión.

Por supuesto, como en un curso de Cálculo hay sucesiones que tienen una importancia característica, las llamadas sucesiones de Cauchy, las cuales poseen la propiedad de que sus términos se acercan unos a otros tanto como se desee con sólo tomarlos lo suficientemente avanzados. Más formalmente, una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico (X,d) es una sucesión de Cauchy, si para cada número real $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ y mayores que N, se verifica que $d(x_{n_1}, x_{n_2}) < \epsilon$.

Conviene aclarar que no toda sucesión de Cauchy en un espacio métrico es convergente. Basta tomar al intervalo $(0,1]$ con la métrica euclidiana. Es claro que la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge en dicho espacio porque $0 \notin (0,1]$.

Definición 1.2. Un espacio métrico (X,d) es completo si toda sucesión de Cauchy en el espacio es convergente en X.

Aunque los espacios métricos son de suma importancia en Matemáticas, en 1914 F. Hausdorff logró definir un tipo de espacios más generales y sumamente útiles que seguían midiendo la cercanía o lejanía de sus objetos. A esta clase de espacios se les conoce como espacios topológicos.

Definición 1.3. Dado un conjuto X, decimos que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una topología para X si cumple las siguientes propiedades:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,
2. $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$,
3. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$.

A la pareja $(X,\mathcal{T})$ le llamamos espacio topológico y a los elementos de $\mathcal{T}$ les llamamos conjuntos abiertos. A menos que se mencione algo distinto cuando decimos que "X es un *espacio topológico*" se entenderá que X tiene una topología asociada que no mencionamos por comodidad de notación.

Para cualquier conjunto X, la colección $\mathcal{P}(X)$ de todos sus posibles subconjuntos, es decir, el conjunto potencia de X, satisface los axiomas que definen una topología. A ésta topología le llamaremos topología discreta en X, y a la pareja $(X, \mathcal{P}(X))$ espacio discreto X.

Definición 1.4. Sean $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es un conjunto cerrado en X si se cumple que $X \setminus A \in \mathcal{T}$.

Proposición 1.5. [4, Proposición 1.14] Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $\mathcal{F}$ es la familia de conjuntos cerrados de X, entonces $\mathcal{F}$ satisface las siguientes propiedades:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{F}$,
2. Si $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$, entonces $F_1 \cup \cdots \cup F_n \in \mathcal{F}$,
3. Para cualquier $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, con $\mathcal{G} \neq \emptyset$, se tiene que $\bigcap \mathcal{G} \in \mathcal{F}$.

Como es usual, no siempre es necesario trabajar sobre todo el espacio topológico, a veces únicamente requerimos trabajar con un fragmento de él. Lo grandioso es que le podemos asociar rápidamente una topológia a cualquier fragmento del espacio que no "cambia" mucho de la original.

Proposición 1.6. [4, Proposición 1.31] Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $A \subseteq X$, entonces $\mathcal{T}|_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{T}\}$ es una topología para A.

Definición 1.7. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $A \subseteq X$. Decimos que la topología descrita en la Proposición 1.6 es la topología relativa en A respecto de $(X, \mathcal{T})$ y que A es un subespacio de X.

Es natural tratar de establecer conceptos que nos ayuden a tratar con la cercanía o lejanía de objetos respecto a un punto en el espacio. De lo anterior podemos definir lo que es una vecindad de un punto como sigue.

Definición 1.8. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que $V \subseteq X$ es una vecindad de x si existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U \subseteq V$. El conjunto de vecindades de x lo denotamos por $\mathcal{V}(x)$.

Cuando tenemos un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y un subconjunto A de X, podemos hacer distinciones respecto a la cercanía que hay entre los puntos suficientemente cercanos a A.

Definición 1.9. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Decimos que:

1. x es un punto interior de A en X, si existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U \subseteq A$,
2. El interior de A en X es el conjunto $\{a \in X : a \text{ es punto interior de } A\}$ y es denotado por $int(A)$,
3. x es un punto frontera de A en X, si para cada $U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U$ se cumple que $U \cap A \neq \varnothing$ y $U \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$,
4. La frontera de A en X es el conjunto $\{a \in X : a \text{ es punto frontera de } A\}$ y es denotado por $Fr(A)$,

5. x es un punto de acumulación de A en X, si para cada $U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U$ se cumple que $U \cap A \neq \varnothing$,

6. La cerradura de A en X es el conjunto $\{a \in X : a$ es punto de acumulación de $A\}$ y es denotado por $cl(A)$ o $\overline{A}$.

7. x es un punto aislado de A si $x \in A$ pero x no es un punto de acumulación.

Ahora estamos en condiciones de definir un tipo de subconjuntos de un espacio topológico sumamente importantes, los llamados conjuntos perfectos.

Definición 1.10. Sea X un espacio topológico. $A \subseteq X$ es un conjunto perfecto si es no vacío, cerrado y no tiene puntos aislados.

Un ejemplo trivial de estos conjuntos es cualquier intervalo cerrado de $\mathbb{R}$. Un ejemplo más exótico e importante es el llamado conjunto de Cantor, pero aún no estamos en condiciones para hablar de él.

Una propiedad inmediata y de especial relevancia que es clave en el estudio de la topología general es la siguiente.

Observación 1.11. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces $A \subseteq cl(A)$, y $cl(A)$ es un conjunto cerrado en X.

Es de mucha ayuda caracterizar a las subcolecciones de una topología $\mathcal{T}$ que contengan toda la información que posee $\mathcal{T}$, que sean de fácil descripción y su manejo nos permita obtener información del espacio $(X, \mathcal{T})$ con agilidad. Los más representativos e importantes son los siguientes.

Definición 1.12. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que:

1. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ es una base para $\mathcal{T}$ si para cada $U \in \mathcal{T}$ existe $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup \mathcal{B}'$.

2. $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{T}$ es sub-base para $\mathcal{T}$ si $\mathcal{B} = \{\bigcap \mathcal{G}' : \mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$ es finito$\} \cup \{X\}$ es una base para $\mathcal{T}$.

3. $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$ es una base de vecindades para x si para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ existe $B \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B \subseteq V$.

Notemos que si X es un conjunto, entonces a X se le puede asociar una topología a partir de una base $\mathcal{B}$ (sub-base δ), en este caso decimos que la base $\mathcal{B}$ (sub-base δ) genera una topología en X. Para ilustrar lo anterior, tenemos lo siguiente:

El resultado que sigue proporciona un método para generar una topología a partir de una colección de conjuntos de tal forma que dicha colección termine siendo una base de la topología generada.

Proposición 1.13. [4, Proposición 1.36] Sea $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X que satisface:

1. $X = \bigcup \mathcal{B}$,

2. si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Entonces $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{A \subseteq X | \exists \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} : A = \bigcup \mathcal{A}\}$ es una topología para X que contiene a $\mathcal{B}$ como base.

Otra caracterización importante de base para una topología es la siguiente.

Proposición 1.14. [4, Proposición 1.18] Una subcolección $\mathcal{B}$ de una topología $\mathcal{T}$ en X es una base para $\mathcal{T}$ si y sólo si para cada $A \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ y cada $x \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq A$.

Hemos hablado de bases (subbases) de una topología para un conjunto X, pero ¿Si $A \subseteq X$, qué pasa con a estos conceptos enfocados al subespacio A?

Proposición 1.15. [4, Proposición 1.33] Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $Y \subseteq X$. Si $\mathcal{B}$ es una base (subbase) para $\mathcal{T}$, entonces $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ es una base (subbase) para $\mathcal{T}_Y$.

Es útil encontrar una base que genere una topología para un espacio métrico, de esta manera, todas las definiciones y resultados para espacios topológicos son válidos para espacios métricos, incluyendo los anteriores. A continuación enunciamos un resultado que nos permite generar un espacio topológico partiendo de un espacio métrico.

Proposición 1.16. Si (X, d) es un espacio métrico, entonces $\mathcal{B} = \{B(x, r) : x \in X \text{ y } r > 0\}$ es una base para una topología para X.

Definición 1.17. La topología generada por la base mencionada en la Proposición 1.16 es llamada la topología inducida en X por la métrica d y la denotamos por $\mathcal{T}_d$. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es metrizable si podemos definir una métrica d en X tal que $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$ y decimos que el espacio $(X, \mathcal{T})$ es completamente metrizable si el espacio es metrizable y completo respecto a la métrica d tal que $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$.

Evidentemente, cualquier espacio métrico considerado con su topología generada por d, es un espacio metrizable.

Proposición 1.18. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico metrizable y $Y \subseteq X$, entonces Y es también un espacio metrizable.

Demostración. Como X es metrizable entonces existe una métrica d tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. Sea $\mathcal{B}$ la base estándar de X; es decir, la base que consta de las bolas abiertas. Restringimos la métrica d al subespacio $Y \subseteq X$; es decir, $d_Y = d|_{(Y \times Y)}$. La métrica anterior induce una topología $\mathcal{T}_{d_Y}$. Por la Proposición 1.15 la colección $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in B\}$ es una base para la topología $\mathcal{T}|_Y$. Notar que para cada $y \in Y$ y $r > 0$ se tiene que $B_{d_Y}(y, r) = B(y, r) \cap Y$, es decir, $\mathcal{T}_{d_Y} = \mathcal{T}|_Y$, y por lo tanto, Y es un espacio metrizable.

■

Por supuesto que las sucesiones en espacios métricos juegan un papel relevante en el aspecto teórico de los mismos. Es natural definir un concepto similar para espacios topológicos y lo agradable es que no cambia relativamente en nada.

Definición 1.19. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico.

1. Una sucesión en X es una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Denotamos a f por $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ siempre que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = x_n$.

2. Una sucesión en X, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, converge a x_0 en X, si para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $x_n \in V$. Lo anterior lo denotamos por $x_n \longrightarrow x_0$.

Proposición 1.20. [13, Corolario 2', pag. 107] Si X es un espacio métrico y $A \subseteq X$, entonces $x_0 \in cl(A)$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A que converge a x_0.

Uno de los conceptos básicos más importantes en topología es el de función continua. Intuitivamente, una fuinción f definida sobre un espacio topológico X y con valores en un espacio Y, es continua en un punto $x_0 \in X$ si manda puntos cercanos a x_0 en puntos cercanos a $f(x_0)$. Formalmente tenemos la siguiente definición.

Definición 1.21. Sean X y Y dos espacios topológicos.

1. Decimos que una función $f : (X, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_2)$ es una función continua en $x \in X$ si para cada $V \in \mathcal{T}_2$ tal que $f(x) \in V$, existe $U \in \mathcal{T}_1$, con $x \in U$ y $f[U] \subseteq V$.

2. Decimos que f es continua en $A \subseteq X$ si f es continua en cada punto de A.

Un resultado que nos ayuda mucho a saber si una función f es continua es el siguiente.

Proposición 1.22. [4, Teorema 3.4] Si X, Y son espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ es una función, entonces son equivalentes los siguientes enunciados:

1. f es continua en X.
2. Para cualquier abierto V de Y, $f^{-1}[V]$ es abierto en X.
3. Para cualquier cerrado F en Y, $f^{-1}[F]$ es un cerrado en X.

Proposición 1.23. [4, Corolario 3.10] Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y A es un subespacio de X, entonces $f|_A : A \longrightarrow Y$ es una función continua.

Ahora, introducimos los conceptos fundamentales en Topología , el de "homeomorfismo" y "espacios homeomorfos", que se refieren a los objetos topológicos que se consideran equivalentes; es decir, "iguales".

Definición 1.24.

1. Un homeomorfismo entre dos espacios topológicos es una función continua, biyectiva y que tiene función inversa continua.
2. Los espacios topológicos X y Y serán llamados homeomorfos si existe un homeomorfismo entre ellos.

En caso de que exista un homeomorfismo entre X y Y, decimos que X y Y son homeomorfos, denotándolo por $X \approx Y$.

Ahora que ya hemos establecido el concepto de homeomorfismo, un concepto de interés para nuestro trabajo es el de espacio homogéneo.

Definición 1.25. Decimos que un espacio topológico X es homogéneo si para cualesquiera $x, y \in X$ existe un homeomorfismo $f : X \longrightarrow X$ tal que $f(x) = y$.

Para familiarizarnos un poco con la homogeneidad tenemos el siguiente par de observaciones:

Observación 1.26.

1. Algo que podemos notar es que cualquier circunferencia en el plano $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2})$, es un espacio topológico homogéneo, pues cualquier punto en ella se puede llevar a cualquier otro, haciendo una rotación sobre el centro de ella, donde $\mathcal{T}_{d_2}$ es la topología inducida por la métrica $d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, que es la métrica usual en $\mathbb{R}^2$ ($\mathcal{T}_{d_2} = \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$).

2. Aunque el intervalo real $[0,1]$ suele tener muchas propiedades interesantes, resulta ser un espacio topológico no homogéneo. La razón es que no existe un homeomorfismo que lleve alguno de sus extremos, $\{0,1\}$, a cualquier otro punto $x \in (0,1)$. En efecto, Tome $x = 0$ e $y = \frac{1}{2}$. Si $h : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es un homeomorfismo tal que $h(0) = \frac{1}{2}$, entonces la restricción $h : [0,1] \setminus \{0\} \longrightarrow [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ también es un homeomorfismo. Pero $(0,1]$ es conexo y $[0,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},1]$ no lo es, lo cual no es posible y por lo tanto, h no puede existir.

Definición 1.27. Sea X un espacio topológico. Decimos que $D \subseteq X$ es denso en X si $cl(D) = X$.

Intuitivamente un subconjunto denso de un espacio topológico X, es un subconjunto, cuyos puntos que lo componen se encuentran por todas partes X.

Definición 1.28. Un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ es:

1. Separable si existe $D \subseteq X$ tal que $|D| \leq \aleph_0$ y D es denso en X.
2. Primero numerable si para cada $x \in X$ existe una base de vecindades $\mathcal{B}(x)$ para x tal que $|\mathcal{B}(x)| \leq \aleph_0$.
3. Segundo numerable si existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ tal que $|\mathcal{B}| \leq \aleph_0$.

Proposición 1.29. [4, Proposición 3.28]. Si $(X,\mathcal{T})$ es un espacio segundo numerable (respectivamente, primero numerable) y Y es un subespacio de X, entonces $(Y,\mathcal{T}|_Y)$ es también un espacio segundo numerable (respectivamente, primero numerable).

A pesar de lo que pudiera pensarse, un resultado similar no se cumple para espacios separables. En efecto, sea X un conjunto más que numerable. Tomemos un punto distinguido p en X. La colección $\mathcal{T} = \{\varnothing\} \cup \{E \subseteq X : p \in E\}$ es una topología para X, y es claro que $\{p\}$ es un subespacio denso de este espacio. Sin embargo, el subespacio $Y = X \setminus \{p\}$ es discreto. Como $|Y| > \aleph_0$, entonces Y es un subespacio de $(X,\mathcal{T})$ que no es separable. El lector puede comprobar que lo anterior es cierto siempre que el subespacio que tomemos de un espacio separable sea abierto (ver [4, Proposición 3.29]). A pesar de lo anterior algo muy diferente ocurre en espacios métricos. El siguiente teorema lo muestra.

Teorema 1.30. Si (X,d) es un espacio métrico separable y $Y \subseteq X$, entonces (Y,d) es separable.

Demostración. Sea $Y \subseteq X$ no vacío. Como X es separable, existe un conjunto denso y numerable $D \subseteq X$, dígamos que $D = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$. Para cada $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sea $Y_{n,m} = \{y \in Y : d(y,x_n) < \frac{1}{m}\}$. Considere el conjunto

$$I = \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : Y_{n,m} \neq \varnothing\}$$

Elegimos un punto $a_{n,m}$ en cada $Y_{n,m}$ tal que $(n,m) \in I$ y con ello definimos el conjunto

$$F = \{a_{n,m} : (n,m) \in I\}.$$

Notar que F es un conjunto a lo más numerable porque I lo es.

Afirmamos que F es un conjunto denso en Y; es decir, que $Y \subseteq \overline{F}$. En efecto, sean $x \in Y$ y $r > 0$. Tome $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{m} < r$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x, \frac{1}{m})$; así $d(x, x_n) < \frac{1}{m}$, lo que implica que $Y_{n,m} \neq \varnothing$ y por lo tanto, $(n,m) \in I$. De lo anterior se tiene que existe $a \in F$ tal que $a = a_{n,m}$, pero $a_{n,m} \in Y_{n,m}$, por lo cual $d(a_{n,m}, x_n) < \frac{1}{m}$ y así se tiene que $d(x, x_n) < \frac{1}{m}$ porque $x_n \in B(x, \frac{1}{m})$. Entonces

$$d(a_{n,m}, x) \leq d(a_{n,m}, x_n) + d(x_n, x) < \frac{2}{m} < r$$

por lo cual $a \in B(x, r)$; es decir, $B(x,r) \cap F \neq \varnothing$ y por lo tanto, $x \in \overline{F}$. Así, $Y \subseteq \overline{F}$, lo cual prueba que Y es separable.

■

Proposición 1.31. Todo espacio métrico (X, d) es primero numerable.

Para cada pareja de conjuntos X y Y podemos considerar al conjunto $X \times Y$. En el caso de que ambos conjuntos tengan definidas estructuras topológicas, es natural intentar construir una topología en $X \times Y$ que se encuentre relacionada adecuadamente con las topologías de cada factor. Un modo natural de hacer esto es usando las proyecciones $\pi_X : X \times Y \longrightarrow X$ y $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ definidas como $\pi_X(x,y) = x$ y $\pi_Y(x,y) = y$ para cada $(x,y) \in X \times Y$, respectivamente, porque son funciones que relacionan a $X \times Y$ con los espacios X y Y.

Definición 1.32. Dados dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T}_1)$ y $(Y, \mathcal{T}_2)$, llamaremos topología producto $\mathcal{P}$, o topología de Tychonoff, en $X \times Y$, a la topología ${}_{\{\pi_X, \pi_Y\}}\mathcal{T}$; es decir, $\mathcal{P}$ es la menor de las topologías en $X \times Y$ que convierte a π_X y a π_Y en funciones continuas, donde π_X y π_Y son las funciones proyección sobre X y Y, respectivamente.

Es de nuestro especial interés extender el concepto de topología producto para cualquier cantidad de espacios topológicos. Consideremos una familia $\{(X_j, \mathcal{T}_j) : j \in J\}$ de espacios topológicos no vacíos, en donde J es un conjunto no vacío finito o infinito. Recuerde que

$$\prod_{j \in J} X_j = \left\{ f : J \longrightarrow \bigcup_{j \in J} X_j | \forall j \in J : f(j) \in J \right\}.$$

Para cada $i \in J$, podemos definir la función $\pi_i : \prod_{j \in J} Xj \longrightarrow X_i$ como $\pi_i(f) = f(i)$ para cada $f \in \prod_{j \in J} X_j$. A π_i le llamaremos proyección sobre el i-ésimo factor. Agrupamos a todas estas funciones en una colección $\mathcal{P} = \{\pi_j : j \in J\}$. Podemos ahora considerar en $\prod_{j\in J} X_j$ la topología débil ${}_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ inducida por $\mathcal{P}$. A la pareja $(\prod_{j\in J} X_j, {}_{\mathcal{P}}\mathcal{T})$ le llamaremos producto topológico o producto Tychonoff de los espacios X_j, y a ${}_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ le llamamos topología producto o topología Tychonoff en el producto $\prod_{j\in J} X_j$.

Un resultado útil al trabajar con el conjunto de Cantor es siguiente.

Proposición 1.33. [6, Proposición 2.3.7] Sea $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios topológicos. Si $S = \bigcup_{t\in T} S_t$, donde $S_t \cap S_{t'} = \varnothing$ para $t \neq t'$, entonces los espacios

$$\prod_{s\in S} X_s \quad \text{y} \quad \prod_{t\in T}(\prod_{s\in S_t} X_s)$$

son homeomorfos, es decir, el producto cartesiano es asociativo.

Una de las últimas cosas que nos interesa saber sobre la topología asociada a un conjunto es que tan fuerte es para medir la cercanía o lejanía de objetos. Dicho lo anterior, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.34. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $x, y \in X$ y $F, G \subseteq X$ cerrados ajenos tales que $x \neq y$ y $x \notin F$. Decimos que X es un espacio:

1. T_0 si existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $(x \in U$ y $y \notin U)$ o $(x \notin U$ y $y \in U)$.
2. T_1 si existen $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U \setminus V$ y $y \in V \setminus U$.
3. T_2 o Hausdorff si existen $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $U \cap V = \varnothing$, $x \in U$ y $y \in V$.
4. T_3 o regular si X es T_1 y existen $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $U \cap V = \varnothing$, $x \in U$ y $F \subseteq V$.
5. $\mathrm{T}_{3.5}$ o completamente regular si X es T_1 y existe una función continua $g : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $g(x) = 0$ y $g[F] \subseteq \{1\}$;
6. T_4 o normal si X es T_1 y existen $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $U \cap V = \varnothing$, $F \subseteq U$ y $G \subseteq V$.

Un ejercicio de rutina es probar que si X es un espacio métrico, entonces X es T_4. En efecto, únicamente basta considerar las funciones $f(x) = d(x, G)$ y $g(y) = d(y, F)$, donde $x \in F$ y $y \in A$, junto con el recordatorio de que un punto está en la cerradura de un conjunto si y sólo si su distancia al conjunto es cero.

Otra propiedad que es nuestro interés y que además es sumamente importante en Topología General es la de compacidad. La formulación de la noción de compacidad como la conocemos hoy en día es debida a los matemáticos rusos P. S. Alexandroff y P. S. Urysohn.

Definición 1.35. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que:

1. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ es una cubierta abierta para (de) A si $A \subseteq \bigcup \mathcal{C}$.
2. A es un conjunto compacto en X si para cada cubierta abierta $\mathcal{C}$ de A, existe $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{S}$ es cubierta abierta para A con $\mathcal{S}$ finita. Por simplicidad diremos que $\mathcal{S}$ es una subcubierta abierta finita para A.
3. Un espacio topológico X se llama localmente compacto si todo punto de él tiene una vecindad compacta.

Proposición 1.36. [4, Proposición 7.4] Sean X un espacio topológico compacto y $A \subseteq X$. Si A es cerrado en X, entonces A es compacto en X.

Proposición 1.37. [4, Corolario 7.8 (1)] Si X es un espacio topológico Hausdorff y K es un subespacio compacto de X, entonces K es cerrado en X.

Definición 1.38. Sea f una función definida del espacio topológico X en el espacio topológico Y. Decimos que f es abierta (cerrada) si la imagen bajo f de cualquier subconjunto abierto (cerrado) de X es un subconjunto abierto (cerrado) en Y.

Notar que si X y Y son espacios topológicos, $f : X \longrightarrow Y$ una función y $\mathcal{B}$ es una base del espacio topológico X, entonces f es abierta si y sólo si $f[B]$ es abierto en Y para cada $B \in \mathcal{B}$.

Proposición 1.39. [4, Corolario 7.9] Sean X un espacio compacto, Y un espacio Hausdorff, y $f : X \longrightarrow Y$ una función.

1. Si f es continua entonces f es una función cerrada.
2. Si f es biyectiva y continua entonces f es un homeomorfismo.

El segundo inciso de la proposición anterior será de suma importancia para nuestros fines y nos referiremos a él como un encaje homeomorfo por compacidad.

Proposición 1.40. [4, Proposición 7.6] Sean X, Y espacios topológicos, $A \subseteq X$ y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Si A es compacto, entonces $f[A]$ es compacto en Y.

Un concepto topológico de suma importancia es el de espacio cero dimensional, ya que más adelante, la topología con la cual equiparemos al conjunto de Cantor hará que este sea un espacio cero dimensional.

Definición 1.41. Sea X un espacio topológico. Un conjunto $A \subseteq X$ es clopen si es abierto y cerrado.

Definición 1.42. Un espacio topológico X es cero dimensional si X es no vacío y si A y B son subconjuntos cerrados ajenos de X entonces existe un subconjunto clopen U de X que contiene a A pero no a B.

La siguiente caracterización de los espacios cero dimensionales nos será de mucha utilidad.

Proposición 1.43. [22, Proposición 4.2.1] Sea X un espacio topológico no vacío. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. X es cero dimensional,
2. Para cada $x \in X$ y para cada vecindad U de x existe un subconjunto clopen V de X tal que $x \in V \subseteq U$,
3. Los subconjuntos clopen de X forman una base (abierta) para X,
4. X tiene una base numerable que consiste de conjuntos clopen,
5. Cada cubierta abierta $\mathcal{C}$ de X tiene un refinamiento abierto $\mathcal{S}$ tal que los elementos de $\mathcal{S}$ son ajenos por parejas (y por lo tanto, clopen).

De manera general la equivalencia que utilizaremos siempre es la número (4); es decir, que un espacio topológico es cero dimensional si tiene una base numerable que consiste de conjuntos clopen.

Proposición 1.44. Si X es un espacio topológico cero dimensional y $Y \subseteq X$, entonces Y es también un espacio cero dimensional.

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de X que consiste de conjuntos clopen. Por la Proposición 1.15 la colección $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ es una base numerable para la topología $\mathcal{T}_Y$ que consiste de conjuntos clopen. Por lo tanto, Y es un espacio cero dimensional. ∎

1.2. Teorema de Categoría de Baire

Uno de los espacios más importantes para el desarrollo del presente trabajo son los espacios de Baire, los cuales fueron nombrados así en honor a René-Louis Baire quien introdujo el concepto. Para abordarlos es necesario, primero, conocer algunas definiciones.

Definición 1.45. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es nada denso (o denso en ninguna parte) si y sólo si $int(\overline{A}) = \varnothing$. En otro caso diremos que A es denso en alguna parte.

Corolario 1.46. [21, Corolario 1.52] Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$.

1. Si A es nada denso, entonces $\overline{A}$ es nada denso.
2. $int(\overline{A}) = \varnothing$ si y sólo si $\overline{(X \setminus \overline{A})} = X$.

Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo y $A \subseteq X$ es nada denso, entonces $f[A]$ es nada denso en Y. En efecto, $Y = f[X] = f[\overline{(X \setminus \overline{A})}]$ por ser A un conjunto nada denso en X. Luego, por ser f un homeomorfismo $f[\overline{(X \setminus \overline{A})}] = \overline{f[X \setminus \overline{A}]}$ (ver [13, Ejercicio 6.19]), y al ser en particular f una función inyectiva se tiene que $\overline{f[X \setminus \overline{A}]} = \overline{f[X] \setminus f[\overline{A}]}$. Finalmente, nuevamente por ser f un homeomorfismo se tiene que $\overline{f[X] \setminus f[\overline{A}]} = \overline{Y \setminus \overline{f[A]}}$.

En su definición original, Baire definió una noción de categoría (sin relación con la teoría de las categorías) como sigue.

Definición 1.47. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$.

1. A es un conjunto de la primera categoría (o magro), si existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\omega}$ de subconjuntos de X tal que $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ donde cada A_n es nada denso en X.
2. A es un conjunto de la segunda categoría (no magro), si A no es la unión numerable de conjuntos nada densos.

De manera particular, si existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\omega}$ de subconjuntos de X tal que $X = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ donde cada A_n es nada denso en X, entonces diremos que X es magro en sí mismo.

De lo anterior podemos notar que un espacio topológico es de la segunda categoría si y sólo si cualquier intersección numerable de subconjuntos abiertos densos en el espacio es no vacía.

Estamos en condiciones ya que definir formalmente un espacio de Baire como sigue.

Definición 1.48. Sea X un espacio topológico. Se dirá que X es un Espacio de Baire si toda $\{G_n\}_{n\in\omega}$ sucesión de conjuntos abiertos y densos en X, cumple que $\bigcap_{n\in\omega} G_n$ es denso en X.

Una de las caracterizaciones más importantes para los espacios de Baire es la siguiente.

Teorema 1.49. [21, Teorema 2.14] Sea X un espacio topológico. Son equivalentes las siguientes proposiciones.

1. Cada conjunto abierto no vacío en X es de la segunda categoría.
2. Cada conjunto de la segunda categoría en X es denso en X.
3. Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una familia de conjuntos abiertos y densos de X, entonces $\bigcap\limits_{n\in\omega} U_n$ es denso en X.

El teorema de categoría de Baire es una herramienta importante no solo en Topología General, también lo es en Análisis Funcional dado que es de suma importancia en teoremas fundamentales como el de la transformación abierta, de Banach-Steinhaus, entre otros. El teorema tiene dos formas, cada una de las cuales da condiciones suficientes para que un espacio topológico sea un espacio de Baire. La versión para espacios métricos completos fue demostrada por Baire en su tesis doctoral de 1899.

Espacios de Baire hay muchos, por ejemplo, los espacios de Hausdorff localmente compactos y los espacios topológicamente completos son espacios de Baire, tal y como lo enuncia el siguiente teorema.

Teorema 1.50. (de Categoría de Baire) [20, Teorema 3.9] Cada espacio completamente metrizable es un espacio de Baire. Cada espacio Hausdorff localmente compacto es un espacio de Baire.

Observación 1.51. Consideremos para cada $q \in \mathbb{Q}$ el conjunto $C_q = \mathbb{Q} \setminus \{q\}$. Notar que C_q es denso y abierto porque toda bola abierta con centro en q intersecta a C_q y como $\{q\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$, entonces también lo es en $\mathbb{Q}$ con la topología relativa. Sin embargo,

$$\bigcap_{q\in\mathbb{Q}} C_q = \varnothing$$

el cual no es denso. Por lo tanto, $\mathbb{Q}$ no es un espacio de Baire.

Observación 1.52. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Si X es de Baire entonces Y es de Baire; es decir, ser un espacio de Baire es una propiedad topológica.

1.3. Ordenes, ordinales y cardinales

Los conceptos de relación y función son, sin duda alguna, de los más importantes en las Matemáticas. Una extraordinaria parte de la investigación en Matemáticas se centra en el estudio de relaciones y funciones, por lo cual, es de esperar que estos conceptos sean de una gran generalidad. Hausdorff consideraba que el concepto de función es casi tan primitivo como el de conjunto, y qué decir del concepto de relación, el cual intuitivamente parece más esencial que el de función.

Definición 1.53. Un conjunto R es una relación (binaria) si todo elemento de R es un par ordenado, es decir, si para todo $z \in R$, existen x e y tales que $z = (x, y)$. Si $R \subseteq A \times B$ diremos que R es una relación de A en B, o entre A y B; si $R \subseteq A \times A$ diremos simplemente que R es una relación en A.

Por ejemplo, sean A y B conjuntos. La relación de A en B de todos los pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$ es llamada relación producto cartesiano y es denotada por $A \times B$.

Otro de los conceptos fundamentales en Matemáticas es el concepto de orden parcial en un conjunto. Un orden parcial puede ser definido como una relación con características especiales.

Definición 1.54. Un orden parcial es una relación binaria "$\leq$" sobre un conjunto no vacío $\mathbb{P}$ que es reflexiva, antisimétrica, y transitiva. El par $(\mathbb{P}, \leq)$ es entonces llamado conjunto parcialmente ordenado.

Por supuesto que al tomar un orden parcial sobre un conjunto viene consigo conceptos fundamentales como el de extensión, compatibilidad, entre otros, los cuales definimos a continuación.

Definición 1.55. Sea $(\mathbb{P}, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado.

1. Si $p, q \in \mathbb{P}$ y $p \leq q$, diremos que p es una extensión de q, o que p extiende a q.

2. Si $x, y \in \mathbb{P}$, diremos que x, y son comparables si $x < y$, $y < x$ o $x = y$, donde $(x < y \equiv x \leq y \wedge x \neq y)$.

3. Si $x, y \in \mathbb{P}$, diremos que x, y son compatibles si existe $z \in \mathbb{P}$ tal que $z \leq x$ y $z \leq y$.

4. $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}$ es una cadena si cualesquiera dos de sus elementos son comparables. Además, si $\mathcal{C}$ es una cadena bajo la relación de orden parcial $\leq$, únicamente diremos que $\mathcal{C}$ es una $\leq$-cadena.

5. $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}$ es una anticadena si cualesquiera dos de sus elementos son incomparables.

Ejemplo 1.56. Tomemos el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}, \subseteq^*)$ y $x, y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$.

1. x, y son comparables si y sólo si $x \subseteq y$ o $y \subseteq x$.
2. x, y son compatibles si y sólo si $x \cap y \neq \varnothing$.
3. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ es una anticadena si y sólo si $\mathcal{A}$ es una familia ajena.

Definición 1.57. Un orden parcial $\leq$ sobre un conjunto no vacío $\mathbb{P}$ es llamado lineal o total si cualesquiera dos elementos de $\mathbb{P}$ son comparables. El par $(\mathbb{P}, \leq)$ es entonces llamado conjunto linealmente o totalmente ordenado.

Por ejemplo, el orden usual $\leq$ en los números enteros es lineal, mientras que la relación de divisibilidad no lo es.

Definición 1.58. Sea $\leq$ un orden parcial sobre un conjunto no vacío $\mathbb{P}$, y sea $A \subseteq \mathbb{P}$ no vacío.

1. $a \in A$ es el elemento mínimo de A en el orden $\leq$, si para todo $x \in A$, $a \leq x$.
2. $a \in A$ es un elemento minimal de A en el orden $\leq$, si no existe $x \in A$ tal que $x \leq a$ y $x \neq a$.
3. $a \in A$ es el elemento máximo de A en el orden $\leq$, si para todo $x \in A$, $x \leq a$.
4. $a \in A$ es un elemento maximal de A en el orden $\leq$, si no existe $x \in A$ tal que $a \leq x$ y $x \neq a$.

Se debe tener especial cuidado de emplear correctamente los adjetivos máximo (mínimo) y maximal (minimal) ya que, aunque parecidos, guardan diferencias entre sí. Primeramente, en virtud de la antisimetría, los elementos mínimo y máximo (si existen) son únicos; no sucede así con los minimales y maximales. La razón es que los elementos mínimo y máximo son comparables con cualquier otro elemento del conjunto, no así los minimales y maximales.

Definición 1.59. Un conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{P}, \leq)$ se llama bien ordenado si cada subconjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{P}$ tiene elemento mínimo. En este caso al orden $\leq$ se le llama buen orden.

Ahora comenzamos el camino hacia definir lo que es un ordinal y un cardinal.

Definición 1.60. Decimos que un conjunto x es transitivo si para todo $y \in x$, y es un subconjunto de x; es decir, $y \subseteq x$.

Definición 1.61. Un conjunto x es un ordinal o número ordinal si y sólo si:

1. x es transitivo,
2. x es bien ordenado por $\in_x$

donde $\in_x$ es la relación de pertenencia restringida al conjunto x. Denotamos por Ord a la clase de todos los ordinales.

La clase de los ordinales tiene una característica muy útil; si tomamos un conjunto bien ordenado entonces lo podemos identificar con un ordinal. Formalmente tenemos lo siguiente.

Definición 1.62. Si $(\mathbb{P}, \leq)$ es un conjunto bien ordenado entonces el tipo de orden de $(\mathbb{P}, \leq)$ es el único ordinal isomorfo a $\mathbb{P}$.

Definición 1.63. Sea $\alpha \in Ord$.

1. α es un ordinal sucesor si y sólo si existe $\beta \in Ord$ tal que $\alpha = \beta + 1$.
2. α es un ordinal límite si y sólo si para todo $\beta \in Ord$, $\alpha \neq \beta + 1$.

En particular α es un ordinal límite si y sólo si para todo $\beta \in Ord$ tal que $\beta < \alpha$ se tiene que $\beta + 1 < \alpha$; es decir, $\alpha = sup\{\beta : \beta < \alpha\}$.

Sea λ un ordinal límite y $\{\alpha_\xi : \xi < \lambda\}$ una sucesión de ordinales de longitud λ. Entonces

$$\alpha = \lim_{\xi<\lambda} \alpha_\xi \iff [((\forall \beta < \alpha)(\exists \xi_0 < \lambda) : \xi_0 < \xi < \lambda) \Longrightarrow \beta < \alpha_\xi \leq \alpha]$$

Teorema 1.64. [10, Teorema 9.16] Un conjunto X puede ser bien ordenado si y sólo si es equipotente a un número ordinal.

Estamos en condiciones de definir uno de los conceptos más importantes en Teoría de Conjuntos; la de cardinal.

Definición 1.65. x es un número cardinal si y sólo si:

1. x es un ordinal,
2. Para todo $y \in Ord$ tal que $y < x$ no existe una función inyectiva f con $dom(f) = x$ y $ran(f) = y$.

Denotamos por $Card$ a la clase de todos los cardinales.

Para cada $\kappa \in Card$, $A = \{\lambda \in Card : \kappa < \lambda\} \neq \varnothing$, entonces existe $\lambda_0 \in A$ tal que $\lambda_0 = minA$. A λ_0 se le llama el sucesor de κ y se denota por κ^+.

Definición 1.66. Sea $\lambda \in Card$.

1. λ es un cardinal sucesor si y sólo si existe $\kappa \in Card$ tal que $\lambda = \kappa^+$
2. λ es un cardinal límite si y sólo si para todo $k \in Card$, $\lambda \neq \kappa^+$.

Un concepto que será necesario posteriormente es el de cardinal regular.

Definición 1.67. Un cardinal infinito κ se llama singular!singular si existe una sucesión transfinita creciente $\{\alpha_\xi\}_{\xi<\theta}$ de ordinales $\alpha_\xi < \kappa$ cuya longitud θ es un ordinal límite menor que κ, y

$$\kappa = \lim_{\xi<\theta} \alpha_\xi$$

Un cardinal infinito que no es singular se llama regular.

1.4. Conjunto de Cantor

Los árboles son un tipo especial de conjuntos ordenados que generalizan la noción de conjunto bien ordenado, y lo hace de una forma extensa pero también de modo muy conveniente que incluso las demostraciones por inducción y construcciones recursivas, con su respectivas adecuaciones, son posibles.

Definición 1.68. Sea $(T, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado.

1. $(T, \leq)$ es un árbol si T tiene un elemento mínimo llamado raíz y el conjunto de predecesores de $t \in T$, $\{s \in T : s < t\}$, está bien ordenado para cada $t \in T$.
2. Los elementos de un árbol T se llaman nodos, y si t es un nodo de T, el conjunto de sucesores inmediatos de t es $succ(t) = \{s \in T : t \leq s \ \wedge \ \neg(\exists r \in T)(t < r < s)\}$.
3. La altura de un nodo t en un árbol T es el tipo de orden del conjunto de predecesores; es decir, $ht(t) = otp(\{s \in T : s < t\})$.

A menos que se mencione algo diferente nos referiremos al árbol simplemente por T y no por $(T, \leq)$.

Definición 1.69. Si α es un ordinal, el α-ésimo nivel de T es $Lev(\alpha, T) = \{t \in T : ht(t) = \alpha\}$. La altura del árbol es $ht(T) = min\{\alpha : Lev(\alpha, T) = \varnothing\}$.

Definición 1.70. Una rama en un árbol es un subconjunto linealmente ordenado y maximal respecto a la contención, es decir, que no está contenido propiamente en algún otro subconjunto linealmente ordenado. Una rama es cofinal si intersecta a todos los niveles del árbol.

Para un ordinal λ y un conjunto no vacío A, el conjunto de todas las α-sucesiones $s : \alpha \longrightarrow A$ de términos en A para $\alpha < \lambda$, denotado por $A^{<\lambda}$, es un árbol con el orden de la extensión de funciones; es decir, el orden usual inducido por $\subseteq$. Para el presente trabajo es de especial interés el árbol $2^{<\omega}$.

Consideremos productos topológicos de la forma A^ω con $A \neq \varnothing$ y equipado con la topológia discreta. Un abierto básico usual para A^ω es de la forma

$$\{x \in A^\omega : (\forall i < n)(x(k_i) = a_i)\}.$$

donde $n, k_i \in \omega$ y $a_i \in A$ para cada $i < n$.

Sea $s \in A^{<\omega}$ una sucesión finita $s : n \longrightarrow A$. El cono determinado por s es el abierto básico

$$[s] = \{x \in A^\omega : s = x|n\}$$

es decir, el conjunto de todas las funciones de ω en A que inicialmente coinciden con s.

Se puede verificar en [21, Proposición 3.48] que la colección de todos los conos nos proporcionan una base para la topológia de A^ω. A dicha topología le llamaremos topología de los conos para el espacio A^ω.

Un concepto que usaremos en el capítulo 4 es la concatenación de sucesiones. Si $s, t \in A^{<\omega}$, dígamos que $s = (s_0, ..., s_k)$ y $t = (t_0, ..., t_l)$, se define la concatenación de s con t como la sucesión

$$s^\frown t = (s_0, ..., s_k, t_0, ..., t_l).$$

En particular, si $s \in A^{<\omega}$ y $a \in A$; entonces $s^\frown(a) = s \cup \{(dom(s), a)\} = (s_0, ..., s_k, a)$ que para mayor comodidad escribiremos como $s^\frown a$.

Un tipo muy especial de espacios que será de gran interés en el desarrollo del trabajo son los Espacios Polacos por la gran cantidad de propiedades que tiene y conviene recordar algunas de ellas.

Definición 1.71. Un espacio Polaco es un espacio topológico separable y completamente metrizable.

Proposición 1.72. Un subespacio cerrado de un espacio Polaco es un espacio Polaco.

Demostración. Sean X un espacio Polaco y $Y \subseteq X$ un subespacio cerrado de X, como Y es cerrado en X la métrica que hereda como subespacio es completa. Además si D es un subconjunto denso numerable contenido en X, entonces $Y = Y \cap X = Y \cap cl_X(D) = cl_Y(D \cap Y)$ porque Y es cerrado. Entonces Y es separable y por lo tanto Polaco.

■

Proposición 1.73. [21, Proposición 3.34] Sea $\{X_n : n \in \omega\}$ una familia numerable de espacios Polacos. Entonces $\prod_{n\in\omega} X_n$ es un espacio Polaco.

Proposición 1.74. El espacio A^ω visto como el producto topológico de ω copias de A con la topología discreta, es completamente metrizable y si A es numerable entonces es Polaco.

Podemos sustituir la construcción del conjunto ternario de Cantor por su representación que se asocia al conjunto de funciones que van de ω en 2, el cual denotamos por 2^ω. De hecho, para cualquier $n \in \omega$ con $n \geq 2$ se tiene que los conjuntos 2^ω y n^ω son homeomorfos. A partir de ahora, a menos que se mencione algo diferente al conjunto 2^ω siempre lo equiparemos con la topología de los conos.

Observación 1.75.

1. El conjunto de Cantor 2^ω es Polaco.
2. Como 2^ω es completamente metrizable, entonces es un espacio de Baire y de la segunda categoría.
3. Una métrica compatible con la topología de 2^ω es

$$d(x,y) = \begin{cases} 2^{-n-1} & \text{si} \quad x \neq y \\ \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

   con $n = min\{k \in \omega : x(k) \neq y(k)\}$ y donde $x(n)$ y $y(n)$ denotan las funciones características de los conjuntos x e y evaluadas en el natural n, respectivamente.

Una de las caracterizaciones más importantes del conjunto de Cantor, no sólo en el mundo matemático, sino también para el presente trabajo es la siguiente.

Teorema 1.76. [24, Teorema 1.5.5] El espacio 2^ω es el único (salvo homeomorfismo) espacio no vacío, metrizable, compacto, separable, cero dimensional y sin puntos aislados.

Corolario 1.77. [24, Corolario 1.5.7] Cualquier espacio topológico X cero dimensional, separable y metrizable puede encajarse en 2^ω.

CAPÍTULO 2

Ultrafiltros e Ideales maximales

2.1. Filtros

Definición 2.1. Un filtro sobre un conjunto no vacío X es una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X que cumple:

1. $X \in \mathcal{F}$ y $\varnothing \notin \mathcal{F}$.
2. Si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.
3. Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B \subseteq X$ entonces $B \in \mathcal{F}$.

Intuitivamente podemos pensar a un filtro como la colección del potencia de X que tiene como elementos a los conjuntos muy grandes de X, es por ello que el vacío no está mientras que el total sí, que la intersección de dos subconjuntos lo suficientemente grandes vuelve a ser muy grande y por supuesto, que si un conjunto tiene como subconjunto a un conjunto muy grande es porque él es también muy grande.

Ejemplo 2.2.

1. Sea $X \neq \varnothing$ y sea $A \subseteq X$. Entonces $\mathcal{F}_A = \{S \subseteq X : A \subseteq S\}$ es un filtro sobre X. A este filtro se le denomina el filtro generado por A.
2. Sea X un conjunto infinito. Entonces $\mathcal{F}(X) = \{A \subseteq X : |X \setminus A| < \omega\}$ es un filtro y se denomina el filtro de Fréchet (o cofinito y en tal caso se le denotará por Cof) de X.

Definición 2.3. Dado un filtro $\mathcal{F}$ en un conjunto X, una subcolección no vacía $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ es una base de filtro para $\mathcal{F}$ si para todo $F \in \mathcal{F}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq F$.

Proposición 2.4. Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{B}$ una colección no vacía de subconjuntos de X. Entonces $\mathcal{B}$ es una base de filtro en X si y sólo si $\varnothing \notin \mathcal{B}$ y para cualesquiera $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{B}$ es base de un filtro $\mathcal{F}$ sobre X. Como $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ se tiene que $\varnothing \notin \mathcal{B}$. Ahora, si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, en particular $B_1, B_2 \in \mathcal{F}$ y por lo tanto, $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}$. Finalmente, como $\mathcal{B}$ es base, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Recíprocamente, sea $\mathcal{F}^{\mathcal{B}} = \{F \subseteq X | \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq F\}$. Claramente, como $\mathcal{B} \neq \varnothing$ entonces $\mathcal{F}^{\mathcal{B}} \neq \varnothing$, además, como $\varnothing \notin \mathcal{B}$, entonces $\varnothing \notin \mathcal{F}^{\mathcal{B}}$. De la construcción de $\mathcal{F}^{\mathcal{B}}$ es claro que éste es cerrado bajo superconjuntos. Por otro lado, si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}^{\mathcal{B}}$, existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $B_1 \subseteq F_1$ y $B_2 \subseteq F_2$. Ahora, por hipótesis sabemos que existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$, por lo cual $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq F_1 \cap F_2$ y consecuentemente $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}^{\mathcal{B}}$, lo cual termina la prueba de que éste es un filtro y además es claro que $\mathcal{B}$ es una base de éste.

■

Definición 2.5. Sean $X \neq \varnothing$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Diremos que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita (PIF) si

$$\forall \sigma \in [\mathcal{F}]^{<\omega} : \bigcap \sigma \neq \varnothing.$$

Y diremos que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita fuerte si $\bigcap \sigma$, es infinita.

Es muy claro a partir de las definiciones que si $\mathcal{F}$ es un filtro entonces $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita.

Observación 2.6. Si $\mathcal{A}$ es una familia de subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$ y además $\mathcal{A}$ es una $\subseteq$-cadena, donde cada elemento de $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de la intersección finita fuerte, entonces $\bigcup \mathcal{A}$ también tiene la propiedad de la intersección finita fuerte.

Proposición 2.7.

1. Si $\mathcal{A}$ es una familia no vacía de filtros sobre un conjunto X entonces $\bigcap \mathcal{A}$ es un filtro.
2. Si $\mathcal{A}$ es una familia no vacía de filtros en X y $\mathcal{A}$ es una $\subseteq$-cadena entonces $\bigcup \mathcal{A}$ es un filtro.
3. Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tiene la propiedad de la intersección finita, entonces existe un filtro $\mathcal{G}$ sobre X tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ y es el $\subseteq$-menor con tal propiedad.

Demostración. (1) y (2) son fáciles de verificar, razón por la cual sólo mostraremos (3).

Sea $\mathcal{G} = \{A \subseteq X : (\exists n \in \omega)(\exists G_0, ..., G_n \in \mathcal{F})(\bigcap_{i=0}^{n} G_i \subseteq A)\}$.

Se verifica que $X \in \mathcal{G}$ y $\varnothing \notin \mathcal{G}$, esto último porque $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita.

Sean $A, B \in \mathcal{G}$. Entonces existen $n, m \in \omega$ y $G_0, ..., G_n, H_0, ..., H_m \in \mathcal{F}$ tales que

$$\bigcap_{i=0}^{n} G_i \subseteq A \quad y \quad \bigcap_{j=0}^{m} H_j \subseteq B.$$

Luego, $(\bigcap_{i=0}^{n} G_i) \cap (\bigcap_{j=0}^{m} H_j) \subseteq A \cap B$, por lo cual $A \cap B \in \mathcal{G}$.

Ahora, sean $A \in \mathcal{G}$ y $B \subseteq X$ tales que $A \subseteq B$. Como $A \in \mathcal{G}$, entonces cualquier intersección finita de elementos de $\mathcal{F}$ que éste contenida en A también estará contenida en B, por lo cual $B \in \mathcal{G}$. Así, $\mathcal{G}$ es un filtro sobre X. Notar además que si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A \in \mathcal{G}$, por lo cual $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Más aún, supongamos que $\mathcal{K}$ es un filtro sobre X tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}$. Sea $A \in \mathcal{G}$, entonces existen $n \in \omega$ y $G_0, ..., G_n \in \mathcal{F}$ tales que $\bigcap_{i=0}^{n} G_i \subseteq A$. Ahora, como $G_i \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}$ para cada $i \in \{0, ..., n\}$, entonces $\bigcap_{i=0}^{n} G_i \in \mathcal{K}$ porque $\mathcal{K}$ es un filtro. Finalmente, como $\bigcap_{i=0}^{n} G_i \subseteq A$ se sigue que $A \in \mathcal{K}$. Concluimos que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{K}$, y así $\mathcal{G}$ es el $\subseteq$-menor filtro que contiene a $\mathcal{F}$.

Decimos que el filtro $\mathcal{G}$ es generado por $\mathcal{F}$ y lo denotamos por $\langle \mathcal{F} \rangle$.

■

Notar que si $X \neq \varnothing$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es tal que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita fuerte, entonces $\langle \mathcal{F} \rangle$ también la tiene.

Por supuesto, como en muchas otras ramas de las Matemáticas nos interesan los objetos maximales, en este caso los filtros. Formalmente definimos lo siguiente.

Definición 2.8. Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Diremos que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro si no existe $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ filtro tal que $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$.

Por supuesto, el Lema de Zorn nos permite sin duda alguna obtener maximalidad en los filtros como se muestra a continuación.

Teorema 2.9. Bajo el Axioma de Elección todo filtro sobre X puede extenderse a un ultrafiltro.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Fijémonos en la colección

$$\mathcal{A} = \{\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{G} \text{ es un filtro y } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\}.$$

Notar que $\mathcal{A} \neq \varnothing$ porque $\mathcal{F} \in \mathcal{A}$. Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ es una $\subseteq$-cadena entonces $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{A}$. Luego, por el Lema de Zorn, existe $\mathcal{F}^* \in \mathcal{A}$ elemento $\subseteq$-maximal. Se verifica que $\mathcal{F}^*$ es un ultrafiltro sobre X que contiene a $\mathcal{F}$.

■

Nos conviene tener alguna caracterización útil de los ultrafiltros, ya que la definición por si sola no es siempre la más efectiva o de más ayuda.

Teorema 2.10. Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre un conjunto X. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. $\mathcal{F}$ es ultrafiltro.
2. Para cada $A \subseteq X$ se cumple que $A \in \mathcal{F}$ o $X \setminus A \in \mathcal{F}$.
3. Para cualesquiera $A, B \subseteq X$ se cumple que $A \cup B \in \mathcal{F}$ si y sólo si $A \in \mathcal{F}$ o $B \in \mathcal{F}$.

Demostración.

[(1) $\Rightarrow$ (2)] Sea $A \subseteq X$, y supongamos sin pérdida de generalidad que $A \notin \mathcal{F}$. Por maximalidad de $\mathcal{F}$ se cumple que $\mathcal{F} \cup \{A\}$ no tiene la propiedad de la intersección finita, por lo cual existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $A \cap B = \varnothing$, es decir, $B \subseteq X \setminus A$ y así $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

[(2) $\Rightarrow$ (3)] Si $A \in \mathcal{F}$ o $B \in \mathcal{F}$, es inmediato que $A \cup B \in \mathcal{F}$ porque $A, B \subseteq A \cup B$.

Por otro lado, si suponemos que $A \cup B \in \mathcal{F}$ y $A, B \notin \mathcal{F}$ entonces $X \setminus A, X \setminus B \in \mathcal{F}$. De lo anterior, $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \in \mathcal{F}$ lo cual no es posible porque $A \cup B \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $A \in \mathcal{F}$ o $B \in \mathcal{F}$.

[(3) $\Rightarrow$ (1)] Supongamos que existe un filtro $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$. Sea $A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$. Como $X = A \cup (X \setminus A) \in \mathcal{F}$ y $A \notin \mathcal{F}$ entonces $X \setminus A \in \mathcal{F}$ y por lo tanto, $X \setminus A \in \mathcal{G}$. Luego, $\varnothing = A \cap (X \setminus A) \in \mathcal{G}$, lo cual no es posible. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro.

■

Definición 2.11. Un filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto X se denomina filtro principal si existe $A \subseteq X$ tal que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$.

Observación 2.12. Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre un conjunto X. Entonces

1. Si existe $A \subseteq X$ tal que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$, entonces $\mathcal{F}$ es principal si y sólo si $|A| = 1$.
2. $\mathcal{F}$ es principal si y sólo si $\bigcap \mathcal{F} \neq \varnothing$.

En el Capítulo 4 será de suma importancia la siguiente proposición, razón por la cual le recomendamos al lector tenerla presente.

Proposición 2.13. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto infinito X. Entonces $\mathcal{U}$ es no principal si y sólo si contiene al filtro de Fréchet de X.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no principal sobre X y sea $x \in X$. Como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro se tiene que $\{x\} \in \mathcal{U}$ o bien $X \setminus \{x\} \in \mathcal{U}$, pero al ser $\mathcal{U}$ no principal se tiene que $\{x\} \notin \mathcal{U}$. Por lo tanto, para cada $x \in X$ se tiene que $X \setminus \{x\} \in \mathcal{U}$. Sea F cualquier subconjunto finito de X. Entonces

$$X \setminus \mathcal{F} = \bigcap_{x \in F} (X \setminus \{x\})$$

es la intersección de una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}$. Como cada filtro es cerrado bajo intersecciones finitas se tiene que $X \setminus F \in \mathcal{U}$. De lo anterior se tiene que el filtro de Fréchet de X está contenido en $\mathcal{U}$.

Recíprocamente supongamos que $Cof \subseteq \mathcal{U}$. Para cada $n \in \omega$ se tiene que $C_n = \omega \setminus \{n\}$ es un elemento de Cof. Notar que

$$\bigcap \mathcal{U} \subseteq \bigcap Cof \subseteq \bigcap_{n \in \omega} C_n = \varnothing$$

es decir, $\bigcap \mathcal{U} = \varnothing$ y por lo tanto, $\mathcal{U}$ es no principal.

■

2.2. Ideales

El concepto de ideal es simplemente el dual del concepto de filtro. Es por lo anterior que podemos considerar intuitivamente a un ideal como una colección de subconjuntos de un conjunto X que son lo suficientemente pequeños.

Definición 2.14. Un ideal sobre un conjunto no vacío X es una colección $\mathcal{I}$ de subconjuntos de X que cumple:

1. $\varnothing \in \mathcal{I}$ y $X \notin \mathcal{I}$.
2. Si $A, B \in \mathcal{I}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{I}$.
3. Si $A \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq A$ entonces $B \in \mathcal{I}$.

Ejemplo 2.15.

1. Sea $X \neq \varnothing$ y sea $A \subseteq X$. Entonces $\mathcal{I}_A = \{S \subseteq X : S \in A\}$ produce un ideal sobre X. A este ideal se le denomina el ideal generado por A.
2. Sea X un conjunto tal que $|X| > \omega$. Entonces $Fin = \{S \subseteq X : |S| < \omega\}$ es un ideal sobre X.

3. El conjunto $\mathcal{I} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n\in A} \frac{1}{n} < \infty\}$ es un ideal sobre $\mathbb{N}$.

Tal como se mencionó al inicio de la sección, los conceptos de filtro e ideal son duales. En efecto, si tomamos el complemento de un elemento de un filtro es razonable pensar que tal complemento debe ser algo muy pequeño y viceversa, al tomar el complemento de un elemento de un ideal este debe ser muy grande. Formalmente tenemos lo siguiente.

1. Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un filtro sobre X entonces $\mathcal{I}_{\mathcal{F}} = \{X \setminus A : A \in \mathcal{F}\}$ es un ideal.
2. Si $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un ideal sobre X entonces $\mathcal{F}_{\mathcal{I}} = \{X \setminus A : A \in \mathcal{I}\}$ es un filtro.

Al ideal $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ le llamamos ideal dual del filtro $\mathcal{F}$, y al filtro $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ le llamamos filtro dual del ideal $\mathcal{I}$.

Definición 2.16. Dado un ideal $\mathcal{I}$ sobre un conjunto X, una subcolección no vacía $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$ es una base de ideal para $\mathcal{I}$ si para todo $I \in \mathcal{I}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $I \subseteq B$.

Proposición 2.17. Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{B}$ una colección no vacía de subconjuntos de X. Entonces $\mathcal{B}$ es base de ideal en X si y sólo si $X \notin \mathcal{B}$ y para cualesquiera $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ existe B_3 tal que $B_1 \cup B_2 \subseteq B_3$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{B}$ es base de un ideal $\mathcal{I}$ sobre X. Como $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$ se tiene que $X \notin \mathcal{B}$. Ahora, si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, en particular $B_1, B_2 \in \mathcal{I}$ y por lo tanto, $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{I}$. Finalmente, como $\mathcal{B}$ es base, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_1 \cup B_2 \subseteq B_3$.

Recíprocamente, sea $\mathcal{I}^{\mathcal{B}} = \{I \subseteq X | \exists B \in \mathcal{B} : I \subseteq B\}$. Claramente, como $\mathcal{B} \neq \varnothing$ entonces $\mathcal{I}^{\mathcal{B}} \neq \varnothing$, además, como $X \notin \mathcal{B}$, entonces $X \notin \mathcal{I}^{\mathcal{B}}$. De la construcción de $\mathcal{I}^{\mathcal{B}}$ es claro que éste es cerrado bajo subconjuntos. Por otro lado, si $I_1, I_2 \in \mathcal{I}^{\mathcal{B}}$, existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $I_1 \subseteq B_1$ y $I_2 \subseteq B_2$. Ahora, por hipótesis sabemos que existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_1 \cup B_2 \subseteq B_3$, por lo cual $I_1 \cup I_2 \subseteq B_1 \cup B_2 \subseteq B_3$ y consecuentemente $I_1 \cup I_2 \in \mathcal{I}^{\mathcal{B}}$, lo cual termina la prueba de que éste es un ideal y además es claro que $\mathcal{B}$ es una base de éste.

■

Definición 2.18. Sean $X \neq \varnothing$ y $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Diremos que $\mathcal{I}$ tiene la propiedad de la unión finita (PUF) si para cada $\sigma \in [\mathcal{I}]^{<\omega}$ se tiene que $\bigcup \sigma$, es coinfinita; es decir, si

$$\forall \sigma \in [\mathcal{I}]^{<\omega} : \left| X \setminus \bigcup \sigma \right| \geq \omega.$$

Observación 2.19. Si $\mathcal{A}$ es una familia de subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$ y además $\mathcal{A}$ es una $\subseteq$-cadena, donde cada elemento de $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de la unión finita, entonces $\bigcup \mathcal{A}$ también tiene la propiedad de la unión finita.

Proposición 2.20.

1. Si $\mathcal{A}$ es una familia no vacía de ideales sobre un conjunto X entonces $\bigcap \mathcal{A}$ es un ideal.
2. Si $\mathcal{A}$ es una familia no vacía de ideales en X y $\mathcal{A}$ es una $\subseteq$-cadena entonces $\bigcup \mathcal{A}$ es un ideal.
3. Si $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tiene la propiedad de la unión finita, entonces existe un ideal $\mathcal{J}$ sobre X tal que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ y es el $\subseteq$-menor con tal propiedad.

Demostración. (1) y (2) son fáciles de verificar, razón por la cual sólo mostraremos (3).

Sea $\mathcal{J} = \{A \subseteq X : (\exists n \in \omega)(\exists G_0, ..., G_n \in \mathcal{I})(A \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} G_i)\}$.

Se verifica que $\varnothing \in \mathcal{J}$ y $X \notin \mathcal{J}$, esto último porque $\mathcal{I}$ tiene la propiedad de la unión finita.

Sean $A, B \in \mathcal{J}$. Entonces existen $n, m \in \omega$ y $G_0, ..., G_n, H_0, ..., H_m \in \mathcal{I}$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} G_i \quad y \quad B \subseteq \bigcup_{j=0}^{m} H_j.$$

Luego, $A \cup B \subseteq (\bigcup_{i=0}^{n} G_i) \cup (\bigcup_{j=0}^{m} H_j)$, por lo cual $A \cup B \in \mathcal{J}$.

Ahora, sean $A \in \mathcal{J}$ y $B \subseteq X$ tales que $B \subseteq A$. Como $A \in \mathcal{J}$, entonces cualquier unión finita de elementos de $\mathcal{I}$ que contenga a A también contendrá a B, por lo cual $B \in \mathcal{J}$. Así, $\mathcal{J}$ es un ideal sobre X. Notar además que si $A \in \mathcal{I}$, entonces $A \in \mathcal{J}$, por lo cual $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$. Más aún, supongamos que $\mathcal{K}$ es un ideal sobre X tal que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}$. Sea $A \in \mathcal{J}$, entonces existen $n \in \omega$ y $G_0, ..., G_n \in \mathcal{I}$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} G_i$. Ahora, como $G_i \in \mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}$ para cada $i \in \{0, ..., n\}$, entonces $\bigcup_{i=0}^{n} G_i \in \mathcal{K}$ porque $\mathcal{K}$ es un ideal. Finalmente, como $A \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} G_i$ se sigue que $A \in \mathcal{K}$. Concluimos que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}$, y así $\mathcal{J}$ es el $\subseteq$-menor ideal que contiene a $\mathcal{I}$.

Decimos que el ideal $\mathcal{J}$ es generado por $\mathcal{I}$ y lo denotamos por $\langle \mathcal{I} \rangle$.

■

Notar que si $X \neq \varnothing$ y $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es tal que $\mathcal{I}$ tiene la propiedad de la unión finita, entonces $\langle \mathcal{I} \rangle$ también la tiene.

Análogamente a los ultrafiltros, con los ideales nos interesa obtener objetos maximales, que, como era de esperar, el Lema de Zorn nos ayuda a obtenerlos.

Definición 2.21. Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre X. Diremos que $\mathcal{I}$ es un ideal maximal si no existe $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ideal tal que $\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{J}$.

Teorema 2.22. Bajo el Axioma de Elección todo ideal sobre X puede extenderse a un ideal maximal.

Demostración. Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre X. Fijémonos en la colección

$$\mathcal{A} = \{\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{J} \text{ es un ideal y } \mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}\}.$$

Notar que $\mathcal{A} \neq \varnothing$ porque $\mathcal{I} \in \mathcal{A}$. Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ es una $\subseteq$-cadena entonces $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{A}$. Luego, por el Lema de Zorn, existe $\mathcal{I}^* \in \mathcal{A}$ elemento $\subseteq$-maximal. Se verifica que $\mathcal{I}^*$ es un ideal maximal sobre X que contiene a $\mathcal{I}$.

■

Si $\mathcal{I}$ es un ideal maximal sobre X, entonces el filtro dual de $\mathcal{I}$ es un ultrafiltro. Análogamente, si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro sobre X, entonces el ideal dual de $\mathcal{F}$ es un ideal maximal, y de hecho $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{I}$.

Observación 2.23. Si $\mathcal{I}$ es un ideal maximal sobre X, entonces $\mathcal{I}$ es no principal si y sólo si su ultrafiltro dual $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{I}$ es no principal.

Definición 2.24. Un ideal $\mathcal{I}$ sobre un conjunto X se denomina ideal principal si existe $A \subseteq X$ tal que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_A$.

Observación 2.25. Sea $\mathcal{I}$ un ideal maximal sobre un conjunto X. Entonces

1. Si existe $A \subseteq X$ tal que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_A$, entonces $\mathcal{I}$ es principal si y sólo si $|A| = 1$.
2. $\mathcal{I}$ es principal si $\bigcup \mathcal{I} \subsetneq X$.

Al igual que la Proposición 2.13, en el Capítulo 4 será de suma importancia la siguiente proposición, razón por la cual también le recomendamos al lector tenerla muy presente.

Proposición 2.26. Sea $\mathcal{I}$ un ideal maximal sobre un conjunto infinito X. Entonces $\mathcal{I}$ es no principal si y sólo si contiene al ideal Fin de X.

Demostración. Se sigue de la Proposición 2.13 y la Observación 2.23.

■

CAPÍTULO 3

Axioma de Martin

3.1. Axioma de Martin y algunas versiones débiles

El propósito de este capítulo es introducir el Axioma de Martin; un axioma cuyo enunciado es independiente de la Teoría de Conjuntos (ZFC) pero que al tomarlo en cuenta resulta una herramienta increíblemente sofisticada para la prueba de algunos teoremas.

Definición 3.1. Un conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{P}, \leq)$ cumple la condición de la cadena contable (c.c.c) si toda anticadena en $\mathbb{P}$ es a lo más numerable.

Definición 3.2. Sea κ un cardinal infinito y $x, y \subseteq \kappa$ de cardinalidad κ. Diremos que x está casi contenido en y, lo cual se denota por $x \subseteq^* y$ si $|x \setminus y| < \kappa$.

Ejemplo 3.3.

1. $(\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}, \subseteq)$ cumple la c.c.c si y sólo si X es a lo más numerable.
2. $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq^*)$ no cumple la c.c.c.
3. Consideremos ${}^{<\omega}2 = \{f : n \longrightarrow 2 : n \in \omega\}$ y defínase la relación $\leq$ en ${}^{<\omega}2$ como sigue, $p \leq q \equiv p \supseteq q$, llamada inclusión inversa. Entonces $({}^{<\omega}2, \leq)$ es un orden parcial que cumple la c.c.c. porque $|{}^{<\omega}2| = \omega$.

Definición 3.4. Sea $(\mathbb{P}, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Entonces

1. $D \subseteq \mathbb{P}$ es denso en $\mathbb{P}$ si cumple

$$(\forall p \in \mathbb{P})(\exists d \in D)[d \leq p]$$

2. $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro en $\mathbb{P}$ si cumple:

   a) $(\forall x, y \in \mathcal{G})(\exists z \in \mathcal{G})[z \leq x \wedge z \leq y]$.

   b) $(\forall x, y \in \mathbb{P})[(x \leq y \wedge x \in \mathcal{G}) \Rightarrow y \in \mathcal{G}]$.

Definición 3.5. Sean $(\mathbb{P}, \leq)$ un conjunto parcialemte ordenado y $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{P})$ una familia de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$. Un filtro $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro $\mathcal{D}$-genérico sobre $\mathbb{P}$ si

$$\forall D \in \mathcal{D} : G \cap D \neq \varnothing$$

Sea κ un cardinal, entonces mediante $MA(\kappa)$ nos referimos al siguiente enunciado.

$MA(\kappa)$: Si $(\mathbb{P}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado que cumple la condición de la cadena contable y $\mathcal{D}$ es una familia de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ tal que $|\mathcal{D}| \leq \kappa$, entonces existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico sobre $\mathbb{P}$.

Observación 3.6. Notemos que si $\kappa' > \kappa$ y $MA(\kappa')$ es verdadero entonces $MA(\kappa)$ lo es también.

Uno de los resultados importantes en este capítulo es el siguiente, que muestra que $MA(\omega)$ es cierto.

Teorema 3.7. (Rasiowa-Sikorski) Sea $(\mathbb{P}, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado que cumple la c.c.c. Si $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{P})$ es una familia numerable de conjuntos densos en $\mathbb{P}$, entonces existe $G \subseteq \mathbb{P}$ filtro $\mathcal{D}$-genérico.

Demostración. Enumeremos a $\mathcal{D}$ por $\{D_n : n \in \omega\}$. Recursivamente construimos el conjunto $\{p_n : n \in \omega\}$ como sigue:

1. $p_0 \in D_0$.

2. Supongamos que hemos elegido $p_i \in D_i$ para $i \leq n$ tal que $p_0 \geq p_1 \geq ... \geq p_n$.

Como D_{n+1} es denso, elegimos $p_{n+1} \in D_{n+1}$ tal que $p_{n+1} \leq p_n$. Sea

$$G = \{p \in \mathbb{P} | \exists n \in \omega : p_n \leq p\}$$

Notemos que para cada $n \in \omega$ se tiene que $p_n \in G$, es decir, $G \cap D_n \neq \varnothing$.

Veamos que G es un filtro en $\mathbb{P}$.

1. Sean $p, q \in G$. Entonces existen $n, m \in \omega$ tales que $p_n \leq p$ y $p_m \leq q$. Sea $k = max\{n, m\}$, luego $p_k \in G$, $p_k \leq p_n \leq p$ y $p_k \leq p_m \leq q$.

2. Sean $p, q \in \mathbb{P}$ tales que $p \in G$ y $p \leq q$. Como $p \in G$, existe $n \in \omega$ tal que $p_n \leq p$. Pero $p \leq q$, entonces $p_n \leq q$, es decir $q \in G$.

Por lo tanto G es un filtro, más aún es un filtro $\mathcal{D}$-genérico.

■

El teorema anterior nos dice que $MA(\omega)$ es cierto y por la Observación 3.6 tenemos que si $n \in \omega$ entonces $MA(n)$ es cierto.

Como $MA(\omega)$ es cierto, ¿lo será también para el siguiente cardinal? De ser afirmativa la respuesta anterior, ¿existirá un cardinal κ para el cual $MA(\kappa)$ sea falso?

Lo anterior lo responde el siguiente teorema.

Teorema 3.8. $MA(\mathfrak{c})$ es falso.

Demostración. Supongamos que $MA(\mathfrak{c})$ es cierto. Considere el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{P}, \leq)$, donde $\mathbb{P} = \{f | f : \omega \to 2\}$ tal que f es función, $dom(f) \subseteq \omega$, $|dom(f)| < \omega$ y donde $p \leq q$ si y sólo si $q \subseteq p$; es decir, si p extiende a q como función.

Notemos que si $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro en $\mathbb{P}$ y $p, q \in \mathcal{F}$, entonces existe $r \in G$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$, es decir, $p \subseteq r$ y $q \subseteq r$. En particular, $r|dom(p) \cap dom(q) = p|dom(p) \cap dom(q) = q|dom(p) \cap dom(q)$. Por tanto, cualesquiera dos elementos $p, q \in \mathcal{F}$ son funciones compatibles. De lo anterior, podemos asegurar que $\bigcup \mathcal{F}$ es una función tal que

$$dom(\bigcup \mathcal{F}) = \bigcup_{p \in \mathcal{F}} dom(p) \qquad y \qquad ran(\bigcup \mathcal{F}) = \bigcup_{p \in \mathcal{F}} ran(p).$$

Para cada $n \in \omega$ defínase el conjunto

$$D_n = \{p \in \mathbb{P} : n \in dom(p)\}.$$

Veamos que para cada $n \in \omega$, D_n es denso. Sean $n \in \omega$ y $p \in \mathbb{P}$. Si $p \in D_n$ no hay nada que hacer. Si $p \notin D_n$, entonces $n \notin dom(p)$. Sea $q = p \cup \{(n, 0)\}$, entonces $q \in D_n$ y $q \leq p$ y por lo tanto, D_n es denso en $\mathbb{P}$.

Por otro lado, para cada $f \in {}^{\omega}2$, defínase el conjunto $D_f = \{p \in \mathbb{P} | \exists m \in dom(p) : p(m) \neq f(m)\}$. Veamos que D_f es denso en $\mathbb{P}$ para cada $f \in {}^{\omega}2$. Sean $f \in {}^{\omega}2$ y $p \in \mathbb{P}$. Tomemos $n = max(dom(p))$ y defínase $q = p \cup \{(n+1, 1 - f(n+1))\}$. Se cumple que $q \in D_f$ y $q \leq p$. Sea

$$\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{D_f : f \in {}^{\omega}2\}.$$

Se tiene que $|\mathcal{D}| = \mathfrak{c}$. Por $MA(\mathfrak{c})$, existe $G \subseteq \mathbb{P}$ filtro $\mathcal{D}$-genérico.

Sea $f^* = \bigcup G$. Se cumple que f^* es una función. Dado $n \in \omega$ se tiene que $G \cap D_n \neq \varnothing$, por lo cual existe $g_n \in G \cap D_n$. Entonces $n \in dom(g_n) \subseteq dom(f^*)$, y por lo tanto $f^* : \omega \to 2$. Ahora, como $f^* \in {}^{\omega}2$, entonces $D_{f^*} \in \mathcal{D}$. Luego, $G \cap D_{f^*} \neq \varnothing$.

Sea $p \in G \cap D_{f^*}$. Entonces $p \in G$ y existe $m \in dom(p)$ tal que $p(m) \neq f^*(m)$, por tanto $f^*(m) \neq f^*(m)$, lo cual no es posible.

■

Proposición 3.9. Si κ es un cardinal con $\kappa \geq \mathfrak{c}$ entonces $MA(\kappa)$ es falso.

El Axioma de Martin, denotado por MA es el siguiente enunciado.

Axioma de Martin: Para todo cardinal κ tal que $\kappa < \mathfrak{c}$, $MA(\kappa)$ es cierto.

Para que el Axioma de Martin tenga "sentido" es necesario recordar la Hipótesis de Continuo (CH, por sus siglas en inglés) conjeturada por Georg Cantor en 1878 y que trata sobre que tan mayor es la cardinalidad del conjunto de los números reales respecto a la del conjunto de los números naturales. En algunos de sus trabajos Cantor ya había mostrado que para cualquier conjunto X se cumple que $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ y posteriormente probó que había una estrecha relación entre el conjunto de los números reales y el de los naturales en cuestiones de cardinalidad. Concretamente Cantor mostró que $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ donde $\aleph_0$ es el primer cardinal infinito, es decir, el cardinal del conjunto de los números naturales.

La Hipótesis del Continuo es la siguiente.

Hipótesis del Continuo: No existe un cardinal κ tal que

$$\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$$

En pocas palabras lo que nos dice Hipótesis del Continuo es que no hay ningún cardinal infinito entre el de los números naturales y el de los reales, es decir, $|\mathbb{R}| = \aleph_1$.

Debido a que trivialmente el Axioma de Martin es cierto bajo la Hipótesis del Continuo, usualmente (por no decir siempre) consideramos $MA + \neg CH$. Además, para Axioma de Martin es necesaria la condición de la cadena contable con $\neg CH$.

Definición 3.10. Sea $\kappa \geq \omega$ un cardinal regular. Si f y g son funciones en κ^κ, decimos que $f <^* g$, si existe $\alpha < \kappa$ tal que para toda $\beta > \alpha$, $f(\beta) < g(\beta)$. En este caso, decimos que g finalmente domina a f.

Definición 3.11. Sea $\mathfrak{F}$ una familia de funciones de κ en κ.

1. $\mathfrak{F}$ es dominante, si para toda $g \in \kappa^\kappa$, existe $f \in \mathfrak{F}$ tal que $g <^* f$.

2. $\mathfrak{F}$ es no acotada, si para toda $g \in \kappa^\kappa$, existe $f \in \mathfrak{F}$ tal que $f \not<^* g$.

Podemos asociar ciertos cardinales a los conceptos de familias dominante y no acotada como sigue.

Definición 3.12. Sea λ un cardinal infinito.

- $\mathfrak{b} = min\{|\mathfrak{F}| : \mathfrak{F}$ es una familia no acotada de funciones en $\omega^\omega\}$.

- $\mathfrak{d} = min\{|\mathfrak{F}| : \mathfrak{F}$ es una familia dominante de funciones en $\omega^\omega\}$

Definición 3.13.

1. $add(\mathcal{N})$ es el menor cardinal κ tal que la unión de alguna familia de κ conjuntos nulos es no nula.

2. $add(\mathcal{M})$ es el menor cardinal κ tal que la unión de alguna familia de κ conjuntos magros es no magro.

3. $cov(\mathcal{N})$ es el menor cardinal κ para el cual $\mathbb{R}$ es la unión de κ conjuntos nulos.

4. $cov(\mathcal{M})$ es el menor cardinal κ para el cual $\mathbb{R}$ es la unión de κ conjuntos magros.

5. $non(\mathcal{N})$ es el menor cardinal κ tal que existe un conjunto de cardinalidad κ que es no nulo.

6. $non(\mathcal{M})$ es el menor cardinal κ tal que existe un conjunto de cardinalidad κ que no es magro.

7. $non(\mathcal{N})$ es el menor cardinal de una familia $\mathfrak{F}$ de conjuntos nulos tal que cada conjunto nulo está incluido en un conjunto de $\mathfrak{F}$.

8. $non(\mathcal{M})$ es el menor cardinal de una familia $\mathfrak{F}$ de conjuntos magros tal que cada conjunto magro está incluido en un conjunto de $\mathfrak{F}$.

La relación entre los invariantes cardinales definidos anteriormente en este caso se vuelven invariantes cardinales del continuo y la relación entre ellos se puede ilustrar con el siguiente diagrama (donde una flecha que va de a a b significa que $a \leq b$), conocido como el Diagrama de Cichoń para el espacio de Baire ω^ω.

$$
\begin{tikzcd}
 & cov(\mathcal{N}) \arrow[r] & non(\mathcal{M}) \arrow[r] & cof(\mathcal{M}) \arrow[r] & cof(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathfrak{c} \\
 & & \mathfrak{b} \arrow[r] \arrow[u] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\aleph_1 \arrow[r] & add(\mathcal{N}) \arrow[r] \arrow[uu] & add(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & cov(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & non(\mathcal{N}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 1: Diagrama de Cichoń para el espacio de Baire ω^ω

Es claro que bajo la Hipótesis del Continuo todos los invariantes cardinales del diagrama de Cichoń para el espacio de Baire ω^ω son iguales, mientras que el Axioma de Martin implica que todos los cardinales en el diagrama (excepto quizás $\aleph_1$) son iguales a $\mathfrak{c}$.

A continuación, presentamos algunas formas del Axioma de Martin que son, de hecho, más débiles que el propio Axioma de Martin.

Sea $(\mathbb{P}, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que $(\mathbb{P}, \leq)$ es numerable si el conjunto $\mathbb{P}$ es numerable. Además, un conjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ es llamado centrado si todo subconjunto finito de A tiene un límite superior, es decir, para cualquier conjunto finito $\{a_0, ..., a_{n-1}\} \subseteq A$ existe $p \in \mathbb{P}$ tal que para cada $i < n$, $p \leq a_i$. Notemos que el límite superior no necesariamente pertenece a A. Finalmente, $(\mathbb{P}, \leq)$ es llamado σ-centrado si $\mathbb{P}$ es unión numerable de conjuntos centrados.

Sea $\mathcal{P}$ cualquiera de las siguientes propiedades de ordenes parciales.

- c.c.c.
- σ-centrado.
- numerable.

Entonces *MA*$(\mathcal{P})$ es la siguiente afirmación.

MA$(\mathcal{P})$. Si $(\mathbb{P}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado que tiene la propiedad $\mathcal{P}$, y $\mathcal{D}$ es una familia de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ tal que $|\mathcal{D}| < \mathfrak{c}$, entonces existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico sobre $\mathbb{P}$.

Observación 3.14. Como todo conjunto parcialmente ordenado numerable es σ-centrado, y todo conjunto parcialmente ordenado σ-centrado satisface la condición de la cadena contable, se tiene que

$$MA \quad \Rightarrow \quad MA(\sigma\text{-centrado}) \quad \Rightarrow \quad MA(\text{numerable})$$

Todo el trabajo del siguiente capítulo se desarrolla usando solamente el Axioma de Martin para conjuntos parcialmente ordenados numerables, en particular algo que necesitaremos es el siguiente teorema con el cual terminamos esta sección.

Teorema 3.15. [2, Teorema 2.4.5] $cov(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ si y sólo si *MA(numerable)* se cumple.

CAPÍTULO 4

Topología de ultrafiltros en el conjunto de Cantor

En este capítulo la topología con la cual equipamos a 2^ω es la topología de los conos salvo en algunos resultados de la sección 4.3. En las secciones 4.1 y 4.2 todos los espacios topológicos que consideramos son separables y metrizables. Los ultrafiltros que consideramos a partir de este punto están sobre ω. Nos centraremos en los ultrafiltros no principales porque todo ultrafiltro principal sobre ω es homeomorfo a 2^ω tal como lo muestra el resultado 4.2.

Al identificar un subconjunto de ω con un elemento de 2^ω de la manera obvia, es decir con su función característica, podemos ver a cualquier ultrafiltro $\mathcal{U}$ como un subespacio de 2^ω. Para evitar confusiones en el trabajo posterior es de suma importancia que se recuerde la siguiente notación.

Notación 4.1. Para cualquier $x \subseteq \omega$ denotaremos por $x(n)$ a la función característica del conjunto x evaluada en el número natural n.

Proposición 4.2. Todo ultrafiltro principal $\mathcal{F} \subseteq 2^\omega$ es homeomorfo a 2^ω.

Demostración. Como $\mathcal{F}$ es principal entonces $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\{n\}} = \{S \subseteq \omega : n \in S\}$. Notar que $\mathcal{F}$ es no vacío y además es separable, metrizable y cero dimensional porque 2^ω lo es.

Veamos que $\mathcal{F}$ es cerrado y que no tiene puntos aislados.

Sea $x \in 2^\omega \setminus \mathcal{F}$ y tome $x' \in [x|n+1]$. Claramente $x'(n) = 0$, por lo cual $x' \in 2^\omega \setminus \mathcal{F}$; es decir, $[x|n+1] \subseteq 2^\omega \setminus \mathcal{F}$, y por lo tanto, $\mathcal{F}$ es un subconjunto cerrado. Más aún, como 2^ω es compacto y $\mathcal{F} \subseteq 2^\omega$ es cerrado, entonces $\mathcal{F}$ es también compacto.

Por otro lado, sea $x \in \mathcal{F}$ y considere el abierto básico $[x|m]$ para algún $m \in \omega$. Tome $x' \in [x|k]$ con $x' \neq x$ y donde $k = \max\{n+1, m\}$. Como $x'(n) = 0$ se cumple que $x' \in \mathcal{F}$, por lo cual $\mathcal{F}$ no tiene puntos aislados.

Finalmente, por el Teorema 1.76, el ultrafiltro $\mathcal{F}$ es homeomorfo a 2^ω.

■

Para explicar con detalle la motivación del presente trabajo conviene recordar algunas definiciones, lemas y teoremas bien conocidos en Teoría de Conjuntos.

Definición 4.3. Si X y Y son subconjuntos infinitos de ω entonces X y Y son casi ajenos si $X \cap Y$ es finito.

Una familia casi ajena de conjuntos es una familia de conjuntos casi ajenos por parejas.

Lema 4.4. [14, Lema 9.21] Existe una familia casi ajena de tamaño $\mathfrak{c}$ de subcojuntos de ω.

Observación 4.5. Si el lector revisa la prueba del lema anterior podrá notar que en realidad la única propiedad que se utiliza de ω en su demostración es que ω es numerable, por lo cual también existe una familia casi ajena de tamaño $\mathfrak{c}$ sobre cualquier subconjunto numerable de ω.

Notemos que si X es un conjunto infinito de cardinalidad κ entonces, como todo ultrafiltro sobre X es un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$, hay a lo más 2^{2^κ} ultrafiltros sobre X.

Definición 4.6. Sea κ un cardinal. Decimos que un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre κ es uniforme si $|x| = \kappa$ para cada $x \in \mathcal{U}$.

El siguiente teorema, aunque ligeramente más fuerte de lo que necesitamos, nos asegura que el número de ultrafiltros sobre un cardinal infinito κ es exactamente 2^{2^κ}.

Teorema 4.7. (Pospíšil). [14, Teorema 7.6] Para cada cardinal infinito κ, existen 2^{2^κ} ultrafiltros uniformes sobre κ.

De lo anterior se obtiene si X es un conjunto infinito de cardinalidad κ, entonces hay exactamente 2^{2^κ} ultrafiltros sobre X. De manera particular, hay exactamente $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros sobre ω.

Proposición 4.8. Dado un ultrafiltro no principal $\mathcal{U}$ sobre ω, existe una familia casi ajena $\mathcal{A}$ de cardinalidad $\mathfrak{c}$ sobre ω tal que $|\mathcal{U} \cap \mathcal{A}| = 1$.

Demostración. Sea $x \subseteq \omega$ infinito y con complemento infinito. Como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, entonces o bien $x \in \mathcal{U}$ o $\omega \setminus x \in \mathcal{U}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x \in \mathcal{U}$. Como $\omega \setminus x$ es numerable entonces por la Observación 4.5, existe una familia casi ajena $\mathcal{A}_0$ de cardinalidad $\mathfrak{c}$ sobre éste. Ahora, sea $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \{x\}$. Es claro que $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena de cardinalidad $\mathfrak{c}$ sobre ω y tal que $\mathcal{U} \cap \mathcal{A} = \{x\}$.

■

Teorema 4.9. (Lavrentiev). [15, Teorema 3.9] Sean X y Y espacios completamente metrizables. Sean $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ y $f : A \longrightarrow B$ un homeomorfismo. Entonces f puede ser extendido a un homeomorfismo $h : G \longrightarrow H$ donde $G \supseteq A$, $H \supseteq B$ son conjuntos G_δ de X e Y, respectivamente.

Definición 4.10. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq 2^\omega$ ultrafiltros no principales. Decimos que $\mathcal{U} \approx \mathcal{V}$ si los espacios topológicos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son homeomorfos.

Teorema 4.11. Las clases de equivalencia de ultrafiltros no principales sobre ω bajo la relación $\approx$ tienen tamaño $\mathfrak{c}$.

Demostración. Para mostrar que cada clase de equivalencia tiene tamaño a lo más $\mathfrak{c}$, si $g : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ es un homeomorfismo, entonces por el Teorema de Lavrentiev existe un homeomorfismo $f : G \longrightarrow H$ que extiende a g, donde G y H son conjuntos G_δ de 2^ω. Notar que como $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son no principales, contienen al filtro de Fréchet, el cual es un conjunto denso en 2^ω, por lo cual f es único. Ahora, como 2^ω con la topología de los conos es un espacio segundo numerable entonces a lo más existen $\mathfrak{c}$ conjuntos G_δ en 2^ω y por lo tanto, también existen a lo más $\mathfrak{c}$ homeomorfismos entre ellos. Si existieran más que $\mathfrak{c}$ ultrafiltros no principales sobre ω homeomorfos a $\mathcal{U}$, entonces por el Teorema de Lavrentiev existirían también más que $\mathfrak{c}$ homeomorfismos entre conjuntos G_δ, lo cual no es posible.

Ahora, para mostrar que cada clase de equivalencia tiene tamaño al menos $\mathfrak{c}$, sean $\mathcal{U}$, $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}$ y x como en la Proposición 4.8. Para cada $y \in \mathcal{A}_0$ sea $f_y : x \longrightarrow y$ una biyección y $\pi_y : \omega \longrightarrow \omega$ definida como

$$\pi_y(n) = \begin{cases} n & \text{si} \quad n \in \omega \setminus (x \cup y) \\ \\ f_y(n) & \text{si} \quad n \in x \\ \\ f_y^{-1}(n) & \text{si} \quad n \in y \end{cases}$$

Notar que π_y es una biyección de ω en sí mismo que intercambia a x por y y deja fijo lo demás. Definimos $F_y : 2^\omega \longrightarrow 2^\omega$ dado por

$$F_y(s)(n) = s(\pi_y(n)).$$

para cada $n \in \omega$ y $s \in 2^\omega$. Veamos que F_y es un homeomorfismo.

Sean $s_1, s_2 \in 2^\omega$ tales que $F_y(s_1) = F_y(s_2)$. Entonces para cada $n \in \omega$ se tiene que $s_1(\pi_y(n)) = s_2(\pi_y(n))$, y como π_y es una biyección de ω en sí mismo, entonces para cada $n \in \omega$ se tiene que $s_1(n) = s_2(n)$, por lo cual F_y es una función inyectiva.

Ahora sea $s_2 \in 2^\omega$. Mostremos que existe $s_1 \in 2^\omega$ tal que $F_y(s_1) = s_2$. Definimos a s_1 para cada $n \in \omega$ como sigue:

$$s_1(n) = \begin{cases} s_2(n) & \text{si} \quad n \in \omega \setminus (x \cup y) \\ \\ s_2(f_y^{-1}(n)) & \text{si} \quad n \in x \\ \\ s_2(f_y(n)) & \text{si} \quad n \in y \end{cases}$$

Se verifica que, en efecto, $F_y(s_1) = s_2$ y por lo tanto, F_y es también una función sobreyectiva.

Sea $s \in 2^\omega$ y tomemos cualquier conjunto abierto de $F_y(s)$, digamos $[F_y(s)|n_2]$ para algún $n_2 \in \omega$. Se verifica que si $n_1 = \pi_y^1(n_2)$ entonces $F_y[[s|n_1]] \subseteq [F_y(s)|n_2]$, por lo cual F_y es continua. Ahora, como 2^ω es un espacio Hausdorff, compacto y F_y es continua y biyectiva, entonces F_y es un homeomorfismo por compacidad.

Veamos que la imagen bajo F_y del ultrafiltro $\mathcal{U}$ vuelve a ser un ultrafiltro. En efecto, se tiene lo siguiente:

1. Si existe $s \in \mathcal{U}$ tal que $F_y(s) = 0$, entonces $s(\pi_y(n)) = 0$ para cada $n \in \omega$ y como π_y es una biyección de ω en sí mismo, entonces $s = 0$, es decir, $s = \varnothing$, lo cual no es posible. Por otro lado, si para cada $s \in \mathcal{U}$ se tiene que $F_y(s) \neq 1$, entonces para todo $s \in \mathcal{U}$ existe $n \in \omega$ tal que $s(\pi_y(n)) \neq 1$, y por lo tanto, al ser π_y una biyección se tiene que $\omega \notin \mathcal{U}$, lo cual tampoco es posible. Así, $\varnothing \notin F_y[\mathcal{U}]$ y $\omega \in F_y[\mathcal{U}]$.

2. Sean $t_1, t_2 \in F_y[\mathcal{U}]$. De lo anterior, existen $s_1, s_2 \in \mathcal{U}$ tales que $F_y(s_1) = t_1$ y $F_y(s_2) = t_2$. Notar que para cada $n \in \omega$ $F_y(s_1) \cap F_y(s_2)(n) = s_1 \cap s_2(\pi_y(n)) = F_y(s_1 \cap s_2)(n)$. Así $t_1 \cap t_2 \in F_y[\mathcal{U}]$.

3. Sea $t_1 \in F_y[\mathcal{U}]$ y $t_2 \supseteq t_1$. Como $t_1 \in F_y[\mathcal{U}]$ existe $s_1 \in \mathcal{U}$ tal que $F_y(s_1) = t_1$. Sean $A_0 = \{n_1, n_2, ...\} = t_2 \setminus t_1$ y $A_1 = \{m_i : n_i \in A_0 \wedge m_i = \pi_y^{-1}(n_i)\}$. Definimos a $s_2 = s_1 \cup A_1 \in 2^\omega$ y es tal que $s_1 \subseteq s_2$, por lo cual $s_2 \in \mathcal{U}$. Es claro que $F_y(s_2) = t_2$, por lo cual $t_2 \in F_y[\mathcal{U}]$.

4. Sea $s \in 2^\omega$. Claramente no es posible que $s, \omega \setminus s \in F_y[\mathcal{U}]$ por ser $F_y[\mathcal{U}]$ un filtro. Veamos que $s \in F_y[\mathcal{U}]$ o $\omega \setminus s \in F_y[\mathcal{U}]$. Notar que F_y manda complementos en complementos. En efecto, si $F_y(s) = s_1$ y $F_y(\omega \setminus s) = s_2$ entonces para cada $n \in \omega$ se tiene que:

$$s_1(n) = s(\pi_y(n)) \quad y \quad s_2(n) = \omega \setminus s(\pi_y(n)).$$

   Entonces para cada $n \in \omega$ se cumple que $s_1(n) \neq s_2(n)$, es decir, $s_2 = \omega \setminus s_1$. Al ser F_y biyectiva también se tiene que la preimagen de complementos son complementos. De lo anterior, existe $t \in 2^\omega$ tal que sin pérdida de generalidad se puede suponer que

$$F_y(t) = s \quad y \quad F_y(\omega \setminus t) = \omega \setminus s.$$

   Como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro entonces o $t \in \mathcal{U}$ o $\omega \setminus t \in \mathcal{U}$, por lo cual $s \in F_y[\mathcal{U}]$ o $\omega \setminus s \in F_y[\mathcal{U}]$.

Por lo tanto, $F_y[\mathcal{U}]$ es un ultrafiltro sobre ω. Es fácil verificar que $F_y[\mathcal{U}]$ es no principal, de lo contrario si existiera $s \in \bigcap F_y[\mathcal{U}]$ entonces $F_y^{-1}(s) \in \bigcap \mathcal{U}$ lo cual no es posible porque $\mathcal{U}$ es no principal.

Como F_y es un homeomorfismo, su restricción a $\mathcal{U}$ vuelve a ser un homeomorfismo entre $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}_y = F_y[\mathcal{U}]$. Notar que $y \in \mathcal{V}_y$, por lo tanto, si $y, z \in \mathcal{A}_0$ con $y \neq z$ entonces $\mathcal{V}_y \neq \mathcal{V}_z$, en caso contrario $y, z \in \mathcal{V}_y$, lo cual no es posible porque $y \cap z$ es finito y al ser $\mathcal{V}_y$ un ultrafiltro no principal contiene al filtro de Fréchet (o de los cofinitos) y por lo tanto, $y \cap z, \omega \setminus (y \cap z) \in \mathcal{V}_y$.

Lo anterior prueba que $\mathcal{U}$ es homeomorfo a cada ultrafiltro no principal de la forma $\mathcal{V}_y$ para cada $y \in \mathcal{A}_0$, por lo cual existen al menos $\mathfrak{c}$ ultrafiltros homeomorfos a $\mathcal{U}$.

■

Como hay $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros sobre ω y dado cualquier ultrafiltro no principal sobre ω únicamente hay $\mathfrak{c}$ ultrafiltros no principales homeomorfos a él, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.12. Hay $2^{\mathfrak{c}}$ parejas de ultrafiltros no principales sobre ω que no son homeomorfos entre sí.

Para justificar el motivo del presente trabajo es necesario saber las siguientes definiciones.

Definición 4.13. Sea X un espacio topológico.

1. X es completamente Baire (CB) si cada subespacio cerrado de X es un espacio de Baire.
2. X es denso homogéneo numerable (CDH) si para toda pareja (D, E) de subconjuntos densos numerables de X existe un homeomorfismo $f : X \longrightarrow X$ tal que $f[D] = E$.
3. Decimos que $A \subseteq X$ tiene la propiedad del conjunto perfecto (PSP) si A es numerable o contiene un conjunto perfecto.

Observación 4.14. Notar que las propiedades anteriormente descritas son, de hecho, propiedades topológicas, es decir, que se preservan bajo homeomorfismos.

Al existir tantas parejas de ultrafiltros no principales que son no homeomorfos de 2^ω como la cardinalidad del conjunto potencia de los números reales, entonces utilizando las propiedades de ser completamente Baire (CB), ser denso homogéneo numerable (CDH) y la propiedad de conjunto perfecto (PSP), podremos, bajo el Axioma de Martin para conjuntos parcialmente ordenados numerables, distinguir a los ultrafiltros no principales de 2^ω salvo homeomorfismo. De manera más precisa, si P es cualquiera de las siguientes propiedades:

- P = Ser completamente Baire.

- P = Ser denso homogéneo numerable.
- P = Cada subconjunto cerrado tiene la propiedad del conjunto perfecto.

entonces bajo *MA(numerable)* existen ultrafiltros no principales $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ sobre ω de manera que $\mathcal{U}$ tiene la propiedad P y $\mathcal{V}$ no.

4.1. Ultrafiltros completamente Baire

El siguiente teorema nos ayudará para, en un inicio, mostrar que cada ultrafiltro sobre ω es un espacio de Baire.

Proposición 4.15. (Fitzpatrick, Zhou). Sea X un espacio topológico homogéneo y que es T_1. Entonces X es un espacio de Baire si y sólo si X no es magro en sí mismo.

Demostración. Supongamos que X es un espacio de Baire. Entonces por el Teorema 1.49 todo abierto no vacío de X es de la segunda categoría. En particular, por ser X un conjunto abierto no vacío en X, es de la segunda categoría, es decir, X no es magro en sí mismo.

Recíprocamente, supongamos que X no es magro en sí mismo, y además que X no es un espacio de Baire. Entonces existe un conjunto abierto y no vacío U tal que para alguna colección numerable $\mathcal{A}$ de subconjuntos densos y abiertos en X se cumple que $(\bigcap \mathcal{A}) \cap U = \varnothing$.

Sean $x \in U$ y $y \in X$ con $y \neq x$. Como X es un espacio homogéneo, existe un homeomorfismo $f : X \longrightarrow X$ tal que $f(x) = y$. Notar además que $f[U]$ es un subconjunto abierto de X tal que $y \in f[U]$. De manera similar se tiene que $\{f[A] : A \in \mathcal{A}\}$ es una colección numerable de subconjuntos densos y abiertos en X. Veamos que:

$$(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} f[A]) \cap f[U] = \varnothing$$

Supongamos que existe $z \in (\bigcap_{A \in \mathcal{A}} f[A]) \cap f[U]$. Entonces

$$f^{-1}(z) \in (\bigcap_{A \in \mathcal{A}} f^{-1}[f[A]]) \cap f^{-1}[f[U]] = (\bigcap \mathcal{A}) \cap U = \varnothing$$

lo cual no es posible.

Por la homogeneidad del espacio, cada punto de X pertenece a un subconjunto abierto $V \subseteq X$ tal que para dicho subconjunto existe una colección numerable de subconjuntos densos y abiertos $\mathcal{A}_V$ tal que $(\bigcap \mathcal{A}_V) \cap V = \varnothing$. Sea $\mathcal{V}$ la colección conformada por los conjuntos abiertos V antes mencionados. Sea $\mathcal{C}$ una colección ajena y maximal de elementos de $\mathcal{V}$. Para cada $C \in \mathcal{C}$, podemos tomar $\{G_n(C) : n \in \omega\}$ una colección numerable de subconjuntos densos y abiertos de X tal que

$$(\bigcap_{n \in \omega} G_n(C)) \cap C = \varnothing.$$

Para cada $n \in \omega$, sea $H_n = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} (G_n \cap C)$, el cual es no vacío porque porque $G_n(C)$ y C son abiertos y G_n es denso en X. Inmediatamente se tiene que cada H_n es un subconjunto abierto por ser unión de conjuntos abiertos. Más aún, cada H_n debe ser un subconjunto denso, de lo contrario existiría un conjunto $W \subseteq X$ abierto tal que $H_n \cap W = \varnothing$, es decir,

$$(\bigcup_{C \in \mathcal{C}} [G_n(C) \cap C]) \cap W = \varnothing.$$

Pero entonces para cada $C \in \mathcal{C}$ se tendría que $G_n(C) \cap C \cap V = \varnothing$, y al ser $\mathcal{C}$ una colección ajena y maximal de elementos de $\mathcal{V}$, existiría $C' \in \mathcal{C}$ tal que $C' \cap W \neq \varnothing$ con $C' \cap W$ subconjunto abierto. Por lo tanto, $G_n(C') \cap C' \cap W \neq \varnothing$, lo cual es una contradicción porque por ser $G_n(C')$ denso en X y $C' \cap W$ abierto, su intersección no puede ser vacía.

Por último veamos que $\bigcap_{n \in \omega} H_n = \varnothing$. Supongamos que existe $x \in \bigcap_{n \in \omega} H_n$, entonces para cada $n \in \omega$ se tiene que $x \in \bigcup_{C \in \mathcal{C}} (G_n(C) \cap C)$. Sean $k, m \in \omega$ con $k \neq m$. Entonces existen $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ tales que $x \in G_k(C_1) \cap C_1$ y $x \in G_m(C_2) \cap C_2$, por lo cual $x \in C_1 \cap C_2$. Tenemos los siguientes casos:

1. Si $C_1 \neq C_2$ entonces $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$, lo cual no es posible ya que $\mathcal{C}$ es una familia ajena.
2. Si $C_1 = C_2 = C$ entonces $x \in G_k(C) \cap G_m(C) \cap C$. Como $k, m \in \omega$ eran arbitrarios con $k \neq m$, se sigue que

$$x \in (\bigcap_{n \in \omega} G_n(C)) \cap C = \varnothing$$

lo cual es una contradicción.

Por lo cual, $\bigcap_{n \in \omega} H_n = \varnothing$, y así $X = \bigcup_{n \in \omega} (X \setminus H_n)$, donde cada $X \setminus H_n$ es un conjunto nada denso porque como $\overline{(X \setminus \overline{(X \setminus H_n)})} = X$ entonces $H_n = X \setminus (X \setminus H_n) = X \setminus \overline{(X \setminus H_n)}$ es un conjunto denso en X, y así por el Corolario 1.46 se tiene que $int(\overline{X \setminus H_n}) = \varnothing$. Luego, X es magro en sí mismo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, X es un espacio de Baire. ■

Podemos definir el homeomorfismo $c : 2^\omega \longrightarrow 2^\omega$ dado por $c(x)(n) = 1 - x(n)$, para cada $x \in 2^\omega$ y $n \in \omega$. Usando c es fácil notar que todo ultrafiltro $\mathcal{U} \subseteq 2^\omega$ es homeomorfo a su ideal maximal dual $\mathcal{I} = 2^\omega \setminus \mathcal{U} = c[\mathcal{U}]$.

Corolario 4.16. Sea $\mathcal{U} \subseteq 2^\omega$ un ultrafiltro. Entonces $\mathcal{U}$ es un espacio de Baire.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U} \subseteq 2^\omega$ no es un espacio de Baire. Entonces $\mathcal{U}$ es magro en sí mismo, por lo cual existe una colección $\{A_n\}_{n \in \omega}$ de subconjuntos nada densos de $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \omega} A_n$. Como $c[A_n]$ es nada denso en $2^\omega \setminus \mathcal{U}$ y $2^\omega \setminus \mathcal{U} = \bigcup_{n \in \omega} c[A_n]$, entonces $2^\omega \setminus \mathcal{U}$ también es magro en sí mismo. Luego, como $2^\omega = (\bigcup_{n\in\omega} A_n) \cup (\bigcup_{n\in\omega} c[A_n])$ entonces 2^ω es magro en sí mismo, lo cual es una contradicción porque al ser 2^ω un espacio completamente metrizable es de la segunda categoría (no magro).

■

El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ será de suma importancia en está sección. Más precisamente, nos interesa caracterizar a los espacios completamente Baire mediante copias homeomorfas de los racionales.

Teorema 4.17. (Sierpiński) [24, Teorema 1.9.6] El espacio de los números racionales $\mathbb{Q}$ es el único (salvo homeomorfismo) espacio que es no vacío, numerable, metrizable, separable y sin puntos aislados.

Teorema 4.18. [24, Teorema 1.9.12] Sea X un espacio topológico separable y metrizable. Si X no es un espacio de Baire, entonces X contiene una subespacio cerrado homeomorfo a $\mathbb{Q}$.

El teorema anterior nos da como resultado el siguiente lema, que no solo es pieza clave de está sección, sino también de la sección 4.3.

Lema 4.19. (Hurewicz). Un espacio topológico X separable y metrizable es un espacio completamente Baire si y sólo si no contiene a la cerradura de cualquier subconjunto homeomorfo a $\mathbb{Q}$.

Demostración. Supongamos que X es un espacio completamente Baire y que existe $Y \subseteq X$ subespacio cerrado tal que Y es homeomorfo a $\mathbb{Q}$, por la Observación 1.52, $\mathbb{Q}$ también es un espacio de Baire, lo cual es una contradicción por la Observación 1.51.

Recíprocamente, supongamos que X no contiene una copia cerrada homeomorfa de $\mathbb{Q}$ y que existe $Y \subseteq X$ subespacio cerrado que no es de Baire. Entonces por el Teorema 4.18, existe $Z \subseteq Y$ subespacio cerrado homeomorfo a $\mathbb{Q}$, lo cual es una contradicción, pues Z también es subespacio cerrado de X.

■

Definición 4.20. Sea κ un cardinal. Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de ω se denomina familia independiente si para cualesquiera conjuntos distintos $X_0, ...X_n, Y_0, ..., Y_m \in \mathcal{A}$, la intersección

$$X_0 \cap ... \cap X_n \cap (\kappa \setminus Y_0) \cap ... \cap (\kappa \setminus Y_m)$$

tiene cardinalidad ω.

La noción de familia independiente será también utilizada en la sección 4.2.

Observación 4.21. Si $\mathcal{A}$ es una familia de subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$, y además $\mathcal{A}$ es una $\subseteq$-cadena, donde cada elemento de $\mathcal{A}$ es una familia independiente, entonces $\bigcup \mathcal{A}$ también es una familia independiente.

Notación 4.22.

1. Para cada $x \subseteq \omega$, denotamos $x^0 = \omega \setminus x$ y $x^1 = x$.

2. Si A es un conjunto y $\lambda \in Card$, entonces
   - $[A]^\lambda = \{B \subseteq A : |B| = \lambda\}$,
   - $[A]^{<\lambda} = \{B \subseteq A : |B| < \lambda\}$,
   - $[A]^{\leq\lambda} = [A]^{<\lambda} \cup [A]^\lambda$

Definición 4.23. Dada una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$, una palabra en $\mathcal{A}$ es una intersección de la forma

$$\bigcap_{x \in M} x^{g(x)}$$

donde $M \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ y $g : M \longrightarrow 2$.

Observación 4.24.

1. Una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ es independiente si cada palabra en $\mathcal{A}$ es infinita. Más aún, es fácil notar que una familia $\mathcal{A}$ es independiente si y sólo si cada palabra en $\mathcal{A}$ es infinita.

2. Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ es una familia independiente, entonces $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de la intersección finita fuerte.

Los conjuntos perfectos nos serán de gran utilidad y por esa misma razón es conveniente conocer cómo son los conjuntos perfectos de 2^ω.

Proposición 4.25. Un subconjunto $P \subseteq 2^\omega$ es perfecto si y sólo si es homeomorfo a 2^ω.

Demostración. Supongamos que $P \subseteq 2^\omega$ es perfecto. Como 2^ω es un espacio metrizable, separable y cero dimensional, se tiene que P también lo es. Luego, como 2^ω es compacto y P es cerrado entonces P también es compacto. Finalmente, como P no tiene puntos aislados, por el Teorema 1.76, se tiene que P es homeomorfo a 2^ω.

Recíprocamente, supongamos que existe un homeomorfismo $f : 2^\omega \longrightarrow P$. Claramente P es cerrado, además si P tuviera un punto aislado, dígamos $y \in P$, entonces $f^{-1}(y)$ sería un punto aislado de 2^ω, lo cual no es posible.

■

Nos interesa la existencia de un subconjunto perfecto P de 2^ω que sea una familia independiente. Aunque en [19] Medini y Milovich construyen dicho conjunto de tres manera distintas, nosotros optamos por únicamente tomar una de ellas, la cual es, de hecho, la construcción clásica de una familia independiente de tamaño $\mathfrak{c}$.

Lema 4.26. Existe un subconjunto perfecto P de 2^ω tal que P es una familia independiente.

Demostración. Definimos

$$\mathcal{I} = \{(\ell, F) : \ell \in \omega, F \subseteq {}^{\ell}2\}$$

Como $\mathcal{I}$ es un conjunto infinito numerable, podemos identificar $2^{\mathcal{I}}$ con 2^ω. La familia independiente deseada será una colección de subconjuntos de $\mathcal{I}$. Consideremos la función $f : 2^\omega \longrightarrow 2^{\mathcal{I}}$ dada por

$$f(x) = \{(\ell, F) : x|\ell \in F\}$$

Veamos que f es inyectiva. Sean $x_1, x_2 \in 2^\omega$ con $x_1 \neq x_2$. Tomemos $m = min\{n \in \omega : x_1|n \neq x_2|n\}$ y sea $F_1 = \{x \in 2^{<\omega} : x|m = x_1|m\}$. Por construcción se sigue que $(m, F_1) \in f(x_1)$, sin embargo $(m, F_1) \notin f(x_2)$, de lo contrario $x_2|m \in F_1$, es decir, $x_2|m = x_1|m$, lo cual no es posible. Por lo tanto, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Verifiquemos que f es también continua. Como $\mathcal{I}$ es numerable, existe una función biyectiva $g : \omega \longrightarrow \mathcal{I}$ definida como $g(n) = (\ell_n, F_n)$, además notemos que ω induce un orden en $\mathcal{I}$ mediante g, es decir, si $n_1, n_2 \in \omega$, entonces $g(n_1) = (\ell_{n_1}, F_{n_1}) \leq (\ell_{n_2}, F_{n_2}) = g(n_2)$ si y sólo si $n_1 \leq n_2$. Denotemos por $2^{<\mathcal{I}}$ a la colección de subconjuntos finitos de $\mathcal{I}$, es decir, $2^{<\mathcal{I}} = \{A \subseteq \mathcal{I} : |A| < \omega\}$. Dado $s \in 2^{<\mathcal{I}}$, un abierto básico en $2^{\mathcal{I}}$ es $[s] = \{y \in 2^{\mathcal{I}} : s \subseteq y\}$. Es sencillo verificar que $\mathcal{B} = \{[s] : s \in 2^{<\mathcal{I}}\}$ es base para alguna topología en $2^{\mathcal{I}}$.

Sea $y \in 2^{\mathcal{I}}$.

1. Es claro que $\bigcup_{s \in 2^{<\mathcal{I}}} [s] \subseteq 2^{\mathcal{I}}$. Tomemos $s = y|\{g(i) : i < m\}$ para algún $m \in \omega$. Entonces $s \in 2^{<\mathcal{I}}$ y $y \in [s]$. Así, $2^{<\mathcal{I}} \subseteq \bigcup_{s \in 2^{<\mathcal{I}}} [s]$.

2. Sean $s_1, s_2 \in 2^{<\mathcal{I}}$ tales que $y \in [s_1] \cap [s_2]$. Como $s_1, s_2 \in 2^{<\mathcal{I}}$, existen $m_1, m_2 \in \omega$ tales que $s_1 = y|\{g(i) : i < m_1\}$ y $s_2 = y|\{g(i) : i < m_2\}$. Tomemos $m = max\{m_1, m_2\}$. Entonces $s = y|\{g(i) : i < m\}$ es tal que $y \in [s] \subseteq [s_1] \cap [s_2]$.

Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es base para alguna topología en $2^{\mathcal{I}}$.

Sean $x \in 2^\omega$ y $s = f(x)|\{g(i) : i < n\}$ para algún $n \in \omega$. Notar que $[s]$ es un abierto básico arbitrario de $f(x)$. Se sigue que $f[[x|n+1]] \subseteq [f(x)|\{g(i) : i < n\}]$, donde, en efecto, $x \in [x|n+1]$. Por lo tanto f es continua. Más aún, por ser f inyectiva y continua entonces f es un encaje.

Veamos ahora que $2^{\mathcal{I}}$ es un espacio Hausdorff. Sean $y_1, y_2 \in 2^{\mathcal{I}}$ distintos, por lo cual existe $k \in \omega$ tal que $y_1|\{g(i) : i < k\} \neq y_2|\{g(i) : i < n\}$. Entonces $[y_1|\{g(i) : i < k\}] \cap [y_2|\{g(i) :$

$i < k\}] = \varnothing$, donde $y_1 \in [y_1|\{g(i) : i < k\}]$ y $y_2 \in [y_2|\{g(i) : i < k\}]$. Por lo tanto $2^{\mathcal{I}}$ es un espacio Hausdorff.

Finalmente, como 2^ω es compacto, entonces f es un homeomorfismo al restringirlo a su respectivo rango. Se sigue que $P = ran(f)$ es un conjunto perfecto por ser homeomorfo a 2^ω. Para verificar que P es una familia independiente, sean $M \in [P]^{<\omega}$ y $g : M \longrightarrow 2$. Supongamos que $M = f[\sigma]$, donde $\sigma = \{x_1, ..., x_k\}$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Elegimos ℓ lo suficientemente grande para que $x_i|\ell \neq x_j|\ell$ si $i \neq j$.

Veamos que para cada $\ell' \geq \ell$ se tiene que

$$(\ell', \{x|\ell' : x \in \sigma \text{ y } g(f(x)) = 1\}) \in \bigcap_{y \in M} y^{g(y)}$$

Supongamos lo contrario. Entonces existe $y \in M$ tal que $(\ell', \{x|\ell' : x \in \sigma \text{ y } g(f(x)) = 1\}) \notin y^{g(y)}$, por lo cual $(\ell', \{x|\ell' : x \in \sigma \text{ y } g(f(x)) = 1\}) \in y^{1-g(y)}$. Luego, como $y \in M = f[\sigma]$, existe $x_i \in \sigma$ tal que $f(x_i) = y$.

Tenemos los siguientes casos.

1. Si $g(f(x_i)) = 0$, entonces $(\ell', \{x|\ell' : x \in \sigma \text{ y } g(f(x)) = 1\}) \in y^1 = y = f(x_i)$, pero $(\ell', \{x|\ell' : x \in \sigma \text{ y } g(f(x)) = 1\}) \in f(x_i)$ si y sólo si $x_i|\ell' \in \{x|\ell' : x \in \sigma \text{ y } g(f(x)) = 1\}$, lo cual no es posible porque $g(f(x_i)) = 0$.

2. Por otro lado, si $g(f(x_i)) = 1$, entonces $(\ell', \{x|\ell' : x \in \sigma \text{ y } g(f(x)) = 1\}) \in y^0 = \omega \setminus y = \omega \setminus f(x_i)$, pero $(\ell', \{x|\ell' : x \in \sigma \text{ y } g(f(x)) = 1\}) \in f(x_i)$ porque $x_i|\ell' \in \{x|\ell' : x \in \sigma \text{ y } g(f(x)) = 1\}$, lo cual tampoco es posible.

Por lo tanto para cada $\ell' \geq \ell$ se tiene que

$$(\ell', \{x|\ell' : x \in \sigma \text{ y } g(f(x)) = 1\}) \in \bigcap_{y \in M} y^{g(y)}$$

Más aún, como la pertenencia se da para cada $\ell' \geq \ell$, se tiene que $\bigcap_{y \in M} y^{g(y)}$ es infinita, y por tanto P es una familia independiente.

■

El siguiente teorema se conoce como *"el truco del encaje cerrado de Kunen"* y es el teorema que, junto con el Lema de Hurewicz nos muestra con suma facilidad la existencia de un ultrafiltro no principal sobre ω que no es completamente Baire. Además de ello, el teorema de Kunen nos será de mucha ayuda en la sección 4.3.

Teorema 4.27. (Kunen). Sea X un espacio topológico cero dimensional, separable y metrizable. Entonces existe un ultrafiltro no principal $\mathcal{V} \subseteq 2^\omega$ que contiene un subconjunto homeomorfo a X como subconjunto cerrado.

Demostración. Por el Lema 4.26 existe un subconjunto perfecto P de 2^ω tal que P es una familia independiente. Como P es homeomorfo a 2^ω, por el Corolario 1.77 podemos ver a X como subespacio de P. Fijémonos en la familia

$$\mathcal{G} = X \cup \{\omega \setminus x : x \in P \setminus X\}$$

la cual tiene la propiedad de la intersección finita fuerte; en caso contrario existirían $x_0, ..., x_n \in X$ o $y_0, ..., y_m \in \{\omega \setminus x : x \in P \setminus X\}$ tales que pasa alguna de las siguientes afirmaciones.

1. $\left|\left(\bigcap_{i=0}^{n} x_i\right) \cap \left(\bigcap_{j=0}^{m} y_i\right)\right| < \omega,$

2. $\left|\bigcap_{i=0}^{n} x_i\right| < \omega,$

3. $\left|\bigcap_{j=0}^{m} y_i\right| < \omega.$

Pero por ser P una familia independiente con $X \subseteq P$, entonces (1) no puede pasar. Se sigue también de (1) que (2) y (3) tampoco se pueden cumplir. Tomemos $\mathcal{G} \cup Cof$ la cual tiene la propiedad de la intersección finita. En efecto, sean $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m \in \mathcal{G} \cup Cof$. Si $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m \in \mathcal{G}$ o $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m \in Cof$ es claro que la intersección de dichos elementos es no vacía. Supongamos entonces sin pérdida de generalidad que $x_i \in \mathcal{G}$ y $y_j \in Cof$ y además supongamos que

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} x_i\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{m} y_j\right) = \varnothing.$$

Entonces $\bigcap_{i=1}^{n} x_i$ está contenido en el complemento de $\bigcap_{j=1}^{m} y_j$. Como $y_j \in Cof$ y Cof es un filtro, entonces $\bigcap_{j=1}^{m} y_j \in Cof$, por lo cual $\bigcap_{i=1}^{n} x_i$ es finito, contradiciendo el hecho de que $\mathcal{G}$ tiene la propiedad de la intersección finita fuerte. De lo anterior, $\mathcal{G} \cup Cof$ tiene la propiedad de la intersección finita. Sea $\mathcal{V}$ cualquier ultrafiltro que extienda a $\mathcal{G} \cup Cof$, el cual será no principal por contener a Cof.

Notemos que $X \subseteq \mathcal{V} \cap P$. Sea $x \in (\mathcal{V} \cap P) \setminus X$, entonces $x \in \mathcal{V}$ y $x \in P \setminus X$, por lo tanto $\omega \setminus x \in \mathcal{G} \subseteq \mathcal{V}$, lo cual no es posible por ser $\mathcal{V}$ un ultrafiltro. Finalmente como $\mathcal{V} \cap P = X$, con P un subconjunto cerrado de 2^ω por ser perfecto y $\mathcal{V} \subseteq 2^\omega$ entonces X es un subespacio cerrado del ultrafiltro $\mathcal{V}$. Así, cualquier ultrafiltro no principal sobre 2^ω que contenga a $\mathcal{G} \cup Cof$ contendrá a X como conjunto cerrado.

■

Antes de mostrar la existencia de un ultrafiltro no principal $\mathcal{V} \subseteq 2^\omega$ que no es completamente Baire, recordemos que el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ con la topología euclidiana es un espacio cero dimensional.

Corolario 4.28. Existe un ultrafiltro no principal $\mathcal{V} \subseteq 2^\omega$ que no es completamente Baire.

Demostración. Por el Teorema 4.27 basta elegir a $X = \mathbb{Q}$. Entonces existe un ultrafiltro no principal $\mathcal{V} \subseteq 2^\omega$ que contiene una copia homeomorfa de $\mathbb{Q}$ como subconjunto cerrado. Por el Lema 4.19 se tiene que $\mathcal{V}$ no es completamente Baire.

■

Para mostrar que existe un ultrafiltro no principal sobre ω que es completamente Baire usaremos el Axioma de Martin para conjuntos parcialmente ordenados numerables. El siguiente lema será la pieza fundamental junto con el Lema de Hurewicz para mostrar la existencia de dicho ultrafiltro.

Lema 4.29. Asumamos *MA(numerable)*. Sea $\mathcal{F}$ una colección de subconjuntos de ω con la propiedad de la intersección finita fuerte tal que $|\mathcal{F}| < \mathfrak{c}$. Sea Q un subconjunto no vacío de 2^ω sin puntos aislados tal que $Q \subseteq \langle \mathcal{F} \rangle$ y $|Q| < \mathfrak{c}$. Entonces existe $x \in cl(Q) \setminus Q$ tal que $\mathcal{F} \cup \{x\}$ tiene la propiedad de la intersección finita fuerte.

Demostración. Consideramos el conjunto parcialmente ordenado

$$\mathbb{P} = \{s \in {}^{<\omega}2 | \exists q \in Q \wedge n \in \omega : s = q|n\}$$

con el orden natural dado por la inclusión inversa.

Para cada $\sigma = \{x_1, ..., x_k\} \in [\mathcal{F}]^{<\omega}$ y $\ell \in \omega$, definimos

$$D_{\sigma,\ell} = \{s \in \mathbb{P} | \exists i \in dom(s) \setminus \ell : s(i) = x_1(i) = ... = x_k(i) = 1\}.$$

Notar que para cada $\sigma \in [\mathcal{F}]^{<\omega}$ y $\ell \in \omega$, el conjunto $D_{\sigma,\ell} \neq \varnothing$. En efecto, sea $q \in Q$. Se tiene que q es un elemento del filtro porque $Q \subseteq \langle \mathcal{F} \rangle$. Como la base del filtro $\langle \mathcal{F} \rangle$ es precisamente $\mathcal{F}$ entonces existen $y_1, ..., y_m \in \mathcal{F}$ tales que $\bigcap_{j=1}^{m} y_j \subseteq q$. Consecuentemente $(\bigcap_{t=1}^{k} x_t) \cap (\bigcap_{j=1}^{m} y_j) \subseteq q$. Como $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita fuerte, entonces $(\bigcap_{t=1}^{k} x_t) \cap (\bigcap_{j=1}^{m} y_j)$ es infinita, y por lo tanto existe $i \in (\bigcap_{t=1}^{k} x_t) \cap (\bigcap_{j=1}^{m} y_j)$ tal que $i > \ell$. Si elegimos $s = q|i+1 \in \mathbb{P}$, claramente $i \in dom(s) \setminus \ell$ y $s(i) = x_1(i) = ... = x_k(i) = 1$. Por lo tanto, $D_{\sigma,\ell} \neq \varnothing$. Además de ello, el conjunto $D_{\sigma,\ell}$ es denso en $\mathbb{P}$ porque dado $p \in \mathbb{P}$, donde $p = q|n$ para algunos $q \in Q$, $n \in \omega$ y tomando $r = max\{\ell, n\}$ se tiene que existe $i > r$ tal que si $s = q|i+1$, entonces $s(i) = x_1(i) = ... = x_k(i) = 1$ donde $i \in dom(s) \setminus \ell$, y además por la elección de r, en efecto $s \leq p$. Por lo tanto $D_{\sigma,\ell}$ es denso en $\mathbb{P}$.

Para cada $q \in Q$, definimos

$$D_q = \{s \in \mathbb{P} | \exists i \in dom(s) : s(i) \neq q(i)\}.$$

El conjunto $D_q \neq \varnothing$ para cada $q \in Q$. En efecto, si tomamos $q' \in Q$ con $q' \neq q$ y $r = min\{j \in \omega : q(j) \neq q'(j)\}$ entonces $s = q'|r+1 \in D_q$. Además, el conjunto D_q es denso en $\mathbb{P}$. Sea $p \in \mathbb{P}$ donde $p = q'|n$ para algunos $q' \in Q$ y $n \in \omega$. Tenemos los siguientes casos:

1. Si $q' \neq q$ tomamos $r = min\{j \in \omega : q(j) \neq q'(j)\}$. Entonces $s = q'|max\{n, r\} + 1 \in D_q$ es tal que $s \leq p$.

2. Si $q' = q$, como Q no tiene puntos aislados, entonces existe $q'' \in Q$ con $q'' \neq q$ tal que $q'' \in [p] = [q'|n]$, por lo cual $r = min\{j \in \omega : q''(j) \neq q(j)\} > n_1$. Si elegimos $s = q''|r + 1$ entonces $s \in D_q$ y es tal que $s \leq p$.

En cualquier caso, se tiene que D_q es denso en $\mathbb{P}$.

Como $|\mathcal{F}| < \mathfrak{c}$ y $|Q| < \mathfrak{c}$, la colección de conjuntos densos

$$\mathcal{D} = \{D_{\sigma,\ell} : \sigma \in [\mathcal{F}]^{<\omega}, \ell \in \omega\} \cup \{D_q : q \in Q\}$$

también tiene tamaño menor que $\mathfrak{c}$.

Por lo tanto, por *MA(numerable)*, existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico, $G \subseteq \mathbb{P}$. Sea $x = \bigcup G$. Por ser G un filtro entonces se cumple que x es una función, porque dados cualesquiera $s_1, s_2 \in G$ existe $s_3 \in \mathcal{G}$ tal que $s_3 \leq s_1$ y $s_3 \leq s_2$. Dado $\ell \in \omega$ y $\sigma \in [\mathcal{F}]^{<\omega}$, como G es un filtro $\mathcal{D}$-genérico, existe $s \in G \cap D_{\sigma,\ell}$, por lo cual existe $i > \ell$ tal que $i \in dom(s)$. Entonces $\ell \in dom(s)$, y por lo tanto $\ell \in dom(x)$, así $dom(x) = \omega$, además de que es claro que $rango(x) = 2$. Por lo tanto, $x \in 2^\omega$.

Como $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita fuerte, basta ver que la intersección de cualquier subcolección finita de $\mathcal{F}$ con x es infinita para asegurar que $\mathcal{F} \cup \{x\}$ también tiene dicha propiedad.

Nuevamente sean $\sigma = \{x_1, ..., x_k\} \in [\mathcal{F}]^{<\omega}$ y $\ell \in \omega$. Veamos que existe $i \in (\bigcap_{j=1}^{k} x_j) \cap x$ tal que $i \geq \ell$. Como G es un filtro $\mathcal{D}$-genérico, existe $s \in G \cap D_{\sigma,\ell}$ con $s = x|dom(s)$. Como $s \in D_{\sigma,\ell}$, existe $i \in dom(s) \setminus \ell$ tal que $s(i) = x_1(i) = ... = x_k(i) = 1$; es decir, $i \in (\bigcap_{j=1}^{k} x_j) \cap x$ porque $i \in (\bigcap_{j=1}^{k} x_j) \cap s$. Por lo tanto $\mathcal{F} \cup \{x\}$ tiene la propiedad de la intersección finita fuerte.

Sea $n \in \omega$ y tomemos el abierto básico $[x|n]$. Veamos que $[x|n] \cap Q \neq \varnothing$. Sea $m \in \omega$ tal que $m > n$. Los conjuntos densos $D_{\sigma,\ell}$ nos aseguran que existe $s \in G$ tal que $dom(s) > m$. Entonces existe $q \in Q$ tal que $s = q|dom(s)$. Notemos que $q|n = s|n = x|n$, por lo cual $q \in [x|n]$. Así, $x \in cl(Q)$.

Ahora, si $x \in Q$ veamos que $G \cap D_x = \varnothing$. Supongamos lo contrario. Sea $s \in G \cap D_x$. Como $s \in D_x$, existe $i \in dom(s)$ tal que $s(i) \neq x(i)$, lo cual es una contradicción porque s es segmento inicial de x. Así, $G \cap D_x = \varnothing$, lo cual no es posible por ser $\mathcal{G}$ un filtro $\mathcal{D}$-genérico. Por lo tanto, $x \notin Q$.

■

Observación 4.30. El número de subconjuntos de tamaño κ de un conjunto de tamaño λ, está acotado superiormente por el conjunto de funciones de κ en λ, el cual es justamente λ^κ, por lo cual, al ser 2^ω homeomorfo a $(2^\omega)^\omega$, entonces 2^ω tiene a lo más $\mathfrak{c}$ subconjuntos homeomorfos a $\mathbb{Q}$.

Ahora, la idea es construir una sucesión creciente de conjuntos $\mathcal{F}_\xi$ para cada $\xi \in \mathfrak{c}$ que no contengan a la cerradura de ningún subconjunto homemorfo a $\mathbb{Q}$. Así, al tomar cualquier ultrafiltro no principal que contenga a la unión de los conjuntos $\mathcal{F}_\xi$, se podrá asegurar que no contiene ninguna copia homeomorfa cerrada de $\mathbb{Q}$ y entonces por el Lema de Hurewicz dicho ultrafiltro será completamente Baire.

Nota 4.31. A partir de este punto y en adelante al mencionar la palabra "*enumeración*" haremos referencia a una enumeración no necesariamente inyectiva.

Teorema 4.32. Asumamos *MA(numerable)*. Entonces existe un ultrafiltro no principal $\mathcal{U} \subseteq 2^\omega$ que es completamente Baire.

Demostración. Enumeremos como $\{Q_\eta : \eta < \mathfrak{c}\}$ a todos los subconjuntos de 2^ω que son homeomorfos a $\mathbb{Q}$. Por el Lema 4.19, es suficiente construir un ultrafiltro no principal $\mathcal{U}$ que no contenga a la cerradura de ningún conjunto Q_η.

Para cada $\xi \in \mathfrak{c}$ construiremos el conjunto $\mathcal{F}_\xi$ por recursión transfinita. Al final, bastará tomar cualquier ultrafiltro no principal $\mathcal{U}$ que extienda a $\bigcup_{\xi<\mathfrak{c}} \mathcal{F}_\xi$. Por inducción, nos aseguraremos de que se cumplan los siguientes requisitos.

1. $\mathcal{F}_\mu \subseteq \mathcal{F}_\eta$ si $\mu \leq \eta < \mathfrak{c}$.
2. $\mathcal{F}_\xi$ tiene la propiedad de la intersección finita fuerte para cada $\xi \in \mathfrak{c}$.
3. $|\mathcal{F}_\xi| < \mathfrak{c}$ para cada $\xi < \mathfrak{c}$.
4. Cualquier posible cerradura de un subconjunto homeomorfo a los racionales Q_η la evitaremos en el paso $\xi = \eta + 1$; es decir, ya sea que $\omega \setminus x \in \mathcal{F}_\xi$ para algún $x \in Q_\eta$ o existe $x \in \mathcal{F}_\xi$ tal que $x \in cl(Q_\eta) \setminus Q_\eta$.

Tomemos $\mathcal{F}_0 = Cof$, donde $Cof = \{A \subseteq \omega : |\omega \setminus A| < \omega\}$. En los pasos límite tomamos uniones.

Verifiquemos que $\mathcal{F}_0$ cumple únicamente las primeras tres condiciones ya que la cuarta condición trata sobre el conjunto $\mathcal{F}_1$.

1. Es claro que $\mathcal{F}_0$ cumple la primer condición porque se contiene a sí mismo.
2. Se tiene que $\mathcal{F}_0$ cumple la segunda condición porque si existiera una colección finita $\mathcal{A} \subseteq Cof$ con $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n$ tal que $\left|\bigcap_{i=1}^n A_i\right| < \omega$, entonces $\left|\bigcup_{i=1}^n (\omega \setminus A_i)\right| = \omega$ lo cual no es posible ya que dicha unión es finita.
3. $\mathcal{F}_0$ cumple la tercera condición porque la colección $\{F_n\}_{n\in\omega}$ donde
$$F_n = \{\omega \setminus \{x_1, ..., x_n\} : n \in \omega\}$$
es numerable y $\mathcal{F}_0 = \{F_n\}_{n\in\omega}$ entonces $|\mathcal{F}_0| < \mathfrak{c}$.

En el paso sucesor $\xi = \eta + 1$, asumimos que $\mathcal{F}_\eta$ ya está dado.

Primero asumamos que existe $x \in Q_\eta$ tal que $\mathcal{F}_\eta \cup \{\omega \setminus x\}$ tiene la propiedad de la intersección finita fuerte. En este caso, simplemente elegimos $\mathcal{F}_\xi = \mathcal{F}_\eta \cup \{\omega \setminus x\}$ y así, $\mathcal{F}_\xi$ cumple la cuarta condición, además de seguir cumpliendo la primera y la tercera.

En caso contrario; es decir, que para cualquier $x \in Q_\eta$ el conjunto $\mathcal{F}_\eta \cup \{\omega \setminus x\}$ no tenga la propiedad de la intersección finita fuerte, verifiquemos que $Q_\eta \subseteq \langle \mathcal{F}_\eta \rangle$.

En efecto, primero notemos que como $\mathcal{F}_\eta$ sí cumple la propiedad de la intersección finita fuerte y $\mathcal{F}_\eta \cup \{\omega \setminus x\}$ no, entonces existe una subcolección $\{x_i\}_{i=1}^k \subseteq \mathcal{F}_\eta$ tal que

$$\left|(\bigcap_{i=1}^k x_i) \cap (\omega \setminus x)\right| < \omega.$$

En particular, supongamos sin pérdida de generalidad que

$$(\bigcap_{i=1}^k x_i) \cap (\omega \setminus x) = \{y_1, ..., y_m\}.$$

Como $Cof = \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_\eta$, entonces existe $x_0 \in \mathcal{F}_0$ tal que $\omega \setminus x_0 = \{y_1, ..., y_m\}$. Así,

$$(\bigcap_{i=0}^k x_i) \cap (\omega \setminus x) = \varnothing$$

por lo cual $\bigcap_{i=0}^k x_i \subseteq x$, y como $\bigcap_{i=0}^k x_i \in \langle \mathcal{F}_\eta \rangle$ entonces $x \in \langle \mathcal{F}_\eta \rangle$.

Luego, aplicando el Lema 4.29 con $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\eta$ y $Q = Q_\eta$ existe $x \in cl(Q_\eta)\setminus Q_\eta$ tal que $\mathcal{F}_\eta \cup \{x\}$ tiene la propiedad de la intersección finita fuerte. En este caso, elegimos $\mathcal{F}_\xi = \mathcal{F}_\eta \cup \{x\}$ y así $\mathcal{F}_\xi$ cumple la cuarta condición, además de seguir cumpliendo la primera y la tercera.

Se verifica que $\bigcup_{\xi<\mathfrak{c}} \mathcal{F}_\xi$ tiene la propiedad de la intersección finita fuerte por la Observación 2.6 y por lo tanto, existe un ultrafiltro no principal $\mathcal{U} \subseteq 2^\omega$ que extiende a $\bigcup_{\xi<\mathfrak{c}} \mathcal{F}_\xi$.

Notar que si $\omega \setminus x \in \mathcal{F}_\xi$ para algún $x \in Q_\eta$, el ultrafiltro $\mathcal{U}$ no puede contener a $cl(Q_\eta)$, porque de lo contrario $x, \omega \setminus x \in \mathcal{U}$, lo cual no es posible. Por el contrario, en el caso donde para todo $x \in Q_\eta$, el conjunto $\mathcal{F}_\eta \cup \{\omega \setminus x\}$ no tiene la propiedad de la intersección finita fuerte, el conjunto $\mathcal{F}_\xi$ tomado, evita casi por completo a $cl(Q_\eta)$, la única excepción es el punto x dado por el Lema 4.29.

Por la construcción de los conjuntos $\mathcal{F}_\xi$ con $\xi < \mathfrak{c}$, se tiene que $\mathcal{U}$ no contiene a la cerradura de ningún subconjunto homeomorfo a $\mathbb{Q}$, y por lo tanto, $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no principal que es completamente Baire.

$\blacksquare$

4.2. Ultrafiltros densos homogéneos numerables

El conjunto de Cantor 2^ω es un espacio homogéneo. En efecto, $h : 2^\omega \longrightarrow 2^\omega$ definido como $h(z)(n) = z(n) + x(n) + y(n)$, donde $x, y, z \in 2^\omega$, $n \in \omega$ y la suma es la suma módulo 2, es un homeomorfismo tal que $h(x) = y$.

Definición 4.33. Un espacio X es fuertemente homogéneo local si tiene una base de conjuntos abiertos $\mathcal{B}$ tal que para todo $U \in \mathcal{B}$ y puntos $x, y \in U$ existe un homeomorfismo $f : X \longrightarrow X$ tal que $f(x) = y$ y $f(z) = z$ para todo $z \notin U$.

Lema 4.34. [24, Lema 1.9.4] Un espacio homogéneo cero dimensonal es fuertemente homogéneo local.

Corolario 4.35. El conjunto de Cantor 2^ω es un espacio fuertemente homogéneo local.

Teorema 4.36. [1, Teorema 5.2] Todo espacio métrico separable, completo y fuertemente homogéneo local es denso homogéneo numerable.

Corolario 4.37. El conjunto de Cantor 2^ω es un espacio denso homogéneo numerable.

El siguiente lema, junto con el Teorema de Lavrentiev que usamos al inicio del capítulo nos ayudará a mostrar la existencia de un ultrafiltro no principal sobre ω que no es denso homogéneo numerable. En la demostración del siguiente lema usaremos una técnica que invento Sierpiński en 1932 y que en la actualidad se le conoce como *"técnica de Sierpiński para matar homeomorfismos"*. Esta técnica la uso Ohkuma para construir una cadena homogénea rígida y van Douwen para construir un espacio homogéneo compacto con una medida que "sabe" qué conjuntos son homeomorfos, entre otros ejemplos.

Sea X un espacio, y sea f un homeomorfismo tal que $dom(f) \subseteq X$ y $ran(f) \subseteq X$. Supongamos que nos gustaría "matar" a f, es decir, lograr que f deje de ser un homeomorfismo. Hay varias estrategias que uno podría seguir. Primero, uno podría tratar de refinar la topología de X asegurándose de que f ya no sea continua. Entonces ciertamente matamos a f. Sin embargo, por el refinamiento de la topología, es posible que alguna otra función no deseada que era discontinua en la topología antigua, se vuelva continua en la nueva. Entonces, uno tiene que continuar el proceso de refinamiento de la topología, y no es imposible que al final de todos los asesinatos, X se quede con la topología discreta. Entonces todas las funciones muertas resucitan; es decir, vuelven a ser continuas y es entonces cuando se tiene un profundo problema. Uno encuentra las mismas dificultades cuando se intenta hacer la topología más gruesa, ya que no es imposible terminar con la topología indiscreta. Así que parece que este tipo de estrategias no deberían ser consideradas.

Otra posibilidad es restringir f a un subespacio de X, dígamos A, y esperar lo mejor. Si tanto $dom(f)$ como $ran(f)$ son subconjuntos de A, entonces no sucedió nada importante. Sin embargo, si elegimos A de tal manera que para algún $x \in dom(f) \cap A$, $f(x) \notin A$, entonces $f|A$ no es una función de A en sí mismo, así, al restringir nuestra atención a A, matamos con éxito a f. Por supuesto, si el "asesinato" es parte de un asesinato en masa; es decir, de una colección de homeomorfismos, entonces tenemos que evitar que f resucite, es decir, que logre en algún momento volver a ser un homeomorfismo. Eso es simple. Nos aseguramos de que el punto x no se elimine de A más adelante, mientras que, el punto $f(x)$ nunca se agrega a A.

Justamente hemos descrito la técnica de Sierpiński para matar homeomorfismos.

Proposición 4.38. Sea X un espacio completamente metrizable y $A \subseteq X$. Si $f : A \longrightarrow A$ es un homeomorfismo, entonces f puede ser extendido a un homeomorfismo $h : G \longrightarrow G$, donde $G \supseteq A$ es un conjunto G_δ de X.

Demostración. Por el Teorema de Lavrentiev, f puede ser extendido a un homeomorfismo $h_0 : G_0 \longrightarrow H_0$, donde G_0 y H_0 son conjuntos G_δ de X que contienen a A. Sea $G_1 = G_0 \cap H_0$, y sea $H_1 = h_0[G_1]$; claramente G_1 es un conjunto G_δ en X, más aún, es un conjunto G_δ en G_0. Como h_0 es un homeomorfismo, H_1 es también un conjunto G_δ en H_0, y por lo tanto en X. Luego, $h_1 = h_0|G_1 : G_1 \longrightarrow H_1$ es homeomorfismo que extiende a f. Ahora sean $H_2 = G_1 \cap H_1$, $G_2 = h_1^{-1}[H_2]$ y $h_2 = h_1|G_2$. Nuevamente se tiene que G_2 y H_2 son conjuntos G_δ en X que contienen a A, y h_2 es un homeomorfismo entre ellos que extiende a f. Continuando de esta manera, si $n \in \omega$ es par, $G_{n+1} = G_n \cap H_n$ y $H_{n+1} = h_n[G_{n+1}]$, mientras que si n es impar, $H_{n+1} = G_n \cap H_n$ y $G_{n+1} = h_n^{-1}[H_{n+1}]$, y $h_{n+1} = h_n|G_{n+1}$. En ambos casos los conjuntos G_n y H_n son conjuntos G_δ en X, y cada h_n es un homeomorfismo entre ellos que extiende a f. Notar que

$$H_0 \supseteq G_1 \supseteq H_2 \supseteq G_3 \supseteq H_4 \supseteq \dots$$

Sean

$$G = \bigcap_{n\in\omega} G_n = \bigcap_{n\in\omega} H_n \quad \text{y} \quad h = \bigcap_{n\in\omega} h_n = h_0|G.$$

Claramente G es un conjunto G_δ de X que contiene a A y h es un homeomorfismo de G en sí mismo, ya que

$$h[G] = \bigcap_{n\in\omega} h_n[G_n] = \bigcap_{n\in\omega} H_n = G.$$

Así, h es la extensión de f que se quería.

■

Proposición 4.39. Existe $\mathcal{D} \subseteq 2^\omega$ familia independiente densa y numerable.

Demostración. Por el Lema 4.26 existe un subconjunto perfecto $P \subseteq 2^\omega$ que es familia independiente. Como P es perfecto, entonces existe un homeomorfismo $f : P \longrightarrow 2^\omega$. Notar que como 2^ω es separable, entonces P también lo es. Sea $O \subseteq P$ un subconjunto denso y numerable. Al ser P una familia independiente, entonces O también lo es. De lo anterior, $\mathcal{D} = f[O]$ es un subconjunto denso y numerable de 2^ω.

Veamos que $\mathcal{D}$ es una familia independiente. Sean $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m \in \mathcal{D}$ distintos y supongamos que

$$H = \left(\bigcap_{i=1}^{n} x_i\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{m} (\omega \setminus y_j)\right) = \{d_1, ..., d_k\}$$

Entonces $f^{-1}[H] = \{f^{-1}(a_1), ..., f^{-1}(a_k)\}$. Notar que como $f^{-1}(x_i), f^{-1}(\omega \setminus y_j) \in P$ y además son distintos, entonces al ser P una familia independiente $|f^{-1}[H]| = \omega$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{D}$ es una familia independiente.

■

Notar que cualquier familia $\mathcal{D}$ que sea independiente, densa y numerable de 2^ω no tiene puntos aislados por el simple hecho de ser densa. Por el Teorema 4.17, la familia $\mathcal{D}$ es homeomorfa a $\mathbb{Q}$, y por supuesto que al conjunto de los números racionales se le pueden extraer dos subconjuntos densos, numerables y ajenos. De lo anterior, también existen dos subconjuntos D_1 y D_2 de $\mathcal{D}$ que son densos, numerables y ajenos.

Lema 4.40. Asumamos *MA(numerable)*. Sea $\mathcal{D}$ una familia independiente numerable que es densa en 2^ω. Sean D_1 y D_2 subconjuntos densos, numerables y ajenos de $\mathcal{D}$. Entonces existe $\mathcal{A} \subseteq 2^\omega$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{A}$ es una familia independiente.

2. $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$.

3. Si $G \supseteq \mathcal{D}$ es un subconjunto G_δ de 2^ω y $f : G \longrightarrow G$ es un homeomorfismo tal que $f[D_1] = D_2$ entonces existe $x \in G$ tal que $\{x, \omega \setminus f(x)\} \subseteq \mathcal{A}$.

Demostración. Consideremos los homeomorfismos

$$f_\eta : G_\eta \longrightarrow G_\eta$$

tales que $f_\eta[D_1] = D_2$ y $G_\eta \supseteq \mathcal{D}$ es un conjunto G_δ de 2^ω.

Notar que dado cualquier conjunto $G \supseteq \mathcal{D}$ que sea G_δ en 2^ω únicamente existe un homeomorfismo $f : G \longrightarrow G$ tal que $f[D_1] = D_2$ porque D_1 es un conjunto denso en G. Como 2^ω tiene a lo más $\mathfrak{c}$ conjuntos G_δ, entonces a lo más pueden existir $\mathfrak{c}$ homeomorfismos de los anteriormente mencionados.

Enumeremos como $\{f_\eta : \eta < \mathfrak{c}\}$ todos los homeomorfismos mencionados anteriormente. Para cada $\xi < \mathfrak{c}$, construiremos el conjunto $\mathcal{A}_\xi$ por recursión transfinita. Al final, sea $\mathcal{A} = \bigcup_{\xi<\mathfrak{c}} \mathcal{A}_\xi$. Por inducción, nos aseguraremos de que se cumplan los siguientes requisitos.

1. $A_\mu \subseteq A_\eta$ si $\mu \leq \eta < \mathfrak{c}$,

2. A_ξ es una familia independiente para cada $\xi < \mathfrak{c}$,

3. $|A_\xi| < \mathfrak{c}$ para cada $\xi < \mathfrak{c}$,

4. El homeomorfismo f_η se usa en el paso $\xi = \eta + 1$, esto es, que exista $x \in G_\eta$ tal que $\{x, \omega \setminus f_\eta(x)\} \subseteq \mathcal{A}_\xi$.

Comenzamos tomando $\mathcal{A}_0 = \mathcal{D}$, y tomamos uniones en los pasos límite. Es claro que $\mathcal{A}_0$ cumple las primeras tres condiciones.

En el paso sucesor $\xi = \eta + 1$, asumamos que A_η ya está dado. Enumeramos como $\{w_\alpha : \alpha < \kappa\}$ a todas las palabras en $\mathcal{A}_\eta$, donde $\kappa = |\mathcal{A}_\eta| < \mathfrak{c}$. Veamos que para cualesquiera $n \in \omega$, $\alpha < \kappa$, y $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in 2$, el conjunto

$$W_{\alpha,n.\varepsilon_1,\varepsilon_2} = \{x \in G_\eta : |w_\alpha \cap x^{\varepsilon_1} \cap f_\eta(x)^{\varepsilon_2}| \geq n\}$$

es abierto en G_η. En efecto, sea $m \in \omega$ tal que la intersección en el nivel m de w_α, x^{ε_1} y $f_\eta(x)^{\varepsilon_2}$ sea mayor o igual a n y tomemos el abierto básico $[x|m]$. Sea $y \in [x|m]$, por lo cual $y|m = x|m$. Entonces $|w_\alpha \cap y^{\varepsilon_1} \cap f_\eta(y)^{\varepsilon_2}| \geq n$. Por lo tanto, $[x|m] \subseteq W_{\alpha,n.\varepsilon_1,\varepsilon_2}$. Así, $W_{\alpha,n.\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ es abierto en G_η.

Ahora veamos que $D_1 \setminus (F \cup f_\eta^{-1}[F]) \subseteq W_{\alpha,n.\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, donde F está conformado por los elementos de $\mathcal{A}_\eta$ que forman a la palabra w_α.

Sea $x \in D_1 \setminus (F \cup f_\eta^{-1}[F])$. Como $x \in D_1$ y $x \notin F$ entonces la intersección $w_\alpha \cap x^{\varepsilon_1}$ es infinita porque su intersección sigue siendo una palabra en A_η. De manera análoga, como

$x \in D_1$ y $x \notin f_\eta^{-1}[F]$, entonces $f_\eta(x) \notin F$, por lo cual la intersección $w_\alpha \cap x^{\varepsilon_1} \cap f_\eta(x)^{\varepsilon_2}$ sigue siendo infinta por seguir siendo una palabra en $\mathcal{A}_\eta$. Por lo tanto, $D_1 \setminus (F \cup f_\eta^{-1}[F]) \subseteq W_{\alpha,n.\varepsilon_1,\varepsilon_2}$.

Como la familia $\mathcal{D}$ es densa en 2^ω y D_1 es un subconjunto denso de $\mathcal{D}$, entonces D_1 también es denso en 2^ω. Luego, como $G_\eta \supseteq \mathcal{D}$, entonces D_1 también es denso en G_η. Finalmente, como $F \in [\mathcal{A}_\eta]^{<\omega}$ entonces el conjunto $F \cup f_\eta^{-1}[F]$ es finito, por lo cual $D_1 \setminus (F \cup f_\eta^{-1}[F])$ sigue siendo denso en G_η. Así, $W_{\alpha,n.\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ es también denso en G_η.

Por ser $W_{\alpha,n.\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ denso y abierto en G_η, entonces es comagro en G_η y por lo tanto, también lo es en 2^ω. Como *MA(numerable)* es equivalente a que $Cov(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ (ver Teorema 3.15) y tenemos menos que $\mathfrak{c}$ conjuntos $W_{\alpha,n.\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ porque $\kappa < \mathfrak{c}$, entonces

$$\bigcup_{\alpha<\kappa} (2^\omega \setminus W_{\alpha,n.\varepsilon_1,\varepsilon_2}) \subsetneq 2^\omega$$

entonces

$$W = \bigcap_{\alpha<\kappa} W_{\alpha,n.\varepsilon_1,\varepsilon_2} \neq \varnothing.$$

Notar que $W \subseteq G_\eta$. Sea $x \in W$ y elegimos $\mathcal{A}_\xi = \mathcal{A}_\eta \cup \{x, \omega \setminus f_\eta(x)\}$. Es claro que $\mathcal{A}_\xi$ cumple las condiciones (1), (3) y (4). Resta ver que $\mathcal{A}_\xi$ es también una familia independiente. Si $\mathcal{A}_\xi$ no fuese una familia independiente, como $\mathcal{A}_\eta$ sí lo es, entonces existirían $n, m \in \omega$ tales que si $x_0, ..., x_n, y_0, ..., y_m \in \mathcal{A}_\eta$ son conjuntos distintos, la intersección

$$\left[\left(\bigcap_{i=0}^{n} x_i\right) \cap \left(\bigcap_{j=0}^{m} (\omega \setminus y_j)\right)\right] \cap [x^{\varepsilon_1} \cap f_\eta(x)^{\varepsilon_2}]$$

es finita, digamos que tiene tamaño ℓ_1. Como

$$w_\beta = \left(\bigcap_{i=0}^{n} x_i\right) \cap \left(\bigcap_{j=0}^{m} (\omega \setminus y_j)\right)$$

es una palabra en $\mathcal{A}_\eta$ y como $x \in W$, entonces $x \in W_{\beta,\ell_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ para cualesquiera $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in 2$ y con $\ell_2 > \ell_1$. Entonces

$$\left|\left[\left(\bigcap_{i=0}^{n} x_i\right) \cap \left(\bigcap_{j=0}^{m} (\omega \setminus y_j)\right)\right] \cap [x^{\varepsilon_1} \cap f_\eta(x)^{\varepsilon_2}]\right| > \ell_1$$

lo cual no es posible. Por lo tanto, A_ξ es una familia independiente.

Sea $\mathcal{A} = \bigcup_{\xi<\mathfrak{c}} \mathcal{A}_\xi$. Se verifica que $\mathcal{A}$ es una familia independiente por la Observación 4.21.

■

Teorema 4.41. Asumamos *MA(numerable)*. Entonces existe un ultrafiltro no principal $\mathcal{V} \subseteq 2^\omega$ que no es denso homogéneo numerable.

Demostración. Sean D_1, D_2 y $\mathcal{A}$ como en el Lema 4.40. Notar que por el mismo argumento usado en el Teorema 4.27, la unión $\mathcal{A} \cup Cof$ tiene la propiedad de la intersección finita, por lo cual, si $\mathcal{V} \subseteq 2^\omega$ es un ultrafiltro que extiende a $\mathcal{A} \cup Cof$ entonces dicho ultrafiltro es no principal. Supongamos que $\mathcal{V}$ es denso homogéneo numerable, por lo cual existe $g : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ un homeomorfismo tal que $f[D_1] = D_2$. Por la Proposición 4.38 es posible extender g a un homeomorfismo $f : G \longrightarrow G$, donde G es un subconjunto G_δ de 2^ω. Por el Lema 4.40, existe $x \in G$ tal que $\{x, \omega \setminus f(x)\} \subseteq \mathcal{A}$, entonces $f(x) = g(x) \in \mathcal{V}$, pero también $\omega \setminus f(x) = \omega \setminus g(x) \in \mathcal{V}$, lo cual no es posible por ser $\mathcal{V}$ un ultrafiltro. Por lo tanto, $\mathcal{V}$ no es denso homogéneo numerable.

■

En la siguiente parte de esta sección los grupos topológicos serán de suma importancia para mostrar la existencia de un ultrafiltro no principal que sí es denso homogéneo numerable.

Definición 4.42. Sea $(G, *)$ un grupo algebraico (no necesariamente abeliano). Sea $\mathcal{T}$ una topología para el conjunto G. La terna ordenada $(G, *, \mathcal{T})$ es un grupo topológico si las funciones $f : G \times G \longrightarrow G$ y $g : G \longrightarrow G$ definidas como $f(x, y) = x * y$ y $g(x) = x^{-1}$, son funciones continuas (en $G \times G$ se considera la topología producto).

El conjunto 2^ω con la operación suma módulo 2 (o la diferencia simétrica equivalentemente) y la topología de los conos, es un grupo topológico. En efecto, la cerradura y asociatividad son inmediatas, el elemento identidad es el vacío y si $x \in 2^\omega$ entonces él es su mismo inverso. De ahí se sigue que la función g es la identidad, la cual es continua. Luego, si $(x, y) \in 2^\omega \times 2^\omega$ y $V \subseteq 2^\omega$ es un conjunto abierto tal que $f(x, y) \in V$, sea $n \in \omega$ tal que $[f(x, y)|n] \subseteq V$. Se verifica que $f[[x|n] \times [y|n]] \subseteq V$, donde $(x, y) \in [x|n] \times [y|n]$, por lo cual f es también continua. Más aún, 2^ω con la operación suma módulo 2 y la topología de los conos es un grupo abeliano topológico.

Aunque nuestro interés son los ultrafiltros en 2^ω, trabajaremos en esta parte con ideales maximales de 2^ω por "algunas" cuestiones de comodidad. No hay que perder de vista que ahora nuestro propósito es mostrar la existencia de un ultrafiltro no principal sobre ω que sea CDH, pero como cada ultrafiltro es homeomorfo a su ideal maximal dual mediante el homeomorfismo c que definimos en la sección 4.2 y el ser CDH es una propiedad topológica, es decir, que se conserva bajo homeomorfismos, entonces bastará mostrar la existencia de un ideal maximal no principal sobre ω que sea CDH para tener nuestro resultado.

Observación 4.43. Si $\mathcal{I}$ es un ideal maximal de 2^ω entonces $\mathcal{I}$ es subgrupo topológico de 2^ω. En efecto, si $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$, como $x_1 + x_2 \subseteq x_1 \cup x_2$, se tienen que $x_1 + x_2 \in \mathcal{I}$. Por otro lado, si $x \in \mathcal{I}$, trivialmente se tiene que $x^{-1} \in \mathcal{I}$.

En general, cualquier ideal del conjunto de Cantor es un subgrupo topológico. Además como todo ideal maximal $\mathcal{I}$ es subgrupo topológico y $\mathcal{I}$ es homeomorfo a su respectivo ultrafiltro $2^\omega \setminus \mathcal{I}$, entonces $2^\omega \setminus \mathcal{I}$ también es un subgrupo topológico del conjunto de Cantor.

Proposición 4.44. Sea $f : 2^\omega \longrightarrow 2^\omega$ una función y $\mathcal{I} \subsetneq 2^\omega$ un ideal maximal. Si $x \in 2^\omega$, entonces $x + f(x) = \omega \setminus x + \omega \setminus f(x)$. En efecto, de lo contrario existiría $i \in \omega$ tal que $(x + f(x))(i) \neq (\omega \setminus x + \omega \setminus f(x))(i)$. Tenemos los siguientes casos:

1. Si $(x + f(x))(i) = 0$, entonces $(\omega \setminus x + \omega \setminus f(x))(i) = 1$. Si $i \in x$ y $i \in f(x)$, entonces $i \notin \omega \setminus x$ y $i \notin \omega \setminus f(x)$, por lo cual $(\omega \setminus x + \omega \setminus f(x))(i) = 0$, lo cual no es posible. Por otro lado, si $i \notin x$ y $i \notin f(x)$, entonces $i \in \omega \setminus x$ y $i \in \omega \setminus f(x)$, por lo cual $(\omega \setminus x + \omega \setminus f(x))(i) = 0$, lo cual tampoco es posible. Por lo tanto, $x + f(x) = \omega \setminus x + \omega \setminus f(x)$.

2. Por un argumento exactamente similar al anterior se verifica que si $(\omega \setminus x + \omega \setminus f(x))(i) = 0$, entonces $(x + f(x))(i) = 1$ es falso.

Por lo tanto, $x + f(x) = \omega \setminus x + \omega \setminus f(x)$.

Lema 4.45. Sea $f : 2^\omega \to 2^\omega$ un homeomorfismo. Tomemos un ideal maximal no principal $\mathcal{I} \subsetneq 2^\omega$ y un subconjunto denso numerable D de $\mathcal{I}$. Entonces f se restringe a un homeomorfismo de $\mathcal{I}$ si y sólo si $cl(\{d + f(d) : d \in D\} \subseteq \mathcal{I}$.

Demostración. Asumamos primero que f se restringe a un homeomorfismo de $\mathcal{I}$. Veamos que la función $g : 2^\omega \longrightarrow 2^\omega$ definida por $g(x) = x + f(x)$ tiene rango contenido en $\mathcal{I}$. Si $x \in \mathcal{I}$, entonces también $f(x) \in \mathcal{I}$, por lo cual $g(x) \in \mathcal{I}$, porque $\mathcal{I}$ es subgrupo topológico de 2^ω. Por otro lado, notemos primero que si $x \in 2^\omega \setminus \mathcal{I}$ entonces $f(x) \in 2^\omega \setminus \mathcal{I}$, de lo contrario $x \in \mathcal{I}$, luego $\omega \setminus x, \omega \setminus f(x) \in \mathcal{I}$ por ser $2^\omega \setminus \mathcal{I}$ un ultrafiltro, y además, por la Observación 4.44, $x + f(x) = \omega \setminus x + \omega \setminus f(x) \in \mathcal{I}$. Como 2^ω es un grupo topológico y además es compacto, entonces g es continua, así $g[2^\omega] = \{x + f(x) : x \in 2^\omega\}$ también es compacto (en particular cerrado). Por lo tanto, $cl(\{d + f(d) : d \in D\}) \subseteq g[2^\omega] \subseteq \mathcal{I}$.

Recíprocamente, supongamos que $cl(\{d + f(d) : d \in D\}) \subseteq \mathcal{I}$. Como $f|_\mathcal{I} : \mathcal{I} \longrightarrow f[\mathcal{I}]$ es un homeomorfismo, sólo resta probar que $f[\mathcal{I}] = \mathcal{I}$. Como $\mathcal{I}$ es un ideal maximal no principal entonces $Fin \subseteq \mathcal{I}$, el cual además es un subconjunto denso en 2^ω, y al ser D denso en $\mathcal{I}$ se tiene que

$$2^\omega = cl(Fin) = cl(\mathcal{I}) = cl(D)$$

Así, para cualquier $x \in 2^\omega$ existe una sucesión $\{d_n\}_{n\in\omega}$ de elementos de D tal que $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = x$. Por continuidad,

$$x + f(x) = \lim_{n\to\infty} (d_n + f(d_n)) \in \mathcal{I}$$

Notar que si $a, b \in 2^\omega$ son tales que $a + b \in \mathcal{I}$, entonces $a, b \in \mathcal{I}$ o $a, b \in 2^\omega \setminus \mathcal{I}$. En efecto, supongamos sin pérdida de generalidad que $a \in \mathcal{I}$ y $b \in 2^\omega \setminus \mathcal{I}$, por lo cual, $\omega \setminus b \in \mathcal{I}$ y $\omega \setminus a \in 2^\omega \setminus \mathcal{I}$. Como $a + b, \omega \setminus b \in \mathcal{I}$ se tiene que

$$(a + b) + \omega \setminus b = a + (b + \omega \setminus b) = a + \omega = \omega \setminus a \in \mathcal{I}$$

lo cual es una contradicción.

De lo anterior se tiene que $f[\mathcal{I}] = \mathcal{I}$ y así, f se restringe a un homeomorfismo de $\mathcal{I}$.

■

Notación 4.46. Para cualquier $x \in 2^\omega$ denotamos por $x \downarrow$ al conjunto $\{y \in 2^\omega : y \subseteq x\}$.

Notar que para cada $x \in 2^\omega$ el conjunto $x \downarrow$ es cerrado. En efecto, veamos que $2^\omega \setminus x \downarrow$ es un conjunto abierto. Sea $y \in 2^\omega \setminus x \downarrow$, es decir, $y \nsubseteq x$. De lo anterior existe $n \in \omega$ tal que $y(n) = 1$ y $x(n) = 0$. Sea $y' \in [y|n]$; claramente $y'(n) = 1$, por lo cual $y' \notin x \downarrow$, y por lo tanto $[y|n] \subseteq 2^\omega \setminus x \downarrow$, es decir, $2^\omega \setminus x \downarrow$ es un conjunto abierto.

El siguiente lema será la pieza fundamental junto con el Lema 4.45 para mostrar la existencia de un ultrafiltro no principal sobre ω que es denso homogéneo numerable.

Lema 4.47. Asumamos *MA(numerable)*. Sea $\mathcal{I} \subseteq 2^\omega$ una colección de subconjuntos de ω con la propiedad de la unión finita y asumamos que $|\mathcal{I}| < \mathfrak{c}$. Sean D y E dos subconjuntos densos y numerables de 2^ω tales que $D \cup E \subseteq \langle \mathcal{I} \rangle$. Entonces existen un homeomorfismo $f : 2^\omega \to 2^\omega$ y $x \in 2^\omega$ tales que $f[D] = E$, $\mathcal{I} \cup \{x\}$ tiene la propiedad de la unión finita y $\{d + f(d) : d \in D\} \subseteq x \downarrow$.

Demostración. Consideremos el conjunto parcialmente ordenado numerable $\mathbb{P}$ que consiste de todas las tripletas $p = (s, g, \pi) = (s_p, g_p, \pi_p)$ tales que, para algún $n_p \in \omega$, las siguientes condiciones se satisfacen.

- $s : n_p \longrightarrow 2$.
- g es una biyección entre los subconjuntos finitos D_p y E_p de D y E, respectivamente.
- π es una permutación de ${}^{n_p}2$.

Además requerimos que se cumplan las siguientes condiciones de compatibilidad.

1. $(t + \pi(t))(i) = 1$ implica que $s(i) = 1$ para cada $t \in {}^{n_p}2$.
2. $\pi(d|n_p) = g(d)|n_p$ para cada $d \in dom(g)$.

Ordenemos a $\mathbb{P}$ declarando que $q \leq p$ si las siguientes condiciones se satisfacen.

- $s_q \supseteq s_p$.
- $g_q \supseteq g_p$.
- $\pi_q(t)|n_p = \pi_p(t|n_p)$ para todo $t \in {}^{n_q}2$.

Notar que la última condición de orden tiene sentido solo si $q \leq p$ implica que $n_p \leq n_q$.

Para cada $d \in D$, definimos

$$D_d^{dom} = \{p \in \mathbb{P} : d \in dom(g_p)\}.$$

Dado $p \in \mathbb{P}$ y $d \in D \setminus dom(g_p)$, simplemente elegimos $e \in E \setminus ran(g_p)$ tal que $e|n_p = \pi_p(d|n_p)$. Notemos que la elección del elemento $e \in E \setminus ran(g_p)$ tal que $e|n_p = \pi_p(d|n_p)$ es posible porque $d|n_p \in {}^{n_p}2$, por lo cual le podemos aplicar la permutación π_p, a continuación nos tomamos el abierto básico $[\pi_p(d|n_p)]$, y como E es denso y numerable en 2^ω y E_p es finito, existe $e \in E \setminus E_p = E \setminus ran(g_p)$ tal que $e \in [\pi_p(d|n_p)]$.

Esta elección asegura que $q = (s_p, g_p \cup \{(d,e)\}, \pi_p) \in \mathbb{P}$. Además, es claro que $q \leq p$, por lo cual cada D_d^{dom} es denso en $\mathbb{P}$.

Para cada $e \in E$, definimos

$$D_e^{ran} = \{p \in \mathbb{P} : e \in ran(g_p)\}.$$

De manera análoga se muestra que cada D_e^{ran} es denso en $\mathbb{P}$.

Para cada $\sigma = \{x_1, ..., x_k\} \in [\mathcal{I}]^{<\omega}$ y $\ell \in \omega$, definimos

$$D_{\sigma,\ell} = \{p \in \mathbb{P} | \exists i \in n_p \setminus \ell : s_p(i) = x_1(i) = ... = x_k(i) = 0\}.$$

Veamos que cada $D_{\sigma,\ell}$ es denso en $\mathbb{P}$.

Sean $\sigma = \{x_1, ..., x_k\} \in [\mathcal{I}]^{<\omega}$ y $\ell \in \omega$. Sea $p = (s, g, \pi) \in \mathbb{P}$. Encontremos $n' \geq \ell, n_p$ tal que las siguientes condiciones se cumplan.

- Todos los $d|n'$ para $d \in dom(g)$ son distintos.
- Todos los $e|n'$ para $e \in ran(g)$ son distintos.
- $x_1(n') = ... = x_k(n') = d(n') = e(n') = 0$ para cada $d \in dom(g)$ y $e \in ran(g)$.

Notemos que como $\sigma \subseteq \mathcal{I}$ y $D \cup E \subseteq \langle \mathcal{I} \rangle$, entonces $\sigma \cup dom(g) \cup ran(g) \subseteq \langle \mathcal{I} \rangle$. Sea

$$G = \Big(\bigcap_{d \in dom(g)} (\omega \setminus d)\Big) \cap \Big(\bigcap_{e \in ran(g)} (\omega \setminus e)\Big) \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{k} (\omega \setminus x_i)\Big)$$

Como $\mathcal{I}$ tiene la propiedad de la unión finita, entonces $\langle \mathcal{I} \rangle$ también la tiene, por lo tanto $|G| \geq \omega$. Luego, como $dom(g)$ y $ran(g)$ son finitos y G es infinito, existe $n' \in G$ con $n' \geq \ell, n_p$ tal que se cumplen las condiciones anteriormente requeridas.

Podemos elegir una permutación π' de ${}^{n'}2$ tal que $\pi'(d|n') = g(d)|n'$ para cada $d \in dom(g)$ y $\pi'(t)|n_p = \pi(t|n_p)$ para cada $t \in {}^{n'}2$. Extendemos s a $s' : n' \longrightarrow 2$ estableciendo que $s'(i) = 1$ para cada $i \in [n_p, n')$. Por la elección de π' y la extensión de s a s' se tiene que $p' = (s', g, \pi') \in \mathbb{P}$, y además $p' \leq p$.

Ahora, sea π'' la permutación de ${}^{n'+1}2$ obtenida de establecer que

$$\pi''(t) = \pi'(t|n')^\frown t(n'),$$

para cada $t \in {}^{n'+1}2$. Extendemos s' a $s'' : n' + 1 \longrightarrow 2$ estableciendo que $s''(n') = 0$. Nuevamente por la elección de π'' y la extensión de s' a s'' se tiene que $p'' = (s'', g, \pi'') \in \mathbb{P}$, y además $p'' \leq p'$. De hecho, $p'' = (s'', g, \pi'') \in D_{\sigma,\ell}$, porque $s_{p''}(n') = 0$ y $x_1(n') = ... = x_k(n') = 0$, donde $n' \in n' + 1$ y $n' > \ell$. Así, cada $D_{\sigma,\ell}$ es denso en $\mathbb{P}$.

Como $|\mathcal{I}| < \mathfrak{c}$, la colección de subconjuntos densos

$$\mathcal{D} = \{D_{\sigma,\ell} : \sigma \in [\mathcal{I}]^{<\omega}, \ell \in \omega\} \cup \{D_d^{dom} : d \in D\} \cup \{D_e^{ran} : e \in E\}$$

también tiene tamaño menor que $\mathfrak{c}$.

Por lo tanto, por *MA(numerable)*, existe un ultrafiltro $\mathcal{D}$-genérico $G \subseteq \mathbb{P}$. Definimos $x = \bigcup\{s_p : p \in G\}$, y $f : 2^\omega \longrightarrow 2^\omega$ para cada $x \in 2^\omega$ y $i \in \omega$ como $f(x)(i) = \pi_p(x|n_p)(i)$ donde $p \in G$ y es tal que $i \in n_p$.

Veamos que f es inyectiva. Supongamos que $f(x_1) = f(x_2)$ con $x_1, x_2 \in 2^\omega$. Sea $i \in \omega$. Entonces existen $p_1, p_2 \in G$ tales que $i \in n_{p_1}$ y $i \in n_{p_2}$. Entonces

$$f(x_1)(i) = \pi_{p_1}(x_1|n_{p_1})(i) = \pi_{p_2}(x_2|n_{p_2})(i) = f(x_2)(i).$$

Como G es un filtro, entonces existe $p_3 \in G$ tal que $p_3 \leq p_1$ y $p_3 \leq p_2$. Por la última condición del orden en $\mathbb{P}$ tenemos que $\pi_{p_3}(x_1|n_{p_3})|n_{p_1} = \pi_{p_1}((x_1|n_{p_3})|n_{p_1}) = \pi_{p_1}(x_1|n_{p_1})$ y $\pi_{p_3}(x_2|n_{p_3})|n_{p_2} = \pi_{p_2}((x_2|n_{p_3})|n_{p_2}) = \pi_{p_2}(x_2|n_{p_2})$ porque $n_{p_1} \leq n_{p_3}$ y $n_{p_2} \leq n_{p_3}$. Entonces

$$f(x_1)(i) = \pi_{p_3}(x_1|n_{p_3})|n_{p_1}(i) = \pi_{p_3}(x_2|n_{p_3})|n_{p_2}(i) = f(x_2)(i).$$

En particular, como $i \in n_{p_j}$ para $j \in \{1, 2, 3\}$, y $n_{p_1} \leq n_{p_3}$ y $n_{p_2} \leq n_{p_3}$, entonces

$$f(x_1)(i) = \pi_3(x_1|n_{p_3})(i) = \pi_3(x_2|n_{p_3})(i) = f(x_2)(i).$$

Como las permutaciones π_p son en particular funciones inyectivas, y para cualquier $i \in \omega$ siempre existe un elemento de G que hace posible la igualdad anterior, entonces $x_1 = x_2$, y por lo tanto, f es una función inyectiva.

Veamos que f es sobreyectiva. Sea $y \in 2^\omega$. Como cada permutación es, en particular una función sobreyectiva, definimos para cada $i \in \omega$ a x como $x(i) = \pi_{p_1}^{-1}(y|n_{p_1})(i)$ para algún $p \in G$ tal que $i \in n_{p_1}$. Veamos que $f(x) = y$, mostrando que para cada $i \in \omega$ se tiene que $f(x)(i) = y(i)$. En efecto, sea $i \in \omega$. Aplicando f a x tenemos que

$$f(x)(i) = \pi_{p_2}(x|n_{p_2})(i),$$

para algún $p_2 \in G$ tal que $i \in n_{p_2}$. Por ser G un filtro, existe $p_3 \in G$ tal que $p_3 \leq p_1$ y $p_3 \leq p_2$. Por la última condición del orden de $\mathbb{P}$ se tiene que $\pi_{p_3}(x|n_{p_3})|n_{p_1} = \pi_{p_1}((x|n_{p_3})|n_{p_1}) = \pi_{p_1}(x|n_{p_1})$ y $\pi_{p_3}(x|n_{p_3})|n_{p_2} = \pi_{p_2}((x|n_{p_3})|n_{p_2}) = \pi_{p_2}(x|n_{p_2})$. Así, como $i \in n_{p_j}$ para $j \in \{1, 2, 3\}$, y $n_{p_1} \leq n_{p_3}$ y $n_{p_2} \leq n_{p_3}$, entonces

$$\begin{aligned}
f(x)(i) &= \pi_{p_2}(x|n_{p_2})(i) \\
&= \pi_{p_3}(x|n_{p_3})|n_{p_2}(i) \\
&= \pi_{p_3}(x|n_{p_3})(i) \\
&= \pi_{p_3}(x|n_{p_3})|n_{p_1}(i) \\
&= \pi_{p_1}(x|n_{p_1})(i) \\
&= \pi_{p_1}(\pi_{p_1}^{-1}(y|n_{p_1}))(i) \\
&= y|n_{p_1}(i) \\
&= y(i).
\end{aligned}$$

Notar que la antepenúltima igualdad se da porque x en i está definido como $\pi_{p_1}^{-1}(y|n_{p_1})$. Por lo tanto, f es sobreyectiva.

Ahora, probemos la continuidad de f. Sea $x \in 2^\omega$ y tomemos cualquier conjunto abierto básico de $f(x)$, dígamos $[f(x)|n]$ para algún $n \in \omega$. Veamos que $f[[x|n]] \subseteq [f(x)|n]$. Sea $y \in [x|n]$. Notemos que $f(y) \in [f(x)|n]$ si y sólo si $f(y)(i) = f(x)(i)$ para cada $i \in \omega$ con $i < n$. Sea $0 \leq i < n$, y notemos que al aplicar f a x y y existen $p_1, p_2 \in G$ con $i \in n_{p_1}$ y $i \in n_{p_2}$ tales que $f(y)(i) = \pi_{p_1}(y|n_{p_1})$ y $f(x)(i) = \pi_{p_2}(x|n_{p_2})(i)$. Como G es un filtro, existe $p_3 \in G$ tal que $p_3 \leq p_1$ y $p_3 \leq p_2$. Además, notemos que $n < n_{p_j}$ para $j \in \{1,2,3\}$. Nuevamente por la última condición del orden de $\mathbb{P}$ se tiene que $\pi_{p_3}(y|n_{p_3})|n_{p_1} = \pi_{p_1}((y|n_{p_3})|n_{p_1}) = \pi_{p_1}(y|n_{p_1})$ y $\pi_{p_3}(x|n_{p_3})|n_{p_2} = \pi_{p_2}((x|n_{p_3})|n_{p_2}) = \pi_{p_2}(x|n_{p_2})$. Como $i \in n_{p_j}$ para $j \in \{1,2,3\}$, $i \in n$ y $n_{p_1} \leq n_{p_3}$ y $n_{p_2} \leq n_{p_3}$, entonces

$$\begin{aligned} f(y)(i) &= \pi_{p_1}(y|n_{p_1})(i) \\ &= \pi_{p_3}(y|n_{p_3})|n_{p_1}(i) \\ &= \pi_{p_3}(y|n_{p_3})(i) \\ &= \pi_{p_3}(y|n_{p_3})|n(i) \\ &= \pi_{p_3}(x|n_{p_3})|n(i) \\ &= \pi_{p_3}(x|n_{p_3})|n_{p_2}(i) \\ &= \pi_{p_2}(x|n_{p_2})(i) \\ &= f(x)(i). \end{aligned}$$

Notemos que $\pi_{p_3}(y|n_{p_3})|n(i) = \pi_{p_3}(x|n_{p_3})|n(i)$ porque $x|n = y|n$. Luego, $f(y) \in [f(x)|n]$, teniendo así la continuidad de f.

Finalmente, como 2^ω es un espacio compacto, Hausdorff y $f : 2^\omega \longrightarrow 2^\omega$ es biyectiva y continua, entonces f es un homeomorfismo por compacidad.

Para ver que $f[D] \subseteq E$ basta asegurar que dado $d \in D$ se tiene que para todo $i \in \omega$ se cumple que $f(d)(i) = e_E(i)$ para algún $e_E \in E$. Sea $i \in \omega$. Entonces $f(d)(i) = \pi_p(d|n_p)(i)$ para algún $p \in G$ tal que $i \in n_p$, pero como $\pi_p(d|n_p) = g(d)|n_p(i)$, donde $g(d) = e_E \in E$, entonces $f(d)(i) = g(d)|n_p(i)$, y por lo tanto, $f(d) \in E$.

Ahora veamos que $E \subseteq f[D]$, mostrando que para cada $e \in E$ existe $d \in D$ tal que $e = f(d)$. Basta tomar $d = g^{-1}(e)$ y aplicar análogamente el argumento que se dio anteriormente para ver la otra contención. Por lo tanto, $f[D] = E$.

Veamos que, en efecto, $\mathcal{I} \cup \{x\}$ tiene la propiedad de la unión finita. Supongamos lo contrario. Como $\mathcal{I}$ sí tiene la propiedad de la unión finita, entonces existe $\sigma = \{x_1, ..., x_k\} \in [\mathcal{I}]^{<\omega}$ tal que si

$$H = (\bigcap_{j=1}^{k}(\omega \setminus x_i)) \cap (\omega \setminus x),$$

entonces $|H| < \omega$. Sea $\ell' = maxH$. De lo anterior, elegimos $\ell = \ell' + 1$ y fijémonos en el conjunto denso $D_{\sigma,\ell}$. Como G es un filtro $\mathcal{D}$-genérico, entonces existe $p \in G \cap D_{\sigma,\ell}$ tal que existe $i \in n_p \setminus \ell$ tal que $s_p(i) = x_1(i) = ... = x_k(i) = 0$, por lo cual $\omega \setminus s_p(i) = \omega \setminus x_1(i) = ... = \omega \setminus x_k(i) = 1$, y por lo tanto, $i \in H$ con $i > \ell'$, lo cual no es posible. Así, $\mathcal{I} \cup \{x\}$ tiene la propiedad de la unión finita.

Finalmente, la condición (1) de compatibilidad de $\mathbb{P}$ asegurará que $\{d + f(d) : d \in 2^\omega\} \subseteq x\downarrow$. Notemos que $\{d + f(d) : d \in 2^\omega\} \subseteq x\downarrow$ si y sólo si $(d + f(d))(i) \leq x(i)$ para todo $d \in 2^\omega$ y $i \in \omega$. También notemos que $(d + f(d))(i) = (d|n + f(d|n))(i)$ siempre que $i < n$. Por como está definida f tenemos que $(d + f(d))(i) = (d + \pi_p(y|n_p))(i)$, donde $p \in G$ es tal que $i \in n_p$, y por lo tanto $(d + f(d))(i) = (d|n_p + f(d|n_p))(i) = (d|n_p + \pi_p(d|n_p))(i)$. Tenemos los siguientes casos:

1. Si $(d + \pi_p(d|n_p))(i) = 0$ entonces, en efecto, $(d + \pi_p(d|n_p))(i) \leq x(i)$.

2. Si $(d + \pi_p(d|n_p))(i) = 1$, entonces $(d|n_p + \pi_p(d|n_p))(i) = 1$, y por la condición (1) de compatibilidad de $\mathbb{P}$ se tiene que $s_p(i) = 1$, y así $x(i) = 1$, por lo cual nuevamente se tiene que $(d + \pi_p(d|n_p))(i) \leq x(i)$.

Como en cualquier caso, se tiene que $(d + \pi_p(d|n_p))(i) \leq x(i)$, entonces $\{d + f(d) : d \in 2^\omega\} \subseteq x\downarrow$.

■

Teorema 4.48. Asumamos *MA(numerable)*. Entonces existe un ultrafiltro no principal $\mathcal{U} \subseteq 2^\omega$ que es denso homogéneo numerable.

Demostración. Construiremos un ideal maximal no principal $\mathcal{I} \subseteq 2^\omega$ que es denso homogéneo numerable. Notar que a lo más hay $\mathfrak{c}$ conjuntos densos numerables en 2^ω porque 2^ω tiene a lo más $\mathfrak{c}$ conjuntos numerables. Enumeremos como $\{(D_\eta, E_\eta) : \eta < \mathfrak{c}\}$ a todas las parejas de subconjuntos densos numerables de 2^ω. Construiremos el conjunto $\mathcal{I}_\xi$ para cada $\xi < \mathfrak{c}$ por recursión transfinita. Al final, bastará tomar como $\mathcal{I}$ a cualquier ideal maximal no principal que extienda a $\bigcup_{\xi < \mathfrak{c}} \mathcal{I}_\xi$. Por inducción, nos aseguraremos de que se cumplan los siguientes requisitos.

1. $\mathcal{I}_\mu \subseteq \mathcal{I}_\eta$ si $\mu \leq \eta < \mathfrak{c}$.

2. $\mathcal{I}_\xi$ tiene la propiedad de la unión finita para cada $\xi \in \mathfrak{c}$.

3. $|\mathcal{I}_\xi| < \mathfrak{c}$ para cada $\xi < \mathfrak{c}$.

4. La pareja (D_η, E_η) se utiliza en el paso $\xi = \eta + 1$, ya sea que $\omega \setminus x \in \mathcal{I}_\xi$ para algún $x \in D_\eta \cup E_\eta$ o existe $x \in \mathcal{I}_\xi$ y un homeomorfismo $f_\eta : 2^\omega \longrightarrow 2^\omega$ tal que $f_\eta[D_\eta] = E_\eta$ y $\{d + f_\eta(d) : d \in D_\eta\} \subseteq x\downarrow$.

Notemos que, por el Lema 4.45, la segunda parte de la condición (4) garantiza que cualquier ideal maximal no principal $\mathcal{I}$ que extienda a $\mathcal{I}_\eta$ será tal que $f_\eta : 2^\omega \longrightarrow 2^\omega$ se restrinja a un homeomorfismo de $\mathcal{I}$. En efecto, como $x \in \mathcal{I}$ y $\{d + f_\eta(d) : d \in D_\eta\} \subseteq x\downarrow$, donde $x\downarrow$ es un conjunto cerrado, entonces $cl(\{d + f_\eta(d) : d \in D_\eta\}) \subseteq x\downarrow \subseteq \mathcal{I}$.

Tomemos $\mathcal{I}_0 = Fin$, y en los pasos pasos límite tomemos uniones.

Veamos que $\mathcal{I}_0$ cumple únicamente las primeras tres condiciones, ya que la cuarta condición se trata sobre el conjunto $\mathcal{I}_1$.

1. Es claro que $\mathcal{I}_0$ cumple la primer condición porque se contiene a sí mismo.

2. Si $\mathcal{A} \in [\mathcal{I}_0]^{<\omega}$, entonces $|\bigcup \mathcal{A}| < \omega$, por lo tanto $\omega \setminus \mathcal{A}$ es infinito. Por lo tanto, $\mathcal{I}_0$ tiene la propiedad de la unión finita.

3. $\mathcal{I}_0$ cumple la tercera condición porque la colección $\{I_n\}_{n\in\omega}$, donde
$$I_n = \{\{x_0, ..., x_n\} : n \in \omega\}$$
es numerable y $\mathcal{I}_0 = \{I_n\}_{n\in\omega}$, por lo cual $|\mathcal{I}_0| < \mathfrak{c}$.

En el paso sucesor $\xi = \eta + 1$ asumamos que $\mathcal{I}_\eta$ ya está dado.

Primero supongamos que existe $x \in D_\eta \cup E_\eta$ tal que $\mathcal{I}_\eta \cup \{\omega \setminus x\}$ tiene la propiedad de la unión finita. En este caso, simplemente elegimos $\mathcal{I}_\xi = \mathcal{I}_\eta \cup \{\omega \setminus x\}$, y así $\mathcal{I}_\xi$ cumple la cuarta condición, además de seguir cumpliendo la primera y la tercera.

En caso contrario, es decir, que para cualquier $x \in D_\eta \cup E_\eta$ el conjunto $\mathcal{I} \cup \{\omega \setminus x\}$ no tenga la propiedad de la unión finita, verifiquemos que $D_\eta \cup E_\eta \subseteq \langle \mathcal{I}_\eta \rangle$.

En efecto, notemos primero que, como $\mathcal{I}_\eta$ sí tiene la propiedad de la unión finita y $\mathcal{I}_\eta \cup \{\omega \setminus x\}$ no, entonces existe una subcolección $\{x_i\}_{i=1}^k \subseteq \mathcal{I}_\eta$ tal que
$$\left| \omega \setminus \left[(\bigcup_{i=1}^{k} x_i) \cup (\omega \setminus x) \right] \right| < \omega.$$

En particular, supongamos sin pérdida de generalidad que
$$\omega \setminus \left[(\bigcup_{i=1}^{k} x_i) \cup (\omega \setminus x) \right] = \{y_1, ..., y_m\}.$$

Como $Fin = \mathcal{I}_0 \subseteq \mathcal{I}_\eta$, entonces existe $x_0 \in \mathcal{I}_0$ tal que $x_0 = \{y_1, ..., y_m\}$. Así,
$$\omega \setminus \left[(\bigcup_{i=0}^{k} x_i) \cup (\omega \setminus x) \right] = \varnothing,$$
por lo cual, $x \subseteq \bigcup_{i=0}^{k} x_i$. Como $\bigcup_{i=0}^{k} x_i \in \langle \mathcal{I}_\eta \rangle$, entonces $x \in \langle \mathcal{I}_\eta \rangle$, es decir $D_\eta \cup E_\eta \subseteq \langle \mathcal{I}_\eta \rangle$.

Luego, aplicando el Lema 4.47 con $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\eta$, $D = D_\eta$ y $E = E_\eta$, existen un homeomorfismo $f : 2^\omega \to 2^\omega$ y $x \in 2^\omega$ tales que $f[D_\eta] = E_\eta$, $\mathcal{I}_\eta \cup \{x\}$ tiene la propiedad de la unión finita y $\{d + f(d) : d \in D_\eta\} \subseteq x \downarrow$. En este caso elegimos $\mathcal{I}_\xi = \mathcal{I}_\eta \cup \{x\}$ y $f_\eta = f$, y así $\mathcal{I}_\xi$ cumple la cuarta condición, además de seguir cumpliendo la primera y la tercera.

Por la Obervación 2.19 se tiene que $\bigcup_{\xi<\mathfrak{c}} \mathcal{I}_\xi$ tiene la propiedad de la unión finita y por lo tanto, existe un ideal maximal no principal $\mathcal{I} \subseteq 2^\omega$ tal que $\bigcup_{\xi<\mathfrak{c}} \mathcal{I}_\xi \subseteq \mathcal{I}$.

Sólo resta ver que, en efecto, el ideal maximal $\mathcal{I}$ es denso homogéneo numerable. Sean D y E subconjuntos densos numerables de $\mathcal{I}$. Como $Fin \subseteq \mathcal{I}$ se tiene,

$$2^\omega = cl(Fin) = cl(\mathcal{I}) = cl(D) = cl(E)$$

por lo cual, tanto D como E son subconjuntos densos de 2^ω. De lo anterior, existe $\eta < \mathfrak{c}$ tal que $D = D_\eta$ y $E = E_\eta$. Notar que si existiera $x \in D_\eta \cup E_\eta$ tal que $\omega \setminus x \in \mathcal{I}_\xi$, como $D_\eta, E_\eta, \mathcal{I}_\xi \subseteq \mathcal{I}$ entonces $\omega \setminus x, x \in \mathcal{I}$, lo cual no es posible. Luego, existen $x \in \mathcal{I}_\xi$ y un homemomorfismo $f_\eta : 2^\omega \longrightarrow 2^\omega$ tales que $f_\eta[D_\eta] = E_\eta$ y $\{d + f_\eta(d) : d \in D_\eta\} \subseteq x \downarrow$. Notar que, como $\{d + f_\eta(d) : d \in D_\eta\} \subseteq x \downarrow$, el homeomorfismo f_η se restringe a un homeomorfismo de $\mathcal{I}$. Por lo tanto, $\mathcal{I}$ es denso homogéneo numerable, y así $c^{-1}[\mathcal{I}] = \mathcal{U}$ es un ultrafiltro no principal que es denso homogéneo numerable de 2^ω.

■

4.3. Ultrafiltros y la propiedad del conjunto perfecto

Definición 4.49. Un conjunto de Bernstein en un espacio topológico X es un subconjunto B de X tal que B y $X \setminus B$ intersectan a cada conjunto perfecto de X.

Si $B \subseteq X$ es un conjunto de Bernstein y $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces $f[B]$ es un conjunto de Bernstein. En efecto, si existe $B \subseteq Y$ perfecto tal que $f[A] \cap B = \varnothing$ o $(Y \setminus f[A]) \cap B = \varnothing$ entonces $A \cap f^{-1}[B] = \varnothing$ o $(X \setminus A) \cap f^{-1}[B] = \varnothing$, por lo cual A no es de Bernstein porque $f^{-1}[B]$ es un conjunto perfecto en X.

Notar que 2^ω es homeomorfo a $(2^\omega)^\omega$ por la Proposición 1.33. Entonces cada conjunto de Cantor contiene una familia de tamaño $\mathfrak{c}$ de subconjuntos de Cantor ajenos por parejas.

Teorema 4.50. Existe $B \subseteq 2^\omega$ que es un conjunto de Bernstein.

Demostración. Construyamos $B = \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ un conjunto de Bernstein mediante recursión. Sea $\{P_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ la familia de todos los subconjuntos perfectos de 2^ω. Supóngase que ya hemos elegido x_β y y_β con $x_\beta \neq y_\beta$ para cada $\beta < \alpha$ tales que:

1. $x_\beta \in P_\beta$,
2. $y_\beta \in P_\beta$,
3. $x_\beta \neq x_\gamma$ para cada $\gamma < \beta$.

Para terminar, hay que escoger a x_α y y_α de tal manera que se sigan cumpliendo las hipótesis antes mencionadas. Fijémonos en $P_\alpha \setminus \{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{y_\beta : \beta < \alpha\}$. Éste conjunto es no vacío porque P_α tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$. Entonces podemos elegir

$$x_\alpha, y_\alpha \in P_\alpha \setminus \{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{y_\beta : \beta < \alpha\}$$

con $x_\alpha \neq y_\alpha$. Es fácil ver que las hipótesis inductivas se preservan. Verifiquemos que nuestro conjunto es de Bernstein.

Sea $P \subseteq 2^\omega$ un conjunto perfecto. Entonces existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $P = P_\alpha$. Claramente se satisface que $x_\alpha \in P_\alpha \cap B$ y $y_\alpha \in P_\alpha \setminus B \subseteq 2^\omega \setminus B$. Por lo tanto, B es un conjunto de Bernstein en 2^ω.

■

De hecho se puede asegurar que si B es un conjunto de Bernstein en 2^ω entonces tanto B como $2^\omega \setminus B$ intersectan a cada conjunto perfecto de 2^ω en tantos puntos como la cardinalidad del conjunto potencia de ω.

Proposición 4.51. Sean $P \subseteq 2^\omega$ un subconjunto perfecto y $B \subseteq 2^\omega$ un subconjunto de Bernstein. Entonces $|P \cap B| = |P \cap (X \setminus B)| = \mathfrak{c}$.

Demostración. Como 2^ω es homeomorfo a $2^\omega \times 2^\omega$ por la Proposición 1.33, existe un homeomorfismo $g : P \longrightarrow 2^\omega \times 2^\omega$. Notar que $|2^\omega \times 2^\omega| = \mathfrak{c}$, y además, como $P \cap B, P \cap (2^\omega \setminus B) \subseteq g^{-1}[2^\omega \times 2^\omega]$ se tiene que $|P \cap B| \leq \mathfrak{c}$ y $|P \cap (2^\omega \setminus B)| \leq \mathfrak{c}$.

Sea $x \in 2^\omega$, entonces $g^{-1}[2^\omega \times \{x\}] \subseteq P$ es perfecto porque $2^\omega \times \{x\}$ lo es y g es un homeomorfismo. Así, $g^{-1}[2^\omega \times \{x\}] \cap B \neq \varnothing$. Como lo anterior es posible para cada punto de 2^ω, entonces $|g^{-1}[2^\omega \times 2^\omega] \cap B| \geq \mathfrak{c}$, es decir, $|P \cap B| \geq \mathfrak{c}$. De manera similar se tiene que $|P \cap (2^\omega \setminus B)| \geq \mathfrak{c}$. Por lo tanto, $|P \cap B| = |P \cap (2^\omega \setminus B)| = \mathfrak{c}$.

■

Teorema 4.52. Existe un ultrafiltro no principal $\mathcal{V} \subseteq 2^\omega$ con un subconjunto cerrado de cardinalidad $\mathfrak{c}$ que no tiene la propiedad del conjunto perfecto.

Demostración. Sea $B \subseteq 2^\omega$ un conjunto de Bernstein. Como 2^ω es perfecto, entonces por la Proposición 4.51, tomando a $X = P = 2^\omega$ se tiene que $|B| = \mathfrak{c}$, porque $P \cap B = B$. Si B tuviera un conjunto perfecto A, entonces por ser B un conjunto de Bernstein se tendría que $A \cap (X \setminus B) \neq \varnothing$, lo cual no es posible, porque $A \subseteq B$.

Como $B \subseteq 2^\omega$, y 2^ω es un espacio cero dimensional, separable y metrizable, entonces B también lo es. Finalmente por el Teorema 4.27, eligiendo $X = B$, existe un ultrafiltro $\mathcal{V} \subseteq 2^\omega$ que contiene una copia homeomorfa de B como subconjunto cerrado.

■

A partir de ahora los juegos de Choquet desarrollarán un papel muy importante, de hecho, trabajaremos con una modificación del mismo que es más restrictivo.

Definición 4.53. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico no vacío. El juego de Choquet G_X de X se define como sigue: Los jugadores I y II toman turnos jugando con subconjuntos abiertos y no vacíos de X.

I	U_0		U_1	...	
II		V_0		V_1	...

tales que $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1$.... Decimos que el jugador II gana la partida del juego si $\bigcap_{n\in\omega} V_n = \bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \varnothing$, el jugador I gana si $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \bigcap_{n\in\omega} V_n = \varnothing$.

Al pensar en las palabras "juego" y "ganador", una de las primeras cuestiones que llega naturalmente a la mente es si hay una estrategia en el juego que le asegure la victoria a un jugador. Para el juego de Choquet es posible definir el concepto de estrategia como lo vemos a continuación.

Definición 4.54. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico no vacío, G_X el juego de Choquet de X y T el árbol que consiste de todas las sucesiones finitas $(W_0, ..., W_n)$ donde cada W_i es un conjunto abierto no vacío contenido en X tal que $W_0 \supseteq W_1 \supseteq ... \supseteq W_n$. Al árbol anteriormente descrito se le conoce como el árbol de las posiciones legales del juego de Choquet G_X. Una estrategia para I en G_X es un subárbol $\sigma \subseteq T$ tal que:

1. σ es no vacío.
2. Si $(U_0, V_0, U_1, V_1, ..., U_n) \in \sigma$, entonces para cada conjunto abierto no vacío $V_n \subseteq U_n$ se cumple que $(U_0, V_0, U_1, V_1, ..., U_n, V_n) \in \sigma$.
3. Si $(U_0, V_0, U_1, V_1, ..., U_{n-1}, V_{n-1}) \in \sigma$, entonces existe un único U_n tal que $(U_0, V_0, U_1, V_1, ..., U_{n-1}, V_{n-1}, U_n) \in \sigma$.

Intuitivamente, una estrategia σ funciona como sigue: I inicia jugando U_0 tal que $(U_0) \in \sigma$ y es único por el inciso (3) de la Definición 4.54, II juega cualquier conjunto abierto no vacío $V_0 \subseteq U_0$ y por el inciso (2) de la Definición 4.54, $(U_0, V_0) \in \sigma$; entonces I responde jugando con el único conjunto abierto no vacío $U_1 \subseteq V_0$ tal que $(U_0, V_0, U_1) \in \sigma$, etc.

Definición 4.55. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico no vacío, G_X el juego de Choquet de X y T el árbol de las posiciones legales de G_X y σ una estrategia para el jugador I. Entonces

1. Una posición $(W_0, ..., W_n) \in \mathcal{T}$ es compatible con σ si $(W_0, ..., W_n) \in \sigma$.
2. Una partida del juego $(U_0, V_0, U_1, V_1, ...)$ es compatible con σ si $(U_0, V_0, U_1, V_1, ...) \in [\sigma]$.
3. La estrategia σ es una estrategia ganadora para I si él gana cada partida $(U_0, V_0, U_1, V_1, ...)$ compatible con σ.

De forma análoga se define una estrategia ganadora para el jugador II.

Como lo mencionamos antes, nuestro interés se basa en un juego de Choquet más restrictivo, de manera más precisa, hacemos el juego más restrictivo para el jugador II haciendo que el jugador I en cada turno no sólo elija un elemento de la topología, sino que también elija un punto sobre dicho abierto y posteriormente, en su turno, el jugador II deberá elegir un elemento de la topología como en el juego de Choquet usual, pero además dicho elemento tiene que tener al punto elegido anteriormente por el jugador I. A esta modificación del juego de Choquet lo llamaremos juego de Choquet fuerte. Formalmente definimos dicho juego como sigue.

Definición 4.56. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, el juego de Choquet fuerte G_X^S está definido como sigue.

I	(x_0, U_0)		(x_1, U_1)	...	
II		V_0		V_1	...

Los jugadores I y II se turnan para jugar subconjuntos abiertos no vacíos como en el juego de Choquet, pero adicionalmente se requiere que el jugador I juegue un punto x_n en U_n y el jugador II debe jugar $V_n \subseteq U_n$ con $x_n \in V_n$. Entonces debemos tener $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq ...$, $x_n \in U_n$ y $x_n \in V_n$. El jugador II gana si $\bigcap_{n\in\omega} V_n = \bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \varnothing$, el jugador I gana si $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \bigcap_{n\in\omega} V_n = \varnothing$.

Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ no vacío es llamado un espacio de Choquet fuerte si el jugador II tiene una estrategia ganadora en G_X^S.

Definición 4.57. Una A-tripleta es una tripleta de la forma $(\mathcal{T}, A, Q)$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Choquet fuerte y $\mathcal{T}$ es una topología segundo numerable de 2^ω que es más fina que la topología estándar (la topología de los conos).

2. $A \in \mathcal{T}$.

3. Q es un subconjunto numerable no vacío de A sin puntos aislados con la topología de subespacio que se hereda de $\mathcal{T}$.

El siguiente lema es de suma importancia para mostrar la existencia de un ultrafiltro no principal sobre ω tal que todo subconjunto cerrado de él tiene la propiedad del conjunto perfecto.

Lema 4.58. Asumamos *MA(numerable)*. Sea $\mathcal{F}$ una colección de subconjuntos de ω con la propiedad de la intersección finita fuerte tal que $|\mathcal{F}| < \mathfrak{c}$. Supóngase que $(\mathcal{T}, A, Q)$ es un A-tripleta con $Q \subseteq \mathcal{F}$. Entonces existe un subconjunto perfecto P de A tal que $\mathcal{F} \cup \{\bigcap P\}$ tiene la propiedad de la intersección finita fuerte.

Demostración. Fijemos una estrategia ganadora Σ para el jugador II en el juego fuerte de Choquet en $(2^\omega, \mathcal{T})$, y además tomemos una base numerable $\mathcal{B}$ para dicho espacio.

Sea $\mathbb{P}$ el conjunto parcialmente ordenado numerable que consiste de todas las funciones p tales que, para algún $n_p \in \omega$, las siguientes condiciones se cumplen.

1. $p : {}^{\leq n_p}2 \longrightarrow Q \times \mathcal{B}$. Usaremos la notación $p(s) = (q_s^p, U_s^p)$.
2. $U_\varnothing^p = A$.
3. Para cada $s, t \in {}^{\leq n_p}2$, si s y t son incompatibles, es decir, que $s \not\subseteq t$ y $t \not\subseteq s$, entonces $U_s^p \cap U_t^p = \varnothing$.
4. Para cada $s \in {}^{n_p}2$

I	$(\mathrm{q}^p_{s\|0}, U^p_{s\|0})$		$(\mathrm{q}^p_{s\|1}, U^p_{s\|1})$	...	$(\mathrm{q}^p_{s\|n_p}, U^p_{s\|n_p})$	
II		$\mathrm{V}^p_{s\|0}$		$\mathrm{V}^p_{s\|1}$	...	$\mathrm{V}^p_{s\|n_p}$

   es un juego parcial del juego fuerte de Choquet en $(2^\omega, \mathcal{T})$, donde los conjuntos abiertos $V^p_{s|i}$ jugados por el jugador II son los dictados por la estrategia Σ.

Ordenamos a $\mathbb{P}$ estableciendo que $q \leq p$ si $q \supseteq p$.

Para cada $\ell \in \omega$, definimos

$$D_\ell = \{p \in \mathbb{P} : n_p \geq \ell\}$$

Veamos que cada subconjunto D_ℓ es denso en $\mathbb{P}$. Sean $p \in \mathbb{P}$ y $\ell \in \omega$. Sea $n = max\{n_p, \ell\}$. Si $n = n_p$ no hay nada que hacer, pues $p \in D_\ell$ y $p \leq p$. Supongamos entonces que $n = \ell$, y extendamos p a $p' : {}^{\leq \ell}2 \longrightarrow Q \times \mathcal{B}$ definida como sigue.

$$p'(s|i) = \begin{cases} p(s|i), & \text{si} \quad 0 \leq i \leq n_p \\ \\ (q^{p'}_{s|i}, U^{p'}_{s|i}), & \text{si} \quad n_p < i \leq \ell \end{cases}$$

donde el elemento $(q^{p'}_{s|n_p+1}, U^{p'}_{s|n_p+1})$ es cualquiera tal que $U^{p'}_{s|n_p+1} \subseteq V_{s|n_p}$ y $q^{p'}_{s|n_p+1} \in U^{p'}_{s|n_p+1}$, es decir, que continúa con la partida parcial del juego de Choquet fuerte designado por s a partir de n_p. Luego, los elementos $(q^{p'}_{s|n_p+j}, U^{p'}_{s|n_p+j})$ con $1 < j \leq \ell$ corresponden a los elementos jugados por el jugador I respecto a los conjuntos abiertos $V_{s|n_p+j-1}$ dictados por la estrategia Σ. Notemos que siempre podemos tomar un punto $q^{p'}_{s|i} \in U^{p'}_{s|i}$ porque Q no tiene puntos aislados.

Es claro que p' cumple las condiciones (1), (2) y (4) por como está definida, y también cumple la condición (3) porque al ser 2^ω con la topología de los conos un espacio Haurdorff y

$\mathcal{T}$ una topología más fina que la estándar, entonces $(X,\mathcal{T})$ es también un espacio Hausdorff y por lo tanto, si $s,t \in {}^{\leq \ell}2$ son incompatibles entonces existen conjuntos básicos U^p_s y U^p_t (o $U^{p'}_s$ y $U^{p'}_t$, dependiendo el caso) que tienen intersección vacía. Por lo tanto, $p' \in \mathbb{P}$. Más aún, $p' \in D_\ell$ y $p' \leq p$, por lo cual D_ℓ es denso en $\mathbb{P}$.

Notar que por la densidad de D_ℓ, se tiene que si D es un conjunto denso en $\mathbb{P}$ entonces para cada $\ell \in \omega$ siempre existe $p \in D$ tal que $n_p \geq \ell$.

Para cualquier $\ell \in \omega$, consideremos la partición de 2^ω en conjuntos clopen $P_\ell = \{[s] : s \in {}^{\ell}2\}$. Con lo anterior definimos

$$D^{ref}_\ell = \{p \in \mathbb{P} : \{U^p_s : s \in {}^{n_p}2\} \textit{ refina } \text{a } P_\ell\}.$$

En la descripción de los conjuntos D^{ref}_ℓ usamos la palabra *"refina"* en el sentido de que los conjuntos U^p_s para cada $s \in {}^{n_p}2$ están contenidos en los conjuntos que conforman a la partición P_ℓ.

Veamos que cada conjunto D^{ref}_ℓ es denso en $\mathbb{P}$. Dados $p \in \mathbb{P}$ y $\ell \in \omega$, sea $q^0_s = q^p_s$ para cada $s \in {}^{n_p}2$. Notemos que únicamente nos fijamos en los elementos $s \in {}^{n_p}2$ y no en general en los elementos de ${}^{\leq n_p}2$ porque si $s : n \longrightarrow 2$ con $n < n_p$, entonces s es sólo una restricción de un elemento de ${}^{n_p}2$. Ahora, como Q no tiene puntos aislados y $q^0_s \in V^p_s$, es posible, para cada $s \in {}^{n_p}2$ elegir $q^1_s \neq q^0_s$ tal que $q^1_s \in V^p_s \cap Q$. Sea $j \geq \ell$ lo suficientemente grande para garantizar que $[q^1_s|j] \cap [q^0_s|j] = \varnothing$ para cada $s \in {}^{n_p}2$. Extendamos p a $p' : {}^{\leq n_p+1}2 \longrightarrow Q \times \mathcal{B}$ estableciendo que

$$p'(s^\frown\varepsilon) = (q^\varepsilon_s, U^\varepsilon_s)$$

para cada $s \in {}^{n_p}2$ y $\varepsilon \in 2$, donde cada $U^\varepsilon_s \in \mathcal{B}$ es tal que $q^\varepsilon_s \in U^\varepsilon_s \subseteq V^p_s \cap [q^\varepsilon_s|j]$. Tenemos que $p' \in \mathbb{P}$, además cada conjunto abierto U^ε_s está contenido en algún cono que conforma la partición P_ℓ porque particularmente $U^\varepsilon_s \subseteq [q^\varepsilon_s|j]$ con $j \geq \ell$. Por lo tanto, $p' \in D^{ref}_\ell$, lo cual muestra la densidad de dicho conjunto en $\mathbb{P}$.

Para cualesquiera $\sigma = \{x_1, ..., x_k\} \in [\mathcal{F}]^{<\omega}$ y $\ell \in \omega$, definimos

$$D_{\sigma,\ell} = \{p \in \mathbb{P} | (\exists i \in \omega \setminus \ell)(\forall s \in {}^{n_p}2)(\forall x \in U^p_s) : x(i) = x_1(i) = ... = x_k(i) = 1\}$$

Veamos que cada conjunto $D_{\sigma,\ell}$ es denso en $\mathbb{P}$. Sean $p \in \mathbb{P}$, y σ y ℓ como antes. Nuevamente nos fijamos sólo en los elementos $s \in {}^{n_p}2$ y no en general en los elementos de ${}^{\leq n_p}2$ porque si $s : n \longrightarrow 2$ con $n < n_p$, entonces s es sólo una restricción de un elemento de ${}^{n_p}2$. Notemos que

$$\Big(\bigcap_{s \in {}^{n_p}2} q^p_s\Big) \cap \Big(\bigcap \sigma\Big)$$

es un subconjunto infinito porque $Q \subseteq \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita fuerte. Así, existe $i \geq \ell$ tal que

$$q^p_s(i) = x_1(i) = ... = x_k(i) = 1$$

para cada $s \in {}^{n_p}2$. Como Q no tiene puntos aislados y $q_s^0 \in V_s^p$, es posible, para cada $s \in {}^{n_p}2$ elegir $q_s^1 \neq q_s^0$ tal que $q_s^1 \in V_s^p \cap [q_s^p|i+1] \cap Q$. Sean $q_s^0 = q_s^p$ para cada $s \in {}^{n_p}2$ y $j \geq i+1$ lo suficientemente grande para garantizar que $[q_s^1|j] \cap [q_s^0|j] = \varnothing$ para cada $s \in {}^{n_p}2$. Extendamos p a $p' : {}^{\leq n_p+1}2 \longrightarrow Q \times \mathcal{B}$ estableciendo que

$$p'(s^\frown \varepsilon) = (q_s^\varepsilon, U_s^\varepsilon)$$

para cada $s \in {}^{n_p}2$ y $\varepsilon \in 2$, donde cada $U_s^\varepsilon \in \mathcal{B}$ es tal que $q_s^\varepsilon \in U_s^\varepsilon \subseteq V_s^p \cap [q_s^\varepsilon|j]$. Sean $s \in {}^{n_p}2$ y $x \in U_{s^\frown \varepsilon}^{p'}$. Notemos que por construcción, $U_{s^\frown \varepsilon}^{p'} = U_s^\varepsilon$ para $\varepsilon \in 2$. Luego, como $U_s^\varepsilon \subseteq [q_s^\varepsilon|j] \subseteq [q_s^0|i+1]$, entonces $x|i+1 = q_s^0|i+1$ y así $x(i) = x_1(i) = ... = x_k(i) = 1$ porque $q_s^0(i) = x_1(i) = ... = x_k(i) = 1$. Por lo tanto, $p' \in D_{\sigma,\ell}$ y además es tal que $p' \leq p$, por lo cual $D_{\sigma,\ell}$ es denso en $\mathbb{P}$.

Como $|\mathcal{F}| < \mathfrak{c}$, la colección de conjuntos densos

$$\mathcal{D} = \{D_\ell : \ell \in \omega\} \cup \{D_\ell^{ref} : \ell \in \omega\} \cup \{D_{\sigma,\ell} : \sigma \in [\mathcal{F}]^{<\omega}, \ell \in \omega\}$$

tiene tamaño menor que $\mathfrak{c}$. Por lo tanto, por *MA(numerable)*, existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico $G \subseteq \mathbb{P}$. Sea $g = \bigcup G : {}^{<\omega}2 \longrightarrow Q \times \mathcal{B}$. Dado $s \in {}^{<\omega}2$, elegimos cualquier $p \in G$ tal que $s \in dom(p)$ y establecemos que $U_s = U_s^p$. Para cualquier $x \in 2^\omega$, como Σ es una estrategia ganadora para el jugador II, tenemos que $\bigcap_{n\in\omega} U_{x|n} \neq \varnothing$. Sea $x \in 2^\omega$ y supongamos que existen $x_1, x_2 \in \bigcap_{n\in\omega} U_{x|n}$ distintos. Como $x_1 \neq x_2$, existe $\ell \in \omega$ tal que $x_1(\ell) \neq x_2(\ell)$. Tomemos la partición P_ℓ de 2^ω. Notar que existen $[s_1], [s_2] \in P_\ell$ ajenos tales que $x_1 \in [s_1]$ y $x_2 \in [s_2]$. Al ser $G \subseteq \mathbb{P}$ un filtro $\mathcal{D}$-genérico existe $p \in G \cap D_\ell^{ref}$. Como $\{U_s^p : s \in {}^{n_p}2\}$ refina a P_ℓ entonces cada U_s^p está contenido en un único elemento de P_ℓ. Entonces para $x|n_p$ se tiene que $U_{x|n_p}^p = U_{x|n_p} \subseteq [s_1]$ o $U_{x|n_p}^p = U_{x|n_p} \subseteq [s_2]$. Por lo anterior, o bien $x_1 \in \bigcap_{n\in\omega} U_{x|n}$ o $x_2 \in \bigcap_{n\in\omega} U_{x|n}$ pero no ambos, es decir,

$$\left|\bigcap_{n\in\omega} U_{x|n}\right| = 1$$

Por lo tanto, si $f(x)$ es el único elemento de $\bigcap_{n\in\omega} U_{x|n}$ tenemos que $f : 2^\omega \longrightarrow A$ es una función bien definida. Recordar que si $x \in 2^\omega$, entonces $f(x) \in A$ por la condición (2) de la definición de $\mathbb{P}$.

Veamos que la función f es inyectiva. En efecto, sean $x_1, x_2 \in 2^\omega$ con $x_1 \neq x_2$. Como x_1 y x_2 son distintos, existe $m \in \omega$ tal que $x_1|m \neq x_2|m$. Sean $s = x_1|m$ y $t = x_2|m$. Como s y t son incompatibles, entonces $U_s^p \cap U_t^p = \varnothing$. donde $p \in \mathbb{P}$ tal que $s, t \in dom(p)$. Así, como $f(x_1) \in U_s^p$ y $f(x_2) \in U_t^p$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$, y por lo tanto, f es una función inyectiva.

Mostremos que f es continua en la topología estándar. Sea $x \in 2^\omega$ y tomemos el abierto básico $[f(x)|\ell]$ para algún $\ell \in \omega$. Como G es un filtro $\mathcal{D}$-genérico, entonces existe $p \in G \cap D_\ell^{ref}$. Lo anterior implica que

$$U_{x|n_p} = U_{x|n_p}^p \subseteq [f(x)|\ell]$$

porque la colección de abiertos básicos $\{U^p_s : s \in {}^{n_p}2\}$ refina a P_ℓ. Por lo tanto, $f(x') \in [f(x)|\ell]$ si $x' \in [x|n_p]$, por lo cual f es continua. Como 2^ω es compacto y A como subespacio es Hausdorff, se tiene que f es un encaje homeomorfo por compacidad, por lo cual $P = ran(f)$ es un subconjunto perfecto de A. Notar que en lo anterior, probamos que P es un subconjunto perfecto de A independientemente de como sea A con topología estándar, lo cual es lo que en un inicio se requería.

Veamos que $\mathcal{F} \cup \{\bigcap P\}$ tiene la propiedad de la intersección finita fuerte. Sean $\sigma = \{x_1, ..., x_k\} \in [\mathcal{F}]^{<\omega}$, $\ell \in \omega$ y consideremos el conjunto denso $D_{\sigma,\ell}$. Como G es un filtro $\mathcal{D}$-genérico, existe $p \in G \cap D_{\sigma,\ell}$. Tome $y \in P$ tal que $y = f(x)$ y sea $s = x|n_p$; así $y \in U^p_s$ por como está definido el punto y. Por lo tanto, por cómo está definido el conjunto $D_{\sigma,\ell}$ se tiene que existe $i \geq \ell$ tal que $y(i) = x_1(i) = ... = x_k(i) = 1$. Notar que el elemento $i \in \omega \setminus \ell$ mencionado anteriormente no depende de la elección del elemento del conjunto perfecto P. Por lo tanto,

$$i \in (\bigcap_{j=1}^{k} x_j) \cap (\bigcap P)$$

Como lo anterior se verifica para cada $\ell \in \omega$ se tiene que $\mathcal{F} \cup \{\bigcap P\}$ tiene la propiedad de la intersección finita fuerte.

■

Un concepto que será también necesario en está última parte es el de conjunto analítico.

Definición 4.59. Sea X un espacio Polaco. Un conjunto $A \subseteq X$ es llamado analítico si existe un espacio Polaco Y y una función continua $f : Y \longrightarrow X$ tal que $f[Y] = A$.

La clase de conjuntos analíticos en X es denotada por $\Sigma^1_1(X)$.

Proposición 4.60. [8, Proposición 4.1.2] Sea $A \subseteq X$ donde X es un espacio Polaco. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. A es un conjunto analítico.
2. A es imagen continua del espacio de Baire ω^ω.
3. A es imagen continua de un conjunto de Borel $B \subseteq Y$, para algún espacio Polaco Y.
4. A es la proyección de un conjunto de Borel en $X \times Y$, para algún espacio Polaco Y.
5. A es la proyección de un conjunto cerrado en $X \times \omega^\omega$.

Teorema 4.61. [15, Teorema 25.18] Sea X un espacio Polaco no vacío y $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión de conjuntos analíticos en X. Entonces existe una topología $\mathcal{T}$ tal que $(X,\mathcal{T})$ es un espacio de Choquet fuerte, segundo numerable que extiende la topología de X y consiste de conjuntos analíticos tales que cada A_n es abierto en $(X,\mathcal{T})$.

Teorema 4.62. (Becker). Si X es un espacio Polaco no vacío y $\mathcal{T}$ es una topología tal que $(X,\mathcal{T})$ es un espacio de Choquet fuerte y segundo numerable que extiende la topología de X, entonces $\mathcal{T}\subseteq\sum_1^1(X)$.

Por último, la siguiente proposición también juega un papel de suma importancia en la demostración del Teorema 4.65, el cual es la pieza clave en la demostración de la existencia de un ultrafiltro no principal sobre ω tal que todo subconjunto cerrado de él tiene la propiedad del conjunto perfecto.

Proposición 4.63. Si X es un espacio topológico Hausdorff, segundo numerable y tal que $|X|>\omega$, entonces X contiene un subespacio no vacío, numerable y sin puntos aislados.

Demostración. Sea $\mathcal{B}=\{U_n\}_{n\in\omega}$ una base segundo numerable de subconjuntos abiertos de X. Sean $U=\bigcup\mathcal{B}'$, donde $\mathcal{B}'=\{U_n\in\mathcal{B}:|U_n|\leq\omega\}$, y supongamos que $\mathcal{B}'\neq\varnothing$. Claramente U es un subconjunto abierto y numerable de X. Sea $S=X\setminus U$, el cual es no vacío porque X no es numerable. Luego, S es el conjunto de puntos de X cuyas vecindades son no numerables, de lo contrario, si existiera $x\in S$ para el cual existe una vecindad V_x de x que es numerable, entonces $x\in U$ porque existiría $U_n\in\mathcal{B}$ numerable tal que $x\in U_n\subseteq V_x$, lo cual no es posible. Notemos que a partir de lo anterior S tampoco tiene puntos aislados ya que si $x\in S$ fuese un punto aislado, entonces $\{x\}$ es un conjunto abierto y por lo tanto $\{x\}$ sería una conjunto abierto y numerable de x.

Ahora para cada $n\in\omega$ tal que $U_n\cap S\neq\varnothing$, elegimos un punto en dicha intersección. Notemos que para cada $n\in\omega$ tal que $U_n\cap S\neq\varnothing$ se tiene que $|U_n\cap S|\geq\omega$. En efecto, si $|U_n\cap S|<\omega$, dígamos $\{x_1,x_2,...,x_m\}$, como X es Hausdorff, existen vecindades abiertas $V_{x_{i,j}}\subseteq U_n\cap S$ de x_i en S tales que si $j\neq i$, entonces $V_{x_{i,j}}\cap V_{x_{j,i}}=\varnothing$. Luego

$$x_i\in\bigcap_{j\neq i}V_{x_{i,j}}$$

donde la intersección anterior es un conjunto abierto en S, y además x_i es el único elemento de dicha intersección, por lo cual x_i es un punto aislado de S, lo cual no es posible. Por lo tanto, $|U_n\cap S|\geq\omega$. Así, si $n\neq m$ entonces siempre podemos elegir puntos distintos x_n y x_m de $U_n\cap S$ y $U_m\cap S$, respectivamente. Sea D el conjunto formado por dichos puntos. Entonces D es un subconjunto denso y numerable de S. En efecto, por la forma de elegir los elementos que conforman a D, éste es claramente denso en S. Además si existiera una cantidad finita de elementos de la base $\mathcal{B}$ que intersectaran a S, digamos $U_{n_1},...,U_{n_m}$ entonces

$$S\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}U_{n_i}.$$

Sean $x \in S$ y $G = \{U_{n_i} : x \in U_{n_i}\}$. Entonces $x \in (\bigcap G) \cap S$ y además $|(\bigcap G) \cap S| > 1$, en caso contrario x sería un punto aislado de S porque $\bigcap G$ es un conjunto abierto en X, y por lo tanto $(\bigcap G) \cap S$ es un conjunto abierto en S. Sea $y \in (\bigcap G) \cap S$ con $y \neq x$. Luego, no existen abiertos básicos, ajenos y no numerables de $\mathcal{B}$ que separen a x y y, pero al ser X un espacio Hausdorff, deben existir subconjuntos abiertos básicos de la colección $\mathcal{B}'$ que separen a x y y, pero entonces $x, y \notin S$, porque tienen al menos una vecindad numerable. Por lo tanto, existe una cantidad numerable de elementos de $\mathcal{B}$ que intersectan a S, mostrando así la numerabilidad de D.

Finalmente, veamos que todo conjunto abierto en D tiene al menos dos puntos distintos. Sea V_D un subconjunto abierto en D. Entonces existe un subconjunto abierto V_S de S tal que $V_D = V_S \cap D$. Sean $x, y \in V_S$ con $x \neq y$. Como X es un espacio Hausdorff, entonces S también lo es, por lo cual existen vecindades abiertas y ajenas V_x y V_y en S de x y y, respectivamente, tales que $V_x, V_y \subseteq V_S$. Como D es denso en S, entonces $V_x \cap D$ y $V_y \cap D$ son no vacíos, y por lo tanto $V_S \cap D = V_D$ tiene al menos dos puntos distintos. Así, D no tiene puntos aislados.

Notemos que si $\mathcal{B}' = \varnothing$ entonces $X = S$ y la demostración es análoga. De hecho, la numerabilidad de D en este caso es inmediata.

■

Notación 4.64. Para cualquier $x \in 2^\omega$ denotamos por $x\uparrow$ al conjunto $\{y \in 2^\omega : x \subseteq y\}$.

Teorema 4.65. Asumamos *MA(numerable)*. Existe un ultrafiltro no principal $\mathcal{U} \subseteq 2^\omega$ tal que $A \cap \mathcal{U}$ tiene la propiedad del conjunto perfecto para cada $A \subseteq 2^\omega$ analítico.

Demostración. Por el Teorema 4.61, para cada conjunto analítico A, existe una topología $\mathcal{T}$ como en la Definición 4.57. También, por el Teorema 4.62, dicha topología $\mathcal{T}$ consiste únicamente de conjuntos analíticos. Como $2^\omega \times \omega^\omega$ es un espacio segundo numerable tiene a lo más $\mathfrak{c}$ conjuntos cerrados, y además como $2^\omega \times \omega^\omega$ es un espacio Polaco entonces por la Proposición 4.60 se tiene que 2^ω tiene a lo más $\mathfrak{c}$ conjuntos analíticos. Enumeremos como $\{(\mathcal{T}_\eta, A_\eta, Q_\eta) : \eta < \mathfrak{c}\}$ todas las A-tripletas, asegurándonos que el conjunto $\{\gamma < \mathfrak{c} : (\mathcal{T}_\eta, A_\eta, Q_\eta) = (\mathcal{T}_\gamma, A_\gamma, Q_\gamma)\}$ es cofinal para cada $\eta < \mathfrak{c}$. También, enumeremos como $\{z_\eta : \eta < \mathfrak{c}\}$ todos los subconjuntos de ω. Construiremos los conjuntos $\mathcal{F}_\xi$ para cada $\xi < \mathfrak{c}$ por recursión transfinita. Al final bastará tomar a $\mathcal{U} = \bigcup_{\xi<\mathfrak{c}} \mathcal{F}_\xi$.Por inducción, nos aseguraremos de que se cumplan los siguientes requisitos.

1. $\mathcal{F}_\mu \subseteq \mathcal{F}_\eta$ si $\mu \leq \eta < \mathfrak{c}$.

2. $\mathcal{F}_\xi$ tiene la propiedad de la intersección finita fuerte para cada $\xi < \mathfrak{c}$.

3. $|\mathcal{F}_\xi| < \mathfrak{c}$ para cada $\xi < \mathfrak{c}$.

4. En el paso $\xi = \eta + 1$, debemos haber decidido si $z_\eta \in \mathcal{U}$, es decir, si $z_\eta^\varepsilon \in \mathcal{F}_\xi$ para algún $\varepsilon \in 2$.

5. Si $Q_\eta \subseteq \mathcal{F}_\eta$, entonces en el paso $\xi = \eta + 1$ ocuparemos A_η; esto es, que existe $x \in \mathcal{F}_\xi$ tal que $x \uparrow \cap A_\eta$ contiene un subconjunto perfecto.

Comenzamos tomando $\mathcal{F}_0 = Cof$ que ya sabemos que cumple las tres primeras condiciones que son las que nos interesan en este paso. En los pasos límite tomamos uniones.

En el paso sucesor $\xi = \eta + 1$, asumamos que $\mathcal{F}_\eta$ ya está dado.

Primero asumamos que $Q_\eta \nsubseteq \mathcal{F}_\eta$. En este caso, elegimos $\mathcal{F}_\xi = \mathcal{F}_\eta \cup \{z_\eta^\varepsilon\}$ para $\varepsilon \in 2$ que sea compatible con la condición (2). Notemos que hacer esta elección es posible realizarla, ya que en caso contrario si dado $\sigma \in [\mathcal{F}_\eta]^{<\omega}$ se tiene que $|(\bigcap \sigma) \cap z_\eta^\varepsilon| < \omega$ para cualquier $\varepsilon \in 2$ entonces $|(\bigcap \sigma) \cap (z_\eta^0 \cup z_\eta^1)| = |(\bigcap \sigma) \cap \omega| = |\bigcap \sigma| < \omega$, lo cual no es posible porque $\mathcal{F}_\eta$ tiene la propiedad de la intersección finita fuerte. Así, $\mathcal{F}_\xi$ cumple las condiciones (1) a (4).

Si por el contrario, $Q_\eta \subseteq \mathcal{F}_\eta$, aplicando el Lema 4.58 con $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\eta$, $A = A_\eta$, $Q = Q_\eta$ y $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\eta$ entonces existe un conjunto perfecto $P \subseteq A_\eta$ tal que $\mathcal{F}_\eta \cup \{\bigcap P\}$ tiene la propiedad de la intersección finita fuerte. Sea $x = \bigcap P$. En este caso elegimos $\mathcal{F}_\xi = \mathcal{F}_\eta \cup \{x, z_\eta^\varepsilon\}$ para $\varepsilon \in 2$ que sea compatible con la condición (2).

Sea $\mathcal{U} = \bigcup_{\xi < \mathfrak{c}} \mathcal{F}_\xi$. Por la Observación 2.6 se verifica que $\mathcal{U}$ tiene la propiedad de la intersección finita fuerte, por lo cual existe, de hecho, un ultrafiltro no principal $\mathcal{G}$ que lo extiende.

Veamos que $\mathcal{U} = \mathcal{G}$. En efecto, supongamos $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{G}$. Sea $y \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{U}$, entonces para cada $\xi < \mathfrak{c}$ se tiene que $y \notin \mathcal{F}_\xi$, pero por la condición (4) se tiene que entonces $\omega \setminus y \in \mathcal{F}_\xi$, por lo cual $\omega \setminus y \in \mathcal{G}$, lo cual no es posible porque $\mathcal{G}$ es un ultrafiltro. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no principal sobre ω.

Veamos que $\mathcal{U}$ es el ultrafiltro requerido. Sea A un subconjunto analítico de 2^ω. Si $A \cap \mathcal{U}$ es numerable no hay más que hacer. Si por el contrario, $A \cap \mathcal{U}$ es no numerable, entonces por el Teorema 4.61 existe una topología $\mathcal{T}$ tal que $(2^\omega, \mathcal{T})$ es un espacio de Choquet fuerte y segundo numerable, donde $\mathcal{T}$ es más fina que la topología estándar y contiene a A. Como todo espacio topológico Hausdorff, segundo numerable y tal que $|X| > \omega$ contiene un subespacio no vacío, numerable y sin puntos aislados, podemos encontrar dicho subespacio $Q \subseteq A \cap \mathcal{U}$. Como $cof(\mathfrak{c}) > \omega$, existe $\mu < \mathfrak{c}$ tal que $Q \subseteq \mathcal{F}_\mu$. Como enumeramos cada A-tripleta tal que el conjunto $\{\gamma < \mathfrak{c} : (\mathcal{T}_\eta, A_\eta, Q_\eta) = (\mathcal{T}_\gamma, A_\gamma, Q_\gamma)\}$ fuera cofinal, entonces existe $\eta > \mu$ tal que $(\mathcal{T}, A, Q) = (\mathcal{T}_\eta, A_\eta, Q_\eta)$. Luego, por la condición (5) se garantiza que $A \cap \mathcal{U}$ contiene un subconjunto perfecto.

■

Corolario 4.66. Asumamos *MA(numerable)*. Entonces existe un ultrafiltro no principal $\mathcal{U} \subseteq 2^\omega$ tal que todo subconjunto cerrado de $\mathcal{U}$ tiene la propiedad del conjunto perfecto.

Demostración. Como todo subespacio cerrado de un espacio Polaco es Polaco, dado cualquier subconjunto cerrado $B \subseteq 2^\omega$, se tiene mediante la inclusión que B es analítico. Luego, por el Teorema 4.65 existe un ultrafiltro no principal $\mathcal{U} \subseteq 2^\omega$ tal que $\mathcal{U} \cap A$ tiene la propiedad del conjunto perfecto para cualquier conjunto analítico $A \subseteq 2^\omega$. Para terminar, basta notar que cualquier subconjunto cerrado de $\mathcal{U}$ es de la forma $\mathcal{U} \cap A$.

■

4.4. Algunos comentarios adicionales

Es claro que al usar *MA(numerable)* para probar la existencia de ultrafiltros sobre ω que tienen o no la propiedad P (dígase, ser completamente Baire, ser denso homogéneo numerable o que cada subconjunto cerrado tenga la propiedad del conjunto perfecto), las preguntas naturales que surgen son las siguientes:

Pregunta 4.67. ¿Es posible construir en *ZFC* un ultrafiltro no principal sobre ω que sí es completamente Baire?

Pregunta 4.68. ¿Es posible construir en *ZFC* un ultrafiltro no principal sobre ω que no es denso homogéneo numerable?

Pregunta 4.69. ¿Es posible construir en *ZFC* un ultrafiltro no principal sobre ω que sí es denso homogéneo numerable?

Además, por el Teorema 2.3 en [12], todo espacio analítico que es denso homogéneo numerable debe ser completamente Baire, lo que da pie a la siguiente pregunta.

Pregunta 4.70. ¿Es un ultrafiltro no principal $\mathcal{U} \subseteq 2^\omega$ que es denso homogéneo numerable necesariamente completamente Baire?

Pregunta 4.71. ¿Es posible construir en *ZFC* ultrafiltro no principal $\mathcal{U}$ sobre ω tal que $A \cap \mathcal{U}$ tiene la propiedad del conjunto perfecto para cada conjunto analítico $A \subseteq 2^\omega$?

También, si $Q \subseteq 2^\omega$ es homeomorfo a $\mathbb{Q}$ en la topología estándar, $A = cl(Q)$ y $\mathcal{T}_A$ es la topología obtenida declarando A como un conjunto abierto, entonces por el Lema 13.2 en [15] la terna $(\mathcal{T}_A, Q, A)$ es una A-tripleta. Luego, el ultrafiltro construido en el Teorema 4.65 no contiene copias cerradas de $\mathbb{Q}$, por lo cual es completamente Baire por el Lema de Hurewicz. De lo anterior nace la siguiente pregunta.

Pregunta 4.72. ¿Es un ultrafiltro no principal $\mathcal{U} \subseteq 2^\omega$ tal que $A \cap \mathcal{U}$ tiene la propiedad del conjunto perfecto siempre que A es un subconjunto analítico de 2^ω necesariamente completamente Baire?

Para responder algunas de estás preguntas necesitamos definir lo que son los P-filtros, los P-puntos y algunos resultados que los involucran.

Definición 4.73. Un filtro $\mathcal{F}$ sobre X se llama P-filtro si dado $\{x_n : n < \omega\} \subseteq \mathcal{F}$ existe $x \in \mathcal{F}$ tal que $x \subseteq^* x_n$ para cada $n < \omega$. Tal elemento x se llama la pseudo-intersección de $\{x_n : n < \omega\}$. Dualmente, $\mathcal{I}$ es un P-ideal si $\mathcal{F}_\mathcal{I}$ es un P-filtro. Un ultrafiltro que es un P-filtro se llama P-punto.

Lema 4.74. [17, Lema 24] Sea $\mathcal{A}$ una familia independiente sobre ω. Entonces existe un ultrafiltro no principal $\mathcal{U} \subseteq 2^\omega$ que extiende a $\mathcal{A}$ y no es un P-punto.

Al momento de publicar Medini y Milovich su respectivo artículo donde aparece la Pregunta 4.67, desconocían que Marciszewski ya había respondido a esa pregunta en 1998 al probar el siguiente resultado.

Teorema 4.75. (Marciszewski) [18, Teorema 1.2] Un filtro no principal $\mathcal{F} \subseteq 2^\omega$ es completamente Baire si y sólo si es un P-filtro no magro.

A partir de lo anterior, en el año 2015, Kenneth Kunen, Andrea Medini y Lyubomyr Zdomskyy, junto con un trabajo previo de Rodrigo Hernández Gutierrez y Michael Hrušák (ver [12]) prueban el siguiente teorema.

Teorema 4.76. [17, Teorema 10] Sea $\mathcal{F}$ un filtro no principal sobre ω. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

1. $\mathcal{F}$ es un P-filtro no magro.
2. $\mathcal{F}$ es completamente Baire.
3. $\mathcal{F}$ es denso homogéneo numerable.

El teorema anterior implica que para un ultrafiltro no principal sobre ω, ser un P-punto es equivalente a ser completamente Baire, lo cual a su vez es equivalente a ser denso homogéneo numerable; lo que, en principio, responde de manera afirmativa la Pregunta 4.70. Entonces, los Teoremas 4.32 y 4.48 se deducen del hecho de que *MA(numerable)* implica que existen P-puntos (ver por ejemplo la Proposición 5.5, el Teorema 7.12 y el Teorema 9.25 en [3]). Más importante aún, dado que Shelah demostró que es consistente que no existen P-puntos (ver Teorema 4.4.7 en [2]), se deduce que la suposición de *MA(numerable)* no puede descartarse en los Teoremas 4.32 y 4.48. Esto responde a las preguntas 4.67 y 4.69. Por otro lado, es conocido que existen ultrafiltros no principales sobre ω que no son P-puntos (use el Lema 4.74 con $\mathcal{A} = \varnothing$) e inmediatamente se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 4.77. [17, Corolario 11] Existe un ultrafiltro no principal sobre ω que no es denso homogéneo numerable.

Lo anterior responde la Pregunta 4.68 y simultáneamente fortalece el Teorema 4.41 el cual muestra la existencia de un ultrafiltro no principal sobre ω que no es denso homogéneo numerable bajo *MA(numerable)*.

Respecto a la Propiedad del Conjunto Perfecto, en 2014 Jialiang He y Shuguo Zhang en [9] mostraron que todo P-filtro no magro tiene la propiedad del conjunto perfecto para subconjuntos analíticos.

Es muy importante mencionar que la clave en todos los trabajos mencionados anteriormente son los P-filtros no magros, de los cuales su existencia en *ZFC* sigue siendo un problema abierto. Se sabe que la existencia de P-filtros no magros se sigue de que $cof([\mathfrak{d}]^{\omega}) = \mathfrak{d}$. Por lo tanto, si todos los P-filtros son magros, entonces hay un modelo interno con cardinales grandes. Pero en fin, comienza a hacerse de noche al escribir estas últimas líneas y es momento de ir por una cerveza para relajarme. Quizás otro día escriba algo más sobre todo esto, sólo quizás...

Bibliografía

[1] R.D. Anderson, D.W. Curtis, J. van Mill *A fake topological Hilbert space*, Trans. Amer. Math. Soc. 272 (1982), 311-321.

[2] T. Bartoszyński, H. Judah (J. Ihoda), *Set theory. On the structure of the real line*, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, (1995).

[3] A. Blass, *Combinatorial cardinal characteristics of the continuum*, Handbook of Set Theory, vol. 1. Springer, Dordrecht, (2010), 395–489.

[4] F. Casarrubias, A. Tamariz, *Elementos de Topología General*, Aportaciones Matemáticas, Serie de Textos No. 37, Sociedad Matemática Mexicana, México, (2015).

[5] Jan J. Dijkstra, *On the Group of Homeomorphisms of the Real Line That Map the Pseudoboundary Onto Itself*, Canad. J. Math. Vol. 58 (3), (2006) pp. 529-547.

[6] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlín (1989).

[7] B. Fitzpatrick, H. Zhou, *Countable dense homogeneity and the Baire property*, Topology and it's Applications 44, North Holland, (1992), 1-14.

[8] A. Galicki, *Aspects of Classical Descriptive Set Theory*, (2013).

[9] J. He, S. Zhang, *P-filters and the perfect set property.*, Topology Appl. 162 (2014), 12-19.

[10] F. Hernández, *Teoría de Conjuntos. Una introducción*, Aportaciones Matemáticas, Serie de Textos No. 13, Sociedad Matemática Mexicana, México, (2017).

[11] F. Hernández, D. Meza, *Árboles y algunas aplicaciones*, Topología y sus aplicaciones 2, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México, (2013).

[12] R. Hernández-Gutiérrez, M. Hrušák, *Non-meager P-filters are countable dense homogeneous*, Colloq. Math. 130:2 (2013), 281-289.

[13] I. L. Iribarren, *Topología de espacios métricos*, Limusa, México, (2008).

[14] T. Jech, *Set theory. The third millennium edition, revised and expanded*, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, (2003).

[15] A.S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Graduate Texts in Mathematics, 156, Springer-Verlag New York, Inc. (1995).

[16] K. Kunen, *Set theory. Studies in Logic, (London), 34*. College Publications, London, (2011).

[17] K. Kunen, A. Medini, L. Zdomskyy, *Seven Characterizations of non-meager P-filters*, Fund. Math. 231 (2015), no. 2, 189-208.

[18] W. Marciszewski, *P-filters and hereditary Baire function spaces*, Topology Appl. 89(1998), 241-247.

[19] A. Medini, D. Milovich, *The topology of ultrafilters as subspaces of* 2^ω, Topology Appl. 159:5 (2012), 1318-1333.

[20] S. Navarro, *Espacios Polacos, conjuntos de Ramsey y la Propiedad de Baire*, Tesis de Licenciatura, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, (2014).

[21] E. Salgado, *Aplicaciones del teorema de Categoría de Baire*, Tesis de Licenciatura, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, (2016).

[22] J. Van Mill, *Infinite-dimensional topology: Prerequisites and Introduction*, North-Holland Mathematical Library, Vol. 43. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, (1989).

[23] J. Van Mill, *Sierpiński's technique and subsets of* $\mathbb{R}$, Topology and it's Applications 44, North Holland, (1992), 241-261.

[24] J. Van Mill, *The infinite-dimensional topology of function spaces*, North-Holland Mathematical Library, Vol. 64. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, (2001).

Índice alfabético