



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS

SOLUCIÓN PERTURBATIVA DEL
MODELO DE RABI CUÁNTICO

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIATURA EN FÍSICA

P R E S E N T A :

KEVIN BLASS HIDALGO CASTRO

TUTOR:

JUAN MAURICIO TORRES GONZÁLEZ
JULIO 2020



Dedicatoria

*Dedicada a
mi familia.*

Resumen

El modelo de Rabi es uno de los modelos más sencillos y básicos encontrados dentro de la óptica cuántica pero a pesar de su simplicidad para expresar el comportamiento de un átomo con solo dos niveles dentro de una cavidad interactuando con un campo de radiación no ha sido resultado analíticamente de forma exacta. Dentro de la literatura se encuentran modelos similares pero restringidos bajo ciertas condiciones o despreciando términos del modelo original. Un modelo conocido es el modelo de Jaynes-Cummings propuesto para resolver este problema limitado a un pequeño régimen validez dentro de factor de acoplamiento. En este trabajo se propone resolver el modelo de Rabi desde una perspectiva diferente utilizando Teoría de Perturbaciones con un tratamiento puramente mecánico-cuántico. Planteamos que si nos fijamos en el límite donde la diferencia entre los dos niveles de energía del átomo tienden a cero permitiendo tomar este valor como un parámetro perturbativo. Mediante este parámetro obtendremos las soluciones tanto a las eigenenergías como a los eigenestados en serie de potencias. Compararemos el uso de este método con los resultados conocidos por el modelo de Jaynes-Cummings y los valores numéricos diagonalizando el Hamiltoniano respectivo a modelo de Rabi y analizaremos la validez de nuestra soluciones para tomarse como los valores del modelo de Rabi.

Introducción

La interacción entre el campo de radiación con la materia ha sido el principal tema de estudio dentro de la Óptica Cuántica, la cual es una rama de la física que ha progresado bastante tanto en la teoría como en la parte experimental. Incluso se puede considerar como una base importante para temas actuales como la computación cuántica. El estudio de sistemas campo-átomo dentro de una cavidad ha tenido un gran avance en la parte experimental poniendo como ejemplo circuitos electromagnéticos cuánticos (circuit-QED) [8], cavidades en electrodinámica cuántica (cavity QED) [9] y simulaciones cuánticas en átomos neutros y iones atrapados [10], algunos por mencionar.

El Modelo de Rabi [1] describe la interacción de luz con la materia a través del acoplamiento de un campo de radiación electromagnética (campo bosónico) con el sistema atómico más básico: un sistema de dos niveles [1]. Este problema puede ser tratado desde el marco de la física clásica como de la mecánica cuántica. Sin embargo, con el manejo de una puede en especial se logra una mayor riqueza en los resultados. Inicialmente se trataba el problema clásicamente utilizando campos electromagnéticos que satisfacen las ecuaciones de Maxwell hallando así el Hamiltoniano de interacción del sistema campo-átomo. Pero la falta de relación con los resultados que se obtenían experimentalmente llevo a la

necesidad de tratar al problema desde otro formalismo. La predicción de emisión y absorción espontánea de energía en el sistema no lograba ser explicado empleando física clásica, de este modo, el uso de los conceptos de la mecánica cuántica ajustaba los resultados obtenidos y observados de mejor forma. El modelo de Rabi brinda una manera sencilla de abordar el estudio cuántico de la interacción entre radiación y materia.

A pesar de ser el Modelo de Rabi “un modelo sencillo” no ha logrado ser resuelto de forma analítica debido a la falta de una segunda cantidad conservada. Un primer intento, conocido y estudiado en la literatura, fue propuesto originalmente en 1963 por E. T. Jaynes y F. W. Cummings. El Modelo de Jaynes-Cummings consiste en reducir al sistema a un pequeño régimen de acoplamiento comparado con la frecuencia del campo, de modo que es posible despreciar términos en las expresiones, un proceso totalmente mecánico cuántico. La exclusión de los términos en el modelo es conocida como Aproximación de Onda Rotante (RWA por sus siglas en inglés) que favorece a diagonalizar el Hamiltoniano del sistema y producir una cantidad conservada distinta a la energía. De esta forma el modelo es soluble para calcular tanto eigenvalores como eigenestados de manera analítica.

Otra solución introducida en 2011 fue presentada por D. Braak proponiendo un criterio para la integrabilidad cuántica mostrando que el modelo de Rabi es integrable debido a la presencia de una simetría discreta [5]. Braak propone la integrabilidad del espectro de energías que consiste de dos partes, el espectro regular y el espectro excepcional, dados por los ceros de la función trascendental $G_{\pm}(x)$ en la variable x . El espectro de energías regular es dado por las raíces de la función $G_{\pm}(x)$ mientras el espectro excepcional son valores especiales en parámetros de la función que no corresponden a raíces de G_{\pm} . En este documento, Braak encuentra la solución para obtener el espectro de energías, sin embargo, no menciona nada de los eigenestados del modelo de tal manera que podamos calcular observables como la inversión de población encontrada en distintos textos.

Así, el modelo de Rabi aun no cuenta con una solución exacta y las

soluciones que se encuentran se permiten bajo ciertas condiciones, para esto, el propósito de este trabajo es resolver de manera analítica el Modelo de Rabi mediante el uso de Teoría de Perturbaciones. Proponemos en fijarnos en el límite donde la diferencia entre los dos niveles de energía del átomo tiende a cero y ser el parámetro perturbativo. Hallaremos los eigenvalores y eigenestados hasta segundo y tercer orden, y mostraremos una comparación con los eigenvalores y estados numéricos de Rabi y analíticos de Jaynes-Cummings. Calcularemos analítica y numéricamente la observable de inversión de población $W(t)$ utilizando nuestras soluciones con teoría de perturbaciones y las compararemos con los resultados obtenidos diagonalizando numéricamente el Hamiltoniano de Rabi.

Esta tesis esta organizada de la siguiente manera. El primer capítulo contiene fundamentos para la cuantización del campo electromagnético, asimismo, se escribe algunos conceptos matemáticos que nos ayudaran a la diagonalización del Hamiltoniano de Rabi. En el segundo capítulo se desarrolla el Hamiltoniano de Rabi así como algunas propiedades conocidas del modelo. Resolvemos y calculamos el modelo de Jaynes-Cummings y describimos algunas propiedades conocidas para el modelo de Rabi. En el tercer capítulo estará la aplicación del método perturbativo al modelo hallando las correcciones a los eigenvalores y eigenestados perturbados hasta segundo y tercer orden, mostrando la comparación del método con los valores numéricos del modelo de Rabi y Jaynes-Cummings. Para el cuarto capítulo mostramos la dinámica de los estados numéricos y analíticos de JCM, RM y teoría de perturbaciones, respectivamente, y analizamos el colapso y resurgimiento de las probabilidades en las oscilaciones e Rabi. Finalmente, en el quinto capítulo contendrá las conclusiones seguido de la referencias bibliográficas.

Índice General

Resumen	v
Introducción	vii
1 Fundamentos del campo electromagnético cuantizado	1
1.1 Campo electromagnético cuantizado	1
1.2 Oscilador armónico	4
1.3 Estado coherente	9
1.4 Operador de desplazamiento	11
2 Interacción luz-átomo	15
2.1 Modelo Rabi	15
2.2 Modelo de Jaynes-Cummings	20
2.3 Algunas propiedades conocidas del modelo de Rabi . . .	24
2.3.1 Diagonalización mediante el operador desplaza- miento	26
2.3.2 Estados desacoplados	29
3 Teoría de Perturbaciones en el Modelo de Rabi	33
3.1 Teoría	34
3.2 Rabi	37
3.3 Resultados	41
4 Dinámica	53
4.1 Modelo de Jaynes-Cummings	54
4.2 Estados con teoría de perturbaciones	60

<i>Índice General</i>	xi
5 Conclusiones	69
Bibliografía	75

CAPÍTULO 1

Fundamentos del campo electromagnético cuantizado

1.1. Campo electromagnético cuantizado

Una forma de cuantizar el campo electromagnético es comenzar con el caso más simple y conveniente donde tomaremos a un campo de un solo modo confinado en una cavidad unidimensional de longitud L a lo largo del eje \hat{z} [2]. La cavidad esta compuesta por paredes perfectamente conductoras en $z = 0$ y $z = L$ como se muestra en la figura 1.1 Dentro de la cavidad, asumimos que no hay fuentes de radiación, es decir, sin corrientes ni cargas y ningún medio dieléctrico en la cavidad. Considerando estas características, podemos suponer que dentro de la cavidad hay espacio libre y aprovechar las ecuaciones de Maxwell en el vacío, ecs. (1.1) - (1.4), escritas en unidades del Sistema Internacional. Estas ecuaciones relacionan los campos vectoriales eléctricos y magnéticos, y

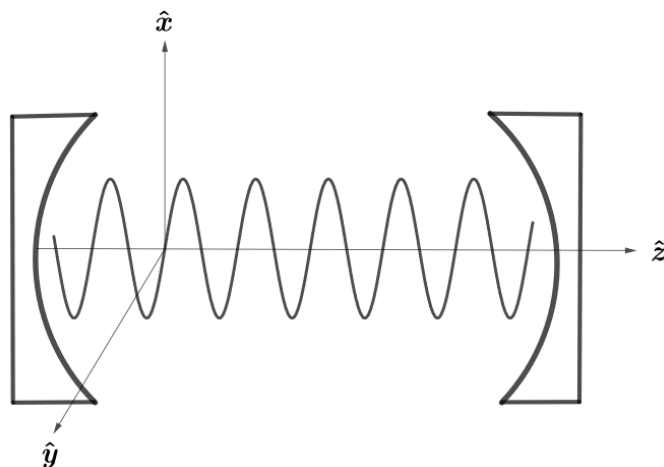


Figura 1.1: Cavidad de longitud L con paredes conductoras. El campo electromagnético está polarizado a lo largo del eje \hat{x} .

se leen de la forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

donde $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, son los campos eléctricos y magnéticos, respectivamente, $\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}$ con c como la velocidad de la luz en el vacío, ϵ_0 y μ_0 son la permitividad y permeabilidad en el espacio libre, respectivamente.

Para simplificar los cálculos, conviene tomar la dependencia espacial del campo eléctrico a lo largo del eje \hat{z} alineado con la cavidad resonante. En los límites de la cavidad, imponemos que las condiciones de frontera se disipe el campo eléctrico. Además, el campo eléctrico estará

polarizado linealmente en dirección \hat{x} , es decir, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{x}}E_x(z, t)$. Por lo tanto, el campo para un solo modo que satisface las ecuaciones de Maxwell y las condiciones de frontera dentro de la cavidad se lee como:

$$E_x(z, t) = \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} x(t) \sin(kz) \quad (1.5)$$

donde $x(t)$ es un factor dependiente del tiempo con dimensiones de longitud. La frecuencia del modo viene descrita por ω , el número de onda $k = \omega/L$ y $V = LA$ es el volumen de la cavidad (A es el área transversa del resonador óptico) [19]. De acuerdo con la onda electromagnética, la componente del campo magnético que no es cancelada dentro de la cavidad podemos obtenerla de la ecuación (1.10), conseguimos que B_y se escribe como:

$$B_y(z, t) = \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} \frac{\dot{x}(t)}{kc^2} \cos(kz). \quad (1.6)$$

De manera clásica, el Hamiltoniano para el campo electromagnético de un modo es:

$$H = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_V d\tau (E_x^2 + c^2 B_y^2) \quad (1.7)$$

donde la integración es sobre el volumen de la cavidad. Sustituyendo en la ecuación (1.7) las expresiones de E_x y B_y nos queda que H es:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} (\omega^2 x^2 + \dot{x}^2) \\ &= \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 x^2). \end{aligned} \quad (1.8)$$

De esta última ecuación (1.8) obtenemos el Hamiltoniano del campo de radiación para un solo modo que implícitamente es equivalente al Hamiltoniano del oscilador armónico por unidad de masa donde los campos eléctrico y magnético toma los papeles de posición y momento canónico para un sistema clásico [2]. Para pasar al enfoque de la mecánica cuántica, simplemente usamos la regla de correspondencia para reemplazar por

sus equivalentes operadores \hat{p} y \hat{x} . Estos operadores deben satisfacer la relación de conmutación canónica:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\mathbb{1} \quad ; \quad [\hat{x}, \hat{x}] = [\hat{p}, \hat{p}] = 0. \quad (1.9)$$

Los campos eléctricos y magnéticos escritos como operadores quedaran como:

$$\hat{E}_x(z, t) = \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} \hat{x}(t) \sin(kz) \quad (1.10)$$

y

$$\hat{B}_y(z, t) = \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} \frac{\hat{p}(t)}{kc^2} \cos(kz). \quad (1.11)$$

con $\hat{x} = p$ el momento canónico. Por tanto, el Hamiltoniano se transforma en:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2\hat{x}^2) \quad (1.12)$$

1.2. Oscilador armónico

En mecánica cuántica podemos encontrar la expresión del Hamiltoniano para el oscilador armónico unidimensional como:

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}, \quad (1.13)$$

aquí $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ y $\hat{x} = \hat{x}$ son operadores, ω la frecuencia angular del oscilador clásico relacionada con la constante de Hooke, k . Más adelante omitiremos la distinción en la notación de los operadores por simplicidad. Para simplicidad de notación despreciaremos el signo de operadores.

Definiendo a $x \doteq m\omega x$, de tal forma que

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + x^2), \quad (1.14)$$

y tratando de expresar la suma de cuadrados como una multiplicación de términos lineales:

$$p^2 + x^2 \rightarrow (x + ip)(x - ip) = p^2 + x^2 + i(px - xp),$$

resulta que este problema puede resolverse muy fácilmente de manera “algebraica” por un truco descubierto por P. A. M. Dirac [18]. Definimos:

$$a \doteq \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (m\omega x + ip) \quad (1.15)$$

$$a^\dagger \doteq \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (m\omega x - ip) \quad (1.16)$$

operadores diferenciales de aniquilación y creación, respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned} a^\dagger a |\psi\rangle &= \frac{1}{2\hbar\omega} (m\omega x - ip) (m\omega x + ip) |\psi\rangle \\ &= \frac{1}{2\hbar\omega} (p^2 + m^2\omega^2 x^2 - m\hbar\omega) |\psi\rangle \\ &= \frac{1}{2\hbar m\omega} (p^2 + m^2\omega^2 x^2) |\psi\rangle - \frac{1}{2} |\psi\rangle, \end{aligned}$$

análogamente

$$a a^\dagger |\psi\rangle = \frac{1}{2\hbar\omega} (p^2 + m^2\omega^2 x^2) |\psi\rangle + \frac{1}{2} |\psi\rangle,$$

así, el Hamiltoniano referente al oscilador armónico se escribe de la forma:

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(a a^\dagger - \frac{1}{2} \right) \quad (1.17)$$

De la ecuación (1.17) podemos ver que las relaciones de conmutación entre a y a^\dagger son semejantes a las de x y p :

$$[a, a^\dagger] = \mathbb{1} \quad (1.18)$$

$$[a, a] = 0 = [a^\dagger, a^\dagger]. \quad (1.19)$$

En términos de a y a^\dagger , los campos eléctricos y magnéticos para un solo modo, ecs. (1.10) y (1.11), son transformados en operadores:

$$E_x(z, t) = \varepsilon (a + a^\dagger) \sin(kz) \quad (1.20)$$

$$B_y(z, t) = \frac{\beta}{i} (a - a^\dagger) \cos(kz), \quad (1.21)$$

donde $\varepsilon = (\hbar\omega/\epsilon_0 V)^{1/2}$ y $\beta = (\mu_0/\kappa) (\epsilon_0 \hbar\omega^3/V)^{1/2}$ contiene las dimensiones de campo eléctrico y magnético respectivamente.

Tomemos ahora el Hamiltoniano de la expresión (1.17) para un solo modo y denotemos un eigen-estado de energía para un fotón como $|n\rangle$ referente al oscilador armónico, y su eigen-valor de energía, E_n , quedando la ecuación de eigen-valores como:

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle \quad (1.22)$$

o bien,

$$\hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n|n\rangle, \quad (1.23)$$

donde $|n\rangle$ puede tomar los valores de $0, 1, \dots, n$. Aplicando el operador a en ambos lados por la izquierda y reagrupando los términos, obtenemos:

$$\hbar\omega \left(a a^\dagger + \frac{1}{2} \right) a|n\rangle = E_n a|n\rangle$$

o bien,

$$H a|n\rangle = (E_n - \hbar\omega) a|n\rangle. \quad (1.24)$$

Por otro lado, podemos obtener algo análogo a (1.24) aplicando ahora el operador a^\dagger sobre la otra expresión para H , ec. (1.17):

$$H a^\dagger|n\rangle = (E_n + \hbar\omega) a^\dagger|n\rangle. \quad (1.25)$$

Estas expresiones (1.24) y (1.25) implican que $a|n\rangle$ y $a^\dagger|n\rangle$ también son eigen-estados de H con valores discretizados por un cuanto de energía $\mp\hbar\omega$, respectivamente.

Al producto de los operadores $a^\dagger a$ también es conocido como el operador de número, es decir:

$$N \doteq a^\dagger a \quad (1.26)$$

de esta forma, tenemos una importante relación entre el operador de número (ó operador numérico) y el Hamiltoniano:

$$H = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right). \quad (1.27)$$

H ahora es función lineal del N y N puede ser diagonalizable simultáneamente con H .

Tomando nuevamente el eigen-estado de energía $|n\rangle$, y el valor de energía n ,

$$N|n\rangle = n|n\rangle,$$

de la expresión (1.27) se puede ver claramente que:

$$H|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega |n\rangle,$$

resultando que los eigen-valores de la energía son dados por:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega. \quad (1.28)$$

Conviene notar que los resultados que conseguimos para el campo con un solo modo dentro de una cavidad puede ser generalizado para un campo de radiación multimodo. Para esto, debemos tener en cuenta las mismas suposiciones que tomamos anteriormente con el campo en el espacio libre, ver [19]. Por lo tanto, la energía del oscilador armónico por unidad de masa, ec. (1.27), para campos de radiación de multimodos es escrita de la forma:

$$H = \frac{1}{2} \sum_j \hbar\omega_j \left(N_j + \frac{1}{2} \right) \quad (1.29)$$

y un estado de número de fotones multimodo es el producto de los estados numéricos de todos los modos:

$$|n_1\rangle|n_2\rangle|n_3\rangle \cdots \doteq |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle = |\{n_j\}\rangle. \quad (1.30)$$

La ecuación de eigen-estados para H , ec. (1.29), son tales que:

$$H|\{n_j\}\rangle = E|\{n_j\}\rangle, \quad (1.31)$$

donde las eigen-energías vienen dadas por:

$$E_n = \sum_j \hbar\omega_j \left(n_j + \frac{1}{2} \right). \quad (1.32)$$

En el estudio del acoplamiento del campo con la materia, la mayoría de las veces se hace a través del campo eléctrico que interactúa con un momento dipolar. La expresión para el campo eléctrico de una onda plana de un sólo modo viene dada como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \mathbf{e}_x [\hat{a}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+i\omega t} - \hat{a}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+i\omega t}] \quad (1.33)$$

donde \mathbf{k} es el vector de onda y \mathbf{e}_x el vector de polarización de la onda [19]. En gran parte de la óptica cuántica, las dimensiones entre la variación espacial del campo y el sistema atómico pueden ser muy grandes. Para radiación óptica, la longitud de onda, λ , es del orden de miles de Å, es decir:

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{|\mathbf{k}|} \gg |\mathbf{r}_a|, \quad (1.34)$$

donde $|\mathbf{r}_a|$ es la longitud propia del tamaño del átomo. De este modo podemos aproximar la exponencial como:

$$e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \approx 1, \quad (1.35)$$

así el operador de campo eléctrico quedará escrito como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{E}(t) = i \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \mathbf{e}_x [\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}], \quad (1.36)$$

la naturaleza del operador de campo eléctrico se presenta en los operadores de creación y aniquilación.

1.3. Estado coherente

Los estados coherentes fueron discutidos por primera vez por Erwin Schrödinger como una solución especial a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo del oscilador armónico mecánico y se convirtieron en la base de la Óptica Cuántica, [3]. Además, los estados coherentes tienen la característica de ser estados con incertidumbre mínima para el oscilador armónico, es decir, se cumplen la igualdad en la relación del principio de incertidumbre de Heisenber, [22]. Un estado coherente $|\alpha\rangle$ es un eigen-estado del operador a , es decir:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (1.37)$$

Es importante recordar que $a^\dagger \neq a$, a no es Hermítico, de modo que los eigenvalores α no necesariamente serán reales ($\alpha \in \mathbb{C}$). Para encontrar la expresión de los estados coherentes $|\alpha\rangle$, será equivalente a encontrar los coeficientes C_n en:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle, \quad (1.38)$$

donde los coeficientes C_n que acompañan al conjunto de vectores $\{|n\rangle\}$ del oscilador armónico forman una base completa del espacio de Hilbert. Así, cualquier vector puede escribirse como una combinación lineal de los vectores de la base.

Recordando que la acción del operador a sobre un estado $|n\rangle$ es de la forma:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (1.39)$$

y la ecuación que tenemos que plantear es:

$$a \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle$$

o bien,

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha C_n |n\rangle.$$

Si expandimos e igualáramos los términos correspondientes a cada estado $|n\rangle$ obtendríamos la relación de recurrencia para C_n :

$$C_n \sqrt{n} = \alpha C_{n-1}. \quad (1.40)$$

Teniendo en cuenta que para el estado base $a|0\rangle = 0$, es fácil ver que cada C_n dependerá únicamente del primer valor C_0 de la expresión (1.40), es decir, cuando $n = 1$. Así, despejando a C_n la relación de recurrencia se escribirla como:

$$C_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0. \quad (1.41)$$

Con esto, el estado coherente $|\alpha\rangle$ queda de la forma:

$$|\alpha\rangle = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.42)$$

Solo faltaría encontrar el coeficiente C_0 , pero para ello utilizamos la condición de normalización de $|\alpha\rangle$ de tal manera que:

$$1 = \langle \alpha | \alpha \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} |C_0|^2 = e^{|\alpha|^2} |C_0|^2.$$

Tomando raíz cuadrada en los lados extremos de la última ecuación y despejando $|C_0|$ se encuentra:

$$|C_0| = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}. \quad (1.43)$$

Podemos considerar, sin pérdida de generalidad, que C_0 es real. Dicho de otra forma, la fase que pueda tener será global y no es una observable, entonces:

$$C_0 = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}. \quad (1.44)$$

Por lo tanto, un estado coherente puede ser de la forma:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.45)$$

Por ahora, $|\alpha\rangle$ es un eigenestado del operador a y solo parece una curiosidad matemática. A continuación, veremos que un estado coherente puede ser escrito como la aplicación del operador unitario de desplazamiento al estado base del oscilador armónico. Este es un resultado muy importante ya que si queremos construir un estado coherente, podemos actuar sobre el estado de energía más bajo el operador desplazamiento ($|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$).

1.4. Operador de desplazamiento

Introducimos al operador desplazamiento por ser otra forma de definir a un estado coherente mediante la aplicación de este operador unitario sobre el estado de mínima energía del oscilador armónico cuántico. Para entender el uso de este operador, será importante comprender la operación que éste produce sobre los operadores de posición x y momento p del oscilador.

Comencemos escribiendo a x y p en términos de los operadores de creación y aniquilación que podemos obtener fácilmente de las ecuaciones (1.16) y (1.15):

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \quad (1.46)$$

$$p = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a - a^\dagger). \quad (1.47)$$

Como el nombre lo indica para el operador desplazamiento, si tenemos al operador de posición x , lo que queremos hacer es una cierta operación que transforme a este operador en:

$$x \longrightarrow x - x_0.$$

donde $x_0 = x_0 \cdot \mathbb{1}$. Para saber como se transforma el operador x debemos multiplicar por un operador unitario D y obligar a obtener:

$$DxD^\dagger = x - x_0 \quad (1.48)$$

que será justo desplazar x . Además, también queremos desplazar al operador p análogo a (1.48):

$$DpD^\dagger = p - p_0. \quad (1.49)$$

Si sustituimos los valores de la ec. (1.46) (y ec. (1.47)) sobre la ecuación (1.48) (y ec. (1.49)), respectivamente, llegamos a que:

$$D(a + a^\dagger)D^\dagger = a + a^\dagger - x_0\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} \quad (1.50)$$

$$D(a - a^\dagger)D^\dagger = a - a^\dagger - p_0i\sqrt{\frac{2}{\hbar m\omega}}. \quad (1.51)$$

Con estas ecuaciones podemos averiguar lo que hace D . Sumando las ecs. (1.50) y (1.51):

$$DaD^\dagger = a - \alpha, \quad (1.52)$$

donde $\alpha = \sqrt{m\omega/2\hbar}(x_0 + ip_0/m\omega)$. Si nos fijamos en este valor, α es semejante a la expresión para a , ecuación (1.16), sin embargo $\alpha \in \mathbb{C}$. La expresión análoga para a^\dagger es obtenida simplemente aplicando el Dagger a la ec. (1.52):

$$Da^\dagger D^\dagger = a^\dagger - \alpha^*. \quad (1.53)$$

Podemos comenzar a sacar algunas propiedades importantes deducidas de las ecuaciones (1.52) y (1.53) que son:

$$[a, D] = \alpha D \quad (1.54)$$

$$[a^\dagger, D^\dagger] = -\alpha^* D^\dagger. \quad (1.55)$$

Otra propiedad importante de notar es la acción del conmutador (1.54) sobre el estado base $|0\rangle$:

$$[a, D]|0\rangle = aD|0\rangle = \alpha D|0\rangle,$$

habiendo tomado en cuenta la expresión (1.39) para a . Claramente es de la misma forma que la expresión (1.37) para la ecuación de eigen-estados del operado a , por lo tanto:

$$|\alpha\rangle = D|0\rangle. \quad (1.56)$$

Un estado coherente $|\alpha\rangle$ es precisamente el operador D aplicado sobre el estado $|0\rangle$. Este resultado es importante porque si queremos construir un estado coherente, hacemos actuar sobre el estado de mínima energía el operador D . Además, necesariamente $D = D(\alpha)$. Asimismo, si $\alpha = 0$:

$$|0\rangle = D(0)|0\rangle = \mathbb{1}|0\rangle \quad (1.57)$$

esto es, $D(\alpha = 0) = \mathbb{1}$

Definimos al operador desplazamiento, $D(\alpha)$, como:

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \quad (1.58)$$

y vemos que la forma del operador $D(\alpha)$ cumple con los requisitos que hemos impuesto. Una forma distinta de convencerse que el estado coherente (1.56) es equivalente a un eigen-estado de la ec. (1.37) para a es usando el teorema de Baker-Campbell-Hausdorff para el producto de operadores[23]:

$$e^{\hat{A} + \hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-[\hat{A}, \hat{B}]/2} \quad (1.59)$$

donde \hat{A} y \hat{B} satisfacen la relación de conmutación:

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] = 0.$$

Cuando usamos el teorema de Baker-Campbell-Hausdorff sobre el estado coherente (1.56):

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} |0\rangle$$

la relación $a|0\rangle = 0$ implica que:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle.$$

Utilizando la expresión de la exponencial en forma de serie obtenemos:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} a^{\dagger n} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \sqrt{n!} |n\rangle$$

o bien,

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1.60)$$

concordando con la representación del estado coherente en términos de estados del número de fotón.[3]

Por lo tanto, el efecto de aplicar el operador en una transformación de similitud a los operadores de escalera, resulta en su desplazamiento:

$$\begin{aligned} D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) &= a + \alpha \\ D(\alpha) a D^\dagger(\alpha) &= a - \alpha \end{aligned} \quad (1.61)$$

Otras propiedades del operador son:

1. $D^\dagger(\alpha) = D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha)$
2. $D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha$
3. $D^\dagger(\alpha^\dagger) a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*$
4. $D(\alpha + \beta) = D(\alpha) D(\beta) e^{-\text{Im}(\alpha\beta^*)}$
5. $D^\dagger(\alpha) a^\dagger a D(\alpha) = (a^\dagger + \alpha^*)(a + \alpha)$

CAPÍTULO 2

Interacción luz-átomo

2.1. Modelo Rabi

La interacción de un campo de radiación con la materia es encontrado en distintas partes dentro de la literatura. Se trata primero el problema utilizando física clásica pero este procedimiento no suele ser el más conveniente. Existen diversos experimentos donde no es suficiente este tratamiento para explicar y predecir los resultados observados experimentalmente y para esto es conveniente tratar al problema desde otra perspectiva utilizando la mecánica cuántica que también se encuentra en la literatura. Esto puede ser observado, por ejemplo, en la emisión espontánea en un sistema atómico.

Es importante notar que aún con el sistema más básico que se aplica a la interacción de un campo de radiación de un modo normal del campo electromagnético con un átomo de dos niveles, se puede obtener

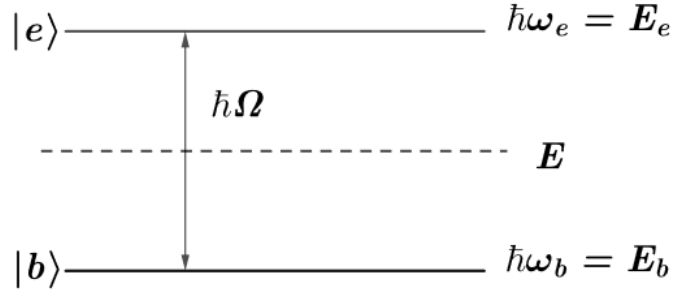


Figura 2.1: Diagrama de energía atómica tomando como origen el centro de los dos niveles. Figura toma de [19]

una mayor riqueza en los resultados tratando el problema con mecánica cuántica. Por un lado con la teoría clásica conseguimos las oscilaciones de Rabi para la inversión atómica [2], mientras la teoría cuántica da resultados más generales prediciendo fenómenos de colapso y resurgimiento.

Hasta este punto solo hemos cuantizado los campos de luz y utilizado herramientas matemáticas para reescribirlos a una forma más conveniente, además de la ausencia de alguna interacción con la materia. Ahora, analizaremos los efectos cuánticos que surgen en la interacción del campo de radiación cuantificado con el sistema atómico de dos niveles y para hacer esto, primero acoplaremos un átomo a una onda electromagnética utilizando el método de aproximación de dipolo y aproximación de onda rotante (RWA por sus siglas en inglés).

Consideremos al átomo como un dipolo con momento dipolar $\mathcal{P} \doteq e\vec{r}$, donde \vec{r} indica la posición relativa del electrón respecto del protón [3]. La aproximación dipolar indica que el cambio del campo electromagnético, \hat{E} , sobre el tamaño del átomo no cambia y tiene una energía potencial del dipolo dado por:

$$H_{\vec{r} \cdot \hat{E}} = -e\vec{r} \cdot \hat{E} \quad (2.1)$$

Considerando la presencia de un átomo sobre un campo, por sencillez, ocupamos un que cuenta con un núcleo y un electrón de equivalencia

y suponiendo que solo tiene dos niveles atómicos para estar en resonancia con el campo, así, la interacción del campo de radiación \hat{E} es descrita por el Hamiltoniano:

$$H = H_A + H_F + H_{\vec{r}E} \quad (2.2)$$

donde H_A y H_F son las energías del átomo y el campo de radiación, respectivamente, y \vec{r} el vector de posición del electrón.

El Hamiltoniano respectivo al campo de radiación H_F esta escrito en términos de los operadores de creación y destrucción:

$$H_F = \hbar\omega (a^\dagger a) \quad (2.3)$$

donde el termino cero de energía en H_F se ha eliminado por no contribuir en la dinámica del sistema.

Denotemos el nivel superior de energía $E_e \doteq \hbar\omega_e$ por el estado $|e\rangle$ y nivel de energía bajo $E_b \doteq \hbar\omega_b$ con el estado $|b\rangle$. Donde los estados $\{|e\rangle, |b\rangle\}$ forman un conjunto completo de eigen-estados de energía del Hamiltoniano H_A del átomo, esto es, $\sum_j |j\rangle\langle j| = \mathbb{1}$, con $j = e, b$ [3]. Entonces:

$$H_A = \sum_j E_j |j\rangle\langle j|, \quad (2.4)$$

tomando la representación de los vectores de la forma:

$$|e\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

y

$$|b\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

la representación matricial de H_A del átomo toma la forma:

$$H_A = E\mathbb{1} + \frac{1}{2}\hbar\Omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donde $E \doteq \frac{1}{2}(E_e + E_b)$ y $\Omega \doteq \omega_e - \omega_b$ indica la frecuencia de transición. Olvidaremos la constante E del Hamiltoniano H_A semejante a la constante del Hamiltoniano del campo H_F . Este termino equivale a un cambio de origen de energías, pues se ha tomado el origen de energías en el centro de transición atómica, figura 2.1, así:

$$H_A = \frac{1}{2}\hbar\Omega\sigma_z \quad (2.7)$$

donde hemos tomado la definición de las matrices de Pauli.

Retomando nuevamente la energía de interacción del campo de radiación, podemos expresar $e\vec{r}$ en términos de los operadores de transición:

$$e\vec{r} = \sum_{i,j} e|i\rangle\langle i|\vec{r}|j\rangle\langle j| = \sum_{i,j} \mathcal{P}_{ij}\sigma_{ij} \quad (2.8)$$

donde $\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|$ y $\mathcal{P}_{ij} = e\langle i|\vec{r}|j\rangle$ son los elementos de matriz de transición del dipolo eléctrico. Por sencillez, asumiremos que \mathcal{P}_{ij} es real [2]. Considerando la aproximación dipolar, evaluamos el operador de campo eléctrico, para un solo modo, en la posición del centro de masa del átomo. De esta forma, de la expresión para el operador de campo eléctrico (1.36) evaluado en la posición del átomo en el origen obtenemos:

$$\hat{E} = i \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \vec{e} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (2.9)$$

donde hemos tomado nuevamente a \hat{E} polarizado linealmente por sencillez en los cálculos. Sustituyendo las expresiones para H_A , H_F , $e\vec{r}$ y \hat{E} en la ecuación (2.2), el Hamiltoniano de la interacción del operador de campo eléctrico viene siendo de la forma:

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\Omega\sigma_z + \sum_{i,j} g_{ij}\sigma_{ij} (a + a^\dagger) \quad (2.10)$$

donde

$$g_{ij} = -\frac{\mathcal{P}_{ij} \cdot \mathcal{E}\vec{e}}{\hbar} \quad (2.11)$$

es la constante de acoplamiento y $\mathcal{E} = (\hbar\omega/2\epsilon_0V)^{1/2}$. Para $\mathcal{P}_{ij} = \mathcal{P}_{ji}$, expresamos:

$$g_{ij} = g_{ji} \doteq g \quad (2.12)$$

de esta forma escribimos el Hamiltoniano total del sistema interacción campo-átomo (2.10) como:

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\Omega\sigma_z + \hbar g(\sigma_- + \sigma_+)(a + a^\dagger) \quad (2.13)$$

donde hemos tomado la notación de:

$$\sigma_z = \sigma_{ee} - \sigma_{bb} = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|, \quad (2.14)$$

$$\sigma_+ = \sigma_{eb} = |e\rangle\langle b|, \quad (2.15)$$

$$\sigma_- = \sigma_{be} = |b\rangle\langle e| \quad (2.16)$$

expresadas en forma matricial y que satisfacen el álgebra:

$$[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_z, \quad (2.17)$$

$$[\sigma_-, \sigma_z] = 2\sigma_-. \quad (2.18)$$

La acción del operador σ_+ sobre el estado base del átomo, $|b\rangle$, es llevarlo al estado excitado $|e\rangle$ del átomo y el operador σ_- toma al estado excitado $|e\rangle$ para llevarlo al estado base $|b\rangle$ del átomo.

La ecuación (2.13) es conocida como el Hamiltoniano del modelo de Rabi. En capítulos posteriores retomaremos esta expresión lo cual será el propósito principal de esta tesis por resolver en forma analítica recurriendo a un método de aproximación utilizado dentro del formalismo de la mecánica cuántica. Ahora veremos una solución al Modelo de Rabi la cual incorpora la Aproximación de Onda Rotante (RWA) reduciendo el Hamiltoniano de la parte de interacción sistema campo-átomo, ec. (2.13). El Hamiltoniano resultante de aplicar este procedimiento, es conocida como Modelo de Jaynes-Cummings y se presenta como referencia, pues es el más conocido en la literatura.

2.2. Modelo de Jaynes-Cummings

Uno de los modelos más importantes en óptica cuántica es el modelo de Jaynes-Cummings (JCM por sus siglas en inglés). El modelo fue propuesto originalmente por E. T. Jaynes y F. W. Cummings en 1963 para aclarar los efectos del comportamiento de los átomos que interactúan con un campo electromagnético en un proceso totalmente mecánico cuántico [21]. Como se ha mencionado antes, JCM considera un único modo del campo electromagnético con un único átomo de dos niveles encerrado en el interior de una cavidad óptica de dimensiones tales que sólo existe en su interior un modo capaz de interactuar con la transición atómica elegida.

El hamiltoniano de Jaynes-Cummings se obtiene utilizando la aproximación de onda rotante al Hamiltoniano del sistema campo-átomo, ecuación (2.13), específicamente al término de la interacción:

$$H_{\vec{r},\hat{E}} = \hbar g (\sigma_- a + \sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger + \sigma_+ a^\dagger).$$

La aproximación desprecia los términos $\sigma_+ a^\dagger$ y $\sigma_- a$ en la parte de interacción y, para respaldar esta justificación, debemos pasar primero a un marco de interacción con respecto al Hamiltoniano de referencia, denotada como:

$$H_0 = \omega a^\dagger a + \frac{\Omega}{2} \sigma_z \quad (2.19)$$

a través de la transformación unitaria:

$$U(t) = e^{iH_0 t} \quad (2.20)$$

afectando tanto a vectores de estado como a operadores en la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |\bar{\Psi}\rangle &= U|\Psi\rangle \\ \bar{H}_{\vec{r},\hat{E}} &= UH_{\vec{r},\hat{E}}U^\dagger \end{aligned} \quad (2.21)$$

definiendo a \bar{H} como el marco de interacción. Escribiendo al Hamiltoniano total de la forma:

$$H = H_0 + H_{\vec{r},\hat{E}}, \quad (2.22)$$

H y los estados $|\Psi\rangle$ satisfacen la ecuación de Schrödinger:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle, \quad (2.23)$$

ahora bien, derivando respecto al tiempo los estados en el marco de interacción:

$$\begin{aligned} i|\dot{\bar{\Psi}}(t)\rangle &= iU(iH_0)|\Psi\rangle + iU|\dot{\Psi}(t)\rangle \\ &= U(t)[H - H_0]|\Psi(t)\rangle = U(t)H_{\vec{r},\hat{E}}U^\dagger(t)U(t)|\Psi(t)\rangle \end{aligned}$$

de esta forma, la ecuación de Schrödinger es valida luego de la transformación, es decir:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\bar{\Psi}\rangle = \bar{H}_{\vec{r},\hat{E}}|\bar{\Psi}\rangle \quad (2.24)$$

la cual depende ahora del Hamiltoniano de interacción. Para ver como se transforma explícitamente la acción $\bar{H}_{\vec{r},\hat{E}}$, sustituyamos el valor de H_0 en la transformación unitaria, esto es:

$$\bar{H}_{\vec{r},\hat{E}} = ge^{i\Omega t\sigma_z/2}(\sigma_+ + \sigma_-)e^{-i\Omega t\sigma_z/2}e^{ia^\dagger a\omega t}(a + a^\dagger)e^{-ia^\dagger a\omega t} \quad (2.25)$$

notando que los operadores de campo y atómicos conmutan.

Calculando primero la parte atómica utilizando la representación de matrices de Pauli 2x2, un termino será:

$$\begin{aligned} e^{i\Omega t\sigma_z/2}\sigma_+e^{-i\Omega t\sigma_z/2} &= \begin{pmatrix} e^{i\Omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Omega t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\Omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\Omega t/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-i\Omega t} & 0 \end{pmatrix} = \sigma_-e^{-i\Omega t}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la parte del átomo queda de manera:

$$e^{i\Omega t\sigma_z/2}(\sigma_+ + \sigma_-)e^{-i\Omega t\sigma_z/2} = \sigma_+e^{i\Omega t} + \sigma_-e^{-i\Omega t}. \quad (2.26)$$

Para los operadores de campo, a y a^\dagger , podemos utilizar un resultado válido para operadores no conmutativos conocido como lema de Baker-Campbell-Hausdorff [23]:

$$\begin{aligned} e^{ia^\dagger a\omega t}ae^{-ia^\dagger a\omega t} &= a + [ia^\dagger a\omega t, a] + \frac{1}{2!}[ia^\dagger a\omega t, [ia^\dagger a\omega t, a]] + \dots \\ &= ae^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

y similarmente para a^\dagger obtendremos:

$$e^{ia^\dagger a \omega t} a e^{-ia^\dagger a \omega t} = a e^{i\omega t}. \quad (2.28)$$

Juntando estas ultimas ecuaciones, llegamos a:

$$e^{i\omega a^\dagger a t} (a + a^\dagger) e^{-i\omega a^\dagger a t} = a e^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}. \quad (2.29)$$

Por lo tanto, el Hamiltoniano $\bar{H}_{\vec{r}, \hat{E}}$ en el marco de interacción se transforma como:

$$\bar{H} = g (\sigma_- a e^{-i(\omega+\Omega)t} + \sigma_+ a e^{i\delta t} + \sigma_- a^\dagger e^{-i\delta t} + \sigma_+ a^\dagger e^{i(\omega+\Omega)t}) \quad (2.30)$$

donde $\delta \doteq \Omega - \omega$ es llamado desintonía. Notemos que en la ecuación (2.30) aparecen términos con suma de frecuencias $\Omega + \omega$ y otros con diferencias, $\Omega - \omega$. Cuando consideramos que la frecuencia de transición atómica Ω es cerca a la frecuencia del modo de la cavidad ω , es decir, si se cumple que $|\Omega - \omega| \ll \omega + \Omega$, entonces los términos con restas en la exponencial son altamente resonante, mientras que los términos con la suma no lo son. La aproximación de onda rotante consiste en omitir los términos con suma de frecuencias, ya que su contribución a la dinámica es despreciable [16]. Además, dado que la ecuación de Schrödinger es una ecuación diferencial de primer orden en el tiempo, podemos integrar respecto al tiempo trayendo sumas y restas de frecuencias en el denominador y los factores que contengan restas serán los que contribuirán.

Por lo tanto, tomando en cuenta la contribución dominante, podemos aproximar el Hamiltoniano de interacción por:

$$\bar{H}_{\vec{r}, \hat{E}} \simeq H_{\vec{r}, \hat{E}} = g(\sigma_- a^\dagger e^{i\delta t} + \sigma_+ a e^{-i\delta t}). \quad (2.31)$$

Este Hamiltoniano corresponde al Hamiltoniano de interacción en nuestro marco original. De esta manera, el Hamiltoniano total lo reescribimos como:

$$H_{JC} = \omega a^\dagger a + \frac{\Omega}{2} \sigma_z + g(a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+). \quad (2.32)$$

Existen diferentes maneras de resolver en forma analítica el Hamiltoniano de JCM. Una forma habitual es encontrar los estados propios y para esto, comencemos considerando que los términos de interacción de H_{JC} causan la transición de un solo tipo:

$$|e\rangle|n\rangle \iff |b\rangle|n+1\rangle \quad (2.33)$$

o bien,

$$|e\rangle|n-1\rangle \iff |b\rangle|n\rangle \quad (2.34)$$

Para un n dado, los estados del sistema están dentro del dominio de un sub-espacio bidimensional delimitado por los elementos del producto $\{|e\rangle|n-1\rangle, |b\rangle|n\rangle\}$ o $\{|e\rangle|n\rangle, |b\rangle|n+1\rangle\}$ que forman una base [19]. Tomemos los segundos estados del sistema definiendo a:

$$|E_n^{(1)}\rangle \doteq |e\rangle|n\rangle \quad (2.35)$$

$$|E_n^{(2)}\rangle \doteq |b\rangle|n+1\rangle \quad (2.36)$$

Es claro ver que $\langle E_n^{(j)}|E_n^{(i)}\rangle = \delta^{ij}$. Teniendo nuestra base, calculamos la representación matricial de H_{JC} , quedando de la forma:

$$H^{(n)} = \begin{pmatrix} n\omega + \frac{1}{2}\Omega & g\sqrt{n+1} \\ g\sqrt{n+1} & (n+1)\omega - \frac{1}{2}\Omega \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Si cambiáramos al primer sub-espacio de estados, la dinámica que conecta los estados cambia sólo el número de fotones por ± 1 . Así, diagonalizando la matriz H^n podemos hallar los eigen-valores:

$$E_{\pm}(n) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega \pm \frac{1}{2}\Omega_n(\delta) \quad (2.38)$$

donde

$$\Omega_n(\delta) = \sqrt{\delta^2 + (2g)^2(n+1)} \quad (2.39)$$

es la frecuencia conocida como frecuencia de Rabi. Los eigen-estados $|n, \pm\rangle$ asociados con los eigen-valores de energía están dados por:

$$\begin{aligned} |n, +\rangle &= \cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) |E_n^1\rangle + \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) |E_n^2\rangle \\ |n, -\rangle &= \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) |E_n^1\rangle + \cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) |E_n^2\rangle \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde el ángulo ϕ_n es definido como:

$$\phi_n = \tan^{-1} \left(\frac{2g\sqrt{n+1}}{\delta} \right) \quad (2.41)$$

Cuando se habla del modelo de Jaynes-Cummings, se trata con valores cercanos a la desintonía del átomo, es decir, se requiere que los átomos estén a una transición cercana a ω ($\omega \approx \Omega$). Además, existirá otra limitante en el modelo, los valores despreciados por la RWA comenzaran a tener efecto cuando g/ω ya no sea pequeño, ($1 > g/\omega$).

2.3. Algunas propiedades conocidas del modelo de Rabi

Previamente analizamos y resolvimos el Hamiltoniano referente al Modelo de Jaynes-Cummings obteniendo las energías y estados de este modelo. Para conseguir la solución, frecuentemente es utilizada la RWA para simplificar el modelo al costo de reducirnos a un pequeño régimen de acoplamiento donde la frecuencia de transición atómica Ω es muy cercana a la frecuencia del modo de la cavidad ω . Sin embargo, cuando la interacción crece, la RWA deja de ser válida y los valores despreciados comienzan a tener efecto. La necesidad de conocer de manera detallada el espectro y la dinámica del Modelo de Rabi (RM por sus siglas en ingles) más allá de RWA ha sido requerida debido a la posibilidad de alcanzar experimentalmente estos regímenes, así como algunas extensiones para el estudio espectral en cavidades cruzadas [17] y el desplazamiento de estados entrelazados [7]. Una solución analítica propuesta para resolver y obtener el espectro del RM surgió en Agosto de 2011 por D. Braak. Braak presenta una solución analítica considerando la cuestión de integrabilidad de sistemas cuánticos que no poseen un límite clásico, es decir, el número de grados de libertad de un sistema cuántico contiene un espacio de Hilbert de dimensión infinita. De esta manera, Braak propone que el modelo de Rabi logra ser integrable debido a la presencia de

una simetría discreta y el espectro de energías viene dado por las raíces de la función trascendental $G_{\pm}(x)$ [5].

Como se comentó, la ecuación (2.13) representa, quizá, el sistema físico más simple más allá del oscilador armónico. Las aplicaciones del modelo en las que se ha desarrollado va desde la óptica cuántica y la resonancia magnética hasta el estado sólido y la física molecular. Existen también aplicaciones recientes en temas actuales como cavidades y circuitos en electrodinámica cuántica, algunas por mencionar. Por esta razón, el requerimiento de una comprensión teórica es necesaria para el entendimiento y desarrollo de las aplicaciones y a pesar de haberse introducido hace más de 70 años, el modelo aun sigue sin resolverse de manera exacta [11, 12, 13, 14, 15], debido a la falta de una segunda cantidad conservada, además de la energía, y dificulta el desarrollo de una solución analítica, lo que ha llevado a la opinión de ser un sistema no integrable como se refiere Braak. En cambio, en el modelo de Jaynes-Cummings se puede definir el operador:

$$N \doteq \omega a^{\dagger} a + \frac{1}{2} \Omega \sigma_z \quad (2.42)$$

y haciendo el conmutador con H_{JC} :

$$[H_{JC}, N] = 0, \quad (2.43)$$

implicando este resultado que existe otra cantidad conservada proporcionando una solución analítica.

El objetivo de este trabajo es presentar una solución al modelo de Rabi fijándonos en el límite donde la diferencia entre los dos niveles de energía del átomo sea cercana a cero. Esta condición para ser válida la solución es independiente si nos encontramos cerca de la desintonía del átomo o, si el parámetro de acoplamiento es pequeño o tiene valores específicos como en el caso de la integrabilidad de Braak. Para comenzar con nuestra solución, conviene primero reescribir el Hamiltoniano de Rabi a una forma más adecuada utilizando la ecuación (2.13) dividiendo todo sobre $\hbar\omega$ y usando que:

$$\sigma_+ + \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_x,$$

así, podemos definir a H_r como el Hamiltoniano de Rabi adimensional de la forma:

$$H_r \doteq \frac{H_R}{\hbar\omega} = a^\dagger a + \lambda\sigma_z + \frac{g}{\hbar\omega}\sigma_x(a + a^\dagger), \quad (2.44)$$

donde $\lambda \doteq \Omega/2\hbar\omega$. Por sencillez, tomamos $\hbar = 1$ y $\omega = 1$, asimismo, la ec. (2.44) será apropiado separar en dos componentes de la forma:

$$H_r = H_0 + \lambda H' \quad (2.45)$$

donde

$$H_0 = a^\dagger a + g\sigma_x(a + a^\dagger), \quad (2.46)$$

y

$$H' = \sigma_z. \quad (2.47)$$

Los estados propios de H' se encuentran fácilmente en cambio, los estados propios para H_0 estarán degenerados y mediante el uso del operador unitario de desplazamiento $D(\alpha)$ logrará ser diagonalizable llevándolo a un oscilador armónico.

2.3.1. Diagonalización mediante el operador desplazamiento

Aplicar una transformación unitaria a un sistema con valores propios, dejara invariante tanto eigenvalores como eigenestados, además, el nuevo sistema obtenido por la transformación describirá los mismos resultados desde otro escenario semejante. Por esta razón, aplicaremos una transformación lineal del operador $D(\alpha)$, ec. (1.58), sobre el Hamiltoniano H_0 para mandarlo a la forma del oscilador armónico, ec. (1.17), que son conocidos sus valores propios. Realizando la acción de $D(\alpha)$ sobre H_0 , quedara de la forma como:

$$\begin{aligned} D^\dagger(\alpha) H_0 D(\alpha) &= D^\dagger(\alpha) (a^\dagger a + g\sigma_x(a + a^\dagger)) D(\alpha) \\ &= D^\dagger(\alpha) a^\dagger a D(\alpha) + g\sigma_x D^\dagger(\alpha) (a + a^\dagger) D(\alpha) \\ &= a^\dagger a + (\alpha^* + g\sigma_x) a + (\alpha + g\sigma_x) a^\dagger + |\alpha|^2 + (\alpha + \alpha^*) g\sigma_x. \end{aligned}$$

Para llegar a algo análogo a la expresión para el oscilador armónico, ec. (1.17), se debe cumplir que:

$$\alpha + g\sigma_x = 0 \iff \alpha = -g\sigma_x = \alpha^\dagger \quad (2.48)$$

α sea un operador, derivándose que:

$$\alpha^2 = g^2 \mathbf{1} \quad \wedge \quad (\alpha + \alpha^\dagger) g\sigma_x = -2g^2. \quad (2.49)$$

Considerando estos elementos para realizar la transformación de H_0 :

$$\tilde{H} \doteq D^\dagger(\alpha) H_0 D(\alpha) = a^\dagger a - g^2. \quad (2.50)$$

Anteriormente denotamos a los eigenestados referentes al oscilador armónico de la forma $|n\rangle$ y a los eigenestados del átomo como $\{|e\rangle, |b\rangle\}$. Ahora, denotaremos los eigen-estados de σ_x de la forma:

$$|\pm\rangle = \frac{|e\rangle \pm |b\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.51)$$

Entonces, del oscilador armónico sabemos que:

$$a^\dagger a |n\rangle |\pm\rangle = n |n\rangle |\pm\rangle,$$

y actuando por el lado izquierdo el operador $D^\dagger(g\sigma_x)$, llegamos a la ecuación de eigenestados:

$$D^\dagger(g\sigma_x) a^\dagger a |n\rangle |\pm\rangle = D^\dagger(g\sigma_x) n |n\rangle |\pm\rangle. \quad (2.52)$$

Desarrollando el lado izquierdo de esta última ecuación usando que el operador D es unitario, $D^\dagger D = \mathbf{1}$, quedara escrita como:

$$\begin{aligned} D^\dagger(g\sigma_x) a^\dagger a D(g\sigma_x) D^\dagger(g\sigma_x) |n\rangle |\pm\rangle \\ &= (a^\dagger + g^* \sigma_x) (a + g\sigma_x) |n\rangle |\pm\rangle \\ &= (a^\dagger a + g\sigma_x (a + a^\dagger) + g^2) D^\dagger(g\sigma_x) |n\rangle |\pm\rangle \\ &= (H_0 + g^2) D^\dagger(g\sigma_x) |n\rangle |\pm\rangle. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Por otro lado, la acción del operador $D^\dagger(g\sigma_x)$ sobre los estados $|n\rangle|\pm\rangle$ sera:

$$\begin{aligned} D^\dagger(g\sigma_x)|n\rangle|\pm\rangle &= D^\dagger(g\sigma_x)|\pm\rangle|n\rangle = D^\dagger(g(\pm 1))|\pm\rangle|n\rangle \\ &= D^\dagger(\pm g)|n\rangle|\pm\rangle, \end{aligned} \quad (2.54)$$

tomando como referencia que:

$$D(g\sigma_x) = e^{g\sigma_x a^\dagger - g\sigma_x a}$$

y que para todo operador A con eigen-estado $|a\rangle$ y eigen-valor a cumple:

$$e^A|a\rangle = e^a|a\rangle.$$

Además, la acción del operador D^\dagger sobre los eigenestados del oscilador:

$$D^\dagger(\pm g)|n\rangle|\pm\rangle = |\mp g, n\rangle|\pm\rangle \quad (2.55)$$

donde $|\mp g, n\rangle$ son llamados estados numéricos desplazados. Por lo tanto, juntando el resultado de ec.(2.53) y ec. (2.55), reescribimos a la ecuación (2.52) como:

$$H_0|E_n^\pm\rangle = E_n^\pm|E_n^\pm\rangle \quad (2.56)$$

donde

$$E_n^\pm \doteq E_n = (n - g^2), \quad (2.57)$$

y

$$|E_n^\pm\rangle = |\mp g, n\rangle|\pm\rangle. \quad (2.58)$$

Así, hemos encontrado la ecuación de eigen-estados correspondientes a H_0 pero existiendo degeneración en la energía para los estados $|E^+\rangle$ y $|E^-\rangle$. Si tomamos un estado más general para H_0 de la forma:

$$|\bar{E}^\pm\rangle \doteq \frac{|E^+\rangle \pm |E^-\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.59)$$

y nos fijamos en los elementos de matriz para H' , es fácil ver que:

$$\langle \bar{E}_m^\pm | \sigma_z | \bar{E}_n^\pm \rangle = 0 \quad (2.60)$$

y para elementos cruzados:

$$\langle \bar{E}_m^\mp | \sigma_z | \bar{E}_n^\pm \rangle \neq 0. \quad (2.61)$$

Este resultado nos señala que los estados, en general, ec. (2.59), se hallan acoplados mediante el operador σ_z , lo cual sería conveniente encontrar estados de tal forma que:

1.
$$\langle \tilde{E}_m^\pm | \sigma_z | \tilde{E}_n^\pm \rangle \neq 0, \quad (2.62)$$

2.
$$\langle \tilde{E}_m^\mp | \sigma_z | \tilde{E}_n^\pm \rangle = 0, \quad (2.63)$$

y separar H_0 en dos subespacios de Hilbert que no estén conectados entre sí. De esta forma, H_0 la separaremos en un subespacio positivo y otro subespacio negativo, es decir:

$$H_0 = H_+ + H_- \quad (2.64)$$

con

$$H_+ = \sum_n E_n^+ | \tilde{E}_n^+ \rangle \langle \tilde{E}_n^+ | \quad (2.65)$$

y

$$H_- = \sum_n E_n^- | \tilde{E}_n^- \rangle \langle \tilde{E}_n^- | \quad (2.66)$$

2.3.2. Estados desacoplados

Encontrar estados $|\tilde{E}_n^\pm\rangle$ de tal forma que elimine el acoplamiento con σ_z permite separar H_0 en dos términos independientes, positivos y negativos, y conseguir aplicar el método perturbativo para el caso sin degeneración. Propongamos que los estados sean de la forma:

$$|\tilde{E}_n^+\rangle = \alpha_n |E_n^+\rangle + \beta_n |E_n^-\rangle \quad (2.67)$$

$$|\tilde{E}_n^-\rangle = \beta_n^* |E_n^+\rangle - \alpha_n^* |E_n^-\rangle \quad (2.68)$$

además, considerando que $\sigma_z|\pm\rangle = |\mp\rangle$ y:

$$\langle E_m^\pm | \sigma_z | E_n^\pm \rangle = 0$$

$$\langle E_m^\pm | \sigma_z | E_n^\mp \rangle \neq 0.$$

Calculando los elementos de matriz con las expresiones de los estados: (2.67) y (2.68):

$$\begin{aligned} \langle \tilde{E}_m^+ | \sigma_z | \tilde{E}_n^+ \rangle &= [\alpha_m^* \langle E_m^+ | + \beta_m^* \langle E_m^- |] \sigma_z [\alpha_n | E_n^+ \rangle + \beta_n | E_n^- \rangle] \\ &= \alpha_m^* \beta_n \langle m | D(2g) | n \rangle + \beta_m^* \alpha_n \langle m | D(-2g) | n \rangle \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{E}_m^- | \sigma_z | \tilde{E}_n^- \rangle &= [\beta_m \langle E_m^+ | - \alpha_m \langle E_m^- |] \sigma_z [\beta_n^* | E_n^+ \rangle - \alpha_n^* | E_n^- \rangle] \\ &= -\alpha_m \beta_n^* \langle m | D(-2g) | n \rangle - \beta_m \alpha_n^* \langle m | D(2g) | n \rangle \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{E}_m^- | \sigma_z | \tilde{E}_n^+ \rangle &= [\beta_m \langle E_m^+ | - \alpha_m \langle E_m^- |] \sigma_z [\alpha_n | E_n^+ \rangle + \beta_n | E_n^- \rangle] \\ &= \beta_m \beta_n \langle m | D(2g) | n \rangle - \alpha_m \alpha_n \langle m | D(-2g) | n \rangle \end{aligned} \quad (2.71)$$

donde $\langle m | D(\pm 2g) | n \rangle = \langle \mp g, m | \pm g, n \rangle$

Para encontrar los valores de los coeficientes, α_n y β_n , debemos calcular primero el valor de los elementos de matriz $\langle m | D(\pm 2g) | n \rangle$, cuando $m \geq n$ de acuerdo con [6]. Para esto, primero expresemos el operador de desplazamiento en su forma exponencial y, utilizando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, ecuación (1.59), podemos escribir al operador $D(\alpha)$ de la forma:

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}, \quad (2.72)$$

ahora, expresando la exponencial en serie de potencias y aplicando por la derecha e izquierda el estado de energía del fotón $|n\rangle$ y $\langle m|$, respectivamente, obtenemos:

$$e^{-\alpha^* a} |n\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^*)^k a^k}{k!} |n\rangle \quad (2.73)$$

$$\langle m|e^{\alpha a^\dagger} = \sum_{i=0}^{\infty} \langle m|\frac{\alpha^i a^{\dagger i}}{i!}, \quad (2.74)$$

por tanto, utilizando las ecuaciones (2.72), (2.73) y (2.74)

$$\langle m|D(\alpha)|n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i}{i!} \langle m|a^{\dagger i} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\alpha^*)^k}{k!} a^k |n\rangle. \quad (2.75)$$

Para saber el resultado de aplicar el operador a k -veces usamos el hecho de que el operador de aniquilación aplicado a un estado

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \\ \Rightarrow a^k|n\rangle &= \sqrt{n}a^{k-1}|n-1\rangle = \dots = \sqrt{\frac{n!}{(n-k)!}}|n-k\rangle \end{aligned}$$

habiendo considerado que $a|0\rangle = 0$, donde $|0\rangle$ es el estado base de mínima energía del oscilador armónico. De igual forma para:

$$\langle m|a^{\dagger i} = \sqrt{\frac{m!}{(m-i)!}}\langle m-i|$$

quedando la ecuación (2.75) como.

$$\begin{aligned} \langle m|D(\alpha)|n\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\alpha^i}{i!} \frac{(\alpha^*)^k}{k!} \sqrt{\frac{m!n!}{(m-i)!(n-k)!}} \delta_{m-i,n-k} \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \alpha^{m-n} \sqrt{m!n!} \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{(|\alpha|^2)^k}{k!(n-k)!(m-n+k)!} \frac{m!}{m!} \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \alpha^{m-n} \sqrt{\frac{n!}{m!}} L_n^{m-n}(|\alpha|^2) \end{aligned} \quad (2.76)$$

donde $L_n^{n-m}(|\alpha|^2)$ son los polinomios asociados de Laguerre. Es fácil notar que de la ecuación (2.76):

$$\langle m|D(-\alpha)|n\rangle = (-1)^{n-m} \langle m|D(\alpha)|n\rangle. \quad (2.77)$$

Una vez encontrando el aspecto de los elementos de matriz del operador D , ec. (2.76), y la propiedad descrita en la ecuación (2.77) podemos hallar ahora los valores a los coeficientes α_n y β_n . Para esto de la condición que hemos propuesto, ecuación (2.63), y el resultado obtenido en (2.71):

$$0 = (-\alpha_n \alpha_m + (-1)^{n-m} \beta_n \beta_m)$$

así:

$$\alpha_n \alpha_m = (-1)^{n-m} \beta_n \beta_m.$$

Además, recordemos que los α_n y β_n deben satisfacer:

$$1 = |\alpha|^2 + |\beta|^2,$$

y quedan como:

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.78)$$

$$\beta_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} \quad (2.79)$$

Por lo tanto, los estados desacoplados por σ_z , ecs. (2.67) y (2.68) son de la forma:

$$|\tilde{E}_n^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|E_n^+\rangle \pm \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}}|E_n^-\rangle. \quad (2.80)$$

Hasta ahora hemos logrado diagonalizar el termino H_0 del Hamiltoniano de Rabi:

$$H_r = H_0 + \lambda H' = a^\dagger a + g \sigma_x (a + a^\dagger) + \lambda \sigma_z,$$

encontrando los eigen-estados y eigen-energías desacoplados con σ_z escritos como:

$$|\tilde{E}_n^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|E_n^+\rangle \pm \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}}|E_n^-\rangle.$$

contribuyendo a separar H_0 de manera que:

$$\begin{aligned} H_0 &= \sum_n E_n^+ |\tilde{E}_n^+\rangle \langle \tilde{E}_n^+| + \sum_n E_n^- |\tilde{E}_n^-\rangle \langle \tilde{E}_n^-| \\ &\doteq H_+ + H_-, \end{aligned}$$

y aplicar fácilmente el método de Teoría de Perturbaciones no degenerada.

CAPÍTULO 3

Teoría de Perturbaciones en el Modelo de Rabi

Hasta ahora, hemos explicado el Hamiltoniano que describe la interacción campo-átomo conocido como Modelo de Rabi. Después, estudiamos una solución particular a este modelo mediante el uso de la RWA hallando los volares de las energías y estados analíticos.

En este capítulo, aplicaremos los resultados de Teoría de Perturbaciones independiente del tiempo [4] para hallar una solución analítica al Modelo de Rabi. Hemos propuesto que es posible encontrar las energías y estados analíticos al modelo y que pueden ser comprobado modificando un solo parámetro yendo a ordenes pequeños en la constante de acoplamiento obteniendo las mismas soluciones del Modelo de Jaynes-Cummings.

3.1. Teoría

Comencemos considerando el problema con el Hamiltoniano escrito de siguiente forma:

$$H = H^0 + \lambda H' \quad (3.1)$$

donde H' es una "perturbación" en algún sentido pequeña y H^0 es un Hamiltoniano cuyos eigen-estados y eigen-valores conocemos, es decir, conocemos los valores exactos de $|E_n^0\rangle$ y E_n^0 que cumplen

$$H^0|E_n^0\rangle = E_n^0|E_n^0\rangle.$$

Nuestra intención será encontrar eigen-estados y eigen-valores aproximados para el Hamiltoniano completo H . El conjunto $\{|E_n^0\rangle\}$ es un conjunto completo en el sentido de que $1 = \sum_n |E_n^0\rangle\langle E_n^0|$ es válido. Como parte del proceso nos fijamos en el parámetro λ es un parámetro real y tanto los eigen-estados como los eigen-valores de H se desarrollan como series en λ :

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \lambda \Delta_n^1 + \lambda^2 \Delta_n^2 + \dots \\ |E_n\rangle &= |E_n^0\rangle + \lambda |E_n^1\rangle + \lambda^2 |E_n^2\rangle + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde definimos $\Delta_n \doteq E_n - E_n^0$ como el cambio de la energía para el n -ésimo nivel. El parámetro λ puede variar continuamente entre 0 y 1, el caso $\lambda = 0$ corresponde al problema no perturbado y $\lambda = 1$ corresponde al problema total. Tomando la ecuación de eigen-valores

$$H|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle \quad (3.3)$$

o bien, escrita de la forma

$$(E_n^0 - H_0)|E_n\rangle = (\lambda H' - \Delta_n)|E_n\rangle \quad (3.4)$$

Podríamos dividir por el factor $E_n^0 - H_0$ toda la expresión, pero la acción sobre el estado $|E_n^0\rangle$ esta definida y el operador inverso $1/(E_n^0 - H_0)$ no estará definido. Sin embargo, $(\lambda H' - \Delta_n)|E_n\rangle$ no tiene una componente

a lo largo de $|E_n^0\rangle$, esto es, si multiplicamos por la izquierda a ambos lados de la igualdad por $\langle E_n^0|$

$$0 = \langle E_n^0|\lambda H' - \Delta_n|E_n\rangle = \langle E_n^0|(\lambda H' - \Delta_n)|E_n\rangle \quad (3.5)$$

Definamos al operador de proyección complementario como

$$\phi_n \doteq 1 - |E_n^0\rangle\langle E_n^0| = \sum_{k \neq n} |E_k^0\rangle\langle E_k^0| \quad (3.6)$$

y ahora el operador inverso $1/(E_n^0 - H_0)$ esta definido cuando multipliquemos por la derecha ϕ_n , esto es

$$\frac{1}{E_n^0 - H_0}\phi_n = \sum_{k \neq n} \frac{1}{E_n^0 - E_k^0}|E_k^0\rangle\langle E_k^0|. \quad (3.7)$$

Asimismo de (3.5) y (3.6), se puede ver que

$$(\lambda H' - \Delta_n)|E_n\rangle = \phi_n(\lambda H' - \Delta_n)|E_n\rangle. \quad (3.8)$$

Podríamos ahora despejar al estado $|E_n\rangle$ como

$$|E_n\rangle = \frac{1}{E_n^0 - H_0}\phi_n(\lambda H' - \Delta_n)|E_n^0\rangle = \frac{\phi_n}{E_n^0 - H_0}(\lambda H' - \Delta_n)|E_n^0\rangle.$$

Sin embargo, cuando $\lambda \rightarrow 0$, debe ocurrir que $|E_n\rangle \rightarrow |E_n^0\rangle$ y $\Delta_n \rightarrow 0$. No obstante, aun para $\lambda \neq 0$, podemos agregar a $|E_n\rangle$ una solución a la ecuación homogénea, $C_n|E_n^0\rangle$, donde $C_n = C_n(\lambda) = \langle E_n^0|E_n\rangle = 1$ [4]. Por lo que, una forma adecuada será

$$|E_n\rangle = |E_n^0\rangle + \frac{\phi_n}{E_n^0 - H_0}(\lambda H' - \Delta_n)|E_n^0\rangle \quad (3.9)$$

Podemos notar que de la ecuación (3.5)

$$\Delta_n = \lambda\langle E_n^0|H'|E_n\rangle. \quad (3.10)$$

Con estas dos ecuaciones (3.9) y (3.10) podemos sustituir las expresiones en serie de potencias para $|E_n\rangle$ y E_n , ec. (3.2), e igualar los coeficientes apropiados correspondientes a potencias de λ , obteniendo así:

$$\begin{aligned}\Delta_n^1 &= \langle E_n^0 | H' | E_n^0 \rangle \\ \Delta_n^2 &= \langle E_n^0 | H' | E_n^1 \rangle \\ &\vdots \\ \Delta_n^N &= \langle E_n^0 | H' | E_n^{N-1} \rangle \\ &\vdots\end{aligned}\tag{3.11}$$

Expandiendo ahora la expresión (3.9):

$$\begin{aligned}|E_n^0\rangle + \lambda|E_n^1\rangle + \lambda^2|E_n^2\rangle + \dots \\ = |E_n^0\rangle + \frac{\phi_n}{E_n^0 - H_0} (\lambda H' - \lambda \Delta_n^1 - \lambda^2 \Delta_n^2 - \dots) \\ \times (|E_n^0\rangle + \lambda|E_n^1\rangle + \dots)\end{aligned}\tag{3.12}$$

igualando los coeficientes en potencias de λ , tenemos que

$$|E_n^1\rangle = \frac{\phi_n}{E_n^0 - H_0} H' |E_n^0\rangle = \sum_{m \neq n} \frac{\langle E_m^0 | H' | E_n^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0} |E_m^0\rangle,\tag{3.13}$$

donde $\phi_n \Delta_n^N |E_n^0\rangle = 0$. Habiendo encontrado $|E_n^1\rangle$ podemos encontrar el valor de la segunda corrección a la energía

$$\Delta_n^2 = \langle E_n^0 | H' \frac{\phi_n}{E_n^0 - H_0} H' | E_n^0 \rangle = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle E_m^0 | H' | E_n^0 \rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0}.\tag{3.14}$$

Conociendo el valor de Δ_n^2 , podemos hallar el termino correspondiente a λ^2 para el eigen-estado quedando de la siguiente manera

$$\begin{aligned}|E_n^2\rangle &= \sum_{m \neq n} \sum_{k \neq n} \frac{\langle E_k^0 | H' | E_n^0 \rangle \langle E_m^0 | V | E_k^0 \rangle}{(E_n^0 - E_m^0)(E_n^0 - E_k^0)} |E_m^{\pm(0)}\rangle \\ &\quad - \sum_{m \neq n} \frac{\langle E_n^0 | V | E_n^0 \rangle \langle E_m^0 | V | E_n^0 \rangle}{(E_n^0 - E_m^0)^2} |E_m^{\pm(0)}\rangle\end{aligned}\tag{3.15}$$

y así sucesivamente. La correcciones a tercer orden tanto para la energía como para los estados expresado de la forma

$$\begin{aligned} \Delta_n^{(3)} = & \sum_{m \neq n} \sum_{k \neq n} \frac{V_{kn} V_{mk} V_{nm}}{(E_n^0 - E_m^0)(E_n^0 - E_k^0)} \\ & - \sum_{m \neq n} \frac{V_{nn} V_{mn} V_{nm}}{(E_n^0 - E_m^0)^2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} |E_n^{(3)}\rangle = & \sum_{m \neq n} \sum_{k \neq n} \sum_{l \neq n} \frac{V_{kn} V_{lk} V_{ml}}{(E_n^0 - E_m^0)(E_n^0 - E_k^0)(E_n^0 - E_l^0)} |E_m^{(0)}\rangle \\ & - 2 \sum_{m \neq n} \sum_{k \neq n} \frac{V_{nn} V_{kn} V_{mk}}{(E_n^0 - E_m^0)^2 (E_n^0 - E_k^0)} |E_m^{(0)}\rangle \\ & + \sum_{m \neq n} \frac{V_{mn} V_{nn}^2}{(E_n^0 - E_m^0)^3} |E_m^{(0)}\rangle \\ & - \sum_{m \neq n} \sum_{k \neq n} \frac{V_{mn} |V_{kn}|^2}{(E_n^0 - E_m^0)^2 (E_n^0 - E_k^0)} |E_m^{(0)}\rangle \end{aligned} \quad (3.17)$$

respectivamente, donde $V_{ij} = \langle i | H' | j \rangle$

3.2. Rabi

Hemos escrito de una forma particular el Hamiltoniano del modelo de Rabi, ec. (2.44) como:

$$\begin{aligned} H_r = & a^\dagger a + \lambda \sigma_z + g \sigma_x (a + a^\dagger) \\ = & H_0 + \lambda H' \end{aligned}$$

tomando a:

$$H_0 = a^\dagger a + g \sigma_x (a + a^\dagger),$$

y

$$H' = \sigma_z, \quad (3.18)$$

donde definimos a $\lambda = \Omega/2\hbar\omega$. Tomando en cuenta la dificultad para resolver en forma exacta este hamiltoniano, conviene emplear teoría de perturbaciones por ser un método de expansión sobre el modelo. Para nuestro caso, hemos demostrado que podemos separar al Hamiltoniano H_0 en una parte positiva y una negativa para eludir la degeneración en las energías ecs. (2.65) y (2.66), esto es:

$$H_0 = H_+ + H_- \quad (3.19)$$

de esta forma, utilizando el método perturbativo, hemos separamos las energías de igual manera. Ahora bien, tomando en consideración esto, prosigamos a calcular las eigen-energías y eigen-estados perturbadas.

Para la corrección a primer orden al valor de la eigen-energía, utilizamos el resultado obtenido en la ecuación (3.11) y sustituimos los valores correspondientes de H' , ec. (2.47), E_n y $|E_n^0\rangle$

$$\begin{aligned} E_n^0 &= E_n = n - g^2 \\ |\tilde{E}_n^{\pm(0)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|E_n^+\rangle \pm \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}}|E_n^-\rangle \end{aligned}$$

quedándonos Δ_n^1 como:

$$\begin{aligned} \Delta_n^{\pm(1)} &= \langle \tilde{E}_n^{\pm(0)} | \sigma_z | \tilde{E}_n^{\pm(0)} \rangle \\ &= \pm \frac{(-1)^n}{2} (\langle n | D(\pm 2g) | n \rangle + \langle n | D(\mp 2g) | n \rangle) \\ &= \pm (-1)^n \langle n | D(2g) | n \rangle = \pm (-1)^n e^{-2g^2} L_n(4g^2), \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde los elementos de matriz para $\langle n | D(2g) | n \rangle$ son expresados por la ecuación (2.76) y empleamos la propiedad de imparidad (2.77). La corrección a primer orden en los eigen-estados, ecuación (3.13), queda de la forma:

$$\begin{aligned} |\tilde{E}_n^{\pm(1)}\rangle &= \sum_{m \neq n} \frac{\langle \tilde{E}_m^{\pm(0)} | \sigma_z | \tilde{E}_n^{\pm(0)} \rangle}{E_n^0 - E_m^0} |\tilde{E}_m^{\pm(0)}\rangle \\ &= \pm (-1)^n \sum_{m \neq n} \frac{\langle m | D(2g) | n \rangle}{n - m} |\tilde{E}_m^{\pm(0)}\rangle \end{aligned} \quad (3.21)$$

Las correcciones a segundo orden en la eigen-energía, ecuación (3.14), se leen como:

$$\begin{aligned}\Delta_n^{\pm(2)} &= \sum_{m \neq n} \frac{|\langle \tilde{E}_m^{\pm(0)} | \sigma_z | \tilde{E}_n^{\pm(0)} \rangle|^2}{n-m} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | D(2g) | n \rangle|^2}{n-m} \\ &= e^{-4g^2} \sum_{m \neq n} (4g^2)^{m-n} \frac{n!}{m!} \frac{(L_n^{m-n}(4g^2))^2}{n-m}\end{aligned}\quad (3.22)$$

y los eigen-estados, ecuación (3.15), de la forma:

$$\begin{aligned}|\tilde{E}_n^{\pm(2)}\rangle &= \sum_{m \neq n} \sum_{k \neq n} (-1)^{n-m} \frac{\langle k | D(2g) | n \rangle \langle m | D(2g) | k \rangle}{(n-m)(n-k)} |\tilde{E}_m^{\pm(0)}\rangle \\ &\quad - \sum_{m \neq n} (-1)^{n-m} \frac{\langle n | D(2g) | n \rangle \langle m | D(2g) | n \rangle}{(n-m)^2} |\tilde{E}_m^{\pm(0)}\rangle \\ &= e^{-4g^2} \sum_{m \neq n} (-1)^{m-n} (2g)^{m-n} \sqrt{\frac{n!}{m!}} \left(\sum_{k \neq n} \frac{L_n^{k-n} L_k^{m-k}}{(n-m)(n-k)} - \frac{L_n L_n^{m-n}}{(n-m)^2} \right) |\tilde{E}_m^{\pm(0)}\rangle\end{aligned}\quad (3.23)$$

donde hemos simplificado la notación omitiendo el argumento a los polinomios asociados de Laguerre.

Las correcciones a tercer orden tanto a la energía como a los estados quedaran de la forma:

$$\begin{aligned}\Delta_n^{\pm(3)} &= \pm \sum_{m \neq n} \sum_{k \neq n} \frac{\langle k | D(2g) | n \rangle \langle m | D(2g) | k \rangle \langle n | D(2g) | m \rangle}{(n-m)(n-k)} \\ &\quad - \pm \sum_{m \neq n} \frac{\langle n | D(2g) | n \rangle \langle m | D(2g) | n \rangle \langle n | D(2g) | m \rangle}{(n-m)^2} \\ &= \pm e^{-6g^2} \left(\sum_{m \neq n} \sum_{k \neq n} \frac{L_n^{k-n} L_k^{m-k} L_m^{n-m}}{(n-m)(n-k)} - \sum_{m \neq n} \frac{L_n L_n^{m-n} L_m^{n-m}}{(n-m)^2} \right),\end{aligned}\quad (3.24)$$

$$\begin{aligned}
|\tilde{E}_n^{\pm(3)}\rangle &= \pm e^{-6g^2} \sum_{m \neq n} \sum_{k \neq n} \sum_{l \neq n} (2g)^{m-n} \sqrt{\frac{n!}{m!}} \frac{L_n^{k-n} L_n^{l-k} L_l^{m-l}}{(n-m)(n-k)(n-l)} |E_k^{(0)}\rangle \\
&\mp 2e^{-6g^2} \sum_{m \neq n} \sum_{k \neq n} \sum_{l \neq n} (2g)^{m-n} \sqrt{\frac{n!}{m!}} \frac{L_n^0 L_n^{k-n} L_k^{m-k}}{(n-m)^2(n-k)} |E_k^{(0)}\rangle \\
&\mp e^{-6g^2} \sum_{m \neq n} \sum_{k \neq n} (2g)^{m-n} (4g^2)^{k-n} \frac{n!}{k!} \sqrt{\frac{n!}{m!}} \frac{L_n^{m-n} (L_n^{k-n})^2}{(n-m)^2(n-k)} |E_k^{(0)}\rangle \\
&\pm e^{-6g^2} \sum_{m \neq n} (2g)^{m-n} \sqrt{\frac{n!}{m!}} \frac{L_n^{m-n} (L_n)^2}{(n-m)^3} |E_k^{(0)}\rangle
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Por lo tanto, el valor de la eigen-energía viene escrita como

$$\begin{aligned}
E_n^{\pm} &= E_n + \lambda \Delta_n^{\pm(1)} + \lambda^2 \Delta_n^{\pm(2)} + \lambda^3 \Delta_n^{\pm(3)} + \mathcal{O}(\lambda^N) \\
&= n - g^2 \pm e^{-2g^2} (-1)^n L_n \lambda \\
&\quad + e^{-4g^2} \left(\sum_{m \neq n} (4g^2)^{m-n} \frac{n!}{m!} \frac{(L_n^{m-n})^2}{n-m} \right) \lambda^2 \\
&\quad \pm e^{-6g^2} \left(\sum_{m \neq n} \sum_{k \neq n} \frac{L_n^{k-n} L_k^{m-k} L_m^{n-m}}{(n-m)(n-k)} - \sum_{m \neq n} \frac{L_n L_n^{m-n} L_m^{n-m}}{(n-m)^2} \right) \lambda^3 \\
&\quad + \mathcal{O}(\lambda^4)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

donde $\mathcal{O}(\lambda^4)$ representa los términos de potencias de λ mayores a $3 < N$. Los eigen-estados quedan como:

$$\begin{aligned}
|\tilde{E}_n^{\pm}\rangle &= |\tilde{E}_n^{\pm(0)}\rangle + \lambda |\tilde{E}_n^{\pm(1)}\rangle + \dots \\
&= |\tilde{E}_n^{\pm(0)}\rangle \pm (-1)^n \lambda \sum_{m \neq n} \frac{\langle m | D(2g) | n \rangle}{n-m} |\tilde{E}_n^{\pm(0)}\rangle + \dots
\end{aligned} \tag{3.27}$$

donde

$$|\tilde{E}_n^{\pm(0)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |E_n^+\rangle \pm \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} |E_n^-\rangle$$

y

$$|E_n^\pm\rangle = |\mp g, n\rangle|\pm\rangle.$$

3.3. Resultados

En esta sección comenzaremos haciendo un análisis en la contribución de segundo orden de la ecuación (3.22), posteriormente obtendremos las gráficas de las eigenenergías hasta segundo orden con TP comparando con los volares numéricos del Hamiltoniano H_r y los valores analíticos del modelo de JC para diferentes valores en la constante de acoplamiento y el parámetro perturbativo. Mostraremos el límite cuando nos encontramos a un régimen de acoplamiento pequeño y grande analizando los efectos que surgen para cada modelo y el uso de Teoría de Perturbaciones.

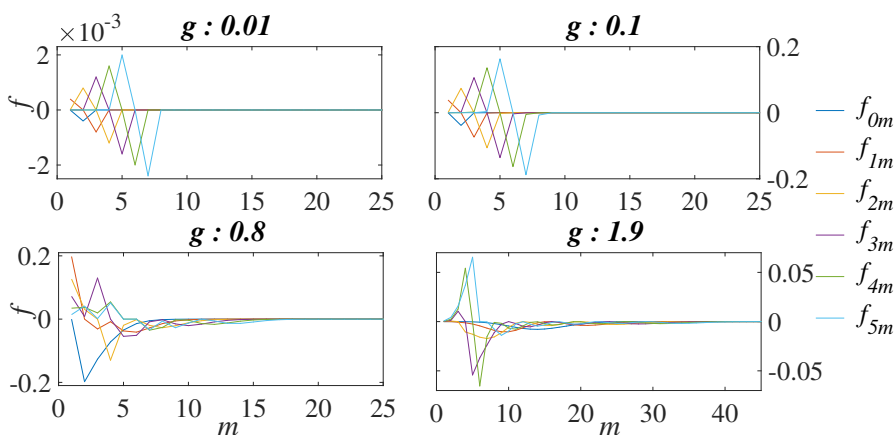


Figura 3.1: Gráfica de la función f_{nm} , ec. (3.28), para $n = 0, \dots, 5$ y $g = 1.9, 0.8, 0.1, 0.01$ que representan los términos de la suma para la corrección a segundo orden de la energía $\Delta_n^{\pm(2)}$. Cada color representa el mismo valor particular de n para las cuatro gráficas. Recorremos a m entre $0 \leq m \leq 60$.

De la ec. (3.22), definiremos el término dentro de la sumatoria como:

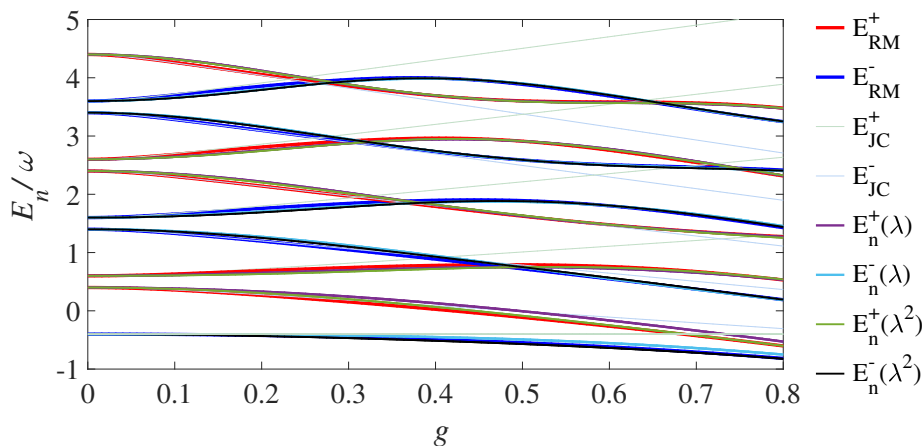


Figura 3.2: Espectro de Rabi numérico y perturbativo para $\lambda = 0.4$, $\omega = 1$ y $0 \leq g \leq 0.8$. Las líneas rojas y azules muestra en los valores exactos correspondientes a los valores propios positivos y negativos, respectivamente, del Hamiltoniano de Rabi. Las líneas posteriores indican las correcciones en primer y segundo orden de la energía positivas y negativas calculadas por Teoría de Perturbaciones.

$$f_{nm} \doteq \frac{|\langle m | D(2g) | n \rangle|^2}{n - m}. \quad (3.28)$$

para $m \neq n$. Como demostramos en el capítulo 2, los elementos de matriz correspondientes al operador $D(\alpha)$, ec. (2.76), resultan ser polinomios de Laguerre multiplicados por una exponencial. Graficando la función f_{nm} para los primeros 5 niveles del espectro de energías tomando valores de m grandes respecto a nuestra dimensión, figura 3.1, la contribución de f_{nm} a la corrección de la energía Δ_n^2 se encuentra para valores bajos de m , al rededor de $m = 30$. Además, en esta figura se puede notar el orden donde detener la adición de los términos de m para una g dada.

Ahora, para probar los resultados de las energías obtenidas por teoría de perturbaciones, es conveniente analizar el rango de valores que toman los dos parámetros que tenemos. Para el caso de la constante de acoplamiento g , normalizada sobre ω , puede tomar valores de $g > 0$. Mientras g sea muy cercano a 0 estaremos dentro del modelo de Jaynes-

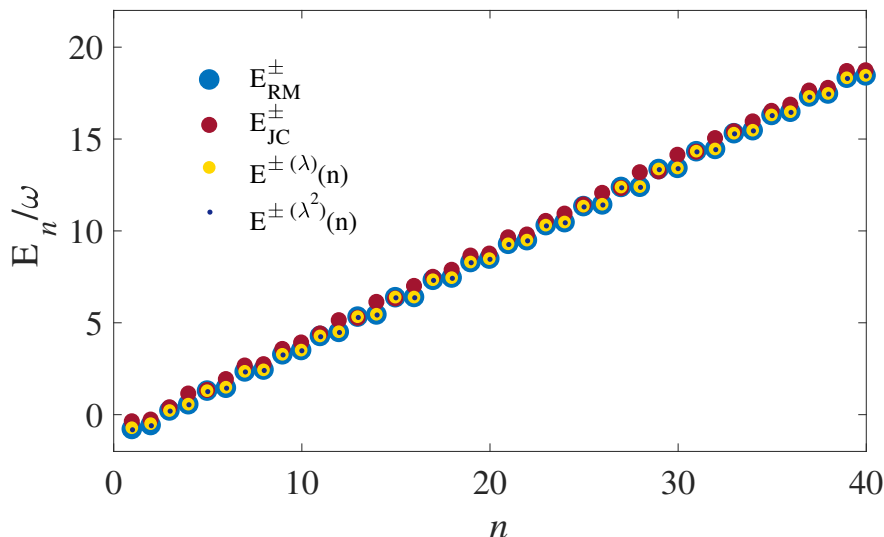


Figura 3.3: Eigenvalores de energía en función de nivel energético tomando como valores $\lambda = 0.4$ y $g = 0.8$. Los puntos rojos muestran los valores numéricos diagonalizando el Hamiltoniano de Rabi, los puntos negros representan los distintos niveles energéticos del modelo de JC y los puntos verdes y azules señalan la energía perturbada a primer y segundo orden.

Cummings y para valores grandes de g será completamente Rabi. Para el caso de λ podemos verlo de la siguiente manera. Hemos denotado a λ , por (para el caso general en ω y $\hbar = 1$):

$$\lambda = \frac{\Omega}{2\omega} = \frac{\omega + \delta}{2\omega},$$

sumando y restando un factor conveniente y la desintonía denotada como:

$$\delta = \Omega - \omega.$$

Si la frecuencia de transición Ω es igual a la frecuencia de radiación ω , entonces $\delta = 0$ encontrándonos en el caso resonante. Para el caso donde la diferencia de frecuencias en los niveles del átomo es igual a cero, $\Omega = 0$, la desintonía tendrá el valor de $\delta = -\omega$. Luego, tomando

a $\omega = 1$, $-1 \leq \delta \leq 0$. Por lo tanto, los valores en los que estará λ serán $0 \leq \lambda \leq 1/2$.

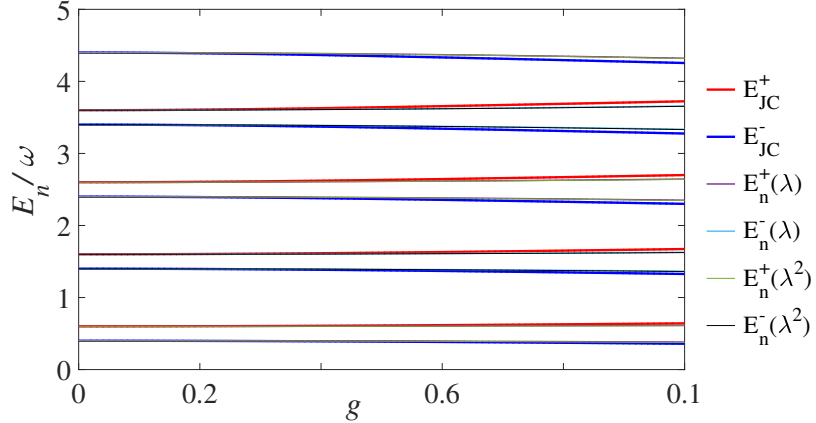


Figura 3.4: Gráfica de eigen-valores de energía analíticos del Modelo de Jaynes-Cummings y de Teoría de Perturbaciones para primer y segundo orden, tanto positivos y negativos. Hemos tomado a $0 \leq g \leq 0.1$ y $\lambda = 0.4$. En la gráfica se puede notar el límite donde es válido el modelo de Jaynes-Cummings y comienzan a ser Rabi.

En la figura 3.2 presentamos las energías que obtenemos al calcular numéricamente los eigenvalores del modelo de Rabi y los comparamos con los resultados a los eigenvalores con teoría de perturbaciones a primer y segundo orden en λ . Para las energías del RM, hemos diagonalizado numéricamente el Hamiltoniano H_r , ec. (2.44), y graficamos los eigenestados en función de la constante de acoplamiento g . Los valores que hemos tomado en esta gráfica para λ y g son los mismos que se presentan en [5], para reproducir el resultado que presenta Braak para la parte baja del espectro de energías. Con esta gráfica podemos observar que las líneas que representan las correcciones a la energía positivas y negativas tienden al valor numérico conforme aumentamos la potencia de λ . Las líneas rosas y azul claro señalan las correcciones, positivas y negativas, a primer orden, mientras las líneas verde y negro indican la corrección a segundo orden positivas y negativas, respectivamente. Es claro de percatar que aumentando el orden de aproximación en λ ire-

mos consiguiendo cada vez más el valor exacto al modelo de Rabi pero incluso a primer orden se alcanza una buena aproximación.

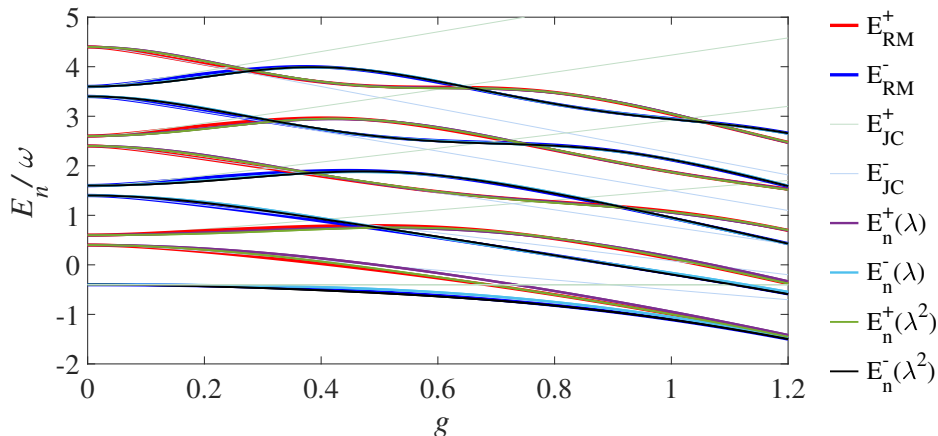


Figura 3.5: Espectro de Rabi numérico y perturbativo para $\lambda = 0.4$, $\omega = 1$ y $0 \leq g \leq 1.2$. Etiquetamos los valores de energías positivas y negativas para cada método. En esta imagen nos encontramos completamente en Rabi y cercanos al caso particular de la desintonía.

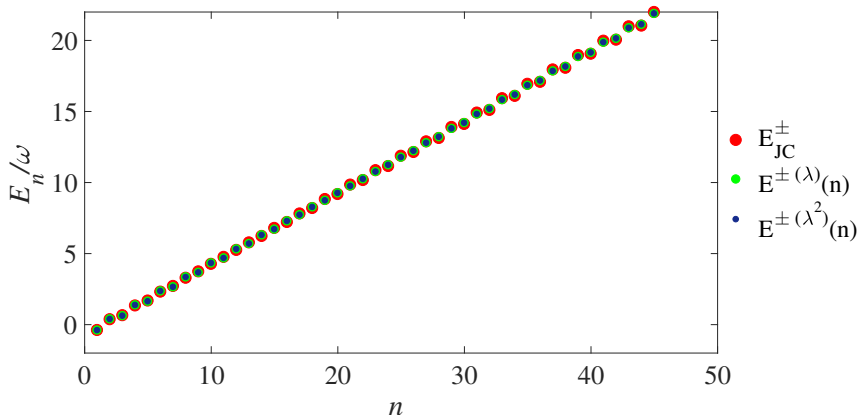


Figura 3.6: Valores propios en función del nivel energético para modelo de JC y teoría de perturbaciones. Hemos tomado $\lambda = 0.4$ y $g = 0.1$. Los puntos rojos representan la energía de JC, los puntos verdes y azules los distintos niveles energéticos perturbados a primer y segundo orden.

Cabe mencionar que nos encontramos fuera del régimen aceptado para el modelo de Jaynes-Cummings. Podemos ver en la figura 3.3 que los puntos rojos que indican el modelo de Jaynes-Cummings quedan alejados de los valores numéricos-exactos del modelo de Rabi, puntos azules. Mientras los valores para Teoría de Perturbaciones a primer y segundo orden, puntos amarillo y negro respectivamente, se acercan cada vez a los puntos azules con un error en λ^2 y λ^3 conforme aumente la corrección, es decir, para los eigenvalores $E^{\pm(\lambda^2)}(n)$ tendremos un error de orden λ^3 . Los valores numéricos para el modelo de Rabi en esta figura se calcularon de igual forma diagonalizando el Hamiltoniano H_r tomando solo los primeros 40 niveles energéticos y, para valores $n > 40$, fueron excluidos ya que presentaban errores numéricos debido a que estamos trabajando en un espacio de Hilbert de dimensión finita. Si necesitamos diagonalizar una matriz en este espacio numéricamente debemos truncar nuestro espacio a una dimensión finita, por esta razón los errores numéricos se deben al efecto de tamaño finito del espacio (o la matriz).

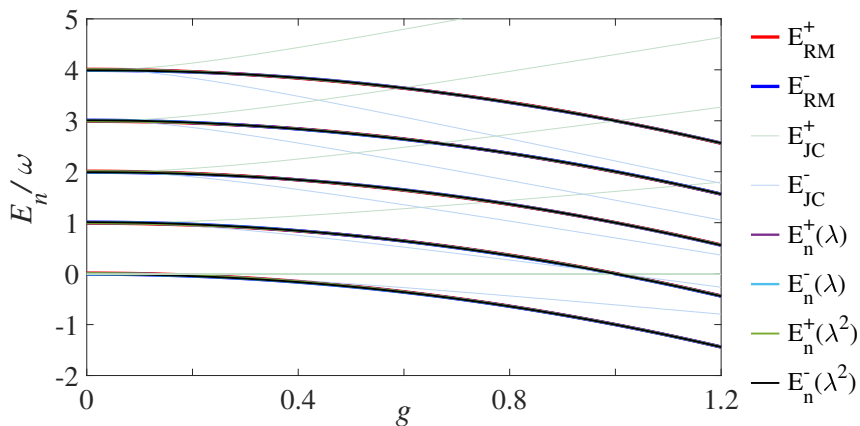


Figura 3.7: Espectro de energías para $\lambda = 0.01$ y $0 \leq g \leq 1.2$. En esta imagen mostramos los resultados de TP a primer y segundo orden junto con valores numéricos del RM. Dado el valor de λ , los niveles energéticos del átomo son cercanos uno del otro, es decir, serán los mismos.

Podemos también comprobar nuestros resultados fijándonos en un entorno donde el acoplamiento es pequeño válido para el modelo de

JC, y grande donde estemos completamente en Rabi para los primeros niveles del espectro de energías. En la figura 3.4 mostramos el intervalo donde JC es válido y luego comienza a perder validez conforme aumenta g . Hemos graficado los resultados analíticos de JC y los resultados de TP a primer y segundo orden. Al estar en un acoplamiento bajo, las correcciones tanto a primer y segundo orden coinciden con los resultados analíticos de JC. Para la figura 3.5 tenemos los eigenvalores numéricos de Rabi y los eigenvalores perturbados a un valor de la constante g grande. En esta figura vemos que los estados perturbados conforme aumenta el orden en λ se van acercando a los valores numéricos de Rabi.

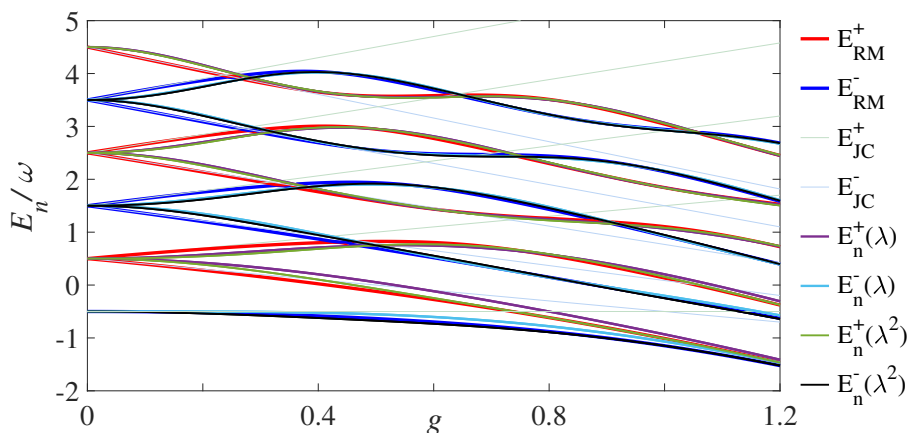


Figura 3.8: Espectro de energía de Rabi para eigenvalores numéricos y con TP positivas y negativas para el caso en resonancia, $\lambda = 0.5$ y constante de acoplamiento $0 \leq g \leq 1.2$. Para el régimen donde el modelo de Jaynes-Cummings es válido existe degeneración en las energías

Otra forma de ver este efecto, se observa en la figura 3.6 donde se muestra una parte de los niveles energéticos para una constante g pequeña. Esta y la figura 3.3 pueden ser leídas como un corte vertical en $g = 0.1$ y $g = 0.8$ en los espectros de energías de la figura 3.4 y la figura 3.2, respectivamente, y observadas desde un costado de la gráfica. Además, podemos notar que la aproximación a segundo orden se junta más al valor numérico de Rabi mientras el modelo de Jaynes-Cummings comienza a desviarse y ya no ser válido para $g = 0.1$ como se esperaba.

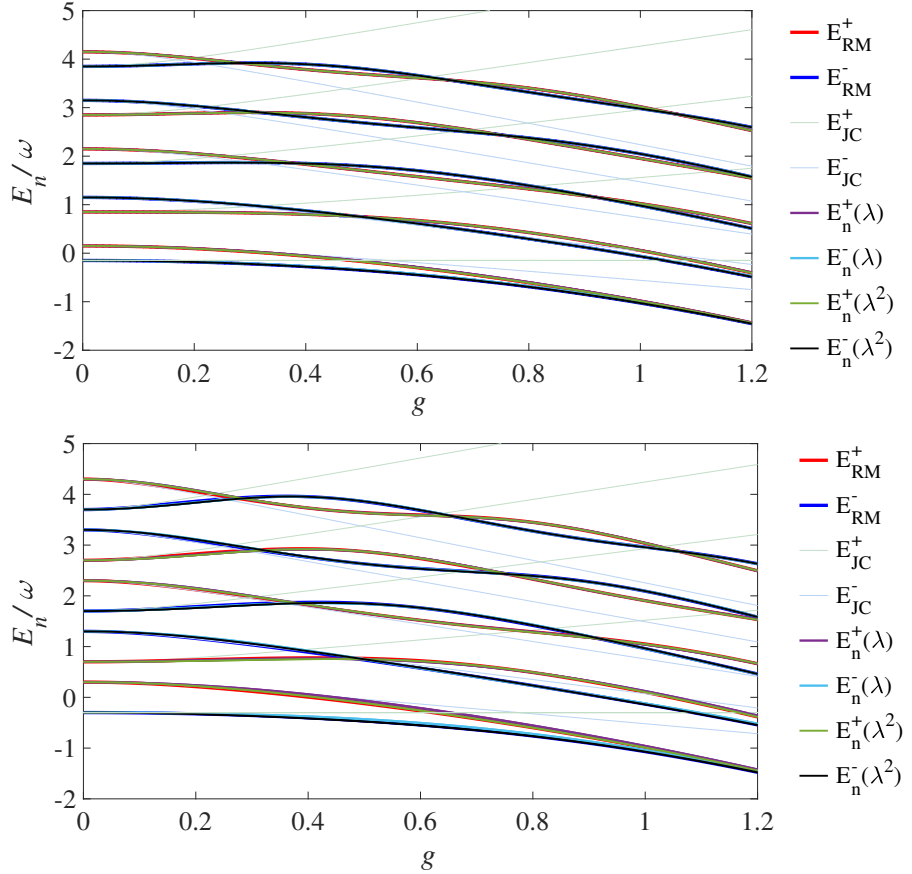


Figura 3.9: Espectro de Rabi utilizando TP y diagonalización numérica de Hamiltoniano con valores $0 \leq g \leq 1.2$ y $\lambda = 0.15$ para la imagen de arriba y $\lambda = 0.3$ para la imagen de abajo. Para ambos casos las líneas rojas etiquetan las energías positivas y las líneas azules etiquetan las energías negativas de los resultados numéricos. Las líneas rosas y verde representan las energías positivas mientras que las líneas azul y negro a las energías negativas de TP.

Por lo tanto, para una constante de acoplamiento entre $0 \leq g \leq 0.01$, la expresión para la energía obtenida por TP, ecuación (3.26), reproduce los mismos resultados que el modelo de Jaynes-Cummings y más en general, para el modelo de Rabi.

Para las figuras 3.7 y 3.8 hemos tomado los valores límite para el parámetro perturbativo λ . Para la primer imagen nos encontramos en el caso donde la diferencia de frecuencias en los niveles energéticos del átomo es cercano a cero $\Omega \approx 0$, y para la gráfica de la segunda imagen nos encontramos en el caso donde la desintonía es cero $\delta = 0$, es decir, el caso resonante.

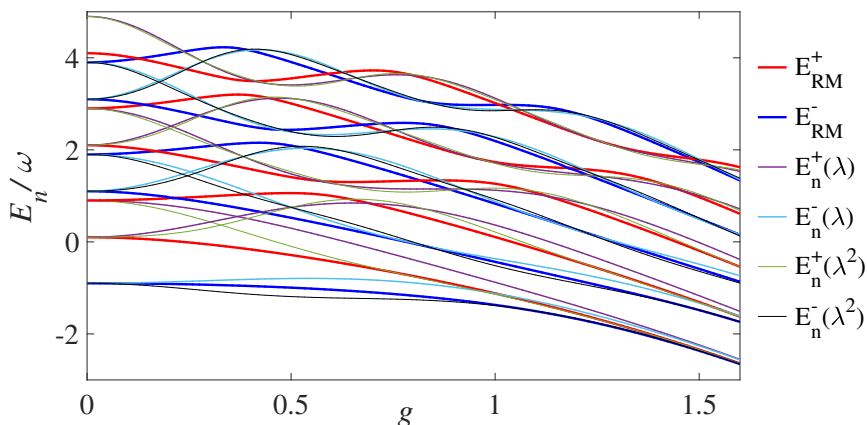


Figura 3.10: Espectro de Rabi numérico y perturbativo para $\lambda = 0.9$, $\omega = 1$ y $0 \leq g \leq 1.2$. Las líneas rojas y azules muestra en los valores exactos correspondientes a los valores propios positivos y negativos, respectivamente, del Hamiltoniano de Rabi mientras que las líneas posteriores indican las correcciones en primer y segundo orden de la energía positivas y negativas calculadas por Teoría de Perturbaciones.

Para el primer caso, los eigenvalores aproximados llegan a ser los mismo que los eigenvalores numéricos del modelo de Rabi. Este situación concuerda con los resultados teóricos en TP para el valor de E_n^\pm ya que comienza a tener mayor impacto el termino $-g^2$ conforme se incrementa g representando una parábola decreciente. Mientras que para el caso resonante con $g = 0.5$ obtenemos una buena aproximación en los resultados.

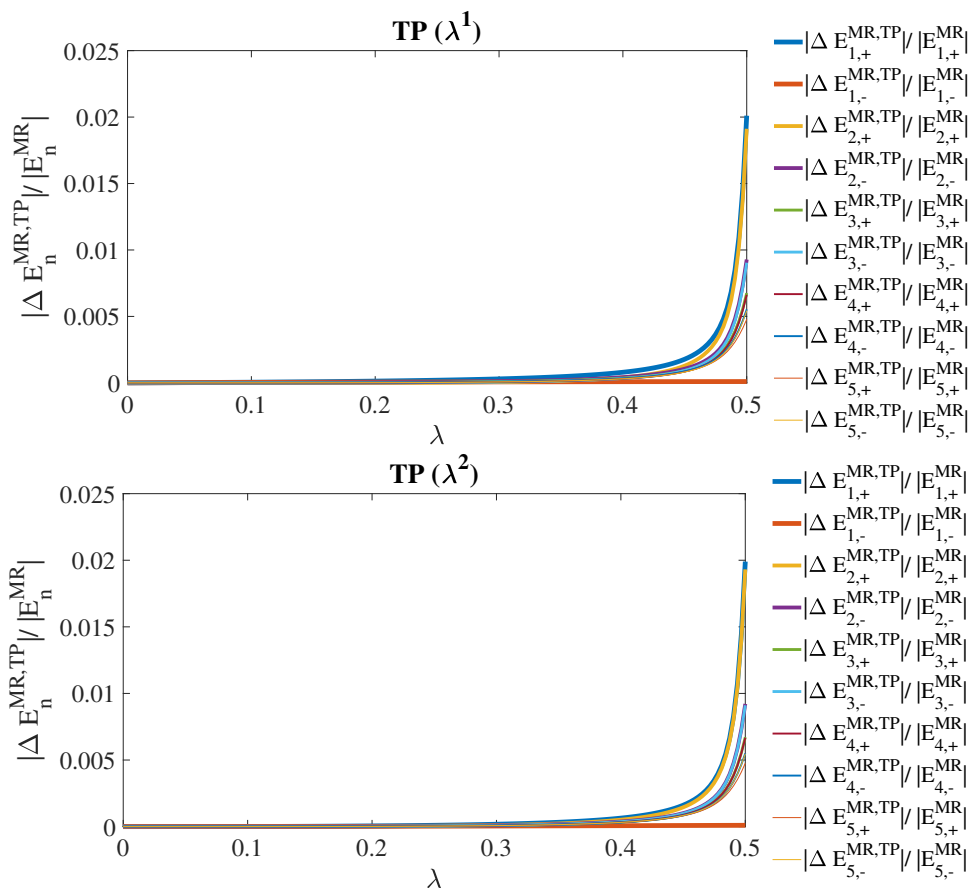


Figura 3.11: Diferencial porcentual entre los valores numéricos exactos del Modelo de Rabi y Teoría de Perturbaciones a primer orden y segundo orden, respectivamente, dentro del régimen de Jaynes-Cummings para los primeros niveles energéticos. Se tomaron a $0 \leq \lambda \leq 0.5$ y $g=0.01$. La nomenclatura que en la gráfica es $\Delta_{n,\pm} \doteq E_{n,\pm}^{RM} - E_{n,\pm}^{TP}$.

Por último, si nos fuéramos a un valor de $\lambda = 0.9$ que este fuera del intervalo aceptado, figura 3.10, los resultados con Teoría de Perturbaciones comienza a dejar de ser válidos. Esto se debe a que la distancia en las energías del átomo será cercana a 2Ω y TP comenzará a perder fuerza bajo estas condiciones.

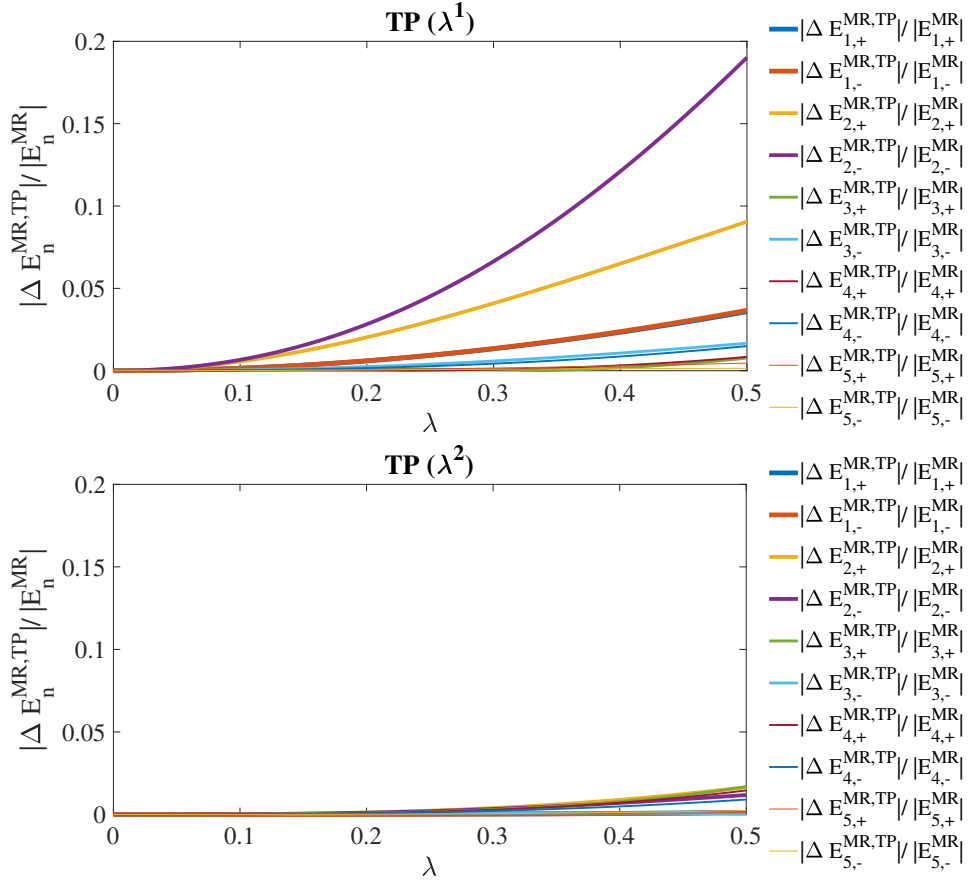


Figura 3.12: Diferencial porcentual entre los valores numéricos exactos del Modelo de Rabi y Teoría de Perturbaciones a primer orden y segundo orden, respectivamente, dentro del régimen de Rabi para los primeros niveles energéticos. Se tomaron a $0 \leq \lambda \leq 0.5$ y $g=1.2$. La nomenclatura que en la gráfica es $\Delta_{n,\pm} \doteq E_{n,\pm}^{RM} - E_{n,\pm}^{TP}$.

CAPÍTULO 4

Dinámica

En este capítulo haremos una comparación de la dinámica entre el modelo de JC y el modelo de Rabi utilizando nuestras soluciones con teoría de perturbaciones y la solución numérica del hamiltoniano de Rabi. Las diferencias en la evolución predichas por los distintos modelos son graficadas y mostraremos el colapso y resurgimiento de probabilidades para ambos casos, un efecto puramente mecánico cuántico. Para las soluciones obtenidas con TP, será necesario hallar el factor de normalización de nuestros estados perturbados quedándonos solo hasta primer orden por sencillez al cálculo y posteriormente hallar el estado evolucionado.

4.1. Modelo de Jaynes-Cummings

Una forma de obtener la dinámica del JCM es mediante los estados estacionarios calculados anteriormente, ec. (2.40). Estos estados $|n, \pm\rangle$ a menudo son llamados "estados vestidos" (dressed states) que tienen asociado el valor de energía $E_{\pm}(n)$, ec. (2.38), respectivamente [3][19]. Comencemos considerando el caso específico donde el estado inicial del campo está en la superposición de estados numéricos, es decir, un estado coherente y el átomo preparado en el estado inicial $|e\rangle$. Así, el estado inicial del campo-átomo es de la forma:

$$|\psi(0)\rangle = |e, \alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |e, n\rangle \quad (4.1)$$

De las ecuaciones (2.40) podemos obtener el estado $|e, n\rangle$ en términos de los estados vestidos como:

$$\begin{aligned} |e, n\rangle &= \cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) |n, +\rangle + \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) |n, -\rangle \\ |b, n+1\rangle &= \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) |n, +\rangle - \cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) |n, -\rangle, \end{aligned} \quad (4.2)$$

quedando el estado inicial de la forma:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left[\cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) |n, +\rangle + \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) |n, -\rangle \right] \quad (4.3)$$

donde $\phi_n = \tan^{-1}(2g\sqrt{n+1}/\delta)$. El vector de estado para tiempos $t > 0$ se consigue aplicando el operador de evolución sobre el estado inicial [4],

esto es:

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= e^{-iH_{JC}t}|\psi(0)\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left(\cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) e^{-iE_+(n)t} |n, +\rangle + \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) e^{-iE_-(n)t} |n, -\rangle \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} \left[\left(\cos\left(\frac{\Omega_n}{2}t\right) - i\frac{\delta}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n}{2}t\right) \right) |e, n\rangle \right. \\
&\quad \left. - i\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\Omega_n^2}} \sin\left(\frac{\Omega_n}{2}t\right) |b, n+1\rangle \right].
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Por lo tanto, el estado $|\psi(t)\rangle$ es el estado evolucionado a cualquier tiempo $t > 0$.

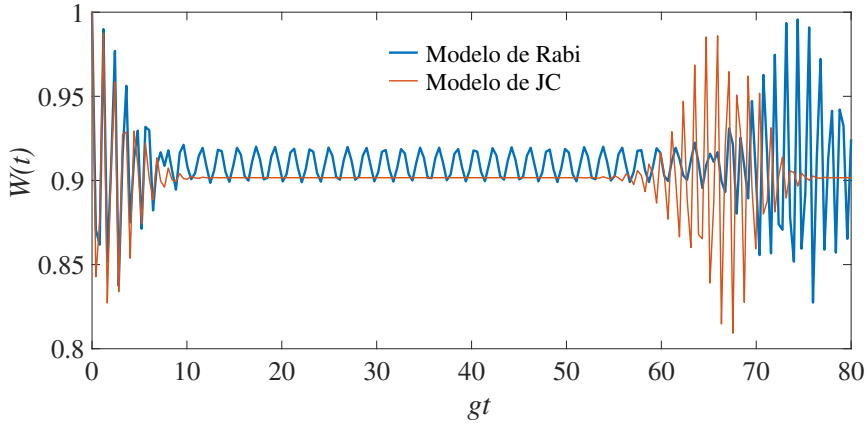


Figura 4.1: Transición de población para un estado inicial del átomo en $|e\rangle$ y un estado coherente para campo de radiación con número medio de fotones $\langle n \rangle = 10$. Se presentan resultados numéricos y analíticos para el modelo de Rabi y el modelo de Jaynes-Cummings, respectivamente. La constante de acoplamiento es de $g = 0.01$ mientras que $\lambda = 0.4$. El resultado para RM fue diagonalizando numéricamente la matriz H_r .

Una cantidad importante de considerar es la inversión de población $W(t)$ definida como la diferencia en las poblaciones del estado excitado

y el estado base:

$$W(t) \doteq \langle \psi(t) | \sigma_z | \psi(t) \rangle = |P_e(t)|^2 - |P_b(t)|^2, \quad (4.5)$$

donde las expresiones $|P_e|^2$ y $|P_b|^2$ representan las probabilidades de que, en el tiempo t , el campo tenga n fotones presentes y el átomo esté en los niveles $|e\rangle$ o $|b\rangle$, respectivamente [2]. El operador σ_z puede ser remplazado por la expresión (2.14) y de esta forma:

$$W(t) = \langle \psi(t) | e \rangle \langle e | \psi(t) \rangle - \langle \psi(t) | b \rangle \langle b | \psi(t) \rangle. \quad (4.6)$$

Calculando el termino de probabilidad para el estado $|e\rangle$ quedara de la

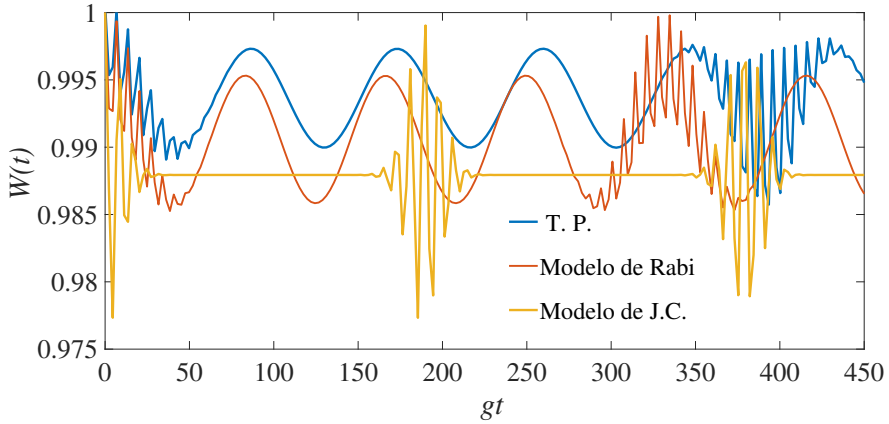


Figura 4.2: Transición de población para $g = 0.01$, $\lambda = 0.2$ y $\langle n \rangle = 10$, representando los resultados con Teoría de Perturbaciones, Modelo de Rabi y Modelo de JC con las líneas azul rojo y amarillo, respectivamente.

siguiente forma:

$$\begin{aligned} |P_e|^2 &= |\langle e | \psi(t) \rangle|^2 = \langle \psi(t) | e \rangle \langle e | \psi(t) \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^n}{n!} \left(\cos^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t\right) + \frac{\delta^2}{\Omega_n} \sin^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t\right) \right), \end{aligned} \quad (4.7)$$

y análogamente para el estado $|b\rangle$:

$$|P_b|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^n}{n!} \left(1 - \frac{\delta^2}{\Omega_n} \right) \sin^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t\right). \quad (4.8)$$

Juntando estos dos resultados, llegamos a que la transición de población para el modelo de JC es:

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\langle n \rangle} \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \left(\frac{\delta^2}{\Omega_n^2} + \left(1 - \frac{\delta^2}{\Omega_n^2}\right) \cos(\Omega_n t) \right) \quad (4.9)$$

donde $\langle n \rangle = |\alpha|^2$ es llamado el número medio de fotones en un estado coherente. La suma se extiende hasta infinito y no cuenta con una expresión analítica conocida pero la importancia física de la suma representa en una escala entre +1 y -1 el grado de excitación de un sistema de dos niveles [24]. Este resultado comparado con las predicciones con un desarrollo con teoría semiclásica es drásticamente diferente. Con teoría semiclásica, la transición de un estado a otro no es posible en la ausencia de un campo de radiación. En cambio, con el tratamiento de la mecánica cuántica, la transición del estado $|e\rangle$ al estado $|b\rangle$ es posible debido a la emisión espontánea de luz [2].

Para tiempos cortos y grande el número medio de fotones, la suma en (4.9) se comporta como $\cos(\Omega_n t)$. Cummings primero mostró que, cuando $\omega = \Omega$, las oscilaciones del coseno “colapsan” [24], es decir, resonancia cero, y para valores distinto la probabilidad de transición disminuye conforme la diferencia de separación en los niveles atómicos decrece.

En la figura 4.1 graficamos la función de transición de población con una normalización al tiempo gt . El valor para la resonancia en esta figura es $\delta = -0.2$ y la transición para este caso será casi cero quedando el átomo en el estado inicial $|e\rangle$ conforme pase t , más aún, la probabilidad de cambiar al estado base del átomo bajará conforme λ disminuya. En la figura 4.2 presentamos la transición $W(t)$ tomando $\lambda = 0.2$. En esta figura agregamos los resultados con TP, como estudiaremos en la siguiente sección, y vemos que el átomo continuara en el estado inicial conforme transcurra el tiempo y con probabilidad cercana a cero de pasar al estado base. A la envolvente en las oscilaciones de las gráfica es conocida en la literatura como oscilaciones de Rabi. (Una mejora en la función de colapso de JC, válido para δ arbitrario fue propuesta por Eberly, Narozhny y Mondragon en 1979 [24]).

En textos de óptica cuántica, normalmente se trata el caso donde contamos con resonancia, es decir, $\delta = 0$ [2][3][19]. Tomando ese valor en δ , la evolución temporal del estado quedará entonces:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} [\cos(\sqrt{n+1}gt)|e, n\rangle - i \sin(\sqrt{n+1}gt)|b, n+1\rangle], \quad (4.10)$$

y la probabilidad de encontrar a un átomo que ha cambiado al estado

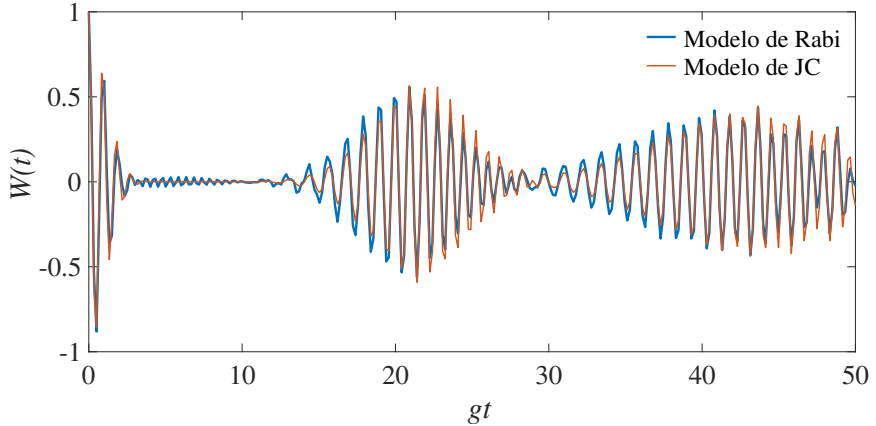


Figura 4.3: Transición de población con un estado inicial $|e\rangle$ y estado coherente $\langle n\rangle = 10$ para el caso resonante. La línea azul representa el modelo de Rabi y la línea roja representa el modelo de JC. La constante de acoplamiento es de $g = 0.01$ y $\lambda = 0.5$.

base en un momento posterior t será:

$$\begin{aligned} |P_b|^2 &= |\langle b|\psi(t)\rangle|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \sin^2(\sqrt{n+1}gt) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\langle n\rangle} \frac{\langle n\rangle^n}{n!} \sin^2(\sqrt{n+1}gt), \end{aligned} \quad (4.11)$$

y la probabilidad de permanecer en el estado $|e\rangle$ es:

$$|P_e|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\langle n \rangle} \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \cos^2(\sqrt{n+1}gt), \quad (4.12)$$

quedando la transición de probabilidad como:

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\langle n \rangle} \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \cos(2\sqrt{n+1}gt). \quad (4.13)$$

En la figura 4.3 se muestra esta esta dinámica, analítica y numérica de los modelos JC y Rabi, respectivamente. La línea roja expresa la expresión (4.11) mientras la línea azul es el resultado numérico de la evolución de los estados para el modelo de Rabi diagonalizando el Hamiltoniano H_{RM} . Para este caso particular es posible notar el comportamiento de colapso y reavivamiento en las probabilidades de transición. Primero, al tiempo $t = 0$, el átomo se encuentra en un estado definido y todos los términos en la suma están correlacionados. Conforme aumenta el tiempo, las oscilaciones de Rabi asociadas con diferentes excitaciones tienen diferentes frecuencias y no están relacionadas recíprocamente, conduciendo a un colapso de la inversión. A medida que aumenta t , se restablece la correlación y se produce un avivamiento [2].

Las expresiones para los tiempos asociados con las oscilaciones sinusoidales de Rabi tales como el tiempo de periodo t_R de Rabi, el tiempo de colapso t_c y el tiempo de reavivamiento (o resurgimiento) t_r , pueden obtenerse de la ec. (4.9) en el límite donde $\langle n \rangle \gg 1$, [2]. El tiempo de periodo t_R de las oscilaciones de Rabi viene dado como el inverso de la frecuencia Ω_n de Rabi, ec. (2.39), en $n = \langle n \rangle$, es:

$$t_R \sim \frac{1}{\Omega_{\langle n \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + 4g^2\langle n \rangle}}. \quad (4.14)$$

Estas oscilaciones se mantendrán hasta un tiempo t_c cuando las oscilaciones asociadas con diferentes n no estén correlacionadas. El tiempo de colapso, viene expresado como, ver [2]:

$$t_c \sim \frac{1}{2g} \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4g^2\langle n \rangle}}. \quad (4.15)$$

Para valores altos en $\langle n \rangle$, t_c decrece y para resonancia $\delta = 0$, el tiempo de colapso es independiente del promedio de número de fotones, $\langle n \rangle$. El intervalo entre resurgimientos en las probabilidades, t_r , tienen lugar cuando las fases en las oscilaciones de Rabi entre dos términos cercanos difieren en un múltiplo de 2π , ver [2], quedando que:

$$t_r = \frac{2\pi k}{\Omega_{\langle n \rangle} - \Omega_{\langle n \rangle - 1}} \simeq \frac{2\pi k \sqrt{\langle n \rangle}}{g} \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4g^2 \langle n \rangle}}, \quad (4.16)$$

donde $k = 1, 2, \dots$. Los resurgimientos en las probabilidades estarán en intervalos regulares.

Es importante mencionar que la dinámica hallada para el modelo de Rabi se obtuvo numéricamente y por tanto, en cada gráfica de esta sección tienen efecto los términos despreciados por RWA apareciendo las dos frecuencias del modelo, $\Omega - \omega$ y $\Omega + \omega$. Además, hacer una comparación del modelo de JC con nuestros resultados con TP no es favorable con nuestros estados debido a que, para un valor de λ y g muy pequeña, los elementos de matriz del operador de desplazamiento (2.76) serán muy cercanos a cero y esencialmente $\langle m | D(\alpha) | n \rangle \sim \delta_{mn}$. Entonces, las correcciones a nuestra solución con TP tendrán valores muy pequeños conforme aumente la potencia en λ haciendo converger la serie demasiado lento al resultado y para encontrarse en el régimen de JC necesitaremos incorporar más términos a nuestro eigenestado.

4.2. Estados con teoría de perturbaciones

Para la dinámica con los estados obtenidos de TP, tomamos hasta primer orden para facilitar el cálculo. Comencemos primero normalizando el estado de la ec. (3.27), es decir, sea el estado:

$$|\tilde{E}_n^\pm\rangle_N = A_n^{1/2} |\tilde{E}_n^\pm\rangle \quad (4.17)$$

con ${}_N\langle \tilde{E}_n^\pm | \tilde{E}_n^\pm \rangle_N = 1$. Multiplicando por la izquierda $\langle \tilde{E}_n^{\pm(0)} |$ al estado normalizado ec. (4.17), nos queda que:

$$\langle \tilde{E}_n^{\pm(0)} | \tilde{E}_n^\pm \rangle_N = A_n^{1/2} \quad (4.18)$$

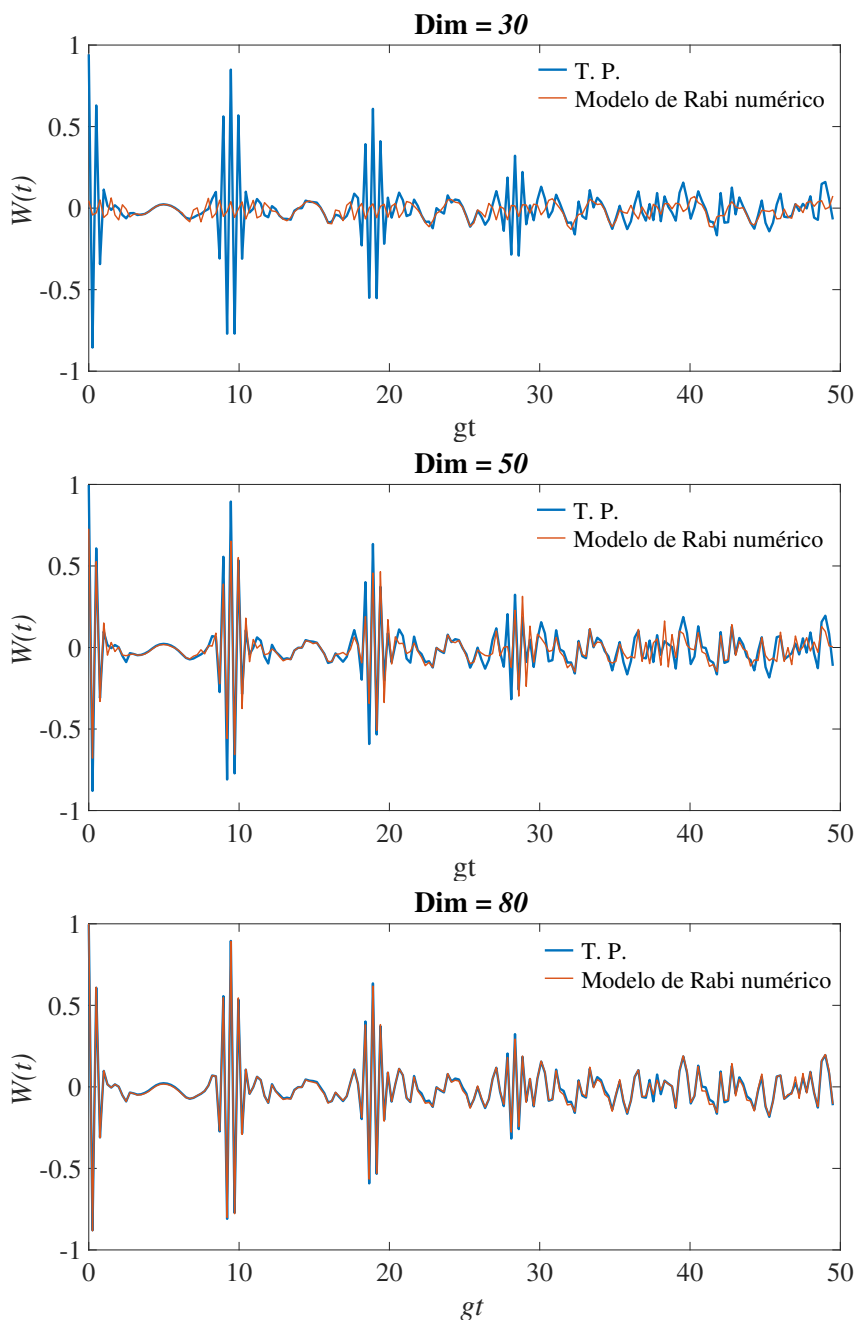


Figura 4.4: Evolución temporal de la inversión de población con los valores $g = 1.5$, $\lambda = 0.2$ y $\langle n \rangle = 10$ para las tres imágenes. La primera imagen corresponde para una dimensión del sistema 30, la segunda imagen a 50 y para la tercera una dimensión de 80 para MR numérico, respectivamente. Mientras que para los resultados con T.P. se tomó fija la dimensión con valor de 50.

Además, notando que:

$$1 = A_n \langle \tilde{E}_n^\pm | \tilde{E}_n^\pm \rangle,$$

entonces

$$A_n^{-1} = \langle \tilde{E}_n^\pm | \tilde{E}_n^\pm \rangle = 1 + (-1)^{2n} \lambda^2 \sum_{m \neq n} \frac{| \langle m | D(2g) | n \rangle |^2}{(n-m)^2}.$$

El segundo termino debe entenderse como la probabilidad de escape a estados distintos de $|\tilde{E}_n^{\pm(0)}\rangle$, además de que $A_n \leq 1$. Haciendo una expansión de potencias sobre el binomio y quedándonos hasta el segundo término, podemos aproximar factor A_n como:

$$A_n = 1 - \lambda^2 \sum_{m \neq n} \frac{\langle m | D(2g) | n \rangle}{(n-m)^2}, \quad (4.19)$$

y el estado normalizado quedara finalmente escrito de la forma:

$$|\tilde{E}_n^\pm\rangle_N = A_n^{1/2} \left(|\tilde{E}_n^{\pm(0)}\rangle + \lambda |\tilde{E}_n^{\pm(1)}\rangle \right) \quad (4.20)$$

con eigen-energía:

$$E_n^\pm = n - g^2 \pm (-1)^n \lambda e^{-2g^2} L_n(4g^2).$$

Para la dinámica, un estado inicial del sistema podemos tomarlo tal como en el caso para el modelo de JC, es decir:

$$|\psi(0)\rangle = |e, \alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |e, n\rangle, \quad (4.21)$$

el producto de un estado coherente y el átomo en el estado excitado $|e\rangle$. Aplicando nuevamente el operador de evolución al estado inicial:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle = \sum_{n,\pm} e^{-iE_n^\pm t} {}_N \langle \tilde{E}_n^\pm | e, n \rangle |\tilde{E}_n^\pm\rangle_N \quad (4.22)$$

Recordando que el estado $|\tilde{E}_n^\pm\rangle_N$ expandido se escribe como:

$$\begin{aligned} |\tilde{E}_n^\pm\rangle_N = & A_n^{1/2} \left\{ D(-g)|n\rangle \frac{|e\rangle + |b\rangle}{2} \pm (-1)^n D(g)|n\rangle \frac{|e\rangle - |b\rangle}{2} \right. \\ & \pm (-1)^n \lambda \sum_{m \neq n} \frac{\langle m|D(2g)|n\rangle}{n-m} [D(-g)|m\rangle \frac{|e\rangle + |b\rangle}{2} \\ & \left. \pm (-1)^m D(g)|m\rangle \frac{|e\rangle - |b\rangle}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el estado evolucionado a un tiempo t lo escribimos de la forma:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = & \sum_{+,-} \sum_{m \neq n} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-iE_n^\pm t} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{|A_n|}{4} \beta_n \{ [D(-g) \pm (-1)^n D(g)] |n, e\rangle \\ & + [D(-g) \mp (-1)^n D(g)] |n, b\rangle \\ & \pm (-1)^n \lambda \sum_{m \neq n} \frac{\langle m|D(2g)|n\rangle}{n-m} [D(-g) \pm (-1)^m D(g)] |m, e\rangle \\ & \pm (-1)^n \lambda \sum_{m \neq n} \frac{\langle m|D(2g)|n\rangle}{n-m} [D(-g) \mp (-1)^m D(g)] |m, b\rangle \} \end{aligned} \quad (4.23)$$

con

$$\beta_n = (1 \pm (-1)^n) \langle n|D(g)|n\rangle \pm (1 \pm 1) \lambda \sum_{m \neq n} \frac{\langle m|D(2g)|n\rangle^* \langle m|D(g)|n\rangle}{n-m}.$$

Teniendo calculado es estado $|\psi(t)\rangle$, podemos calcular el producto interior entre $\langle e|\psi(t)\rangle$ que finalmente quedará como:

$$\begin{aligned} \langle e|\psi(t)\rangle = & \sum_{+,-} \sum_{m \neq n} (1 \pm (-1)^n) e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-iE_n^\pm t} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{|A_n|}{4} \beta_n \{ \langle n|D(-g)|n\rangle \\ & \pm \lambda \sum_{m \neq n} (-1)^m \frac{\langle m|D(2g)|n\rangle \langle n|D(g)|m\rangle}{n-m} \}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

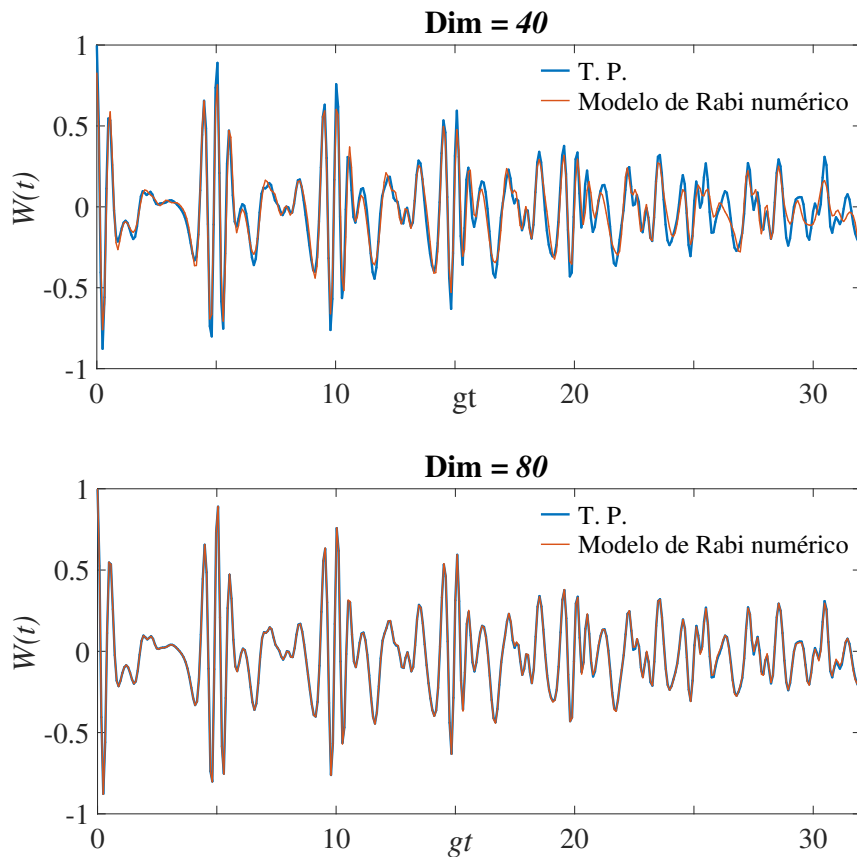


Figura 4.5: Evolución temporal de la inversión de población $W(t)$ para la solución con Teoría de Perturbaciones y valores numéricos del modelo de Rabi. Los valores en la constante de acoplamiento y el parámetro perturbativo son: $g = 0.8$, $\lambda = 0.2$. Número medio de fotones $\langle n \rangle = 10$. Para ambas figuras se tomo fija la dimensión 50 para los resultados con T.P. mientras que para lo numérico de Rabi se tomaron dimensiones de 40 y 80.

llegando a que la probabilidad de obtener el estado $|e\rangle$, quedándonos con los términos a primer orden en λ , será:

$$\begin{aligned}
|P_e|^2 &= \sum_{+,-} \sum_{m \neq n} (1 \pm (-1)^n) e^{-\langle n \rangle^2} \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \frac{|A_n|^2}{16} |\beta_n|^2 \{ \\
&|\langle n|D(g)|n\rangle|^2 \pm \lambda \langle n|D(g)|n\rangle \sum_{m \neq n} (-1)^m \left[\frac{\langle m|D(2g)|n\rangle \langle n|D(g)|m\rangle}{n-m} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\langle n|D(2g)|m\rangle \langle m|D(g)|n\rangle}{n-m} \right] \}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Haciendo algo análogo para la probabilidad del estado $|b\rangle$, $|P_b|^2$ nos queda como:

$$\begin{aligned}
|P_b|^2 &= \sum_{+,-} \sum_{m \neq n} (1 \mp (-1)^n) e^{-\langle n \rangle^2} \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \frac{|A_n|^2}{16} |\beta_n|^2 \{ \\
&|\langle n|D(g)|n\rangle|^2 \pm \lambda \langle n|D(g)|n\rangle \sum_{m \neq n} (-1)^m \left[\frac{\langle m|D(2g)|n\rangle \langle n|D(g)|m\rangle}{n-m} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\langle n|D(2g)|m\rangle \langle m|D(g)|n\rangle}{n-m} \right] \}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Por lo tanto, la transición de población para teoría de perturbaciones, W , se leerá como:

$$\begin{aligned}
W(t) &= \sum_{+,-} \sum_{m \neq n} (\pm 2(-1)^n) e^{-\langle n \rangle^2} \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \frac{|A_n|^2}{16} |\beta_n|^2 \{ \\
&|\langle n|D(g)|n\rangle|^2 \pm \lambda \langle n|D(g)|n\rangle \sum_{m \neq n} (-1)^m \left[\frac{\langle m|D(2g)|n\rangle \langle n|D(g)|m\rangle}{n-m} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\langle n|D(2g)|m\rangle \langle m|D(g)|n\rangle}{n-m} \right] \}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

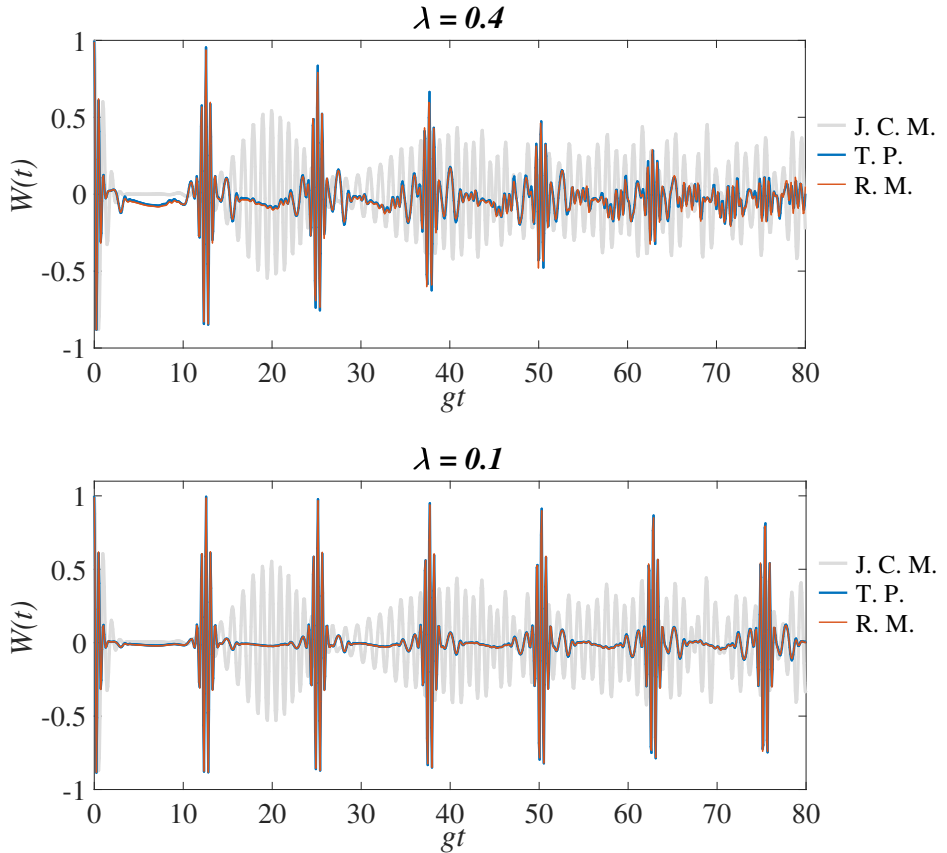


Figura 4.6: Dinámica de transición de población a través del tiempo escalado con gt para T. P., modelo de Rabi y modelo de J. C. En la primera imagen se muestra la evolución de W con $\lambda = 0.4$, y la segunda imagen el mismo comportamiento pero tomando $\lambda = 0.1$. En ambos casos la constante de acoplamiento es de $g = 2$ y un número medio de fotones $\langle n \rangle = 10$. Para ambas gráficas agregamos la dinámica que presenta el modelo de Jaynes-Cummings valido como un modelo cuántico y no como interacción átomo-fotón.

Para comenzar nuestro análisis con Teoría de Perturbaciones, en la figura 4.4 graficamos tres resultados tomando las mismas variables en g y λ pero con diferentes dimensiones del espacio. Hemos mencionado que los resultados presentados para el modelo de Rabi se obtiene de manera

numérica truncando el espacio un valor finito. En la primer imagen se muestra la inversión de población para un espacio de dimensión 30. La línea azul representa el calculo de la ec. (4.27) mientras la línea roja los valores numéricos del RM. Como primera impresión se observa una diferencia en los resultados coincidiendo en pocos valores. Para la segunda figura aumentamos el espacio del sistema a una dimensión de 50 y notamos que los resultados numéricos del RM comienzan a pegarse a los resultados con TP en tanto que los valores azules no cambian incrementando la dimensión. Aumentando nuevamente la dimensión del sistema a un valor de 80 para RM mientras que para nuestra solución permanecemos con una dimensión de 50, los resultados de diagonalizar el sistema numéricamente se van empalmando con nuestra solución de TP. La comparación de estas tres gráficas nos permite expresar que para tener resultados convenientes en el modelo de Rabi, necesitamos un número de fotones grande, pero con Teoría de Perturbaciones no es necesario un valor alto, es decir, con TP nos acercamos más rápido a la respuesta en la transición de probabilidad que numéricamente con el modelo de Rabi.

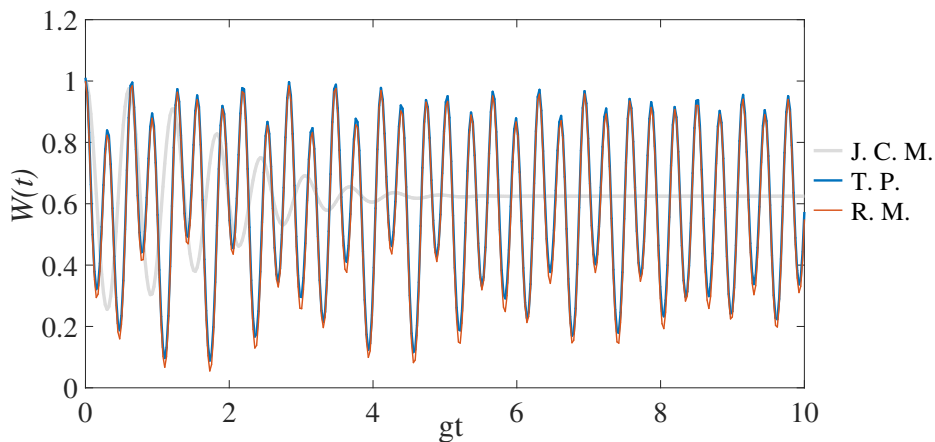


Figura 4.7: Dinámica de transición de probabilidad con TP, modelo de Rabi y modelo de JC para los valores de $g = 0.1$, $\lambda = 0.1$ y $\langle n \rangle = 10$.

En la figura 4.5 mostramos el mismo efecto en la diferencia de las dimensiones pero para un valor en la constante de acoplamiento $g = 0.8$

y el mismo para λ . A este régimen de acoplamiento nos encontramos dentro del modelo de Rabi y a pesar de contar solo con los resultados a primer orden en la corrección de los eigenestados, conseguimos una buena aproximación en los resultados debidos con un número menor en la dimensión.

Fijándonos ahora en el cambio del parámetro perturbativo, λ , para valores próximos y lejanos a resonancia, el resultado cambia si $\lambda \sim 0.5$ como se muestra en la figura 4.6, aun teniendo una dimensión grande en los dos resultados, la solución con TP no corresponde del todo a la solución numérica del RM, este efecto es debido a que el valor en λ esta cercano a la máxima perturbación del sistema y nuestra solución propuesta en estos resultados consideramos solo hasta primer orden. De este modo para corregir esta diferencia y conseguir el valor correcto será necesario incluir más términos a nuestro eigenestado con TP. En esta imagen agregamos de igual forma, usando los mismos parámetros para la solución calculada en ec. (4.9), la transición $W(t)$ para JC. Puesto que ya no es valido como modelo de interacción campo-átomo a este régimen de acoplamiento continua siendo valido como un modelo cuántico y, tanto Rabi como Jaynes-Cummings, predicen resurgimientos.

Finalmente, presentamos un gráfica donde nos hallamos entre en el límite donde el dominio de JC ya no será valido y comenzaran a ser los resultados puramente de RM, figura 4.7. En esta gráfica mostramos la dinámica de inversión de población para TP, RM y JC. Para este caso los resultados con TP no coinciden con JC mientras que con RM obtenemos una buena aproximación tomando solo primer orden en corrección con TP. Estos resultados expresan que este método es más eficaz para valores grandes en g y no para el régimen de Jaynes-Cummings donde el acoplamiento es pequeño y δ cercano a resonancia.

CAPÍTULO 5

Conclusiones

En este trabajo hemos presentado una alternativa para resolver el Modelo de Rabi utilizando un método de aproximación conocido como Teoría de Perturbaciones. Con esta teoría es posible calcular tanto analítica como numéricamente el espectro de energías y los eigenestados del modelo. Además, utilizando estos últimos, es posible hallar la transición de población para un régimen grande abarcado por RM. Como primer resultado favorable del uso de TP, restringimos al sistema a solo dos variables independientes, el parámetro perturbativo λ y la constante de acoplamiento g , lo cual, para este proceso, es conveniente jugar con los valores de la constante para comparar los resultados en los límites del Modelo de Rabi y el Modelo de Jaynes-Cummings que ha sido bien estudiado este último. En segundo lugar, la corrección a segundo orden logra ser una conveniente aproximación al valor exacto en las energías del modelo y, aunque es claro que a mayor orden de afinación la solución perturbativa tenderá al valor exacto, no deja de ser un resul-

tado favorable. En las gráficas presentadas en la sección de resultados, analizamos esta declaración y observamos que estando dentro del dominio donde es válido el Modelo de Jaynes-Cummings, los resultados en la energía con Teoría de Perturbaciones coinciden completamente con los valores exactos. Para valores grandes de g donde no es válido el JCM, la energía a segundo orden produce una buena aproximación a los valores exactos-numéricos del Modelo de Rabi teniendo un error de orden λ^3 .

Para el caso de los eigenestados obtenidos con TP, es posible calcular la transición de población de los estados de átomo. Esta observable es comúnmente calculada para el modelo de Jaynes-Cummings y con una desintonía iguala a 0, para el caso del modelo de Rabi no se encuentra mucha información sobre esta observable y en algunos casos no se menciona nada de los eigenestados y solo se enfatiza en las energías como en el caso de [5]. En cambio, nuestra propuesta para resolver el modelo, comparamos nuestros resultados con TP y los valores numéricos diagonalizando el Hamiltoniano de Rabi. Una primer ventaja que notamos fue que alcanzamos el valor esperado contando con un corto numero de fotones mientras que para la parte numérica de Rabi, es necesario utilizar una numero grande de fotones, es decir, una dimensión alta. Este mismo efecto o error numérico debido al efecto de tamaño finito del sistema es visto cuando calculamos el espectro de energías.

Otra virtud de nuestra solución es la aproximación a los valores numéricos de Rabi. Aun cuando se tomo a primer orden de corrección en las energías como en los estados, es favorable considerarse como solución del sistema contando con régimen de acoplamiento grande y para cualquier valor en la desintonía. Comparar esto dentro de JC no fue realizable debido a que nos hallamos con $g \ll 1$ y las correcciones para los estados que dependen de los elementos de matriz del operador $D(\alpha)$ son cercanos a cero. Para mejorar esto será necesario considerar términos mayores en la serie de λ pero el calculo para un orden superior al primero se vuelve cada vez más complicado y tardado para la parte numérica.

Calculamos el valor de corrección a la energía hasta tercer orden y

en los estados hasta segundo orden analíticamente pero no fueron implementados en las gráficas presentadas en este trabajo. Al incorporar estos cálculos a los resultados se presentan distintas dificultades para evaluarlo numéricamente. De esta forma, para el caso de la dinámica de los modelos, tomamos a primer orden en λ los eigenestados y eigenenergías perturbadas para una mayor simplicidad en la evolución de los estados y en las expresiones. Sin embargo, no deja de ser una mejora y una extensión para una continuación del estudio de este modelo.

Bibliografía

- [1] RABI, I., *On the Process of Space Quantization Phys. Rev.* **49**, 324 (1936).
- [2] SCULLY S. Y SUHAIL M., *Quantum Optics*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, (1997).
- [3] SCHLEICH, W., *Quantum Optics in Phase Space*, WILEY-CVH, (2001).
- [4] SAKURAI, J. J. Y NAPOLITANO, J., *Modern Quantum Mechanics*, PEARSON, (2011).
- [5] BRAAK, D., *Integrability of the Rabi Model. Phys. Rev. Lett.*, VOL. **107**, NO. 03, P. 100401, 2011.
- [6] FA, DE Y KIM, M AND KNIGHT, P. Y BUEK, V., *Properties of displaced number states. Phys. Rev. A*, VOL. 41, P. 2645-2652, 1990.

- [7] MALDONADO-VILLAMIZAR, F. H. Y HUERTA ALDERETE, C. Y RODRÍGUEZ-LARA, B. M., *Squeezed displaced entangled states in the quantum Rabi model. Phys. Rev. A*, VOL. 100, P. 013811, 2019.
- [8] ENGLUND, D., FARAON, A., FUSHMAN, I., *Controlling cavity reflectivity with a single quantum dot. Nature*, **450**, 857–861 (2007).
- [9] NIEMCZYK, T., DEPPE, F., HUEBL, H., *Circuit quantum electrodynamics in the ultrastrong-coupling regime. Nature Physics*, **6**, 772–776 (2010).
- [10] LEIBFRIED, D., BLATT, R., MONROE, C. AND WINELAND, D.. *Quantum dynamics of single trapped ions Rev. Mod. Phys.* **75**, 281 (2003).
- [11] IRISH, E. K.. *Generalized Rotating-Wave Approximation for Arbitrarily Large Coupling Phys. Rev. Lett.* **99**, 173601 (2007).
- [12] LARSON, J.. *Dynamics of the Jaynes–Cummings and Rabi models: old wine in new bottles Phys. Scr.* **76**, 146 (2007).
- [13] WERLANG, T. AND DODONOV, A. V. AND DUZZIONI, E. I. AND VILLAS-BÔAS, C. J.. *Rabi model beyond the rotating-wave approximation: Generation of photons from vacuum through decoherence Phys. Rev. A* **78**, 053805 (2008).
- [14] AMICO, L., FRAHM, H., OSTERLOH, A., AND RIBEIRO, G. A. P.. *Integrable spin–boson models descending from rational six-vertex models Nucl. Phys.* **B787**, 283 (2007).
- [15] AMICO, L., FRAHM, H., OSTERLOH, A., AND WIRTH T.. *Separation of variables for integrable spin–boson model Nucl. Phys.* **B839**, 604 (2010).
- [16] TORRES, J. M. (2011). *El oscilador Dirac-Moshinsky, su interpretación en óptica cuántica y más allá.* [TESIS DE DOCTORADO, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO]. REPOSITARIO INSTITUCIONAL. [HTTPS://FIS.UNAM.MX/PDFS/TESIS/TESIS%20MAESTRIA-JUAN%20MAURICIO%20TORRES.PDF](https://fis.unam.mx/pdfs/tesis/tesis%20MAESTRIA-JUAN%20MAURICIO%20TORRES.pdf)

- [17] HUERTA, C. *Modelo de Rabi cuántico en cavidades cruzadas: Estudio espectral*. [TESIS DE MESTRÍA, INSTITUTO NACIONAL DE ASTROFÍSICA OPTICA Y ELECTRÓNICA] REPOSITORIO INSTITUCIONAL. [HTTPS://INAOE.REPOSITORIOINSTITUCIONAL.MX/JSPUI/BITSTREAM/1009/833/1/HUERTAAC.PDF](https://inaoe.repositorioinstitucional.mx/jspui/bitstream/1009/833/1/HUERTAAC.PDF)
- [18] GRIFFITHS, DAVID, *Introduction to Quantum Mechanics*, PEARSON, PRENTICE HALL, (2005).
- [19] GERRY, C., KNIGHT, P., *Introduction to Quantum Optics*, CAMBRIDGE. (2005).
- [20] COHEN-TANNOUJDI, C., DIU, B., LALOË F., *Quantum Mechanics*, A WILEY-INTERSCIENCE PUBLICATION, VOL. 1, HERMANN, (1997).
- [21] CALDERÓN, J. E. (2016). *Rabi Hamiltonian and Geometric Phases*. [TESIS DE MAESTRÍA. PONTIFICA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ]. [HTTP://TESIS.PUCP.EDU.PE/REPOSITORIO/BITSTREAM/HANDLE/20.500.12404/6889/CALDERON_JUAN_HAMILTONIAN_GEOMETRIC_PHASES.PDF?SEQUENCE=1&ISALLOWED=Y](http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/6889/CALDERON_JUAN_HAMILTONIAN_GEOMETRIC_PHASES.PDF?SEQUENCE=1&ISALLOWED=Y)
- [22] ESTADOS COHERENTES. (15 DE ABRIL DE 2020). EN LA MECÁNICA CUÁNTICA. [HTTP://LA-MECANICA-CUANTICA.BLOGSPOT.COM/2009/08/ESTADOS-COHERENTES.HTML](http://la-mecanica-cuantica.blogspot.com/2009/08/ESTADOS-COHERENTES.HTML)
- [23] LA MATRIZ MOMENTUM COMO GENERADORA DE TRASLACIÓN. (15 DE ABRIL DE 2020). EN LA MECÁNICA CUÁNTICA. [HTTP://LA-MECANICA-CUANTICA.BLOGSPOT.COM/2010/08/LA-MATRIZ-MOMENTUM-COMO-GENERADORA-DE.HTML](http://la-mecanica-cuantica.blogspot.com/2010/08/LA-MATRIZ-MOMENTUM-COMO-GENERADORA-DE.HTML)
- [24] EBERLY, J. H. AND NAROZHNY, N. B. AND SANCHEZ-MONDRAGON, J. J. *Periodic Spontaneous Collapse and Revival in a Simple Quantum Model Phys. Rev. Lett.*, **44**, 1323 (1980)