



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Análisis de rotación de una herramienta que gira libremente
y oscila dentro de un vidrio que gira a velocidad angular
constante

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito para la obtención del título de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Roberto Carlos Zepeda Flores

Asesorado por

Alberto Cordero Dávila

Puebla Pue.
8 de junio de 2025

Título: Análisis de rotación de una herramienta que gira libremente y oscila dentro de un vidrio que gira a velocidad angular constante

Estudiante: ROBERTO CARLOS ZEPEDA FLORES

COMITÉ

Carlos Robledo Sánchez
Presidente

Rafael Izazaga Pérez
Secretario

Jorge González García
Vocal

Rosibel Carrada Legaria
Suplente

Alberto Cordero Dávila
Asesor

DEDICATORIAS

Dedicado a mi madre y padre, ya que nunca dejaron de creer en mí, por su apoyo incondicional de día con día.

A mis amigas y amigos que me brindaron consejos, y palabras con las cuales me motivaron a seguir adelante. Este trabajo también se lo dedico a todas las personas que me han considerado como una fuente de motivación para seguir estudiando y adentrarse en el mundo de la ciencia.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis padres, Salustiana Flores y Víctor Zepeda por su apoyo incondicional, nunca dejaron de creer en mí, y sin duda el esfuerzo que hicieron para impulsar mi camino hasta este punto de mi vida.

También quiero agradecer al Dr. Alberto Cordero por sus enseñanzas, su apoyo y paciencia en la elaboración de esta tesis . Además quiero agradecer a los amigos que hice en la carrera de Física, Jaqueline Alonso, Eric Casales, Julio Texca y Marcos Cerezo, por su amistad incondicional y apoyo en las materias y temas que fueron en su momento complicados para mí.

RESUMEN

Usando las ecuaciones integrales de las componentes de la torca deducidas por A. Cordero et al. [10], en el presente trabajo fueron calculadas numéricamente las componentes de la torca aplicada sobre una herramienta que realiza un movimiento armónico simple sobre un vidrio que rota a velocidad angular constante, que es el aporte nuevo de esta tesis, realizar cálculos bajo condiciones más cercanas al trabajo de pulido (caps. 3 y 4) y corrección de superficies (caps. 5 y 6) en el Taller de Pruebas Ópticas. Esto se realizó haciendo una comparación de los resultados obtenidos con una herramienta dinámica y los de una herramienta estática, ya que los resultados de herramienta estática y dinámica deben coincidir en los puntos extremos de oscilación. Y con todo esto analizar a la herramienta variando su velocidad de oscilación (cap. 7).

Índice general

RESUMEN	IX
1 INTRODUCCIÓN	1
Capítulo 2: CALCULO NUMÉRICO DE LAS ECUACIONES INTEGRALES PARA LA TORCA	3
2.1 INTRODUCCIÓN	3
2.2 ECUACIONES INTEGRALES EXACTAS DE LAS COMPONENTES DE LA TORCA	3
2.3 DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO PARA EL CÁLCULO DE LAS GRÁFICAS	5
2.4 ECUACIONES APROXIMADAS DE LAS COMPONENTES DE LA TORCA	6
2.5 CALCULO NUMÉRICO DE LA COMPONENTE τ_z	7
2.6 CALCULO NUMÉRICO DE LA COMPONENTE τ_x	9
2.7 CALCULO NUMÉRICO DE LA COMPONENTE τ_y	10
2.8 CONCLUSIONES	12
Capítulo 3: TORCA SOBRE UNA HERRAMIENTA OSCILANDO ALREDEDOR DEL EJE DE GIRO DEL VIDRIO	13
3.1 INTRODUCCIÓN	13
3.2 DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO PARA CALCULAR LAS GRÁFICAS DE LAS COMPONENTES DE LA TORCA	13
3.3 ANÁLISIS DE LA COMPONENTE τ_x	14
3.4 ANÁLISIS DE LA COMPONENTE τ_y	15
3.5 ANÁLISIS DE LA COMPONENTE τ_z	17
3.6 CONCLUSIONES	18
Capítulo 4: COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE HERRAMIENTA ESTÁTICA Y DINÁMICA	19
4.1 INTRODUCCIÓN	19
4.2 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE LA COMPONENTE τ_x	19
4.3 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE LA COMPONENTE τ_y	21
4.4 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE LA COMPONENTE τ_z	22
4.5 CONCLUSIONES	24
Capítulo 5: OSCILACIÓN ALREDEDOR DE UN PUNTO FUERA DEL EJE DE GIRO DEL VIDRIO	25
5.1 INTRODUCCIÓN	25
5.2 OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 0$	26
5.3 OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 4$	28
5.4 OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 8$	32
5.5 OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 9$	34
5.6 CONCLUSIONES	37

Capítulo 6: COMPARACIÓN DE HERRAMIENTA OSCILANDO FUERA DEL EJE DEL VIDRIO CON HERRAMIENTA ESTÁTICA	39
6.1 INTRODUCCIÓN	39
6.2 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 0$	39
6.3 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 4$	42
6.4 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 8$	45
6.5 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 9$	48
6.6 CONCLUSIONES	51
Capítulo 7: ANÁLISIS DE TORCA DE UNA HERRAMIENTA VARIANDO SU VELOCIDAD DE OSCILACIÓN	53
7.1 INTRODUCCIÓN	53
7.2 ¿POR QUÉ ALTERAR LA VELOCIDAD DE OSCILACIÓN DE LA HERRAMIENTA?	53
7.3 HERRAMIENTA CON VELOCIDAD DE OSCILACIÓN LENTA	54
7.4 HERRAMIENTA CON VELOCIDAD DE OSCILACIÓN ALTA	56
7.5 CONCLUSIONES	59
Capítulo 8: CONCLUSIONES	61
Apéndice A: Desarrollo de las ecuaciones aproximadas de la torca	63
A.1 Desarrollo en serie de Taylor	63
A.2 Integración de las ecuaciones desarrolladas en serie de Taylor	65
Apéndice B: Algoritmo de la componente τ_x	69
Apéndice C: Algoritmo de la componente τ_y	71
Apéndice D: Algoritmo de la componente τ_z	73
Apéndice E: Algoritmo de las curvas de nivel de la componente τ_x	75
Apéndice F: Algoritmo de las curvas de nivel de la componente τ_y	79
Apéndice G: Algoritmo de las curvas de nivel de la componente τ_z	83
Bibliografía	87

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

En 1927 F.W. Preston [1] analizó la dinámica de la rotación libre de una herramienta de pulido, deduciendo una expresión integral para la torca aplicada en dirección de la normal desde la superficie del vidrio sobre la superficie de la herramienta. “Como consecuencia, desarrolló la técnica conocida como el “método del centroide”. A partir de la expresión, Preston [1] concluyó que “cuando se prueba para un anillo o disco de fieltro se obtiene una aproximación cercana a la sincronización” [i.e. la velocidad angular del vidrio y la herramienta son iguales]. En 1962 S.I. Vinokur [2] aplicó el mismo “método del centroide” y calculó la torca en dirección normal usando integrales elípticas de primer y segundo orden, y concluyó que no hay sincronización entre el vidrio y la herramienta. Experimentalmente se encuentra que la herramienta cambia de velocidad angular de manera azarosa. Preston [1] y Vinokur [2] supusieron que la rotación azarosa era originada por la cantidad de fricción en el eje de rotación del anillo debido a un coeficiente de fricción no constante entre el vidrio y la herramienta.

La rotación no sincronizada y azarosa de la herramienta fueron reportadas desde los experimentos por J. Brown [3], C. A. Hall and T. A. Porshing [4], T. A. Porshing and C. A. Hall [5]. V. Rupp [6] sugirió como origen de las rotaciones azarosas al “método de introducción del abrasivo, ya que una introducción errática puede causar inestabilidad del coeficiente cinético”. V.L Gorbach [7] añadió que la sincronización del elemento accionado es independiente del pulido y el esmerilado (lo que no ha sido encontrado experimentalmente). V. V. Travin [8] continuó el análisis de Vinokur [2] y concluyó que “la herramienta y el vidrio están sincronizados sólo si los ejes de rotación de la herramienta y el vidrio coinciden”.

En 2023 A. Cordero et al. [10] analizaron teóricamente la rotación de una herramienta con grosor diferente de cero, y por lo tanto el centro de masas de la herramienta está por arriba del plano de contacto entre el vidrio y la herramienta, fueron deducidas tres expresiones integrales para las componentes la torca, explicaron teóricamente el movimiento errático de una herramienta rotando libremente sobre un vidrio que rota a velocidad angular constante, concluyeron que el movimiento de una herramienta estática está gobernando por las componentes τ_x , que altera constantemente la velocidad angular de la herramienta y τ_z , que que restaura la rotación de la herramienta, esto fue confirmado experimentalmente por E. Carlock. [9].

Los cálculos numéricos de las componentes τ_x , τ_y y τ_z de la torca fueron realizados por D. I. Madrid Gutiérrez [11], los cálculos fueron realizados considerando que la herramienta está fija en un punto del vidrio, y estos cálculos serán reproducidos en el capítulo (2).

En el capítulo 3 se tratará el caso de una herramienta realizando oscilaciones sobre un vidrio, que al igual que en el capítulo 2 se tomarán las ecuaciones integrales deducidas por A. Cordero et al. [10] para calcular numéricamente las gráficas de las componentes τ_x , τ_y y τ_z , modificando el algoritmo usado para el capítulo 2 ingresando la variable del tiempo al algoritmo, puesto que ahora la posición y velocidad de la herramienta dependen del tiempo y de este modo analizar las componentes de la torca que se obtienen con una herramienta dinámica. En el capítulo 4 se

comparan las gráficas de herramienta estática y dinámica (capítulos 2 y 3).

En el capítulo 5 se analiza una herramienta dinámica que oscila fuera del eje de giro del vidrio calculando numéricamente las gráficas de las componentes de la torca. En el capítulo 6 se comparan las gráficas de una herramienta estática con las de una herramienta que oscila fuera del eje de giro del vidrio (capítulos 2 y 5) . En el capítulo 7 se analiza una herramienta variando su velocidad de oscilación, esto se hace tomando los casos en los que una herramienta oscila a una velocidad lenta y una alta. Finalmente se exponen las conclusiones generales.

Capítulo 2

CALCULO NUMÉRICO DE LAS ECUACIONES INTEGRALES PARA LA TORCA

2.1. INTRODUCCIÓN

Partiendo de las ecuaciones deducidas por A. Cordero et al. [10] se desarrolló un nuevo algoritmo que reproduce las gráficas de las componentes de la torca hasta obtener los mismos resultados de D. I. Madrid Gutiérrez [11] además se realizaron aproximaciones de las ecuaciones de las componentes de la torca para analizar el efecto de la herramienta con valores alrededor de $\delta\omega = 0$ (cerca de la sincronización de velocidades angulares). Cada una de las gráficas de las componentes de la torca se calculó numéricamente considerando que la herramienta está sobre el eje X_G dado que se tiene un sistema radial, hacer rotar a la herramienta sobre otros eje es equivalente a este caso.

2.2. ECUACIONES INTEGRALES EXACTAS DE LAS COMPONENTES DE LA TORCA

Se reproduce, como se puede ver en la Fig. (2.1), el análisis de las componentes de la torca aplicada sobre una herramienta que, en el instante de tiempo t , se localizada en el punto $(X_G, 0)$, y donde las velocidades angulares del vidrio y la herramienta están descritas por $\vec{\omega}_G$ y $\vec{\omega}_T$ respectivamente.

Las componentes de la torca aplicada a una herramienta que rota libremente fueron deducidas por A. Cordero et al. [10] suponiendo que el centro de masas de la herramienta está a una altura h del plano de contacto entre el vidrio y la herramienta, como se puede ver en la Fig. (2.2).

Las expresiones de las ecuaciones integrales de las componentes τ_x , τ_y y τ_z de la torca están descritas de la siguiente forma:

$$\tau_x = \mu \frac{f_N}{A_T} h \iint_{A_T} \frac{\left(\frac{\delta\omega x_T}{R_T} + \chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\delta\omega x_T}{R_T} + \chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)^2 + \left(\frac{\delta\omega y_T}{R_T} + \frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{x}_{TC}}{\omega_G} \right)^2}} dA_T \quad (2.1)$$

$$\tau_y = \mu \frac{f_N}{A_T} h \iint_{A_T} \frac{\left(\frac{\delta\omega y_T}{R_T} + \frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{x}_{TC}}{\omega_G} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\delta\omega x_T}{R_T} + \chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)^2 + \left(\frac{\delta\omega y_T}{R_T} + \frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{x}_{TC}}{\omega_G} \right)^2}} dA_T \quad (2.2)$$

**CALCULO NUMÉRICO DE LAS ECUACIONES INTEGRALES PARA LA
TORCA**
2.2 ECUACIONES INTEGRALES EXACTAS DE LAS COMPONENTES DE LA TORCA

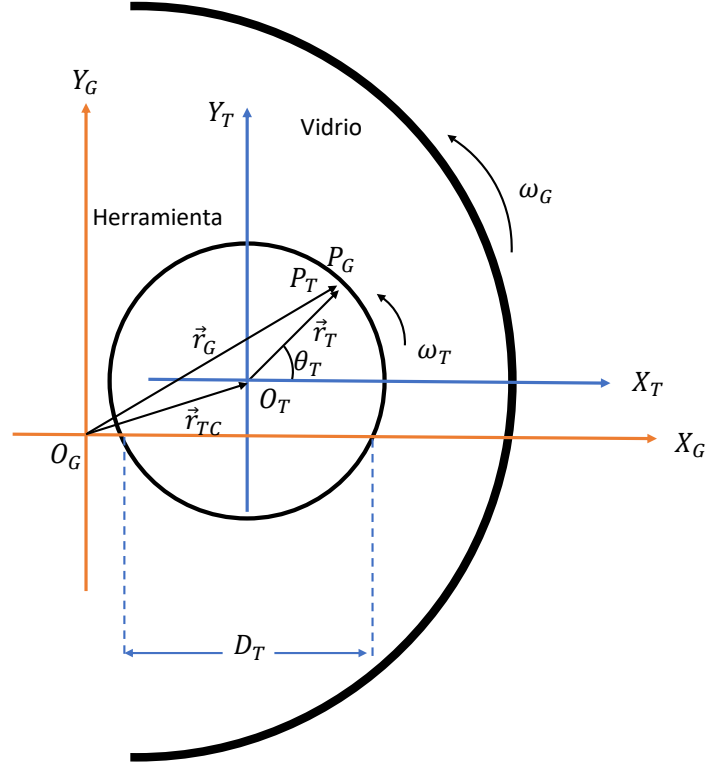


Figura 2.1: Diagrama de un vidrio y la herramienta que rotan alrededor de O_G y O_T con velocidades angulares $\vec{\omega}_G$ y $\vec{\omega}_T$ respectivamente. La posición del centro de la herramienta O_T con respecto de O_G , está descrito por el vector \vec{r}_{TC} . El punto de contacto P_G sobre el vidrio y P_T en la herramienta está descrito por los vectores \vec{r}_G y \vec{r}_T respectivamente.

$$\tau_z = \mu \frac{f_N}{A_T} \iint_{A_T} \frac{x_T \left(\frac{\delta\omega x_T}{R_T} + \chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T\omega_G} \right) + y_T \left(\frac{\delta\omega y_T}{R_T} + \frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{x}_{TC}}{\omega_G} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\delta\omega x_T}{R_T} + \chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T\omega_G} \right)^2 + \left(\frac{\delta\omega y_T}{R_T} + \frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{x}_{TC}}{\omega_G} \right)^2}} dA_T \quad (2.3)$$

donde μ representa el coeficiente de fricción, f_N la fuerza normal, A_T el área de la herramienta, h la altura del centro de masas de la herramienta respecto al plano de contacto, R_T representa el radio de la herramienta. Las variables χ_{TC} , \dot{x}_{TC} y $\delta\omega$ se definen como

$$\chi_{TC} = \frac{x_{TC}}{R_T} \quad (2.4)$$

$$\dot{\chi}_{TC} = \frac{\dot{x}_{TC}}{R_T} \quad (2.5)$$

$$\delta\omega = 1 - \frac{\omega_T}{\omega_G} \quad (2.6)$$

donde (x_{TC}, y_{TC}) y $(\dot{x}_{TC}, \dot{y}_{TC})$ representan la posición y la velocidad del centro de la herramienta respecto del centro del vidrio O_G , ω_T y ω_G son las velocidades angulares del vidrio y la herramienta respectivamente, (x_T, y_T) representan las coordenadas de un punto P_T de la herramienta respecto del centro de la herramienta O_T .

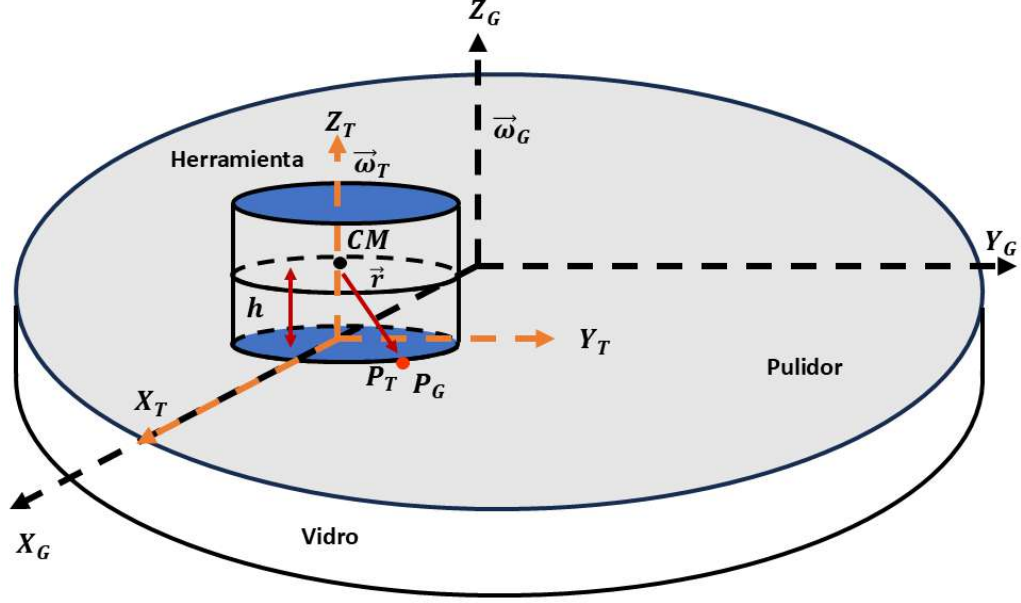


Figura 2.2: Se muestra al vidrio y la herramienta en contacto con una capa de pulidor, donde se observa que el centro de masas (CM) se encuentra una altura h del plano de contacto. Este diagrama sólo ilustra la idea de la rotación de la herramienta en un punto $(X_G, 0)$ del vidrio ya que en muchos de los casos de pulido se utilizan herramientas de menor espesor al del vidrio.

2.3. DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO PARA EL CÁLCULO DE LAS GRÁFICAS

Las gráficas de τ_x, τ_y y τ_z fueron calculadas numéricamente por D. I. Madrid Gutiérrez [11] realizando un ciclo por cada una de las variables independientes, para este caso sólo se usaron 4 variables dado que se considera que el centro de la herramienta está fijo sobre un punto $(\chi_{TC}, 0)$ a lo largo del eje X_G , esto significa

$$y_{TC} = 0 \quad (2.7)$$

$$\dot{\chi}_{TC} = 0 \quad (2.8)$$

$$\dot{y}_{TC} = 0 \quad (2.9)$$

En el ciclo usado para $\delta\omega$ se tomó un intervalo de $(-1,1)$ con un incremento de paso de 0.01, para el ciclo de χ_{TC} se tomó el intervalo de $(-10,10)$ con un incremento de paso de 0.1, esto es porque se consideró una herramienta pequeña, esto quiere decir que el diámetro del vidrio es mayor a cinco veces el diámetro de la herramienta.

El cálculo de las ecuaciones integrales (2.1), (2.2) y (2.3) se hizo tomando una suma para x_T y una para y_T , esto a través de dos ciclos usando un intervalo de $(-R_T, R_T)$ para las variables x_T y y_T con un incremento de paso de 0.002. Los ciclos usados para las variables x_T y y_T simularon una malla de puntos y para definir la región de integración se usó la condición

$$x_T^2 + y_T^2 \leq R_T^2 \quad (2.10)$$

CALCULO NUMÉRICO DE LAS ECUACIONES INTEGRALES PARA LA TORCA

2.4 ECUACIONES APROXIMADAS DE LAS COMPONENTES DE LA TORCA

que indica que la integral se lleve a cabo sobre todos los puntos que están en contacto con el vidrio. Los resultados de este nuevo algoritmo se pueden ver en la siguientes secciones en las Fig. (2.3), (2.5) y (2.7) que representan las gráficas de $\tau_z = \tau_z(\delta\omega, x_{TC})$, $\tau_x = \tau_x(\delta\omega, x_{TC})$ y $\tau_y = \tau_y(\delta\omega, x_{TC})$ respectivamente. Estas gráficas reproducen los resultados de D. I. Madrid Gutiérrez [11]. Estos algoritmos se pueden apreciar en los apéndices B, C y D.

2.4. ECUACIONES APROXIMADAS DE LAS COMPONENTES DE LA TORCA

Se analizó el caso en el que la herramienta toma valores alrededor de $\delta\omega = 0$ (Cordero et al. [10] y D. I. Madrid Gutiérrez [11]), esto se hace tomando los integrandos de las Ecs. (2.1), (2.2) y (2.3), como se muestra a continuación

$$\tau_x(\delta\omega, \chi_{TC}) = \frac{\left(\frac{\delta\omega x_T}{R_T} + \chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\delta\omega x_T}{R_T} + \chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)^2 + \left(\frac{\delta\omega y_T}{R_T} + \frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2}} \quad (2.11)$$

$$\tau_y(\delta\omega, \chi_{TC}) = \frac{\left(\frac{\delta\omega y_T}{R_T} + \frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\delta\omega x_T}{R_T} + \chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)^2 + \left(\frac{\delta\omega y_T}{R_T} + \frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2}} \quad (2.12)$$

$$\tau_z(\delta\omega, \chi_{TC}) = \frac{x_T \left(\frac{\delta\omega x_T}{R_T} + \chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right) + y_T \left(\frac{\delta\omega y_T}{R_T} + \frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\delta\omega x_T}{R_T} + \chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)^2 + \left(\frac{\delta\omega y_T}{R_T} + \frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2}} \quad (2.13)$$

y haciendo un desarrollo en serie de Taylor a primer orden alrededor de $\delta\omega = 0$ se obtiene

$$\tau_x(\delta\omega, \chi_{TC}) \Big|_{\delta\omega=0} \approx \frac{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)}{\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2}} + \frac{\left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right) \left[\frac{x_T}{R_T} \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right) - \frac{y_T}{R_T} \left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)\right]}{\left(\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2}\right)^3} \delta\omega \quad (2.14)$$

$$\tau_y(\delta\omega, \chi_{TC}) \Big|_{\delta\omega=0} \approx \frac{\left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)}{\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2}} + \frac{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right) \left[-\frac{x_T}{R_T} \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right) + \frac{y_T}{R_T} \left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)\right]}{\left(\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2}\right)^3} \delta\omega \quad (2.15)$$

$$\tau_z(\delta\omega, \chi_{TC}) \Big|_{\delta\omega=0} \approx \frac{\left[x_T \left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right) + y_T \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)\right]}{\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2}} + \frac{1}{R_T} \frac{\left[x_T \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right) - y_T \left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)\right]^2}{\left(\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2}\right)^3} \delta\omega \quad (2.16)$$

Las Ecs. (2.14), (2.15) y (2.16) pasan a sustituirse dentro de las Ecs. (2.1), (2.2) y (2.3). Una vez realizada la sustitución se resuelven las integrales a través del cambio de variable, pasando de coordenadas rectangulares a polares, obteniendo como resultado las componentes aproximadas de la torca

$$\tau_x \approx \mu\pi \frac{f_N}{A_T} h R_T^2 \frac{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)}{\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2}} \quad (2.17)$$

CALCULO NUMÉRICO DE LAS ECUACIONES INTEGRALES PARA LA TORCA

2.5 CALCULO NUMÉRICO DE LA COMPONENTE τ_z

$$\tau_y \approx \mu\pi \frac{f_N}{A_T} h R_T^2 \frac{\left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)}{\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2}} \quad (2.18)$$

$$\tau_z \approx \mu\pi \frac{f_N}{A_T} \frac{R_T^3}{4} \frac{\delta\omega}{\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2}} \quad (2.19)$$

Sustituyendo $y_{TC}, \dot{y}_{TC}, \dot{\chi}_{TC} = 0$ dentro de las ecuaciones (2.17), (2.18) y (2.19) se obtiene

$$\tau_x \approx \mu f_N h \quad (2.20)$$

$$\tau_y \approx 0 \quad (2.21)$$

$$\tau_z \approx \mu f_N \frac{R_T}{4} \frac{\delta\omega}{\chi_{TC}} \quad (2.22)$$

La componente τ_x describe que para cualquier posición que toma la herramienta su valor tiende a $\mu f_N h$, mientras que τ_y es cero para cualquier posición. En el caso de la componente τ_z se tiene un relación lineal entre $\delta\omega$ y χ_{TC} , indicando que al aumentar o disminuir los valores de $\delta\omega$ los valores de χ_{TC} lo hacen en la misma dirección.

2.5. CALCULO NUMÉRICO DE LA COMPONENTE τ_z

La Fig. (2.3) muestra la gráfica de $\tau_z = \tau_z(\delta\omega, \chi_{TC})$, se observa que los valores máximos y mínimos de τ_z se presentan cuando el centro de la herramienta y el vidrio coinciden, además se observa que conforme el centro de la herramienta se aleja del centro del vidrio la gráfica toma la apariencia de un plano, para corroborar esto se calculó la gráfica de $\tau_z = \tau_z(\delta\omega)$ para varios valores de χ_{TC} seleccionados, esto se muestra en la Fig. (2.4). La Fig. (2.4) muestra que $\tau_z = 0$ cuando $\delta\omega = 0$, esto indica que cuando la herramienta y el vidrio están sincronizadas el vidrio ya no aplica una torca a la herramienta y además τ_z parece tomar un valor contante en $\chi_{TC} = 0$, por otro lado, cuando $\chi_{TC} > 1$ la gráfica comienza a tomar un comportamiento lineal, esto indica que existe una relación lineal entre $\delta\omega$ y χ_{TC} la cual puede describirse con la Ec. (2.22) que, a pesar de ser el resultado de aproximación lineal de la Ec. (2.19), describe el resultado obtenido de manera consistente.

CALCULO NUMÉRICO DE LAS ECUACIONES INTEGRALES PARA LA
TORCA

2.5 CALCULO NUMÉRICO DE LA COMPONENTE τ_z

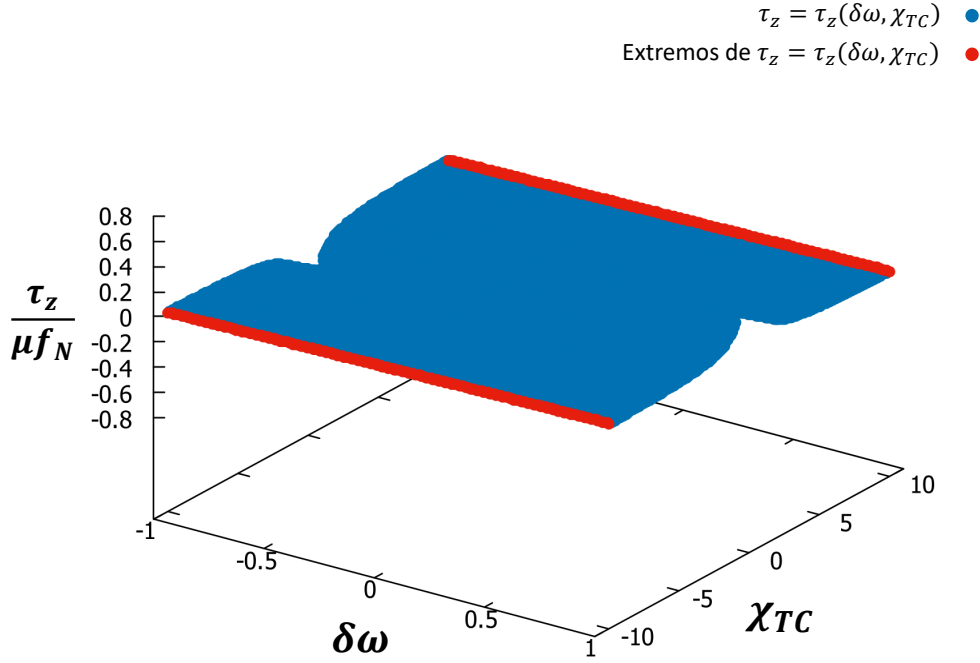


Figura 2.3: Gráfica de $\frac{\tau_z}{\mu f_N} = \frac{\tau_z}{\mu f_N}(\delta\omega, \chi_{TC})$ con herramienta localizada a lo largo del eje X_G con coordenadas $(x_{TC}, 0)$ y para varios valores de $\delta\omega$. Se puede apreciar que para valores de $\delta\omega \geq 0$ la gráfica crece positivamente cerca de $\chi_{TC} = 0$, mientras que para valores de $\delta\omega < 0$ presenta un decrecimiento.

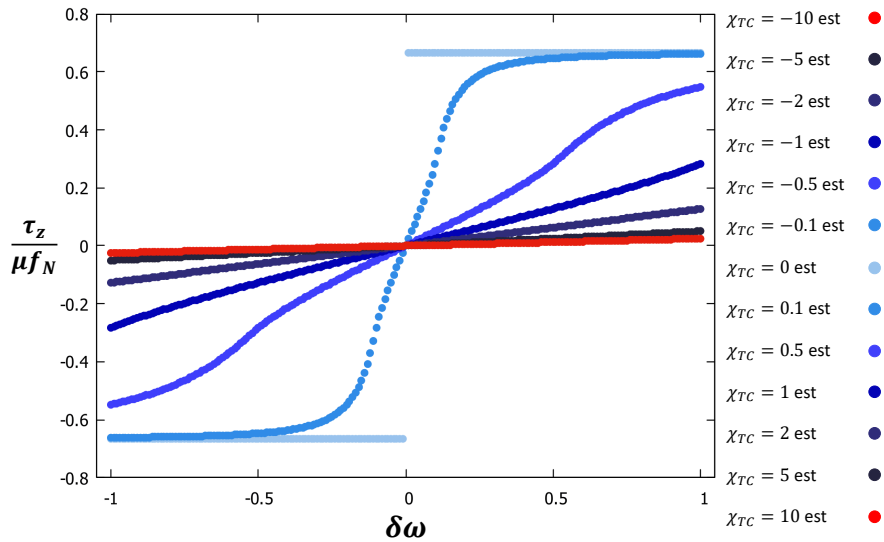


Figura 2.4: Conjunto de gráficas que representan a $\frac{\tau_z}{\mu f_N} = \frac{\tau_z}{\mu f_N}(\delta\omega)$ de herramienta con coordenadas $(\chi_{TC}, 0)$. Es importante mencionar que se tiene un comportamiento simétrico en los valores de χ_{TC} , por lo que se tiene que $\tau_z(\delta\omega, \chi_{TC}) = \tau_z(\delta\omega, -\chi_{TC})$.

2.6. CALCULO NUMÉRICO DE LA COMPONENTE τ_x

En las Fig. (2.5) y (2.6) se pueden ver las gráficas de la $\tau_x = \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC})$ y $\tau_x = \tau_x(\chi_{TC})$ respectivamente. De la Fig. (2.5) se puede ver que cuando el centro de la herramienta está fuera del centro del vidrio la gráfica de τ_x da la apariencia de ser un plano, y estos valores tienden a la Ec. (2.20). Para confirmar esta sospecha fue calculada la gráfica de $\tau_x = \tau_x(\chi_{TC})$, que muestra que para $\chi_{TC} > R_T$ se tiene (casi) la misma gráfica de τ_x vs χ_{TC} para los valores de $\delta\omega$ seleccionados, y cuando el centro de la herramienta se posiciona cerca del centro del vidrio se pueden observar pequeñas variaciones para los valores de $\delta\omega$ seleccionados. A pesar de que la Ec. (2.20) es el resultado de una ecuación aproximada se puede ver que describe el comportamiento de las gráficas $\tau_x = \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC})$ y $\tau_x = \tau_x(\chi_{TC})$ cuando $\chi_{TC} > R_T$.

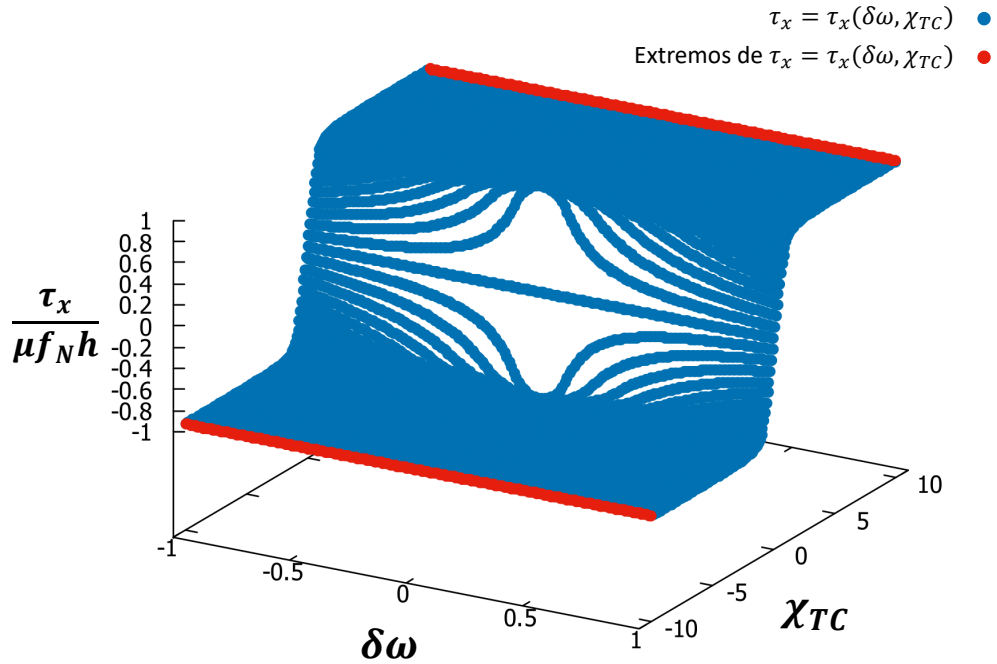


Figura 2.5: Gráfica de $\frac{\tau_x}{\mu f_N h} = \frac{\tau_x}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC})$ con herramienta localizada a lo largo del eje X_G con coordenadas $(\chi_{TC}, 0)$ y para varios valores de $\delta\omega$. En esta gráfica se pueden ver dos asíntotas horizontales en χ_{TC} , que hace parecer que se tiene un plano inferior y uno superior.

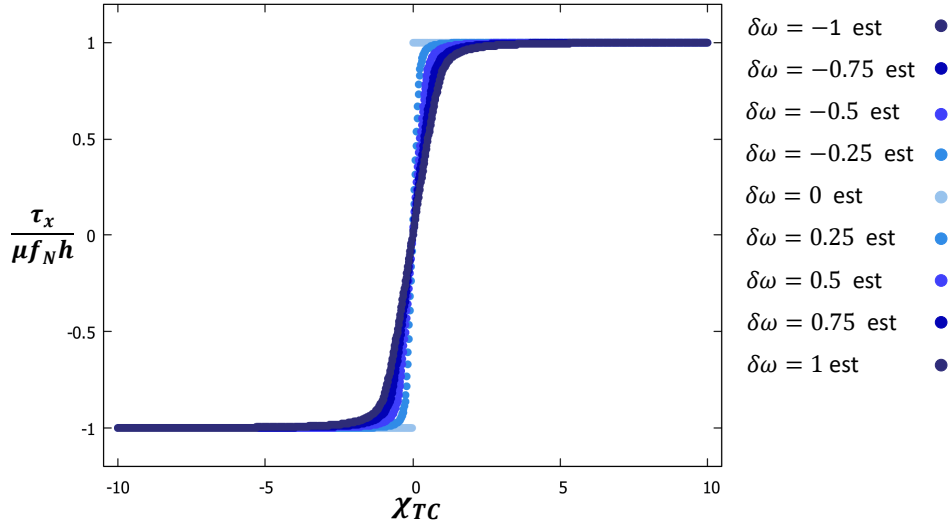


Figura 2.6: Gráfica de $\frac{\tau_x}{\mu f_N h} = \frac{\tau_x}{\mu f_N h}(\chi_{TC})$ con herramienta localizada a lo largo del eje X_G con coordenadas $(x_{TC}, 0)$ y para algunos valores de $\delta\omega$.

2.7. CALCULO NUMÉRICO DE LA COMPONENTE τ_y

En la Fig. (2.7) se puede ver la representación gráfica de la componente $\tau_y = \tau_y(\delta\omega, \chi_{TC})$ donde se puede observar que da la apariencia de ser un plano y este plano está descrito por la Ec. (2.21), para confirmar esto a fue calculada la gráfica de τ_y vs χ_{TC} que se puede ver en la Fi.g (2.8), que muestra que se obtiene una recta única para los valores de $\delta\omega$ seleccionados. Se muestra que esta recta se mantiene en cero, entonces a diferencia de la componentes τ_x y τ_z se puede observar que la Ec. (2.21) describe toda la gráfica para cualquier posición en que se coloque el centro de la herramienta.

CALCULO NUMÉRICO DE LAS ECUACIONES INTEGRALES PARA LA
TORCA

2.7 CALCULO NUMÉRICO DE LA COMPONENTE τ_y

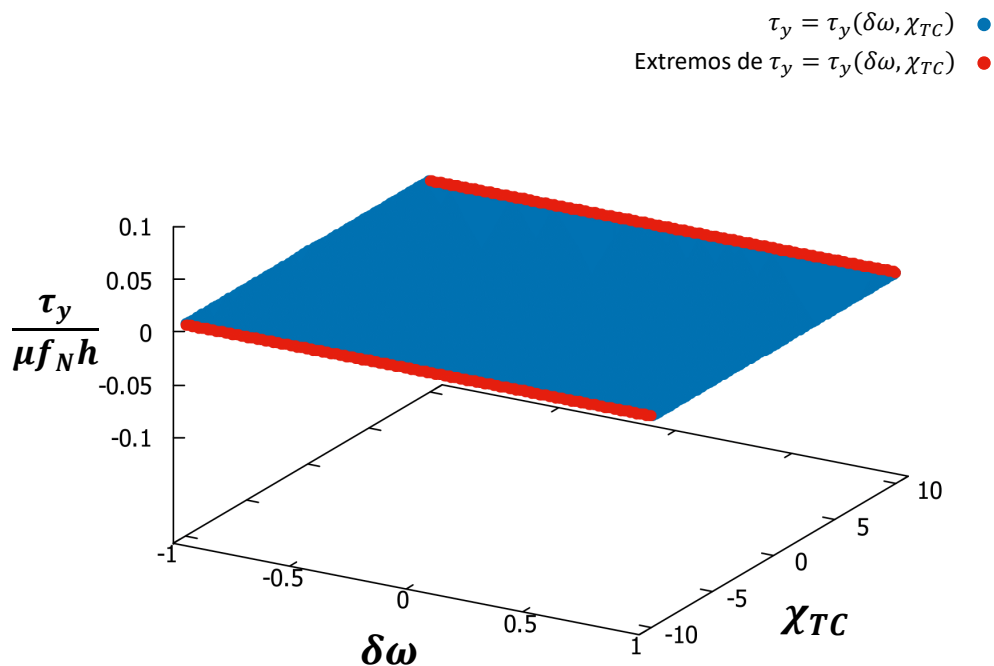


Figura 2.7: Gráfica de $\frac{\tau_y}{\mu f_N h} = \frac{\tau_y}{\mu f_N h}(\delta\omega, x_{TC})$ con herramienta localizada a lo largo del eje X_G con coordenadas $(x_{TC}, 0)$ y para varios valores de $\delta\omega$. En esta gráfica se puede observar que el resultado de la torca τ_y es prácticamente cero.

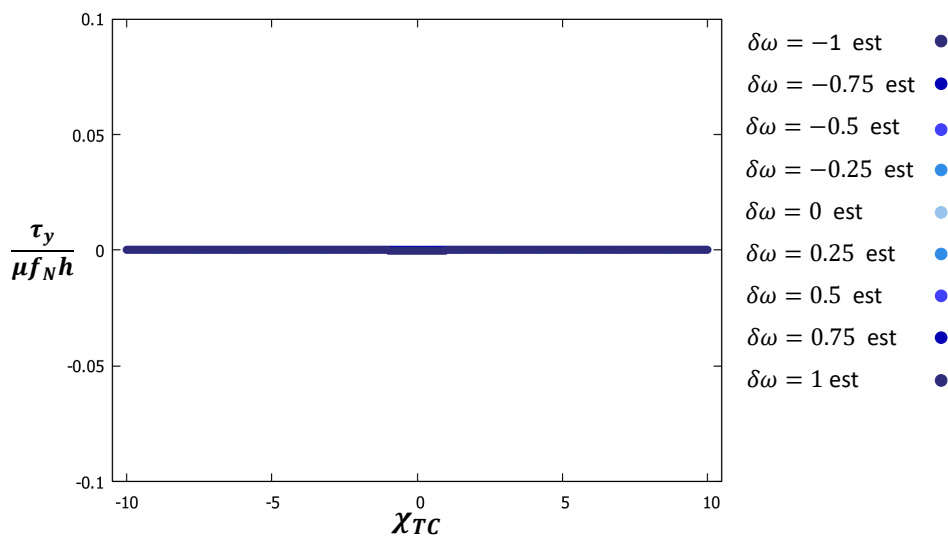


Figura 2.8: Gráfica de $\frac{\tau_x}{\mu f_N h} = \frac{\tau_x}{\mu f_N h}(\chi_{TC})$ con herramienta localizada a lo largo del eje X_G con coordenadas $(x_{TC}, 0)$ y para algunos valores de $\delta\omega$.

2.8. CONCLUSIONES

Finalmente se puede concluir que con el algoritmo desarrollado para este capítulo se pudieron reproducir las gráficas obtenidas por D. I. Madrid Gutiérrez [11] y A. Cordero et al.[10]. La creación de este algoritmo permitirá la modificación de los parámetros de cada una de las variables, esto será de ayuda para el siguiente capítulo dado que se analizará la torca de una herramienta realizando un movimiento armónico simple sobre un vidrio.

Capítulo 3

TORCA SOBRE UNA HERRAMIENTA OSCILANDO ALREDEDOR DEL EJE DE GIRO DEL VIDRIO

3.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se reprodujeron los resultados de los cálculos de las componentes de la torca aplicada a una herramienta de pulido donde el centro de la herramienta permanece estática respecto del centro del vidrio. Con el algoritmo desarrollado para el capítulo 2 se calculan numéricamente las gráficas de las componentes de la torca aplicada a una herramienta que realiza un movimiento armónico simple sobre un vidrio.

En este capítulo se utilizarán los datos de oscilación de la herramienta ω_{OT} y velocidad angular del vidrio ω_G que comúnmente usan los técnicos del taller de pruebas ópticas de la FCFM.

3.2. DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO PARA CALCULAR LAS GRÁFICAS DE LAS COMPONENTES DE LA TORCA

Ahora se analizará la torca aplicada a una herramienta que realiza un movimiento armónico simple sobre un vidrio que rota a velocidad angular constante a lo largo del eje X_G en un periodo T con una velocidad ω_{OT} . Para describir este caso armónico las coordenadas del centro de la herramienta pueden expresarse de la siguiente manera

$$\chi_{TC} = \chi_{TC0} + \chi_{TC1} \cos(\omega_{OT}t) \quad (3.1)$$

$$\dot{\chi}_{TC} = -\chi_{TC1}\omega_{OT} \sin(\omega_{OT}t) \quad (3.2)$$

$$y_{TC} = 0 \quad (3.3)$$

$$\dot{y}_{TC} = 0 \quad (3.4)$$

donde χ_{TC0} es la posición alrededor del cual el centro de la herramienta oscila y χ_{TC1} es la amplitud de la oscilación. Se considero analizar el desplazamiento de la herramienta en un periodo T , para esto, basta con sustituir las Ecs. (3.1), (3.2), (3.3) y (3.4) dentro de las Ecs. (2.1), (2.2) y (2.3).

**TORCA SOBRE UNA HERRAMIENTA OSCILANDO ALREDEDOR DEL EJE
DE GIRO DEL VIDRIO**
3.3 ANÁLISIS DE LA COMPONENTE τ_x

Para calcular las gráficas de las componentes de la torca aplicada a una herramienta dinámica se modificó el algoritmo ingresando las Ecs. (3.1) y (3.2) dentro de un mismo ciclo ya que ambas ecuaciones dependen del tiempo. En este ciclo se tomó un intervalo de $(0, T)$, con un incremento de paso de 0.01. La velocidad de oscilación se tomó de la maquina pulidora del Taller de Pruebas Ópticas de la FCFM contando el número de oscilaciones, obteniendo un total de 31 oscilaciones por minuto, por ende se definió $\omega_{OT} = \frac{31}{30}\pi$ y por consiguiente

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{OT}} \quad (3.5)$$

Los resultados de este nuevo algoritmo se pueden ver en las Fig. (3.1), (3.3) y (3.5) que muestran las gráficas de $\tau_x = \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$, $\tau_y = \tau_y(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ y $\tau_z = \tau_z(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ respectivamente.

3.3. ANÁLISIS DE LA COMPONENTE τ_x

En las Fig. (3.1) se muestra la gráfica calculada de $\tau_x = \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ donde se puede apreciar que da la apariencia de ser un plano inclinado. Para confirmar esta sospecha fue calculada la gráfica de $\tau_x = \tau_x(\chi_{TC}(t))$ que se muestra en la Fig. (3.2) y para varios valores de $\delta\omega$, donde se muestra que se obtiene la misma gráfica de τ_x vs χ_{TC} para cualquier valor seleccionado de $\delta\omega$, además se muestra un comportamiento lineal que depende de χ_{TC} . Se dejará para el siguiente capítulo una comparación de las gráfica τ_x vs χ_{TC} para el caso estático y el caso dinámico.

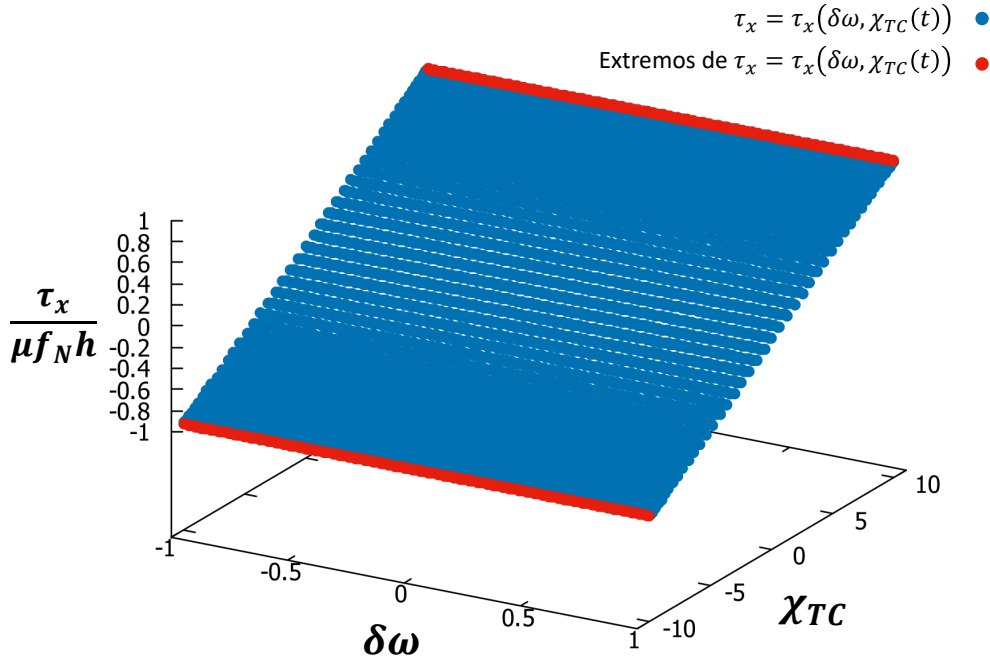


Figura 3.1: Gráfica de $\frac{\tau_x}{\mu f_N h} = \frac{\tau_x}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ cuando la herramienta realiza un movimiento armónico simple sobre un vidrio a lo largo del eje X_G .

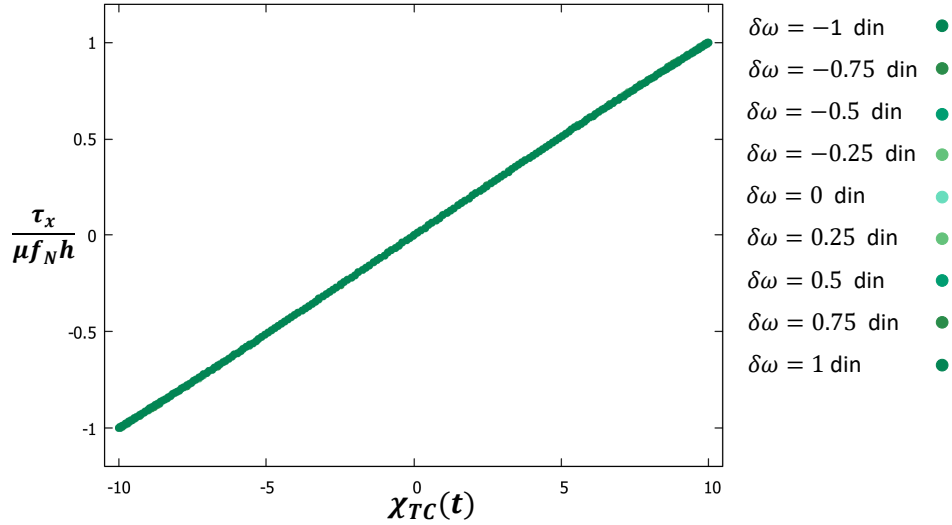


Figura 3.2: Gráfica de $\frac{\tau_x}{\mu f_N h} = \frac{\tau_x}{\mu f_N h}(\chi_{TC}(t))$ con herramienta dinámica a lo largo del eje X_G con coordenadas $(\chi_{TC}(t), 0)$ y para algunos valores de $\delta\omega$.

3.4. ANÁLISIS DE LA COMPONENTE τ_y

En las Fig. (3.3) se muestra la gráfica de $\tau_y = \tau_y(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ que da la apariencia de un cilindro elipsoidal, además se puede apreciar que para cada $\chi_{TC}(t)$ existen dos valores de τ_y esto se debe a que se considera el movimiento de la herramienta en un periodo T, es decir, el movimiento de ida y vuelta de un extremo a otro, además se puede apreciar que $\delta\omega$ parece no alterar el valor de τ_y . Para confirmar que se tiene la apariencia de una elipse fue calculada la gráfica de $\tau_y = \tau_y(\chi_{TC}(t))$ que se puede ver en la Fig. (3.4) donde se puede apreciar que se tiene la misma gráfica de τ_y v.s χ_{TC} para los valores de $\delta\omega$ seleccionados. Se observa que cuando la herramienta se desplaza de $-\chi_{TC}$ a $+\chi_{TC}$ los valores de τ_y son positivos, mientras que cuando la herramienta se mueve de $+\chi_{TC}$ a $-\chi_{TC}$ se obtiene valores negativos. El que la componente τ_y sea diferente de cero surge la existencia de la velocidad de oscilación ω_{OT} ya que cuando la herramienta se desplaza dentro del vidrio la fuerza de arrastre que existe entre el pulidor, las superficies del vidrio y la herramienta produce un efecto que tiende a hacer girar a la herramienta sobre el eje Y_T , sin embargo esto no sucede debido al brazo mecánico de la herramienta de pulido.

TORCA SOBRE UNA HERRAMIENTA OSCILANDO ALREDEDOR DEL EJE
DE GIRO DEL VIDRIO
3.4 ANÁLISIS DE LA COMPONENTE τ_y

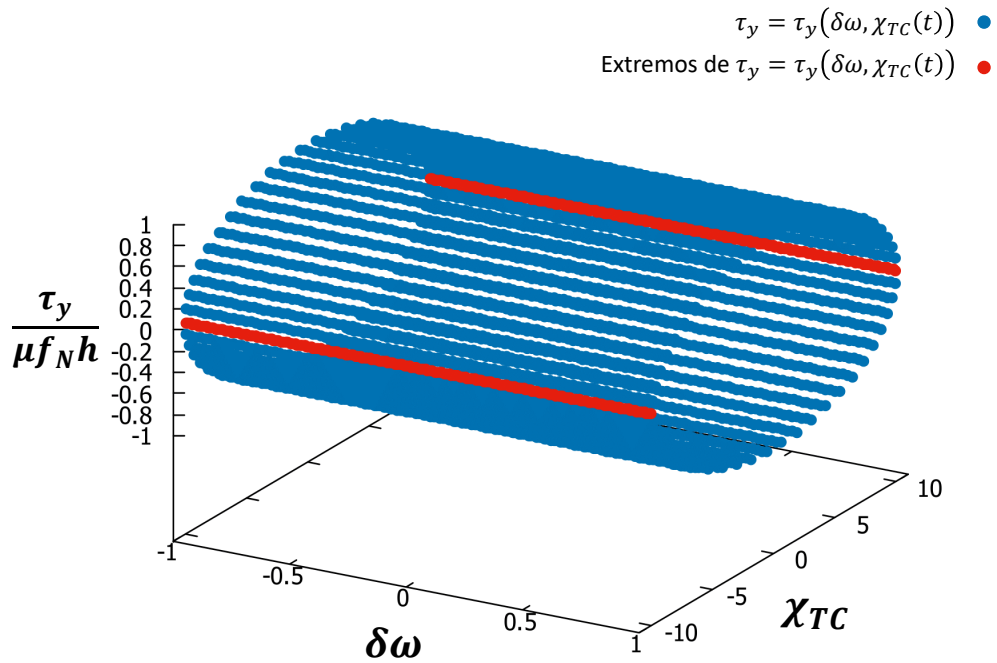


Figura 3.3: Gráfica de $\frac{\tau_y}{\mu f_N h} = \frac{\tau_y}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ cuando la herramienta realiza un movimiento armónico simple sobre todo el vidrio a lo largo del eje X_G , en este caso τ_y contribuye al movimiento de la herramienta.

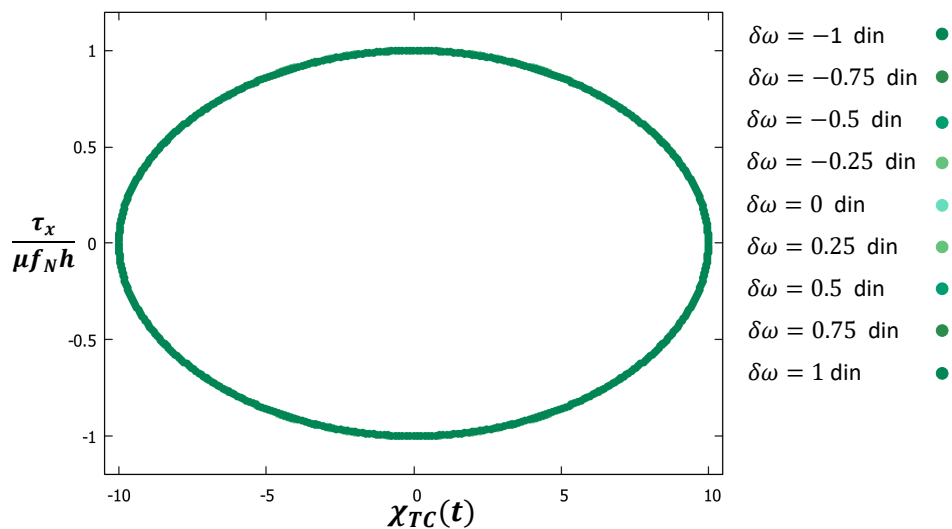


Figura 3.4: Conjunto de gráficas de $\frac{\tau_y}{\mu f_N h} = \frac{\tau_y}{\mu f_N h}(\chi_{TC}(t))$ para diferentes valores de $\delta\omega$ a lo largo del eje X_G con coordenadas $(\chi_{TC}(t), 0)$. Se puede observar que el valor τ_y no se ve afectado por los valores de $\delta\omega$.

3.5. ANÁLISIS DE LA COMPONENTE τ_z

En la Fig. (3.5) se muestra la gráfica de $\tau_z = \tau_z(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ donde se puede apreciar que da la apariencia de ser un plano en el que se observa una relación lineal entre τ_z y $\delta\omega$, para confirmar esto fue calculada la gráfica de $\tau_z = \tau_z(\delta\omega)$ que se puede ver en la Fig. (3.6), donde se muestra que se obtiene la misma gráfica de τ_z vs $\delta\omega$ para los valores de χ_{TC} seleccionados. Si se observa el eje $\tau_z/(\mu f_N)$ se observa que al tener una herramienta que oscila sobre todo el vidrio la componente τ_z es pequeña en comparación de las componentes τ_x y τ_y , por lo que se puede decir que el valor de $\delta\omega$ no altera el valor de forma abrupta, esto se puede ver en el siguiente capítulo.

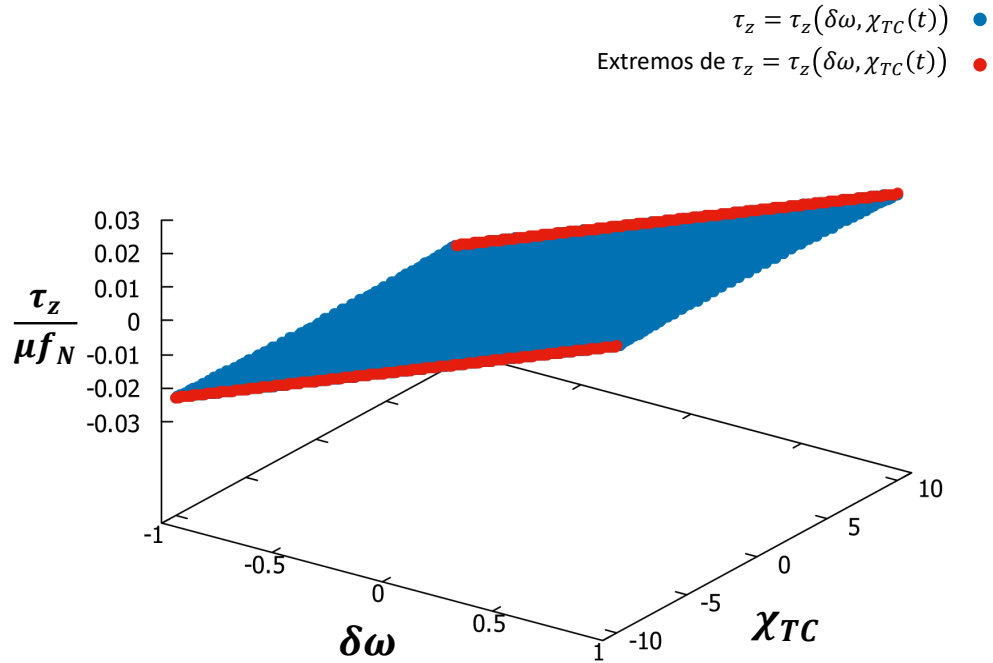


Figura 3.5: Gráficas de $\frac{\tau_z}{\mu f_N} = \frac{\tau_z}{\mu f_N}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ con herramienta realizando un movimiento armónico simple a lo largo del eje X_G , donde se puede observar que τ_z tiene un comportamiento lineal al igual que τ_x .

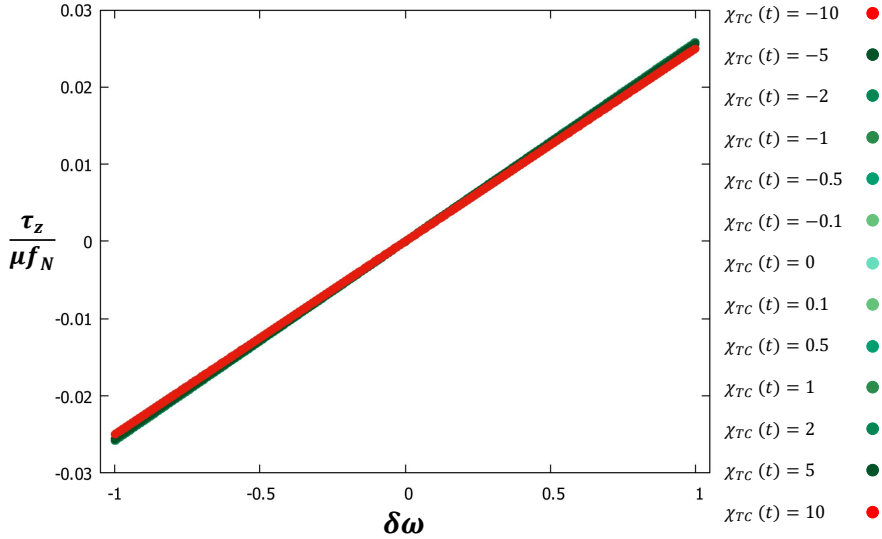


Figura 3.6: Conjunto de gráfica de $\frac{\tau_z}{\mu f_N} = \frac{\tau_z}{\mu f_N}(\delta\omega)$ con herramienta dinámica a lo largo del eje X_G con coordenadas $(\chi_{TC}(t), 0)$ y para algunos valores de $\chi_{TC}(t)$.

3.6. CONCLUSIONES

Finalmente, para el caso de herramienta dinámica se observó que el movimiento lo rigen las tres componentes de la torca, este hecho implica que la herramienta experimenta un movimiento que tiende a girar sobre los ejes X_T y Y_T , sin embargo la herramienta no realiza esto porque el brazo mecánico obliga a que la herramienta esté en contacto con el vidrio, así la existencia de las 3 componentes de la torca indican que cuando la herramienta se desplaza sobre al vidrio también vibra.

Además, se pudo observar que cuando la herramienta oscila sobre todo el vidrio con una velocidad $\omega_{OT} = \frac{31}{30}\pi$, las componentes τ_x y τ_y parecen no ser alteradas por los valores de $\delta\omega$ esto implica que para estas componentes sólo dependen de la posición de la herramienta, mientras que para la componente τ_z se observó una dependencia lineal de $\delta\omega$. En el siguiente capítulo se realizará una comparación de los resultados reproducidos en el capítulo 2 con los resultados obtenidos en este capítulo.

Capítulo 4

COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE HERRAMIENTA ESTÁTICA Y DINÁMICA

4.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se calcularon de forma numérica las gráficas de las componentes de la torca aplicada a una herramienta que realiza un movimiento armónico simple sobre un vidrio. En este capítulo se compararán los resultados reproducidos en el capítulo 2 (herramienta estática) y los resultados obtenidos en el capítulo 3 (herramienta dinámica), esto se hará superponiendo las gráficas del caso estático y dinámico de cada una de las componentes .

4.2. COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE LA COMPONENTE τ_x

Como vimos en el capítulo anterior para los valores seleccionados de $\delta\omega$ y χ_{TC} la gráfica de $\tau_x = \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ aparenta ser un plano y para la gráfica de τ_x v.s χ_{TC} resulta ser una recta (casi) única. En la Fig. (4.1) se puede ver el conjunto de gráficas de $\tau_x = \tau_x(\chi_{TC})$ para los casos de herramienta estática y dinámica. Esta superposición de gráficas permite observar que para el caso de herramienta dinámica la componente τ_x no tiene un comportamiento asintótico, el valor de τ_x es invariante para cualquier valor de $\delta\omega$ y que su valor sólo se ve alterado cuando la herramienta se desplaza sobre el vidrio. En la Fig. (4.2) se puede ver la comparación de las gráficas de $\tau_x = \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC})$ para los casos estático (azul) y dinámico (rojo), donde se puede ver que en los extremos de χ_{TC} las gráficas presentan el mismo valor para cualquier valor de $\delta\omega$.

COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE HERRAMIENTA ESTÁTICA Y DINÁMICA

4.2 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE LA COMPONENTE τ_x

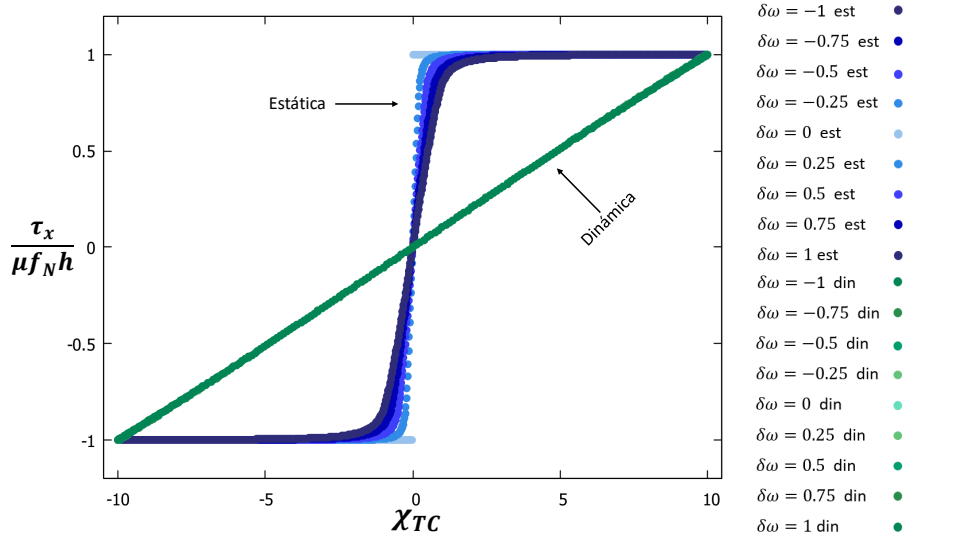


Figura 4.1: Comparación de las gráficas de $\frac{\tau_x}{\mu f_N h} = \frac{\tau_x}{\mu f_N h}(\chi TC)$ de una herramienta estática y una dinámica para algunos valores de $\delta\omega$. Para el caso estático τ_x presenta un comportamiento asintótico mientras que para el caso dinámico τ_x presenta un comportamiento lineal.

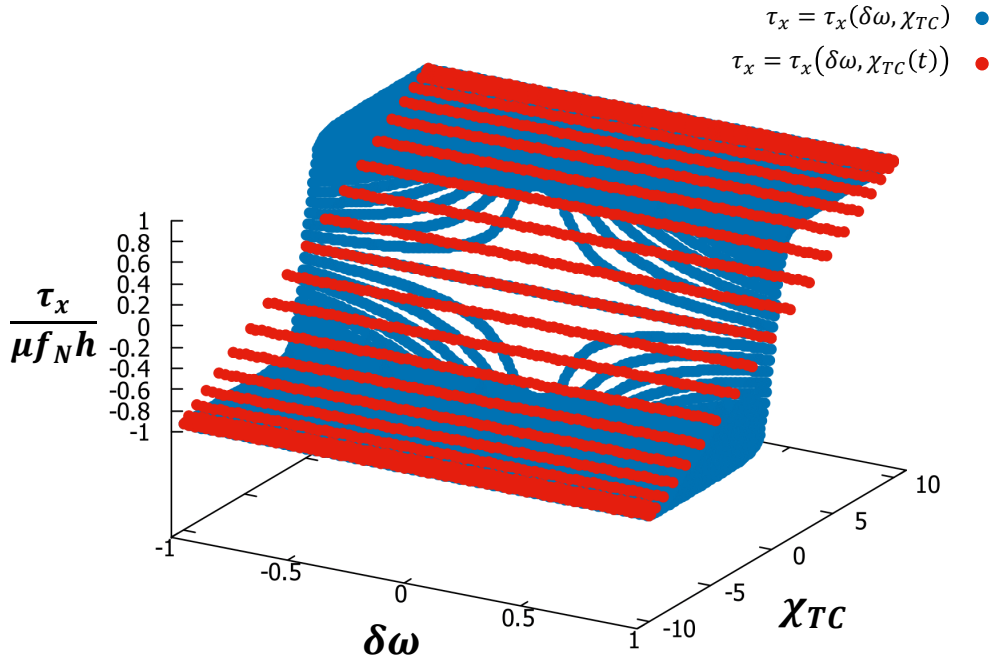


Figura 4.2: Comparación de las gráficas de $\frac{\tau_x}{\mu f_N h} = \frac{\tau_x}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi TC)$ de una herramienta estática y una dinámica. Para el caso estático τ_x presenta un comportamiento asintótico mientras que para el caso dinámico τ_x presenta un comportamiento lineal para toda $\delta\omega$.

4.3. COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE LA COMPONENTE τ_y

En el capítulo anterior se pudo ver que $\tau_y = \tau_y(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ daba la apariencia de ser un cilindro elipsoidal y para la gráfica de τ_y v.s χ_{TC} se obtuvo la misma elipse para los valores de $\delta\omega$ seleccionados, la Fig. (4.3) muestra el conjunto de gráficas de $\tau_y = \tau_y(\chi_{TC})$ para los casos de herramienta estática y dinámica, se puede observar que para el caso de herramienta estática τ_y es una recta que permanece en cero, mientras que para el caso de herramienta dinámica τ_y es diferente de cero, alcanza sus valores máximos y mínimos cuando el centro de la herramienta coincide con el centro del vidrio y conforme el centro de la herramienta se desplaza a los extremos del vidrio el valor de τ_y disminuye hasta llegar a cero en los extremos.

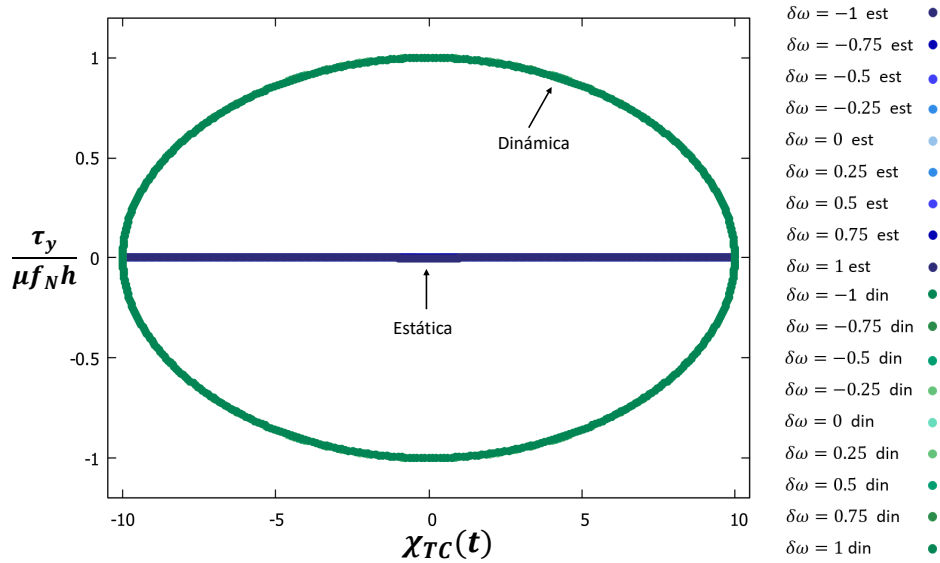


Figura 4.3: Comparación de las gráficas de $\frac{\tau_y}{\mu f_N h} = \frac{\tau_y}{\mu f_N h}(\chi_{TC})$ de una herramienta estática y una dinámica para algunos valores de $\delta\omega$. Para el caso estático τ_y es cero en cualquier lugar que se coloque dentro del vidrio, mientras que para el caso dinámico τ_y presenta el comportamiento de una elipse.

En la Fig. (4.4) se puede ver la comparación de las gráficas de $\tau_y = \tau_y(\delta\omega, \chi_{TC})$ para los casos estático (azul) y dinámico (rojo), donde se puede ver que en los extremos de χ_{TC} las gráficas coinciden para cualquier valor de $\delta\omega$.

**COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE HERRAMIENTA ESTÁTICA Y
DINÁMICA**

4.4 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE LA COMPONENTE τ_z

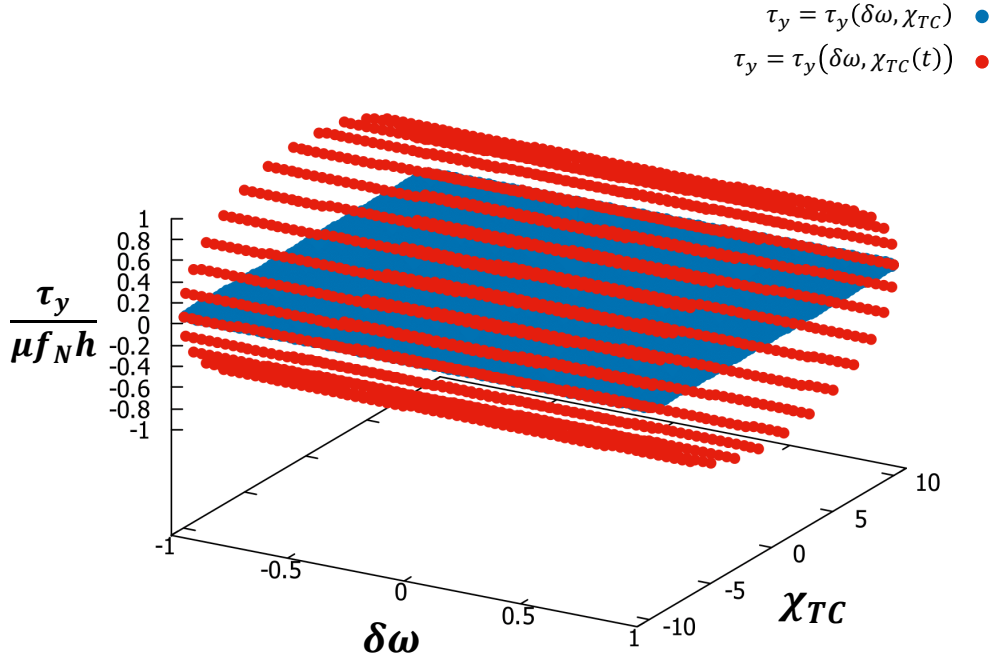


Figura 4.4: Comparación de las gráficas de $\frac{\tau_y}{\mu f_N h} = \frac{\tau_y}{\mu f_N}(\delta\omega, \chi_{TC})$ de una herramienta estática y una dinámica, se observa que para el caso estático τ_y da la apariencia de ser un plano y en el caso dinámico τ_y es un cilindro elipsoidal.

4.4. COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE LA COMPONENTE τ_z

En la Fig. (4.5) se puede ver el conjunto de gráficas de $\tau_z = \tau_z(\delta\omega)$ para los casos de herramienta estática y dinámica donde se observa que cuando $\delta\omega = 0$ se tiene que $\tau_z = 0$ para todas las curvas, herramienta estática y dinámica. Se observa que en cuanto a la escala del eje $\tau_z/(\mu f_N)$ el conjunto de gráficas del caso dinámico es menor en comparación con el caso estático de lo cual se puede interpretar como una variación insignificante, siendo así que la variación de $\delta\omega$ en el caso dinámico no altera a la componente τ_z de forma abrupta. Debido a que no es sencillo apreciar una distinción de los casos de herramienta estática y dinámica, se usa la Fig. (4.6) que muestra la gráfica de $\tau_z = \tau_z(\delta\omega, \chi_{TC})$ para los casos estático (azul) y dinámico (rojo) donde se observa que los valores de las gráficas coinciden en los extremos de χ_{TC} .

COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE HERRAMIENTA ESTÁTICA Y DINÁMICA

4.4 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE LA COMPONENTE τ_z

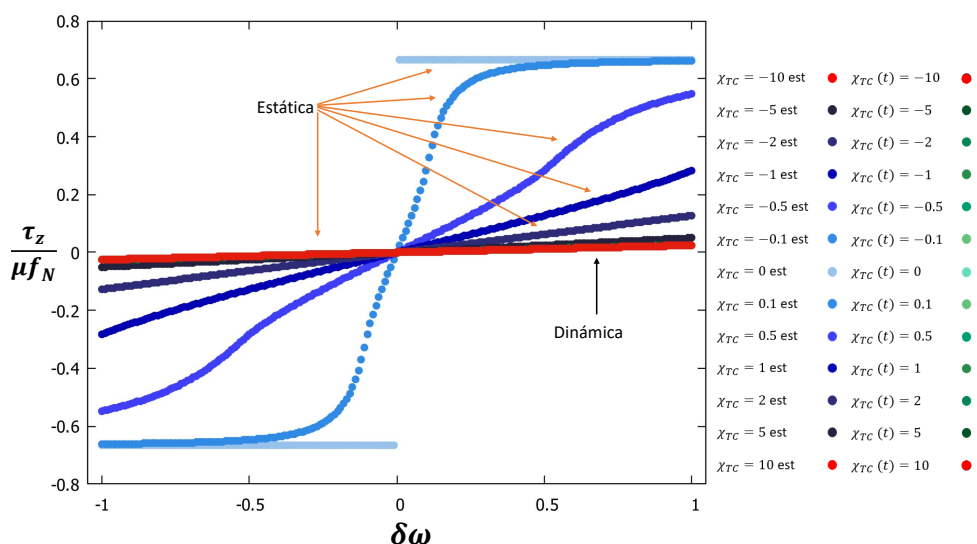


Figura 4.5: Comparación de las gráficas de $\frac{\tau_x}{\mu f_N} = \frac{\tau_x}{\mu f_N}(\chi_{TC})$ de una herramienta estática y una dinámica para algunos valores de χ_{TC} .

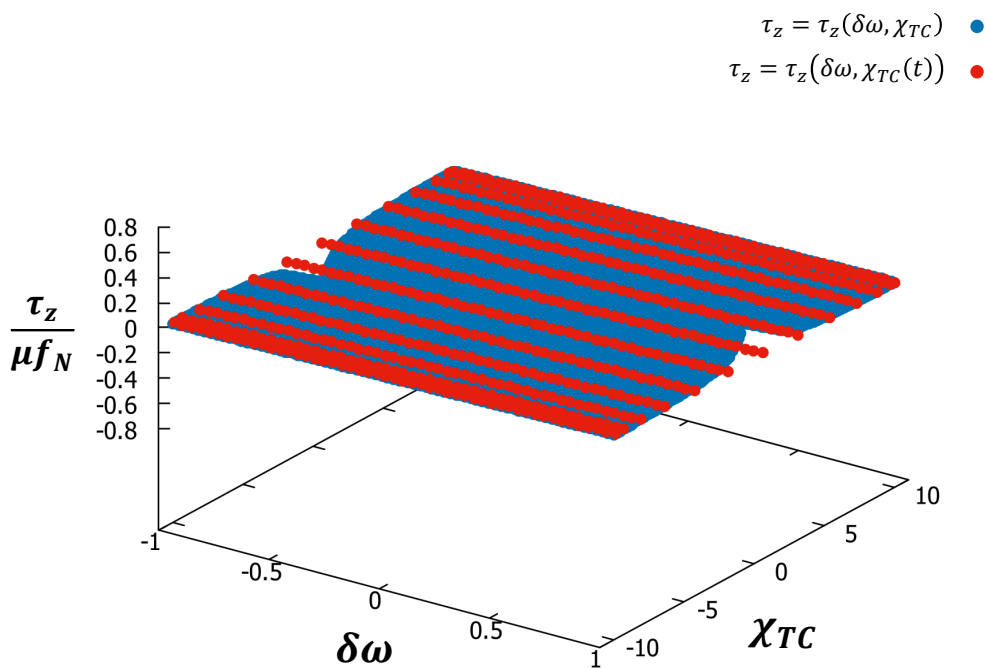


Figura 4.6: Comparación de las gráficas de $\frac{\tau_z}{\mu f_N h} = \frac{\tau_z}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC})$ de una herramienta estática y una dinámica. Para el caso estático la gráfica de τ_z presenta una caída y crecimiento de valores en $\chi_{TC} = 0$, la caída de los valores corresponden a $\delta\omega < 0$, y el crecimiento de valores corresponden a $\delta\omega \geq 0$, mientras que para el caso dinámico la gráfica de τ_z es un plano para toda $\delta\omega$ y χ_{TC} .

4.5. CONCLUSIONES

Como se pudo ver en las Fig. (4.2), (4.4) y (4.6) en los extremos del vidrio, es decir, cuando $\chi_{TC} = 10$ o $\chi_{TC} = -10$ los valores de las gráficas coinciden, y esto es porque en los extremos la velocidad de la herramienta es cero, como se mencionó en el capítulo 3. Para el caso dinámico la componente τ_x toma valores que son independientes de $\delta\omega$ para cada χ_{TC} , mientras que en el caso estático solo sucede cuando $\chi_{TC} > R_T$. La componente τ_y es invariante ante los valores de $\delta\omega$, su valor disminuye hasta cero cuando la herramienta se encuentra en los extremos del vidrio. De la Fig. (4.6) se puede ver que para el caso dinámico, τ_z da la apariencia de ser un plano para toda $\delta\omega$ y en cualquier posición del vidrio, mientras que para el caso estático τ_z comienza a tomar la forma de un plano solo cuando $\chi_{TC} > R_T$.

El hecho de que en los extremos de oscilación la velocidad de la herramienta sea cero implica que si se reduce la amplitud de oscilación y se hace oscilar a la herramienta fuera del eje de giro del vidrio las gráficas obtenidas deben coincidir con el caso estático solo en los extremos de oscilación, para esto se analizará en el siguiente capítulo a una herramienta oscilando fuera del eje del vidrio con una amplitud menor a la usada en los capítulos 2 y 3.

5.2. OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 0$

En las Fig. (5.2), (5.3) y (5.4) se pueden ver las gráficas de $\tau_x = \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$, $\tau_y = \tau_y(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ y $\tau_z = \tau_z(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ cuando la herramienta oscila alrededor del centro del vidrio. En la Fig. (5.2) se muestra la gráfica de $\tau_x = \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ donde se observa un crecimiento lineal conforme el centro de la herramienta se aleja del centro del vidrio, y las curvas que se presentan en los extremos son más pronunciadas cuando $\delta\omega$ se acerca a cero.

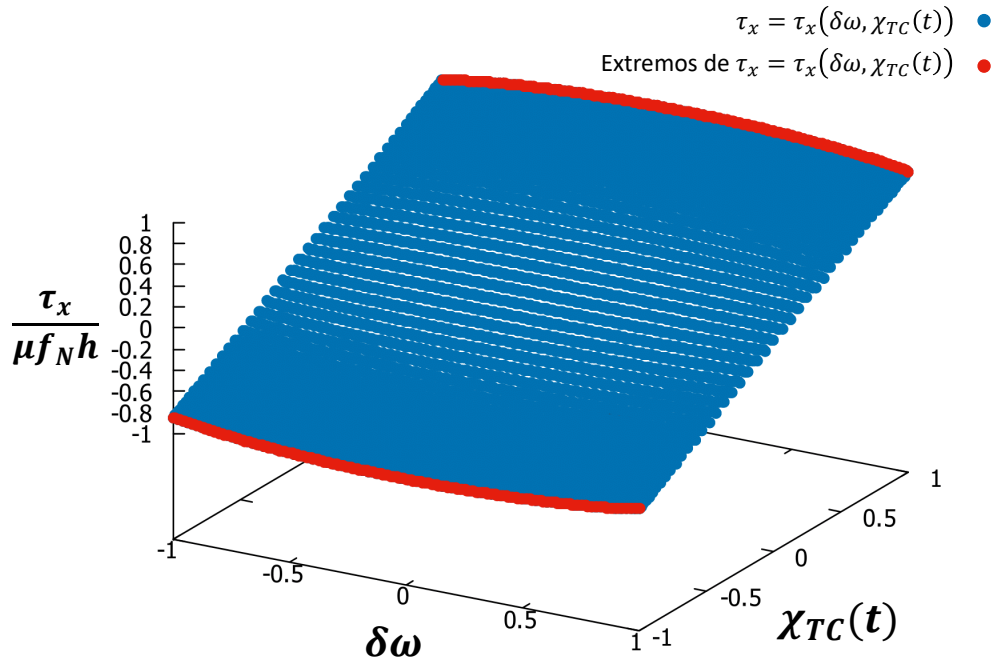


Figura 5.2: Gráfica de $\frac{\tau_x}{\mu f_N h} = \frac{\tau_x}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ cuando el centro de la herramienta oscila alrededor del punto $\chi_{TC0} = 0$ con una amplitud $\chi_{TC1} = 1$.

La Fig. (5.3) se muestra la gráfica de $\tau_y = \tau_y(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ que da la apariencia de ser una elipsoide, para los valores de $\delta\omega$ cercanos a cero la gráfica presenta un ensanchamiento y para valores lejanos a cero la gráfica parece tender a cerrarse. Por otra parte se puede observar que τ_y disminuye su valor cuando el centro de la herramienta se aleja del centro del vidrio.

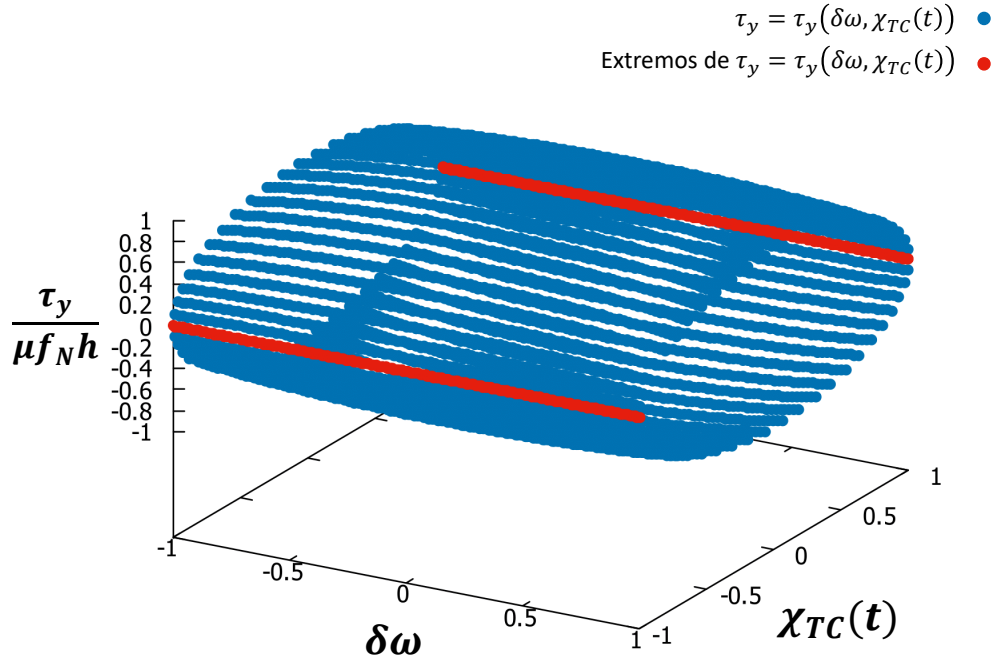


Figura 5.3: Gráfica de $\frac{\tau_y}{\mu f_N h} = \frac{\tau_y}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ cuando el centro de la herramienta oscila alrededor del punto $\chi_{TC0} = 0$ con una amplitud $\chi_{TC1} = 1$.

En la Fig. (5.4) se muestra la gráfica de $\tau_z = \tau_z(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ que aparenta ser un plano y en los extremos de $\delta\omega$ se puede apreciar que la gráfica se dobla. La escala sobre el eje $\tau_z/(\mu f_n)$ muestra una amplitud mayor a que cuando la herramienta oscila sobre todo el vidrio debido a que cuando la herramienta oscila sobre el centro del vidrio se ejerce una torca mayor para hacer girar a la herramienta, esto implica que cuanto menor sea la amplitud de oscilación alrededor del centro del vidrio la torca restauradora será cada vez mayor.

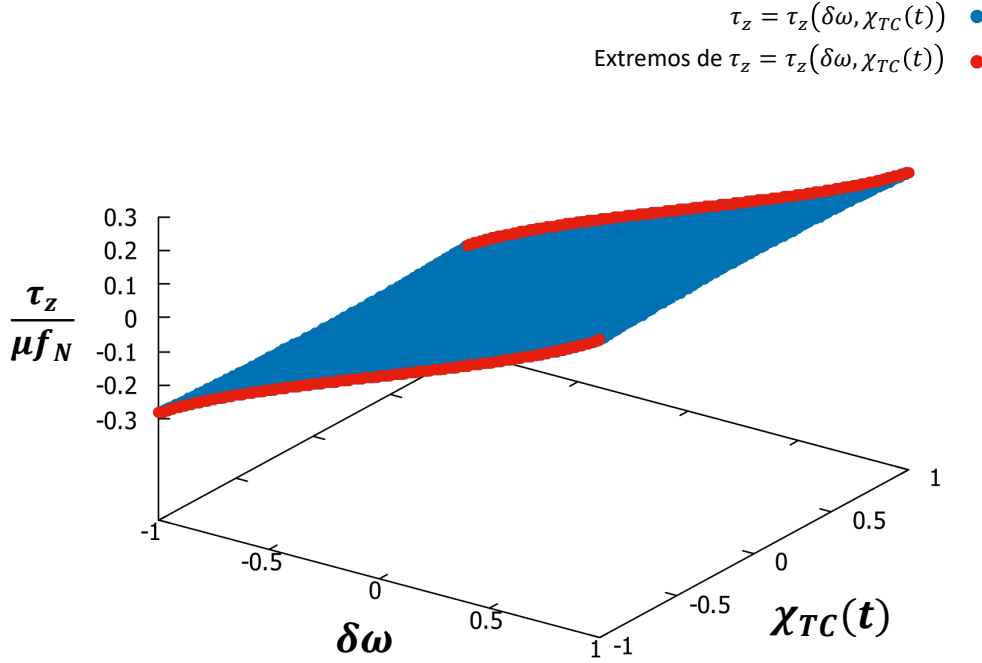


Figura 5.4: Gráfica de $\frac{\tau_z}{\mu f_N h} = \frac{\tau_z}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ cuando el centro de la herramienta oscila alrededor del punto $\chi_{TC0} = 0$ con una amplitud $\chi_{TC1} = 1$.

5.3. OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 4$

En las Fig. (5.5), (5.6) y (5.7) se pueden ver las gráficas de $\tau_x = \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$, $\tau_y = \tau_y(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ y $\tau_z = \tau_z(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ cuando el centro de la herramienta oscila alrededor de $\chi_{TC0} = 4$. En la Fig. (5.5) se muestra la gráfica de $\tau_x = \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ que tiene la apariencia de un silla de montar y se observa que el valor mínimo se encuentra en el centro de la oscilación, es decir, en $\chi_{TC} = 4$, y cuando la herramienta se aleja del centro de oscilación comienza a mostrarse un levantamiento, además los arcos que aparecen en la gráfica de τ_x aumentan su amplitud conforme $\delta\omega \rightarrow 0$ mostrando una simetría de valores respecto de $\delta\omega$. A pesar de que τ_x aparenta ser una silla de montar se debe prestar atención en la escala del eje $\tau_x/(\mu f_N h)$, dado que es un intervalo pequeño, es decir, los valores de la gráfica se mantiene alrededor de 0.96, esto es por que si la escala se cambiara en el intervalo (-1,1) la gráfica tendría la apariencia de un plano, (esto se podrá ver en el siguiente capítulo).

En la Fig. (5.6) se muestra la gráfica de $\tau_y = \tau_y(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ que muestra que al hacer oscilar a la herramienta alrededor de $\chi_{TC0} = 4$ la gráfica conserva la apariencia de un cilindro elipsoidal, se observa que la escala sobre el eje $\tau_y/(\mu f_N h)$ ha reducido.

En la Fig. (5.7) se muestra la gráfica de $\tau_z = \tau_z(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$, donde se observa que también conserva la apariencia de ser un plano, pero la escala del eje $\tau_z/(\mu f_N)$ se reduce, entonces la torca restauradora τ_z es ahora más pequeña que el caso anterior, sin embargo sigue siendo mayor al caso de una herramienta que oscila sobre todo el vidrio.

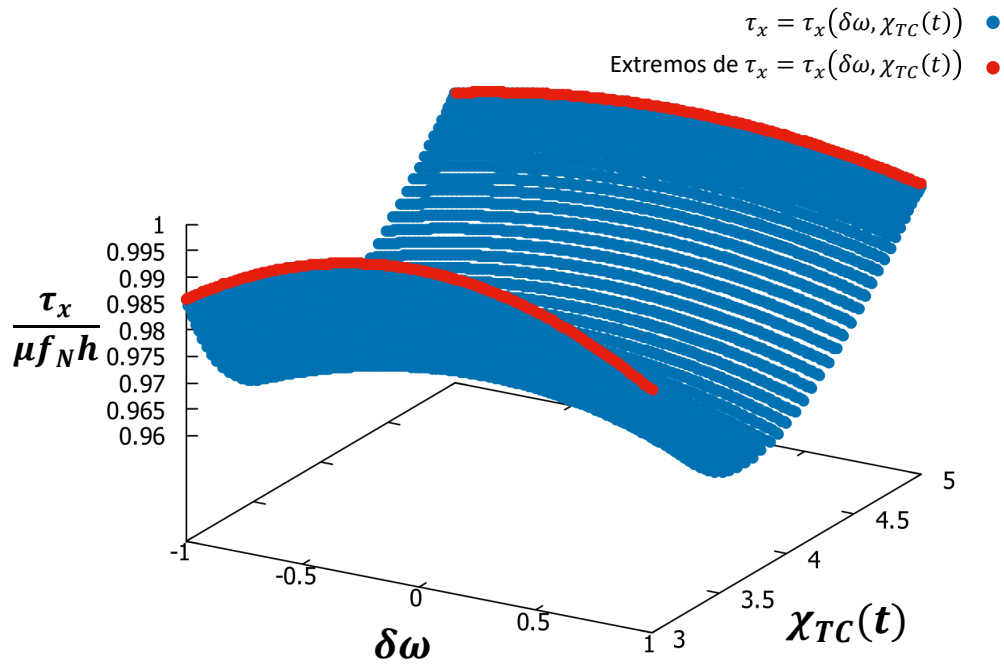


Figura 5.5: Gráfica de $\frac{\tau_x}{\mu f_N h} = \frac{\tau_x}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ cuando el centro de la herramienta oscila alrededor del punto $\chi_{TC0} = 4$ con una amplitud $\chi_{TC1} = 1$.

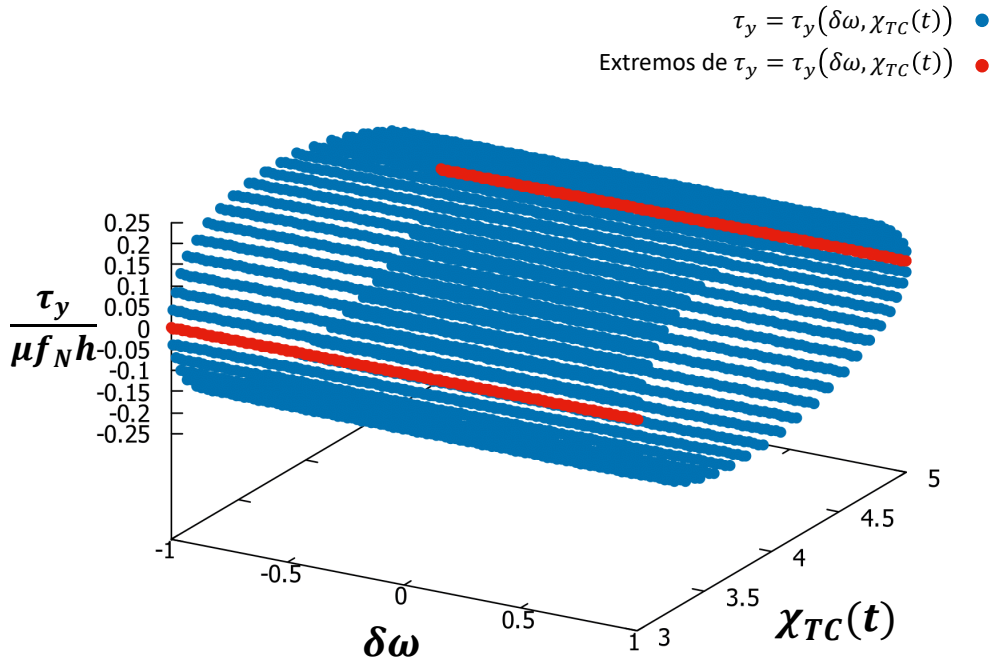


Figura 5.6: Gráfica de $\frac{\tau_y}{\mu f_N h} = \frac{\tau_y}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ cuando el centro de la herramienta oscila alrededor del punto $\chi_{TC0} = 4$ con una amplitud $\chi_{TC1} = 1$.

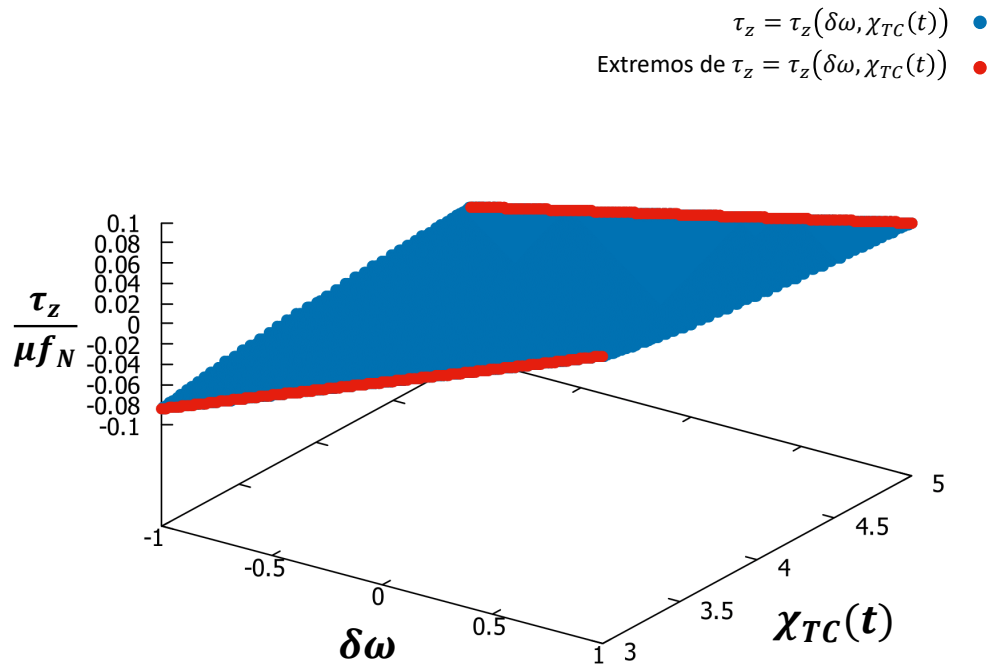


Figura 5.7: Gráfica de $\frac{\tau_z}{\mu f_N} = \frac{\tau_z}{\mu f_N}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ cuando el centro de la herramienta oscila alrededor del punto $\chi_{TC0} = 4$ con una amplitud $\chi_{TC1} = 1$.

5.4. OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 8$

En las Fig. (5.8), (5.9) y (5.10) se pueden ver las gráficas de $\tau_x = \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$, $\tau_y = \tau_y(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ y $\tau_z = \tau_z(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ cuando la herramienta oscila alrededor de $\chi_{TC0} = 8$. La Fig. (5.8) muestra la gráfica de $\tau_x = \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ donde se observa que la gráfica parece una silla de montar, pero si se presta atención a la escala del eje $\tau_x/(\mu f_N h)$ se puede ver que ha disminuido la escala, y esto debe ser así ya que al tomar como referencia la gráfica de la Fig. (2.5) el valor de τ_x mantenerse a un valor aproximado de $\mu f_N h$.

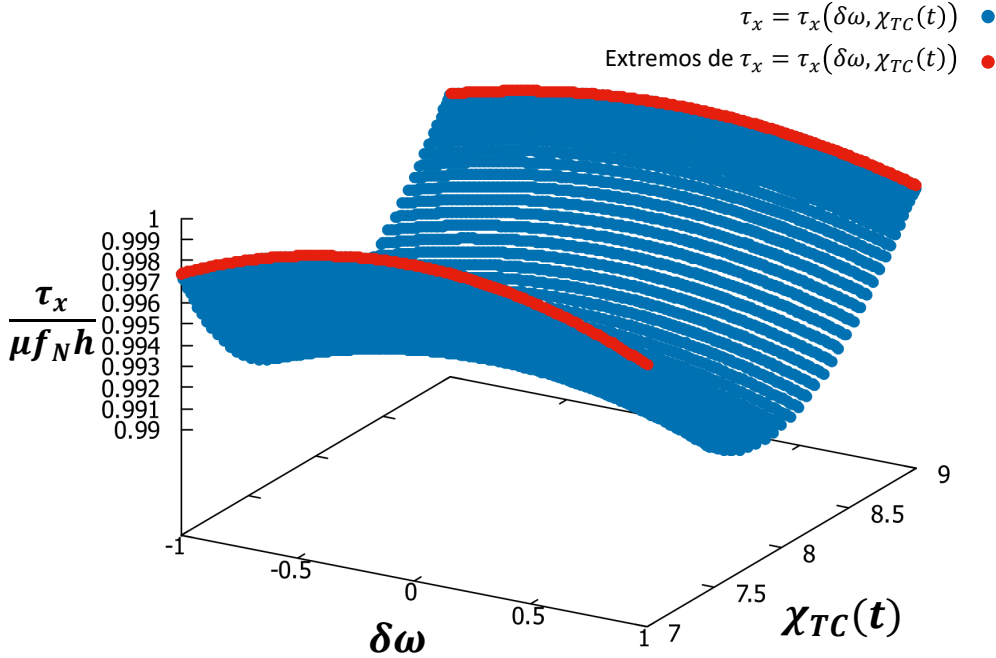


Figura 5.8: Gráfica de $\frac{\tau_x}{\mu f_N h} = \frac{\tau_x}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ cuando el centro de la herramienta oscila alrededor del punto $\chi_{TC0} = 8$ con amplitud $\chi_{TC1} = 1$.

En la Fig. (5.9) se muestra la gráfica de $\tau_y = \tau_y(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ que sigue conservando la forma de un cilindro y que los valores sobre el eje $\tau_y/(\mu f_N h)$ se han reducido, y esto debe ser así, si se regresa a la Fig. (3.3) se observa que cuando el centro de la herramienta se aleja del centro del vidrio el valor de τ_y debe disminuir, y es por esto que al hacer oscilar a la herramienta alrededor de $\chi_{TC0} = 8$ la escala del eje $\tau_y/(\mu f_N h)$ ha disminuido.

En la Fig. (5.10) se muestra la gráfica de $\tau_z = \tau_z(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ donde se observa que la escala sobre el eje $\tau_z/(\mu f_N)$ ha disminuido aun más que el caso anterior, teniendo así que la torca restauradora tiende a cero, y esto tiene que ser así porque al ver la Fig. (2.3) se observa que la torca restauradora disminuye su valor conforme se acerca a los extremos del vidrio.

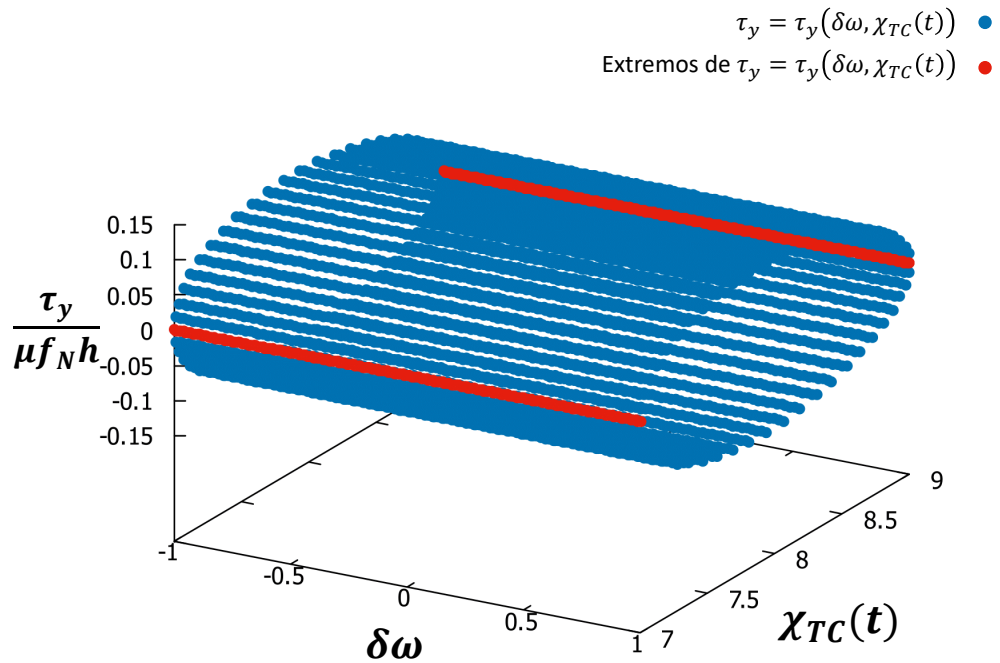


Figura 5.9: Gráfica de $\frac{\tau_y}{\mu f_N h} = \frac{\tau_y}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ cuando el centro de la herramienta oscila alrededor del punto $\chi_{TC0} = 8$ con amplitud $\chi_{TC1} = 1$.

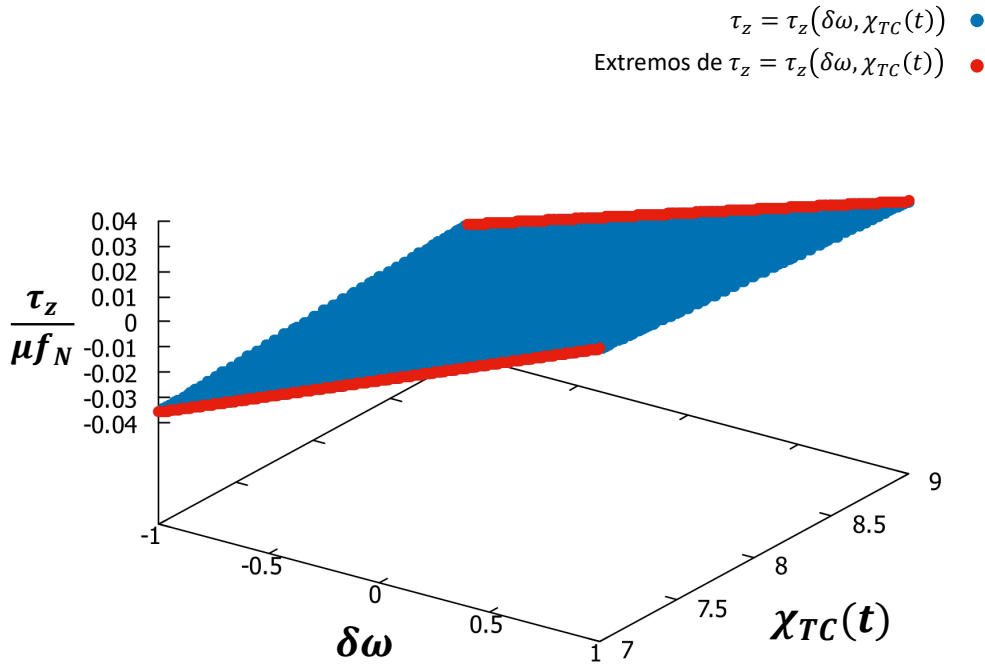


Figura 5.10: Gráfica de $\frac{\tau_z}{\mu f_N} = \frac{\tau_z}{\mu f_N}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ cuando el centro de la herramienta oscila alrededor del punto $\chi_{TC0} = 8$ con una amplitud $\chi_{TC1} = 1$.

5.5. OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 9$

En las Fig. (5.11), (5.12) y (5.13) se pueden ver las gráficas de $\tau_x = \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$, $\tau_y = \tau_y(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ y $\tau_z = \tau_z(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ cuando la herramienta oscila alrededor de $\chi_{TC0} = 9$, estas gráficas son similares al caso de cuando la herramienta oscila alrededor de $\chi_{TC0} = 8$, esto indica que al desplazar a la herramienta solo una unidad no se obtuvieron grandes diferencias, sin embargo este caso se presenta para mostrar cómo actúa la herramienta al oscilar sobre todo el vidrio por intervalos.

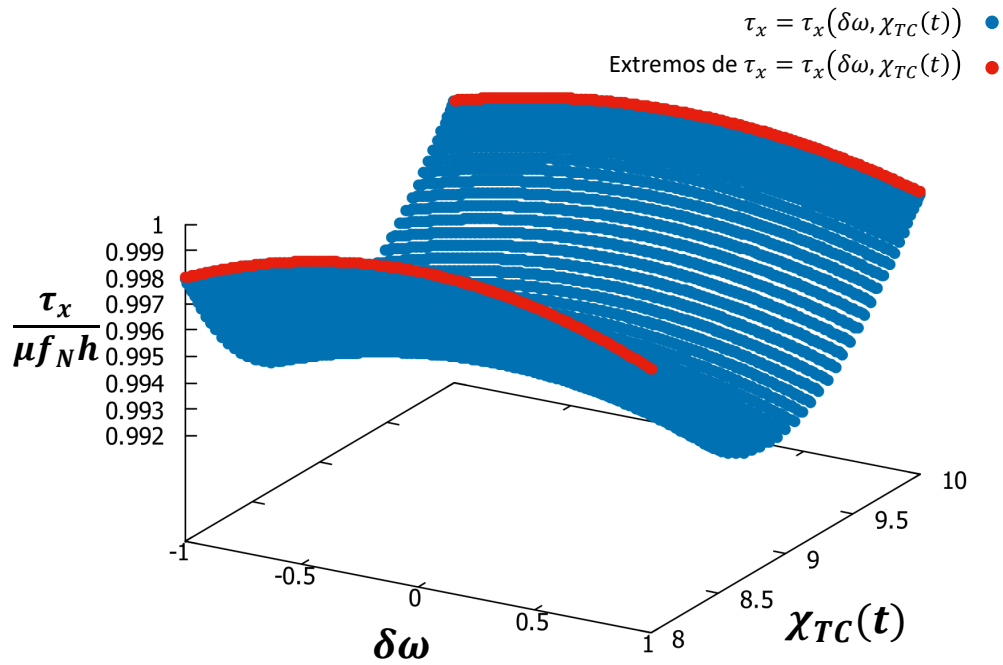


Figura 5.11: Gráfica de $\frac{\tau_x}{\mu f_N h} = \frac{\tau_x}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ cuando el centro de la herramienta oscila alrededor del punto $\chi_{TC0} = 9$ con una amplitud $\chi_{TC1} = 1$.

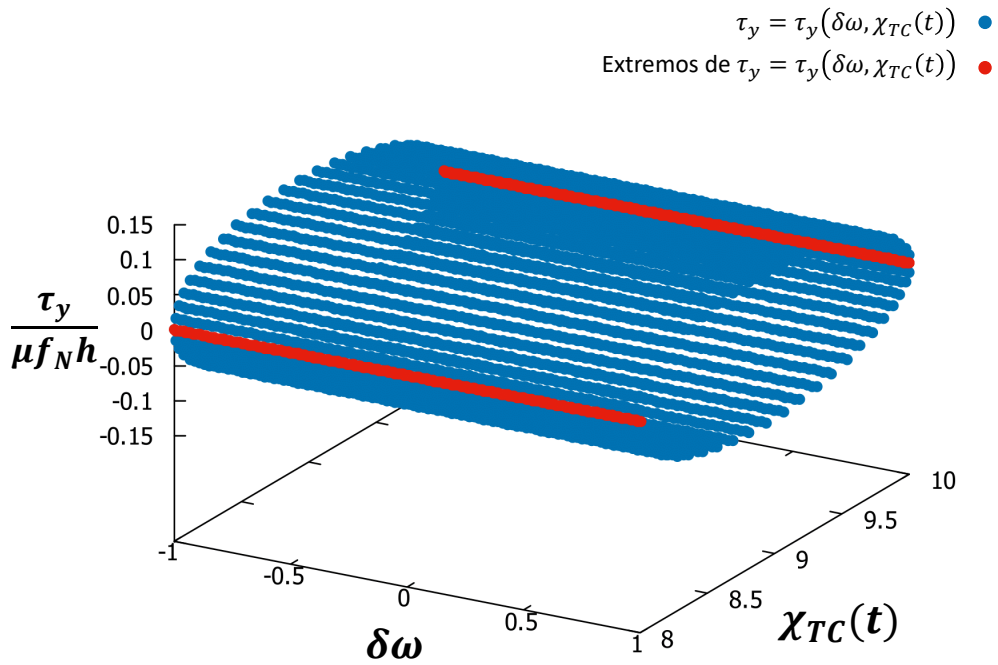


Figura 5.12: Gráfica de $\frac{\tau_y}{\mu f_N h} = \frac{\tau_y}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ cuando el centro de la herramienta oscila alrededor del punto $\chi_{TC0} = 9$ con una amplitud $\chi_{TC1} = 1$.

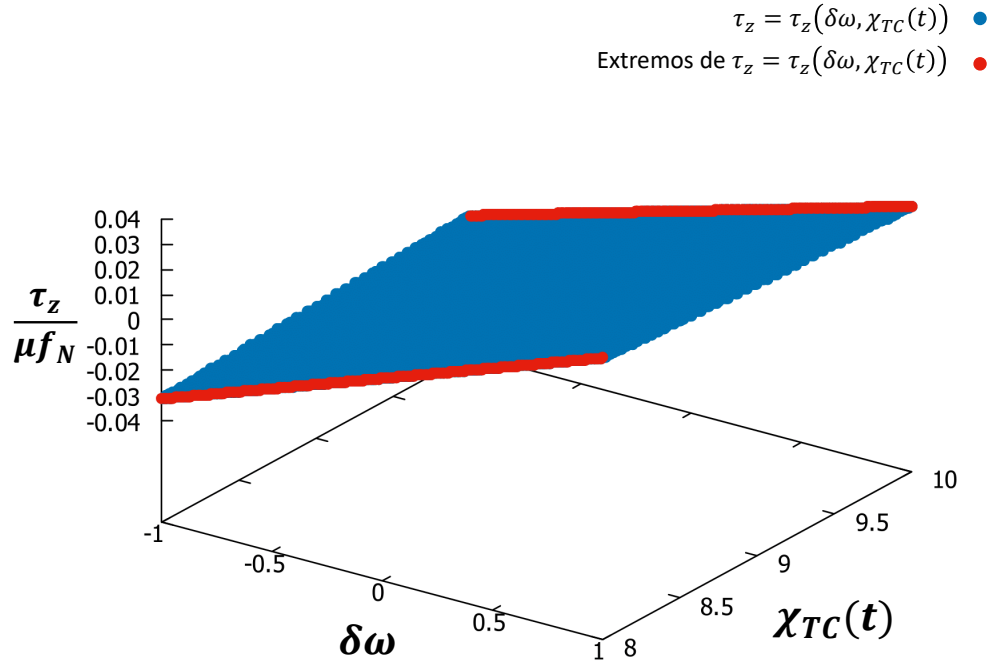


Figura 5.13: Gráfica de $\frac{\tau_z}{\mu f_N} = \frac{\tau_z}{\mu f_N}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ cuando el centro de la herramienta oscila alrededor del punto $\chi_{TC0} = 9$ con una amplitud $\chi_{TC1} = 1$.

5.6. CONCLUSIONES

Se observó que las gráficas de la componente τ_x tienden al valor de la Ec. (2.20) cuando la herramienta oscila fuera del eje de giro del vidrio, mientras que las gráficas de τ_y disminuye su valor tendiendo a cero. Las gráficas de la componente τ_z adoptan la forma de un plano inclinado, indicando que la escala en el eje $\tau_z/(\mu f_N)$ decrece conforme el centro de la herramienta se desplaza del centro del vidrio.

La oscilación de una herramienta fuera del eje de giro del vidrio, con una amplitud pequeña, provoca que las gráficas resultantes muestren patrones similares a los de una herramienta estática en ciertos intervalos, Basado en esto, se infiere que los resultados de una herramienta que oscila fuera del eje se aproximan a los de una herramienta estática y que estos coinciden en los extremos de la oscilación. Para comprobarlo, en el siguiente capítulo se realizará una comparación de los resultados de este capítulo con los del Capítulo 2.

Capítulo 6

COMPARACIÓN DE HERRAMIENTA OSCILANDO FUERA DEL EJE DEL VIDRIO CON HERRAMIENTA ESTÁTICA

6.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se calcularon las gráficas de una herramienta oscilando fuera del eje de giro del vidrio con una amplitud $\chi_{TC1} = 1$ y se observó que las gráficas de τ_x tienden al valor de la Ec. (2.20), las gráficas de τ_y tienden al valor de la Ec. (2.21) y las gráficas de τ_z tienden al valor de la Ec. (2.22). En este capítulo se realizarán las comparaciones de las gráficas calculadas en el capítulo anterior con las de capítulo 2 (herramienta estática). Comprobando así, que las gráficas de una herramienta oscilando fuera del eje de giro del vidrio se aproximan a los resultados de una herramienta estática y deben coincidir en los extremos de oscilación.

6.2. COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 0$

En el capítulo anterior se observó que la gráfica de $\tau_x = \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ presentaba curvas en los extremos cuando $\delta\omega$ se acercaba a cero y cuando la herramienta oscilaba alrededor de $\chi_{TC} = 0$, ahora se hace una comparación de la componente τ_x de los casos de herramienta estática (Fig. (2.5)) y dinámica (Fig. (5.2)) que se muestran en la Fig. (6.1) donde se observa que las gráficas coinciden en los extremos de oscilación. De esta comparación se puede interpretar que cuando la herramienta se encuentra cerca del centro del vidrio los valores de $\delta\omega$ son los que gobiernan el valor de τ_x .

En la Fig. (6.2) se muestra la comparación de las gráficas de $\tau_y = \tau_y(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ para el caso estático (Fig. (2.7)) y dinámico (Fig. (5.2)) donde se puede apreciar claramente que no hay coincidencia más que en los extremos de oscilación, que es donde la gráfica de la Fig. (5.3) tiene valor cero.

COMPARACIÓN DE HERRAMIENTA OSCILANDO FUERA DEL EJE DEL
 VIDRIO CON HERRAMIENTA ESTÁTICA
 6.2 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 0$

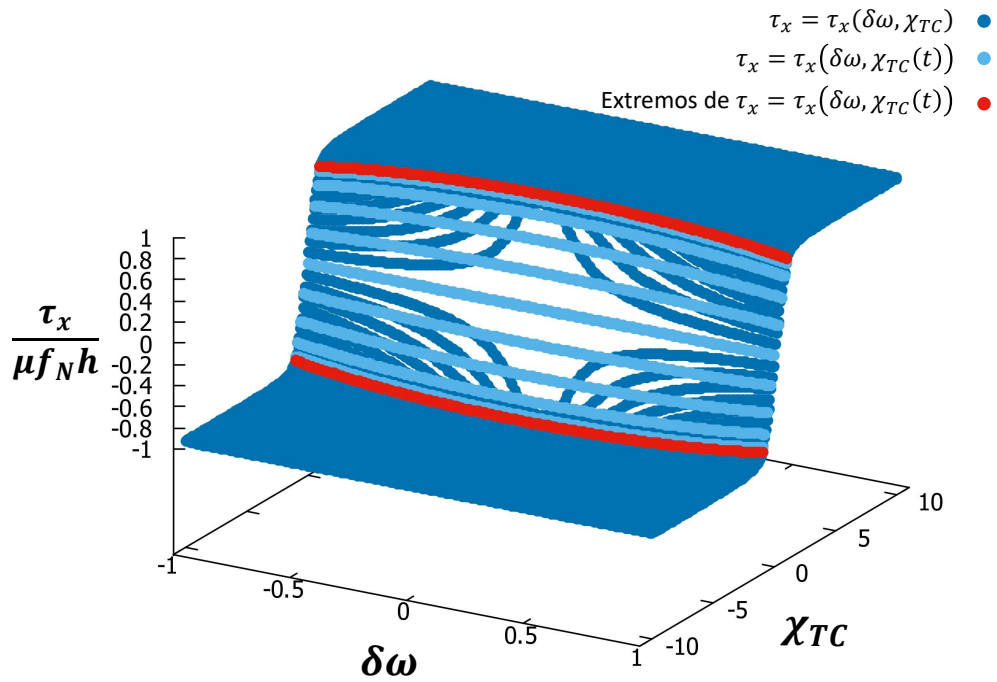


Figura 6.1: Comparación de gráficas de $\frac{\tau_x}{\mu f_N h} = \frac{\tau_x}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ de una herramienta estática con una herramienta oscilando alrededor de $\chi_{TC0} = 0$.

**COMPARACIÓN DE HERRAMIENTA OSCILANDO FUERA DEL EJE DEL
VIDRIO CON HERRAMIENTA ESTÁTICA**
6.2 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 0$

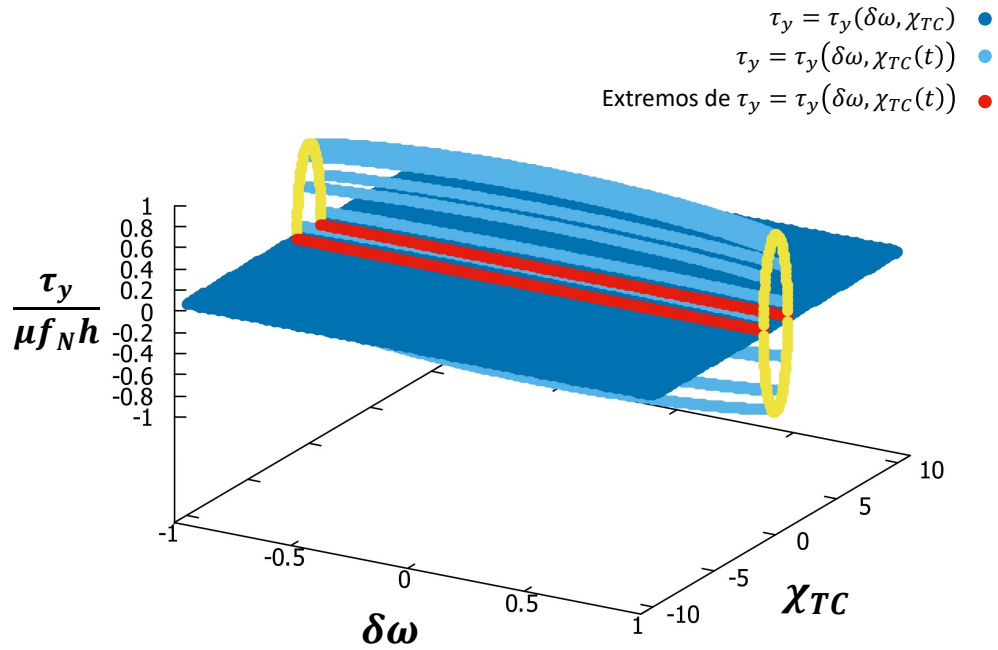


Figura 6.2: Comparación de gráficas de $\frac{\tau_y}{\mu f_N h} = \frac{\tau_y}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ de una herramienta estática con una herramienta oscilando alrededor de $\chi_{TC0} = 0$.

La Fig. (6.3) muestra la comparación de las gráficas de τ_z de herramienta estática (Fig. (2.3)) y dinámica (Fig. (5.4)) donde se observa que ambas gráficas presentan una subida de valores para valores de $\delta\omega \geq 0$, mientras que para valores $\delta\omega < 0$ se presenta una caída de valores, sin embargo en cuanto a la escala de la gráfica del caso estático y dinámico la torca restauradora de una herramienta dinámica es de menor magnitud. Continuando con la comparación se observa que las gráficas coinciden en sólo en los extremos.

**COMPARACIÓN DE HERRAMIENTA OSCILANDO FUERA DEL EJE DEL
VIDRIO CON HERRAMIENTA ESTÁTICA**
6.3 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 4$

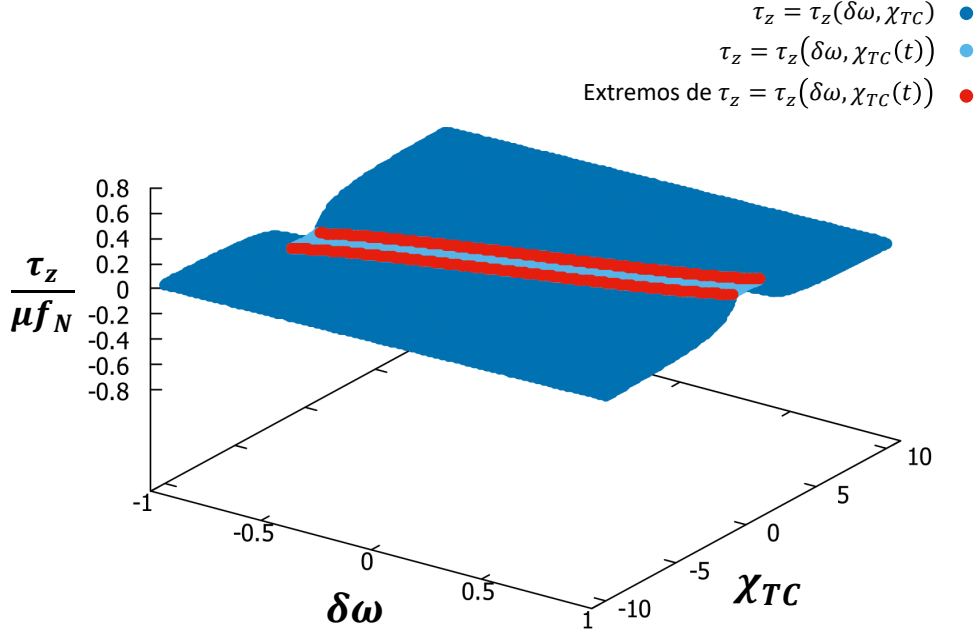


Figura 6.3: Comparación de gráficas de $\frac{\tau_z}{\mu f_N h} = \frac{\tau_z}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ de una herramienta estática con una herramienta oscilando alrededor de $\chi_{TC0} = 4$.

6.3. COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 4$

En el capítulo anterior se observó que la gráfica de $\tau_x = \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ de una herramienta oscilando alrededor de $\chi_{TC0} = 4$ daba la apariencia de una silla de montar, sin embargo los valores de la gráfica rondaban alrededor de $\tau_x/(\mu f_N h) = 0.96$ y esto debía de cumplirse dado que en los extremos de la oscilación se tenían que obtener los mismo resultados de una herramienta estática. En la Fig. (6.4) se muestra la comparación de las gráficas de $\tau_x = \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC})$ (Fig. (2.5)) y $\tau_x = \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ (Fig. (5.5)), donde se observa que efectivamente los valores de τ_x cuando la herramienta oscila alrededor de $\chi_{TC0} = 4$ tiende a $\mu f_N h$.

En el capítulo anterior se observó que $\tau_y = \tau_y(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ disminuye su escala sobre el eje $\tau_y/(\mu f_N h)$, esto debe de cumplirse dado que cuando la herramienta oscila sobre todo el vidrio el valor de τ_y disminuye conforme el centro de la herramienta se aleja del centro del vidrio. En la Fig. (6.5) se muestra la comparación de las gráficas de $\tau_y = \tau_y(\delta\omega, \chi_{TC})$ (Fig. (2.7)) y $\tau_y = \tau_y(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ (Fig. (5.6)) que muestra que ambas gráficas solo coinciden en los extremos.

En la Fig. (6.6) se muestra la comparación de las gráficas de $\tau_z = \tau_z(\delta\omega, \chi_{TC})$ (Fig. (2.3)) y $\tau_z = \tau_z(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ (Fig. (5.7)) donde se muestra que ambas gráficas aparentan coincidir sobre todos los puntos en el intervalo (3,5), sin embargo solo coinciden en los extremos de oscilación.

COMPARACIÓN DE HERRAMIENTA OSCILANDO FUERA DEL EJE DEL
VIDRIO CON HERRAMIENTA ESTÁTICA
6.3 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 4$

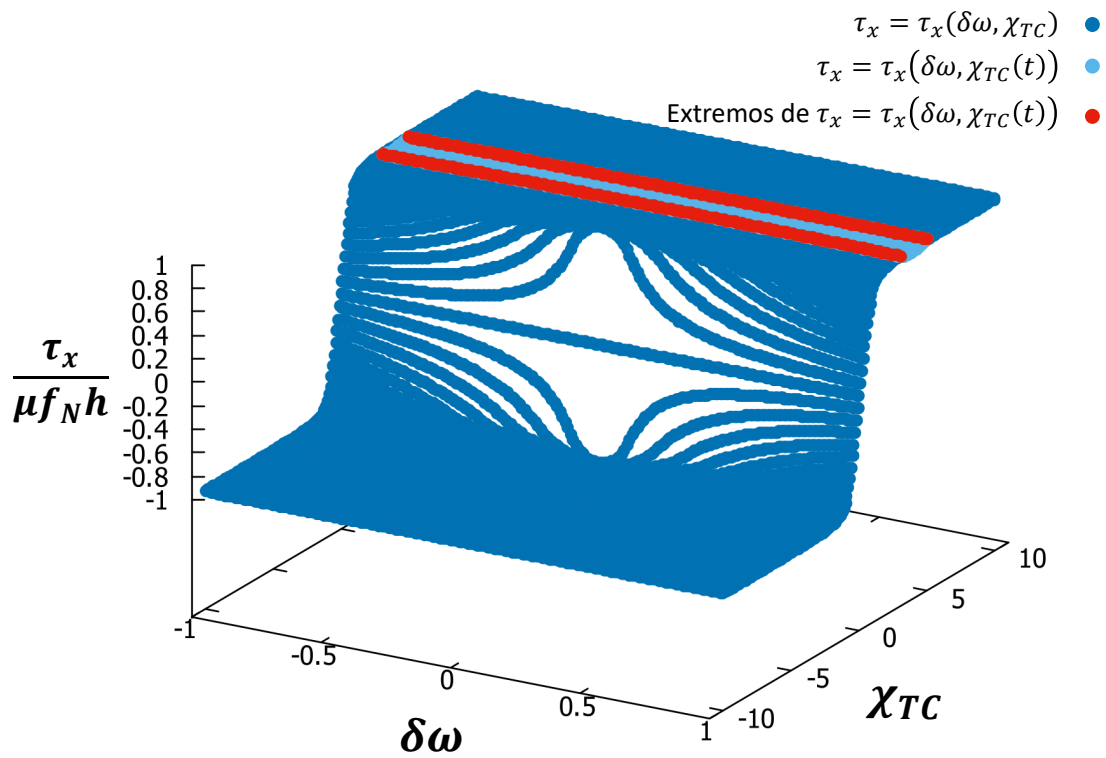


Figura 6.4: Comparación de gráficas de $\frac{\tau_x}{\mu f_N h} = \frac{\tau_x}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ de una herramienta estática con una herramienta oscilando alrededor de $\chi_{TC0} = 4$.

COMPARACIÓN DE HERRAMIENTA OSCILANDO FUERA DEL EJE DEL
 VIDRIO CON HERRAMIENTA ESTÁTICA
 6.3 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 4$

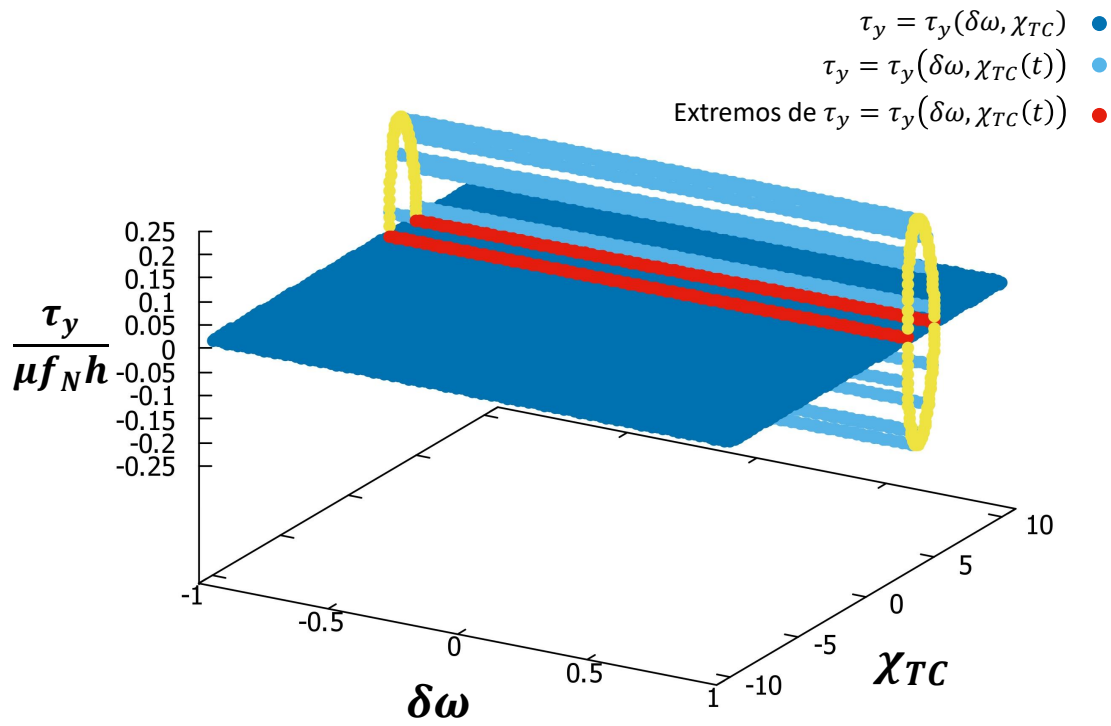


Figura 6.5: Comparación de gráficas de $\frac{\tau_y}{\mu f_N h} = \frac{\tau_y}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ de una herramienta estática con una herramienta oscilando alrededor de $\chi_{TC0} = 4$.

COMPARACIÓN DE HERRAMIENTA OSCILANDO FUERA DEL EJE DEL VIDRIO CON HERRAMIENTA ESTÁTICA
6.4 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 8$

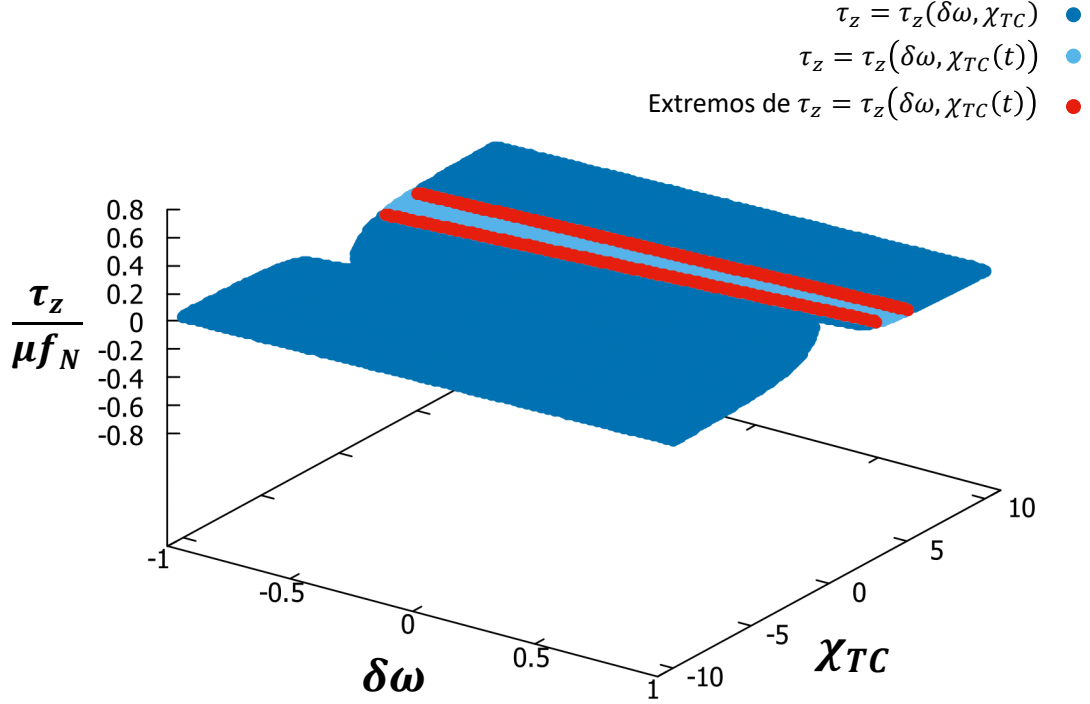


Figura 6.6: Comparación de gráficas de $\frac{\tau_z}{\mu f_N h} = \frac{\tau_z}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ de una herramienta estática con una herramienta oscilando alrededor de $\chi_{TC0} = 4$.

6.4. COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 8$

En la Fig. (6.7) se muestra la comparación de las gráficas de $\tau_x = \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC})$ (Fig. (2.5)) y $\tau_x = \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ (Fig. (5.8)) donde se observa que cuando la herramienta oscila alrededor de $\chi_{TC0} = 8$ $\tau_x \rightarrow \mu f_N h$, esto implica que al hacer oscilar una herramienta cerca del extremo del vidrio la componente τ_x es aproximadamente $\mu f_N h$, mostrando que los valores de las gráficas coinciden aparentemente, sin embargo solo se tiene coincidencia de valores en los extremos de la oscilación.

En la Fig. (6.8) se muestra la comparación de las gráficas de $\tau_y = \tau_y(\delta\omega, \chi_{TC})$ (Fig. (2.7)) y $\tau_y = \tau_y(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ (Fig. (5.9)) donde se observa que al igual que en los casos anteriores solo se obtiene los mismo resultados en los extremos de la oscilación.

En la Fig. (6.9) se muestra la comparación de las gráficas de $\tau_z = \tau_z(\delta\omega, \chi_{TC})$ (Fig. (2.3)) y $\tau_z = \tau_z(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ (Fig. (5.10)) donde se observa que al igual que el caso anterior, pero con diferente posición χ_{TC} , las gráficas aparentan tener los mismos valores ya que ambas tienen la apariencia de un plano, sin embargo solo se obtienen los mismos resultados en los extremos de la oscilación. Esta comparación indica que al posicionar a la herramienta fuera del centro del vidrio la gráfica de τ_z tiende a parecer un plano.

COMPARACIÓN DE HERRAMIENTA OSCILANDO FUERA DEL EJE DEL
 VIDRIO CON HERRAMIENTA ESTÁTICA
 6.4 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 8$

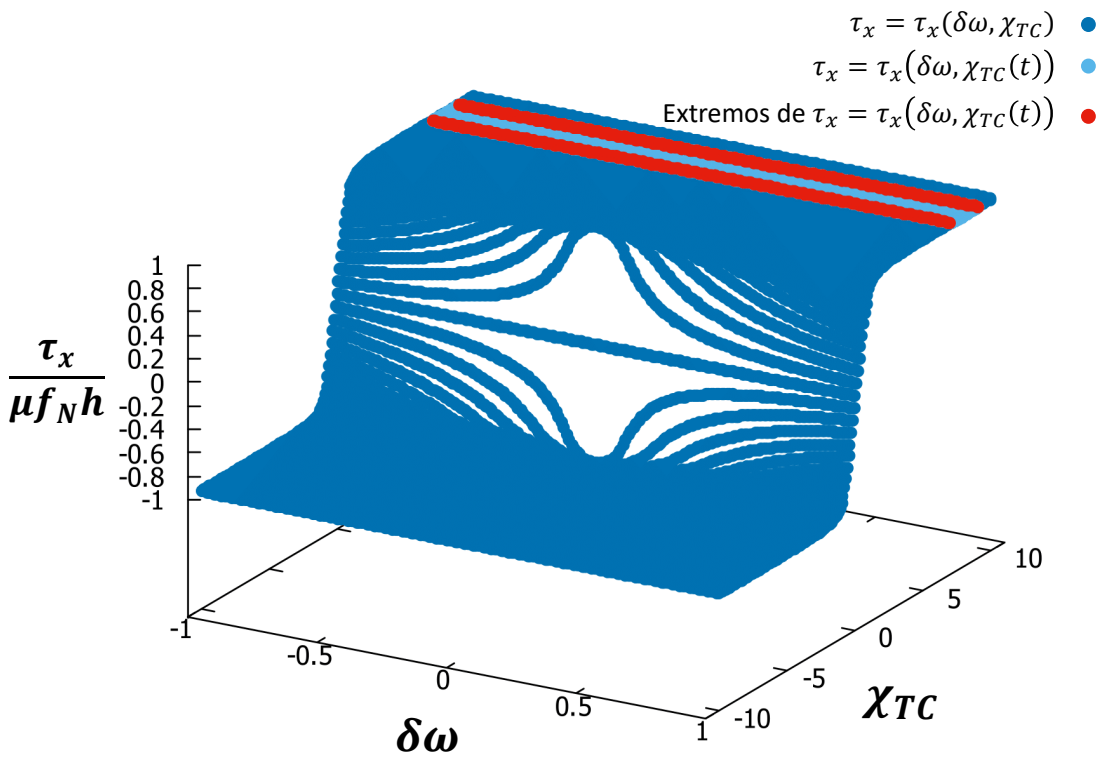


Figura 6.7: Comparación de gráficas de $\frac{\tau_x}{\mu f_N h} = \frac{\tau_x}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ de una herramienta estática con una herramienta oscilando alrededor de $\chi_{TC0} = 8$.

COMPARACIÓN DE HERRAMIENTA OSCILANDO FUERA DEL EJE DEL
VIDRIO CON HERRAMIENTA ESTÁTICA
6.4 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 8$

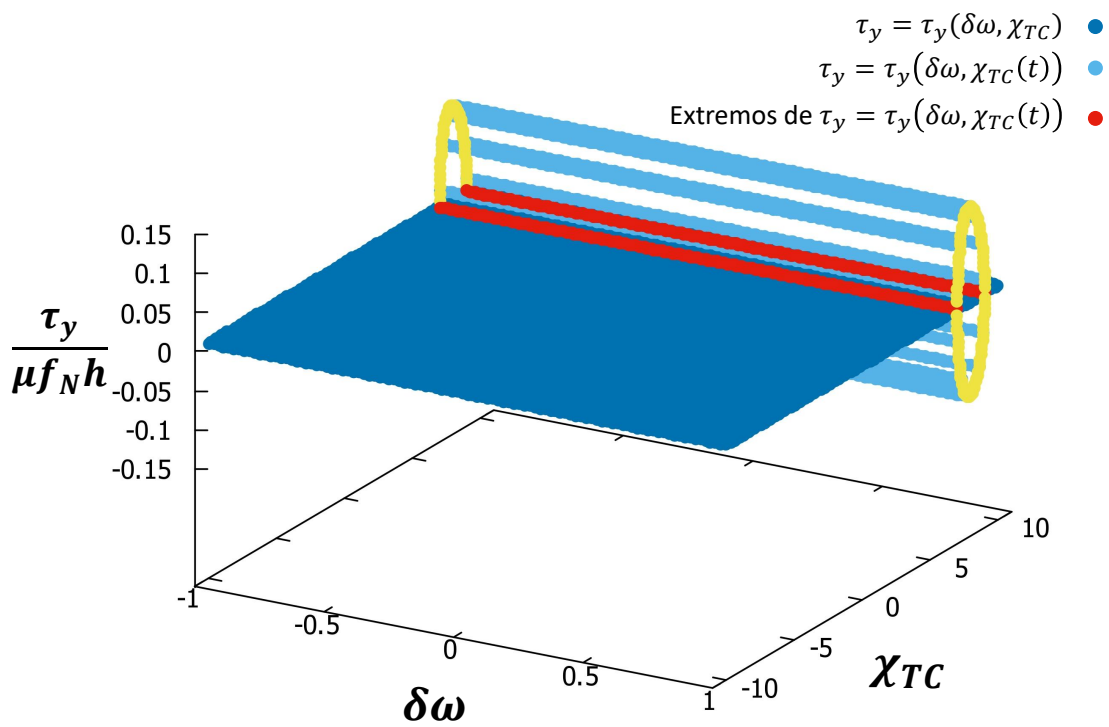


Figura 6.8: Comparación de gráficas de $\frac{\tau_y}{\mu f_N h} = \frac{\tau_y}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ de una herramienta estática con una herramienta oscilando alrededor de $\chi_{TC0} = 8$.

**COMPARACIÓN DE HERRAMIENTA OSCILANDO FUERA DEL EJE DEL
VIDRIO CON HERRAMIENTA ESTÁTICA**
6.5 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 9$

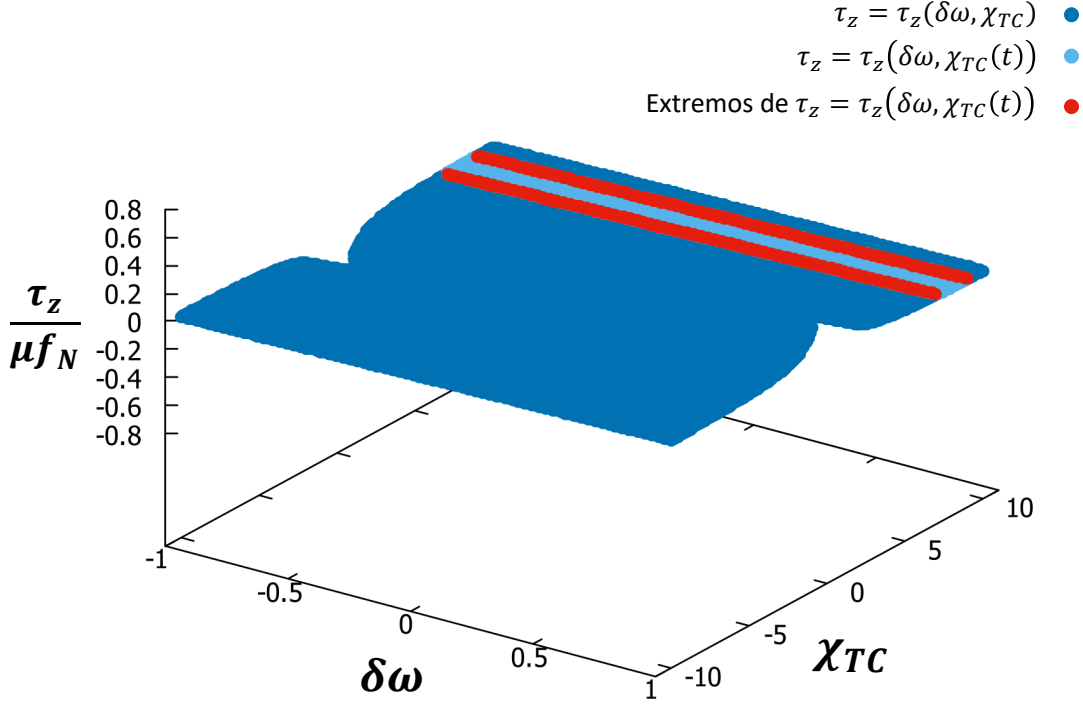


Figura 6.9: Comparación de gráficas de $\frac{\tau_z}{\mu f_N h} = \frac{\tau_z}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ de una herramienta estática con una herramienta oscilando alrededor de $\chi_{TC0} = 8$.

6.5. COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 9$

Como se mencionó en el capítulo anterior, al hacer oscilar una herramienta alrededor de $\chi_{TC0} = 9$ se obtienen resultados similares a los del caso de una herramienta oscilando alrededor de $\chi_{TC0} = 8$, pero se incluye la oscilación alrededor de $\chi_{TC0} = 9$ para cubrir todo el espejo por intervalos, a diferencia que al hacer oscilar a la herramienta alrededor de $\chi_{TC0} = 0$ los extremos de cada gráfica de una herramienta dinámica coinciden con los extremos de una herramienta estática.

COMPARACIÓN DE HERRAMIENTA OSCILANDO FUERA DEL EJE DEL
VIDRIO CON HERRAMIENTA ESTÁTICA
6.5 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 9$

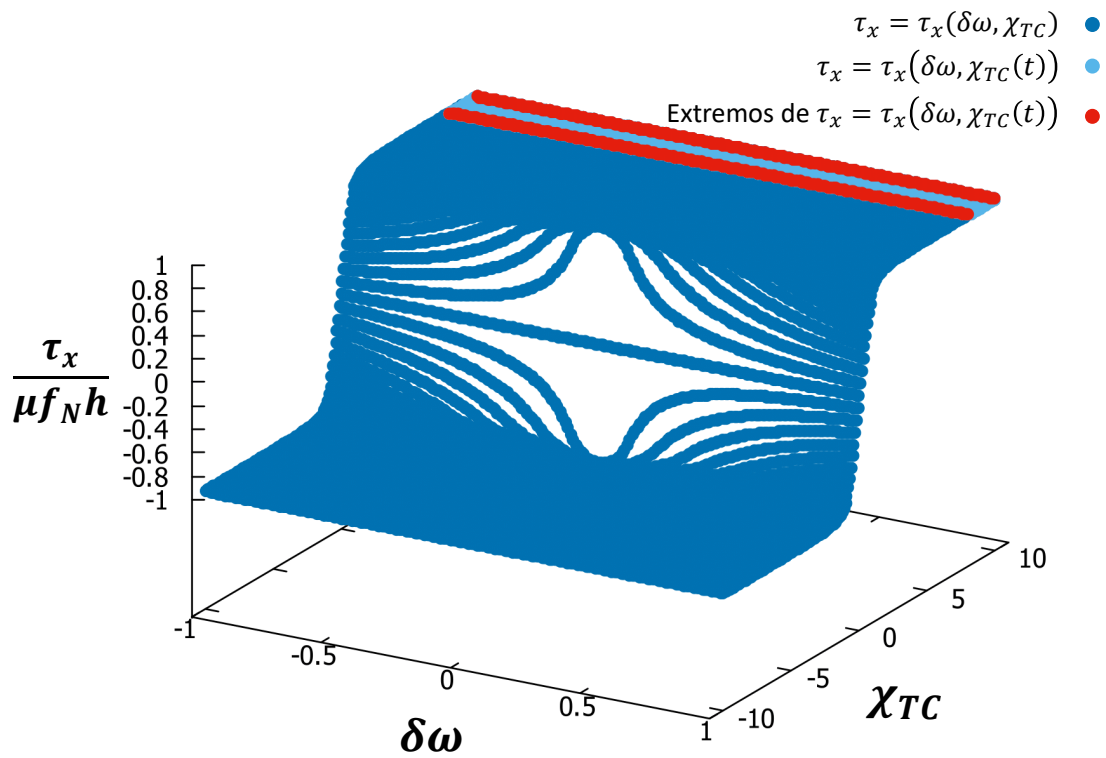


Figura 6.10: Comparación de gráficas de $\frac{\tau_x}{\mu f_N h} = \frac{\tau_x}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ de una herramienta estática con una herramienta oscilando alrededor de $\chi_{TC0} = 9$.

COMPARACIÓN DE HERRAMIENTA OSCILANDO FUERA DEL EJE DEL
 VIDRIO CON HERRAMIENTA ESTÁTICA
 6.5 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE OSCILACIÓN ALREDEDOR DE $\chi_{TC0} = 9$

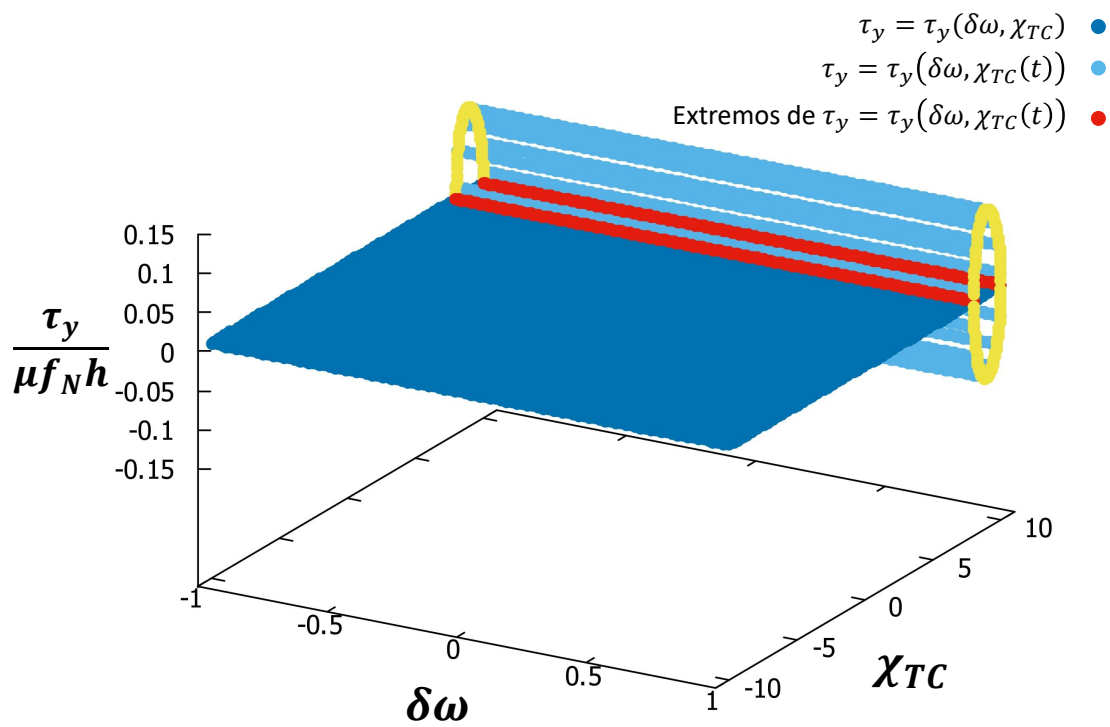


Figura 6.11: Comparación de gráficas de $\frac{\tau_y}{\mu f_N h} = \frac{\tau_y}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ de una herramienta estática con una herramienta oscilando alrededor de $\chi_{TC0} = 9$.

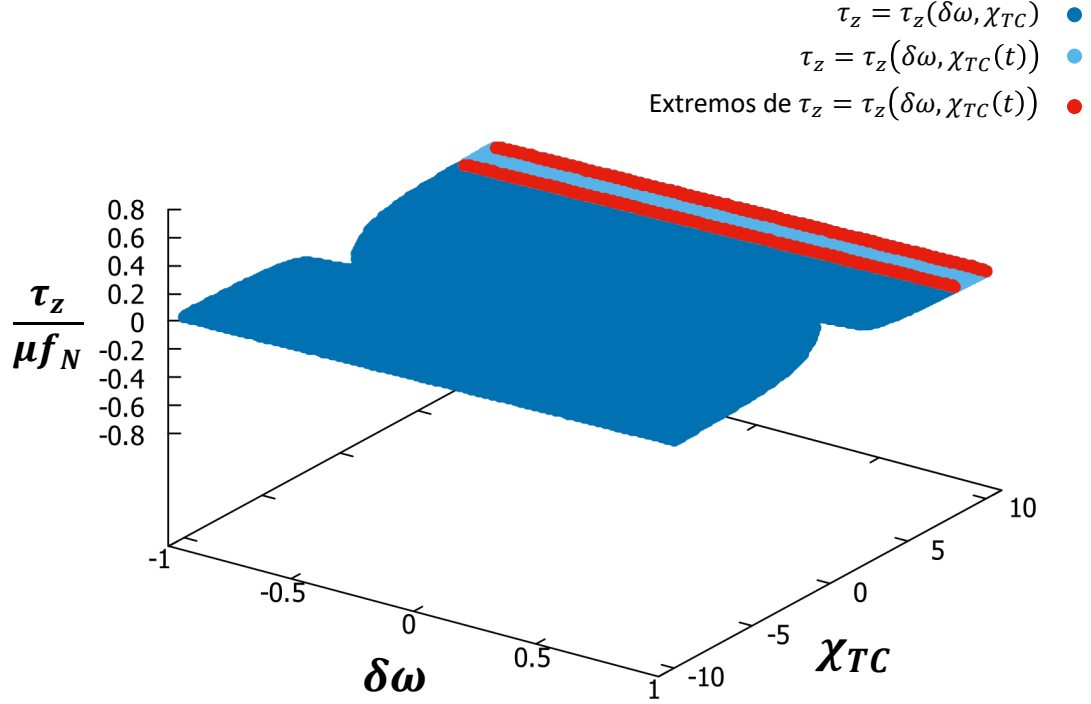


Figura 6.12: Comparación de gráficas de $\frac{\tau_z}{\mu f_N h} = \frac{\tau_z}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ de una herramienta estática con una herramienta oscilando alrededor de $\chi_{TC0} = 9$.

6.6. CONCLUSIONES

Se observó que cuando la herramienta oscila fuera de eje de giro del vidrio con una amplitud $\chi_{TC} = 1$ se obtiene que τ_x y τ_z toman valores cercanos a los del caso de herramienta estática, mientras que para la componente τ_y se observó que al hacer oscilar a la herramienta fuera del eje de giro del vidrio y cerca de los extremos del vidrio la escala sobre el eje $\tau_y/(\mu f_N h)$ va disminuyendo hasta acercarse a cero, esto implica que cerca del extremo del vidrio la herramienta disminuye la fuerza que la obliga a girar sobre el eje Y_T .

Los resultados de los capítulos anteriores se realizaron con los datos ω_G y ω_{OT} que usan los técnicos de la FCFM y por esto se analizará en el siguiente capítulo los casos en los que una herramienta oscila con una velocidad mayor y menor a $\omega_{OT} = \frac{31}{30}\pi$.

Capítulo 7

ANÁLISIS DE TORCA DE UNA HERRAMIENTA VARIANDO SU VELOCIDAD DE OSCILACIÓN

7.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se han analizado los casos en los que una herramienta realiza un movimiento armónico simple sobre todo el vidrio, y cuando la herramienta oscila fuera del eje de giro del vidrio realizando comparaciones con los resultados de una herramienta estática, todo esto se ha hecho con los datos tomados en el Taller de Pruebas Ópticas de la FCFM. En este capítulo se analizará la torca para los casos en los que se disminuye y se aumenta la velocidad de oscilación de la herramienta calculando numéricamente las gráficas de las componentes de la torca.

7.2. ¿POR QUÉ ALTERAR LA VELOCIDAD DE OSCILACIÓN DE LA HERRAMIENTA?

Al alterar la velocidad de oscilación de la herramienta se tiene como consecuencia inmediata que el período de la herramienta también se ve alterado. Primero se aterrizará la idea de lo que implica disminuir la velocidad de oscilación de la herramienta. Disminuir la velocidad de oscilación de la herramienta puede interpretarse como el pulido de un vidrio con una herramienta tan reducido que su desplazamiento sobre la superficie total tomaría un período prolongado, y por la Ec. (3.5) al tener un período prolongado la velocidad de oscilación es lenta. Con esta idea se puede analizar el caso de una herramienta que oscila lentamente o el caso en el que se pule un vidrio que es varias veces mayor al tamaño de la herramienta.

Incrementar la velocidad de la herramienta puede interpretarse como pulir un vidrio con una herramienta de tamaño significativo con respecto al vidrio. Esto permite que la herramienta recorra la superficie en un período menor. Este concepto es análogo al caos de oscilación de las herramientas de pulido en la industria oftálmica. Con las consideraciones mencionadas, se pretende modificar la velocidad de oscilación en el algoritmo desarrollado para el capítulo 3, presentando primero los resultados que se obtienen al reducir la velocidad de oscilación (tomando $\omega_{OT} = 0.05\pi$) y después se presentan los resultados obtenidos al incrementar la velocidad de oscilación (tomando $\omega_{OT} = 10\pi$).

7.3. HERRAMIENTA CON VELOCIDAD DE OSCILACIÓN LENTA

Como se mencionó antes, en esta sección se calcularán numéricamente las gráficas de las componentes τ_x , τ_y y τ_z tomando la velocidad de oscilación de la herramienta como $\omega_{OT} = 0.05\pi$

La Fig. (7.1) muestra la gráfica de $\tau_x = \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ cuando la herramienta se trasladada de extremo a extremo del vidrio, se observa que τ_x tiende a un valor constante fuera del centro del vidrio y cuando el centro de la herramienta se acerca al centro del vidrio entonces su valor cae hasta llegar a cero, esto indica que al tener una herramienta con velocidad de oscilación lenta se obtiene una gráfica semejante al caso de herramienta estática (ver Fig. (2.5)).

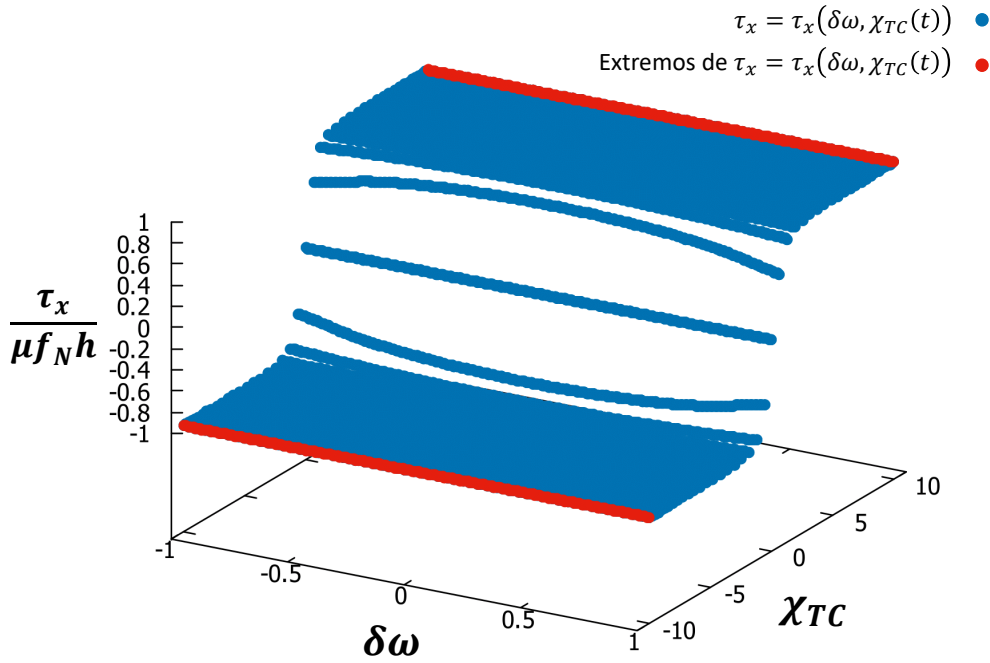


Figura 7.1: Gráfica de $\frac{\tau_x}{\mu f_N h} = \frac{\tau_x}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ de una herramienta oscilando con velocidad de oscilación $\omega_{OT} = 0.05\pi$.

La Fig. (7.2) muestra la gráfica de $\tau_y = \tau_y(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$, se puede observar que cuando el centro de la herramienta se encuentra alejado del centro del vidrio τ_y toma valores cerca de cero, y cuando el centro de la herramienta se encuentra cerca del centro del vidrio la gráfica comienza a abrirse, además se muestra que cuando el centro de la herramienta y el centro del vidrio coinciden se presentan los valores máximos y mínimos. Al igual que en la componente τ_x se observa que al tener una herramienta con velocidad de oscilación lenta se obtiene resultados similares a los de una herramienta estática (ver Fig. (2.7)).

La Fig. (7.3) muestra la gráfica de $\tau_z = \tau_z(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$, que muestra que cuando el centro de la herramienta y el vidrio coinciden entonces se presenta una caída de valores cuando $\delta\omega < 0$ y un crecimiento cuando $\delta\omega \geq 0$. En otras palabras al tener una velocidad de oscilación lenta se obtiene resultados semejantes a los de una herramienta estática (ver Fig. (2.3)).

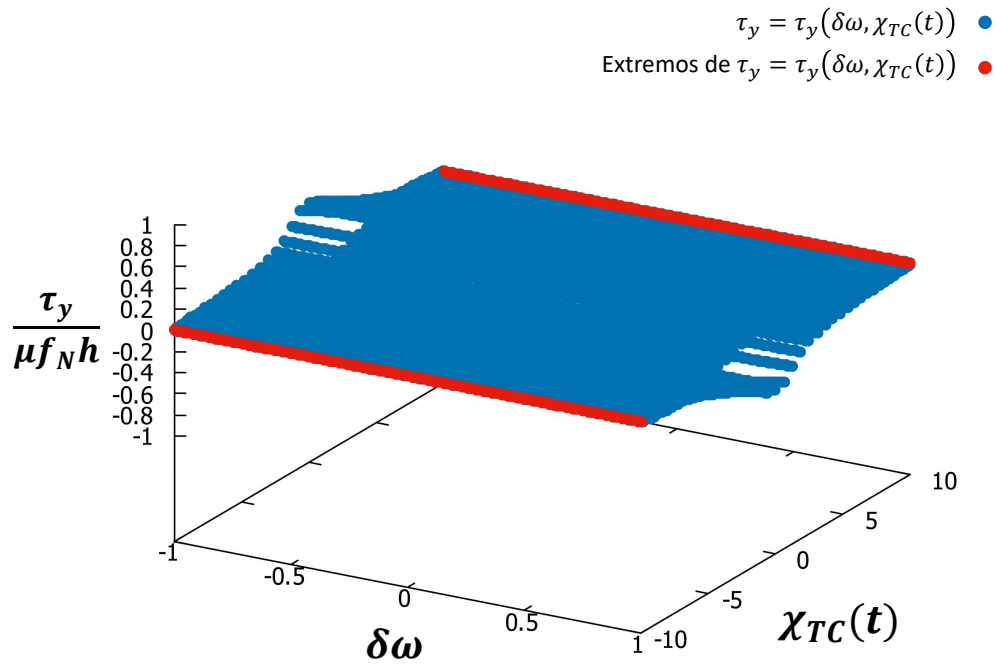


Figura 7.2: Gráfica de $\frac{\tau_y}{\mu f_N h} = \frac{\tau_y}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ de una herramienta oscilando con velocidad de oscilación $\omega_{OT} = 0.05\pi$.

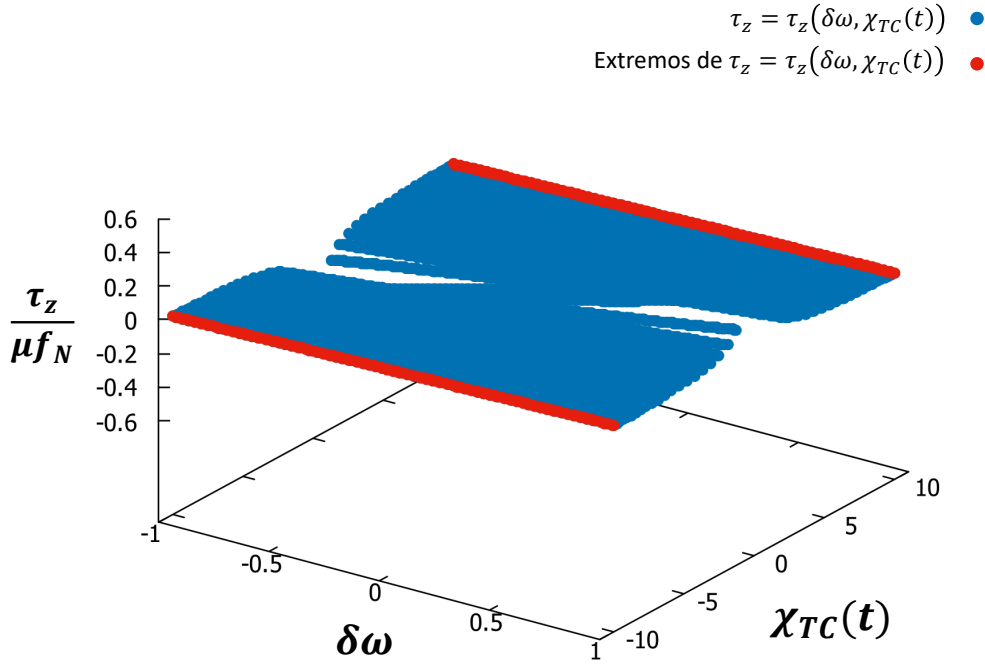


Figura 7.3: Gráfica de $\frac{\tau_z}{\mu f_N} = \frac{\tau_z}{\mu f_N}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ de una herramienta oscilando con velocidad de oscilación $\omega_{OT} = 0.05\pi$.

7.4. HERRAMIENTA CON VELOCIDAD DE OSCILACIÓN ALTA

Ahora se analizará el caso de una herramienta que oscila con alta velocidad, $\omega_{OT} = 10\pi$. En las Fig (7.4), (7.5) y (7.7) se pueden ver las gráficas de $\tau_x = \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$, $\tau_y = \tau_y(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ y $\tau_z = \tau_z(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ respectivamente. En la Fig. (7.4) se muestra que la gráfica de $\tau_x = \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ toma la apariencia de un plano cuando la herramienta se desplaza dentro del vidrio sin llegar a los extremos, esto significa que la fuerza para hacer girar a la herramienta sobre el eje X_T tiende a cero y cuando la herramienta se acerca a los extremos del vidrio se observa que $\tau_x \rightarrow \mu f_N h$, esto quiere decir que, cerca de los extremos la herramienta se ve forzada a girar sobre el eje X_T .

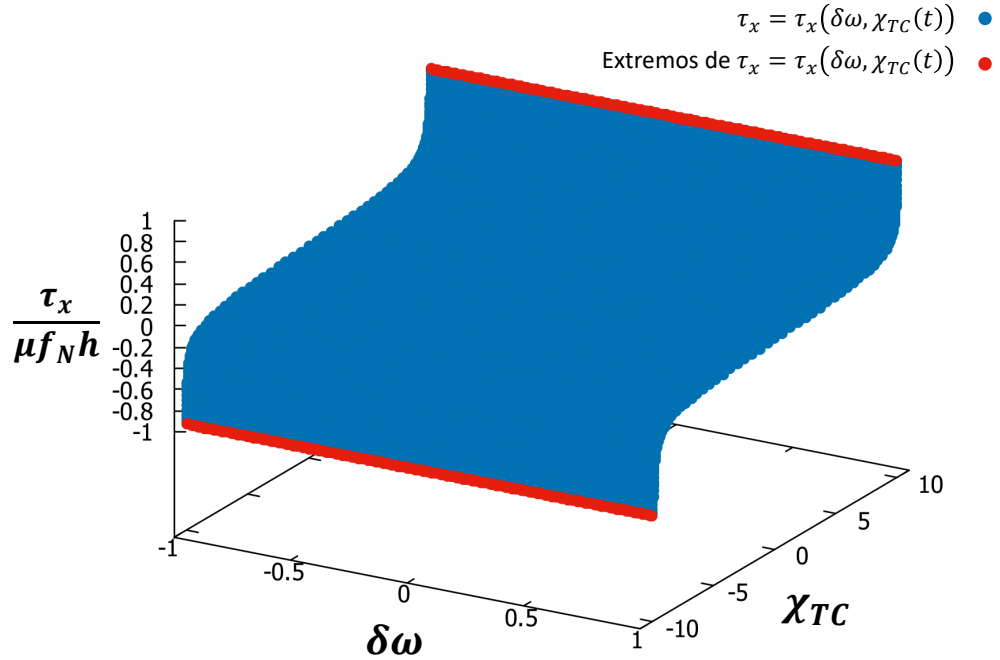


Figura 7.4: Gráfica de $\frac{\tau_x}{\mu f_N h} = \frac{\tau_x}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ de una herramienta oscilando con velocidad de oscilación $\omega_{OT} = 10.0\pi$

La Fig. (7.5) muestra que la gráfica de $\tau_y = \tau_y(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ toma la apariencia de un paralelepípedo rectangular, esto se confirma al calcular la gráfica de $\tau_y = \tau_y(\chi_{TC}(t))$ para ciertos valores de $\delta\omega$ (ver Fig. (7.6)). De la Fig. (7.6) se observa que cuando la herramienta se desplaza dentro del vidrio $\tau_y \rightarrow \mu f_N h$ esto indica que la herramienta es forzada a girar sobre el eje Y_T en casi todo el vidrio, mientras que cuando la herramienta se acerca a los extremos la herramienta deja de ser forzada a girar sobre el eje Y_T , esto indica que τ_y frena constantemente a la herramienta.

En la Fig. (7.7) se muestra que la gráfica de $\tau_z = \tau_z(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ aparenta ser un plano cuando la herramienta se desplaza dentro del vidrio sin llegar a los extremos lo cual esto indica que la herramienta no gira sobre el eje Z_T dentro del vidrio, y cerca de los extremos se presenta un levantamiento cuando $\delta\omega \geq 0$ y una baja de valores cuando $\delta\omega < 0$, sin embargo la escala sobre el eje $\tau_z/(\mu f_N)$ es de un orden de magnitud pequeño, entonces se puede tomar que no hay torca restauradora.

ANÁLISIS DE TORCA DE UNA HERRAMIENTA VARIANDO SU VELOCIDAD DE OSCILACIÓN
 DE OSCILACIÓN
 7.4 HERRAMIENTA CON VELOCIDAD DE OSCILACIÓN ALTA

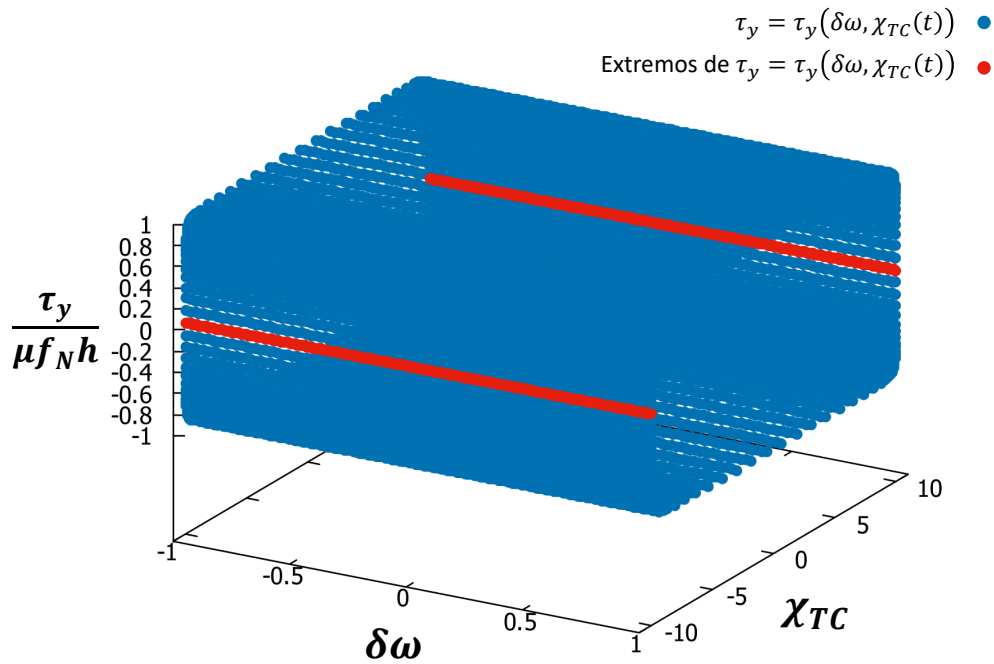


Figura 7.5: Gráfica de $\frac{\tau_y}{\mu f_N h} = \frac{\tau_y}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ de una herramienta oscilando con velocidad de oscilación $\omega_{OT} = 10.0\pi$.

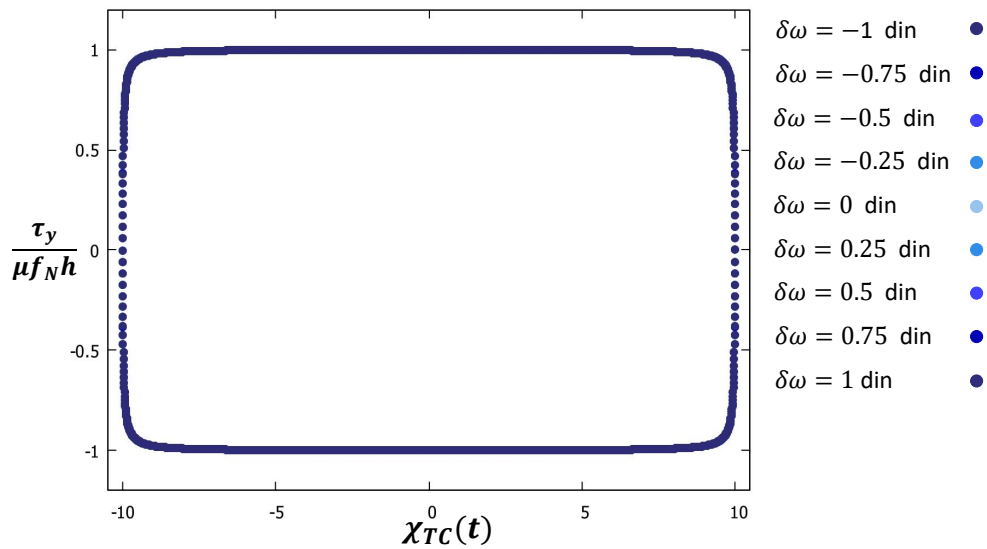


Figura 7.6: Gráfica de $\frac{\tau_y}{\mu f_N h} = \frac{\tau_y}{\mu f_N h}(\chi_{TC}(t))$ de una herramienta oscilando con velocidad de oscilación $\omega_{OT} = 10.0\pi$.

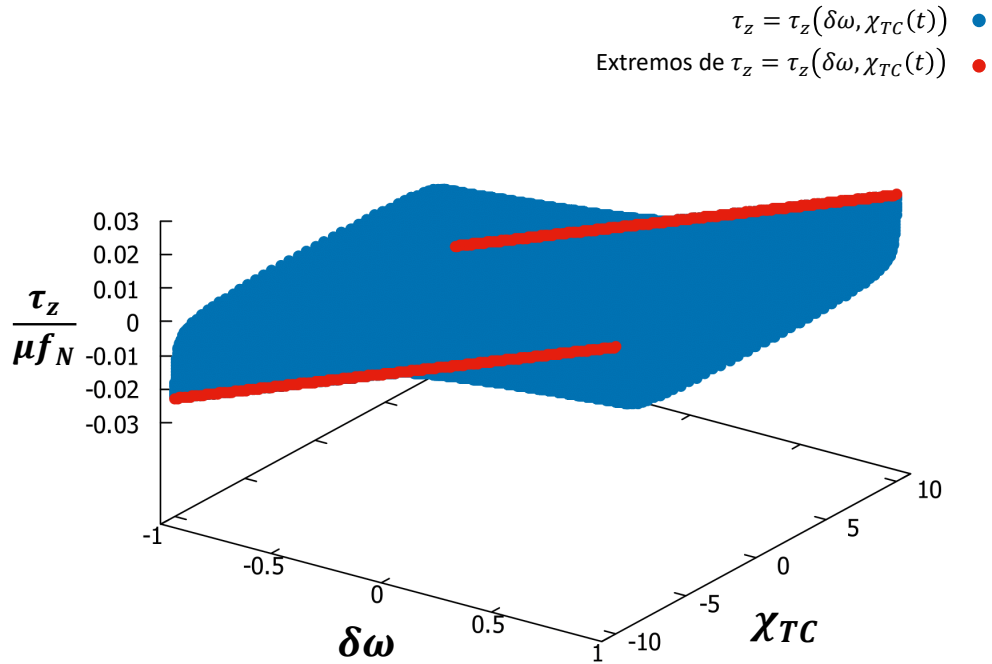


Figura 7.7: Gráfica de $\frac{\tau_y}{\mu f_N h} = \frac{\tau_y}{\mu f_N h}(\delta\omega, \chi_{TC}(t))$ de una herramienta oscilando con velocidad de oscilación $\omega_{OT} = 10.0\pi$.

7.5. CONCLUSIONES

Se observó que al utilizar una velocidad de oscilación baja las gráficas obtenidas son semejantes a las de una herramienta estática, por lo que para velocidades bajas las gráficas de las componentes τ_x , τ_y y τ_z de la torca tiende a aproximarse a las de una herramienta estática. Por otro lado al usar una velocidad alta se observó que al desplazarse la herramienta dentro del vidrio ya no es forzada a girar sobre los ejes X_T y Z_T , y sólo es forzada girar sobre el eje Y_T , con un valor constante, mientras que cerca de los extremos τ_y cae a cero y las componentes τ_x y τ_z rigen el movimiento de la herramienta en los extremos.

Capítulo 8

CONCLUSIONES

Al analizar una herramienta que realiza un movimiento armónico simple dentro de un vidrio se observó que la componente τ_y contribuye al movimiento de la herramienta, que al igual que la componente τ_x alteran la velocidad angular de la herramienta. Dado que las componentes τ_x , τ_y y τ_z sean diferentes de cero implica que, τ_x provoca que la herramienta sea forzada a rotar sobre el eje X_T , y τ_y provoca que la herramienta sea forzada a rotar sobre el eje Y_T , pero como la herramienta se mantiene en contacto con el vidrio por el brazo mecánico, esto implica que existan vibraciones sobre la herramienta cuando se desplaza dentro del vidrio.

Cuando el centro de la herramienta y del vidrio coinciden τ_z no gobierna el movimiento de la herramienta porque la presión sobre ella ya no es constante debido a que ahora se ve forzada a rotar sobre los ejes X_T y Y_T ocasionando que también existan vibraciones sobre todo del vidrio.

En todas las gráficas calculadas de la componente τ_y se observó que se tienen dos valores para cada punto de χ_{TC} , sin embargo esto ocurre para todas las componentes en los casos de oscilación dado que se realizó el análisis de una herramienta que oscila en un periodo T.

Se realizaron comparaciones de los resultados reproducidos en el capítulo 2 con los resultados obtenidos en el capítulo 4 y se pudo observar que para el caso de herramienta dinámica τ_x y τ_y permanecen invariantes ante cualquier valor de $\delta\omega$ y solo ven alteradas cuando χ_{TC} varía. la componente τ_z sólo se ve alterada cuando se varia a $\delta\omega$, además se observó que se obtiene los mismos resultados en los extremos del vidrio, dado que en esos puntos la velocidad de la herramienta es cero.

Se pudo observar que al hacer oscilar a la herramienta alrededor del centro del vidrio y reducir la amplitud de oscilación, las componentes τ_x y τ_y se ven alteradas con respecto a los valores de $\delta\omega$, mientras que si la herramienta oscila fuera del eje de giro del vidrio entonces solo la componente τ_x parece ser alterada por los valores de $\delta\omega$, esto indica que cuando la herramienta oscila sobre todo un vidrio y con dimensiones mayores a las de la herramienta las componentes τ_x y τ_y no se ven alteradas por los valores de $\delta\omega$.

Al realizar la comparación de resultados obtenidos al hacer oscilar a la herramienta fuera del eje de giro del vidrio se observó que las gráficas de las componentes τ_x y τ_z comienza a acercarse a los resultados de una herramienta estática, mientras que la componente τ_y disminuye cada que se acerca al extremo del vidrio, esto sin acercarse a cero.

Cuando la velocidad de oscilación de la herramienta es lenta se observó que las gráficas comienzan a ser semejantes a las de una herramienta estática, esto indica que a velocidades de oscilación lenta los resultados son similares a los de una herramienta estática. Con una velocidad de oscilación alta las componentes τ_x y τ_z tienden a cero dentro del vidrio, mientras que τ_y tiende a $\mu f_N h$ ocasionado que la herramienta sea frenada constantemente. Entonces para una herramienta con velocidad de oscilación alta la herramienta se desplaza sin girar ocasionando que no exista pulido sobre el vidrio, esto explica porque el pulido se realiza lo más lento posible.

Apéndice A

Desarrollo de las ecuaciones aproximadas de la torca

A.1. Desarrollo en serie de Taylor

Para realizar las aproximaciones de cada una de las componentes de la torca se tomaron los integrandos de la Ecs. (2.1), (2.2) y (2.3)

$$\tau_x(\delta\omega, \chi_{TC}) = \frac{\left(\frac{\delta\omega x_T}{R_T} + \chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T\omega_G}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\delta\omega x_T}{R_T} + \chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T\omega_G}\right)^2 + \left(\frac{\delta\omega y_T}{R_T} + \frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2}} \quad (\text{A.1})$$

$$\tau_y(\delta\omega, \chi_{TC}) = \frac{\left(\frac{\delta\omega y_T}{R_T} + \frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\delta\omega x_T}{R_T} + \chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T\omega_G}\right)^2 + \left(\frac{\delta\omega y_T}{R_T} + \frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2}} \quad (\text{A.2})$$

$$\tau_z(\delta\omega, \chi_{TC}) = \frac{\left(\frac{\delta\omega x_T}{R_T} + \chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T\omega_G}\right) + \left(\frac{\delta\omega y_T}{R_T} + \frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\delta\omega x_T}{R_T} + \chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T\omega_G}\right)^2 + \left(\frac{\delta\omega y_T}{R_T} + \frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2}} \quad (\text{A.3})$$

Haciendo un desarrollo en serie de Taylor alrededor de $\delta\omega = 0$ a primer orden, como se presenta a continuación

$$\tau_x(\delta\omega, \chi_{TC}) \approx \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC})|_{\delta\omega=0} + \left. \frac{\partial \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC})}{\partial \delta\omega} \right|_{\delta\omega=0} \delta\omega \quad (\text{A.4})$$

$$\tau_y(\delta\omega, \chi_{TC}) \approx \tau_y(\delta\omega, \chi_{TC})|_{\delta\omega=0} + \left. \frac{\partial \tau_y(\delta\omega, \chi_{TC})}{\partial \delta\omega} \right|_{\delta\omega=0} \delta\omega \quad (\text{A.5})$$

$$\tau_z(\delta\omega, \chi_{TC}) \approx \tau_z(\delta\omega, \chi_{TC})|_{\delta\omega=0} + \left. \frac{\partial \tau_z(\delta\omega, \chi_{TC})}{\partial \delta\omega} \right|_{\delta\omega=0} \delta\omega \quad (\text{A.6})$$

al realizar la derivada parcial de la componente τ_x se obtiene lo siguiente

$$\frac{x_T}{R_T} \frac{\left[\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T\omega_G}\right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2} \right]^2 - \left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T\omega_G}\right) \left[\frac{x_T}{R_T} \left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T\omega_G}\right) + \frac{y_T}{R_T} \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right) \right]}{\left(\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T\omega_G}\right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2} \right)^3} \quad (\text{A.7})$$

Desarrollo de las ecuaciones aproximadas de la torca
A.1 Desarrollo en serie de Taylor

se puede observar que al elevar al cuadrado el término de la raíz, y al expandir el segundo miembro de numerador se eliminan algunos términos, obteniendo así que la derivada parcial de τ_x con $\delta\omega = 0$ resulta

$$\left. \frac{\left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right) \left[\frac{x_T}{R_T} \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right) - \frac{y_T}{R_T} \left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right) \right]}{\left(\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right)^2} \right)^3} \right|_{\delta\omega=0} \delta\omega \quad (\text{A.8})$$

obtenido que

$$\left. \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC}) \right|_{\delta\omega=0} \approx \frac{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)}{\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right)^2}} + \frac{\left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right) \left[\frac{x_T}{R_T} \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right) - \frac{y_T}{R_T} \left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right) \right]}{\left(\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right)^2} \right)^3} \delta\omega \quad (\text{A.9})$$

Al realizar la derivada parcial de la componente τ_y se obtiene

$$\frac{\frac{y_T}{R_T} \left[\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right)^2} \right]^2 - \left(\frac{y_{TC}}{R_T} - \frac{\dot{\chi}_{TC}}{R_T \omega_G} \right) \left[\frac{x_T}{R_T} \left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right) + \frac{y_T}{R_T} \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right) \right]}{\left(\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right)^2} \right)^3} \quad (\text{A.10})$$

al igual que en la componente τ_x , al elevar el término de la raíz al cuadrado y expandir los términos, la derivada parcial de τ_y se simplifica de tal modo que se obtiene lo siguiente

$$\frac{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right) \left[-\frac{x_T}{R_T} \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right) + \frac{y_T}{R_T} \left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right) \right]}{\left(\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right)^2} \right)^3} \delta\omega \quad (\text{A.11})$$

obteniendo así

$$\left. \tau_y(\delta\omega, \chi_{TC}) \right|_{\delta\omega=0} \approx \frac{\left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right)}{\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right)^2}} + \frac{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right) \left[-\frac{x_T}{R_T} \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right) + \frac{y_T}{R_T} \left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right) \right]}{\left(\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right)^2} \right)^3} \delta\omega \quad (\text{A.12})$$

La componente τ_z no es otra cosa más que la suma de las componentes τ_x y τ_y multiplicadas por x_T y y_T respectivamente, se puede ver que

$$\tau_z(\delta\omega, \chi_{TC}) \approx x_T \left(\tau_x(\delta\omega, \chi_{TC}) \right|_{\delta\omega=0} \right) + y_T \left(\tau_y(\delta\omega, \chi_{TC}) \right|_{\delta\omega=0} \right) + \left[x_T \frac{\partial \tau_x(\delta\omega, \chi_{TC})}{\partial \delta\omega} \right|_{\delta\omega=0} + y_T \frac{\partial \tau_y(\delta\omega, \chi_{TC})}{\partial \delta\omega} \right|_{\delta\omega=0} \delta\omega \quad (\text{A.13})$$

obteniendo

$$\left. \tau_z(\delta\omega, \chi_{TC}) \right|_{\delta\omega=0} \approx \frac{\left[x_T \left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right) + y_T \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right) \right]}{\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right)^2}} + \frac{1}{R_T} \frac{\left[x_T \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right) - y_T \left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right) \right]^2}{\left(\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right)^2} \right)^3} \delta\omega \quad (\text{A.14})$$

A.2. Integración de las ecuaciones desarrolladas en serie de Taylor

Ahora se procede a realizar el proceso de integración de las Ecs. (A.9), (A.12) y (A.14) de la siguiente forma

$$\tau_x \approx \frac{\mu f_N h}{A_T} \left[\int_{A_T} \frac{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)}{\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right)^2}} dA_T + \int_{A_T} \frac{\left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right) \left[\frac{x_T}{R_T} \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right) - \frac{y_T}{R_T} \left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right) \right] \delta \omega}{\left(\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right)^2} \right)^3} dA_T \right] \quad (\text{A.15})$$

$$\tau_y \approx \frac{\mu f_N h}{A_T} \left[\int_{A_T} \frac{\left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right)}{\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right)^2}} dA_T + \int_{A_T} \frac{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right) \left[-\frac{x_T}{R_T} \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right) + \frac{y_T}{R_T} \left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right) \right] \delta \omega}{\left(\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right)^2} \right)^3} dA_T \right] \quad (\text{A.16})$$

$$\tau_z \approx \frac{\mu f_N}{A_T} \left[\int_{A_T} \frac{\left[x_T \left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right) + y_T \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right) \right]}{\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right)^2}} dA_T + \frac{1}{R_T} \int_{A_T} \frac{\left[x_T \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right) - y_T \left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right) \right]^2 \delta \omega}{\left(\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right)^2} \right)^3} dA_T \right] \quad (\text{A.17})$$

Este proceso de integración implica un cambio de variable para poder realizar la integración de las Ecs. (A.15), (A.16) y (A.17), eligiendo

$$\begin{aligned} x_T &= \rho \cos \theta \\ y_T &= \rho \sin \theta \\ 0 &\leq \rho \leq R_T \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

Desarrollo de las ecuaciones aproximadas de la torca
A.2 Integración de las ecuaciones desarrolladas en serie de Taylor

$$\tau_x \approx \frac{\mu f_N h}{A_T} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{R_T} \frac{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)}{\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right)^2}} \rho d\rho d\theta + \right. \\ \left. \int_0^{2\pi} \int_0^{R_T} \frac{\left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right) \left[\frac{\rho \cos \theta}{R_T} \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right) - \frac{\rho \sin \theta}{R_T} \left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right) \right] \delta \omega}{\left(\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right)^2} \right)^3} \rho d\rho d\theta \right] \quad (\text{A.18})$$

$$\tau_y \approx \frac{\mu f_N h}{A_T} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{R_T} \frac{\left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right)}{\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right)^2}} \rho d\rho d\theta + \right. \\ \left. \int_0^{2\pi} \int_0^{R_T} \frac{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right) \left[-\frac{\rho \cos \theta}{R_T} \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right) + \frac{\rho \sin \theta}{R_T} \left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right) \right] \delta \omega}{\left(\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right)^2} \right)^3} \rho d\rho d\theta \right] \quad (\text{A.19})$$

$$\tau_z \approx \frac{\mu f_N}{A_T} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{R_T} \frac{\rho \left[\cos \theta \left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right) + \sin \theta \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right) \right]}{\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right)^2}} \rho d\rho d\theta + \right. \\ \left. \frac{1}{R_T} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_T} \frac{\left[\rho \cos \theta \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right) - \rho \sin \theta \left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right) \right]^2 \delta \omega}{\left(\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G} \right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G} \right)^2} \right)^3} \rho d\rho d\theta \right] \quad (\text{A.20})$$

Tomando en cuenta que

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta = 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin \theta = 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta = 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta = \pi \\ \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta = \pi$$

Entonces todos los términos que contengan $\cos \theta$, $\sin \theta$ y $\sin \theta \cos \theta$ se anulan, de este modo las Ecs. (A.18), (A.19) y (A.20) se reducen a la siguiente forma

Desarrollo de las ecuaciones aproximadas de la torca
A.2 Integración de las ecuaciones desarrolladas en serie de Taylor

$$\tau_x \approx \frac{\mu f_N h}{A_T} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_T} \frac{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)}{\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2}} \rho d\rho d\theta \quad (\text{A.21})$$

$$\tau_y \approx \frac{\mu f_N h}{A_T} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_T} \frac{\left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)}{\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2}} \rho d\rho d\theta \quad (\text{A.22})$$

$$\tau_z \approx \frac{\mu f_N}{A_T} \frac{\delta\omega}{R_T} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_T} \frac{\left[\rho \cos \theta \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)\right]^2 + \left[\rho \sin \theta \left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)\right]^2}{\left(\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2}\right)^3} \rho d\rho d\theta \quad (\text{A.23})$$

por integración directa en τ_x y τ_y se obtiene

$$\tau_x \approx \mu\pi \frac{f_N}{A_T} h R_T^2 \frac{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)}{\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2}} \quad (\text{A.24})$$

$$\tau_y \approx \mu\pi \frac{f_N}{A_T} h R_T^2 \frac{\left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)}{\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2}} \quad (\text{A.25})$$

en el caso de τ_z , se puede ver que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_T} \left[\rho \cos \theta \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)\right]^2 \rho d\rho d\theta &= \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{R_T} \rho^3 \cos^2 \theta d\rho d\theta \\ &= \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2 \frac{R_T^4}{4} \pi \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{R_T} \left[\rho \sin \theta \left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)\right]^2 \rho d\rho d\theta &= \left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{R_T} \rho^3 \sin^2 \theta d\rho d\theta \\ &= \left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)^2 \frac{R_T^4}{4} \pi \end{aligned}$$

sustituyendo los valores anteriores dentro de la Ec. (A.23) se llega a que

$$\tau_z \approx \mu\pi \frac{f_N}{A_T} \frac{R_T^3}{4} \frac{\delta\omega}{\sqrt{\left(\chi_{TC} - \frac{\dot{y}_{TC}}{R_T \omega_G}\right)^2 + \left(\frac{y_{TC}}{R_T} + \frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2}} \quad (\text{A.26})$$

Para el caso estático se toman y_{TC} , \dot{y}_{TC} y $\dot{\chi}_{TC}$ igual a cero, entonces al sustituir dentro de las Ecs. (A.24), (A.25) y (A.26) se obtiene

$$\tau_x \approx \mu f_N h \quad (\text{A.27})$$

$$\tau_y \approx 0 \quad (\text{A.28})$$

Desarrollo de las ecuaciones aproximadas de la torca
A.2 Integración de las ecuaciones desarrolladas en serie de Taylor

$$\tau_z \approx \mu f_N \frac{R_T}{4} \frac{\delta\omega}{\chi_{TC}} \quad (\text{A.29})$$

Para el caso dinámico se toman y_{TC} y \dot{y}_{TC} igual a cero, entonces al sustituir dentro de las Ecs. (A.24), (A.25) y (A.26) se obtiene

$$\tau_x \approx \mu f_N h \frac{\chi_{TC}}{\sqrt{\chi_{TC}^2 + \left(\frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2}} \quad (\text{A.30})$$

$$\tau_y \approx \mu f_N h \frac{\frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}}{\sqrt{\chi_{TC}^2 + \left(\frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2}} \quad (\text{A.31})$$

$$\tau_z \approx \mu f_N \frac{R_T}{4} \frac{\delta\omega}{\sqrt{\chi_{TC}^2 + \left(\frac{\dot{\chi}_{TC}}{\omega_G}\right)^2}} \quad (\text{A.32})$$

Apéndice B

Algoritmo de la componente τ_x

```
implicit none
integer i,j,k,k1,k2,n,m
real*8 dw,xtc,xtcp,xt,yt,At,c1,wg,wot,xtc1,xtc0
real*8 numx,deno1,deno2,deno3,taux,dAt,torx
real*8 pi,rt,rg,mu,fn,h,per,t

m=100
n=500
pi=3.1415926535d0
rt=1.0d0
rg=10.0d0
At=pi*rt*rt
mu=1.0d0
fn=1.0d0
h=0.250d0
wot=(31.0d0/30.0d0)*pi
wg=(16.0d0/15.0d0)*pi
per=2.0d0*pi/(wot)
xtc1=dfloat(rg)
xtc0=0.0d0
dAt=(rt*rt)/(dfloat(n)*dfloat(n))

open(unit=1,file='taux_dinamica.txt')
open(unit=2,file='extremos-x.txt')

taux=0.0d0

do k1=-m,m,1
dw=dfloat(k1)/dfloat(m)
do k2=0,m,1
t=(per*dfloat(k2))/(dfloat(m))
xtc=xtc0+xtc1*dcos(wot*t)
xtcp=-wot*xtc1*dsin(wot*t)
do i=-n,n,1
xt=(rt*dfloat(i))/dfloat(n)
do j=-n,n,1
yt=(rt*dfloat(j))/dfloat(n)
```

```

c1=xt*xt+yt*yt
if (c1.le.rt*rt)then
numx=dw*xt+xtc
deno1=dw*xt+xtc
deno2=dw*yt+(xtcp/wg)
deno3=deno1*deno1+deno2*deno2
if(deno3.eq.0.0)then
goto 1
else
endif
taux=taux+(num/dsqrt(deno3))*dAt
else
endif
1 enddo
enddo
torx=h*mu*(fn/At)*taux
if(xtc.eq.-rg.or.xtc.eq.rg) then
write(2,*)dw,xtc,torx(mu*fn*h)
else
write(1,*)dw,xtc,torx(mu*fn*h)
endif
taux=0.0d0
enddo
enddo

close(1)
close(2)

open(unit=1,file="grafica.txt")
write(1,*)"set xlabel'dw'"
write(1,*)"set ylabel'X_TC'"
write(1,*)"set zlabel'tau_X'"
write(1,*)"set yrange[-11.0:11.0]"
write(1,*)"splot 'taux_dinamica.txt'ls 7 lc 6 title ' $\tau_x$ '"
write(1,*)"replot 'extremos-x.txt' ls 7 lc 7 title'extremos-x'"
call system ('gnuplot -p grafica.txt')
end

```

Apéndice C

Algoritmo de la componente τ_y

```
implicit none
integer i,j,k,k1,k2,n,m
real*8 dw,xtc,xtcp,xt,yt,At,c1,wg,wot,xtc1,xtc0
real*8 numy,deno1,deno2,deno3,tauy,dAt,tory
real*8 pi,rt,rg,mu,fn,h,per,t

m=50
n=500
pi=3.1415926535d0
rt=1.0d0
rg=10.0d0
At=pi*rt*rt
mu=1.0d0
fn=1.0d0
h=0.250d0
wot=(31.0d0/30.0d0)*pi
wg=(16.0d0/15.0d0)*pi
per=2.0d0*pi/(wot)
xtc1=dfloat(rg)
xtc0=0.0d0
dAt=(rt*rt)/(dfloat(n)*dfloat(n))

open(unit=1,file='tauy_dinamica.txt')
open(unit=2,file='extremos-y.txt')

tauy=0.0d0

do k1=-m,m,1
dw=dfloat(k1)/dfloat(m)
do k2=0,m,1
t=(per*dfloat(k2))/(dfloat(m))
xtc=xtc0+xtc1*dcos(wot*t)
xtcp=-wot*xtc1*dsin(wot*t)
do i=-n,n,1
xt=(rt*dfloat(i))/dfloat(n)
do j=-n,n,1
```

```

yt=(rt*dfloat(j))/dfloat(n)
c1=xt*xt+yt*yt
if (c1.le.rt*rt)then
numy=dw*yt+(xtcp/wg)
deno1=dw*xt+xtc
deno2=dw*yt+(xtcp/wg)
deno3=deno1*deno1+deno2*deno2
if(deno3.eq.0.0)then
goto 1
else
endif
tauy=tauy+(num/dsqrt(deno3))*dAt
else
endif
1 enddo
enddo
tory=h*mu*(fn/At)*tauy
if(xtc.eq.-rg.or.xtc.eq.rg) then
write(2,*)dw,xtc,torymu*fn*h)
else
write(1,*)dw,xtc,tory(mu*fn*h)
endif
tauy=0.0d0
enddo
enddo

close(1)
close(2)

open(unit=1,file="grafica.txt")
write(1,*)"set xlabel'dw'"
write(1,*)"set ylabel'X_TC'"
write(1,*)"set zlabel'tau_Y'"
write(1,*)"set yrange[-11.0:11.0]"
write(1,*)"splot 'tauy_dinamica.txt'ls 7 lc 6 title ' $\tau_y$ '"
write(1,*)"replot 'extremos-y.txt' ls 7 lc 7 title'extremos-y'"
call system ('gnuplot -p grafica.txt')
end

```

Apéndice D

Algoritmo de la componente τ_z

```
implicit none
integer i,j,k,k1,k2,n,m
real*8 dw,xtc,xtcp,xt,yt,At,c1,wg,wot,xtc1,xtc0
real*8 numz,deno1,deno2,deno3,tory,dAt,torz
real*8 pi,rt,rg,mu,fn,h,per,t

m=100
n=500
pi=3.1415926535d0
rt=1.0d0
rg=10.0d0
At=pi*rt*rt
mu=1.0d0
fn=1.0d0
h=0.250d0
wot=(31.0d0/30.0d0)*pi
wg=(16.0d0/15.0d0)*pi
per=2.0d0*pi/(wot)
xtc1=dfloat(rg)
xtc0=0.0d0
dAt=(rt*rt)/(dfloat(n)*dfloat(n))

open(unit=1,file='tory_dinamica.txt')
open(unit=2,file='extremos-y.txt')

tauz=0.0d0

do k1=-m,m,1
dw=dfloat(k1)/dfloat(m)
do k2=0,m,1
t=(per*dfloat(k2))/(dfloat(m))
xtc=xtc0+xtc1*dcos(wot*t)
xtcp=-wot*xtc1*dsin(wot*t)
do i=-n,n,1
xt=(rt*dfloat(i))/dfloat(n)
do j=-n,n,1
yt=(rt*dfloat(j))/dfloat(n)
```

```

c1=xt*xt+yt*yt
if (c1.le.rt*rt)then
numz=xt*(dw*xt+xtc)+yt*(dw*yt+(xtcp/wg))
deno1=dw*xt+xtc
deno2=dw*yt+(xtcp/wg)
deno3=deno1*deno1+deno2*deno2
if(deno3.eq.0.0)then
goto 1
else
endif
tory=tory+(num/dsqrt(deno3))*dAt
else
endif
1 enddo
enddo
torz=h*mu*(fn/At)*tory
if(xtc.eq.-rg.or.xtc.eq.rg) then
write(2,*)dw,xtc,torzmu*fn*h)
else
write(1,*)dw,xtc,torz(mu*fn*h)
endif
tory=0.0d0
enddo
enddo

close(1)
close(2)

open(unit=1,file="grafica.txt")
write(1,*)"set xlabel'dw'"
write(1,*)"set ylabel'X_TC'"
write(1,*)"set zlabel'tau_Y'"
write(1,*)"set yrange[-11.0:11.0]"
write(1,*)"splot 'tory_dinamica.txt'ls 7 lc 6 title ' $\tau_y$ '"
write(1,*)"replot 'extremos-y.txt' ls 7 lc 7 title'extremos-y'"
call system ('gnuplot -p grafica.txt')
end

```

Apéndice E

Algoritmo de las curvas de nivel de la componente τ_x

```
implicit none
integer i,j,k,k1,k2,n,m
real*8 dw,xtc,xtcp,xt,yt,At,c1,wg,wot,xtc1,xtc0
real*8 numx,deno1,deno2,deno3,taux,dAt,torx
real*8 pi,rt,rg,mu,fn,h,per,t
```

```
m=100
n=500
pi=3.1415926535d0
rt=1.0d0
rg=10.0d0
At=pi*rt*rt
mu=1.0d0
fn=1.0d0
h=0.250d0
wot=(31.0d0/30.0d0)*pi
wg=(16.0d0/15.0d0)*pi
per=2.0d0*pi/(wot)
xtc1=dfloat(rg)
xtc0=0.0d0
dAt=(rt*rt)/(dfloat(n)*dfloat(n))
```

```
open(unit=1,file='dw=-1-din.txt')
open(unit=2,file='dw=-0.75-din.txt')
open(unit=3,file='dw=-0.5-din.txt')
open(unit=4,file='dw=-0.25-din.txt')
open(unit=5,file='dw=0-din.txt')
open(unit=6,file='dw=0.25-din.txt')
open(unit=7,file='dw=0.5-din.txt')
open(unit=8,file='dw=0.75-din.txt')
open(unit=9,file='dw=1-din.txt')
```

```
taux=0.0d0
```

```

do k1=-m,m,25
dw=dfloat(k1)/dfloat(m)
do k2=0,n,1
t=(per*dfloat(k2))/(dfloat(n))
xtc=xtc0+xtc1*dcos(wot*t)
xtcp=-wot*xtc1*dsin(wot*t)
do i=-n,n,1
xt=(rt*dfloat(i))/dfloat(n)
do j=-n,n,1
yt=(rt*dfloat(j))/dfloat(n)
c1=xt*xt+yt*yt
if (c1.le.rt*rt)then
num=dw*xt+xtc
deno1=dw*xt+xtc
deno2=dw*yt+(xtcp/wg)
deno3=deno1*deno1+deno2*deno2
if(deno3.eq.0.0)then
goto 1
else
endif
taux=taux+(numx/dsqrt(deno3))*dAt
else
endif
1 enddo
enddo
torx=h*mu*(fn/At)*taux
if(dw.eq.-1.0d0) then
write(1,*)xtc,torx/(mu*fn*h)
else
endif
if(dw.eq.-.75d0) then
write(2,*)xtc,torx/(mu*fn*h)
else
endif
if(dw.eq.-.50d0) then
write(3,*)xtc,torx/(mu*fn*h)
else
endif
if(dw.eq.-.25d0) then
write(4,*)xtc,torx/(mu*fn*h)
else
endif
if(dw.eq.0.0d0) then
write(5,*)xtc,torx/(mu*fn*h)
else
endif
if(dw.eq.0.25d0) then
write(6,*)xtc,torx/(mu*fn*h)
else
endif
if(dw.eq.0.50d0) then
write(7,*)xtc,torx/(mu*fn*h)

```

```

else
endif
if(dw.eq.0.750d0) then
write(8,*)xtc,torx/(mu*fn*h)
else
endif
if(dw.eq.1.0d0) then
write(9,*)xtc,torx/(mu*fn*h)
else
endif
taux=0.0d0
enddo
enddo

close(1)
close(2)
close(3)
close(4)
close(5)
close(6)
close(7)
close(8)
close(9)

open(unit=1,file="grafica.txt")

write(1,*)"set xlabel' $\delta\omega$ '"
write(1,*)"set ylabel' $\chi_{TC}$ '"
write(1,*)"set ylabel' $\tau_x$ '"
write(1,*)"set xrange[-10.5:10.5]"
write(1,*)"set yrange[-1.2:1.2]"

write(1,*)"plot 'dw=-1-din.txt'ls 7 lc rgb'#038554' title""
write(1,*)"replot 'dw=-0.75-din.txt'ls 7 lc rgb'#2A8C4A' title""
write(1,*)"replot 'dw=-0.5-din.txt'ls 7 lc rgb'#009D71' title""
write(1,*)"replot 'dw=-0.25-din.txt'ls 7 lc rgb'#64C27B' title""
write(1,*)"replot 'dw=0-din.txt'ls 7 lc rgb'#68DDBD' title""
write(1,*)"replot 'dw=0.25-din.txt'ls 7 lc rgb'#64C27B' title""
write(1,*)"replot 'dw=0.5-din.txt'ls 7 lc rgb'#009D71' title""
write(1,*)"replot 'dw=0.75-din.txt'ls 7 lc rgb'#2A8C4A' title""
write(1,*)"replot 'dw=1-din.txt'ls 7 lc rgb'#038554' title""

call system ('gnuplot -p grafica.txt')
end

```


Apéndice F

Algoritmo de las curvas de nivel de la componente τ_y

```
implicit none
integer i,j,k,k1,k2,n,m
real*8 dw,xtc,xtcp,xt,yt,At,c1,wg,wot,xtc1,xtc0
real*8 numy,deno1,deno2,deno3,tauy,dAt,tory
real*8 pi,rt,rg,mu,fn,h,per,t

m=100
n=500
pi=3.1415926535d0
rt=1.0d0
rg=10.0d0
At=pi*rt*rt
mu=1.0d0
fn=1.0d0
h=0.250d0
wot=(31.0d0/30.0d0)*pi
wg=(16.0d0/15.0d0)*pi
per=2.0d0*pi/(wot)
xtc1=dfloat(rg)
xtc0=0.0d0
dAt=(rt*rt)/(dfloat(n)*dfloat(n))

open(unit=1,file='dw=-1-din.txt')
open(unit=2,file='dw=-0.75-din.txt')
open(unit=3,file='dw=-0.5-din.txt')
open(unit=4,file='dw=-0.25-din.txt')
open(unit=5,file='dw=0-din.txt')
open(unit=6,file='dw=0.25-din.txt')
open(unit=7,file='dw=0.5-din.txt')
open(unit=8,file='dw=0.75-din.txt')
open(unit=9,file='dw=1-din.txt')

tauy=0.0d0
```

```

do k1=-m,m,25
dw=dfloat(k1)/dfloat(m)
do k2=0,n,1
t=(per*dfloat(k2))/(dfloat(n))
xtc=xtc0+xtc1*dcos(wot*t)
xtcp=-wot*xtc1*dsin(wot*t)
do i=-n,n,1
xt=(rt*dfloat(i))/dfloat(n)
do j=-n,n,1
yt=(rt*dfloat(j))/dfloat(n)
c1=xt*xt+yt*yt
if (c1.le.rt*rt)then
numy=dw*yt+(xtcp/wg)
deno1=dw*xt+xtc
deno2=dw*yt+(xtcp/wg)
deno3=deno1*deno1+deno2*deno2
if(deno3.eq.0.0)then
goto 1
else
endif
tauy=tauy+(numx/dsqrt(deno3))*dAt
else
endif
1 enddo
enddo
tory=h*mu*(fn/At)*tauy
if(dw.eq.-1.0d0) then
write(1,*)xtc,tory/(mu*fn*h)
else
endif
if(dw.eq.-.75d0) then
write(2,*)xtc,tory/(mu*fn*h)
else
endif
if(dw.eq.-.50d0) then
write(3,*)xtc,tory/(mu*fn*h)
else
endif
if(dw.eq.-.25d0) then
write(4,*)xtc,tory/(mu*fn*h)
else
endif
if(dw.eq.0.0d0) then
write(5,*)xtc,tory/(mu*fn*h)
else
endif
if(dw.eq.0.25d0) then
write(6,*)xtc,tory/(mu*fn*h)
else
endif
if(dw.eq.0.50d0) then
write(7,*)xtc,tory/(mu*fn*h)

```

```

else
endif
if(dw.eq.0.750d0) then
write(8,*)xtc,tory/(mu*fn*h)
else
endif
if(dw.eq.1.0d0) then
write(9,*)xtc,tory/(mu*fn*h)
else
endif
tauy=0.0d0
enddo
enddo

close(1)
close(2)
close(3)
close(4)
close(5)
close(6)
close(7)
close(8)
close(9)

open(unit=1,file="grafica.txt")

write(1,*)"set xlabel' $\delta\omega$ '"
write(1,*)"set ylabel' $\chi_{TC}$ '"
write(1,*)"set ylabel' $\tau_x$ '"
write(1,*)"set xrange[-10.5:10.5]"
write(1,*)"set yrange[-1.2:1.2]"

write(1,*)"plot 'dw=-1-din.txt'ls 7 lc rgb'#038554' title""
write(1,*)"replot 'dw=-0.75-din.txt'ls 7 lc rgb'#2A8C4A' title""
write(1,*)"replot 'dw=-0.5-din.txt'ls 7 lc rgb'#009D71' title""
write(1,*)"replot 'dw=-0.25-din.txt'ls 7 lc rgb'#64C27B' title""
write(1,*)"replot 'dw=0-din.txt'ls 7 lc rgb'#68DDBD' title""
write(1,*)"replot 'dw=0.25-din.txt'ls 7 lc rgb'#64C27B' title""
write(1,*)"replot 'dw=0.5-din.txt'ls 7 lc rgb'#009D71' title""
write(1,*)"replot 'dw=0.75-din.txt'ls 7 lc rgb'#2A8C4A' title""
write(1,*)"replot 'dw=1-din.txt'ls 7 lc rgb'#038554' title""

call system ('gnuplot -p grafica.txt')
end

```


Apéndice G

Algoritmo de las curvas de nivel de la componente τ_z

```
implicit none
integer i,j,k,k1,k2,n
real*8 dw,xtc,xtcp,xt,yt,At,c1,wg,wot,xtc1,xtc0
real*8 numz,deno1,deno2,deno3,tauz,dAt,torz
real*8 pi,rt,rg,mu,fn,h,per,t,x(1:13)

n=1000
x=(-10.d0,-5.d0,-2.0d0,-1.0d0,-0.50d0,-0.10d0,0.0d0,0.10d0, &
& 0.50d0,1.0d0,2.0d0,5.0d0,10.0d0/)
pi=3.1415926535d0
rt=1.0d0
rg=10.0d0
At=pi*rt*rt
mu=1.0d0
fn=1.0d0
h=0.250d0
wot=(31.0d0/30.0d0)*pi
wg=(16.0d0/15.0d0)*pi
per=2.0d0*pi/(wot)
xtc1=dfloat(rg)
xtc0=0.0d0
dAt=(rt*rt)/(dfloat(n)*dfloat(n))

open(unit=1,file='xtc=-10.txt')
open(unit=2,file='xtc=-5.txt')
open(unit=3,file='xtc=-2.txt')
open(unit=4,file='xtc=-1.txt')
open(unit=5,file='xtc=-0.5.txt')
open(unit=6,file='xtc=-0.1.txt')
open(unit=7,file='xtc=0.txt')
open(unit=8,file='xtc=0.1.txt')
open(unit=9,file='xtc=0.5.txt')
open(unit=10,file='xtc=1.txt')
open(unit=11,file='xtc=2.txt')
```

```

open(unit=12,file='xtc=5.txt')
open(unit=13,file='xtc=10.txt')

tauz=0.0d0

do k1=-n,n,1
dw=dfloat(k1)/dfloat(n)
do k2=1,13,1
xtc=x(k2)
t=(dacos(xtc/xtc1))/wot
xtcp=-wot*xtc1*dsin(wot*t)
do i=-n,n,1
xt=(rt*dfloat(i))/dfloat(n)
do j=-n,n,1
yt=(rt*dfloat(j))/dfloat(n)
c1=xt*xt+yt*yt
if (c1.lt.rt*rt)then
numz=xt*(dw*xt+xtc)+yt*(dw*yt+(xtcp/wg))
deno1=dw*xt+xtc
deno2=dw*yt+(xtcp/wg)
deno3=deno1*deno1+deno2*deno2
if(deno3.eq.0.0)then
goto 1
else
endif
tauz=tauz+(numz/dsqrt(deno3))*dAt
else
endif
1 enddo
enddo
torz=mu*(fn/At)*tauz
if(xtc.eq.-10.0d0) then
write(1,*)dw,torz
else
endif
if(xtc.eq.-5.0d0) then
write(2,*)dw,torz
else
endif
if(xtc.eq.-2.0d0) then
write(3,*)dw,torz
else
endif
if(xtc.eq.-1.0d0) then
write(4,*)dw,torz
else
endif
if(xtc.eq.-.50d0) then
write(5,*)dw,torz
else
endif
if(xtc.eq.-.10d0) then

```

```

write(6,*)dw,torz
else
endif
if(xtc.eq.0.0d0) then
write(7,*)dw,torz
else
endif
if(xtc.eq.0.10d0) then
write(8,*)dw,torz
else
endif
if(xtc.eq.0.50d0) then
write(9,*)dw,torz
else
endif
if(xtc.eq.1.0d0) then
write(10,*)dw,torz
else
endif
if(xtc.eq.2.0d0) then
write(11,*)dw,torz
else
endif
if(xtc.eq.5.0d0) then
write(12,*)dw,torz
else
endif
if(xtc.eq.10.0d0) then
write(13,*)dw,torz
else
endif
tauz=0.0d0
enddo
enddo
close(1)
close(2)
close(3)
close(4)
close(5)
close(6)
close(7)
close(8)
close(9)
close(10)
close(11)
close(12)
close(13)

open(unit=1,file="grafica.txt")

write(1,*)"set xlabel ' $\delta\omega$ ' "
write(1,*)"set ylabel ' $\tau_z$ ' "

```

Algoritmo de las curvas de nivel de la componente τ_z

```
write(1,*)"set xrange[-1.05:1.05]"

write(1,*)"plot 'xtc=-10-din.txt'ls 7 lc 7 title""
write(1,*)"replot 'xtc=-5-din.txt'ls 7 lc rgb'#252440' title""
write(1,*)"replot 'xtc=-2-din.txt'ls 7 lc rgb'#2F2C79' title""
write(1,*)"replot 'xtc=-1-din.txt'ls 7 lc rgb'#0303B5' title""
write(1,*)"replot 'xtc=-0.5-din.txt'ls 7 lc rgb'#4040FB' title""
write(1,*)"replot 'xtc=-0.1-din.txt'ls 7 lc rgb'#318ce7' title""
write(1,*)"replot 'xtc=0-din.txt'ls 7 lc rgb'#98c3ed' title""
write(1,*)"replot 'xtc=0.1-din.txt'ls 7 lc rgb'#318ce7' title""
write(1,*)"replot 'xtc=0.5-din.txt'ls 7 lc rgb'#4040FB' title""
write(1,*)"replot 'xtc=1-din.txt'ls 7 lc rgb'#0303B5' title""
write(1,*)"replot 'xtc=2-din.txt'ls 7 lc rgb'#2F2C79' title""
write(1,*)"replot 'xtc=5-din.txt'ls 7 lc rgb'#252440' title""
write(1,*)"replot 'xtc=10-din.txt'ls 7 lc 7 title""

call system ('gnuplot -p grafica.txt')

end
```

Bibliografía

- [1] Preston F. W. "The theory and design of plate glass polishing Machines". Jour of the Soc. of Glass Tech. **XI**, 214-256 (1927)
- [2] S. I. Vinokur. "Kinematics of generating plane surfaces" in Generation of Optical Surfaces, K. J. Kumanin, ed. (Focal, 1962), pp 401-412
- [3] Norman J. Brown, "Computatioanlly directed axisymmetric aspheric figuring" Optical Enering Vol. 17, 602-620 (1978).
- [4] C. A. Hall and T. A. Pronsing. "Approximation methods in the computer numerically controlled fabrication of optical surfacing. Part. 1: finite dimensional material removal profile spaces". Journal of Numerical Analysis, Vol. 12, 67-84, (1992)
- [5] T. A. Porshing and C. A . Hall. "Computationally directed axisymmetric aspheric figuring (after N. J. Brown)". Appl. Opt. **35**, 4463-4470 (1966)
- [6] Victor Rupp. "The development of optical surface during the grinding process". Appl. Opt., **4**, pp. 743-748 (1965)
- [7] V. L. Gorbach. "The Kinematics of Working Modules of Optical Grinder-Polishers (Oboron-giz, 1958)", pp. 12-15.
- [8] V. V. Travin, "Investigation of the laws governing the rotation motion of the driven element of grinding-polishing machines", J.Opt. Technology, **72**, 266-270 (2005).
- [9] Carlock Acevedo, E. de J. "Análisis del movimiento de una herramienta de pulido que gira libremente y automatización parcial de una máquina pulidora comercial", Tesis de maestría (Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2005), pp. 39-45.
- [10] Cordero-Davila, A., Gutiérrez-Madrid, D. I. and Carlock-Acevedo, De J. E.. "Dynamical analysis of free tool rotation located on a glass rotating at a constant angular velocity". Applied Optics.(2023).
- [11] Madrid-Gütierrez, D. I. "Análisis dinámico de una herramienta rotando libremente sobre un vidrio que rota a una velocidad angular constante". Tesis de licenciatura. (Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2023).