

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas  
Posgrado en Ciencias Matemáticas

*Un esquema de regularización óptimo basado en  
cuasi soluciones para problemas inversos asociados  
a la ecuación de Laplace*

TESIS

Que para obtener el grado de:  
**Doctor en Ciencias Matemáticas**

Presenta:  
M.C. Eduardo Hernández Montero

Director de Tesis:  
Dr. Andrés Fraguera Collar

Puebla, Puebla, julio 2018.





**DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR**  
**SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y**  
**ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP**  
**P R E S E N T E:**

Por este medio le informo que el(la) C:

**EDUARDO HERNÁNDEZ MONTERO**

estudiante del Doctorado en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 21 de junio de 2018, con la tesis titulada:

***“UN ESQUEMA DE REGULARIZACIÓN OPTIMAL BASADO EN  
CUASI SOLUCIONES PARA PROBLEMAS INVERSOS  
ASOCIADOS A LA ECUACIÓN DE LAPLACE”***

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

**A T E N T A M E N T E**  
H. Puebla de Z., a 22 de junio de 2018

**DR. FERNANDO MACÍAS ROMERO**  
**COORDINADOR DEL POSGRADO**  
**EN MATEMÁTICAS.**



DR.FMR/mrv

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas | Av. San Claudio y 18 sur, edif. 111 A, Ciudad Universitaria, Col. San Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72270  
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552



*A Eliane y Dante*



*Agradezco a mi familia  
por todo el apoyo,*

*a mis amigos  
por estar siempre ahí,*

*a mi asesor  
por el trabajo realizado,*

*y al CONACYT,  
por el soporte para la realización de este trabajo.*

*An special acknowledgement to Dr. Jacques Henry,  
and CARMEN-INRIA Bordeaux team by all the  
kind support while, and after my stay with them.*



## Introducción

A través de estas páginas se aborda la regularización dos problemas inversos relacionados con aplicaciones en Medicina e Ingeniería; siendo el *Problema Inverso Electrocardiográfico* (ECG) la motivación para el que aquí figura como el principal de ellos, ámbito en el que este trabajo constituye una aportación que ha sido aprobada para su publicación en la revista científica *Mathematical Modelling of Natural Phenomena* [26]. El segundo problema se relaciona con la identificación de inclusiones de conductores (aislantes) ideales en regiones de conductividad homogénea, que ostenta aquí un papel secundario pese a ser también de relevancia para la matemática aplicada, debido a que los resultados obtenidos hasta el momento son menores en comparación con el primer problema inverso ECG.

El problema inverso ECG consiste en la identificación en un instante determinado del potencial eléctrico en el epicardio (potencial epicardial) a partir de una medición electrocardiográfica en la superficie del torso [5, 21, 30]. Durante un siglo, el electrocardiograma (ECG) ha sido la principal herramienta en cardiología para evaluar la onda eléctrica que desencadena la contracción del corazón de un paciente, en los ejemplos de mayor avance tecnológico en la práctica clínica, se cuenta con dispositivos que toman mediciones ECG de hasta 252 electrodos y técnicas del tipo BSPM (siglas en inglés: *Body Surface Potential Mapping*).

Con buena resolución en el tiempo, el ECG proporciona el efecto del potencial del corazón sobre el potencial medido en varios puntos de la superficie corporal, y los cardiólogos están entrenados para interpretarlo, siendo cualitativa la información resultante. Se cree que la capacidad de construir un mapa del potencial epicardial a partir de mediciones ECG del potencial en el torso permitirá una mejora importante para el diagnóstico; sin embargo, aún es un punto clave y tema de investigación la implementación numérica que [10, 12, 16, 15, 18, 47, 48, 49], para ser de utilidad clínica requiere de dos características fundamentales: la resolución (precisión) del potencial epicardial tiene que ser la mejor posible y el problema ha de resolverse tan rápido como sea necesario para lograr observar el comportamiento del potencial epicardial en tiempo real.

La modelación más común para el problema inverso ECG consiste en considerar al torso sin el corazón como una región conductora con corrientes capacitivas despreciables. En virtud de los trabajos de Rudy [13, 14], principalmente, se supone una conductividad constante en todo el dominio, por lo que el problema inverso ECG suele modelarse como un problema de Cauchy para la ecuación de Laplace, donde el dato de Cauchy está dado en la frontera exterior (corriente nula y medición del potencial en la superficie del torso) y primordialmente se desea recuperar el dato de Dirichlet en la frontera interior (mapeo epicardial).

Al margen del problema de la eficiencia numérica al resolver el problema de Cauchy para una ecuación elíptica como lo es la ecuación de Laplace, se sabe que el problema es severamente mal planteado en el sentido de Hadamard [4, 6, 7] *i. e.* toda vez que se sabe que la solución es única para un par de Cauchy dado, esta es sensible al error en la medición en un grado exponencial, *ver capítulo*. Ante pequeñas perturbaciones del dato de Cauchy en la frontera exterior, la solución en la frontera interior puede no existir o estar extremadamente alejada de la solución en ausencia de error. Como para todo problema inverso mal planteado en el que se observa unicidad de la solución, regularizar el problema significa lograr obtener aproximaciones que tiendan a la solución exacta del problema si el error de medición tiende a ser nulo.

El mal planteamiento exponencial o severo puede considerarse como del peor tipo para la clase de problemas inversos lineales a la que pertenece el problema de Cauchy, es la raíz de las dificultades de aplicación del problema inverso ECG y debe entenderse como inherente al problema; es decir, sin importar el método o estrategia de regularización, el peor error de regularización que puede cometerse<sup>1</sup> está definido por el error de medición y la información *a priori* disponible sobre la solución exacta, peor error que incluso puede ser no acotado si la información *a priori* dada no es *suficientemente fuerte*.

En el ámbito clínico se evalúa el comportamiento del potencial epicardial para el diagnóstico y tratamiento de afecciones cardíacas, mediante la resolución de múltiples problemas inversos ECG como los ya descritos, el potencial epicardial suele emplearse en tiempo real para tratamientos entre los que se incluye la ablación de tejido por radiofrecuencias, por lo que, como se ha dicho, son este tipo de aplicaciones médicas las que ponen los temas de investigación sobre la mesa y demandan soluciones. Por el momento el presente trabajo es de carácter teórico y se concentra en los aspectos relacionados con la mejora de la resolución, ofreciendo sólo posibles perspectivas de trabajo en cuanto a la implementación numérica en tiempo real.

---

<sup>1</sup>El peor escenario posible para la distancia entre la solución exacta del problema y la aproximación o solución regularizada

El segundo problema que se considera es el problema electrostático de identificación de inclusiones de un conductor ideal en una región de conductividad homogénea. En este caso se entiende mejor al modelo matemático a través del respectivo problema directo: dada la inclusión y el dato de corriente en la frontera exterior, determinar la traza sobre la frontera exterior de la función armónica que se anula en la frontera interior y su derivada normal en la frontera exterior es la condición de corriente dada. Si bien es cierto que este problema es importante en ingeniería y está relacionado con la identificación de clasificaciones en el cerebro, o con la identificación indirecta de grietas en materiales homogéneos, recibe considerablemente menos atención en este trabajo por los motivos ya explicados.

Ambos problemas inversos se abordan siguiendo lo que aquí se denomina *Metodología de Datos Admisibles* (MDA), que conceptualmente puede entenderse como una prueba de hipótesis determinista que se detalla en el capítulo . Por ahora la MDA es un enfoque esquemático que adolece de definiciones o pruebas formales para su aplicación general como teoría matemática; sin embargo, en el camino a su formalización, se presenta mediante ejemplos de su aplicación, primero por A. Fraguela en [20] y recientemente en los resultados del trabajo aquí presentado [26].

La principal aportación de este trabajo, reflejada en el teorema 10 y la sección 3.3, es la obtención y demostración de optimalidad de la estrategia de regularización MDA para el problema de Cauchy ya descrito, bajo supuestos de suavidad en los pares de Cauchy y solución exacta del problema que son bastante débiles en comparación con lo requerido por los métodos usuales de la teoría general de regularización. Con información *a priori* ligeramente más fuerte, se llega también a un enfoque lagrangiano que ofrece perspectivas de trabajo para lograr la implementación práctica de la solución MDA. Respecto de la MDA, se prueba que en este caso conduce a soluciones óptimas, y respecto del problema inverso ECG, se presenta una solución para la cual se tiene la certeza de que observa un peor error de regularización tan pequeño como permite el mal planteamiento inherente al problema. En cuanto al problema de identificación de inclusiones, sólo se presentan la demostración de que la aproximación MDA es una solución regularizada que converge a la solución exacta siempre que el error de medición tienda a ser nulo.

El capítulo 1 se dedica a una ligera variación del problema de Cauchy ya descrito, donde adicionalmente se considera que la condición de Dirichlet de la solución es nula en una sección de la frontera; sin embargo,

todos los resultados presentados son aplicables al modelo clásico del problema inverso ECG. Esta variación se hace por dos motivos, la colaboración con J. Henry<sup>2</sup> quien inicialmente propuso la aplicación del método de factorización en regiones cilíndricas como una primera aproximación al problema inverso ECG [1, 25], y para garantizar que la solución del problema pertenezca a un espacio de Sobolev en el que se verifica la desigualdad de Poincaré, lo cual ofrece algunas ventajas técnicas para entender el vínculo entre el encajamiento invariante que requiere el método de factorización y la solución MDA, al mismo tiempo que simplifica los cálculos del orden de mal planteamiento del problema en regiones cilíndricas, facilitando la comprensión de lo que significa el mal planteamiento exponencial (severo) para este caso. El capítulo 3 se dedica al problema inverso restante.

La presentación esquemática de la Metodología de datos admisibles y los principales acuerdos de notación para el desarrollo de estas páginas se encuentran en el capítulo, así como los conceptos y resultados más relevantes y de uso reiterado respecto a problemas inversos y otros temas pueden ser localizados en los Preliminares del trabajo. El capítulo 1 se organiza de la forma siguiente: la sección 1 se dedica a la formulación del problema inverso desde el enfoque de esta metodología. En la sección 2 es presentada la solución MDA del problema de Cauchy para la ecuación de Laplace, así como la prueba de su optimalidad. En la sección 3 se presenta un esquema lagrangiano de la solución MDA basado en información *a priori* adicional a la de la sección anterior. En el capítulo 2 es aplicada la metodología propuesta cuando  $\Omega$  es una región cilíndrica, presentando también ejemplos numéricos para el cilindro simétrico con el disco unitario como base; el vínculo de la metodología MDA con el método de factorización desarrollado por J. Henry y A. Ramos en [25] se muestra en la sección 2, sugiriendo un método de discretización para la solución MDA en geometrías más complejas de  $\Omega$ . En los ejemplos numéricos se comparan las soluciones MDA y de Tikhonov, siendo la segunda la estrategia de regularización más empleada en la literatura para problemas inversos mal planteados. Finalmente, la sección 3 contiene una breve comparación teórica entre la solución MDA y la solución al problema de Cauchy por una solución del tipo Kohn-Vogelius utilizado por el método de factorización.

El capítulo 3 se dedica en su totalidad a seguir la metodología de datos admisibles para la solución del problema de identificación de inclusiones; sin embargo, en este caso no se alcanza una demostración sobre la optimalidad de la solución MDA.

---

<sup>2</sup>INRIA Bordeaux Sud Ouest, 200, avenue de la Vieille Tour, 33140, TALENCE, FRANCE

## Índice general

Introducción	I
Preliminares	1
Convenciones de notación y conceptos destacados	1
Sobre la metodología de datos admisibles (MDA)	5
Capítulo 1. Una cuasi solución óptima al problema de Cauchy con condición parcial de Dirichlet nula	9
1. Formulación operacional y datos admisibles	12
2. Solución MDA	17
3. Información <i>a priori</i> adicional y formulación lagrangiana	23
Capítulo 2. Identificación de la condición de Dirichlet en regiones cilíndricas	37
1. Regularización en un esquema semi- discretizado	39
2. Relación con el encajamiento invariante	44
3. Comentarios adicionales al capítulo	49
Capítulo 3. Identificación de inclusiones de conductores ideales en regiones de conductividad homogénea	53
1. Problema directo y formulación operacional	53
2. Construcción de la solución de datos admisibles	57
3. Inclusión circular en el disco, ejemplo numérico	65
Capítulo 4. Conclusión	73
Sobre el problema de Cauchy	73
Sobre el problema de identificación de inclusiones	75
Bibliografía	77



## Preliminares

El objetivo de este capítulo es establecer los acuerdos de notación, así como enunciar los conceptos y resultados sobre problemas inversos y espacios normados que serán recurrentes a lo largo de estas páginas. También se dedica una sección a explicar esquemáticamente lo que se entenderá aquí como la Metodología de Datos Admisibles, concepto que tiene un papel protagónico a lo largo de estas páginas.

### Convenciones de notación y conceptos destacados

Como es usual se reservan las siguientes notaciones básicas:

$\mathbb{R}$	Campo de números reales.
$\mathbb{C}$	Campo de números complejos.
$\mathbb{Z}$	Conjunto de números enteros.
$\mathbb{N}$	Conjunto de números naturales.
$\partial\Omega$	Frontera de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .
$\mathcal{B}_X(x, r)$	Bola abierta en el espacio normado $X$ , con centro en $x$ y radio $r$ .
$\mathcal{B}_X(r)$	$\mathcal{B}_X(0, r)$
$\text{cl}_X(\mathbf{M})$	Cerradura del conjunto $\Omega$ en el espacio $X$ .
$R(T)$	Rango del operador $T$ .
$\text{graph}(Y)$	Grafo del operador o transformación $T$ .

En adelante y sin excepciones se reservará  $\Omega$  para denotar a un dominio acotado en  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $n = 2, 3$ ), cuya frontera se denota por  $\partial\Omega$ . Al mismo tiempo que  $\Gamma_0$  y  $\Gamma_1$  serán superficies de clase  $C^\infty$  y dimensión  $n$  en  $\partial\Omega$ ; se denomina también a  $\Gamma_0$  y  $\Gamma_1$  como frontera accesible y frontera inaccesible, respectivamente. También se refiere a  $\Gamma_1$  como frontera interior y  $\Gamma_0$  como el que modela al problema inverso ECG, donde  $\Gamma_1$  modela al epicardio (superficie en el interior del torso) y  $\Gamma_0$  modela a la superficie corporal en la que se toma la medición ECG.

### Sobre espacios normados y operadores lineales.

Se reserva la notación  $(\cdot, \cdot)_X$  para el producto escalar en el espacio de producto interior  $X$ . También se reserva la notación  $L^2(\Omega)$  par el

espacio de funciones de cuadrado integrable en  $\Omega$  como un espacio de Hilbert con el producto escalar estándar. Cuando por contexto no exista ambigüedad se emplearán las notaciones simplificadas  $\|\cdot\|_{L^2}$  y  $\|\cdot\|$  para referirse a la norma en  $L^2(\Omega)$  ( $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ ).

Si  $X$  e  $Y$  son espacios normados, el símbolo  $\mathcal{L}(X, Y)$  se refiere al conjunto de operadores lineales y acotados de  $(X, \|\cdot\|_X)$  en  $(Y, \|\cdot\|_Y)$ . En el caso particular  $X = Y$  se usa una notación simplificada  $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$ . El espacio  $\mathcal{L}(X, Y)$  se dota de su norma estándar:

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X = 1\}.$$

De nuevo, se abusará de la notación  $\|\cdot\|$  para referirse a la norma en  $L^2$  así como la norma estándar en  $\mathcal{L}(X, Y)$  cuando no exista ambigüedad. La notación  $T^*$  se reserva para el operador adjunto de  $T$  cuando  $X$  e  $Y$  son espacios de Hilbert.

Se denota por  $D^\alpha f$  como la derivada parcial en sentido de Sobolev de orden  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  de la función  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ ,  $H^s(\Omega)$  es el espacio de Sobolev de las funciones de cuadrado integrable cuyas derivadas en sentido débil hasta el orden  $s$  también son de cuadrado integrable; mientras que  $H^1_0(\Omega)$  es la clausura del espacio de funciones de prueba usual  $\mathcal{D}(\Omega)$  (funciones infinitamente diferenciables y con soporte compacto en  $\Omega$ ) en la norma de  $H^1$ . La notación anterior que concierne a los espacios de Sobolev se extiende a las superficies de interés en la frontera de  $\Omega$ , y se empleará una notación de exponente negativo para denotar al correspondiente espacio dual respecto de la dualidad definida por  $L^2$ ; es decir, para la superficie  $S$  en  $\partial\Omega$ , la notación  $H^{-s}(S)$  se refiere al dual en el sentido descrito del espacio de Sobolev  $H^s(S)$  ( $s > 0$ ).

Con respecto a la forma en que se denotan las condiciones de contorno en  $\partial\Omega$ , la convención de notación en este trabajo es, salvo en contadas excepciones, que las condiciones de contorno en  $\Gamma_1$  serán referidas por letras mayúsculas del alfabeto griego, mientras que se emplearán las minúsculas para denotar a las condiciones de contorno en  $\Gamma_0$ . En particular, se reservan  $\Phi$  y  $\phi$  para denotar condiciones de Dirichlet, en tanto que  $\Psi$  y  $\psi$  son notaciones reservadas para condiciones de Neumann.

Sin excepciones  $u|_S$  la traza a  $S$  de la función  $u$  en  $H^p(\Omega)$  ( $p \geq 1$ ) y  $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_S$  la respectiva derivada normal en  $S \subset \partial\Omega$ :  $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_S = \nu \cdot \nabla u|_S$ , donde  $\nu$  es el vector unitario ortogonal a  $\partial\Omega$  y exterior a  $\Omega$ .

**Resultados destacados.** Existen cuatro resultados destacados del Análisis funcional que serán que serán citados a menudo y que juegan un papel destacado en este trabajo, por lo que son presentados aquí una forma restringida a las necesidades técnicas de los capítulos siguientes

*Descomposiciones espectral y singular de operadores compactos.* Estos dos resultados serán de utilidad aquí para entender el mal planteamiento de un problema lineal y lo que presentamos ahora es un extracto de [31, Apéndice A.5].

TEOREMA 1 (Descomposición espectral). *Sea  $T : X \rightarrow X$  un operador compacto y autoadjunto distinto de 0. Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones*

1. *El espectro de  $T$  consiste de un conjunto no vacío y a lo sumo numerable de valores propios reales y posiblemente 0, donde 0 es el único punto de acumulación.*
2. *Los espacios propios son todos de dimensión finita.*
3. *Ordenados los valores propios de  $K$  conforme a su valor absoluto  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$ , y definiendo  $\mathcal{P}_k$  como la proyección ortogonal de  $X$  al núcleo de  $T - \lambda_k I$ , entonces*

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mathcal{P}_k;$$

*donde la serie es una suma finita si la cardinalidad del conjunto de valores propios de  $T$  es finita.*

4.  *$X$  es la suma directa de la clausura del espacio generado por los vectores propios con el núcleo de  $T$ .*

DEFINICIÓN 1. *Sean  $X$  e  $Y$  espacios de Hilbert y  $T : X \rightarrow Y$  un operador compacto, con operador adjunto  $T^* : Y \rightarrow X$ . Se llama valor singular a cualquiera de las raíces cuadradas  $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$  de los valores propios  $\lambda_k$  del operador compacto, autoadjunto y definido no negativo operador  $T^*T$ .*

TEOREMA 2 (Descomposición de Valores Singulares). *Sean  $T$  y  $T^*$  como en la definición anterior inmediata, con  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots$  la secuencia ordenada de valores singulares (positivos) de  $T$ . Entonces existen sistemas ortonormales  $\{x_k\}$  en  $X$  y  $\{y_k\}$  en  $Y$  con las siguientes propiedades:*

$$Tx_k = \mu_k y_k \quad \text{y} \quad T^*y_k = \mu_k x_k, \quad k \leq \mathfrak{k};$$

*donde  $\mathfrak{k}$  es la cardinalidad del conjunto de valores singulares de  $T$  ( $\mathfrak{k} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ).*

*El sistema  $(\mu_k, x_k, y_k)$  se llama sistema singular de  $T$ . Cada  $x$  en  $X$  posee una descomposición singular*

$$x = x_0 + \sum_{k \leq \mathfrak{k}} (x, x_k)_X x_k,$$

*con  $x_0$  en el núcleo de  $T$ , y*

$$Tx = x_0 + \sum_{k \leq t} \mu_k(x, x_k)_X y_k.$$

*Desigualdad de Poincaré y Fórmula de Green.* . Las desigualdades tipo Poincaré en espacios de Sobolev permiten definir normas equivalentes a la de  $H^1(\Omega)$  a partir de considerar sólo aquella parte de la norma que corresponde a la norma en  $L^2$  del gradiente. En particular, aquí se recurrirá frecuentemente a la desigualdad de Poincaré conforme a la Definición 10.1 en [43].

DEFINICIÓN 2 (Extracto de [43]). *Sea  $X$  un subespacio de  $H^1(\Omega)$ . Se dice que se verifica la desigualdad de Poincaré en  $X$  si existe una constante  $C_X > 0$  tal que*

$$\|u\| \leq C_X \|\nabla u\| \quad \forall u \in X.$$

TEOREMA 3 (Extracto de [43]). *Sea  $X$  un subespacio de  $H^1(\Omega)$ . Si la constante idénticamente 1 no pertenece a  $X$ , entonces se verifica la desigualdad de Poincaré en 1.*

En cuanto a la fórmula de Green, es un resultado ampliamente conocido [36, 37, 45] que aquí enunciamos en la versión más simple que atiende de manera suficiente a las necesidades de este trabajo.

TEOREMA 4 (Fórmula de Green). *Si  $u$  pertenece a  $C^2(\Omega) \cap C^1(\text{cl}_{\mathbb{R}}(\Omega))$ , entonces*

$$\int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla u(x) dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \partial\Omega dS - \int_{\Omega} v(x) \Delta u(x) dx.$$

**Sobre problemas inversos.** Hablar de problemas inversos siempre conlleva aludir con frecuencia a las mediciones o perturbaciones de los observables de un fenómeno, que aquí serán elementos de interés en espacios métricos. Por regla general debe entenderse a  $\tilde{\mathbf{x}}$  en el espacio métrico  $(\tilde{X}, d_X)$  como una aproximación conocida del elemento desconocido o exacto  $\mathbf{x}^\dagger$ .

Sean  $X$  y  $Y$  espacios de Banach,  $X_1$  un subespacio denso de  $X$ ,  $\|\cdot\|_1$  una norma definida en  $X_1$  que es más fuerte que la norma en  $X$ ,  $T : X \rightarrow Y$  un operador lineal y continuo,

DEFINICIÓN 3 (Extracto de [31]). *Considérese el problema inverso*

$$(1) \quad Tx^\dagger = y^\dagger, \quad \|\tilde{y} - y^\dagger\|_Y \leq \delta.$$

*Se define el error de regularización en el peor de los casos para  $T$ , correspondiente al orden de error  $\delta > 0$  en la medición y a la información a priori  $\|x^\dagger\|_1 \leq K$  (peor error) por:*

$$\omega_T(\delta, K, \|\cdot\|_1) = \sup \{ \|x\|_X : x \in X_1, \|Tx\|_Y \leq \delta, \|x\|_1 \leq K \}.$$

El elemento  $\tilde{x}$  en  $X$  se dice una aproximación óptima de  $x^\dagger$  para el problema inverso (1) respecto del orden de error  $\delta > 0$  en la medición y la información a priori  $\|x^\dagger\|_1 \leq K$  si satisface

$$(2) \quad \|\tilde{x} - x^\dagger\|_X \leq \omega_T(\delta, K, \|\cdot\|_1).$$

### Sobre la metodología de datos admisibles (MDA)

La metodología de datos admisibles puede entenderse como una *prueba de hipótesis* determinista para el modelo matemático de un fenómeno en el siguiente sentido. Considérese que para el fenómeno se dispone de un modelo matemático que formalmente caracteriza a los siguientes objetos:

- Observables asequibles: aquellos para los cuales es asequible obtener mediciones directas con un error «aceptable» .
- Observables no asequibles: aquellos cuyas mediciones directas no seno asequible y sólo pueden ser obtenidas mediciones indirectas que dependen (continuamente o no) de las mediciones de los observables asequibles.
- Mecanismo de correspondencia: mecanismo que pone en correspondencia a los observables no asequibles con los observables asequibles, de forma que, un estado determinado del sistema, existe un único valor de estado para el conjunto de los observables no asequibles que está en correspondencia con los valores de estado de los observables asequibles.

En esta situación el problema inverso se entiende como la identificación de una aproximación del estado de los observables no asequibles a partir de una medición del valor de los observables asequibles para un estado «real» determinado.

Se denota con la variable  $\mathbf{x}$  a los valores de estado de los observables no asequibles, cuyos posibles estados teóricos<sup>3</sup> están en  $\mathbf{X}$ , y con  $\mathbf{y}$  a los valores de estado correspondientes a los observables asequibles con estados teóricos en  $Y$  ( $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  no necesariamente de la misma dimensión). Se dice que el problema inverso es bien planteado si el mecanismo que transforma a  $x$  en  $y$  es inyectivo, continuo y reversible i.e. si puede ser invertido de forma que  $\mathbf{x}$  dependa continuamente de  $\mathbf{y}$ .

El problema inverso se dice condicionalmente bien planteado en  $\mathbf{X}_0$  (subconjunto no vacío de  $\mathbf{X}$ ), si restringido el modelo a  $\mathbf{X}_0$  y sus correspondientes subconjunto de posibles valores de estado teóricos para

---

<sup>3</sup>Estados que son objetos matemáticos formales en el modelo.

los observables asequibles  $\mathbf{Y}_0$  se verifica que el problema inverso es bien planteado. En tal caso se conoce a  $\mathbf{X}_0$  como un conjunto de buen planteamiento condicional del problema inverso. Para la MDA, el conjunto  $\mathbf{Y}_0$  se dirá un subconjunto de datos admisibles de buen condicionamiento para el problema inverso.

Dada una medición  $\tilde{\mathbf{y}}$  de un estado real del estado teórico  $\mathbf{y}^\dagger$ <sup>4</sup>, donde se asume que el error de medición es determinista, la prueba de hipótesis que subyacente a la metodología MDA esquemáticamente consiste en:

**Rechazar** la hipótesis que dice que el error de medición en  $\tilde{\mathbf{y}}$  es suficientemente pequeño (de orden de magnitud a lo sumo  $\delta > 0$ ), si NO existen  $\mathbf{Y}_0$  subconjunto de datos admisibles de buen planteamiento condicional para el modelo de tal suerte que la distancia de  $\tilde{\mathbf{y}}$  a  $\mathbf{Y}_0$  sea de orden no mayor que  $\delta$  y se alcance en un único elemento  $\mathbf{y}^\delta$  de  $\mathbf{Y}_0$  que dependa continuamente de la medición  $\tilde{\mathbf{y}}$ .

Así, la metodología de datos admisibles consiste utilizar la información *a priori* sobre el fenómeno real, o suponerla, construir todos los elementos y realizar la prueba de hipótesis anterior:

1. Determinar a  $\mathbf{Y}_0$  con información *a priori*, garantizando que  $\mathbf{y}^\dagger$  pertenece a  $\mathbf{Y}_0$ .
2. Determinar a la proyección  $\mathbf{y}^\delta$ .
3. Proponer al valore de estado  $\mathbf{x}^\delta$ , correspondiente a  $\mathbf{y}^\delta$ , como una aproximación de la solución exacta  $\mathbf{x}^\dagger$ . Se refiere a  $\mathbf{x}^\delta$  como la solución MDA.

La conjetura principal sobre la MDA es que provee de soluciones regularizadas óptimas; sin embargo, aún no presentan demostraciones formales sobre este hecho en general. La implementación y demostración de optimalidad de la solución MDA en cada ejemplo de aplicación es por ahora una aportación propia, tanto para la metodología como para el fenómeno de interés que describe el modelo matemático.

La modelación básica ya conocida que se estudia en este texto, tanto del problema inverso ECG como el problema de identificación de inclusiones, son ejemplos de este tipo de modelos. Además, ambos problemas inversos pueden plantearse en la siguiente forma general:

$$(3) \quad T(x^\dagger) = y^\dagger, \quad d(\tilde{y}, y^\dagger)_{\tilde{Y}};$$

donde  $X, Y, \tilde{Y}$  son espacios métricos,  $Y$  está contenido en  $\tilde{Y}$  y  $T$  es una transformación inyectiva y continua de  $X$  en  $Y$  con inversa no continua de  $\tilde{Y}$  en  $X$  o en un espacio métrico más débil que lo contenga  $\tilde{X}$ . En ambos casos los datos admisibles (subconjunto de valores de estado de

---

<sup>4</sup>Estado posible para el sistema real y cuya medición empírica se asume como una medición del estado de un observable teórico del modelo matemático.

observables asequibles con sentido para la aplicación de interés) son pares de Cauchy de cuadrado integrable dados dados en la frontera «accesible» de la región física de interés. El elemento  $x^\dagger$  se conoce como *dato de entrada* en la ecuación (3), y el elemento  $y^\dagger$  como el dato de salida.

Para el problema de Cauchy estudiado y generalización del problema inverso ECG se tiene que  $T$  es un operador lineal y compacto entre subespacios de funciones de cuadrado integrable, y dato de salida depende lineal y en forma continua respecto de los datos admisibles. En cuanto al problema de identificación de inclusiones, el dato de entrada es la inclusión o una parametrización de la misma, el dato de salida es la componente de Dirichlet del dato de Cauchy, y  $T$  es un operador compacto definido por la propia inclusión y el dato de Neumann en el par de Cauchy.



## Una cuasi solución óptima al problema de Cauchy con condición parcial de Dirichlet nula

El problema de Cauchy para la ecuación de Laplace ha sido ampliamente estudiado [1, 4, 7, 16] y lo que suele ser realmente importante es la identificación de condiciones de contorno en secciones inaccesibles de la frontera; problema que puede abordarse como un problema inverso lineal y exponencialmente mal planteado en el sentido de Hadamard [6, 22]. De forma que, mejorar la precisión de los métodos de regularización aún constituye un área de investigación [10], aún cuando en el marco de la teoría general ya existen estrategias de orden óptimo, e incluso asintóticamente óptimas [27, 42, 40, 41], *ver* cap. Preliminares.

En el presente capítulo se aplica la metodología de datos admisibles al siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned}
 (4a) \quad & \Delta u \equiv 0 \text{ en } \Omega, \\
 (4b) \quad & u|_{\Sigma} = 0, \\
 (4c) \quad & u|_{\Gamma_0} = \phi, \\
 (4d) \quad & \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_0} = \psi;
 \end{aligned}$$

donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \geq 1$ ) es un dominio con frontera suave a trozos  $\partial\Omega$ . Las notaciones  $\Gamma_0$  y  $\Gamma_1$  se refieren a superficies de clase  $C^\infty$  y de dimensión  $n$  en  $\partial\Omega$  y  $\Sigma = \partial\Omega \setminus (\Gamma_0 \cup \Gamma_1)$ . Se asume que es positiva la distancia euclidiana entre las cerraduras de  $\Gamma_0, \Gamma_1$ , *ver* Figura 1. El problema (4) es considerado en esta etapa como el modelo teórico del problema inverso ECG en su versión clásica.

Por ser suficiente para las aplicaciones clínicas, se asume como parte del modelo que el par  $(\phi, \psi)$  pertenece a  $\mathbf{M}$ , la clase de funciones en el espacio producto de funciones de cuadrado integrable, para las que el problema (4) tiene solución y ella puede ser extendida a  $\Gamma_0$  en un sentido de trazas *i. e.*  $\mathbf{M}$  es la clase de datos admisibles en la MDA.

La solución de (4) será considerada en un sentido débil, identificar la condición de contorno de Dirichlet significará determinar una función

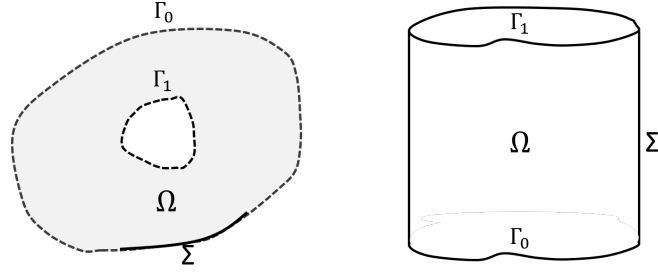


FIGURA 1. Esquema de dos posibles geometrías de  $\Omega$ .  
 (izquierda) Relacionada con el problema inverso ECG.  
 (derecha) Geometría cilíndrica estudiada en la sección 2.

$\Phi$  en el espacio de Sobolev  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ , y una función armónica  $u$  en  $H^1(\Omega)$  que satisfacen (4b)-(4d) y

$$(5) \quad u|_{\Gamma_1} = \Phi.$$

Llevar el problema de Cauchy a una formulación como un problema inverso lineal en forma de una ecuación formal se hace de forma natural mediante la formulación de su respectivo problema directo, consistente en determinar la condición de Dirichlet  $\phi$  en  $\Gamma_0$  para la función armónica  $u$  en  $H^1(\Omega)$  que verifica las condiciones de contorno (4b), (4d) y (5). Entonces, el problema directo queda expresado en forma de una ecuación abstracta como sigue:

$$(6) \quad A\Phi + B\psi = \phi;$$

donde  $A$  es el operador del tipo Dirichlet-Dirichlet que pone en correspondencia a  $\Phi \in D(A) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  con la traza a  $\Gamma_0$  de la solución del problema auxiliar de contorno (4a), (4b), (5) y  $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_0} \equiv 0$ , mientras que  $B$  es el operador Neumann-Dirichlet que pone en correspondencia al dato de Neumann  $\psi \in D(B) \subset H$  en  $\Gamma_0$  con la traza a  $\Gamma_0$  de la solución del problema auxiliar de contorno (4a), (4b), (4d) y  $u|_{\Gamma_1} \equiv 0$ .

Se prueba en secciones posteriores que los operadores  $A$  y  $B$  en 6 son compactos de su dominio natural en  $L^2(\Gamma_0)$ , el espacio funcional donde se consideran las mediciones de los observables  $\phi$  y  $\psi$ . Si definimos a  $\rho$  como el observable  $\phi - B\psi$ , Tenemos que este depende continuamente del Dato de Cauchy  $(\phi, \psi)$ , una medición de  $(\phi, \psi)$  producirá una medición de  $\rho$  y el orden de magnitud del error de medición no variará, por lo que finalmente el problema de identificación del dato de Dirichlet que nos interesa se formula como un problema inverso lineal del primer tipo

considerado en [31] (ecuación lineal para un operador compacto entre espacios de Banach):

$$A\Phi = \rho \quad (\rho = \phi - B\psi).$$

Cuando  $\Phi^\dagger$  y  $(\phi^\dagger, \psi^\dagger)$  son la solución y dato de Cauchy exactos para la medición dada  $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$ , y ambas componentes del par de Cauchy están dadas con ruido (error) de orden  $\delta > 0$  a lo sumo ( $\|\phi^\dagger - \tilde{\phi}\| \leq \delta$  y  $\|\psi^\dagger - \tilde{\psi}\| \leq \delta$ ); entonces, el problema inverso a regularizar, la identificación en la frontera no accesible  $\Gamma_1$  de la condición de Dirichlet de la solución al problema de Cauchy (4), es como sigue:

$$(7) \quad A\Phi^\dagger = \rho^\dagger, \quad \|\rho^\dagger - \tilde{\rho}\| \leq \delta_{\text{aux}};$$

donde

$$\begin{aligned} \|\phi^\dagger - \tilde{\phi}\| &\leq \delta, & \|\psi^\dagger - \tilde{\psi}\| &\leq \delta, \\ \rho^\dagger &= \phi^\dagger - B\psi^\dagger, & \delta_{\text{aux}} &= (1 + \|B\|)\delta. \end{aligned}$$

La solución de Tikhonov<sup>1</sup>  $\Phi_T^{\delta, \alpha} = (A^*A + \alpha I)^{-1}A^*\tilde{\rho}$  [31] es la estrategia de regularización más común en la literatura para resolver (1) que, al igual que la mayoría de estrategias de regularización en la teoría general de problemas inversos lineales (Laurentiev, Landwever, TSVD<sup>2</sup>, Gradiente Conjugado y métodos de discretización en general) [17, 19, 24, 31], utilizar un mínimo de información *a priori* sobre  $\Phi^\dagger$  para regularizar la pseudo inversa de Moore-Penrose<sup>3</sup> de  $A$  (alguna condición de fuente en el sentido de [27, 42, 41] o un orden de error conocidos), lo que significa determinar  $\Phi^{\text{reg}}$  en el dominio de  $A$  que minimiza la discrepancia  $\|A\Phi - \tilde{\rho}\|$ . Todas estas estrategias proveen soluciones asintóticamente óptimas o de orden óptimo cuando la información *a priori* implica que la solución exacta  $\Phi^\dagger$  es acotada en una norma más fuerte que la de  $L^2(\Gamma_1)$ ; sin embargo, requieren de un alto orden de suavidad sobre la solución exacta para lograr aproximaciones óptimas en el caso de problemas severamente mal planteados [31].

<sup>1</sup>Dependiente del parámetro de regularización  $\alpha > 0$  que debe tender a ser nulo cuando la magnitud del error de medición  $\delta > 0$  converge a 0 y que se determina: con base en la experiencia numérica, mediante estrategias de identificación específicas en completa ausencia de información sobre los datos, o con base en información a priori disponible sobre  $\delta > 0$  y/o la "suavidad" de la solución exacta  $\Phi^\dagger$ .

<sup>2</sup>Siglas en ingles de Truncated Singular Values Decomposition

<sup>3</sup>Elemento  $\tilde{\Phi}_{MP}$  en  $D(A)$  que minimiza el cuadrado de la discrepancia  $\|A\Phi - \tilde{\rho}\|_{L^2(\Gamma_1)}$ .

Como ya se ha explicado antes, aplicar la Metodología de Datos Admisibles en este caso significa:

1. Determinar la información *a priori* que caracteriza a  $M \subset M$ , un subconjunto de datos admisibles de buen planteamiento condicional para (6); donde  $M$  también debe satisfacer que  $(\phi^\delta, \psi^\delta)$ , la proyección de distancia mínima, en la norma del producto de  $L^2(\Gamma_0)$  con él mismo, de la medición  $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$  sobre  $M$ , esta bien definida y es bien planteada<sup>4</sup>.
2. Obtener la solución MDA:  $\tilde{\Phi} = A^{-1}\rho^\delta$  ( $\rho^\delta = \phi^\delta - B\psi^\delta$ ).

En la sección 2 se demuestra que la solución MDA en este caso es una cuasi solución del problema inverso en el sentido de [17], que para ser óptima requiere de restricciones de suavidad más débiles que las requeridas por la solución de Tikhonov [31], la estrategia de regularización más empleada en la literatura. En particular, cuando la información *a priori* es suficientemente fuerte (61)), la solución MDA adquiere una formulación lagrangiana  $\Phi_{MDA}^{\delta, \alpha}$ , dependiente de un multiplicador de Lagrange  $\alpha > 0$ , que inmediatamente permite la comparación y establece una relación con la solución de Tikhonov:

$$(8) \quad \Phi_{MDA}^{\delta, \alpha} = Q_s(A_s^*A_s + \alpha I)^{-1}A_s^*\rho^\delta \quad vs \quad \Phi_T^{\delta, \alpha} = (A^*A + \alpha I)^{-1}A^*(\tilde{\rho});$$

Donde  $Q_s$  en  $\mathcal{L}(L^2(\Gamma_1))$  y  $A_s$  en  $\mathcal{L}(L^2(\Gamma_1), L^2(\Gamma_0))$  son operadores compactos que respectivamente convergen puntualmente a convergen a la identidad y a  $A$ .

El método de soluciones fundamentales presentado por T. Wei y Y.G. Chen en [46] puede considerarse un esquema de discretización para esta metodología; que exige condiciones de suavidad muy altas para la solución exacta del problema inverso y no garantiza formalmente soluciones asintóticamente óptimas. Asume que la solución del problema de Cauchy se encuentra suficientemente próxima, en la norma de  $H^1(\Omega)$ , a un espacio de dimensión finita de la forma  $H = \{\sum_{k=1}^m a_k u_k\}$ , donde  $a_k$  es un escalar y  $u_k$  es una solución fundamental de la ecuación de Laplace, con soporte en un punto exterior de  $\Omega$  que se encuentra muy próximo a la frontera  $\partial\Omega$ .

### 1. Formulación operacional y datos admisibles

A través de esta sección y las siguientes,  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \geq 1$ ),  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_0$  y  $\Sigma$  serán como antes fueron definidas para el problema de Cauchy (4). Se definen los siguientes subespacios de  $H^1(\Omega)$ , que son de forma natural el espacio al que pertenece la solución de (4) y el espacio de funciones de prueba para la Definición 4 de solución débil:

---

<sup>4</sup>La proyección  $(\phi^\delta, \psi^\delta)$  existe, es única y depende continuamente de  $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$ .

$$\mathbf{E}_0(\Omega) = \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega) : v|_{\Sigma} = 0\}, \quad \mathbf{E}_{00}(\Omega) = \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega) : v|_{\Sigma \cup \Gamma_1} = 0\}.$$

y  $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(S)$

Toda vez que la función idénticamente 1 en  $\Omega$  no pertenece a  $\mathbf{E}_0(\Omega)$ , la desigualdad de Poincaré se verifica en  $\mathbf{E}_0(\Omega)$  y  $\mathbf{E}_{00}(\Omega)$  (*ver* cap. Preliminares o Lema 10.2(vi) en [43]); de forma que estos espacios son provistos una norma equivalente a la de  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  inducida por siguiente producto escalar:

$$\begin{aligned} (u, v)_{\mathbf{E}_0(\Omega)} &= (\nabla u, \nabla v)_{L^2} \\ &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) \frac{\partial v}{\partial x_k}(x) dx. \end{aligned}$$

Si  $S$  es una superficie suave a trozos y contenida en  $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\Omega)$ , entonces se define a  $\mathbf{E}^{\frac{1}{2}}(S)$  como el espacio de las trazas a  $S$  de funciones en  $\mathbf{E}_0(\Omega)$ :

$$\mathbf{E}^{\frac{1}{2}}(S) = \left\{ \varphi \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i) : \exists v \in \mathbf{E}_0(\Omega) : v|_{\Gamma_i} = \varphi \right\};$$

provisto de la siguiente norma equivalente a la de  $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(S)$

$$(9) \quad \|\varphi\|_{\mathbf{E}^{\frac{1}{2}}(S)} = \inf \left\{ \|u\|_{\mathbf{E}_0(\Omega)} : u|_S = \varphi \right\}.$$

Es muy importante aclarar que la definición en (9) de la norma en el espacio  $\mathbf{E}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  en particular, será temporal. A partir del Lema 6 se sustituirá por  $\|\Phi\|_{\mathbf{E}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \|u_1\|_{\mathbf{E}_0(\Omega)}$ , con  $u_1$  definida en el propio Lema 6.

Ahora, considérese el problema de contorno (10), y la Definición 4 de solución débil, donde se sustituye al espacio de funciones de prueba  $\mathcal{D}(\Omega)$  (funciones infinitamente diferenciables y con soporte compacto en  $\Omega$ ) por  $\mathbf{E}_{00}(\Omega)$ :

$$(10a) \quad \Delta u \equiv 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$(10b) \quad u|_{\Sigma} = 0,$$

$$(10c) \quad u|_{\Gamma_1} = \Phi,$$

$$(10d) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\Gamma_0} = \psi.$$

**DEFINICIÓN 4.** *Para una pareja dada de condiciones de contorno  $(\Phi, \psi)$  en  $\mathbf{E}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times \mathbf{E}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ , se dice que una función  $u$  perteneciente a  $\mathbf{E}_0(\Omega)$  es una solución débil del problema (10) si simultáneamente se satisface la condición de contorno  $u|_{\Gamma_1} = \Phi$  y la relación integral (11).*

$$(11) \quad (u, v)_{E_0(\Omega)} = \langle v|_{\Gamma_0}, \psi \rangle_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}, \quad \forall v \in E_{00}(\Omega).$$

El conjunto  $\mathcal{D}(\Omega)$  está contenido en  $E_{00}(\Omega)$ , por lo cual la solución débil definida anteriormente es también una solución en el sentido de Mi-jailov [36], por lo que la solución débil es también una función clásica, es decir, es una función armónica en sentido clásico que además pertenece a  $H^1(\Omega)$ . La existencia, unicidad y dependencia continua de la solución débil del problema (10) con respecto a los datos de contorno se demuestran en forma análoga a como se hace en [36] para problemas de contorno elípticos.

LEMA 5. *Si existe u solución débil del problema de contorno (10) para el par  $(\Phi, \psi)$  en  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ , entonces es única.*

DEMOSTRACIÓN. Dada la dependencia lineal de  $u$  respecto del par  $(\Phi, \psi)$ , bastará para demostrar la unicidad con el caso en que  $u$  es la solución para el par  $(\Phi \equiv 0, \psi \equiv 0)$ . En este caso y por definición se sigue que  $u$  pertenece a  $E_{00}(\Omega)$  y es tal que  $(\nabla u, \nabla v)_{L^2} = 0$  para toda  $v$  en  $E_{00}(\Omega)$ , lo cual implica que  $u$  es única y es la solución trivial para el caso  $(\Phi \equiv 0, \psi \equiv 0)$ .  $\square$

OBSERVACIÓN 1. *El Lema 5 garantiza la unicidad de  $u_1$  en los Lemas 6-7.*

LEMA 6. *Para toda  $\Phi$  en  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ , existe  $u_1$  solución débil de (10) con condición de Neumann (10d) nula ( $\psi \equiv 0$ ). Además  $u_1$  verifica*

$$(12) \quad \|u_1\|_{E_0(\Omega)} \leq C_1 \|\Phi\|_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)};$$

donde la constante  $C_1$  no depende de  $\Phi$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $u$  en  $E_0(\Omega)$  tal que  $u|_{\Gamma_1} = \Phi$ ; la existencia de  $u$  se garantiza por definición para todo elemento de  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ . Sea  $\Lambda_u : E_{00}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  el funcional definido por  $\Lambda_u v = -(u, v)_{E_0(\Omega)}$ ; de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que  $\Lambda_u$  es acotado:

$$(13) \quad |\Lambda_u v dx| = |(u, v)_{E_0(\Omega)}| \leq \|u\|_{E_0(\Omega)} \|v\|_{E_0(\Omega)}.$$

Por el teorema de Riesz, existe una única  $w_u$  en  $E_{00}(\Omega)$  tal que  $\|w_u\|_{E_{00}(\Omega)} = \|w_u\|_{E_0(\Omega)} = \|u\|_{E_0(\Omega)}$  y  $(w_u, v)_{E_0(\Omega)} = \Lambda_u v$  para toda  $v$  en  $E_{00}(\Omega)$ , es decir:

$$(w_u, v)_{E_0(\Omega)} = -(u, v)_{E_0(\Omega)}, \quad \forall v \in E_{00}(\Omega).$$

Así,  $u_1 = w_u + u$  es solución débil de (10) con  $\psi \equiv 0$ . Por la desigualdad triangular también se satisface la desigualdad

$$(14) \quad \|u_1\|_{E_0(\Omega)} \leq \|w_u\|_{E_0(\Omega)} + \|u\|_{E_0(\Omega)} \leq 2 \|u\|_{E_0(\Omega)}.$$

Sólo resta observar que  $u$  ha sido elegido de forma arbitraria con la única restricción de satisfacer  $u|_{\Gamma_1} = \Phi$ , por lo que (14) implica (12) con  $C_1 = 2$   $\square$

OBSERVACIÓN 2. *Como se indicado como excepción a la definición en (9), a partir de ahora  $\|\Phi\|_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \|u_1\|_{E_0(\Omega)}$ .*

LEMA 7. *Para toda  $\psi$  en  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$  existe  $u_2$  solución débil de (10) con condición de Dirichlet (10c) nula ( $\Phi \equiv 0$ ). Además, la solución  $u_2$  verifica*

$$(15) \quad \|u_2\|_{E_0(\Omega)} \leq \|\psi\|_{E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\psi$  en  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ . Claramente se define un elemento en el dual de  $E_{00}(\Omega)$  mediante la siguiente asociación:

$$v \in E_{00}(\Omega) \mapsto \langle v|_{\Gamma_0}, \psi \rangle_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}.$$

El teorema de Riesz termina la prueba de inmediato.  $\square$

OBSERVACIÓN 3. *La existencia y unicidad de solución para el problema de contorno (10) está dada por los Lemas 5 a 7. Además, en caso particular en que  $\psi$  es una distribución regular se tiene  $\|u_2\|_{E_0(\Omega)} \leq \|\psi\|$ .*

Formalmente, conforme con la definición de solución débil del problema de contorno (10), el espacio natural para definir a la clase de datos admisibles es  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ ; sin embargo, como se ha insistido hasta ahora,  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_0)$  es suficiente para fines de aplicación que se persiguen, donde una condición de Neumann adquiere sentido físico a través de la fórmula de Green cuando pertenece a  $L^2(\partial\Omega)$ . De forma que, salvo en casos específicamente indicados, la condición de Neuman (10d) se considerará como una distribución regular, de forma que la Definición 5 se presenta conforme a la filosofía de la MDA.

DEFINICIÓN 5 (Dato de Cauchy admisible). *El par de Cauchy  $(\phi, \psi)$  en  $L^2(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_0)$  se dirá un dato admisible para el problema de Cauchy (4a)-(4d), si existe  $\Phi$  en  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  de forma tal que la correspondiente solución del problema (10), en el sentido de la Definición 4, satisface  $u|_{\Gamma_0} = \phi$ .*

La función  $\Phi$  se dirá solución del problema de identificación de la condición de Dirichlet y se denotará por  $\mathbf{M}$  a la clase de datos de Cauchy admisibles.

Ahora, se definen los operadores  $A$  y  $B$  en (16) con el fin de establecer la formulación operacional del problema inverso de identificación de la Condición de Dirichlet en  $\Gamma_0$  para el problema de Cauchy (4):

$$(16) \quad \begin{array}{ccc} A : E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) & \longrightarrow & L^2(\Gamma_0) \\ \Phi & \mapsto & u_1|_{\Gamma_0} \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} B : L^2(\Gamma_0) & \longrightarrow & L^2(\Gamma_0) \\ \psi & \mapsto & u_2|_{\Gamma_0} \end{array}.$$

Ambas soluciones,  $u_1$  dependiente de  $\Phi$  y  $u_2$  dependiente de  $\psi$ , resuelven un problema de contorno bien planteado, y el operador de traza es compacto de  $H^1(\Omega)$  en  $L^2(\Gamma_0)$  [36, 34, 43]; de forma que los operadores lineales  $A$  y  $B$  son compactos.

OBSERVACIÓN 4. Se toma a  $L^2(\Gamma_0)$  como el espacio de llegada de  $A$  y  $B$  en lugar de  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ , debido a que el ruido (perturbación o error de medición) se considera como un elemento de  $L^2$  en la etapa de regularización del problema.

Es un hecho conocido que el problema de Cauchy (4) tiene solución única [3, 28]. Entonces,  $A\Phi = 0$  implica que  $u_1$  resuelve (4) para un par de Cauchy nulo dado en  $\Gamma_0$ , de forma que el operador  $A$  es inyectivo.

Por otro lado, al sustituir  $u$  y  $v$  por  $u_2$  en (11) se sigue

$$(17) \quad \|u_2\|_{E_0(\Omega)} = \int_{\Gamma_0} \psi B\psi dS, \quad \forall \psi \in L^2(\Gamma_0).$$

La igualdad en (17) simultáneamente prueba que el operador  $B$  es definido positivo. De forma análoga, para demostrar que  $B$  es autoadjunto, basta con hacer explícita la dependencia de  $u_2$  respecto de  $\psi$  ( $u_2 = u_{2,\psi}$ ) y sustituir  $u$  por  $u_{2,\psi_1}$  y  $v$  por  $u_{2,\psi_2}$  en (11), donde  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son elementos de  $L^2(\Gamma_0)$ :

$$(18) \quad (\psi_1, B\psi_2)_{L^2} = (u_{2,\psi_1}, u_{2,\psi_2})_{E_0(\Omega)} = (B\psi_1, \psi_2)_{L^2}.$$

Ahora, de (16) se redefine a  $\mathbf{M}$  en la Definición 5 como el siguiente espacio vectorial:

$$(19) \quad \mathbf{M} = \left\{ (A\Phi + B\psi, \psi) : \Phi \in E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1), \psi \in L^2(\Gamma_0) \right\}$$

Por la definición de dato de Cauchy admisible, la norma natural que se puede imponer a  $\mathbf{M}$  es la norma en  $E_0(\Omega)$  de la solución de (4), que no es otra que la solución de (10) con  $\Phi = A^{-1}(\phi - B\psi)$ . Pero, reemplazando en (11) a  $u$  por  $u_1$  del Lemma 6, y  $v$  por  $u_2$  del Lemma 7 se desprende

inmediatamente que las soluciones  $u_1$  y  $u_2$  son ortogonales en  $E_0(\Omega)$ :  $(u_1, u_2)_{E_0(\Omega)} = (0, \psi)_{L^2}$ . Haciendo explícita la dependencia de  $u_1$  en  $\Phi$  ( $u_1 = u_{1,\Phi}$ ) y de  $u_2$  en  $\psi$  ( $u_2 = u_{2,\psi}$ ), y expresando toda  $v$  en  $E_0(\Omega)$  como  $v = u_{1,v|_{\Gamma_1}} + u_{2, \frac{\partial v}{\partial \nu}|_{\Gamma_0}}$ , se llega a:

$$\|v\|_{E_0(\Omega)} = \sqrt{\|u_{1,v|_{\Gamma_1}}\|_{E_0(\Omega)}^2 + \|u_{2, \frac{\partial v}{\partial \nu}|_{\Gamma_0}}\|_{E_0(\Omega)}^2}, \quad \forall v \in E_0(\Omega);$$

es decir, por (18) se tiene que la norma natural en  $M$  es

$$(20) \quad \|(\phi, \psi)\|_M = \sqrt{\|A^{-1}(\phi - B\psi)\|_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2 + \int_{\Gamma_0} \psi B \psi dS}.$$

Por otro lado, la  $B$  es un operador compacto, autoadjunto y definido estrictamente positivo, por lo que existe  $B^{\frac{1}{2}}$  en  $\mathcal{L}(L^2(\Gamma_0))$  que también es compacto, autoadjunto y definido positivo tal que  $B\psi = B^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\psi$  para todo  $\psi$  elemento de  $L^2(\Gamma_0)$  [8, ?]. Bajo los supuestos *a priori* que hasta ahora hemos hecho para definir al conjunto de datos admisibles una norma más conveniente en  $M$  es

$$(21) \quad \|(\phi, \psi)\|_{M,1} = \sqrt{\|A^{-1}(\phi - B\psi)\|_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2 + \|\psi\|^2}.$$

Finalmente, identificar la condición de Dirichlet en  $\Gamma_0$  para la solución de (4) se formula mediante la siguiente ecuación operacional:

$$(22) \quad A\Phi = \rho, \quad \rho = \phi - B\psi.$$

**OBSERVACIÓN 5.** *Por el Lema 6 la solución  $u_1$  depende continuamente de  $\Phi$ , de forma que, por la compacidad del operador de traza de  $H^1(\Omega)$  en  $L^2(\Gamma_1)$ , se sigue que la inmersión de  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  con la norma  $\|\cdot\|_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}$  es compacta en  $L^2(\Gamma_1)$ . Este es un hecho de referencia recurrente en lo que resta del capítulo.*

## 2. Solución MDA

En secciones posteriores se mostrará cómo es que el operador Dirichlet-Dirichlet  $A$  puede ser continuamente extendido en el sentido de  $L^2$  para el caso de geometrías cilíndricas de  $\Omega$ , siendo posible que en dichos casos  $A$  sea considerado como una transformación acotada de  $L^2(\Gamma_1)$  en  $L^2(\Gamma_0)$ . Sin embargo, puede ocurrir que  $A$  no pueda ser extendido en el caso general. Siempre exista, la posibilidad de extender  $A$  será considerada de ahora en adelante como información *a priori* adicional. El

motivo de tal consideración recae en resulta de utilidad en la etapa de regularización del problema inverso.

Para abreviar notación,  $D(A)$  denotará al dominio del operador  $A$ , donde  $D(A)$  se entenderá como  $L^2(\Gamma_1)$  o como  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ , dependiendo de si es posible o no extender a  $A: A: D(A) \rightarrow L^2(\Gamma_0)$ , significando que el símbolo  $A$  será empleado indistintamente para denotar al operador original o a su extensión a  $L^2(\Gamma_0)$ , según convenga, y distinguiéndose tal uso por contexto cuando no sea necesaria una advertencia explícita.

En el problema inverso (22) se conoce una medición  $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$  (o perturbación en el caso de ejemplos sintéticos) del dato de Cauchy en lugar del dato exacto  $(\phi^\dagger, \psi^\dagger)$ . La medición está dada con un nivel u orden de error  $\delta > 0$  en la norma de  $L^2(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_0)$ , lo que significa que el problema inverso que se desea regularizar es

$$(23) \quad A\Phi^\dagger = \phi^\dagger - B\psi^\dagger; \quad \|(\phi^\dagger, \psi^\dagger)\|_{M,1} < \infty, \quad \|\phi^\dagger - \tilde{\phi}\| \leq \delta, \quad \|\psi^\dagger - \tilde{\psi}\| \leq \delta.$$

Por hipótesis se tiene que el  $(\phi^\dagger, \psi^\dagger)$  es un dato admisible que se encuentra a una distancia no mayor que  $\sqrt{2}\delta$  de la medición  $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$ ; entonces, al definir

$$(24) \quad \begin{aligned} M^\delta &= M \cap \text{cl}_{L^2} \left( \mathcal{B}_{L^2} \left( (\tilde{\phi}, \tilde{\psi}), \sqrt{2}\delta \right) \right) \\ &= \left\{ (\phi, \psi) \in M : \|(\phi - \tilde{\phi}, \psi - \tilde{\psi})\| \leq \sqrt{2}\delta \right\}, \end{aligned}$$

se garantiza por definición la siguiente pertenencia:

$$(25) \quad (\phi^\dagger, \psi^\dagger) \in M^\delta \cap \text{cl}_M(\mathcal{B}_M(K)), \quad K \geq \|(\phi^\dagger, \psi^\dagger)\|_{M,1}.$$

En este punto un esquema de cuasi soluciones para el problema inverso (22) se presenta como una alternativa natural a partir de (25) y debido a la compacidad de la inmersión de  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  en  $L^2(\Gamma_1)$ , siempre que  $D(A) = L^2(\Gamma_1)$ . Como se mostrará en breve, la solución mediante MDA es, de hecho, el resultado de un esquema de cuasi soluciones cuya piedra angular es una hipótesis ligeramente más general que la establecida por (25). Cuando la distancia de la medición al conjunto  $\mathcal{B}_M(K)$  se alcanza en algún elemento  $(\phi^\delta, \psi^\delta)$  de  $\text{cl}_M(\mathcal{B}_M(K))$ , para una constante  $K > 0$  dada como información *a priori*, entonces es justamente  $\Phi^\delta = A^{-1}(\phi^\delta - B\psi^\delta)$  la función que naturalmente se presenta como una solución regularizada del problema inverso (23). Lo que busca la metodología MDA en este caso, son condiciones suficientes para garantizar la existencia de  $(\phi^\delta, \psi^\delta)$  y que, simultáneamente,  $\Phi^\delta$  converja a  $\Phi^\dagger$  cuando el error de medición tienda a ser nulo ( $\delta \rightarrow 0$ ).

La solución MDA del problema (23) requiere de la proyección de distancia mínima (en la norma de  $L^2$ ) de la medición del dato de Cauchy sobre un subconjunto de datos admisibles, debido a que el error en (23) se considera también en la norma de  $L^2$ . Desafortunadamente, el problema de determinar dicha proyección es en general mal planteado, debido a que el conjunto de datos admisibles no es un subespacio cerrado de  $L^2(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_0)$ , de modo que tal proyección es el primer lugar donde será requerida información *a priori* para lograr un buen comportamiento de la proyección. En nuestro caso particular, la pertenencia de la solución exacta a un subconjunto compacto y convexo conocido será la información *a priori* requerida, como se muestra a continuación

**2.1. Estrategia óptima de regularización.** Como información *a priori* se requerirá que el dato de Cauchy exacto  $(\phi^\dagger, \psi^\dagger)$  pertenezca a un conjunto convexo no vacío  $M$  de la forma

$$(26) \quad M = \{(A\Phi + B\psi, \psi) \in M : \Phi \in Z_1, \psi \in Z_0\};$$

donde  $Z_0$  es un subconjunto de  $L^2(\Gamma_0)$ , y  $Z_1$  es un compacto en  $D(A)$  ( $L^2(\Gamma_1)$  o  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ , según corresponda), siendo las propiedades de  $Z_1$  la información *a priori* requerida para la construcción de una cuasi solución al problema inverso  $A\Phi = \rho$ .

La proyección de distancia mínima en la norma de  $L^2$  de  $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$  sobre  $\text{cl}_{L^2}(M)$  existe y es única, ya que  $\text{cl}_{L^2}(M)$  es no vacío, cerrado y convexo [35, sec. 3.12]. Sea  $(\phi^\delta, \psi^\delta)$  la proyección recién mencionada, también definida por

$$(27) \quad (\phi^\delta, \psi^\delta) = \arg \min_{(\phi, \psi) \in \text{cl}_{L^2}(M)} \left( \|\phi - \tilde{\phi}\|^2 + \|\psi - \tilde{\psi}\|^2 \right).$$

Veremos que  $(\phi^\delta, \psi^\delta)$  es un dato admisible y que el correspondiente dato de Dirichlet  $\Phi^\delta = A^{-1}(\phi^\delta - B\psi^\delta)$  converge a la solución exacta  $\Phi^\dagger$  cuando  $\delta$  tiende a 0.

LEMA 8. *La proyección  $(\phi^\delta, \psi^\delta)$  verifica*

$$\|(\phi^\dagger - \phi^\delta, \psi^\dagger - \psi^\delta)\| \leq \delta_1,$$

donde

$$0 \leq \delta_1 = \sqrt{2\delta^2 - \|\phi^\delta - \tilde{\phi}\|^2 - \|\psi^\delta - \tilde{\psi}\|^2} \leq \sqrt{2}\delta.$$

DEMOSTRACIÓN. Antes que todo,

(28)

$$\begin{aligned} \|\phi^\dagger - \phi^\delta\|^2 + \|\psi^\dagger - \psi^\delta\|^2 &= \|\phi^\dagger - \tilde{\phi}\|^2 + \|\psi^\dagger - \tilde{\psi}\|^2 - \|\phi^\delta - \tilde{\phi}\|^2 - \|\psi^\delta - \tilde{\psi}\|^2 \\ &\quad + 2 \left( \langle \phi^\dagger - \phi^\delta, \tilde{\phi} - \phi^\delta \rangle + \langle \psi^\dagger - \psi^\delta, \tilde{\psi} - \psi^\delta \rangle \right); \end{aligned}$$

pero,  $\text{cl}_{L^2}(M)$  es convexo y  $(\phi^\delta, \psi^\delta)$  debe cumplir con la siguiente desigualdad (ver [35, sec. 3.12]):

$$(29) \quad \langle \phi - \phi^\delta, \tilde{\phi} - \phi^\delta \rangle + \langle \psi - \psi^\delta, \tilde{\psi} - \psi^\delta \rangle \leq 0, \quad \forall (\phi, \psi) \in \text{cl}_{L^2}(M).$$

El resultado se sigue de (28), (29), y por la pertenencia de  $(\phi^\dagger, \psi^\dagger)$  a  $\text{cl}_{L^2}(M)$ .  $\square$

En otras palabras, la proyección  $(\phi^\delta, \psi^\delta)$  puede pensarse como una perturbación de  $(\phi^\dagger, \psi^\dagger)$  con un error de menor o igual magnitud que  $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$ . El paso inmediato es resolver (30) en lugar de (23), con  $\delta_1$  como en el Lema 8:

$$(30) \quad A\Phi^\dagger = \phi^\dagger - B\psi^\dagger; \quad \|(\phi^\dagger - \phi^\delta, \psi^\dagger - \psi^\delta)\| \leq \delta_1.$$

LEMA 9. *La proyección  $(\phi^\delta, \psi^\delta)$  en el Lema 8 es un dato admisible y  $\Phi^\delta = A^{-1}(\phi^\delta - B\psi^\delta)$  converge a  $\Phi^\dagger$  cuando  $\delta$  tiende a 0.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\{(\phi_n, \psi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $M$  que converge a  $(\phi^\delta, \psi^\delta)$ . Denotando  $\rho_n = \phi_n - B\psi_n$  ( $\rho^\delta = \phi^\delta - B\psi^\delta$ ) y  $\Phi_n = A^{-1}\rho_n$ , donde claramente  $\Phi_n$  pertenece a  $Z_1$ , se sigue que es posible elegir en  $Z_1$  al elemento  $\Phi^\delta = A^{-1}\rho^\delta$  como cualquier punto de acumulación de  $\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , punto de acumulación que existe ya que  $Z_1$  es un conjunto compacto en  $D(A)$ . Por la continuidad de  $A$  y  $B$  se llega a la igualdad  $A\Phi^\delta + B\psi^\delta = \phi^\delta$ . Habiendo demostrado que  $(\phi^\delta, \psi^\delta)$  es admisible, la unicidad de  $\Phi^\delta$  se verifica en virtud de la inyectividad de  $A$ .

Para terminar la prueba el Lema 8 garantiza la existencia del menor natural  $N_\delta$  tal que

$$\forall n \geq N_\delta : \quad \|\Phi_{N_\delta} - \Phi^\delta\|_{D(A)} \leq \delta, \quad \text{y} \quad \|(\phi_{N_\delta} - \tilde{\phi}, \psi_{N_\delta} - \tilde{\psi})\|_{L^2} \leq 2\delta;$$

entonces, por la desigualdad triangular

$$\|\Phi^\delta - \Phi^\dagger\|_{D(A)} \leq \delta + \|\Phi_{N_\delta} - \Phi^\dagger\|_{D(A)}.$$

Pero,  $\Phi_{N_\delta}$  pertenece a la intersección de  $Z_1$  y el siguiente conjunto

$$Z_{(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})}^\delta = \{\Phi \in D(A) : \|A\Phi - \tilde{\rho}\| \leq 2\delta\}, \quad \tilde{\rho} = \tilde{\phi} - B\tilde{\psi}.$$

Por lo tanto,  $\Phi_{N_\delta}$  converge a  $\Phi^\dagger$  en virtud del Teorema 1 en [17, ch.6, sec. 1].  $\square$

Los Lemas 8-9 muestran en realidad el corazón de la metodología. Hemos tomado toda la ventaja posible de la información *a priori* dada para regularizar la proyección de distancia mínima que aquí interesa, en sincronía con un esquema de cuasi soluciones.

Existen diversas formas de elegir  $Z_1$ , trabajaremos principalmente con aquella relacionada con la Definición 3 del peor de los casos para el error de regularización, extraída de [31, sec. 1.3].

En nuestro caso  $D(A)$  toma el lugar de  $X$  en la definición anterior del peor error,  $Y = L^2(\Gamma_0)$  y  $X_1$  será sustituido por  $F$ , un subespacio denso y con inmersión compacta en  $D(A)$ ; por consistencia en la notación  $\|\cdot\|_1$  es reemplazada por  $\|\cdot\|_F$ . Cuando  $A$  puede ser extendida de forma continua a  $L^2(\Gamma_1)$  se tiene la inmediata elección de  $F$  como  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ . De otra forma, cuando  $D(A) = E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ , es posible elegir a  $F$ , por ejemplo, como el subespacio de  $H^{s_0}(\Gamma_1)$  ( $s_0 > 3/2$ ) consistente en todos los elementos de  $D(A)$  tales que  $u_1 \in H^{1+s_0}(\Omega)$ ,  $s_0 \geq 1$  y  $\|\Phi\|_F$  definida en forma análoga a la norma en  $E^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ :  $\|\Phi\|_F = \|u_1\|_{H^{1+s_0}(\Omega)}$ .

La inmersión  $H^{1+s_0}(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$  es compacta y el operador de traza es continuo de  $E_0(\Omega)$  en  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ , entonces  $F$  tiene inmersión compacta en  $D(A)$ .

De la misma forma en que se procedió con la norma  $\|(\cdot, \cdot)\|_M$ , se define una norma propia para el siguiente subespacio de datos admisibles

$$\{(A\Phi + B\psi, \psi) : \Phi \in F, \psi \in L^2(\Gamma_0)\};$$

con una norma más fuerte que  $\|(\cdot, \cdot)\|_{M,2}$  y definida por:

$$(31) \quad \|(\phi, \psi)\|_{M,2} = \sqrt{\|\Phi\|_F^2 + \|\psi\|^2}; \quad \Phi = A^{-1}(\phi - B\psi).$$

En el marco de (26) tenemos  $Z_1 = \text{cl}_{D(A)}(\text{cl}_F(\mathcal{B}_F(K)))$  y  $Z_0$  tal que la norma definida (31) de cualquier elemento en  $M$  está acotada por una constante dada *a priori*, es decir:

**Primer supuesto de información *a priori***

(1<sup>er</sup> supuesto):

Como información *a priori* está dada la constante  $K > 0$  tal que

$$(32) \quad \|(\phi^\dagger, \psi^\dagger)\|_{M,2} \leq K.$$

Por la forma en que la solución regularizada  $\Phi^\delta$  ha sido construida en el marco de la metodología de datos admisibles, ésta debe ser óptima en el sentido de la Definición 3 (copiada de la Definición 1.18 en [31, p.

15]), justo por la recién asumida información *a priori* sobre el dato de Cauchy exacto.

**TEOREMA 10.** *Bajo el 1<sup>er</sup> supuesto de información a priori (32), y si  $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$  no pertenece a  $\text{cl}_{(\mathbb{L}^2(M))}$ , entonces la solución  $\Phi^\delta$  del Lema 9 es una solución óptima al problema de regularización (30) en el sentido de la definición 1.18 en [31, p. 15], para el error de orden  $\sqrt{2\delta} \max\{1, \|B\|\}$  en el dato de salida, y la información a priori  $\|\Phi^\dagger\|_F \leq 2K$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Por los Lemas 8 y 9 la diferencia  $\Phi^\dagger - \Phi_n$  pertenece a  $\text{cl}_F(\mathcal{B}_F(K))$  para todo natural  $n$ , y

$$\|A(\Phi^\dagger - \Phi_n)\| \leq \delta_1 \max\{1, \|B\|\} (1 + \|\phi^\delta - \phi_n\| + \|\psi^\delta - \psi_n\|);$$

por lo que, si  $\epsilon_{1,n}$  y  $\epsilon_{2,n}$  se definen como sigue

$$\epsilon_{1,n} = \|\phi^\delta - \phi_n\| + \|\psi^\delta - \psi_n\| \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \epsilon_{2,n} = \|\Phi_n - \Phi^\delta\|_{\text{D}(A)} \rightarrow 0,$$

entonces se obtiene

$$(33) \quad \begin{aligned} \|\Phi^\dagger - \Phi^\delta\|_{\text{D}(A)} &\leq \|\Phi^\dagger - \Phi_n\|_{\text{D}(A)} + \epsilon_{2,n} \\ &\leq \omega_A((1 + \epsilon_{1,n})\delta_1 \max\{1, \|B\|\}, K, \|\cdot\|_F) + \epsilon_{2,n}. \end{aligned}$$

Sin embargo, para  $n$  suficientemente grande se verifica la desigualdad  $(1 + \epsilon_{1,n})\delta_1 < \sqrt{2\delta}$ , desde que  $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$  no pertenece a  $\text{cl}_{(\mathbb{L}^2(\Gamma_0))^2}(M)$ .  $\square$

**OBSERVACIÓN 6.** *El peor error  $\omega_A(\delta, K, \|\cdot\|_F)$  es no decreciente con respecto a la constante  $K$  en el 1<sup>er</sup> supuesto de información a priori (32), y la definición de una solución regularizada óptima está dada en función de dicho peor error, por lo que la mejor información a priori de la que puede disponerse en (32) es claramente  $K = \|(\phi^\dagger, \psi^\dagger)\|_M$ , hecho que en adelante se asumirá por defecto salvo que explícitamente se indique algo distinto.*

Hasta ahora el Teorema 10 es de difícil implementación en el caso de aplicaciones prácticas, pero definitivamente brinda una solución óptima de forma teórica como primer paso. Por otro lado, es un hecho conocido que el problema inverso (30) es exponencial o severamente mal planteado [6], y como se mostrará en la sección 2, la definición de  $Z_1$  bajo el 1<sup>er</sup> supuesto es equivalente al hecho de que la solución exacta  $\Phi^\dagger$  satisface una *condición de fuente logarítmica* ( $\Phi^\dagger = -\log^{-p}(A^*A)\zeta$ ,  $\|\zeta\| \leq K_1$ ,  $p > 0$ , donde  $A^*$  denota al adjunto de  $A$ ). La demostración de que  $\omega_A(\delta, K, F)$  es de orden  $O(-\log^{-p}(\delta))$  puede consultarse en [27, 44], en tanto que otros estudios recientes sobre estimados sobre el orden de convergencia pueden encontrarse en [2, 38].

### 3. Información *a priori* adicional y formulación lagrangiana

El primer problema práctico con la metodología de datos admisibles radica en que no existe en general una formulación lagrangiana equivalente al problema que se desprenda del primer supuesto de información *a priori*, debido a que  $M$  no es cerrado en la norma de  $L^2$ . De hecho, la restricción impuesta por el primer supuesto puede no satisfacerse para  $(\phi^\delta, \psi^\delta)$ . En otras palabras, es posible que en el sentido de [35], la proyección  $(\phi^\delta, \psi^\delta)$  no sea un punto regular de la restricción que define a  $M$ . La presente sección se dedica a estudiar condiciones adicionales al primer supuesto de información que provean un escenario en el cual existe una formulación lagrangiana equivalente al problema de optimización que define a la proyección  $(\phi^\delta, \psi^\delta)$ . La motivación principal de tales fines es lograr un enfoque que permita convertir al valor de la constante  $K$ , de un dato dado *a priori*, en un parámetro de regularización para el cual exista un valor que preserve la optimalidad de la solución, enfoque que responde de mejor forma a las situaciones de aplicación práctica. Al respecto de la importancia de una formulación lagrangiana para este tipo de problemas inversos puede consultarse [38, 11].

Se recuerda al lector que ya se considera a la condición de Neumann  $\psi$  en (4) y (10) como una distribución regular; es decir, se identifica con un elemento de  $L^2(\Gamma_0)$ .

#### 3.1. Operador Neumann-Dirichlet en $\Gamma_1$ .

Considérese el segundo problema auxiliar de contorno:

$$(34a) \quad \Delta u_3 \equiv 0 \text{ in } \Omega,$$

$$(34b) \quad u_3|_{\Sigma} = 0,$$

$$(34c) \quad \left. \frac{\partial u_3}{\partial \nu} \right|_{\Gamma_1} = \Psi,$$

$$(34d) \quad \left. \frac{\partial u_3}{\partial \nu} \right|_{\Gamma_0} = 0.$$

La definición de solución débil para el problema de contorno (34) se establece en el mismo sentido que el de la Definición 4, utilizando el mismo conjunto de funciones de prueba  $E_{00}(\Omega)$ .

DEFINICIÓN 6. Dado el funcional  $\Psi$  en  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ , la función  $u_3$  en  $E_{00}(\Omega)$  se dice solución débil del problema de contorno (34) si verifica

$$(35) \quad \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u_3 dx = \langle v|_{\Gamma_1}, \Psi \rangle_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}, \quad \forall v \in E_0(\Omega).$$

Las demostraciones de existencia, unicidad y dependencia continua de la solución débil de (34) son análogas a las correspondientes demostraciones para la solución débil de (10).

**TEOREMA 11.** *La solución débil del problema (34) existe, es única y depende continuamente del dato de Neumann  $\Psi$  en  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Por la definición de  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  el lado derecho en (35) define un funcional en  $E_0(\Omega)$  con el producto escalar  $(\nabla \cdot, \nabla \cdot)_{L^2}$ ; el teorema de Riesz garantiza la existencia de la solución  $u_3$ . La linealidad es evidente y con ello la unicidad de la solución, dado que para  $\Psi$  idénticamente nulo se infiere de (35) que la única solución posible es  $u_3$  idénticamente nula en  $E_0(\Omega)$ . Ahora, en cuanto a la dependencia continua de  $u_3$  respecto de  $\Psi$ , por definición de la norma del operador y la Definición 6 se tiene

$$\begin{aligned} \|\nabla u_3\|^2 &= \langle u_3|_{\Gamma_1}, \Psi \rangle_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \\ &\leq \inf \left\{ C \geq 0 : |\langle \Phi, \Psi \rangle_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}| \leq C \|\Phi\|_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \right\} \\ &= \|\Psi\|_{E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}. \end{aligned}$$

□

En adelante, y cuando sea necesario, se hará explícita la dependencia de  $u_3$  en  $\Psi$  mediante la notación  $u_3 = u_{3,\Psi}$ .

Definimos ahora el operador Neumann-Dirichlet en  $\Gamma_1$  a través del problema de contorno (34):

$$Q : E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \rightarrow E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1), \quad \Psi \mapsto Q\Psi = u_3|_{\Gamma_1}.$$

**PROPOSICIÓN 12.** *La forma bilineal en (36) define un producto escalar en  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  y hace de dicho espacio un espacio de Hilbert.*

$$(36) \quad \begin{aligned} (\cdot, \cdot)_{E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} : E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\Psi, \Psi') &\mapsto (\nabla u_{3,\Psi}, \nabla u_{3,\Psi'})_{L^2}. \end{aligned}$$

$$\text{En adelante se denota } \|\Psi\|_{E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \sqrt{(\Psi, \Psi)_{E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}}$$

**DEMOSTRACIÓN.** Las propiedades de producto escalar se desprenden del hecho de que  $H^1(\Omega)$  se considera un espacio de funciones reales, y por la dependencia lineal de  $u_{3,\Psi}$  en  $\Psi$ .

La completitud de  $E_0(\Omega)$  con la norma  $\|\nabla \cdot\|$  y la dependencia continua de  $u_{3,\Psi}$  en  $\Psi$  garantizan que  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  es completo. □

**COROLARIO 13.**  *$Q$  es autoadjunto y definido estrictamente positivo.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue inmediatamente de la Definición 6 y para cualesquiera  $\Psi$  y  $\Psi'$  en  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ :

$$(37) \quad \langle Q\Psi, \Psi' \rangle_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = (u_{3, \Psi'}, u_{3, \Psi})_{E_0(\Omega)} = \langle Q\Psi', \Psi \rangle_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}$$

y, por definición del producto escalar en  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  tenemos

$$(38) \quad (Q\Psi, \Psi')_{E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = (u_{3, \Psi}, u_{3, \Psi'})_{E_0(\Omega)} = (\Psi, Q\Psi')_{E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}.$$

Habiendo demostrado que  $Q$  y su restricción son operadores auto-adjuntos, el caso  $\Psi' = \Psi$  en (38) prueba que  $Q$  es definido positivo.  $\square$

No es difícil demostrar que  $Q$  es un isomorfismo.  $Q$  es inyectivo como consecuencia de que es definido estrictamente positivo. La sobreyectividad de  $Q$  se demuestra haciendo explícita la dependencia en  $\Phi$  (elemento de  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ ) de la correspondiente solución del problema de contorno (10) con condición de Neumann nula en (10d) mediante la notación  $u_1 = u_{1, \Phi}$ , se define entonces el operador lineal  $P : E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \rightarrow E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  por

$$(39) \quad \langle \varphi, P\Phi \rangle_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \int_{\Omega} \nabla u_{1, \varphi} \cdot \nabla u_{1, \Phi} dx, \quad \forall \varphi \in E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1).$$

Ahora, cuando  $\psi \equiv 0$  en la Definición 4, esta nos dice que, para cada  $\Phi$  en  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  la solución  $u_{1, \Phi}$  es ortogonal en  $E_0(\Omega)$  al subespacio  $E_{00}(\Omega)$ , es decir,  $u_{1, \Phi}$  pertenece al complemento ortogonal de  $E_{00}(\Omega)$ , denotado por  $E_{00}(\Omega)^{\perp}$ . Por lo que, definiendo  $v_1 = u_{1, v}|_{\Gamma_1}$  y  $v_2 = v - v_1$  para toda  $v$  en  $E_0(\Omega)$ , entonces  $v_2$  pertenece a  $E_{00}(\Omega)$  y

$$(40) \quad \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u_{1, \Phi} dx = \int_{\Omega} \nabla(v_1 + v_2) \cdot \nabla u_{1, \Phi} dx = \int_{\Omega} \nabla v_1 \cdot \nabla u_{1, \Phi} dx;$$

por lo que, de (39), (40) y la definición de  $v_1$  se desprende

$$(41) \quad \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u_{1, \Phi} dx = \langle v|_{\Gamma_1}, P\Phi \rangle_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}, \quad \forall v \in E_0(\Omega).$$

De acuerdo con la Definición 6, la ecuación (41) establece que, para cada  $\Phi$  elemento de  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ , existe  $P\Phi$  en  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  tal que

$$(42) \quad u_{3, P\Phi} = u_{1, \Phi}, \quad QP\Phi = \Phi,$$

con lo que se establece la sobreyectividad de  $Q$ , garantizando que es un isomorfismo con  $P$  como su inverso por la derecha. Además, si  $\Phi = Q\Psi$

para  $\Psi$  dado en  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ , entonces (42) implica  $QPQ\Psi = Q\Psi$ , que por la inyectividad de  $Q$  lleva a que  $P$  es también el inverso por la izquierda de  $Q$  y con ello  $P$  definido como antes no es más que el inverso de  $Q$ . De (42) también se sigue que  $Q$  es una isometría:

$$\|\Psi\|_{E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \|\nabla u_{3,\Psi}\| = \|\nabla u_{1,\Phi}\| = \|\Phi\|_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}, \quad \text{donde } Q\Psi = \Phi.$$

Además de lo anterior, sustituyendo  $\varphi$  por  $\Phi$  en (39) se observa:

$$\|\Phi\|_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2 = \langle \Phi, P\Phi \rangle_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}.$$

**OBSERVACIÓN 7.** *Cuando  $u_1$  pertenece a  $H^2(\Omega)$  su derivada normal pertenece  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  y en consecuencia, por la fórmula de Green se tienen las siguientes igualdades, para toda  $v$  en  $E_0(\Omega)$ ,  $\Psi$  en  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  tal que  $u_{3,\Psi}$  pertenece a  $C^2(\Omega) \cap C^1(\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\Omega))$  y  $\Phi$  en  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  tal que también  $u_{1,\Phi}$  pertenece a  $C^2(\Omega) \cap C^1(\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\Omega))$ :*

$$(43) \quad \langle v|_{\Gamma_1}, \Psi \rangle_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u_{3,\Psi} dx = \int_{\Gamma_1} v \frac{\partial u_{3,\Psi}}{\partial \nu} dS.$$

y

$$(44) \quad \langle v|_{\Gamma_1}, P\Phi \rangle_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u_{1,\Phi} dx = \int_{\Gamma_1} v \frac{\partial u_{1,\Phi}}{\partial \nu} dS.$$

Como se esperaba  $Q$  es el operador de Neumann-Dirichlet y  $P$  es el mapeo Dirichlet-Neumann para los correspondientes problemas de contorno que definen a  $u_{1,\Phi}$  y  $u_{3,\Psi}$ .

### 3.2. Los operadores $Q_1$ y $Q_2$ .

Para cerrar esta sección veremos algunas de las propiedades más relevantes de los operadores  $Q$  y  $P$  en lo que concierne a una formulación lagrangiana del esquema de datos admisibles. Comenzaremos por definir a  $Q_1$  como el propio operador  $Q$ , pero definido de  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  en  $L^2(\Gamma_1)$ , en tanto que  $Q_2$  será el operador de  $L^2(\Gamma_1)$  en sí mismo que coincide con la restricción de  $Q$  al subespacio de distribuciones regulares.

**PROPOSICIÓN 14.** *Los operadores  $Q_1$  y  $Q_2$  son compactos. El operador  $Q_2$ , en particular, es definido positivo y autoadjunto.*

**DEMOSTRACIÓN.** Cuando  $\Psi$  es una distribución regular, entonces su norma en  $L^2(\Gamma_1)$  coincide con su norma en  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ , por las definiciones de  $u_1$  y  $u_3$ . Por la fórmula de Green (ver Observación 7) y por el teorema de Riesz se garantiza, para cada  $\Phi$  en  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  y  $\Psi$  una distribución regular:

$$(45) \quad \langle \Phi, \Psi \rangle_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \int_{\Omega} \nabla u_{1,\Phi} \cdot \nabla u_{3,\Psi} dx = \int_{\Gamma_1} \Phi \Psi dS;$$

lo que demuestra que  $u_{3,\Psi}$  también depende continuamente de  $\Psi$  en la norma de  $L^2(\Gamma_1)$  cuando dicha condición de Neumann es una distribución regular.

Como en el caso del operador  $B$ ,  $Q_i$  ( $i = 1$  o  $2$ ) es la composición de una transformación continua (la aplicación que pone en correspondencia a  $\Psi$  con  $u_3 = u_{3,\Psi}$ ) y una transformación compacta de  $H^1(\Omega)$  en  $L^2(\Gamma_1)$  (operador de traza a la frontera), de lo que se desprende la compacidad.

En cuanto al resto de propiedades de  $Q_2$ , se heredan de las correspondientes propiedades de  $Q$ , a través de las relaciones (37) y (??).  $\square$

**COROLARIO 15.** *El operador  $P$  es un operador no acotado con dominio denso en  $L^2(\Gamma_1)$ , cuando se le considera como un operador de  $L^2(\Gamma_1)$  en  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Siendo  $P$  el inverso algebraico de  $Q$ , ocurre que también es inverso de  $Q_1$  (su debida restricción al rango de  $Q_2$  es el inverso de  $Q_2$ ), de forma que al ser  $Q_1$  compacto ( $Q_2$  en el caso correspondiente), la acotación de  $P$  con las consideraciones del corolario implicaría que la bola unitaria en  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  es relativamente compacta, lo cual es una contradicción desde que  $Q_1$  es inyectivo y su dominio tiene dimensión no finita. [**32, 39**].

En cuanto a la densidad de  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  en  $L^2(\Gamma_1)$ , ocurre que toda función de prueba  $\varphi$  en  $\mathcal{D}(\Gamma_1)$  puede extenderse continuamente por 0 a una función  $\varphi'$  en  $\mathcal{D}(\partial\Omega)$ , para la cual la teoría clásica garantiza la existencia de solución al problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en  $\Omega$ , con condición de Dirichlet  $\varphi'$  en la frontera de  $\Omega$  [**36, 37, 45**], con lo que se prueba  $\mathcal{D}(\Gamma_1) \subset E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  y con ello la densidad de  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  en  $L^2(\Gamma_1)$ .  $\square$

### 3.2.1. Descomposición singular de $Q_1$ .

Un resultado conocido del Análisis funcional es la descomposición singular para operadores compactos [**31**, sec. A.5]. Sea  $\{\sigma_{1,k}, \Psi^{1,k}, \Phi^{1,k}\}$  un sistema singular de  $Q_1$ ; es decir,  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  los valores singulares de  $Q_1$  (raíces cuadradas de los valores propios de  $Q_1$  compuesto con su adjunto  $Q_1^*$ ) ordenados descendientemente, con 0 como punto de acumulación y repetidos de acuerdo con su multiplicidad; donde, toda vez que  $Q_1$  es inyectivo y tiene rango denso en  $L^2(\Gamma_1)$  como lo establece el corolario a la Proposición 14,  $\{\Psi^{1,k}\}$  es un sistema completo y ortonormal en  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  y  $\{\Phi^{1,k}\}$  es un sistema completo y ortonormal en  $L^2(\Gamma_1)$  tales que

$$(46) \quad Q_1 \Psi^{1,k} = \sigma_{1,k} \Phi^{1,k}, \quad Q_1^* \Phi^{1,k} = \sigma_{1,k} \Psi^{1,k} \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

donde  $Q_1^*$  es la composición de la inmersión canónica de  $L^2(\Gamma_1)$  en  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  con  $Q$ .

Como  $Q$  es una biyección y  $P$  es su inverso, entonces (46) implica:

$$(47) \quad P\Phi^{1,k} = \frac{1}{\sigma_{1,k}} \Psi^{1,k}.$$

NOTACIÓN 1. Si  $(X, \|\cdot\|_X)$  y  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  son espacios normados tales que  $X \subset Y$  y  $\|\cdot\|_X$  es más fuerte que  $\|\cdot\|_Y$ , entonces se emplea la notación  $X < Y$  cuando sea necesario, para indicar se está considerando a  $X$  como el espacio normado  $(X, \|\cdot\|_Y)$  en lugar de  $(X, \|\cdot\|_X)$ . Emplearemos la notación  $P_i$  para denotar al inverso de  $Q_i$  ( $i=1,2$ ). Es decir:

$$P_1 : \left( E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1), \|\cdot\|_{L^2} \right) \rightarrow E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$$

$$\Phi \mapsto P\Phi$$

y

$$P_2 : \left( Q(L^2(\Gamma_1)), \|\cdot\|_{L^2} \right) \rightarrow L^2(\Gamma_1)$$

$$\Phi \mapsto P\Phi.$$

Ahora, tenemos que los sistemas  $\{\Psi^{1,k}\}$  y  $\{\Phi^{1,k}\}$  son completos, de donde se desprende que todo  $\Psi$  en  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  y su imagen bajo la aplicación  $Q_1$  admiten una descomposición singular

$$(48) \quad \Psi = \sum_{k=1}^{\infty} (\Psi, \Psi^{1,k})_{E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \Psi^{1,k},$$

$$(49) \quad Q_1 \Psi = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{1,k} (\Psi, \Psi^{1,k})_{E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \Phi^{1,k},$$

mientras que todo  $\Phi$  en  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  y su imagen bajo la aplicación  $P_1$  admiten las correspondientes descomposiciones:

$$(50) \quad \Phi = \sum_{k=1}^{\infty} (\Phi, \Phi^{1,k})_{L^2(\Gamma_1)} \Phi^{1,k},$$

$$(51) \quad P_1 \Phi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{1,k}} (\Phi, \Phi^{1,k})_{L^2(\Gamma_1)} \Psi^{1,k};$$

La convergencia de la serie en (51) en  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  está garantizada por la propia descomposición singular, caracteriza al dominio de  $P$  y se le conoce como Teorema de Picard [24, 31].

La coercitividad de  $P$  es consecuencia inmediata de (51), debido a que  $\{\sigma_{1,k}^{-1}\}$  es una sucesión no decreciente y no acotada.

PROPOSICIÓN 16. *La forma bilineal  $a(\Phi', \Phi) = \langle \Phi', P\Phi \rangle_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}$  definida en  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  como subespacio de  $L^2(\Gamma_1)$  es coercitiva. Consecuentemente la norma  $\|\cdot\|_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}$  es más fuerte que la norma en  $L^2(\Gamma_1)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Por la definición de  $(\cdot, \cdot)_{E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}$ , por (37)-(38) y la primera ecuación en (46) se tiene

$$(52) \quad \begin{aligned} (\Psi^{1,j}, \Psi^{1,k})_{E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} &= \langle Q\Psi^{1,j}, \Psi^{1,k} \rangle_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \\ &= \sigma_{1,j} \langle \Phi^{1,j}, \Psi^{1,k} \rangle_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \end{aligned}$$

Luego, de (50)-(52) y considerando que  $\{\Psi^{1,k}\}$  es un sistema ortonormal en  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  se infiere

$$(53) \quad \begin{aligned} a(\Phi, \Phi) &= \langle \Phi, P\Phi \rangle_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{1,k}} (\Phi, \Phi^{1,k})_{L^2(\Gamma_1)}^2 \langle \Phi^{1,k}, \Psi^{1,k} \rangle_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{1,k}^2} (\Phi, \Phi^{1,k})_{L^2(\Gamma_1)}^2 \quad (= \|\Phi\|_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2) \end{aligned}$$

Pero,  $\frac{1}{\sigma_{1,k}} \geq \frac{1}{\sigma_{1,k+1}}$ , por lo que

$$a(\Phi, \Phi) \geq \frac{1}{\sigma_{1,1}^2} \|\Phi\|_{L^2}^2.$$

□

### 3.2.2. Sobre $Q_2$ .

El teorema sobre la descomposición singular está basado en el teorema espectral para operadores compactos y autoadjuntos [32, 39, 8], gracias al cual se garantiza, conjuntamente con la inyectividad de  $Q_2$  y la Proposición 14:

- El espectro de  $Q_2$  es un conjunto numerable y acotado, con el origen como único punto de acumulación y está compuesto únicamente por valores propios positivos, cada uno de los cuales tiene multiplicidad finita.
- Existe un sistema completo y ortonormal en  $L^2(\Gamma_1)$  compuesto por funciones propias de  $Q_2$ .

Sea  $\{\sigma_{2,k}\}$  el conjunto de valores propios de  $Q_2$  ordenados en forma no creciente y duplicados conforme a su multiplicidad, y  $\{\Psi^{2,k}\}$  el sistema completo y ortonormal en  $L^2(\Gamma_1)$  de funciones propias de  $Q_2$ , donde

$Q_2\Psi^{2,k} = \sigma_{2,k}\Psi^{2,k}$ . Entonces, toda función  $\Psi$  en  $L^2(\Gamma_1)$  y su imagen bajo  $Q_2$  admiten la siguiente descomposición espectral:

$$(54) \quad \Psi = \sum_{k=1}^{\infty} (\Psi, \Psi^{2,k})_{E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \Psi^{2,k},$$

$$(55) \quad Q_2\Psi = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{2,k} (\Psi, \Psi^{2,k})_{E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \Psi^{2,k}.$$

Correspondientemente, la descomposición espectral para  $P_2$  es como sigue:

$$(56) \quad \Phi = \sum_{k=1}^{\infty} (\Phi, \Psi^{2,k})_{L^2(\Gamma_1)} \Psi^{2,k},$$

$$(57) \quad P_2\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{2,k}} (\Phi, \Psi^{2,k})_{L^2(\Gamma_1)} \Psi^{2,k}.$$

OBSERVACIÓN 8. *La coercitividad de  $P_2$ , es decir, de  $P$  cuando se considera como un operador de  $L^2(\Gamma_1)$  en sí mismo, se prueba de forma análoga a como se demostró la proposición 16, utilizando la descomposición de  $P$  con respecto al sistema  $\{\Psi^{2,k}\}$  en lugar del sistema  $\{\Psi^{1,k}\}$ .*

3.2.3. *Los espacios  $E_s^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ .*

Se define el espacio  $E_s^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) = Q_2^s(L^2(\Gamma_1))$  ( $s > 0$ ) como sigue:

$$(58) \quad E_s^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) = \{\Phi : \Phi = Q_2^s\Psi, \Psi \in L^2(\Gamma_1)\}, \quad s \in (0, \infty),$$

donde  $\|\Phi\|_{E_s^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2 = \|\Psi\|^2$ .

OBSERVACIÓN 9. *No es difícil demostrar que  $E_s^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  es un espacio de Hilbert con el producto escalar*

$$(\Phi, \Phi')_{E_s^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = (P_2^s\Phi, P_2^s\Phi')_{L^2(\Gamma_1)} = (P^s\Phi, P^s\Phi')_{L^2(\Gamma_1)},$$

de donde se desprende inmediatamente que  $E_{s_2}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  es denso en  $E_{s_1}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  cuando  $s_2 > s_1 > 0$ , puesto que  $\{\Psi^{2,k}\}$  es un sistema ortogonal y completo en cualquier  $E_s^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  ( $s > 0$ ) ya que es completo y ortogonal en  $L^2(\Gamma_1)$  y  $(\Psi^{2,j}, \Psi^{2,k})_{E_s^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \frac{1}{\sigma_{2,j}\sigma_{2,k}} (\Psi^{2,j}, \Psi^{2,k})_{L^2(\Gamma_1)}$ . Si  $\Phi$  en  $E_{s_2}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$

pertenece al complemento ortogonal de  $E_{s_1}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ , entonces debe ser ortogonal a todo  $\Psi^{2,k}$  como elemento de  $E_{s_1}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ , pero como ya hemos dicho, tal afirmación significa que  $\Phi$  tiene que ser ortogonal al propio espacio

$E_{s_1}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ , de forma que  $E_{s_2}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  es denso en  $E_{s_1}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  siempre que  $s_2$  sea estrictamente mayor que  $s_1$ .

Por la descomposición espectral de  $Q_2$  y  $P_2$  y definiendo el operador

$$S_{s,m} : L^2(\Gamma_1) \rightarrow L^2(\Gamma_1), \quad \text{por } S_{s,m} \Psi = \sum_{k=1}^m \sigma_{2,k}^s (\Psi, \Psi^{2,k})_{L^2(\Gamma_1)} \Psi^{2,k}$$

se llega a las siguientes propiedades de  $Q^s$  ( $s > 0$ ):

- $P_2^s$  es el inverso de  $Q_2^s$ .
- $Q_2^s$  es definido positivo.
- $Q_2^s$  es autoadjunto.
- Para todo  $\epsilon > 0$  y todo  $s > 0$ , existe  $S_{s,m_\epsilon}$  con rango de dimensión finita tal que  $\|Q_2^s - S_{s,m_\epsilon}\| \leq \epsilon$ , en la norma del operador. Lo cual coincide con una conocida caracterización de los operadores compactos; es decir,  $Q_2^s$  también es un operador compacto de  $L^2(\Gamma_1)$  en él mismo.

Si  $0 < s_1 < s_2$  y  $\Phi$  pertenece a  $E_{s_2}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  con  $\Phi = Q_2 \Psi$  ( $\Psi$  en  $L^2(\Gamma_1)$ ), entonces

$$(59) \quad \|\Phi\|_{E_{s_1}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \|Q_2^{s_2-s_1} \Psi\|_{L^2(\Gamma_1)} \quad \text{y} \quad \|\Phi\|_{E_{s_2}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \|\Psi\|_{L^2(\Gamma_1)};$$

es decir, en virtud de la compacidad de  $Q_2^s$  ( $s > 0$ ), se establece en (59) la compacidad de la inmersión  $E_{s_2}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \rightarrow E_{s_1}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  ( $0 < s_1 < s_2$ ), ya que toda sucesión acotada en la norma de  $E_s^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  posee una subsucesión de Cauchy en  $E_{s_1}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  como consecuencia de la compacidad de  $Q_2^{s_2-s_1}$ .

En el caso particular en el que  $\Phi$  pertenece a  $E_1^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ , con  $\Phi = Q_2 \Psi$  y  $\xi = Q_2^{\frac{1}{2}} \Psi$ , tenemos que  $P\Phi$  es una distribución regular y la autoadjunticidad de  $Q_2^s$  nos permite establecer las siguientes igualdades:

$$(60) \quad \begin{aligned} \|\Phi\|_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2 &= \langle \Phi, P\Phi \rangle_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \int_{\Gamma_1} \Phi P\Phi dS \\ &= \int_{\Gamma_1} (Q\Psi) \Psi dS = \int_{\Gamma_1} \left(Q^{\frac{1}{2}}\Psi\right)^2 dS \\ &= \|\xi\|^2 = \|\Phi\|_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}. \end{aligned}$$

La ecuación (60) demuestra entonces el siguiente resultado trivial, pero de utilidad en el desarrollo posterior.

PROPOSICIÓN 17.  $E_s^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  está contenido en  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  para todo  $s > \frac{1}{2}$  y la inmersión  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \rightarrow L^2(\Gamma_1)$  es compacta.

DEMOSTRACIÓN. Debido a que  $E_1^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  es denso en  $E_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ , y puesto que (60) establece la coincidencia de las normas  $\|\cdot\|_{E_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}$  y  $\|\cdot\|_{E_s^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}$  en  $E_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ , entonces la contención  $E_s^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \subset E_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  es inmediata ya que se tiene la compacidad de la inmersión  $E_{s_2}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \rightarrow E_{s_1}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  cuando  $s_1$  es estrictamente menor que  $s_2$ ; lo mismo que la compacidad de la inmersión  $E_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \rightarrow L^2(\Gamma_1)$ , ya que  $E_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  está compactamente sumergido en  $L^2(\Gamma_1)$ .  $\square$

### 3.3. Segundo supuesto de información *a priori* y ecuaciones normales.

Después de la definición de los espacios  $E_s^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  ( $s > 0$ ) nos encontramos listos para trabajar con supuestos de información *más fuertes* que el caso general del 1<sup>er</sup> supuesto (32). Consideraremos en esta sección casos especiales de definición para el espacio  $F$  en el 1<sup>er</sup> supuesto de información *a priori*:

$$F = E_s^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \text{ con } s \geq \frac{1}{2} \text{ si } D(A) = L^2(\Gamma_1), \text{ y } s > \frac{1}{2} \text{ si } D(A) = E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1).$$

Entonces, el 1<sup>er</sup> supuesto de información *a priori* se reescribe como

#### Segundo supuesto de información *a priori* (2<sup>o</sup> supuesto)

La solución exacta  $\Phi^\dagger$  pertenece a  $E_s^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  ( $s \geq \frac{1}{2}$  si  $D(A) = L^2(\Gamma_1)$ , y  $s > \frac{1}{2}$  si  $D(A) = E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ ), y existe una cota dada para el valor  $\|(\phi^\dagger, \psi^\dagger)\|_{\mathbf{M}}$ :

$$(61) \quad \Phi^\dagger = Q_2^s \zeta^\dagger, \quad \|(\phi^\dagger, \psi^\dagger)\|_{\mathbf{M}} = \sqrt{\|\zeta^\dagger\|^2 + \|\psi^\dagger\|^2} \leq K \quad (\zeta^\dagger \in L^2(\Gamma_1)).$$

Ocurre que, en el marco del 2<sup>o</sup> supuesto (61), resolver el problema de optimización (27) es equivalente a resolver

$$(62) \quad (\zeta^\delta, \psi^\delta) = \underset{\zeta \in L^2(\Gamma_1), \psi \in L^2(\Gamma_0)}{\text{arg mín}} \left\| AQ_2^s \zeta + B\psi - \tilde{\phi} \right\|^2 + \left\| \psi - \tilde{\psi} \right\|^2$$

tal que  $\|\zeta\|^2 + \|\psi\|^2 - K^2 \leq 0,$

donde la solución MDA queda definida por:

$$\Phi^\delta = Q_2^s \zeta^\delta.$$

Ahora, la solución de (62) es un punto regular para la restricción del problema, ya que esta se verifica en  $(\zeta^\delta, \psi^\delta)$ . La función objetivo y la constricción son ambas convexas y tienen derivada de Gateaux lineal en sus incrementos. Entonces, por el teorema generalizado de Kuhn-Tucker en la teoría clásica de optimización [35], existe  $\alpha_K \geq 0$  (multiplicador de Lagrange) tal que resolver el problema (62) es equivalente a resolver su formulación lagrangiana para el multiplicador  $\alpha = \alpha_k$ :

$$(63) \quad (\zeta^{\delta, \alpha}, \psi^{\delta, \alpha}) = \underset{(\zeta, \psi) \in L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_0)}{\arg \min} \quad J_\alpha(\zeta, \psi)$$

$$\text{con } J_\alpha(\zeta, \psi) = \left\| AQ_2^s \zeta + B\psi - \tilde{\phi} \right\|^2 + \left\| \psi - \tilde{\psi} \right\|^2 + \alpha \left( \|\zeta\|^2 + \|\psi\|^2 \right).$$

Antes de continuar, se define al operador Neumann-Neumann de  $\Gamma_0$  en  $\Gamma_1$  por  $W : \psi \mapsto -\frac{\partial u_2}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_1}$  ( $u_2$  y  $u_1$  las soluciones de (10) que definen a los operadores  $B$  y  $A$ , respectivamente). La solución  $u_2$  depende continuamente de  $\psi$  en  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ , y el operador que asigna la derivada normal a la frontera de  $\Omega$  es continuo de  $H^1(\Omega)$  en  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ , significando que  $W$  es un operador acotado de  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$  en  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ . Es importante recordar que la norma en  $L^2(\Gamma_0)$  domina a la norma en  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ , por lo que  $W$  también puede ser entendido como un operador de  $L^2(\Gamma_0)$  en  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$  cuando se restringe al caso en que  $\psi$  es una distribución regular. Además, por la definición del producto escalar en  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  mediante  $P$ , por la fórmula de Green y debido a que  $u_1$  es ortogonal a  $u_2$  con el producto escalar  $(\nabla \cdot, \nabla \cdot)_{L^2}$ , se sigue que  $QW$  es el adjunto de  $A$  cuando  $D(A) = E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ :

$$(64) \quad \begin{aligned} (A\Phi, \psi)_{L^2} &= \int_{\Gamma_0} (A\Phi) \psi dS = \int_{\Omega} \nabla u_{1, \Phi} \cdot \nabla u_{2, \psi} dx \\ &= \langle \Phi, W\psi \rangle_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \langle \Phi, PQW\psi \rangle_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \\ &= (\Phi, QW\psi)_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}. \end{aligned}$$

Ahora, si  $\Phi$  pertenece a  $E_s^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ ; es decir, si  $\Phi = Q_2^s \zeta$  con  $\zeta$  en  $L^2(\Gamma_1)$ , entonces:

$$(65) \quad \begin{aligned} \int_{\Gamma_0} (AQ_2^s \zeta) \psi dS &= \langle Q_2^s \zeta, W\psi \rangle_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \\ &= \langle \zeta, Q_2^s W\psi \rangle_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \\ &= \int_{\Gamma_1} \zeta Q_1^s W\psi dS, \end{aligned}$$

para todo  $\psi$  en  $L^2(\Gamma_0)$ . Por lo que, claramente  $Q_1^s W$  es el adjunto de  $A_s = AQ_2^s$  ( $A_s^* = Q_1^s W$ ).

Continuando con la formulación Lagrangiana de la solución MDA bajo el 2º supuesto de información *a priori*, tenemos que la derivada de Gateaux de  $J_\alpha$  en el punto  $(\zeta, \psi)$  y evaluada en la dirección  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  está dada por

$$DJ_\alpha(\zeta, \psi)(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_0} \left[ A_s^* (A_s \zeta + B\psi - \tilde{\phi}) + \alpha \zeta \right] \mathbf{x}_1 dS \\ + \int_{\Gamma_0} \left[ B (A_s \zeta + B\psi - \tilde{\phi}) + (1 + \alpha)\psi - \tilde{\psi} \right] \mathbf{x}_2 dS,$$

donde  $I$  denota la identidad en  $L^2(\Gamma_0)$ . Por lo tanto,  $(\zeta^{\delta, \alpha}, \psi^{\delta, \alpha})$  es solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$(66) \quad (A_s^* A_s + \alpha I) \zeta + A_s^* B \psi = A_s^* \tilde{\phi},$$

$$(67) \quad B A_s \zeta + (B^2 + (1 + \alpha)I) \psi = B \tilde{\phi} + \tilde{\psi}.$$

El parámetro  $\alpha$  es un multiplicador de Lagrange, lo que significa que el valor de  $\alpha$  que hace equivalentes los problemas de optimización de interés es nulo ( $\alpha_K = 0$ ) si existe  $(\tilde{\zeta}, \tilde{\psi})$  en  $\text{cl}_{L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_0)} (\mathcal{B}_{L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_0)}(K))$  tal que  $\tilde{\phi} = A_s \tilde{\zeta} + B \tilde{\psi}$ . De otra forma,  $\alpha_K$  debe satisfacer

$$(68) \quad \|\zeta^{\delta, \alpha_K}\|^2 + \|\psi^{\delta, \alpha_K}\|^2 = K^2, \quad \|\Phi^{\delta, \alpha_K}\|_{E_s^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \|\zeta^{\delta, \alpha_K}\|,$$

definiendo así a la solución MDA:  $\Phi^\delta = \Phi^{\delta, \alpha_K}$ .

Las ecuaciones normales (66)-(67) proveen el primer corolario al Teorema 10.

**COROLARIO 18.** *Si se observa el 2º supuesto de información a priori (61), entonces el par  $(\Phi^{\delta, \alpha}, \psi^{\delta, \alpha})$  está definido por (69)-(70) para cualquier elección de  $\alpha > 0$ :*

$$(69) \quad \psi^{\delta, \alpha} = \{B [I - A_s L_{s, \alpha}^{-1} A_s^*] B + (1 + \alpha)I\}^{-1} \{B [I - A_s L_{s, \alpha}^{-1} A_s^*] \tilde{\phi} + \tilde{\psi}\},$$

$$(70) \quad \Phi^{\delta, \alpha} = Q_2^s L_{s, \alpha}^{-1} A_s^* (\tilde{\phi} - B \psi^{\delta, \alpha}),$$

donde  $L_{s, \alpha} = A_s^* A_s + \alpha I$ . Más aún, bajo el 2º supuesto, y si  $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$  no pertenece a la cerradura  $\text{cl}_{L^2}(M)$ , entonces existe  $\alpha_K > 0$  tal que

$$\|\Phi^\dagger - \Phi^{\delta, \alpha_K}\| \leq \omega_A \left( \sqrt{2} \delta \max\{1, \|B\|\}, 2K, E_s^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \right).$$

**DEMOSTRACIÓN.** Para obtener las ecuaciones (69)-(70) solamente es necesario realizar sustituciones algebraicas para resolver el sistema (66)-(67).

Un hecho bien conocido es que  $L_{s,\alpha}$  es invertible. Por la descomposición singular de operadores compactos ( $A_s$  es claramente compacto) es fácil ver que  $I - A_s L_{s,\alpha}^{-1} A_s^*$  es definido positivo, implicando que cualquier real positivo pertenece a la resolvente de  $B(I - A_s L_{s,\alpha}^{-1} A_s^*)B$  como un valor propio, lo cual finalmente demuestra que  $\Phi^{\delta,\alpha}$  y  $\psi^{\delta,\alpha}$  están bien definidos por (69)-(70).  $\square$

### 3.3.1. Vínculo con la estrategia de regularización de Tikhonov.

Como es usual en la formulación lagrangiana de problemas inversos, la ecuación (68) dice que  $K = \|(\phi^\dagger, \psi^\dagger)\|_{\mathbf{M}}$  es lo que realmente es importante conocer como información *a priori* en este enfoque. Se busca conocer *a priori* el menor valor de  $K$  que tenga sentido y minimice el error en el peor de los casos  $\omega_A(\sqrt{2}\delta \max\{1, \|B\|\}, 2K, E^{\frac{1}{2}})$  para un orden de error dado  $\delta > 0$ . La dependencia de  $\alpha$  respecto de  $K$  en realidad hace que el parámetro  $\alpha$  pueda ser considerado como información *a priori* cuando  $K$  es un valor conocido. Sin embargo, a través de la formulación lagrangiana, en el caso en que  $K$  es desconocido y  $\|(\phi^\dagger, \psi^\dagger)\|_{\mathbf{M}} < \infty$  es el único hecho conocido, entonces  $\alpha$  se convierte en un parámetro de regularización. La discusión previa establece que existe un parámetro de regularización  $\alpha_{MDA}$  para el cuál la solución MDA para la formulación lagrangiana es óptima. El problema de investigación que permanece es cómo escoger valor del parámetro de regularización  $\alpha$ . De hecho, el sistema (66)-(67) puede ser reescrito como

$$(T_s^* T_s + \alpha I)(\zeta, \psi) = T_s^*(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}), \quad T_s(\zeta, \psi) = \begin{pmatrix} A_s & B \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \psi \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, bajo el 2º supuesto de información *a priori* (61), la solución MDA es la evaluación de  $Q_2^s$  en la primera coordenada de la solución de Tikhonov, con parámetro  $\alpha = \alpha_K$ , del problema inverso lineal  $T_s \mathbf{x} = \mathbf{y}$ . Cuando  $\alpha_K$  se convierte en el parámetro de regularización  $\alpha$  es importante recordar que  $T_s$  no es un operador compacto debido al papel que juega el operador identidad en su definición, de modo que debe ponerse especial atención en la estrategia empleada para la elección de dicho parámetro de regularización. En algunos casos, la convergencia y el orden de dicha convergencia a la solución exacta (en función de  $\delta > 0$ ) para la estrategia de elección del parámetro de regularización, dependen de la compacidad del operador que define al problema inverso.

Es claro que  $\psi^\delta$  converge a  $\psi^\dagger$  cuando  $\delta$  tiende a 0, por lo que  $(\Phi^\delta, \psi^\delta)$  es una cuasi solución del problema inverso  $T_0 \mathbf{x} = \mathbf{y}$ . No obstante, el mal planteamiento del problema de Cauchy es dominado por el operador  $A$ , siendo esta la razón por la cual hemos elegido el enfoque del problema inverso en la forma  $A\Phi = \rho$ .

Existe otra forma de entender a la relación entre la solución de Tikhonov y la solución MDA. La ecuación (66) puede reescribirse como sigue para la solución  $(\zeta^{\delta,\alpha}, \psi^{\delta,\alpha})$ , recordando que  $P$  es el inverso de  $Q$  y  $P_2^s$  el inverso de  $Q_2^s$ :

$$(Q_2^s P Q W A Q_2^s + \alpha Q_2^s P Q P_2^{2s} Q_2^s) P_2^s Q_2^s \zeta^{\delta,\alpha} = Q_2^s P Q W \tilde{\rho}^{\delta,\alpha},$$

donde  $\tilde{\rho}^{\delta,\alpha} = \tilde{\phi} - B\psi^{\delta,\alpha}$ . Tomando en cuenta que  $QW$  es el adjunto de  $A$  ( $D(A) = E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ ) y recordando la definición  $\Phi^{\delta,\alpha} = \zeta^{\delta,\alpha}$  se tiene, al factorizar  $Q_2^s P$  por la izquierda y distribuyendo  $P_2^s$  por la derecha en el lado izquierdo de la ecuación,

$$Q_2^s P (A^* A + \alpha Q P_2^{2s}) \Phi^{\delta,\alpha} = Q_2^s P A^* \tilde{\rho}^{\delta,\alpha}.$$

La diferencia entre los operadores  $Q$ ,  $Q_1$  y  $Q_2$  (análogamente con sus respectivos inversos) radica en sus dominios y codominios como espacios normados. Sin embargo, en un sentido estrictamente algebraico, son el mismo operador, por lo que pueden ser empleados de forma indistinta en la ecuación anterior inmediata, de forma que, en virtud de esto y de que el operador  $Q_2^s P$  es inyectivo, se llega finalmente a una ecuación familiar:

$$(71) \quad (A^* A + \alpha P^{2s-1}) \Phi^{\delta,\alpha} = A^* \tilde{\rho}^{\delta,\alpha}.$$

Es importante resaltar que la ecuación (71) se ha obtenido de un proceso algebraico, donde se asume el dominio natural de  $A$  ( $D(A) = E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ ) para la definición de su adjunto  $A^*$ , por lo que la suma en el lado izquierdo y la propia igualdad deben entenderse como un abuso de notación en el que toda función de  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  se entiende como una distribución en el sentido que determine la potencia  $2s - 1$  del operador  $P$  en el segundo sumando a la izquierda de la ecuación. Ya hemos demostrado la existencia, unicidad y dependencia continua de  $\Phi^{\delta,\alpha}$  en función de los datos de salida en el caso del segundo supuesto de información *a priori* (61), de forma que la ecuación (71) denota, para un parámetro  $\alpha$  fijo, la solución de Tikhonov con un término de regularización dado por una norma suavizante y un dato de salida que simultáneamente depende del propio parámetro  $\alpha$ .

## Identificación de la condición de Dirichlet en regiones cilíndricas

Sean  $\Gamma$  un dominio<sup>1</sup> acotado en  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ),  $\Omega = (0, a) \times \Gamma$ ,  $\partial\Gamma$  la frontera  $\Gamma$  suave a trozos,  $\Sigma = [0, a] \times \partial\Gamma$ , y  $\Gamma_z = \{z\} \times \Gamma$ , donde  $z$  pertenece a  $[0, a]$ ,  $\Gamma_a$  tomará el lugar de  $\Gamma_1$  en las secciones previas. El espacio  $L^2(\Gamma_z)$  es isométrico a  $L^2(\Gamma)$  para todo real  $z$ , por lo que se consideraran como idénticos todos estos espacios.

En este caso, por el método de separación de variables, la solución del problema de contorno (10) en  $\Omega$  está dada por

$$(72) \quad u(x; z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)v_k(x), \quad w_k(z) = \frac{\Phi_k \cosh(z\lambda_k) + \frac{\psi_k}{\lambda_k} \sinh((a-z)\lambda_k)}{\cosh(a\lambda_k)},$$

donde  $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es un sistema ortonormal y completo de  $L^2(\Gamma)$  que se compone de las funciones propias del inverso aditivo del operador de Laplace definido en  $H^2(\Gamma) \cap H_0^1(\Gamma)$ ,  $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es el correspondiente conjunto de valores propios; mismos que se repiten de acuerdo con su multiplicidad, siendo de dimensión finita cada espacio propio asociado.

En adelante  $\Phi_k$  y  $\psi_k$  denotarán al  $k$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $\Phi$  y  $\psi$  en  $L^2(\Gamma)$ , con respecto al sistema de funciones propias  $\{v_k\}_{k \in \mathbb{M}}$ . La forma analítica de los operadores  $A$ ,  $B$ ,  $P$ ,  $Q$  y  $W$  se obtienen a partir de (72)

$$(73) \quad \begin{aligned} A\Phi &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi_k}{\cosh(a\lambda_k)} v_k \quad (A = W), \\ B\psi &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k \sinh(a\lambda_k)}{\lambda_k \cosh(a\lambda_k)} v_k, \\ Q\Psi &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_k \cosh(a\lambda_k)}{\lambda_k \sinh(a\lambda_k)} v_k, \\ P\Phi &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \frac{\Phi_k \sinh(a\lambda_k)}{\cosh(a\lambda_k)} v_k. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Un conjunto abierto y conexo.

La caracterización del conjunto de datos admisibles se sigue en este caso de forma inmediata de (22) y (73).

TEOREMA 19. *El par  $(\phi, \psi)$  en  $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$  es admisible si y solamente si*

$$(74) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left( \phi_k - \frac{\psi_k}{\lambda_k} \right)^2 e^{2a\lambda_k} < \infty,$$

en cuyo caso, la función  $\Phi$  en el lado izquierdo de (22) es definida por:

$$(75) \quad \Phi = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \phi_k \cosh(a\lambda_k) - \frac{\psi_k}{\lambda_k} \sinh(a\lambda_k) \right] v_k.$$

Es claro que la identificación del dato de entrada  $\Phi$  a partir de los datos admisibles  $(\phi, \psi)$  es un problema severamente mal planteado debido a que los valores singulares de  $A$  tienden exponencialmente a cero. Es importante recordar que  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  es una sucesión no decreciente y no acotada. Observe que

$$(76) \quad -\log^{-p}(WA)\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} -(-2a\lambda_k - \log(4(1 + e^{-2a\lambda_k})^{-2}))^{-p} \zeta_k.$$

Entonces, para  $p = \frac{1}{2}$  y para  $K_a$  dependiente de  $K$  y  $a$ , la pertenencia de  $(\phi^\dagger, \psi^\dagger)$  a  $M$  implica la condición de fuente logarítmica (ver [27]):

$$(77) \quad \Phi^\dagger \in M_{p, K_a} = \{ \Phi : \Phi = -\log^{-p}(WA)\zeta, \|\zeta\| \leq K_a \}.$$

El peor error  $w_A(\delta, K, \|\cdot\|_1)$  puede acotarse por los estimados presentados en [27, 44] de orden  $O(-\log(\frac{1}{\delta^p}))$ .

Por otro lado, la solución  $u$  se asume en  $H^1(\Omega)$  y  $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es también un sistema ortogonal en  $H_0^1(\Gamma)$  con el producto escalar  $(\nabla \cdot, \nabla \cdot)_{L^2}$ , verificando  $\|\nabla v_k\| = \lambda_k^2$ . Así, por un simple cálculo se infiere de (72) lo siguiente

$$(78) \quad \|\Phi\|_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \langle \Phi, P\Phi \rangle_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \Phi_k^2 \frac{\sinh(a\lambda_k)}{\cosh(a\lambda_k)} v_k,$$

En la ecuación anterior es claro que  $\|\nabla u\|$  está acotada superior e inferiormente por múltiplos escalares de  $\|(-\Delta)^{1/4}\Phi\|$ , que está definido mediante la descomposición espectral de su inverso que es un operador compacto al ser una potencia positiva del inverso de un múltiplo escalar del operador de Laplace. En otras palabras, la solución del problema de contorno (4a)-(4d) existe si y sólo si  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  es el espacio de Hilbert

$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  <sup>2</sup> definido en [34], con producto interior definido como en [1], todos los detalles pueden ser revisados en [25, chap 2]:

$$(79) \quad (f, g)_{H_{00}^{1/2}} = \int_{\Gamma} (-\Delta)^{1/4} f (-\Delta)^{1/4} g dS$$

Entonces  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  se define también como el rango del operador compacto  $(-\Delta)^{-\frac{1}{4}}$ , por lo que para todo  $\Phi$  en  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  existe  $\tau$  en  $L^2(\Gamma)$  tal que  $(-\Delta)^{-\frac{1}{4}}\tau = \Phi$ ; es decir, el operador  $Q_2$  en el segundo supuesto de información *a priori* en la sección 3 puede y será reemplazado por  $(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$  en este caso particular de la geometría de  $\Omega$ .

OBSERVACIÓN 10. *La sucesión  $\left\{ \frac{\lambda_k}{\cosh(a\lambda_k)} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$  es acotada (digamos que por una constante  $C$ ); entonces,*

$$(80) \quad \begin{aligned} \|A\Phi\|_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} &= \langle A\Phi, PA\Phi \rangle_{E^{1/2}(\Gamma) \times E^{-1/2}(\Gamma)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \Phi_k^2 \sinh(a\lambda_k)}{\cosh(a\lambda_k)^3} v_k \leq C \|\Phi\|^2, \end{aligned}$$

lo que significa que  $A$  es continuo de  $L^2(\Gamma)$  en  $E^{1/2}(\Gamma)$  (compacto de  $L^2(\Gamma)$  en él mismo), por lo que el caso de una geometría cilíndrica de  $\Omega$  es un caso en el que  $A$  puede ser extendido de forma continua; es decir, en este caso se tiene  $D(A) = L^2(\Gamma)$ . Por lo tanto, cualquiera de las dos opciones para el segundo supuesto ( $Q_2^{\frac{1}{2}}$  o  $(-\Delta)^{-\frac{1}{4}}$ ), es equivalente al primer supuesto de información *a priori* (32), y deriva en una solución regularizada que es óptima, debido a que el peor error posible es considerado en el sentido de  $L^2(\Gamma_1)$ . En secciones posteriores y hasta que se indique algo distinto, se sustituirá a  $Q_2^{\frac{1}{2}}$  por  $(-\Delta)^{-\frac{1}{4}}$  en este esquema de regularización. La razón para ello es simplemente que resulta numéricamente más cómodo de esta forma.

### 1. Regularización en un esquema semi- discretizado

Sea  $V^{(m)}$  el subespacio finito dimensional de  $L^2(\Gamma_1)$  que es generado por  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ ,  $V^{(m)\perp}$  el complemento ortogonal en  $L^2(\Gamma_1)$  de  $V^{(m)}$ ,  $\text{Pr}$  la proyección de distancia mínima a  $V^{(m)}$ , y  $\text{Pr}^{\perp}$  la correspondiente proyección de distancia mínima a  $V^{(m)\perp}$ . Puesto que  $\{v_1, v_2, \dots\}$  es un sistema completo en  $L^2(\Gamma)$  y, aún bajo el segundo supuesto (61) con  $(-\Delta)^{-\frac{1}{4}}$  en lugar de  $Q_2^s$  donde  $s = \frac{1}{2}$ , como se mencionó al final de la sección anterior: si  $\Phi^{\dagger} = (-\Delta)^{-\frac{1}{4}}\tau^{\dagger}$  con  $\tau^{\dagger}$  en  $L^2(\Gamma)$ , se verifica que  $\|\text{Pr}^{\perp} \Phi^{\dagger}\| = \sqrt{\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\tau_k^2}{\lambda_k}} \leq \delta$  cuando  $m = m_{\delta, K}$  es tal que

<sup>2</sup>También conocido como el espacio de Lions, definido como la cerradura de  $\mathcal{D}(\Gamma)$  en la norma de  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

$$(81) \quad \text{máx} \left\{ \frac{K}{\lambda_{m,\delta,\kappa}^{1/2}}, \left\| \text{Pr}^\perp \tilde{\phi} \right\|, \left\| \text{Pr}^\perp \tilde{\psi} \right\| \right\} \leq \delta.$$

El sistema  $\{v_1, v_2, \dots\}$  es completo y ortogonal en  $L^2(\Gamma)$ , la forma analítica de  $A$  y  $B$  en (73) muestra que cada  $v_k$  también es una función propia de ambos operadores. Entonces,  $\text{Pr}$  conmuta con  $A$  y  $B$ , implicando que también se verifica  $A \text{Pr} \Phi^\dagger = \text{Pr} \phi^\dagger - B \text{Pr} \psi^\dagger$ ,  $\left\| \text{Pr} \phi^\dagger - \text{Pr} \tilde{\phi} \right\| \leq \delta$  y  $\left\| \text{Pr} \psi^\dagger - \text{Pr} \tilde{\psi} \right\| \leq \delta$ . De esta forma, considerando  $(\text{Pr} \tilde{\phi}, \text{Pr} \tilde{\psi})$  como la medición del dato de Cauchy en lugar de  $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$ , y denotando la correspondiente solución MDA mediante  $\Phi^{\delta,m,\kappa}$  se obtiene un nuevo corolario del Teorema 10.

**COROLARIO 20.** *La función  $\Phi^{\delta,m,\kappa}$  es una solución regularizada asintóticamente optimal del problema inverso (23) cuando  $(\text{Pr} \tilde{\phi}, \text{Pr} \tilde{\psi})$  no pertenece a  $\text{cl}_{(L^2(\Gamma_0))^2}(M)$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** El resultado se sigue inmediatamente de la discusión anterior y del Teorema 10:

$$(82) \quad \begin{aligned} \left\| \Phi^\dagger - \Phi^{\delta,m,\kappa} \right\| &= \left\| \text{Pr} \Phi^\dagger - \Phi^{\delta,m,\kappa} \right\| + \left\| \text{Pr}^\perp \Phi^\dagger \right\| \\ &\leq w_A ((1 + \|B\|)\delta_1, 2K) + \delta. \end{aligned}$$

□

La solución regularizada  $(\Phi^{\delta,m,\kappa}, \psi^{\delta,m,\kappa}) = (\Phi^{m,\delta,\alpha}, \psi^{m,\delta,\alpha})$  se obtiene de resolver las ecuaciones normales (83)-(84):

$$(83) \quad \left[ A^2 + \alpha(-\Delta)^{1/4} \right] \Phi + AB\psi = A \text{Pr} \tilde{\phi},$$

$$(84) \quad BA\Phi + [B^2 + (1 + \alpha)I] \psi = B \text{Pr} \tilde{\phi} + \text{Pr} \tilde{\psi},$$

para  $\alpha = \alpha_k$  tal que  $\left\| (\Phi^{m,\delta,\alpha}, \psi^{m,\delta,\alpha}) \right\|_0 = K$ .

#### 1.0.1. Ejemplo numérico.

El esquema en la sección 1 es aplicado para la elección  $m = 550$  en el cilindro simétrico  $\Omega = (0, a) \times \Gamma$ , con  $\Gamma = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ . Como lo muestra (75), el error de regularización depende exponencialmente en la altura del cilindro (el valor de  $a$ ); es decir, el orden del mal planteamiento del problema inverso depende de la altura del cilindro y de la velocidad con la que  $\lambda_k$  diverge, haciendo que el problema sea prácticamente inasequible para valores considerablemente grandes del parámetro  $a$ , por lo que, el ejemplo numérico presentado se realiza para  $a = 1$ . En la presente sección es comparada la solución MDA con la estrategia de

regularización de Tikhonov, debido a que esta última aún es el método mayormente empleado en la literatura. La comparación se hace para distintos niveles de suavidad impuestos sobre la solución exacta  $\Phi^\dagger$ :

- $\Phi^\dagger \in R((-\Delta)^{-\frac{1}{4}})$ . Esta es la información *a priori* más pobre que puede proveer la formulación operacional del problema inverso. Este es un caso de escasa suavidad de la solución exacta, donde la optimalidad para la solución de Tikhonov no está garantizada ( $\Phi^\dagger \in R((WA)^p(-\Delta)^{\frac{1}{4}})$ ,  $p < 1$  con  $A$  como un operador continuo en la norma de  $L^2$  y definido en  $R((-\Delta)^{-\frac{1}{4}})$ ). La optimalidad para la solución de Tikhonov es considerada bajo las condiciones  $X_1 = R((WA)^p)$  y  $\|x\|_{X_1} = \|(WA)^{-p}x\|$  en la definición de peor error posible en la sección 2, para un cierto  $p \geq 0$  dado. En este primer caso de suavidad se considera  $p = 0$ .
- $\Phi^\dagger \in R((WA)^p(-\Delta)^{-\frac{1}{4}})$ ,  $1 \leq p \leq 2$ . Suavidad suficiente para garantizar la optimalidad de la solución de Tikhonov en el mismo sentido que en el caso anterior ( ver Teorema 2.12 en [31, p. 38]).
- $\Phi^\dagger \in R((WA)^p(-\Delta)^{-\frac{1}{4}})$ ,  $p > 2$ . Suavidad alta de la solución exacta, donde se sabe que no existe parámetro de regularización alguno que haga óptima la solución de Tikhonov en el sentido ya descrito ( $\Phi^\dagger \in R((WA)^p)$ ,  $p > 2$ ). En nuestro caso particular se verifica  $\|WA\| < 1$ , de forma que por una demostración análoga a la del Teorema 1.21 en [31] se obtiene  $\omega_A(\delta, K, \|\cdot\|_1) < O(\delta^{\frac{2}{3}})$ , mientras que el Teorema 2.13 en [31] establece que la solución de Tikhonov no puede ser óptima para  $p > 2$ .

Para un nivel de error dado  $\delta > 0$  y un parámetro de regularización  $\alpha$ , las soluciones MDA y de Tikhonov serán respectivamente denotadas por  $\Phi_{MDA}^{m,\delta,\alpha}$  y  $\Phi_T^{m,\delta,\alpha}$ . El mejor parámetro de regularización posible para un ejemplo sintético se define como el menor parámetro que es solución de

$$\alpha_{MDA} = \operatorname{argmin}_{\alpha>0} \|\Phi^\dagger - \Phi_{MDA}^{m,\delta,\alpha}\|, \quad \alpha_T = \operatorname{argmin}_{\alpha>0} \|\Phi^\dagger - \Phi_T^{m,\delta,\alpha}\|,$$

definiéndose en cada caso la mejor solución posible como sigue:

$$\Phi_{MDA}^{m,\delta,\alpha_{MDA}}, \quad \Phi_T^{m,\delta,\alpha_T}.$$

El error relativo de una solución regularizada  $\tilde{\Phi}$  se define de la forma usual por  $RE(\tilde{\Phi}) = \frac{\|\Phi^\dagger - \tilde{\Phi}\|}{\|\Phi^\dagger\|}$ . Los histogramas correspondientes a los ejemplos numéricos se muestran en la Figura 1. El valor medio y las desviaciones estándar (std) de una comparación entre las mejores soluciones posibles por la metodología MDA y el método de Tikhonov se presentan en la Tabla 1. La comparación se hizo para cada valor  $p$  en  $\{0, 1, 3\}$ , determinando distintos niveles de suavidad para la solución

exacta ( $\Phi^\dagger \in R((WA)^p(-\Delta)^{-1/4})$ ), así como para cada orden de error en los datos de salida  $\delta = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}$ . En todos los casos se consideró una muestra de 300 ejemplos sintéticos con condiciones de frontera ( $\Phi^\dagger, \psi^\dagger, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}$ ), construidos a partir de la forma analítica (72):

- $\zeta^\dagger, \psi^\dagger, \tilde{\delta}^{(1)}, \tilde{\delta}^{(2)}$  en  $V^{(550)}$  de forma que cada uno de sus coeficientes de Fourier respecto del sistema  $\{v_1, v_2, \dots\}$  es un número pseudo aleatorio con distribución normal estándar. Además del error, construimos una muestra grande de pares pseudo aleatorios ( $\zeta^\dagger, \psi^\dagger$ ) en  $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$  con el fin de controlar la regularidad del dato exacto  $\Phi^\dagger$  mediante su serie de Fourier.
- $\Phi^\dagger = (WA)^p(-\Delta)^{-\frac{1}{4}}\zeta^\dagger$ , de acuerdo con los casos descritos con anterioridad.
- $\tilde{\phi} = A\Phi^\dagger + B\psi^\dagger + \delta \frac{\tilde{\delta}^{(1)}}{\|\tilde{\delta}^{(1)}\|}$  y  $\tilde{\psi} = \psi^\dagger + \delta \frac{\tilde{\delta}^{(2)}}{\|\tilde{\delta}^{(2)}\|}$ .

	$\delta$	$RE(\Phi_{AD}^{n,\delta,\alpha AD})$		$RE(\Phi_T^{n,\delta,\alpha T})$	
		media	desv. estandar	media	desv. estandar
1	1E-3	0.94745824	0.01960843	0.94749567	0.01960328
	1E-6	0.89265586	0.01981795	0.89268559	0.01981193
	1E-9	0.83554627	0.02003589	0.83555558	0.0200347
2	1E-3	0.00448613	0.00021999	0.00533443	0.001308
	1E-6	5.70165E-0	1.76458E-5	6.89085E-5	1.86605E-5
	1E-9	6.43584E-7	1.70329E-7	7.71689E-7	1.83486E-7
3	1E-3	0.00348864	0.00019230	0.00456397	0.00076260
	1E-6	3.41411E-5	5.07517E-6	4.95877E-5	6.81315E-6
	1E-9	3.59424E-7	5.00185E-08	5.49233E-7	6.91165E-8

TABLA 1. Valores medios y desviaciones estándar para las mejores soluciones posibles del tipo MDA y Tikhonov. Tamaño de muestra:300. Altura del cilindro:  $a = 1$ . Para  $p = 0$  se considera la identidad  $I = (WA)^p$  en  $L^2(\Gamma_a)$ . Caso 1:  $\Phi^\dagger$  en  $R((WA)^0(-\Delta)^{-1/4})$ . Caso 2:  $\Phi^\dagger$  en  $R((WA)(-\Delta)^{-1/4})$ . Caso 3:  $\Phi^\dagger$  en  $R((WA)^3(-\Delta)^{-1/4})$ .

La Figura 2 muestra que poca suavidad en la solución exacta puede implicar que el peor error posible sea mayor que en otros casos de mayor suavidad para la solución exacta. Se muestran dos casos, en el primero de ellos la solución exacta es suficientemente regular como para pertenecer a una clase de funciones en la cual la estrategia de Tikhonov se comporta bien, mientras que en el segundo ejemplo, se aplica a la solución exacta del primer ejemplo el operador  $WA$ , con el fin de incluir un ejemplo en el cual la mejor solución posible de Tikhonov sea óptima. En ambos

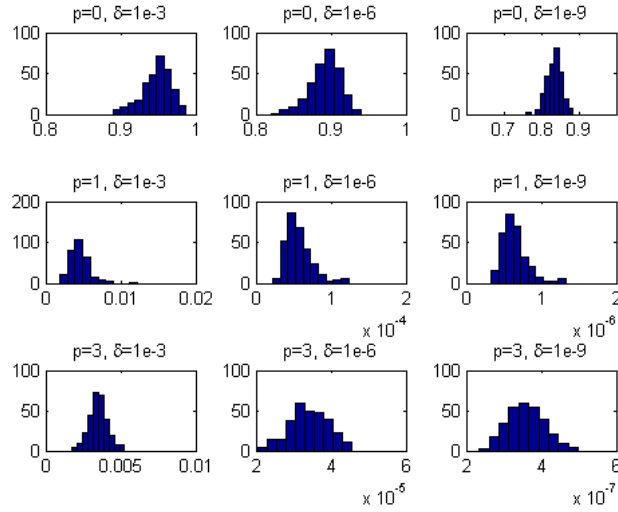
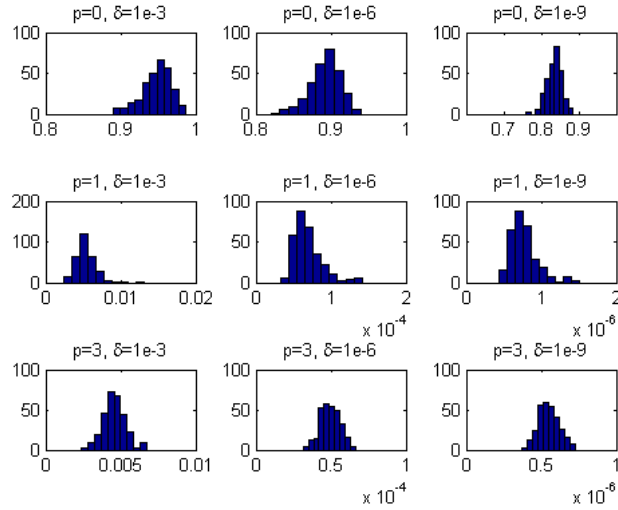
(a)  $RE_{AD}(\Phi)$ (b)  $RE_T(\Phi)$ 

FIGURA 1. Histogramas de  $RE_{AD-T}(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$ , con una muestra de tamaño 300, con nivel de ruido  $\delta$  y suavidad de la solución exacta determinada por  $p$  ( $\Phi^\dagger \in R((WA)^p(-\Delta)^{-1/4})$ ). La altura del cilindro es  $a = 1$ . Para  $p = 0$  se considera la identidad  $I = (WA)^0$  en  $L^2(\Gamma_a)$ .

casos se comparte una condición de contorno de Neumann que es no diferenciable y está dada en coordenadas polares como sigue:

$$\psi^\dagger(r, \theta) = \sqrt{|r - \theta|} (r \sin(3r) \cos(\theta))^3,$$

en tanto que las respectivas condiciones de Dirichlet están dadas en coordenadas polares por

$$\Phi^\dagger(r, \theta) = \frac{(1-r) \cos(\theta)^3}{r}, \text{ y } \Phi^\dagger(r, \theta) = WA \frac{(1-r) \cos(\theta)^3}{r};$$

$$\phi^\dagger = A\Phi^\dagger + B\psi^\dagger.$$

Los pares de Cauchy  $(\phi^\dagger, \psi^\dagger)$  fueron perturbados en el mismo sentido pseudo aleatorio que antes, con un nivel de ruido  $\delta = 10^{-4}$  para obtener  $(\hat{\phi}, \hat{\psi})$ .

OBSERVACIÓN 11. *En este caso, una función propia de  $-\Delta$  es de la forma*

$$(85) \quad v(r, \theta) = J_i(\lambda r) \cos(j\theta), \quad v(r, \theta) = J_i(\lambda r) \sin(j\theta),$$

donde  $J_i$  es la función especial de Bessel del primer tipo y orden  $i$ , y  $\lambda$  es tal que  $J_i(\lambda) = 0$ .

## 2. Relación con el encajamiento invariante

El problema de identificar la condición de contorno de Dirichlet en la frontera inaccesible  $\Gamma_a$  de la región cilíndrica  $\Omega$ , para el problema de Cauchy para la ecuación de Laplace, se ha establecido como un problema inverso mediante la ecuación operacional (23). Esto también puede hacerse con un enfoque de encajamiento invariante y el método de factorización como se expone en [1], con la diferencia de que en este caso sólo nos concentramos en los encajamientos invariantes que permiten establecer ecuaciones diferenciales formales en la variable  $z$  para la caracterización de los operadores involucrados en la solución de datos admisibles.

Empleando únicamente el estado  $u$  definido por (10) y mediante un encajamiento invariante, considerado de  $a$  a  $0$  en lugar de  $0$  a  $a$ , es posible establecer a los operadores  $A$  y  $B$  como la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales formales de primer orden en la variable  $z$ , de forma análoga a como J. Henry y Á. Ramos lo hacen en [25] para los operadores  $P$  y  $W$ . El problema de contorno (10) es encajado en una familia de problemas de contorno definidos en los subdominios  $\Omega_s = (s, a) \times \Gamma$ . Considérese el siguiente problema de contorno:

$$\begin{aligned}
\Delta u_1^{(s)} &= 0 \text{ en } \Omega_s, & \Delta u_2^{(s)} &= 0 \text{ en } \Omega_s, \\
u_1^{(s)}|_{\Sigma} &= 0, & u_2^{(s)}|_{\Sigma} &= 0, \\
u_1^{(s)}|_{\Gamma_a} &= \Phi, & u_2^{(s)}|_{\Gamma_a} &= 0, \\
\frac{\partial u_1^{(s)}}{\partial \nu}|_{\Gamma_s} &= 0, & \frac{\partial u_2^{(s)}}{\partial \nu}|_{\Gamma_s} &= \zeta.
\end{aligned}$$

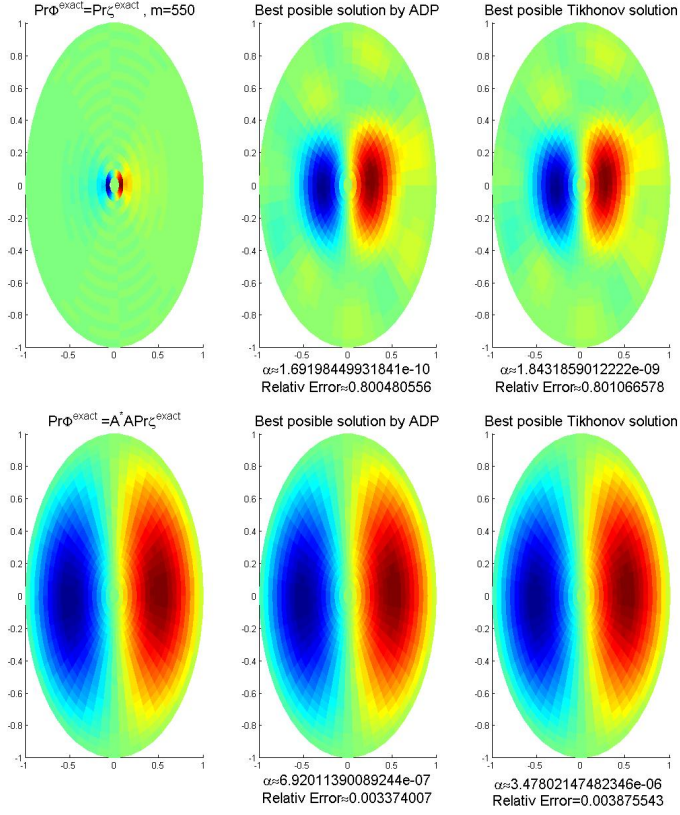


FIGURA 2. Comparación entre las soluciones MDA y de Tikhonov. Primera línea:  $\Phi^{exact} = \Phi^\dagger$  está dado por  $((1-r)\cos(\theta)^3)/r$ . Proyección de  $\Phi^{exact}$  sobre  $V^{(550)}$ ,  $Pr\Phi^{exact}$  (izquierda), Mejor solución MDA posible (centro), mejor solución posible de Tikhonov (derecha). Segunda línea:  $\Phi^{exact} = WA(((1-r)\cos(\theta)^3)/r)$ . Proyección de  $\Phi^{exact}$  sobre  $V^{(550)}$ ,  $Pr\Phi^{exact}$  (izquierda), mejor solución MDA posible (centro), mejor solución posible de Tikhonov (derecha). Se aplica esquema de semi discretización en la sección 1. Altura del cilindro:  $a = 1$ .

Sean  $A(s) : \mathbf{H}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a) \rightarrow \mathbf{H}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s)$  el operador Dirichlet-Dirichlet definido por  $A(s)\Phi = u_1^{(s)}|_{\Gamma_s}$  y  $B(s) : \mathbf{H}_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_s) \rightarrow \mathbf{H}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s)$  el operador Neumann-Dirichlet definido por  $B(s)\zeta = u_2^{(s)}|_{\Gamma_s}$ . De esta forma, denotando  $\phi(s) = u^{(s)}|_{\Gamma_s}$  y eligiendo  $\zeta(s) = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_s}$  ( $\zeta(0) = \psi$ ), se satisface la ecuación (86) y de ella se obtiene (22) para  $s = 0$ .

$$(86) \quad \phi(s) = B(s)\zeta(s) + A(s)\Phi.$$

Mediante un esquema formal de derivación como el que se sigue en [25, 1, 9] se infieren las ecuaciones (87) y (88) para todo  $z$  en el intervalo  $(0, a)$

$$(87) \quad \frac{d}{dz}A(z) + B(z)\Delta_x A(z) = 0, \quad A(a) = I,$$

$$(88) \quad \frac{d}{dz}B(z) + B(z)\Delta_x B(z) + I = 0 \quad B(a) = 0.$$

En una región cilíndrica  $\Omega = (0, a) \times \Gamma$  es posible separar variables, de forma que, dado como antes el sistema de funciones propias del negativo del operador de Laplace en  $\Gamma$ , que coincide con el sistema de funciones singulares de  $Q$  y en este caso es dentado por  $v_1, v_2, \dots$ , ocurre que todo operador lineal  $T$  en  $\mathcal{L}(\mathbf{H}_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \mathbf{L}^2(\Gamma))$  es de la forma

$$T\varphi = \sum_i \sum_j t_{ij} \varphi_i v_j, \quad \varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i v_i,$$

donde, como ya se ha dicho,  $\psi_i$  es el  $i$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $\psi$  con respecto al sistema  $\{v_i\}$  y  $t_{ij}$  un real. Así, para la familia de operadores lineales  $\{T(z)\}_{z \in [0, a]}$  en  $\mathcal{L}(\mathbf{H}_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \mathbf{L}^2(\Gamma))$ , vista como una función con  $z$  un real en el intervalo  $[0, a]$ , su derivada de Fréchet en  $(0, a)$ , si existe, es una función de dicho intervalo abierto en  $\mathcal{L}(\mathbf{H}_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \mathbf{L}^2(\Gamma))$  definida como el límite de las derivadas de las sumas parciales de  $T(z)$ :

$$\frac{d}{dz}T(z)\varphi = \sum_i \sum_j \frac{d}{dz}t_{ij}(z) \varphi_i v_j,$$

con  $t_{ij}(z)$  un real. Luego, para una familia  $\{\varphi(z)\}$  de distribuciones en  $\mathbf{H}_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  se sigue que  $T_z\varphi(z)$  define una función del intervalo  $[0, a]$  en  $\mathbf{H}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  como subespacio de  $\mathbf{L}^1(\Gamma)$ , de forma que, si existe la derivada de Fréchet de  $\varphi(z)$  respecto de  $z$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(T_z \varphi(z)) &= \sum_i^\infty \sum_j^\infty \left[ \frac{d}{dz} t_{ij}(z) \varphi_i(z) + t_{ij}(z) \frac{d}{dz} \varphi(z) \right] v_i \\ &= \frac{d}{dz} T(z) \varphi(z) + T(z) \frac{d}{dz} \varphi(z). \end{aligned}$$

Es en este sentido formal en el que se entienden las ecuaciones (87) y (88). Derivando (86) y notando que  $\frac{\partial}{\partial z} \phi(z) = \frac{\partial}{\partial z} (u_1^z + u_2^z)|_{\Gamma_z} = -\zeta(z)$  se sigue:

$$(89) \quad -\zeta(z) = \frac{\partial}{\partial z} A(z) \Phi + \frac{\partial}{\partial z} B(z) \zeta(z) + B(z) \frac{d}{dz} \zeta(z).$$

Pero  $\frac{\partial u_2^{(s)}}{\partial \nu} \Gamma_s = -\frac{\partial u_2^{(s)}}{\partial z} \Big|_{\gamma_s}$  ( $s \in [0, a)$ ) y  $u_2$  es una función armónica en sentido clásico en  $\Omega_s$ . Si en particular se toma  $\zeta(s)$  como el dato de Neuman en  $\Gamma_s$  para la solución del problema (10) con  $\psi$  dado en  $L^2(\Gamma_0)$ , entonces  $u_2^{(s)}$  aquí puede extenderse a una función armónica en  $\Omega$ , por lo que, bajo estos supuestos,

$$\frac{d}{dz} \zeta(z) = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} u_2^{(s)} \Big|_{\Gamma_z} = \Delta_x u_2^{(s)} \Big|_{\Gamma_z} = \Delta_x \phi(z).$$

Sustituyendo  $\frac{d}{dz} \zeta(z)$  en (89) por el extremo derecho en la ecuación anterior inmediata se obtiene

$$(90) \quad -\zeta(z) = \frac{\partial}{\partial z} A(z) \Phi + \frac{\partial}{\partial z} B(z) \frac{\partial}{\partial z} \zeta(z) + B(z) \Delta_x \phi(z).$$

Sustituyendo a  $\phi(z)$  del término  $B(z) \Delta_x \phi(z)$  en (90) por el extremo derecho en (86), se llega a

$$(91) \quad \left( \frac{\partial}{\partial z} A(z) + B(z) \Delta_x A(z) \right) \Phi = - \left( I + \frac{\partial}{\partial z} B(z) + B(z) \Delta_x B(z) \right) \zeta(z).$$

La ecuación (91) se verifica para cualesquiera  $\Phi$  en  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  y, mediante la forma analítica (72), se muestra que para  $\Phi \equiv 0$ , el dato de Neumann en  $\Gamma_z$  de la solución al problema (10) (nuestro dato  $\zeta(z)$  en este caso) puede tomar cualquier valor en un conjunto denso en  $H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , con lo que este caso en particular ( $\Phi \equiv 0$ ) implica la ecuación (88) a partir de (91). Además, como consecuencia también se deduce (87) a partir de (88) y (91).

Ahora, los operadores  $P(s) : H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a) \rightarrow H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_a)$  y  $W(s) : H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_a) \rightarrow H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_a)$  serán como en [25]:  $\Omega^s = (0, s) \times \Gamma$ ,  $P(s)\Phi = \frac{\partial U_1^{(s)}}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_a}$  y  $W(s)\psi = - \frac{\partial U_2^{(s)}}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_a}$ , donde :

$$\begin{aligned} \Delta U_1^{(s)} &= 0 \text{ en } \Omega^s, & \Delta U_2^{(s)} &= 0 \text{ en } \Omega^s, \\ U_1^{(s)} \Big|_{\Sigma} &= 0, & U_2^{(s)} \Big|_{\Sigma} &= 0, \\ U_1^{(s)} \Big|_{\Gamma_s} &= \tau(s), & U_2^{(s)} \Big|_{\Gamma_s} &= 0, \\ \frac{\partial U_1^{(s)}}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_0} &= 0, & \frac{\partial U_2^{(s)}}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_0} &= \psi. \end{aligned}$$

De acuerdo con [25, 1, 9] se llega al siguiente sistema de ecuaciones para  $P$  y  $W$  a partir de un esquema de derivación como el anterior:

$$\frac{d}{dz} P(z) + P(z)^2 = -\Delta_x, \quad P(0) = 0,$$

$$\frac{d}{dz} W(z) + P(z)W(z) = 0, \quad W(0) = I,$$

sólo que derivando la ecuación (92) en lugar de (86):

$$(92) \quad \frac{\partial}{\partial z} U^{(z)}(z; \cdot) = P(z)\tau(z) + W(z)\psi.$$

Entonces, el encajamiento invariante [25] permite establecer las ecuaciones normales para la solución MDA en dependencia de operadores que satisfacen las ecuaciones diferenciales formales antes expresadas, también sugiere que la metodología de datos admisibles. También puede ser implementada en regiones con geometrías más complejas, bajo el mismo esquema de semi discretización que el método de factorización propuesto por J. Henry y colaboradores. En el mismo sentido, otra posible implementación es en casos como el problema inverso electrocardiográfico, donde se dispone de una secuencia de mediciones de datos de Cauchy que son de alguna forma dependientes en el tiempo, y se desea resolver cada uno de los correspondientes problemas de Cauchy en el menor tiempo posible para su pertinencia en las aplicaciones clínicas. La clave para afirmar tales posibilidades es el hecho de que el mismo enfoque de regularización que lleva a la solución de datos admisibles desarrollado en las secciones de la 1 a la 2.1, puede aplicarse en los siguiente casos:

- $\Omega$  un cilindro como antes o un cono truncado, donde la condición de Dirichlet nula (10b) es reemplazada por la condición de

Neumann nula  $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Sigma} = 0$ , y los espacios vectoriales  $E_0$  y  $E_{00}(\Omega)$  se definen como sigue:

$$E_0 = \left\{ v \in H^1(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma} = 0 \right\}, \quad E_{00}(\Omega) = \{v \in E_0 : v|_{\Gamma_1} = 0\},$$

- $\Omega = \Omega_0 \setminus \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\Omega_1)$ , donde  $\Omega_0$  y  $\Omega_1$  son dominios acotados en  $\mathbb{R}^n$  con fronteras regulares y tales que  $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\Omega_1) \subset \Omega_0$ . En este caso se omite la condición de contorno (10b),  $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$ ,  $\Gamma_1 = \partial\Omega_1$  y

$$E_0 = E_{00}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_1} = 0\}.$$

En ambos casos, para las modificaciones anteriores al problema inverso, debe considerarse como dominio de  $Q$  al espacio de todas las distribuciones en  $E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  ortogonales a las constantes:

$$E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)^{\perp} = \left\{ \Psi \in E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) : \langle 1, \Psi \rangle_{E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times E^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = 0 \right\}.$$

Ambos ejemplos se desarrollan en [25] en el marco del método de factorización cuando existe un difeomorfismo de clase  $C^1$  entre  $\Gamma_0$  y  $\Gamma_1$ .

### 3. Comentarios adicionales al capítulo

Hemos hecho uso del encajamiento invariante siguiendo una técnica de J. Henry y Á. Ramos, por lo que ahora compararemos brevemente y de forma teórica el Método de factorización con la Metodología de datos admisibles.

Para el Método de factorización se dispone de dos estados  $u$  y  $\omega$  que son soluciones a diferentes problemas de contorno, uno de los cuales emplea la componente de Neumann  $\psi$  del par de Cauchy en  $\Gamma_0$  y una condición de contorno  $\varphi_1$  dada como variable en un espacio de funciones o distribuciones en  $\Gamma_1$  (o  $\Gamma_a$  según corresponda), mientras que el segundo estado se define mediante la condición de Dirichlet  $\phi$  del dato de Cauchy en cuestión definido en  $\Gamma_0$  y una condición de contorno  $\varphi_2$  dada también como variable en un espacio de funciones o distribuciones en  $\Gamma_1$  (o  $\Gamma_a$  según corresponda). La condición de Dirichlet (o de Neuman en el caso correspondiente) nula en  $\Sigma$  es común para ambos estados. Luego, se define una función de costo  $\mathcal{E}$  como el cuadrado de la norma de la diferencia entre los estados  $u$  y  $\omega$ , en una norma equivalente a la de  $H^1(\Omega)$ :

$$\mathcal{E}(\varphi_1, \varphi_2) = \|\nabla(u - \omega)\|^2.$$

En el caso del Método de factorización se dice que el dato de Cauchy  $(\phi, \psi)$  es compatible (admisibles para la Metodología de datos admisibles) si existen estados  $u$  y  $\omega$  que sean iguales, es decir, si existe algún par de

condiciones de contorno en  $\Gamma_1$  ( $\varphi_1, \varphi_2$ ) de tal suerte que el mínimo de la función de costo se alcance en  $(\varphi_1, \varphi_2)$  y su valor sea nulo. Así, mediante el Método de factorización la solución al problema de Cauchy para la ecuación de Laplace en la forma que aquí interesa se define como el par  $(\varphi_1, \varphi_2)$  que minimiza la función de costo<sup>3</sup>  $\mathcal{E}$ .

Ahora, para entender el Método de factorización desde la óptica de la Teoría general de regularización, volvemos al caso de las regiones cilíndricas y elegimos al estado  $u$  como la solución débil del problema (10) ( $u^{(s)} = u_1^{(s)} + u_2^{(s)}$ ) como en la sección 2) y  $\omega$  como la solución débil del problema (93) para  $s = a$  ( $\omega = \omega^{(a)}$ ):

$$(93a) \quad \Delta \omega^{(s)} \equiv 0 \text{ en } \Omega_s,$$

$$(93b) \quad \omega^{(s)} \Big|_{\Sigma} = 0,$$

$$(93c) \quad \omega^{(s)} \Big|_{\Gamma_s} = \Phi,$$

$$(93d) \quad \omega^{(s)} \Big|_{\Gamma_0} = \phi.$$

Auxiliariamente se definen dos operadores:  $R(s) : H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a) \rightarrow H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_s)$  y  $S(s) : H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_s) \rightarrow H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s)$  como los operadores Dirichlet-Neumann dados por  $R(s)\Phi = -\frac{\partial \omega^{(s)}}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_s}$  con  $\phi \equiv 0$  y  $S(s)\zeta = -\frac{\partial \omega^{(s)}}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_s}$  con  $\Phi \equiv 0$ . Por la fórmula de Green se tiene

$$(94) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}(\Phi, \psi) &= \int_{\Omega} \nabla(u - \omega) \cdot \nabla(u - \omega) dx \\ &= \langle A(0)\Phi + B(0)\psi - \phi, \psi + R(0)\Phi + S(0)\phi \rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Para terminar este esquema de solución del problema de Cauchy sólo resta determinar el sistema de ecuaciones diferenciales formales que definen a los operadores  $R(s)$  y  $S(s)$ . Lo primero es notar que para cualquier  $s$  en  $(0, a)$  y cualquier dato admisible  $(\phi, \psi)$  y su solución  $\Phi$  al problema de contorno (10) en  $\Omega = \Omega_s$  se satisface el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A(s)\Phi + B(s)\psi - \phi &= 0, \\ R(s)\Phi + \psi + S(s)\phi &= 0. \end{aligned}$$

Al despejar  $\phi$  en la primera ecuación y sustituirlo en la segunda se obtiene

$$(95) \quad (R + SA)\Phi + (I + SB)\psi = 0.$$

---

<sup>3</sup>Solución del tipo Kohon-Vogelius

De acuerdo con los lemas 6-5 la ecuación (95) se satisface para cualesquiera  $\Phi$  en  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)$  y  $\psi$  en  $H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ , probando así las siguientes relaciones entre los operadores  $A$ ,  $B$ ,  $R$  y  $S$ :

$$(96) \quad S(s) = -B(s)^{-1}, \quad R(s) = -S(s)A(s), \quad s \in [0, a).$$

Mediante la técnica de encajamiento invariante y a través de un procedimiento análogo al utilizado en la sección 2 es posible demostrar que los operadores  $R$  y  $S$  satisfacen las mismas ecuaciones diferenciales formales que  $P$  y  $W$ . Sin embargo, las condiciones de frontera en  $z = a$  o  $z = 0$  no se obtienen de (93):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}S(z) + S(z)^2 &= -\Delta_x, \\ \frac{d}{dz}S(z) + R(z)S(z) &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado y con la intención de comparar con la Metodología de datos admisibles, la diferencia  $u_1 - u_2$  pertenece claramente a  $E_{00}(\Omega)$ , por lo que

$$\mathcal{E}(u_1, u_2) = \|A\Phi + B\psi - \phi\|_{E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}^2;$$

es decir, el Método de factorización en [1, 25] propone un mecanismo para computar la pseudo inversa de Moore-Penrose del problema inverso en (22) ( $A\Phi = \phi - B\psi$ ), pero en la norma de  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$  en lugar de la norma de  $L^2(\Gamma_0)$ .

Sobre este enfoque existen observaciones pertinentes para las posibles implementaciones numéricas. Lo primero es que, en el caso de discretización del problema, debe prestarse atención al tipo de error que se añade por efecto de discretización al dato de Cauchy exacto. Muchos métodos de discretización consideran este ruido en el sentido de la norma uniforme o de la norma en  $L^2(\Gamma_0)$ , que puede no guardar una relación de orden con el error que se añade en la norma de  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ , teniendo consecuencias en la precisión de la solución. El mismo problema aparece con cualquier otra medición dada del dato de Cauchy en el caso de aplicaciones. De (94) y (96) se sigue, cuando todas las distribuciones involucradas son regulares,

$$(97) \quad \mathcal{E}(\Phi, \psi) = \int_{\Omega} (A\Phi + B\psi - \phi) [\psi + B^{-1}(A\Phi - \phi)] dS;$$

También cabe señalar que, si se desea regularizar con una regularización tipo Tikhonov, el término de penalización debe ser también en la norma de  $E^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  y la regularidad exigida a la solución para garantizar optimalidad es mayor. En [1] se emplea un término de penalización más débil que el requerido por Tikhonov, que si bien garantiza convergencia de la estrategia de regularización, no necesariamente garantiza una

óptima velocidad de convergencia de la estrategia de regularización a la solución exacta. En [10, 25] se impone un término de penalización que requiere mayor regularidad de la solución, aunque los autores siguen reportando problemas con la velocidad de convergencia de la estrategia de regularización a la solución exacta.

## Identificación de inclusiones de conductores ideales en regiones de conductividad homogénea

En el capítulo anterior se desarrolló la Metodología de datos admisibles para un problema lineal asociado al problema de Cauchy para la ecuación de Laplace, donde se deseaba identificar una condición de contorno sobre una frontera inaccesible. En este capítulo hacemos una breve extensión de la Metodología de datos admisibles a un problema inverso no lineal relacionado con el mismo problema de Cauchy [29, 33]. Se asume que se conoce el valor de un par de condiciones de contorno determinadas sobre la frontera del dominio. Sin embargo, la geometría y posición de cierta parte inaccesible de dicha frontera se desconocen, de esta forma el problema de interés consiste en identificar una parte de la frontera de una región conductora homogénea que se encuentra en contacto con el conductor ideal.

### 1. Problema directo y formulación operacional

Sea  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^n$  ( $n=3$  o  $2$ ) con frontera suave a trozos  $\Gamma_{\text{ext}}$ . Se denotará por  $D$  a una inclusión en  $\Omega$ , un dominio acotado con frontera suave a trozos  $\Gamma_{\text{int}}$  y cuya cerradura está contenida en  $\Omega$ . Dada la inclusión  $D$  se define a la región de interés como  $\Omega \setminus \text{cl}(D)$ , que modela una región conductora homogénea (ahuecada) cuya frontera interior  $\Gamma_{\text{int}} = \partial D$  está en contacto con un conductor ideal modelado por  $D$ . La frontera de  $\Omega \setminus \text{cl}(D)$ , denotada por  $\partial(\Omega \setminus \text{cl}(D))$ , consiste de dos componentes ajenas:  $\Gamma_{\text{int}}$  (la componente no accesible o frontera interior) y  $\Gamma_{\text{ext}}$  (la componente accesible o frontera exterior). De la formulación anterior se desprenden dos posibles problemas directos, uno lineal y uno no lineal, mismos que se establecen a partir del planteamiento siguiente:

Dadas como variables la inclusión  $D$  y el dato de Neumann  $\psi$  en la componente accesible de  $\Omega \setminus \text{cl}(D)$ , identificar el dato de Dirichlet  $\phi$ , también en  $\Gamma_{\text{ext}}$ , que corresponde al par  $(D, \psi)$ , toda vez que se fija como nulo el dato de Dirichlet  $\Phi$  en la componente no accesible de

la frontera, como consecuencia del contacto con el conductor ideal. En otras palabras, determinar  $u|_{\Gamma_{\text{ext}}} = \phi$ , donde  $u$  es solución del problema de contorno con condiciones mixtas (98), con  $\Phi \equiv 0$ :

$$(98a) \quad \Delta u \equiv 0 \quad \text{en } \Omega \setminus \text{cl}(\text{D}),$$

$$(98b) \quad u|_{\Gamma_{\text{int}}} = \Phi,$$

$$(98c) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\Gamma_{\text{ext}}} = \psi.$$

Como en el capítulo precedente, las soluciones a problemas de contorno se entienden aquí en un sentido débil que será explicado en detalle a la brevedad. Pero, por ahora, tomaremos una licencia de formalidad para explicar cómo es que fácilmente se llega a una formulación operacional del planteamiento anterior, al hacer explícita la dependencia de  $\phi$  en la inclusión  $\text{D}$  y el dato de Neumann  $\psi$ . A dicha formulación operacional se llega mediante la ecuación que define al operador Neumann-Dirichlet en  $\Gamma_{\text{ext}}$  para el problema de contorno (98) con  $\Phi \equiv 0$ :

$$B_{\text{D}} : \text{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}}) \rightarrow \text{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}}), \quad B_{\text{D}}\psi = u|_{\Gamma_{\text{ext}}} \quad (u|_{\Gamma_{\text{int}}} = 0).$$

En este momento ya es posible distinguir entre dos problemas inversos electrostáticos (asociados a un problema directo respectivo en el planteamiento anterior) en la ecuación  $B_{\text{D}}\psi = \phi$ : el problema lineal (de nulo interés para nosotros) que consiste en fijar la inclusión  $\text{D}$  e identificar  $\psi$  en función de  $\phi$ , y el problema no lineal en el que nos concentraremos, consistente en identificar la inclusión  $\text{D}$  a partir de un par de Cauchy  $(\phi, \psi)$ .

Se elige estudiar al operador Neumann-Dirichlet en  $\Gamma_{\text{ext}}$  (para el problema (98)) en función de  $\text{D}$  en lugar de  $\Gamma_{\text{int}}$  por consistencia con la forma en que se ha presentado la modelación matemática que conduce al problema inverso electrostático de interés, asumiendo que la inclusión y sus propiedades son los verdaderos objetos de interés; pese a que también es cierto que para fines prácticos se puede asumir que cada  $\Gamma_{\text{ext}}$  determina una inclusión  $\text{D}$  de forma biunívoca y continua en algún sentido, haciendo indistinto si se elige estudiar la dependencia del operador Neumann-Dirichlet en función de  $\text{D}$  o de la superficie (curva)  $\Gamma_{\text{ext}}$  que constituye su frontera.

Continuemos entonces con las formalidades de la formulación operacional recién descrita del problema inverso electrostático de interés. Como en el caso del problema de Cauchy en el capítulo 1, la solución de (98) se considera también en un sentido débil. Como antes, la función  $u$ , si existe, es una función armónica en el espacio de Sobolev  $\text{H}^1(\Omega \setminus \text{cl}(\text{D}))$

y todas las condiciones de contorno se entienden en un sentido de trazas: el dato de Dirichlet  $\phi$  pertenece a  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}})$  y la condición de Neumann  $\psi$  pertenece en general a  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}})$  (dual de  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}})$ ), aunque más adelante será considerada en  $L^2(\Gamma_{\text{ext}})$  como información *a priori*. Se define el siguiente subespacio de  $H^1(\Omega \setminus \text{cl}(D))$  por ser necesario más adelante:

$$E_0(\Omega \setminus \text{cl}(D)) = \{v \in H^1(\Omega \setminus \text{cl}(D)) : v|_{\Gamma_{\text{int}}} = 0\}.$$

Por la desigualdad de Poincaré [43], el espacio  $E_0(\Omega \setminus \text{cl}(D))$  es provisto de una norma equivalente a la de  $H^1(\Omega \setminus \text{cl}(D))$ , misma que es inducida por el siguiente producto interior:

$$(u, v)_{E_0(\Omega \setminus \text{cl}(D))} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2} = \int_{\Omega \setminus \text{cl}(D)} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k}.$$

Como se ha dicho en el capítulo anterior, la definición usual de solución débil del problema de contorno (98) es modificada ligeramente al considerar a  $E_0(\Omega \setminus \text{cl}(D))$  como el espacio de las funciones de prueba en lugar de  $\mathcal{D}(\Omega \setminus \text{cl}(D))$ .

**DEFINICIÓN 7.** *Dado el par  $(\Phi, \psi)$  en  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{int}}) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}})$ , la función  $u$  perteneciente a  $H^1(\Omega \setminus \text{cl}(D))$  es una solución débil de (98) si (99) y  $u|_{\Gamma_{\text{int}}} = \Phi$  se verifican simultáneamente.*

$$(99) \quad \int_{\Omega \setminus \text{cl}(D)} \nabla u \cdot \nabla v dx = \langle v|_{\Gamma_{\text{ext}}}, \psi \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}}) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}})}, \quad \forall v \in E_0(\Omega \setminus \text{cl}(D)).$$

El conjunto usual de funciones de prueba  $\mathcal{D}(\Omega \setminus \text{cl}(D))$  (funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en  $\Omega \setminus \text{cl}(D)$ ) está contenido en  $E_0(\Omega \setminus \text{cl}(D))$ , por lo que la solución débil es como antes una solución débil en el sentido presentado por Mijailov en [36]. La existencia y unicidad, así como la dependencia lineal y continua de la solución de (98) para las condiciones de contorno dadas en la frontera de  $\Omega \setminus \text{cl}(D)$  se prueban de forma análoga a como se demostraron las respectivas propiedades para el problema de contorno (10a)-(10d) en el capítulo anterior.

De esta forma los problemas directo e inverso de interés quedan definidos por la siguiente ecuación operacional:

$$(100) \quad B_D \psi = \phi \quad (\phi \equiv u|_{\Gamma_{\text{ext}}}).$$

Dada la inclusión  $D$ , es claro que el operador  $B_D$  es lineal y continuo cuando se considera a  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}})$  como el espacio de llegada, y compacto cuando dicho espacio de llegada es  $L^2(\Gamma_{\text{ext}})$  (el operador de traza es continuo de  $H^1(\Omega \setminus \text{cl}(D))$  en  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}})$  y este último está compactamente

sumergido en  $L^2(\Gamma_{\text{ext}})$ ). En lo sucesivo se denotará por  $\mathfrak{D}$  al conjunto de todas las posibles inclusiones  $D$  para el problema de contorno (98), conforme a la descripción previa.

El problema inverso no lineal definido por (100) consiste en: dado un dato de Cauchy  $(\phi, \psi)$  en  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}}) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}})$ , identificar, cuando sea posible, el elemento en  $\mathfrak{D}$  para el cual se verifica la ecuación operacional (100). Como se mostrará en breve, la ecuación (100) establece que el dato exacto debe pertenecer al grafo de  $B_D$  para una única inclusión  $D$  en  $\mathfrak{D}$ . De esta forma, la clase  $M$  de todos los datos de Cauchy para los cuales existe solución al problema inverso no lineal, la clase de *datos admisibles*, es la unión de todos los grafos  $\text{graf}(B_{D_{\text{inn}}})$  con  $D$  en  $\mathfrak{D}$ :

$$(101) \quad M = \bigcup_{D \in \mathfrak{D}} \left\{ (B_D \psi, \psi) : \psi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}}) \right\}.$$

En (99) es posible intercambiar los roles de  $u$  y  $v$ ; si  $\bar{\psi}$  pertenece a  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}})$  y  $v$  es la correspondiente solución débil de (98) para  $\psi \equiv \bar{\psi}$  y  $\Phi \equiv 0$ , se infiere por (99) que  $B_D$  es autoadjunto:

$$(102) \quad \langle B_D \psi, \bar{\psi} \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}}) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}})} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2} = \langle B_D \bar{\psi}, \psi \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}}) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}})}.$$

Adicionalmente, (102) implica  $\|\nabla u\|^2 = \langle B_D \psi, \psi \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}}) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}})}$  cuando  $\bar{\psi} = \psi$ , probando así la inyectividad de  $B_D$  al establecer que el núcleo del operador es trivial.

Al mismo tiempo  $u$  también es solución del problema de Dirichlet resultante de sustituir la condición de Neumann (98c) por la condición de Dirichlet  $u|_{\Gamma_{\text{ext}}} = B_{\Gamma_{\text{int}}} \psi$ . Por lo tanto, advirtiendo que el Teorema 1.1 en [33] puede ser fácilmente extendido a dimensión 3 reescribiendo la prueba con la notación adecuada, y debido a que la condición de Dirichlet de  $u$  sobre la frontera exterior es nula si y solamente si  $\psi \equiv 0$ , se infiere que la solución del problema inverso (100) es única cuando existe y  $\psi \neq 0$ .

Pese a que el operador  $B_D$  está definido en  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}})$  y la mayoría de sus propiedades se estudian bajo esta definición, para efectos de la Metodología de datos admisibles se asumirá la condición de Neumann  $\psi$  como un elemento de  $L^2(\Gamma_{\text{ext}})$ , es decir, se entenderá como una distribución regular, por lo que en tales casos se entenderá a  $B_D$  como un operador de  $L^2(\Gamma_{\text{ext}})$  en sí mismo. Tal consideración se hace por comodidad en el desarrollo, aunque la metodología puede extenderse fácilmente al caso en que  $B_D$  se define como un operador de  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}})$  en  $L^2(\Gamma_{\text{ext}})$ .

**2. Construcción de la solución de datos admisibles**

La formulación operacional no lineal del problema inverso electrostático de interés se ha establecido en la sección 1 del presente capítulo. En el sentido de la filosofía de modelación descrita en la introducción de este trabajo, un *dato exacto* se entiende como el dato admisible que se considera la mejor representación de la medición bajo el modelo establecido para el fenómeno que genera la medición. Como antes  $(\phi^\dagger, \psi^\dagger)$  denotará un dato exacto de Cauchy y  $D^\dagger$  a la correspondiente inclusión que produce al dato exacto en la frontera  $\Gamma_{\text{int}}^\dagger$ . En particular se dirá que  $D^\dagger$  es la solución exacta al problema electrostático de interés para un nivel de ruido (orden del error de medición)  $\delta > 0$ . Dicho lo anterior, el problema inverso es como sigue:

$$(103) \quad B_{D^\dagger} \psi^\dagger = \phi^\dagger, \quad \|\phi^\dagger - \tilde{\phi}\| \leq \delta \quad \|\psi^\dagger - \tilde{\psi}\| \leq \delta,$$

siendo  $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$  la medición o perturbación conocida del dato exacto  $(\phi^\dagger, \psi^\dagger)$ , siendo este último desconocido .

**2.1. Solución MDA como una cuasi solución.**

Como es usual en la literatura, retomaremos el símbolo  $\mathcal{L}(X, Y)$  para denotar al espacio de operadores lineales y continuos entre los espacios vectoriales topológicos  $X$  y  $Y$  (transformaciones de  $X$  en  $Y$ ); ante la igualdad  $Y = X$ , la notación se simplifica mediante  $\mathcal{L}(X)$ . La notación  $\mathfrak{D}$  se reserva como se ha dicho para el conjunto de todas las posibles inclusiones  $D$  de  $\Omega$  para el problema (98), es decir, para el conjunto de todos los posibles dominios en  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 2o3$ ) con frontera suave a trozos y cuya clausura se encuentre contenida en  $\Omega$ . A la par de la definición de  $\mathfrak{D}$  se denota por  $\mathfrak{G}$  al conjunto de todas las superficies cerradas simples y orientables (curvas cerradas simples) contenidas en  $\Omega$ . Se definen al conjunto  $\tilde{\mathfrak{D}}_\delta$  como

$$(104) \quad \tilde{\mathfrak{D}}_\delta = \left\{ D \in \mathfrak{D} : \text{dist}_{L^2(\Gamma_{\text{ext}}) \times L^2(\Gamma_{\text{ext}})} \left( (\tilde{\phi}, \tilde{\psi}), \text{graph}(B_D) \right) \leq \sqrt{2}\delta \right\},$$

donde  $\text{graph}(B_D)$  denota al grafo de  $B_D$ , mientras que  $\text{dist}_X(\cdot, \cdot)$  es la distancia punto-conjunto en el espacio normado  $X$ :

$$\text{dist}_X(\mathbf{x}, \mathbf{A}) = \inf \{ \|x - a\|_X : a \in \mathbf{A} \subset X \}.$$

El conjunto  $\tilde{\mathfrak{G}}_\delta \subset \mathfrak{G}$  asociado a  $\tilde{\mathfrak{D}}_\delta$  se define análogamente a como se ha definido  $\mathfrak{G}$  para  $\mathfrak{D}$ . Para el caso particular  $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \equiv (\phi^\dagger, \psi^\dagger)$  se hacen las convenciones notacionales  $\mathfrak{D}_\delta^\dagger = \tilde{\mathfrak{D}}_\delta$  y  $\mathfrak{G}_\delta^\dagger = \tilde{\mathfrak{G}}_\delta$ .

El siguiente es un resultado inmediato que se enuncia como lema por ser un paso relevante en la metodología.

LEMA 21.  $D^\dagger$  pertenece a  $\tilde{\mathfrak{D}}_\delta$ .

DEMOSTRACIÓN. Como parte de la formulación se ha establecido que  $(\phi^\dagger, \psi^\dagger)$  es un dato admisible por lo que pertenece al grafo de  $B_{D_{\text{inc}}^\dagger}$ , y por hipótesis sobre el orden en el error de medición se ha establecido que la distancia de  $(\phi^\dagger, \psi^\dagger)$  a  $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$  en la norma de  $L^2(\Gamma_{\text{ext}}) \times L^2(\Gamma_{\text{ext}})$  es menor que  $\sqrt{2}\delta$ , lo que de inmediato implica el resultado.  $\square$

En este caso, la Metodología de datos admisibles también es un ejemplo de un esquema de cuasi soluciones [17].

Considérese la aplicación

$$(105) \quad \Lambda : D \in \mathfrak{D} \mapsto B_{D_{\text{inn}}} \in \mathcal{L}(L^2(\Gamma_{\text{ext}})).$$

cuando  $\Lambda$  es continuo, los elementos de  $\tilde{\mathfrak{D}}_\delta$  se presentan como candidatos a cuasi soluciones de (103). Siendo  $M$  el conjunto de datos admisibles (elementos de la forma  $(B_D \psi, \psi)$  con  $D$  en  $\mathfrak{D}$ ) y si la distancia en la norma de  $L^2$  de  $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$  a  $M$  se alcanza para algún dato admisible  $(B_{D_\delta} \psi^\delta, \psi^\delta)$ , entonces  $D_\delta$  será una cuasi solución que, con información adicional *a priori*, será la solución buscada por la Metodología de datos admisibles.

Para clarificar lo recién expuesto, considérese la siguiente transformación:

$$\mathcal{T} : \begin{array}{ccc} \mathfrak{D} \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}}) & \rightarrow & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}}) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}}) \\ (D, \psi) & \mapsto & (B_D \psi, \psi) \end{array},$$

mediante la cual es posible establecer el problema inverso de forma consistente con la Metodología de datos admisibles mediante la ecuación

$$(106) \quad \mathcal{T}(D^\dagger, \psi^\dagger) = (\phi^\dagger, \psi^\dagger), \quad \left\| \phi^\dagger - \tilde{\phi} \right\| \leq \delta \quad \left\| \psi^\dagger - \tilde{\psi} \right\| \leq \delta.$$

Como podrá observarse más adelante, para cualquier  $D$  en  $\mathfrak{D}_\delta$  existe  $\psi_D$  en  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{\text{ext}})$  tal que  $\left\| \mathcal{T}(D, \psi_D) - (\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \right\| \leq \sqrt{2}\delta$ . Cuando en algún sentido  $B_D$  depende continuamente de  $D$ , entonces la transformación  $\mathcal{T}$  también es continua y, con información adicional *a priori*, la pareja  $(D, \psi_D)$  recién mencionada será entonces una cuasi solución del problema (106). Lo que haremos a través de la Metodología de datos admisibles será establecer una forma de determinar en este caso la pareja  $(D, \psi_D)$ .

En adelante se asume que  $\mathfrak{D}$  es un espacio métrico, con el fin de estudiar las consecuencias de la dependencia continua del operador  $B_D$  respecto de la inclusión  $D$ .

## 2.2. Elección de $\tilde{\psi}_D$ y consecuencias de la dependencia continua de $B_D$ en $D$ .

Por el teorema del grafo cerrado  $graph(B_D)$  es un subespacio cerrado. Un resultado ampliamente conocido (ver [35]) es la existencia y unicidad de la proyección de distancia mínima de un elemento del espacio a dicho grafo, por lo que se garantiza también la existencia y unicidad de  $\psi_D$  tal que la distancia  $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$  a  $(B_D \psi_D, \psi_D)$  es la misma que la distancia de  $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$  a  $graph(B_\Gamma)$ ; es decir,  $\psi_\Gamma$  está bien definida por :

$$(107) \quad \tilde{\psi}_D = \arg \min_{\psi \in L^2(\Gamma_{\text{ext}})} \tilde{J}_D(\psi); \quad \tilde{J}_D(\psi) = \|B_D \psi - \tilde{\phi}\|^2 + \|\psi - \tilde{\psi}\|^2.$$

NOTACIÓN 2. En el caso particular  $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \equiv (\phi^\dagger, \psi^\dagger)$  se reemplazan las notaciones  $\tilde{\psi}_D$  y  $\tilde{J}_D$  por  $\psi_D^\dagger$  y  $J_D^\dagger$ . Con la única finalidad de obtener una notación compacta en algunos de los cálculos destacados que se realizan durante la presente sección, se empleará la notación

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{1,D}(\tilde{\psi}_D) &= \|B_D \tilde{\psi}_D - \tilde{\phi}\|^2, & \tilde{J}_{2,D}(\tilde{\psi}_D) &= \|\tilde{\psi}_D - \tilde{\psi}\|^2, \\ J_{1,D}^\dagger(\psi_D^\dagger) &= \|B_D \psi_D^\dagger - \phi^\dagger\|^2, & J_{2,D}^\dagger(\psi_D^\dagger) &= \|\psi_D^\dagger - \psi^\dagger\|^2. \end{aligned}$$

Como función de  $\mathfrak{D}$  en los reales no negativos, el valor de  $\tilde{J}_D(\tilde{\psi}_D)$  es desde ahora de vital importancia en la Metodología de datos admisibles; porque es la distancia mínima de la medición  $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$  al grafo de  $B_D$  y permite con ello reescribir (104) como en (108). En el caso en que es nulo el error de medición, entonces la solución al problema inverso puede formularse como el problema de encontrar el mínimo global de  $J_D^\dagger(\psi_D^\dagger)$ , que claramente se alcanza en  $D^\dagger$  y así la Metodología de datos admisibles se basará en este caso en las propiedades de  $\tilde{J}_D(\tilde{\psi}_D)$  como función de  $D$ .

$$(108) \quad \tilde{\mathfrak{D}}_\delta = \left\{ D \in \mathfrak{D} : \tilde{J}_D(\tilde{\psi}_D) \leq \sqrt{2}\delta \right\}.$$

LEMA 22.  $\tilde{\psi}_D$  y  $\tilde{J}_D(\tilde{\psi}_D)$  dependen continuamente de  $D \in \mathfrak{D}^* \subset \mathfrak{D}$  si  $\Lambda$  definido en (105) es continuo en  $\mathfrak{D}^*$ .

DEMOSTRACIÓN. Antes que todo, para cada  $D$  y  $D_0$  en  $\mathfrak{D}$  se observa:

$$\begin{aligned}
(109) \quad \left| \tilde{J}_D(\tilde{\psi}_D) - \tilde{J}_{D_0}(\tilde{\psi}_{D_0}) \right| &\leq \left\| B_D \tilde{\psi}_D - B_{D_0} \tilde{\psi}_{D_0} \right\|^2 + \left\| \tilde{\psi}_D - \tilde{\psi}_{D_0} \right\|^2 \\
&\quad + 2 \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \left( B_D \tilde{\psi}_D - B_{D_0} \tilde{\psi}_{D_0} \right) \left( B_{D_0} \tilde{\psi}_{D_0} - \tilde{\phi} \right) dS \\
&\quad + 2 \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \left( \tilde{\psi}_D - \tilde{\psi}_{D_0} \right) \left( \tilde{\psi}_{D_0} - \tilde{\psi} \right) dS \\
&\leq \left\| (B_D - B_{D_0}) \right\|^2 \left\| \tilde{\psi}_D \right\|^2 \\
&\quad + (\|B_{D_0}\|^2 + 1) \left\| \tilde{\psi}_D - \tilde{\psi}_{D_0} \right\|^2 \\
&\quad + 2 \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \left[ (B_D - B_{D_0}) \tilde{\psi}_D \right] \left( B_{D_0} \tilde{\psi}_{D_0} - \tilde{\phi} \right) dS \\
&\quad + 2 \int_{\Gamma_{\text{ext}}} B_{D_0} (\tilde{\psi}_D - \tilde{\psi}_{D_0}) \left( B_{D_0} \tilde{\psi}_{D_0} - \tilde{\phi} \right) \\
&\quad + 2 \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \left( \tilde{\psi}_D - \tilde{\psi}_{D_0} \right) \left( \tilde{\psi}_{D_0} - \tilde{\psi} \right) dS
\end{aligned}$$

Puesto que el producto interior y consecuentemente la norma son funciones continuas en un espacio de Hilbert, las desigualdades anteriores dicen que  $\tilde{J}_D(\tilde{\psi}_D)$  tiende a  $\tilde{J}_{D_0}(\tilde{\psi}_{D_0})$  si  $B_D$  tiende a  $B_{D_0}$  y  $\tilde{\psi}_D$  tiende a  $\tilde{\psi}_{D_0}$ . Por lo tanto, solo resta probar que  $\tilde{\psi}_D$  depende continuamente de  $\Gamma$  cuando  $\Lambda$  es continuo. Pero,  $\tilde{J}_D$  es un funcional convexo y Fréchet diferenciable, y por las condiciones de optimalidad de primer orden es fácil ver que

$$(110) \quad \tilde{\psi}_D = (B_D^2 + I)^{-1} (\tilde{\psi} + B_D \tilde{\phi}).$$

Además, se sabe que  $\|(B_D + I)^{-1}\| \leq 1$  para todo  $D \in \mathfrak{D}$ , ya que  $B_D$  es autoadjunto, compacto y definido positivo (demostración directa a partir de la descomposición singular del operador), por lo que se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
(111) \quad \left\| \tilde{\psi}_D - \tilde{\psi}_{D_0} \right\| &= \left\| (B_D^2 + I)^{-1} (\tilde{\psi} + B_D \tilde{\phi}) - (B_{D_0}^2 + I)^{-1} (\tilde{\psi} + B_{D_0} \tilde{\phi}) \right\| \\
&\leq \left\| \tilde{\psi} + B_D \tilde{\phi} - (B_D^2 + I) (B_{D_0}^2 + I)^{-1} (\tilde{\psi} + B_{D_0} \tilde{\phi}) \right\| \\
&= \left\| \tilde{\psi} + B_D \tilde{\phi} \right. \\
&\quad \left. - \left[ (B_D^2 - B_{D_0}^2) (B_{D_0}^2 + I)^{-1} + I \right] (\tilde{\psi} + B_{D_0} \tilde{\phi}) \right\| \\
&= \left\| (B_D - B_{D_0}) \tilde{\phi} \right. \\
&\quad \left. - \left[ (B_D^2 - B_{D_0}^2) (B_{D_0}^2 + I)^{-1} (\tilde{\psi} + B_{D_0} \tilde{\phi}) \right] \right\| \\
&\leq \left\| (B_D - B_{D_0}) \right\| \left\| \tilde{\phi} \right\| + \left\| [B_D^2 - B_{D_0}^2] \right\| \left\| \tilde{\psi} + B_{D_0} \tilde{\phi} \right\|.
\end{aligned}$$

De esta forma la demostración termina si se demuestra que  $B_D^2$  depende continuamente de  $D$  en  $\mathfrak{D}^*$  cuando  $B_D$  lo hace (cuando  $\Lambda$  es continuo en  $\mathfrak{D}^*$ ). Pero,

$$\begin{aligned}
 (112) \quad \|B_D^2 - B_{D_0}^2\| &= \left\| (B_D - B_{D_0})^2 + B_{D_0} (B_D - B_{D_0}) \right. \\
 &\quad \left. + (B_D - B_{D_0}) B_{D_0} \right\| \\
 &\leq \|B_D - B_{D_0}\|^2 + 2 \|B_{D_0}\| \|B_D - B_{D_0}\|.
 \end{aligned}$$

□

LEMA 23. *Dada la inclusión  $D$  en  $\mathfrak{D}$ , el funcional  $\tilde{J}_D(\tilde{\psi}_D)$  converge puntualmente a  $J_D^\dagger(\psi_D^\dagger)$  cuando  $\delta$  tiende a 0. La convergencia es uniforme sobre cualquier subconjunto  $\mathfrak{D}^* \subset \mathfrak{D}$  para el que se verifique que  $\{B_D\}_{D \in \mathfrak{D}^*}$  es una familia uniformemente acotada.*

DEMOSTRACIÓN. Las siguientes desigualdades se satisfacen para toda  $D$  en  $\mathfrak{D}$ , después de recordar  $\|(B_D^2 + I)^{-1}\| \leq 1$ :

$$\begin{aligned}
 (113) \quad \|\tilde{\psi}_D - \psi_D^\dagger\| &= \left\| (B_D^2 + I)^{-1} [\tilde{\psi} - \psi^\dagger + B_D(\tilde{\phi} - \phi^\dagger)] \right\| \\
 &\leq \left\| [\tilde{\psi} - \psi^\dagger + B_D(\tilde{\phi} - \phi^\dagger)] \right\| \\
 &\leq \delta(1 + \|B_D\|).
 \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
 (114) \quad \left| \tilde{J}_{2,D}(\tilde{\psi}_D) - J_{2,D}^\dagger(\psi_D^\dagger) \right| &= \left| \left\| \tilde{\psi}_D - \tilde{\psi} \right\|^2 - \left\| \psi_D^\dagger - \psi^\dagger \right\|^2 \right| \\
 &= \left| \left\| \tilde{\psi}_D - \psi_D^\dagger + \psi_D^\dagger - \psi^\dagger + \psi^\dagger - \tilde{\psi} \right\|^2 \right. \\
 &\quad \left. - \left\| \psi_D^\dagger - \psi^\dagger \right\|^2 \right| \\
 &= \left| \left\| \tilde{\psi}_D - \psi_D^\dagger + \psi^\dagger - \tilde{\psi} \right\|^2 \right. \\
 &\quad \left. + 2 \int_{\Gamma_{\text{ext}}} (\tilde{\psi}_D - \psi_D^\dagger + \psi^\dagger - \tilde{\psi}) (\psi_D^\dagger - \psi^\dagger) dS \right| \\
 &\leq \delta^2(2 + \|B_D\|)^2 + 2\delta(2 + \|B_D\|) \left\| \psi_D^\dagger - \psi^\dagger \right\|,
 \end{aligned}$$

y, por un proceso análogo, denotando  $\Delta J_{1,D} = \tilde{J}_{1,D}(\tilde{\psi}_D) - J_{1,D}^\dagger(\psi_D^\dagger)$

$$\begin{aligned}
(115) \quad |\Delta J_{1,D}| &= \left| \left\| B_D \tilde{\psi}_D - \tilde{\phi} \right\|^2 - \left\| B_D \psi_D^\dagger - \phi^\dagger \right\|^2 \right| \\
&= \left| \left\| B_D (\tilde{\psi}_D - \psi_D^\dagger) + \phi^\dagger - \tilde{\phi} + B_D \psi_D^\dagger - \phi^\dagger \right\|^2 \right. \\
&\quad \left. - \left\| B_D \psi_D^\dagger - \phi^\dagger \right\|^2 \right| \\
&= \left| \left\| B_D (\tilde{\psi}_D - \psi_D^\dagger) + \phi^\dagger - \tilde{\phi} \right\|^2 \right. \\
&\quad \left. + 2 \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \left[ B_D (\tilde{\psi}_D - \psi_D^\dagger) + \phi^\dagger - \tilde{\phi} \right] (B_D \psi_D^\dagger - \phi^\dagger) dS \right| \\
&\leq \delta^2 (\|B_D\|^2 + \|B_D\| + 1)^2 \\
&\quad + \delta (\|B_D\|^2 + \|B_D\| + 1) \|B_D \psi_D^\dagger - \phi^\dagger\|.
\end{aligned}$$

Pero,

$$(116) \quad \left\| \psi_D^\dagger - \psi^\dagger \right\| = \left\| \left[ (B_D^2 + I)^{-1} (B_D B_{\Gamma^\dagger} + I) - I \right] \psi^\dagger \right\| \\
\leq (\|B_D\| \|B_{\Gamma^\dagger}\| + 2) \|\psi^\dagger\|,$$

y

$$(117) \quad \left\| B_D \psi_D^\dagger - \phi^\dagger \right\| = \left\| \left[ (B_D^2 + I)^{-1} (I + B_D B_{\Gamma^\dagger}) - B_{\Gamma^\dagger} \right] \psi^\dagger \right\| \\
\leq ((\|B_D\| + 1) \|B_{\Gamma^\dagger}\| + 1) \|\psi^\dagger\|$$

Entonces, en virtud de (114)-(117), para  $0 < \delta \leq 1$ :

$$(118) \quad \left| \tilde{J}_D(\tilde{\psi}_D) - J_D^\dagger(\psi_D^\dagger) \right| \leq \delta p^\dagger(\|B_D\|)$$

donde  $p^\dagger(x)$  es un polinomio con coeficientes de la forma  $k \|B_{\Gamma^\dagger}\|^i \|\psi^\dagger\|^j$  ( $i, j \in \{0, 1\}$  y  $k \in \mathbb{N}$ ). Por lo tanto, la demostración termina con (118).  $\square$

### 2.3. Solución por Metodología de datos admisibles.

Ahora estamos en condiciones de establecer el tipo de información *a priori* que se requiere para la metodología.

#### Supuesto de información *a priori*

La convergencia en  $\mathfrak{D}$  está dada por la métrica  $d_{\mathfrak{D}}$ , de tal suerte que la aplicación  $\Lambda$  definida en (105) es continua, la componente de Neumann  $\psi$  pertenece a  $L^2(\Gamma_{\text{ext}})$  y la solución exacta  $D^\dagger$  pertenece a  $\mathfrak{D}^*$ , compacto en  $(\mathfrak{D}, d_{\mathfrak{D}})$ .

Hasta ahora se ha puesto en correspondencia a cada  $D$  con una condición de Neumann  $\tilde{\psi}_D$ , que es la condición de Neumann para la cual

se alcanza la distancia mínima de la medición  $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$  al grafo de  $B_D$ , pero claramente no toda  $D$  pertenece a  $\mathfrak{D}_\delta$ . Sin embargo, de acuerdo con el Lema 22 y asumiendo el supuesto de información *a priori*, sucede que  $\tilde{J}_D(\tilde{\psi}_D)$  alcanza sus valores extremos en  $\mathfrak{D}^*$ , por lo que el problema de optimización (119) tiene solución (no necesariamente única que se haya probado en general), y cualquier solución de dicho problema de optimización sí pertenece a la intersección  $\mathfrak{D}_\delta \cap \mathfrak{D}^*$ , ya que  $D^\dagger$  pertenece a dicha intersección.

TEOREMA 24. *Se define la solución MDA por*

$$(119) \quad D_\delta = \arg \min_{D \in \mathfrak{D}^*} \tilde{J}_D(\tilde{\psi}_D).$$

$D_\delta$  tiende a  $D^\dagger$  cuando  $\delta$  tiende a 0.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que se asume la dependencia continua de  $B_D$  en  $\mathfrak{D}$ , se verifica que  $\{B_D\}_{D \in \mathfrak{D}^*}$  es una familia uniformemente acotada; por lo que, de acuerdo con (118), existe una constante  $K_{\mathfrak{D}^*} > 0$  que verifica (120), es decir, la convergencia de  $\tilde{J}_D(\tilde{\psi}_D)$  a  $J_D^\dagger(\psi_D^\dagger)$  como función de  $D$  es, como se esperaba, uniforme sobre compactos.

$$(120) \quad J_D^\dagger(\psi_D^\dagger) - \delta K_{\mathfrak{D}^*} \leq \tilde{J}_D(\tilde{\psi}_D) \leq J_D^\dagger(\psi_D^\dagger) + \delta K_{\mathfrak{D}^*}, \quad \forall D \in \mathfrak{D}^*.$$

Toda vez que  $J_D^\dagger(\psi_D^\dagger)$  es continuo respecto de  $D$  por el Lema 22 y  $\mathfrak{D}^* \setminus \mathcal{B}(D^\dagger, \epsilon)$  es compacto, entonces  $J_D^\dagger(\psi_D^\dagger)$  alcanza su mínimo en  $\mathfrak{D}^* \setminus \mathcal{B}(D^\dagger, \epsilon)$ , mismo que será denotado por  $m_{\mathfrak{D}^*, \epsilon}$ . Como  $J_D^\dagger(\psi_D^\dagger)$  alcanza su único mínimo global en  $D^\dagger$  (mínimo que es idénticamente nulo) y es continuo, entonces  $m_{\mathfrak{D}^*, \epsilon}$  es estrictamente positivo; de otra forma existiría  $D'$  distinto de  $D^\dagger$  de tal suerte que  $J_{D'}^\dagger(\psi_{D'}^\dagger)$  se anulara, lo cual es una contradicción.

Entonces, de las desigualdades en (120) se obtienen las siguientes desigualdades para  $\delta \leq \delta_\epsilon = \frac{m_{\mathfrak{D}^*, \epsilon}}{3K_{\mathfrak{D}^*}}$ :

$$(121) \quad \begin{aligned} \tilde{J}_{D^\dagger}(\tilde{\psi}_{D^\dagger}) &\leq J_{D^\dagger}^\dagger(\psi_{D^\dagger}^\dagger) + \delta K_{\mathfrak{D}^*} \\ &\leq \frac{m_{\mathfrak{D}^*, \epsilon}}{3} \leq \frac{2m_{\mathfrak{D}^*, \epsilon}}{3} \\ &\leq J_D^\dagger(\psi_D^\dagger) - \frac{m_{\mathfrak{D}^*, \epsilon}}{3} \\ &\leq \tilde{J}_D(\tilde{\psi}_D), \quad \forall D \in \mathfrak{D}^* \setminus \mathcal{B}(D^\dagger, \epsilon). \end{aligned}$$

Es decir, cualquier solución de (119) pertenece a  $\mathfrak{D}^* \cap \mathcal{B}(D^\dagger, \epsilon)$  siempre que  $\delta$  sea suficientemente pequeño ( $\delta \leq \frac{m_{\mathfrak{D}^*, \epsilon}}{3K_{\mathfrak{D}^*}}$ ), lo cual termina la demostración.  $\square$

#### 2.4. Continuidad de $B_{D_{\text{inn}}}$ con respecto a la inclusión $D$ .

Sean  $u_1$  y  $u_2$  las correspondientes soluciones de (98) para el dato de Neumann  $\psi$  en  $\Gamma_{\text{ext}}$  y el dato de Dirichlet nulo en  $\Gamma_{\text{int}}$  ( $\Phi \equiv 0$ ) para los casos correspondientes  $D = \Omega_1$  y  $D = \Omega_2$  en  $\mathfrak{D}$ .  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  denotarán las correspondientes fronteras de  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ . A partir de ahora se identifica de manera biunívoca a cada función  $u$  en  $H^1(D)$  con aquella función en  $H^1(\Omega)$  que coincide con  $u$  en  $D$  y es nula en  $\Omega \setminus \text{cl}(D)$ , siendo ambas funciones idénticamente denotadas en estas páginas por motivos de simplicidad en la notación.

Se entenderá a  $\mathfrak{D}$  como el espacio métrico  $(\mathfrak{D}, d_{\mathfrak{D}})$ , donde la distancia entre  $D_1$  y  $D_2$  está definida por:

$$(122) \quad d_{\mathfrak{D}}(D_1, D_2) = \mu(D_1 \setminus \text{cl}(D_2)) + \mu(D_2 \setminus \text{cl}(D_1)) + \mu_S(\partial D_1 \setminus \text{cl}(D_2)) + \mu_S(\partial D_2 \setminus \text{cl}(\Omega_1));$$

con  $\mu$  denotando la medida de Lesbegue en  $\mathbb{R}^3$  y  $\mu_S$  la medida de Lesbegue para la correspondiente superficie.

OBSERVACIÓN 12. *Claramente  $\mu(D_1 \setminus \text{cl}(D_2)) + \mu(D_2 \setminus \text{cl}(D_1))$  es igual a  $\mu(\text{cl}(D_1) \cup \text{cl}(D_2)) - \mu(D_1 \cap D_2)$ , ya que  $D_i$  es un abierto y  $\mu(\partial D_i) = 0$  ( $i=1,2$ ). Entonces,  $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$  siempre que  $d_{\mathfrak{D}}(D_1, D_2) < \min\{\mu(D_1), \mu(D_2)\}$ . De esta forma, para toda sucesión  $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  contenida y convergente en  $\mathfrak{D}$  a la inclusión  $D_0$ , la intersección  $D_0 \cap D_n$  es no vacía para todo  $n$  suficientemente grande. Las propiedades de continuidad de  $\Lambda : D \in \mathfrak{D} \mapsto B_D$  pueden estudiarse sin pérdida de generalidad bajo el supuesto  $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ .*

Como elemento de  $H^1(\Omega)$ , la función  $u_i$  ( $i = 1, 2$ ) es nula en  $D_i$ , las cerraduras de  $D_1$  y  $D_2$  están contenidas en  $\Omega$  y  $\partial D$  es una superficie suave a trozos y de dimensión  $n - 1$ , mientras que  $D_i$  se ha supuesto en  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ), de forma que la descomposición

$$\begin{aligned} \Omega &= [\Omega \setminus \text{cl}(D_1 \cup D_2)] \cup [\Omega \setminus \text{cl}(D_1 \cup D_2)] \\ &= [\text{cl}(D_1) \setminus \text{cl}(D_2)] \cup [\text{cl}(D_2) \setminus \text{cl}(D_1)] \cup [(\text{cl}(D_1) \cap \text{cl}(D_2))] \\ &\quad \cup [\Omega \setminus \text{cl}(D_1 \cup D_2)] \end{aligned}$$

implica

$$(123) \quad \begin{aligned} \|\nabla(u_1 - u_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{D_2 \setminus \text{cl}(D_1)} \nabla u_1 \cdot \nabla u_1 dx \\ &\quad + \int_{D_1 \setminus \text{cl}(D_2)} \nabla u_2 \cdot \nabla u_2 dx \\ &\quad + \int_{\Omega \setminus \text{cl}(D_1 \cup D_2)} \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla(u_1 - u_2) dx. \end{aligned}$$

También ocurre que  $u$  es armónica en sentido clásico en  $\Omega \setminus \text{cl}(D)$  como ya se ha aclarado con anterioridad, y asumiendo  $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ , sin pérdida de generalidad,

$$\begin{aligned} \partial(D_i \setminus \text{cl}(D_j)) &= [\partial D_i \setminus \text{cl}(D_j)] \cup [\partial D_j \cap D_i] \cup [\partial D_i \cap \partial D_j] \\ \partial(\Omega \setminus \text{cl}(D_1 \cup D_2)) &= [\partial D_1 \setminus \text{cl}(D_2)] \cup [\partial D_2 \setminus \text{cl}(D_1)] \cup [\partial D_1 \cap \partial D_2], \end{aligned}$$

de forma que, nuevamente por la fórmula de Green, (123) implica

$$\begin{aligned} (124) \quad \|\nabla(u_1 - u_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\partial D_2 \setminus \text{cl}(D_1)} \left[ u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu_2} + u_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial(-\nu_2)} - \frac{\partial u_2}{\partial(-\nu_2)} \right) \right] dS \\ &\quad + \int_{\partial D_1 \setminus \text{cl}(D_2)} \left[ u_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu_1} - u_2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial(-\nu_1)} - \frac{\partial u_2}{\partial(-\nu_1)} \right) \right] dS \\ &= \int_{\partial D_2 \setminus \text{cl}(D_1)} u_1 \frac{\partial u_2}{\partial \nu_2} dS + \int_{\partial D_1 \setminus \text{cl}(D_2)} u_2 \frac{\partial u_1}{\partial \nu_1} dS \end{aligned}$$

donde  $\nu_i$  denota el vector normal exterior a  $\Gamma_i$ . No es difícil notar que las medidas de las superficies sobre las cuales se integra en los extremos derechos tiende a cero si  $d_\mu(\Gamma_1, \Gamma_2)$  tiende a cero, de forma que la transformación  $\Lambda$  descrita en párrafos anteriores es continua.

### 3. Inclusión circular en el disco, ejemplo numérico

Para terminar el capítulo, nos concentraremos en estudiar el caso más simple del problema electrostático de interés, aquel en que el dominio  $\Omega$  es el disco unitario y la inclusión  $D$  es una inclusión circular. Se elige este ejemplo por simplicidad debido a que, mediante un cambio conforme de coordenadas es posible establecer una relación entre este problema electrostático y aquel en el que en una banda se sabe que hasta cierta altura de la misma es un conductor homogéneo, mientras que el resto de la banda es un conductor ideal, en cuyo caso el problema inverso a resolver consiste en identificar la altura en la que se presenta el cambio de conductividad. El motivo principal es sólo la posibilidad de obtener formas analíticas del problema que nos permitan decir más sobre el problema, pues la Teoría general de problema inversos no lineales es mucho más reducida que en el caso de problemas lineales.

#### 3.1. Mapeo conforme $g_p$ y relación con el problema electrostático en una banda con condiciones de periodicidad.

Consideremos el caso particular cuando  $\Omega$  es el disco unitario y  $D$  es una inclusión circular. En este caso se denotará por  $R_a$  al rectángulo  $(0, 2\pi) \times (0, a)$  para  $a > 0$  ( $R_\infty = (0, 2\pi) \times (0, \infty)$ ). Por razones de notación  $z$  denotará al número complejo  $x + iy \equiv (x, y)$ ,  $p = (s, \theta)$  ( $s \in [0, 1)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ ), y  $g_p$  al mapeo conforme de  $R_\infty$  en el disco unitario (con excepción de un conjunto de medida cero) definido por

$$g_p(z) = e^{i\theta} \frac{e^{iz} + s}{1 + se^{iz}}.$$

Para cualquier inclusión circular  $D$  en el disco, con centro en  $z_0 \equiv (x_0, y_0)$  y radio  $r_0$ , existe un parámetro múltiple  $(p; a) = (s, \theta; a)$  que resuelve

$$(125) \quad r_0 = e^{-a} \frac{1 - s^2}{1 - s^2 e^{-2a}} \quad \text{y} \quad z_0 = e^{i\theta} s \frac{1 - e^{-2a}}{1 - s^2 e^{-2a}}.$$

De forma que  $u \in H^1(\Omega \setminus D)$  es solución de (98) si y solamente si  $\omega(x, y) = u(g(x, y))$  ( $(x, y)$  en  $R_a$ ) es solución de (126), también en un sentido débil y con  $\eta = |J_{g_p}|^{\frac{1}{2}} \psi \circ g_p$ ; donde  $J_{g_p}(z)$  denota a la matriz jacobiana de  $g_p$  en el punto  $z$  y  $|J_{g_p}(z)|$  a su jacobiano.

$$(126a) \quad \Delta\omega \equiv 0 \quad \text{en} \quad R_a,$$

$$(126b) \quad \omega|_{\varsigma_0} = \omega|_{\varsigma_{2\pi}},$$

$$(126c) \quad \left. \frac{\partial\omega}{\partial\nu} \right|_{\varsigma_0} = - \left. \frac{\partial\omega}{\partial\nu} \right|_{\varsigma_{2\pi}},$$

$$(126d) \quad \omega|_{\gamma_a} = 0,$$

$$(126e) \quad \left. \frac{\partial\omega}{\partial\nu} \right|_{\gamma_0} = \eta;$$

donde  $\varsigma_x = \{(x, y) : y \in [0, a]\}$  y  $\gamma_y = \{(x, y) : x \in (0, 2\pi)\}$ . Por comodidad se abusará de las notaciones  $\varsigma_x$  y  $\gamma_y$  para denotar los conjuntos ya definirlos y a sus parametrizaciones como trayectorias; es decir, también se entenderá  $\varsigma_x(t) = (x, t)$  y  $\gamma_y(t) = (t, y)$ . En el problema de contorno (126) las condiciones (126b)-(126c) se denominan *condiciones de periodicidad*, y la solución al problema se entiende conforme a la siguiente definición.

**DEFINICIÓN 8.** Se denota por  $E_{\text{per}}(R_a)$  al subespacio de  $H^{R_a}$  de funciones en  $H^1(R_a)$  que satisfacen (126b)-(126d), por  $E_{\text{per}}^{\frac{1}{2}}(\gamma_y)$  ( $0 \leq y \leq a$ ) al subespacio de  $H^{\frac{1}{2}}(\gamma_y)$  compuesto por las trazas a  $\gamma_y$  de funciones en  $E_{\text{per}}(R_a)$  y por  $E_{\text{per}}^{-\frac{1}{2}}(\gamma_y)$  al dual de  $E_{\text{per}}^{\frac{1}{2}}(\gamma_y)$ .

La función  $\omega$  en  $E_{\text{per}}(R_a)$  es solución débil del problema de contorno (126) si se verifica

$$(127) \quad \int_{R_a} \nabla\omega \nabla v dx dy = \left\langle v|_{\gamma_0}, \eta \right\rangle_{E_{\text{per}}^{\frac{1}{2}}(\gamma_0) \times E_{\text{per}}^{-\frac{1}{2}}(\gamma_0)}, \quad \forall v \in E_{\text{per}}(R_a).$$

De la misma forma en que se ha definido a  $B_D$  para el problema de contorno (98) con  $\Phi \equiv 0$ , se define en  $\gamma_0$  al operador Neumann-Dirichlet en  $\gamma_0$  asociado al problema de contorno (126):

$$B_a : E_{\text{per}}^{-\frac{1}{2}}(\gamma_0) \rightarrow E_{\text{per}}^{\frac{1}{2}}(\gamma_0), \quad B_a \eta = \omega|_{\gamma_0}.$$

Mediante demostraciones análogas a las del capítulo anterior se demuestra fácilmente que  $B_a$  satisface las mismas propiedades que el resto de los operadores Neumann-Dirichlet en este trabajo, es decir, es compacto de su dominio en  $L^2(\gamma_0)$ , definido positivo y autoadjunto.

Luego, teniendo en cuenta la dependencia  $D = D(p; a)$ , si  $\beta$  es la parametrización de  $\Gamma_{\text{ext}}$  definida en  $(0, 2\pi]$  por  $\beta(t) = g_p(\gamma_0(t))$  para  $t$  en  $(0, 2\pi)$ , entonces para  $t$  en  $(0, 2\pi)$ , se verifican las siguientes igualdades:

$$(128) \quad \begin{aligned} B_D \psi(\beta(t)) &= u(g_p((t, 0))) = \omega((t, 0)) \\ &= B_a \left( |J_{g_p}((t, 0))|^{\frac{1}{2}} \psi(g_p((t, 0))) \right). \end{aligned}$$

Denotando  $\eta(\gamma_0(t)) = |J_{g_p}(\gamma_0(t))|^{\frac{1}{2}} \psi(g_p(\gamma_0(t)))$  (análogamente  $\tilde{\eta}$  en función de  $\tilde{\psi}$ ) y  $\tilde{\varphi}(\gamma_0(t)) = \tilde{\phi}(g_p(\gamma_0(t)))$ , se sigue como consecuencia de (128)-(139):

$$(129) \quad \begin{aligned} \tilde{J}_{1,D}(\psi) &= \left\| B_D \psi - \tilde{\phi} \right\|_{L^2(\Gamma_0)}^2 \\ &= \int_0^{2\pi} \left( B_D \psi(\beta(t)) - \tilde{\phi}(\beta(t)) \right)^2 |\beta'(t)| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left( B_a \eta(\gamma_0(t)) - \tilde{\varphi}(\gamma_0(t)) \right)^2 |J_{g_p}(\gamma_0(t))|^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \left( B_a \eta - \tilde{\varphi}, (B_a \eta - \tilde{\varphi}) |J_{g_p}|^{\frac{1}{2}} \right)_{L^2(\gamma_0)}. \end{aligned}$$

Y para  $\psi$  una distribución regular:

$$(130) \quad \begin{aligned} \tilde{J}_{2,D}(\psi) &= \left\| \psi - \tilde{\psi} \right\|_{L^2(\Gamma_0)}^2 \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \psi(\beta(t)) - \tilde{\psi}(\beta(t)) \right)^2 |\beta'(t)| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \eta(\gamma_0(t)) - \tilde{\eta}(\gamma_0(t)) \right)^2 |J_{g_p}(\gamma_0(t))|^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \left( \eta - \tilde{\eta}, (\eta - \tilde{\eta}) |J_{g_p}|^{-\frac{1}{2}} \right)_{L^2(\gamma_0)}. \end{aligned}$$

Así  $\tilde{\psi}_D(\beta(t)) = |J_{g_p}(\gamma_0(t))|^{-\frac{1}{2}} \tilde{\eta}_{(p;a)}(\gamma_0(t))$ , donde  $\eta_p$  es la solución de

$$(131) \quad \tilde{\eta}_{(p;a)} = \arg \min_{\psi \in L^2(\gamma_0)} \tilde{J}_{(p;a)}(\eta),$$

con

$$(132) \quad \tilde{J}_{(p;a)}(\eta) = \left( B_a \eta - \tilde{\varphi}, (B_a \eta - \tilde{\varphi}) |J_{g_p}|^{\frac{1}{2}} \right)_{L^2(\gamma_0)} + \left( \eta - \tilde{\eta}, (\eta - \tilde{\eta}) |J_{g_p}|^{-\frac{1}{2}} \right)_{L^2(\gamma_0)}.$$

Más aún, en este caso particular ocurre que el conjunto de inclusiones de interés, inclusiones circulares en el disco unitario, está continuamente parametrizado de  $\mathbb{R}^+$ , con la norma usual, en  $\mathfrak{D}$  con la métrica  $d_{\mathfrak{D}}$  definida en (122), por lo que, en este caso particular, el supuesto de información *a priori* en el que  $D^\dagger$  pertenece a un compacto  $\mathfrak{D}^*$ , es consecuencia directa del siguiente supuesto formulado sobre  $(p; a) = (s, \theta; a)$ :

**Supuesto de información *a priori* para inclusiones circulares en el disco unitario**

El parámetro múltiple  $(p^\dagger; a^\dagger) = (s^\dagger, \theta^\dagger; a^\dagger)$  que determina la solución exacta  $D^\dagger$  pertenece a  $\mathfrak{I}^*$ , un conjunto compacto en  $\mathbb{R}^3$  con la norma euclidiana.

Entonces, la inclusión  $D_\delta$  es definida mediante  $g_p$  y  $a$  por el parámetro  $(p_\delta; a_\delta)$  que resuelve el problema de optimización (133):

$$(133) \quad (p_\delta; a_\delta) = \arg \min_{(p;a) \in \mathfrak{I}^*} \tilde{J}_{(p;a)}(\eta_{(p;a)}),$$

donde  $\eta_{(p;a)}$  puede determinarse mediante un procedimiento basado en condiciones de optimalidad de primer orden a partir de la derivada Fréchet de  $\tilde{J}_{(p;a)}$ :

$$\begin{aligned} (D\tilde{J}_{(p;a)}(\eta))(\gamma_0(t)) &= 2 \left\{ B_a \left[ |J_{g_p}(\gamma_0(t))|^{\frac{1}{2}} B_a (\eta(\gamma_0(t)) + \tilde{\varphi}(\gamma_0(t))) \right] \right. \\ &\quad \left. + |J_{g_p}(\gamma_0(t))|^{-\frac{1}{2}} [\eta(\gamma_0(t)) - \tilde{\eta}(\gamma_0(t))] \right\}, \end{aligned}$$

de lo que se deduce que las condiciones de optimalidad de primer orden para  $\eta_{(p;a)}$  implican que se verifica

$$(134) \quad \eta_{(p;a)} = \left( B_{(s;a)}^2 + I \right)^{-1} (\tilde{\eta} - B_{p;a}),$$

donde el operador  $B_{(s;a)}$  está definido por

$$(B_{(s;a)}\eta)(\gamma_0(t)) = |J_{g_p}(\gamma_0(t))|^{\frac{1}{2}} (B_a \eta)(\gamma_0(t)).$$

**3.2. Forma analítica de  $B_{(s;a)}$  y ejemplo numérico.**

Separando variables, como también se indica en la sección 2 para la solución al problema de contorno (10), la solución de (98) tiene la siguiente forma analítica:

$$(135) \quad \omega(x, y) = (a - y)\eta_0 v_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\text{senh}(\lambda_k(a - y))}{k \text{cosh}(ka)} \eta_k v_k(x);$$

donde  $\eta_k = \int_0^{2\pi} (\eta v_k)(\gamma_0(t)) dt$  y, en esta ocasión, el sistema ortonormal  $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  que se considera en  $L^2(\gamma_0)$  es

$$(136) \quad \left\{ v_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, v_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kt), v_{-k}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sen}(kt) \right\}_{k \in \mathbb{N}}.$$

De lo anterior se desprenden las formas analíticas de  $B_a$  y  $B_{(s;a)}$ :

$$(137) \quad B_a \eta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k(a) \eta_k v_k, \quad B_{(s;a)} \eta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k(a) \eta_k \left( |J_{g_p}|^{\frac{1}{2}} v_k \right),$$

donde

$$b_k(a) = \begin{cases} a, & k = 0 \\ \frac{\text{senh}(|k|a)}{|k| \text{cosh}(|k|a)}, & k \neq 0 \end{cases}$$

y en consecuencia

$$(138) \quad B_{(s;a)} \eta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} b_j(a) b_{jk}(s) \eta_j \right) v_k,$$

con

$$b_{jk}(s) = \int_0^{2\pi} |J_{g_p}(\gamma_0(t))|^{\frac{1}{2}} v_j(t) v_k(t) dt.$$

De un cálculo directo se obtiene

$$(139) \quad g_p(\gamma_0(t)) = e^{i\theta} \frac{e^{it} + s}{1 + se^{it}}, \quad |J_{g_p}(\gamma_0(t))|^{\frac{1}{2}} = \frac{1 + s^2}{1 + s^2 + 2s \cos(t)},$$

estableciendo con ello la igualdad  $B_a = B_{(s;a)}$  y por lo tanto, en el más simple de los escenarios, cuando la inclusión  $D$  y el disco unitario son discos concéntricos ( $s = 0$ ), entonces el problema de identificación de  $D$  es equivalente al problema inverso electrostático definido por la familia de problemas de contorno (126).

**OBSERVACIÓN 13.** De (137) y (139) se observa que las derivadas de las sumas parciales de las formas analíticas de  $B_a$  y  $B_{(s;a)}$ , respecto de  $a$  y  $s$ , están bien definidas y uniformemente acotadas por un término en función de  $a_1$  y  $s_1$  para  $a \leq a_1$  y  $s \leq s_1 < 1$ . De esto se sigue la existencia de una derivada formal, en el sentido descrito en la sección 2 para los operadores  $A(a)$  y  $B(a)$ , respecto de cada uno de los parámetros

$s$  y  $a$  tanto en el caso de  $B_a$  como en el de  $B_{(s;a)}$ , ampliando la posibilidad a la implementación de distintos métodos de optimización para la determinación de los parámetros  $p_\delta$  y  $a_\delta$  en (132).

Así, en el caso de inclusiones concéntricas,  $s = 0$ , asumiendo  $\theta = 0$  por ser indistinto en este caso, se tiene

$$(140) \quad \tilde{\eta}_{(p;a)} = \frac{\tilde{\eta}_0 + a\tilde{\varphi}_0}{a^2 + 1} + \sum_{k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}} |k| \frac{\alpha_k(a)\tilde{\varphi}_k + |k|\tilde{\eta}_k}{\alpha_k(a)^2 + k^2}, \quad \alpha_k(a) = \frac{\sinh(|k|a)}{\cosh(|k|a)},$$

y

$$(141) \quad \tilde{J}_{(p;a)}(\tilde{\eta}_{(p;a)}) = \frac{(\tilde{\varphi}_0 - a\tilde{\eta}_0)^2}{a^2 + 1} + \sum_{k \neq 0} \frac{(k^2\tilde{\varphi}_k - |k|\alpha_k(a)\tilde{\eta}_k)^2 + (|k|\alpha_k(a)\tilde{\varphi}_k - \alpha_k(a)^2\tilde{\eta}_k)^2}{(\alpha_k(a)^2 + k^2)^2}.$$

Como ejemplo numérico presentaremos sólo el caso de inclusiones concéntricas, pues su forma analítica aporta suficiente información. En las aplicaciones prácticas de este problema electrostático, suele ocurrir que la condición de Neumann  $\psi$  (o  $\eta$ ) son variables controladas, es decir, que pueden ser elegidas como parte del diseño experimental que proveerá el par de Cauchy  $(\phi, \psi)$ , en cuyo caso la forma de  $\tilde{J}_{(p;a)}(\tilde{\eta}_{(p;a)})$  en (141) nos dice que las altas frecuencias en el dato de Neumann aportan poco o nada a la identificación de la inclusión, por lo que es recomendable considerar diseños experimentales en los que sólo se observen bajas frecuencias en la descomposición en serie de Fourier del dato de Neumann. La figura 1 muestra un ejemplo en el que se observa gráficamente la convergencia uniforme de  $\tilde{J}_{(p;a)}(\tilde{\eta}_{(p;a)})$  a  $J_{(p;a)}^\dagger(\eta_{(p;a)}^\dagger)$ .

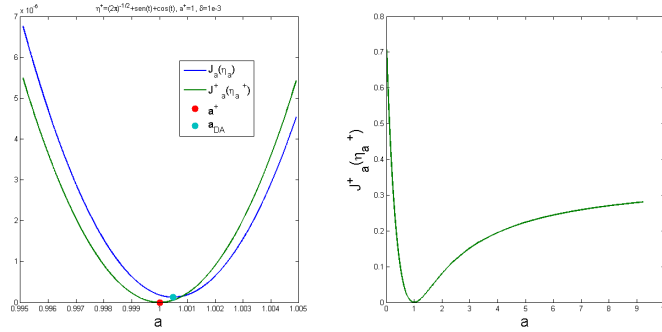


FIGURA 1. Ejemplo de convergencia uniforme de  $\tilde{J}_{(p;a)}(\tilde{\eta}_{(p;a)})$  a  $J_{(p;a)}^\dagger(\eta_{(p;a)}^\dagger)$ , ejemplo con  $\delta = 1e - 3$ .

La figura 2 muestra el comportamiento del error absoluto entre  $a_\delta$  y  $a^\dagger$ . Para distintos valores de  $a^\dagger$  se construyó una muestra de 30 datos de Neumann  $\eta^\dagger = \sum_{-50}^{50} \eta_k v_k$ , donde cada uno de los coeficientes  $\eta_k$  se eligió como un número pseudo aleatorio en el intervalo  $[0, 1]$ . Posteriormente  $\eta^\dagger$  se normalizó para garantizar  $\|\eta^\dagger\| = 1$ . Los correspondientes datos  $\varphi^\dagger$  se construyeron a partir de  $\eta^\dagger$  y mediante la forma analítica de  $B_a$ . Por último,  $\eta^\dagger$  y  $\varphi^\dagger$  fueron perturbados por errores construidos en la misma forma pseudo aleatoria que  $\eta^\dagger$  pero normalizados para que su norma correspondiera con el nivel de ruido  $\delta$ . Las soluciones fueron computadas siguiendo la Metodología de datos admisibles.

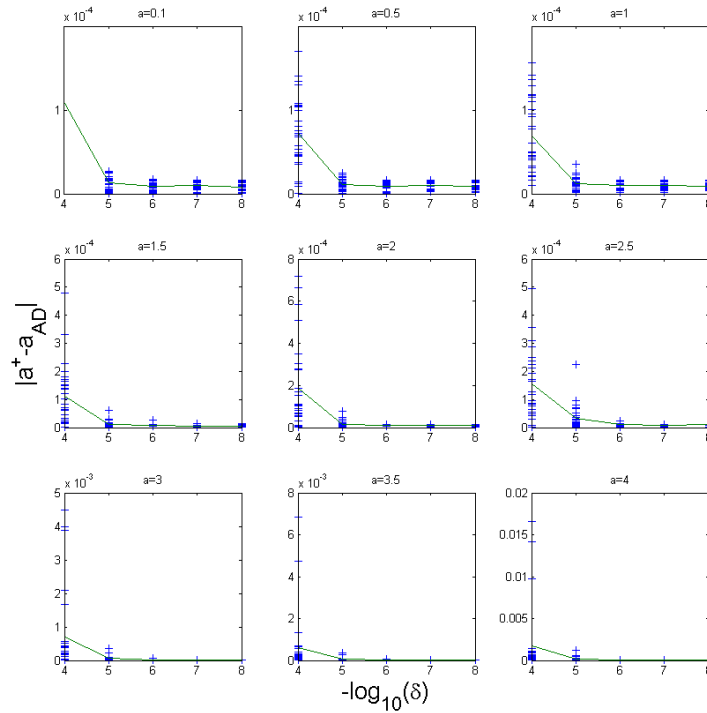


FIGURA 2. Comportamiento del error absoluto de regularización por la Metodología de datos admisibles en el caso de inclusiones concéntricas.



## Conclusión

La conclusión principal de este trabajo puede resumirse en el hecho de haber logrado un esquema teórico de optimización para el problema inverso lineal asociado al problema de Cauchy para la ecuación de Laplace, mediante una Metodología que permite construir esquemas de regularización naturales y óptimos para problemas inversos severamente mal planteados principalmente, el tipo de problemas donde la precisión con la que se aproxima a la solución exacta es difícil de mejorar y, simultáneamente, es de vital importancia para las aplicaciones prácticas en Medicina e Ingeniería. La Metodología se desarrolla con el objetivo inicial de lograr esquemas óptimos de regularización; sin embargo, aún quedan problemas por resolver en cuanto a la implementación numérica cuando, por ejemplo, reducir el tiempo de cómputo es igualmente importante que la precisión, o cuando la información *a priori* disponible es más débil que la que se ha asumido como dada para la aplicación de la Metodología de datos admisibles.

### Sobre el problema de Cauchy

La solución propuesta a partir de la Metodología de datos admisibles se construye siguiendo un nuevo esquema de regularización, que permite tomar toda la ventaja posible de la información *a priori* disponible para el problema inverso, siguiendo un camino intuitivo para la construcción de una aproximación óptima de la solución exacta del problema. Cuando la medición del dato de Cauchy es proyectada sobre la clase de datos admisibles, buscamos el dato admisible más próximo a la solución y que, simultáneamente, pertenezca a una subclase de datos admisibles caracterizada por información *a priori* suficientemente fuerte como para garantizar un buen planteamiento condicional del problema inverso. Resumiendo, la solución por la Metodología de datos admisibles es óptima porque la hemos forzado a serlo.

La información *a priori* en este trabajo para la solución por datos admisibles siempre es equivalente a las restricciones de un problema de optimización en espacios vectoriales. En el mejor de los escenarios, si dicha información *a priori* es suficientemente fuerte como para que la

solución sea un punto regular para las restricciones, entonces la propia información *a priori*, entendida como una cota superior para una norma suficientemente fuerte del dato admisible exacto, se convierte en un parámetro de regularización mediante una formulación lagrangiana equivalente al problema de optimización que define a la solución MDA.

En caso de existir dicha formulación lagrangiana, la solución por datos admisibles puede entenderse como la evaluación por el operador compacto  $Q$  de la primera componente para la solución de Tikhonov del operador lineal pero no compacto  $T_s(\Phi, \psi) = (A_s\Phi + B\psi, \psi)$ . Otra forma de entenderlo es a través de la ecuación (70), donde fácilmente puede verse que  $(A_s^*A_s + \alpha I)^{-1}A_s^*(\tilde{\phi} - B\psi^{\delta, \alpha})$  es la solución de Tikhonov al problema inverso auxiliar  $A_s\zeta = \rho$  ( $\Phi = Q^s\zeta$ ), donde el dato de salida con error depende simultáneamente del parámetro de regularización  $\alpha$  en forma continua y conforme a la ecuación (69).

En cualquiera de las dos formas de interpretar la relación de la solución por datos admisibles con la solución de Tikhonov, la sospecha inmediata es que con una cuidadosa modificación de estrategias bien conocidas para la elección del parámetro de regularización en el caso de la solución de Tikhonov, será posible establecer estrategias para la identificación del parámetro de regularización en el caso de la solución por datos admisibles cuando la información *a priori* deba ser considerada como un parámetro de regularización mediante un enfoque lagrangiano, cuando se asume el segundo supuesto (61) pero se desconoce el valor exacto de la constante  $\|(\phi^\dagger, \psi^\dagger)\|_0$ . Las estrategias que saltan a la vista para un estudio posterior son el principio de discrepancia de Moore, la L-curva [23], la U-curva, el principio de balance [41], o la técnica de la condición discreta de Picard [12].

En el caso de geometrías más complejas de  $\Omega$ , cuando el objetivo es resolver tan rápido como sea posible el mismo problema de Cauchy para una serie de mediciones de Cauchy dependientes en un intervalo de tiempo, la sección 2 y [25, 10] sugieren que la técnica del encajamiento invariante puede ser una opción viable para el desarrollo de algoritmos numéricos para la solución de dicho problema mediante la Metodología de datos admisibles.

El último aspecto remarcable del capítulo es que, mediante la Metodología propuesta se puede establecer un paralelismo determinista con una prueba de hipótesis sobre la pertinencia del modelo matemático que describe a un fenómeno de interés, o sobre la adecuada calibración de los equipos que registran las mediciones de Cauchy. Cuando están dados los valores del nivel de error  $\delta$  y la información *a priori*  $\|(\Phi^\dagger, \psi^\dagger)\|_0$ , entonces, si la proyección  $(\phi^\delta, \psi^\delta)$  satisface la desigualdad  $\|(\phi^\delta, \psi^\delta) - (\tilde{\phi}, \tilde{\psi})\| \geq \sqrt{2}\delta$ , es posible decir que existe algún problema

de calibración del equipo, o con la modelación del fenómeno en el peor de los escenarios.

### **Sobre el problema de identificación de inclusiones**

Con lo presentado en este trabajo hay realmente poco que decir del problema inverso no lineal, pues sólo se ha probado que la Metodología de datos admisibles también provee de una esquema de regularización en este caso. Un esquema que se prueba teóricamente para una gran variedad de posibles geometrías. Sin embargo, no se ha logrado una prueba de optimalidad o perspectivas sobre la implementación numéricas que requieran el mínimo posible de tiempo de cómputo. Tanto la prueba de optimalidad del esquema por datos admisibles en este caso, como la investigación sobre la forma de implementación numérica se entienden como perspectivas de continuación para el trabajo presentado.



## Bibliografia

- [1] ABDA, A. B., HENRY, J., AND JDAY, F. Boundary data completion: the method of boundary value problem factorization. *Inverse Problems* 27, 5 (2011), 055014.
- [2] ALBANI, V., ELBAU, P., DE HOOP, M. V., AND SCHERZER, O. Optimal Convergence Rates Results for Linear Inverse Problems in Hilbert Spaces. *Numerical Functional Analysis and Optimization* 37, 5 (2016), 521–540.
- [3] ARONSAJN, N. A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order. *J. Math. Pures Appl* 36, 9 (1957), 235—249.
- [4] AZAÏEZ, M., BELGACEM, F. B., AND FEKIH, H. E. On Cauchy’s problem: II. Completion, regularization and approximation. *Inverse Problems* 22, 4 (2006), 1307.
- [5] BEAR, L., CUCULICH, P. S., BERNUS, O., EFIMOV, I., AND DUBOIS, R. Introduction to noninvasive cardiac mapping. *Cardiac Electrophysiology Clinics* 7, 1 (2015), 1–16. cited By 3.
- [6] BELGACEM, F. B. Why is the Cauchy problem severely ill-posed? *Inverse Problems* 23, 2 (2007), 823.
- [7] BELGACEM, F. B., AND FEKIH, H. E. On Cauchy’s problem: I. A variational Steklov–Poincaré theory. *Inverse Problems* 21, 6 (2005), 1915.
- [8] BIRMAN, M. S., AND SOLOMJAK, M. *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space*, first ed. Mathematics and its Applications. Springer Netherlands, 1987.
- [9] BOUARROUDJ, N., HENRY, J., LOURO, B., AND OREY, M. On a Direct Study of an Operator Riccati Equation Appearing in Boundary Value Problems Factorization. *Applied Mathematical Sciences* 2, 46 (2008), 2247 – 2257.
- [10] BOUYSSIER, J., ZEMZEMI, N., AND HENRY, J. Inverse problem in electrocardiography via the factorization method of boundary value problems. vol. 2015-July, pp. 743–746. cited By 0.
- [11] BURGER, M., AND OSHER, S. Convergence rates of convex variational regularization. *Inverse Problems* 20, 5 (2004), 1411.
- [12] CHAMORRO-SERVENT, J., DUBOIS, R., POTSE, M., AND COUDIÈRE, Y. Improving the Spatial Solution of Electrocardiographic Imaging: A New Regularization Parameter Choice Technique for the Tikhonov Method. In *Functional Imaging and Modelling of the Heart* (Cham, 2017), M. Pop and G. A. Wright, Eds., Springer International Publishing, pp. 289–300.
- [13] CHARULATHA, R., AND YORAM, R. Electrocardiographic Imaging: I. Effect of Torso Inhomogeneities on Body Surface Electrocardiographic Potentials. *Journal of Cardiovascular Electrophysiology* 12, 2 (2001), 229–240.
- [14] CHARULATHA, R., AND YORAM, R. Electrocardiographic Imaging: II. Effect of Torso Inhomogeneities on Noninvasive Reconstruction of Epicardial Potentials, Electrograms, and Isochrones. *Journal of Cardiovascular Electrophysiology* 12, 2 (2001), 241–252.

- [15] CLUITMANS, M., BONIZZI, P., KAREL, J., VOLDERS, P., PEETERS, R., AND WESTRA, R. Inverse reconstruction of epicardial potentials improved by vectorcardiography and realistic potentials. vol. 40, pp. 369–372.
- [16] CLUITMANS, M., PEETERS, R., WESTRA, R., AND VOLDERS, P. Noninvasive reconstruction of cardiac electrical activity: update on current methods, applications and challenges. *Netherlands Heart Journal* 23, 6 (Jun 2015), 301–311.
- [17] DENISOV, A. M. *Elements of the Theory of Inverse Problems*, reprint ed. Inverse and Ill-Posed Problems. Ridderprint bv, Ridderkerk, July 2014.
- [18] ELVETUN, O., AND NIELSEN, B. Preconditioners for pde-constrained optimization problems with box constraints: Towards high resolution inverse ecg images. 935–962.
- [19] ENGL, H. W., HANKE, M., AND NEUBAUER, A. *Regularization of Inverse Problems*, first ed. Mathematics and Its Applications. Springer Netherlands, 2000.
- [20] FRAGUELA-COLLAR, A., OLIVEROS-OLIVEROS, J. J., MORIN-CASTILLO, M. M., AND CONDE-MONES, J. J. Identification of piecewise constant sources in non-homogeneous media based on boundary measurements. *Applied Mathematical Modelling* 39, 23 (2015), 7697 – 7717.
- [21] GREEN, L. S., AND ABILDSKOV, J. A. Clinical applications of body surface potential mapping. *Clinical Cardiology* 18, 5, 245–249.
- [22] HADAMARD, J. *Lecture The Cauchy problem in linear partial differential equations*. London, 1923.
- [23] HANSEN, P. C. Regularization tools: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems. *Numerical Algorithms* 6, 1 (Mar 1994), 1–35.
- [24] HANSEN, P. C. *Discrete inverse problems, insight and algorithms*, first ed. Fundamentals of Algorithms. siam, 2010.
- [25] HENRY, J., AND RAMOS, A. M. *Factorization of Boundary Value Problems Using the Invariant Embedding Method*, first ed. ISTE Press - Elsevier, October 2016.
- [26] HERNÁNDEZ-MONTERO, E., COLLAR, A. F., AND HENRY, J. An optimal quasi solution for the Cauchy problem for Laplace equation in the framework of inverse ECG. Accepted for publication in the journal Math. Model. Nat. Phenom., june 2018.
- [27] HOHAGE, T. Regularization of exponentially ill-posed problems. *Numerical Functional Analysis and Optimization* 21, 3-4 (2000), 439–464.
- [28] ISAKOV, V. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, second ed. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag New York, 2006.
- [29] IVANYSHYN, O., AND KRESS, R. Nonlinear integral equations for solving inverse boundary value problems for inclusions and cracks. *The Journal of Integral Equations and Applications* 18, 1 (2006), 13–38.
- [30] JOAKIM SUNDNES, GLENN TERJE LINES, X. C. B. F. N. K.-A. M., AND TVEITTO, A. *Computing the Electrical Activity in the Heart*, first ed. Monographs in Computational Science and Engineering. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [31] KIRSCH, A. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, second ed. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag New York, 2011.
- [32] KOLMOGOROV, A. N., AND FOMIN, S. V. *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, 2da ed. Moscu, 1975.
- [33] KRESS, R. Inverse Dirichlet problem and conformal mapping. *Mathematics and Computers in Simulation* 66, 4 (2004), 255 – 265. Inverse Obstacle Problems.
- [34] LIONS, J. L., AND MAGENES, E. *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Vol. 1*, first ed. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1972.

- [35] LUENBERGER, D. G. *Optimization by vector space methods*, first ed. John Wiley & Sons, Inc, 1969.
- [36] MIJAILOV, V. *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*. MIR, Moscu, 1978.
- [37] MYINT-U, T., AND DEBNATH, L. *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, fourth edition ed. Boston, 2007.
- [38] RESMERITA, E. Regularization of ill-posed problems in Banach spaces: convergence rates. *Inverse Problems* *21*, 4 (2005), 1303.
- [39] RUDIN, W. *Functional Analysis*, second ed. . McGraw-Hill, 1991.
- [40] SOLODKY, S., AND MOSENTOVAL, A. Morozov's discrepancy principle for the Tikhonov regularization of exponentially ill - posed problems. *Computational Methods in Applied Mathematics* *8*, 1 (2008), 86–98.
- [41] SOLODKY, S., AND MYLEIKO, G. On optimization of projection methods for solving some classes of severely ill-posed problems. *Applicable Analysis* *95*, 4 (2016), 826–841.
- [42] SOLODKY, S. G., AND GRUSHEVAYA, A. V. On the a posteriori choice of a regularization parameter in the solution of severely ill-posed problems. *Journal of Mathematical Sciences* *181*, 1 (2012), 98–105.
- [43] TARTAR, L. *An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces*, first ed. Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [44] TAUTENHAHN, U. Optimality for ill-posed problems under general source conditions. *Numerical Functional Analysis and Optimization* *19*, 3-4 (1998), 377–398.
- [45] VLADIMIROV, V. S. *Equations of Mathematical Physics*, second ed. . MARCEL DEKKER, INC., 1971.
- [46] WEI, T., AND CHEN, Y. A regularization method for a Cauchy problem of Laplace's equation in an annular domain. *Mathematics and Computers in Simulation* *82*, 11 (2012), 2129 – 2144.
- [47] YAO, B., PEI, S., AND YANG, H. Mesh resolution impacts the accuracy of inverse and forward ecg problems. vol. 2016-October, pp. 4047–4050.
- [48] ZEMZEMI, N. A domain decomposition approach in the electrocardiography inverse problem. 641–647.
- [49] ZEMZEMI, N., BOURENANE, H., AND COCHET, H. An iterative method for solving the inverse problem in electrocardiography imaging: From body surface to heart potential. M. A., Ed., vol. 41, pp. 717–720.