



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

**Estudio de efectos disipativos en la
evolución cósmica: termodinámica causal**

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada
de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

para obtener el grado de:

Doctor en Ciencias (Física Aplicada)

presenta

Gilberto Aguilar Pérez

asesorado por

Dra. Ana A. Avilez López

Dr. Miguel Ángel Cruz Becerra

Puebla, Pue.

Enero, 2023.



BUAP

MTRO. RICARDO VALDERRAMA VALDEZ,
DIRECTOR DE ADMINISTRACION ESCOLAR,
BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA
P R E S E N T E.

Por este conducto, me permito solicitar a usted de la manera más atenta, le sea asignada fecha de Examen de Grado de DOCTORADO EN CIENCIAS (FÍSICA APLICADA), el examen se llevará a cabo el día 27 de ENERO de 2023 a las 18:00 hrs. en Sala Audiovisual 2 (1FM9/109) de esta Facultad, al(a) C.:

AGUILAR PEREZ GILBERTO, matrícula: 218570370

toda vez que ha cubierto los requisitos académicos de la revisión de tesis cuyo título es:

“ESTUDIO DE EFECTOS DISIPATIVOS EN LA EVOLUCIÓN CÓSMICA: TERMODINÁMICA CAUSAL”

revisada y aprobada por el jurado integrado por los profesores:

DR. VELÁZQUEZ QUESADA MERCEDES PAULINA	(Presidente)
DR. FÉLIX BELTRÁN OLGA GUADALUPE	(Secretario)
DR. DÍAZ CRUZ JUSTINIANO LORENZO	(Vocal)
DR. BERNAL MARÍN TULA	(Vocal Externo)
DR. GARCÍA ASPEITIA MIGUEL ANGEL	(Vocal Externo)
DR. ROSADO SÁNCHEZ ALFONSO	(Suplente)

Teniendo como Asesor(es):

DR. AVILEZ LÓPEZ ANA AURELIA
DR. CRUZ BECERRA MIGUEL ÁNGEL

Sin otro particular, aprovecho para enviarle un cordial saludo, quedando de usted,

ATENTAMENTE
“PENSAR BIEN, PARA VIVIR MEJOR”
H. Puebla de Z., A 16 de Enero de 2023.


DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO.



C.c.p Minutario
Dr.SMA/ mesa*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Título: Estudio de efectos disipativos en la evolución cósmica: termodinámica causal.

Estudiante: Gilberto Aguilar Pérez.

COMITÉ

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada
Presidenta

Dr. J. Lorenzo Díaz Cruz
Secretario

Dra. Olga Guadalupe Félix Beltrán
Vocal

Dra. Ana A. Avilez López
Asesora

Dr. Miguel Ángel Cruz Becerra
Asesor

Agradecimientos

La realización de este trabajo no habría sido posible sin el apoyo y cariño de mis padres y hermano.

A mis asesores: Dra. Ana y Dr. Miguel por nunca dejarme claudicar y por creer en este trabajo y sus resultados aún cuando yo estuve a punto de tirar la toalla.

A Marianne por haberme acompañado en cada paso de este viaje llamado doctorado en física. Por ser amiga, confidente, colega y hermana.

A mis amigos, sin su apoyo y acompañamiento seguramente habría enloquecido en el proceso.

Al comité tutorial: Dra. Mercedes, Dr. Lorenzo, Dra. Olga, Dra. Tula y Dr. Miguel Aspeitia por sus comentarios y observaciones que enriquecieron el contenido de este trabajo.

A la FCFM-BUAP por haberme recibido.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por haberme bridado una beca de doctorado.

Índice general

Resumen	12
Introducción	14
1. Conceptos básicos de cosmología	20
1.1. La cosmología como ciencia	20
1.2. El principio cosmológico	21
1.3. La métrica de Friedmann-Robertson-Walker	22
1.4. Relación entre el factor de escala y el corrimiento al rojo	23
1.5. Modelo cosmológico a partir de la relatividad general	25
1.5.1. Universo dominado por materia	27
1.5.2. Universo dominado por radiación	27
1.5.3. Universo dominado por energía del vacío	28
1.6. El modelo Λ CDM	29
1.6.1. Problemas del modelo Λ CDM	31
2. Fluidos relativistas	34
2.1. ¿Por qué es interesante estudiar procesos disipativos?	35
2.2. Teoría de Israel-Stewart	37
2.3. La extensión no lineal de la teoría de Israel-Stewart	40
2.3.1. Solución tipo de Sitter	42
3. Sistemas dinámicos	43
3.1. Teoría de estabilidad lineal	44

4. Dinámica de cosmologías viscosas en el formalismo no lineal de Israel-Stewart	46
4.1. Planteamiento del sistema dinámico	49
4.1.1. Caso $Q = 0$: Sin interacción entre materia y energía oscura . . .	51
4.1.2. Caso $Q \neq 0$: Interacción entre materia y energía oscura	52
4.2. Soluciones linealizadas	58
4.2.1. Régimen sin interacción, $Q = 0$	59
4.2.2. Regimen con interacción, $Q \neq 0$	60
5. Parámetros cosmológicos	63
5.1. El parámetro de Hubble	63
5.2. El parámetro de desaceleración	66
5.3. Error numérico de las soluciones para $x(N)$, $y(N)$ y $z(N)$	67
6. Comentarios y perspectivas	69
6.1. Comentarios finales	69
6.2. Perspectiva a futuro	71
A. Análisis de estabilidad para un sistema autónomo de dos variables	72
A.1. Puntos fijos o críticos	72
A.2. Estabilidad alrededor de los puntos fijos	73
A.3. Análisis de estabilidad para el caso $Q = 0$	74
A.4. Análisis de estabilidad para el caso $Q \neq 0$	76
A.4.1. Caso $Q = 3H\alpha\rho_{DE}$	76
A.4.2. Caso $Q = 3H\beta\rho_m$	77
A.4.3. Caso $\frac{\lambda\rho_m\rho_{DE}}{H}$	77
B. Proyecciones de las líneas de flujo	82
Bibliografía	90

Índice de figuras

1.1.	Posibilidades geométricas que posee la métrica de FRW	23
1.2.	Corrimiento al rojo de una onda de luz.	24
1.3.	El modelo Λ CDM: regiones de 68,3 %, 95,4 % y 99,7 % de confianza en el plano $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ para SNe Ia junto con las constricciones de BAO y CMB. Cada contorno de confianza incluye errores estadísticos [1]. .	31
4.1.	Espacio de parámetros para diferentes clasificaciones de R_2	57
4.2.	Ω vs Z , $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = 0$	60
4.3.	Ω vs Z , $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = 1/10$	61
4.4.	Ω vs Z , $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = 1/2$	61
4.5.	Ω vs Z , $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -1/10$	62
4.6.	Ω vs Z , $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -1/2$	62
5.1.	Parámetro de Hubble ($\gamma_{DE} = 0$) y datos observacionales de [2, 3]. . .	65
5.2.	Parámetro de Hubble ($\gamma_{DE} = -0,35$) y datos observacionales de [2, 3].	65
5.3.	Parámetro de desaceleración como función del corrimiento al rojo. . .	67
5.4.	Error relativo para $x(N)$, $y(N)$ y $z(N)$	68
B.1.	Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano xy . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -2,3$ corresponden a un nodo estable.	82
B.2.	Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano xy . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -1,7$ corresponden a un nodo estable.	83

B.3. Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano xy . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -1,0$ corresponden a un nodo estable.	83
B.4. Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano xy . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -0,3$ corresponden a un nodo estable.	84
B.5. Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano xy . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -3,0$ corresponden a un nodo estable.	84
B.6. Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano yz . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -3,0$ corresponden a un nodo estable.	85
B.7. Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano yz . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -2,3$ corresponden a un nodo estable.	85
B.8. Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano yz . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -1,7$ corresponden a un nodo estable.	86
B.9. Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano yz . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -1,0$ corresponden a un nodo estable.	86
B.10. Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano yz . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -0,3$ corresponden a un nodo estable.	87
B.11. Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano xz . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -3,0$ corresponden a un nodo estable.	87
B.12. Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano xz . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -2,3$ corresponden a un nodo estable.	88

B.13. Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano xz . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -1,7$ corresponden a un nodo estable.	88
B.14. Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano xz . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -1,0$ corresponden a un nodo estable.	89
B.15. Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano xz . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -0,3$ corresponden a un nodo estable.	89

Índice de cuadros

- 4.1. Puntos críticos físicos del caso $Q = 0$ con sus condiciones de existencia, estabilidad, expansión acelerada y sus valores correspondientes para el parámetro de la ecuación de estado $\gamma_{eff} = \omega_{eff} - 1$. Para definir el espacio fase se consideraron las variables $x = \Omega_{DE}$, $y = \Omega_m$ y $z = \frac{\Pi}{3H^2}$. También se definió $z_c = \frac{3\zeta_0^2(\gamma_{DE}^2 - 2\gamma_{DE} - 1)^2[(\gamma_{DE} - 1)j^2 + 1]^2}{4(\gamma_{DE} - 1)}$ y $\zeta_0^* = \frac{2(\gamma_{DE} - 1)}{\sqrt{3(\gamma_{DE}^2 - 2\gamma_{DE} - 1)((\gamma_{DE} - 1)j^2 + 1)}} \dots \dots \dots 51$

Resumen

En este trabajo se exploran las propiedades dinámicas de un modelo cosmológico que incluye efectos viscosos en el sector de materia oscura de las ecuaciones de fluido para un espaciotiempo espacialmente plano de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Los efectos viscosos del “bulk” se describen por una **extensión no lineal** del esquema completo de Israel - Stewart, que es un modelo causal para la descripción de fluidos relativistas. Se permite el intercambio de energía en el sector oscuro y esto se describe mediante un término de interacción denotado por Q . Se establece el sistema dinámico correspondiente a la ecuación de Friedmann y el conjunto de ecuaciones de fluido asociadas al modelo, incluida una ecuación de transporte para la evolución de la presión de viscosidad del bulk y se estudia la estabilidad lineal de sus puntos críticos. De dicho análisis, se muestra que aparece un punto crítico caracterizando a un universo de De Sitter en los casos con interacción y sin interacción por lo que se enfoca nuestro estudio en analizar la estabilidad de dicho punto crítico en una gran región del espacio de parámetros y se derivan soluciones linealizadas a su alrededor. Estas soluciones aproximadas y analíticas son potencialmente capaces de describir la expansión del universo, ya que existen en la proximidad de una solución estacionaria de De Sitter. Dentro de este esquema y para el caso en que existe interacción en el sector oscuro, se estudia la existencia de regiones en el espacio de parámetros donde dicho punto crítico es estable y describe el comportamiento de la energía oscura como quintaesencia, constante cosmológica y fluido de tipo fantasma. Se realiza una comparación entre soluciones numéricas y linealizadas en la vecindad del punto crítico dentro del régimen completamente no lineal y se contrastan con el modelo Λ CDM. Se encuentra que el régimen completamente no lineal es favorecido por las observaciones de la tasa de Hubble y el modelo de concordancia, debido a

la magnitud distinta de cero del parámetro j , que caracteriza los efectos no lineales de la viscosidad del “bulk”. Se muestra que, de hecho, a valores muy bajos del corrimiento al rojo, la razón de expansión asociada al régimen completamente no lineal es prácticamente indistinguible del modelo Λ CDM. Finalmente, se estudia el parámetro de desaceleración, el cual exhibe una transición para la expansión cósmica de desacelerada a acelerada.

Introducción

La historia de las ideas acerca de la estructura y origen del universo muestra que la humanidad siempre se ha puesto en el centro de la creación. Al irse acumulando diversa evidencia astronómica estas convicciones antropocéntricas se han ido abandonando una por una. Desde la idea de que la tierra está en reposo y todos los cuerpos celestes orbitan alrededor de nosotros, hemos llegado al entendimiento de que habitamos un planeta de tamaño promedio, que orbita un Sol típico; que el Sistema Solar está en la periferia de una galaxia rotante de tamaño promedio, moviéndose a cientos de km/s hacia un destino desconocido en un universo inmenso, que contiene millones de galaxias similares.

Vivimos en la época dorada de la cosmología. Debido a la enorme cantidad de datos que se recopilan diariamente en todo el mundo, ha cambiado su forma de estudio y, por ende, se ha vuelto una ciencia totalmente multidisciplinaria. A pesar de tener orígenes súmamente teóricos, que datan desde la propisición de la relatividad general de Einstein, hoy en día para su estudio se utilizan herramientas y enfoques muy diversos.

Los resultados más impactantes que se han obtenido tras el análisis de datos observacionales tienen que ver con el contenido energético del universo como un todo, ya que mediciones astronómicas muy precisas indican que cerca del 25% de su contenido corresponde a la llamada materia oscura (MO), la cual es responsable de dar explicación a la formación de estructuras a gran escala y cuya evidencia observacional fue reportada por Vera Rubin en 1970 al estudiar la velocidad de rotación de las galaxias, sin embargo se han encontrado otras evidencias de su existencia [1, 4]. Por otro lado, también sabemos que otro 70% corresponde a la llamada energía oscura (EO), componente desconocida que provoca la expansión acelerada cósmica,

reportada observacionalmente en el año 1998 por el High-Z Supernova Search Team, utilizando mediciones de supernovas Ia. Cabe mencionar que el primer hallazgo observacional sobre la expansión del universo fue reportado por Edwin Hubble con la ley que lleva su nombre [5].

A pesar de que han pasado varias décadas desde que se propusieron por primera vez estos conceptos, siguen siendo un tema de frontera, al formar parte de los misterios más fascinantes para la comunidad científica.

Se han propuesto diversos modelos, desde los más sencillos hasta algunos muy complicados para abordar los problemas de MO y EO. El más sencillo consiste en agregarle una constante cosmológica a las ecuaciones de campo de Einstein, la cual será la responsable de provocar la expansión acelerada del universo. Este modelo recibe diversos nombres, tales como modelo de concordancia, modelo Lambda Cold Dark Matter (Λ CDM) o simplemente modelo estándar de cosmología.

El origen físico de la constante cosmológica es un misterio. De acuerdo con relatividad general, si el universo está compuesto de materia ordinaria, materia oscura y radiación, la gravedad daría lugar a una expansión desacelerada del universo. Sin embargo, se ha observado lo contrario. Mediante el uso de mediciones de Supernovas de tipo Ia (SNIa) como candelas estándar, se ha evidenciado observacionalmente que el universo está en una época de expansión acelerada. Las primeras constricciones que llevaron al descubrimiento de la energía oscura fueron obtenidas usando dichas técnicas para medir la relación distancia-corrimiento al rojo [6], ya que muestran una luminosidad reproducible, de modo que son lo suficientemente brillantes para medir distancias. Esto quiere decir que las curvas de luz de las SNIa están estrechamente relacionadas entre sí y podrían tener relación con una plantilla común. Lo anterior permite calcular con bastante precisión su magnitud absoluta, la cual a su vez es un parámetro necesario para el cálculo de distancias.

Para explicar la expansión acelerada existen dos posibilidades. La primera es que el 75 % de la densidad de energía de la especie dominante en el universo actual existe de forma que ejerce una presión negativa, la segunda es que la relatividad general falle a escalas cosmológicas y deba ser reemplazada por una teoría más completa [7].

A pesar de ser el modelo más aceptado, la constante cosmológica acarrea distintos problemas, uno de ellos es el llamado “problema de concordancia cósmica”, el cual

cuestiona por qué vivimos en una época privilegiada, tal que las contribuciones de MO y EO son del mismo orden de magnitud. De igual forma, el “problema de la constante cosmológica” consiste en que el valor inferido de dicha constante a partir de observaciones es varios órdenes de magnitud menor que el valor de la energía de vacío calculado a partir de teorías fundamentales. Ello ha llevado a los físicos a proponer modelos distintos a constante cosmológica. Como ejemplo podemos mencionar al “modelo de quintaesencia” [7, 8], el cual consiste en añadir un campo escalar a las ecuaciones de campo de Einstein, a modo de obtener una ecuación de estado cuyo factor de proporcionalidad sea dinámico y no una constante. Existen otros modelos que han intentado dilucidar las fallas de la constante cosmológica, sin embargo, hoy en día, continúa siendo el modelo cuya explicación es la más apegada a los datos observacionales y la razón por la que se sigue prefiriendo es su sencillez.

Muchos de los procesos involucrados en la evolución de nuestro universo se pueden describir con buena aproximación al asumir que su contenido de materia y energía se comporta como un fluido perfecto [9]. Sin embargo, esta suposición no considera algunos procesos físicos, tales como transferencia de calor o cambios en la entropía, por lo que dicho esquema está incompleto. A pesar de que se han obtenido resultados aceptables con la descripción de fluidos perfectos, la cosmología requiere de una descripción más detallada para la dinámica de fluidos, con el fin de que podamos entender nuestro universo observable. Trabajos recientes han mostrado que la producción de entropía podría explicar la expansión acelerada actual del universo sin la necesidad de considerar fluidos con ecuación de estado negativa [10, 11]. En cosmología de fluidos, la propuesta más simple para explicar la producción de entropía no nula está dada por una viscosidad de bulk [12]. La única certeza que tenemos es que la sustancia responsable de provocar la expansión acelerada del universo es un misterio, pero las observaciones astrofísicas nos indican que no podemos ignorar su existencia [1, 4, 13, 14].

En cosmología, una forma directa de considerar aspectos más realistas en la descripción de un fluido es incluyendo una presión de viscosidad del “bulk”, denotada por Π . El origen de dicha presión de viscosidad del bulk puede deberse a la evolución a distintas temperaturas de los subsistemas que conforman al universo [15] y esto es compatible con la descripción de un solo fluido. Si el universo se describe mediante un

fluido como un todo, entonces la densidad total de número de partículas n se puede descomponer en términos de cada componente. El origen de la viscosidad del bulk es independiente de la interacción que pudiera existir entre las distintas componentes.

Introducir dicho elemento no es sencillo, hace evidente la necesidad de utilizar termodinámica irreversible. Un primer intento de construir una teoría de termodinámica irreversible que fuera consistente con la Relatividad General fue introducida por Eckart [16], sin embargo se encontró que la velocidad de las perturbaciones del bulk viscoso es no causal. Un marco causal para la viscosidad del bulk fue propuesto en [17]. Este esquema es conocido como teoría de Israel - Stewart y es estable en un amplio rango de condiciones.

La teoría de Israel - Stewart funciona cuando la magnitud de la presión de viscosidad Π no está muy desviada de la presión en equilibrio p del fluido, es decir, se debe cumplir la condición

$$|\Pi| \ll |p|.$$

A esto se le conoce como el régimen lineal de la Teoría de Israel - Stewart. Podemos encontrar una gran cantidad de artículos en la literatura científica donde se implementan los modelos de Eckart e Israel - Stewart para describir el comportamiento del universo a tiempos tardíos e incluso se pueden encontrar contrastes con datos observacionales [18], sin embargo, en algunas situaciones la presión de viscosidad sí es mayor o igual que la presión en equilibrio, por ejemplo en un fluido en expansión [19, 20].

Posteriormente, se propuso un modelo donde los autores desarrollan una extensión no lineal de la teoría de Israel - Stewart [21] con el fin de relajar la condición $|\Pi| \ll |p|$ y aplicarla a fluidos en expansión, pero al mismo tiempo manteniendo un comportamiento causal, por lo tanto, este enfoque es más adecuado para describir el comportamiento del universo observable a tiempos tardíos que otros escenarios. En [22] se encontró que las ecuaciones de campo de Einstein acopladas a una versión no lineal del modelo de Israel - Stewart respetan causalidad, incluyendo efectos viscosos del bulk en simulaciones numéricas para ondas gravitacionales.

El objetivo principal de este trabajo es estudiar la estabilidad lineal de soluciones cosmológicas que corresponden a modelos en los que las componentes viscosas están

descritas por la extensión no lineal del formalismo de Israel - Stewart. Con este fin, utilizamos un análisis cualitativo de sistemas dinámicos autónomos introducido por Lyapunov y Poincaré [23]. Aunque el régimen no lineal del modelo de Israel - Stewart presenta una gran complejidad, es posible estudiar una perspectiva global de él a través del enfoque de sistemas dinámicos. Como primer paso, extendemos los resultados presentados por [24] donde el análisis dinámico del modelo de Israel - Stewart fue realizado en el régimen lineal. Posteriormente comparamos nuestros resultados con el modelo Λ CDM.

Una característica del modelo que se presenta en este trabajo es que se permiten intercambios de energía entre la componente de energía oscura y la materia oscura viscosa, es decir, existen interacciones en el sector oscuro, lo cual ofrece una posible solución al problema de coincidencia. Dicho esquema de interacción ha sido considerado en trabajos previos, como [25].

Al realizar el análisis cualitativo del sistema dinámico, se estudia la estabilidad de sus soluciones estacionarias y también se encuentran soluciones analíticas linealizadas alrededor de un punto crítico específico con cierta relevancia física. Como se verá, el comportamiento de dichas soluciones linealizadas nos lleva a la conclusión de que la descripción no lineal parece ser la propuesta más adecuada para describir la razón de expansión de nuestro universo en vez de las soluciones lineales incluso a valores elevados de corrimiento al rojo.

Posteriormente, se encontraron soluciones numéricas para probar la validez de las soluciones linealizadas.

La estructura de este trabajo de tesis es como sigue: en el Capítulo 1 presentamos generalidades del modelo estándar de cosmología, en el Capítulo 2 presentamos el esquema de fluidos viscosos en cosmología desde el punto de vista de la teoría de Israel - Stewart en sus versiones lineal y no lineal. En el Capítulo 3 se describen brevemente las generalidades de la teoría de estabilidad lineal, en el Capítulo 4 se introduce el modelo cosmológico a estudiar, es decir, el conjunto específico de ecuaciones diferenciales que gobernarán la descripción del fluido y el factor de escala. Así mismo se plantea el sistema dinámico a analizar a partir de dichos elementos. Se encuentran los puntos críticos del sistema dinámico y se explora su estabilidad en los casos para el sector oscuro con interacción y sin interacción. Nos enfocamos en un

punto crítico que caracteriza a un universo de De Sitter y estudiamos su estabilidad lineal en el espacio de parámetros. Posteriormente encontramos soluciones analíticas de los sistemas dinámicos linealizados alrededor del punto crítico. Finalmente en el Capítulo 5 calculamos algunas cantidades cosmológicas relevantes para el modelo, como el parámetro de Hubble y el parámetro de desaceleración. Comparamos dichas cantidades obtenidas a partir de las soluciones analíticas linealizadas con las obtenidas del sistema dinámico completo y las correspondientes en el modelo Λ CDM. El Capítulo 6 presenta los comentarios finales del trabajo, en el Apéndice A se presenta el análisis de estabilidad lineal a detalle y en el Apéndice B algunos retratos de fase para ciertos conjuntos de parámetros. En este trabajo se consideran unidades tales que $8\pi G = c = k_B = 1$.

Capítulo 1

Conceptos básicos de cosmología

El presente capítulo está dedicado a realizar una breve revisión de conceptos utilizados en cosmología. Sobresale en importancia la discusión física de la expansión acelerada del universo y el modelo Λ CDM. Finalmente se revisan algunos problemas que tiene el modelo estándar de cosmología.

1.1. La cosmología como ciencia

La **Cosmología** trata de explicar el origen y la evolución del contenido total del universo, sus procesos físicos y así obtener un entendimiento más profundo de las leyes de la física, que asumimos, valen a través de la historia y en todos los puntos del universo. Desafortunadamente, sólo tenemos un universo para estudiar y no podemos hacer experimentos con él, sólo observaciones. Lo anterior pone serios límites sobre lo que podemos aprender acerca de su origen [26].

Así pues, la cosmología estudia la estructura a gran escala y el comportamiento del universo, es decir, es el estudio del universo como un todo [27]. Debemos entender la expresión “como un todo” de manera que el universo no es simplemente una colección aleatoria de materia irregularmente distribuida, sino una sola entidad, cada una de cuyas partes está relacionada de algún modo con las demás.

1.2. El principio cosmológico

Actualmente existe evidencia de que el universo es espacialmente plano a gran escala, lo cual apoya el uso del principio cosmológico. Desde los primeros modelos cosmológicos se ha considerado que nuestro universo a gran escala posee dos propiedades importantes: homogeneidad e isotropía. Homogeneidad establece que el universo luce igual en cada punto, mientras que isotropía indica que el universo se ve igual en todas las direcciones [28].

Un punto comóvil [29] es tal que se mueve con la expansión del universo, definido formalmente como la localización de un observador que mide una densidad de momento nula. La distancia de un punto comóvil dado medida desde nuestra ubicación se puede escribir como $r(t) = xa(t)$. La constante x se llama distancia comóvil y es igual a la distancia física en la época presente. Si el universo es homogéneo e isótropo, la distancia entre dos puntos comóviles es proporcional a un factor de escala universal $a(t)$, donde t es el tiempo cosmológico o tiempo propio.¹ [30, 31].

Una pieza clave de la evidencia observacional en cosmología es que casi todo en el universo parece estar alejando de nosotros y entre más lejos algo está, más rápida parece ser su velocidad de recesión. Estas velocidades se miden mediante el **corrimiento al rojo** que es básicamente el efecto Doppler aplicado a ondas de luz. Si una galaxia se mueve hacia nosotros, las ondas de luz se abultan, aumentando su frecuencia. Como la luz azul está en el final de las frecuencias altas para el espectro visible, esto se conoce como corrimiento al azul. Si la galaxia se está alejando, las líneas características se mueven hacia el rojo, que es el final de frecuencias bajas para el espectro visible y el efecto se conoce como corrimiento al rojo.

Esta técnica fue la primera utilizada para medir la velocidad de una galaxia por Vesto Slipher, alrededor de 1912 y fue aplicada sistemáticamente por uno de los cosmólogos más famosos, Edwin Hubble, en las décadas siguientes. Hubble comprendió que sus observaciones mostraban que la velocidad de recesión era proporcional a la distancia hacia un objeto desde nosotros:

$$\vec{v} = H_0 \vec{r}. \quad (1.1)$$

¹A veces se usa una variable temporal llamada tiempo conforme, definido como $d\tau = \frac{dt}{a(t)}$.

Esto se conoce como Ley de Hubble [5] y la constante de proporcionalidad H_0 se conoce como constante de Hubble.

A cualquier época, la razón de expansión del universo está dada por el parámetro o tasa de Hubble, definido como

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (1.2)$$

El valor de la constante de Hubble corresponde al parámetro de Hubble evaluado en el tiempo actual, es decir: $H_0 = H(t_0)$, con t_0 el tiempo actual de medición.

1.3. La métrica de Friedmann-Robertson-Walker

Un modelo que describe la geometría del universo bastante aceptado es el de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, el cual funciona si suponemos que el universo es homogéneo e isótropo, es decir, que obedece el principio cosmológico [32]. La métrica que describe dicho modelo está dada como

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (1.3)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala, una función que depende explícitamente del tiempo y está relacionada con el tamaño del universo. Las coordenadas espaciales r , θ y ϕ son coordenadas comóviles y la constante k se denomina constante de curvatura espacial. Observemos que si $k = 0$, la parte espacial de la métrica se reduce a un elemento de línea en coordenadas esféricas de un espacio euclidiano. Si $k = 1$, tenemos la métrica de una 3-esfera y si $k = -1$, la métrica corresponde a un hiperboloide. Éste modelo da tres posibilidades geométricas del universo: plano, cerrado y abierto (0, 1 y -1 respectivamente).

Si el universo es homogéneo e isótropo a un tiempo dado y tiene la métrica FRW, entonces siempre permanecerá homogéneo e isótropo porque una galaxia en el punto (r, θ, ϕ) siempre permanecerá en dicho punto y sólo el factor de escala $a(t)$ cambiará con el tiempo. Los desplazamientos serán $dr = d\theta = d\phi = 0$ y la ecuación de la métrica se reducirá a $ds^2 = -dt^2$. Por esta razón, uno llama a tal marco en expansión **marco comóvil**. Un observador en reposo sobre el marco comóvil se

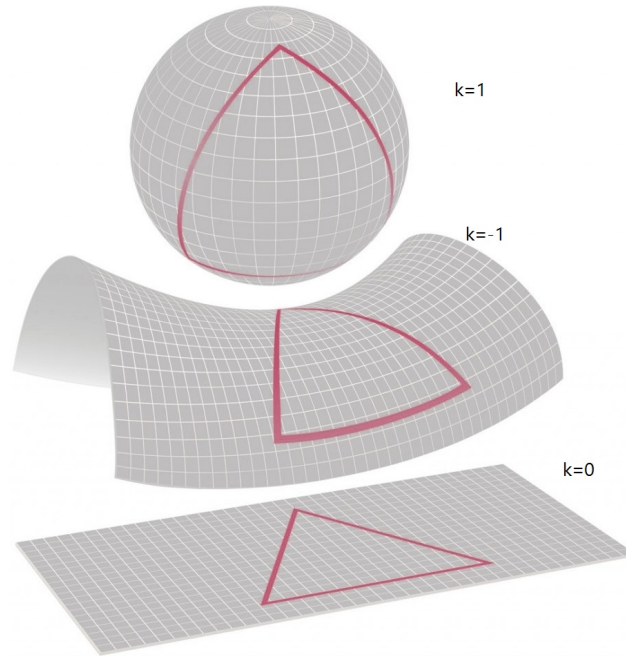


Figura 1.1: Posibilidades geométricas que posee la métrica de FRW

llama **observador fundamental**. Si el universo parece ser homogéneo para dicho observador, debe ser isótropo, pero otro observador localizado en el mismo punto y en movimiento relativo respecto al observador fundamental no verá al universo isótropo. Por lo tanto el marco comóvil es realmente un marco preferencial y muy conveniente.

1.4. Relación entre el factor de escala y el corrimiento al rojo

Bajo la métrica de FRW, el factor de escala cósmico afecta todas las distancias: por ejemplo la longitud de onda λ de la luz emitida a un tiempo t y observada a otro tiempo t_0 . Si definimos al factor de escala cósmico en términos de una escala cósmica sin normalizar a su valor presente $R(t)$, entonces estará dado como $a(t) = \frac{R(t)}{R_0}$ ², donde R_0 es el valor en el presente, tenemos que:

²Bajo esta definición, el factor de escala al tiempo actual está dado como $a(t_0) \equiv a_0 = 1$.

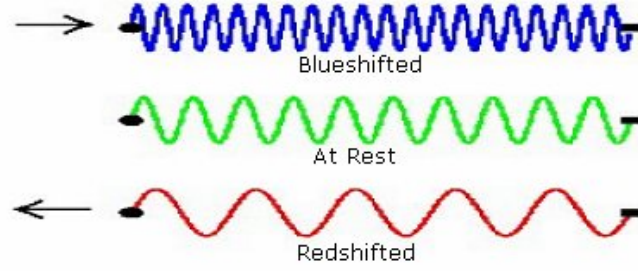


Figura 1.2: Corrimiento al rojo de una onda de luz.

$$\frac{\lambda_0}{R_0} = \frac{\lambda}{R(t)}, \quad (1.4)$$

por lo tanto,

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{1}{a(t)}. \quad (1.5)$$

Por otro lado, una aproximación para $a(t)$ a tiempo $t < t_0$ se obtiene al expandir a primer orden:

$$a(t) \approx 1 - \dot{a}_0(t_0 - t), \quad (1.6)$$

donde $\dot{a}(t_0) \equiv \dot{a}_0$ y $r = c(t_0 - t)$ para la distancia a la fuente. El corrimiento al rojo cosmológico z se puede aproximar usando

$$z = \frac{\lambda_0}{\lambda} - 1 \approx a^{-1} - 1 \approx \dot{a}_0 \frac{r}{c}, \quad (1.7)$$

por lo tanto,

$$a = \frac{1}{1 + z} \quad (1.8)$$

es una medida del factor de escala $a(t)$ al tiempo al que una fuente emitió la radiación ya corrida al rojo. La ecuación (1.8) tiene una gran relevancia en la cosmología, debido a que con ella es posible relacionar al factor de escala con una observable física que es posible medir: el corrimiento al rojo [33]. Las longitudes de onda de los fotones entonces se “estiran” con el universo, como es intuitivamente razonable [34]. Su cambio nos dice qué tanto se ha expandido el universo desde que la luz comenzó a viajar. Por ejemplo, si la longitud se ha duplicado, el universo debió tener la mitad de su tamaño cuando la luz fue emitida [28].

1.5. Modelo cosmológico a partir de la relatividad general

La dinámica del universo, como cualquier modelo de la relatividad general, está determinada por las ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.9)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein y $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, los cuales dependen de la métrica y sus derivadas, R es el escalar de Ricci y $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-momento. Consideremos un fluido perfecto como la fuente del campo gravitacional. Así, tenemos

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (1.10)$$

donde ρ es la densidad de energía, p la densidad de presión del fluido y u_μ es la 4 - velocidad de un observador comóvil. Entonces, la ecuación (1.9) da pie a dos ecuaciones independientes:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (1.11)$$

y

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho + p) + \frac{k}{a^2}. \quad (1.12)$$

donde H es el parámetro de Hubble; ρ y p denotan las densidades de energía y presión totales de todas las especies presentes en el universo a una época dada. El tensor de energía-momento es conservado en virtud de las identidades de Bianchi, llevando a una ecuación de continuidad

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (1.13)$$

La ecuación (1.13) se puede derivar a partir de las ecuaciones (1.11) y (1.12), lo cual significa que dos de las ecuaciones (1.11), (1.12) y (1.13) son independientes.

Eliminando el término k/a^2 de (1.11) y (1.12), se obtiene

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (1.14)$$

por lo tanto, la expansión acelerada ocurre para $\rho + 3p < 0$. A partir de la ecuación de Friedmann (1.11), podemos obtener la densidad de energía necesaria para que el universo sea plano, llamada densidad crítica y definida como $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$. Lo anterior permite introducir el parámetro de densidad adimensional $\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}$, con el que será posible reescribir la ecuación (1.11) de la forma

$$\Omega(t) - 1 = \frac{k}{(aH)^2}. \quad (1.15)$$

De acuerdo a la ecuación (1.15), la distribución de materia claramente determina la geometría espacial del universo, es decir

$$\Omega > 1 \quad o \quad \rho > \rho_c \rightarrow k = +1,$$

$$\Omega = 1 \quad o \quad \rho = \rho_c \rightarrow k = 0,$$

$$\Omega < 1 \quad o \quad \rho < \rho_c \rightarrow k = -1.$$

Las observaciones han mostrado que el universo actual está muy cercano a tener una geometría espacialmente plana ($\Omega \simeq 1$) [27, 28, 30, 34], por lo tanto, en este trabajo de tesis consideraremos que $k = 0$.

Sabemos que debido a las interacciones que existen entre las partículas de un fluido, éste debe obedecer una ecuación de estado. En el caso de un fluido barotrópico, la ecuación de estado establece que la presión del fluido depende únicamente de su densidad de energía, es decir, $p = p(\rho)$. A menudo los fluidos perfectos relevantes en cosmología obedecen dicha ecuación de estado, en su forma más simple dada como

$$p = \omega\rho, \quad (1.16)$$

en la cual las líneas de presión constante son proporcionales a las líneas de densidad

constante, donde ω es una constante independiente del tiempo. Utilizando la ecuación anterior, la conservación de energía-momento se convierte en

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \omega)\frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.17)$$

la cual puede ser integrada para obtener

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}. \quad (1.18)$$

De acuerdo al valor de ω , tendremos un tipo distinto de contenido en el universo.

1.5.1. Universo dominado por materia

La materia es cualquier conjunto de partículas no relativistas y que no colisionan, por lo que en promedio tendrán presión cero, $p_m = 0$, es decir, la única contribución al tensor de energía momento estará dada mediante su densidad de energía. Lo anterior implica que $\omega = 0$.

Algunos ejemplos incluyen galaxias y estrellas ordinarias, para las cuales la presión es despreciable en comparación con la densidad de energía. La materia también se conoce como **polvo** y el universo cuya densidad de energía es principalmente provocada por materia se conoce como universo dominado por materia. La densidad de energía en dicho universo se diluye como

$$\rho_m \propto a^{-3}, \quad (1.19)$$

lo que se interpreta como el decremento del número de partículas a medida de que el universo se expande.

1.5.2. Universo dominado por radiación

La radiación se puede utilizar para describir tanto radiación electromagnética como partículas masivas moviéndose a velocidades relativistas, tales que se vuelven indistinguibles a los fotones. Para este caso, la ecuación de estado estará dada por

$$p_r = \frac{1}{3}\rho_r. \quad (1.20)$$

Un universo en el que la mayor parte de la densidad de energía existe en forma de radiación o en el que la mayoría de las partículas son ultra relativistas se conoce como universo dominado por radiación. Como se puede ver, la constante ahora toma el valor $\omega = 1/3$, por lo que la densidad de energía de radiación ahora se diluye como

$$\rho_r \propto a^{-4}, \quad (1.21)$$

entonces, para el caso de radiación, la densidad de energía decae más rápido que para la materia, esto es debido a que la densidad de número de fotones decrece como la de las partículas no relativistas, pero los fotones individuales también pierden energía como a^{-1} mientras se corren al rojo.

1.5.3. Universo dominado por energía del vacío

La energía del vacío, descrita como la constante cosmológica también toma la forma de un fluido perfecto cuya ecuación de estado es

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda, \quad (1.22)$$

es decir, $\omega = -1$. La densidad de energía, entonces es constante:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{\kappa}. \quad (1.23)$$

Como la densidad de energía en materia y en radiación decrecen mientras el universo se expande, si existe energía del vacío distinta de cero, tenderá a ganar a largo plazo, mientras el universo no comience a contraerse. Si esto ocurre, decimos que el universo se vuelve dominado por energía del vacío. Las soluciones de Sitter y anti-de Sitter son soluciones de vacío dominante.

1.6. El modelo Λ CDM

Muchas observaciones sugieren que la densidad de energía del universo es menor que la densidad crítica [7]. De ser así, la alternativa a creer que el universo tiene curvatura espacial negativa es introducir una constante cosmológica Λ que restaure la planicie espacial. Entonces la ecuación de Friedmann se vuelve

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.24)$$

En tal universo dominado por la constante cosmológica, la solución para el factor de escala es exponencial

$$a(t) \propto \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right) \quad (1.25)$$

y como ya hemos visto, la densidad de energía permanece constante por definición.

Al introducir la constante cosmológica, junto con las contribuciones de radiación y materia (tanto bariónica como la llamada materia oscura), obtenemos un modelo muy poderoso para describir al universo. Dicho modelo posee distintos nombres: modelo de concordancia, modelo Lambda Cold Dark Matter o simplemente modelo estándar de cosmología, y consiste en considerar que el universo está conformado por la constante cosmológica, asociada a la energía oscura, por materia oscura fría y por materia bariónica, de modo que al considerar los parámetros de densidad de cada una, la suma sea igual a uno, es decir:

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1. \quad (1.26)$$

El modelo emergió a finales de los años 90 y asume que relatividad general es la teoría correcta de gravedad a escalas cosmológicas [29].

Como ya se dijo, para poder aproximar el contenido de energía del universo podemos dividirlo en materia sin presión ($\rho \propto a^{-3}$), radiación ($\rho \propto a^{-4}$) y energía del vacío ($\rho \propto \text{constante}$). Las primeras dos nos dicen que la densidad del número de partículas se diluye con la expansión, con fotones también disminuyendo su energía por corrimiento al rojo. La tercera aplica para la constante cosmológica.

En términos del factor de escala, la densidad de energía se escribe:

$$\frac{\kappa}{3}\rho = H_0^2(\Omega_\Lambda + \Omega_m a^{-3} + \Omega_\nu a^{-4}). \quad (1.27)$$

Para algunos propósitos, esta separación es innecesaria, ya que la ecuación de Friedmann trata a todas las contribuciones del parámetro de densidad por igual.

Para el observador, la evolución del factor de escala es caracterizada directamente por el cambio respecto al corrimiento al rojo del parámetro de Hubble y el parámetro de densidad; la evolución de $H(z)$ y $\Omega(z)$ está dada por la ecuación de Friedmann con constante cosmológica en la forma

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.28)$$

Insertando la dependencia de ρ sobre a ($\rho_m = \rho_0/a^3$, $\rho_r = \rho_0/a^4$) y además al considerar

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2}, \quad \Omega_m = \frac{\kappa\rho_0}{3H_0^2}, \quad (1.29)$$

obtenemos:

$$H^2 = H_0^2(\Omega_\Lambda + \Omega_m a^{-3} + \Omega_r a^{-4}). \quad (1.30)$$

La ecuación (1.30) se utiliza para obtener la relación entre el corrimiento al rojo y el parámetro de Hubble. Recordando la equivalencia entre el factor de escala y el corrimiento al rojo, y dado que en realidad lo que se observa es el corrimiento al rojo, entonces la expresión se convierte en

$$H^2 = H_0^2[\Omega_\Lambda + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4] \quad (1.31)$$

que es la ecuación más importante en cosmología, ya que relaciona observables de corrimiento al rojo, la constante de Hubble y los parámetros de densidad.

En la Figura 1.3 se muestran los contornos de confianza para Ω_m y Ω_Λ obtenidos de las constricciones dadas por SNe Ia (Supernovas de tipo Ia), CMB (Radiación Cósmica de Fondo) y BAO (Oscilaciones Acústicas Bariónicas). Dichos contornos representan las mejores aproximaciones estadísticas para los parámetros de densidad correspondientes a la materia oscura y a la constante cosmológica.

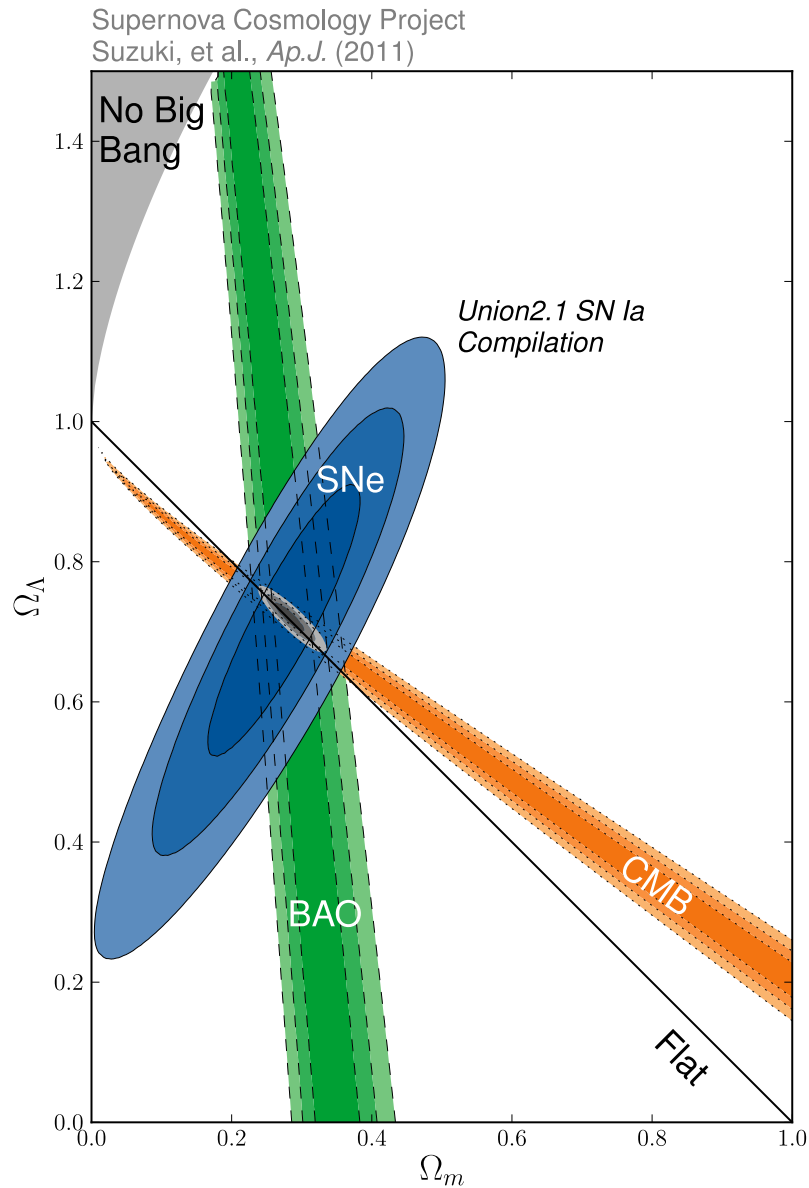


Figura 1.3: El modelo Λ CDM: regiones de 68,3%, 95,4% y 99,7% de confianza en el plano $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ para SNe Ia junto con las constricciones de BAO y CMB. Cada contorno de confianza incluye errores estadísticos [1].

1.6.1. Problemas del modelo Λ CDM

El modelo cosmológico descrito en secciones anteriores ha resistido las pruebas observacionales. Se ha confirmado por la existencia de la radiación cósmica de fondo,

abundancia de núcleos ligeros y por la teoría misma, es decir, la relatividad general, sin embargo presenta algunas dificultades conceptuales que afortunadamente existen maneras posibles de resolver [35]. Dichas modificaciones necesarias para resolver estos problemas deberán ser consistentes con el modelo estándar; es decir, el anterior no deberá ser destruido por los desarrollos teóricos modernos, sólo deberá ser actualizado o explicado con mayor detalle.

El principal problema que presenta el modelo definitivamente es que postula a la energía y materia oscura como principales componentes del universo, pero no se sabe qué son. Dejando eso aparte, existen algunos otros problemas, como el problema del horizonte, el problema de la planitud y el problema de la asimetría bariónica del universo.

Esta última sección del capítulo se ocupa de revisar muy brevemente dichos problemas y sus posibles soluciones.

El problema del horizonte

Surge debido a la dificultad de explicar la homogeneidad observada de regiones causalmente desconectadas del espacio en ausencia de un mecanismo que ajuste las mismas condiciones iniciales en cualquier lugar. La uniformidad de la radiación cósmica de fondo, que varía no más que una parte en 10,000; donde sea que miremos, posicionó a éste como uno de los problemas estándar de la cosmología. Supongamos que el universo comenzó hace 14 mil millones de años, si miramos al oeste detectaremos radiación cósmica de fondo y si miramos al oeste también y a la misma temperatura, pero dichas regiones están separadas por 28 mil millones de años luz. El sentido común nos dice que ambas regiones no podrían haber estado causalmente conectadas, porque la información no puede viajar más rápido que la luz.

La solución más comúnmente aceptada es la inflación cósmica, la idea de que el universo pasó por un breve periodo de expansión extremadamente rápida después del Big Bang [36]. Debido a dicha expansión acelerada, la región causal del universo en esa época era decreciente, por lo que regiones causalmente conectadas en un principio pudieron haberse desconectado posteriormente.

El problema de planitud

Tal problema surge de observar que algunas de las condiciones iniciales del universo parecen estar ligadas a valores especiales, y que variaciones pequeñas de dichos valores podrían tener efectos extremos sobre la geometría del universo al tiempo actual.

En el caso del problema de planitud, el parámetro que parece ligado es la densidad de materia y energía del universo. Este valor afecta la curvatura del espacio-tiempo, con un valor muy específico siendo requerido para un universo plano. La densidad actual del universo se ha observado muy cercana a dicho valor crítico. Como la densidad total se aleja rápido del valor crítico sobre el tiempo cósmico, el universo temprano debió tener una densidad aún más cercana a la crítica. Esto lleva a preguntar cómo la densidad inicial se volvió tan cercana a este valor en específico.

La solución más comúnmente aceptada es inflación cósmica, como en el caso anterior.

La asimetría bariónica del universo

La física de partículas ha encontrado potenciales soluciones a este problema. La materia existe en el universo en la forma de bariones y no en forma de antimateria (antibariones). Debemos notar que la antimateria en forma de antineutrinos debería ser alrededor del mismo orden que de los neutrinos o del número de fotones reliquia y mayor en comparación con el número de bariones.

No es necesario modificar el modelo de Friedmann para resolver esto. La expansión del universo junto con las diferencias de interacciones entre partículas y antipartículas (observadas en experimentos) y la no conservación del número bariónico (predicho por la teoría) llevan a la solución de este problema.

Es importante resaltar que a pesar de los problemas que presenta el modelo estándar de cosmología y todas las teorías alternativas que han surgido a lo largo de los últimos años, no existen razones fuertes para preferir un modelo sobre otro y el estándar es el que mejor se ha ajustado a las observaciones gracias a su simplicidad.

Capítulo 2

Fluidos relativistas

Hasta este punto, nuestro estudio de la dinámica del universo ha estado basado en asumir que sus componentes de materia y energía pueden describirse con la ecuación de estado de un fluido perfecto. En este capítulo introduciremos un marco de estudio alternativo, al considerar que en el fluido cósmico ocurren procesos irreversibles.

En el caso de considerar fluidos perfectos en equilibrio, la cantidad de entropía por volumen comóvil permanece constante debido a que no hay transferencia de calor debida a fuerzas disipativas como la fricción, lo cual tiene como consecuencia que la dinámica de éstos sea irreversible. Para muchos procesos en cosmología y astrofísica, un modelo con fluido perfecto es adecuado. Sin embargo, los fluidos reales tienen comportamiento irreversible, y algunos procesos en cosmología y astrofísica no se pueden entender mas que como procesos disipativos, requiriendo así una teoría relativista con la que puedan ser descritos.

Una propuesta de una termodinámica de procesos irreversibles es una extensión de la teoría de fluidos Newtonianos a fluidos relativistas y fue introducida por Eckart en 1940. La teoría de Eckart, así como una variación de Landau y Lifshitz en la década de los 50, comparten el problema de que las perturbaciones se propagan a velocidades super lumínicas, con su contraparte newtoniana [20]. Esta propiedad no-causal es inaceptable en una teoría relativista, y peor aún, los estados de equilibrio en dicha teoría son inestables.

Una teoría relativista que respeta causalidad y comportamiento estable bajo un amplio rango de condiciones fue desarrollada por Israel y Stewart en los 70.

Ésta teoría extendida también es conocida como **termodinámica causal**, **termodinámica de segundo orden**, etc. En esta tesis se utiliza este marco teórico para describir la dinámica del fluido cósmico o de alguna de sus componentes.

2.1. ¿Por qué es interesante estudiar procesos disipativos?

Muchos de los procesos involucrados en la evolución de nuestro universo pueden describirse adecuadamente asumiendo que el contenido de materia se comporta como un fluido perfecto formado por especies que están térmicamente desacopladas entre sí y sólo interactúan gravitacionalmente, sin embargo, en la evolución del universo ocurren una secuencia de fenómenos importantes que involucran procesos térmicos irreversibles fuera del equilibrio, tales como:

- Transiciones de fase en teorías de gran unificación (GUT) ($t \approx 10^{-34}s$, $T \approx 10^{27}K$).
- Recalentamiento del universo al final de inflación (alrededor $10^{-32}s$), cuando el inflatón o los grados de libertad responsables de generar inflación decaen en partículas relativistas.
- Formación de la reliquia de materia oscura ($T \approx 10^{15}K$).
- Desacople de neutrinos del plasma cósmico ($t \approx 1s$, $T \approx 10^{10}K$), cuando la temperatura decayó por debajo del umbral en la que los neutrinos se encuentran en contacto térmico. El camino libre medio de los neutrinos que iba aumentando lleva a transporte de calor y momento por los neutrinos, y por lo tanto, amortiguamiento de perturbaciones. Después del desacople, electrones y positrones se aniquilaron, produciendo fotones en un proceso fuera del equilibrio, por el cual se inyectó calor al plasma cósmico.
- Nucleosíntesis (formación de núcleos ligeros) a partir del confinamiento de protones y neutrones por medio del intercambio de gluones ($t \approx 100s$).

- Desacople de fotones de la materia durante la era de recombinación ($t \approx 10^{12}s$, $T \approx 10^3K$), cuando los electrones se combinaron con protones y así, no hubo más dispersión de fotones. El creciente camino libre medio de los fotones lleva a transporte de calor y momento y por lo tanto, amortiguamiento.

Por otro lado, algunos procesos disipativos astrofísicos son:

- Colapso gravitacional de inhomogeneidades locales para formar estructuras galácticas, cuando la viscosidad y el calentamiento llevaron a disipación.
- Colapso de estrellas radiantes a estrellas de neutrones o agujeros negros, cuando la emisión de neutrinos es responsable del flujo disipativo de calor y la viscosidad.
- Acreción de materia alrededor de una estrella de neutrones o agujero negro.

En cosmología, una forma de considerar dichos procesos irreversibles en la descripción física de los fluidos es introducir una presión de viscosidad del bulk¹, denotada Π y denominada simplemente como presión de viscosidad. Su origen puede ser atribuido a la evolución a diferentes temperaturas de los subsistemas que conforman al universo [15]. Adicionalmente, el origen de Π es independiente de si existe o no interacción entre las diferentes especies que conforman al universo.

Como ya se mencionó anteriormente, para describir los efectos generados al introducir la presión de viscosidad, es necesario un esquema de termodinámica irreversible que considere los efectos disipativos de Π . Un primer intento para resolver este problema fue realizado por Eckart en los 40 y posteriormente se propuso la termodinámica causal o teoría de Israel - Stewart.

La aplicación de termodinámica causal en cosmología y astrofísica permanece sin un gran desarrollo, parcialmente por la complejidad de las ecuaciones de transporte, porque casi todos los procesos importantes han sido analizados usando la teoría de Eckart, la teoría cinética o métodos numéricos, sin embargo se ha encontrado que los efectos de la termodinámica causal pueden tener un impacto significativo y llevar

¹El término **bulk** hace referencia a la región de un cuerpo que tiene volumen y área superficial finitos donde sus propiedades físicas no son afectadas por los efectos que ocurran en la superficie del cuerpo. Es decir, los efectos superficiales en las propiedades físicas del cuerpo son despreciables.

a predicciones muy distintas de aquellas obtenidas utilizando la teoría estándar de Eckart.

2.2. Teoría de Israel-Stewart

Para establecer la teoría de Israel - Stewart se asumirá que el universo está conformado por un único componente que será un fluido descrito por su presión p y su densidad de energía ρ , obedeciendo la ecuación de estado barotrópica

$$p = \omega\rho. \quad (2.1)$$

La teoría que se utilizará es la termodinámica relativista de fluidos imperfectos que da una descripción causal, es decir, Israel-Stewart (IS). Para dicho formalismo, la presión efectiva p_{ef} está dada como:

$$p_{ef} = p + \Pi, \quad (2.2)$$

donde p es la presión en equilibrio y Π es la presión de viscosidad. Este enfoque funciona únicamente para la condición $\left|\frac{\Pi}{p}\right| \ll 1$, lo cual implica que la magnitud de la presión de viscosidad debe ser menor a la presión en equilibrio del sistema p .

Las ecuaciones de Einstein para dicho fluido en unidades para las que $8\pi G = c = 1$ y en donde H es el parámetro de Hubble, están dadas como:

$$3H^2 = \rho, \quad (2.3)$$

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{1}{6}[\rho + 3(p + \Pi)], \quad (2.4)$$

así como la ecuación de continuidad

$$\dot{\rho} + 3H[(1 + \omega)\rho + \Pi] = 0. \quad (2.5)$$

La presión de viscosidad debe obedecer una ecuación de transporte dada por

$$\tau\dot{\Pi} + \left(1 + \frac{1}{2}\Delta\right)\Pi = -3\zeta H, \quad (2.6)$$

donde

$$\Delta \equiv 3H + \frac{\dot{\tau}}{\tau} - \frac{\dot{\zeta}}{\zeta} - \frac{\dot{T}}{T}. \quad (2.7)$$

Aquí el punto denota derivadas respecto al tiempo cósmico, τ es el tiempo de relajación² para efectos viscosos del *bulk* y en el límite $\tau = 0$ la teoría es no causal, $\zeta(\rho)$ es el coeficiente de viscosidad del *bulk* que depende de la densidad de energía ρ , por lo tanto $\zeta \geq 0$ y H es el parámetro de Hubble. Dichas funciones en la extensión no lineal de la teoría IS están dadas en términos de la densidad de energía del fluido como sigue [37]:

$$T = T_0 \rho^{\frac{\omega}{\omega+1}}, \quad (2.8)$$

$$\zeta = \zeta_0 \rho^s. \quad (2.9)$$

T_0 y ζ_0 son constantes y el tiempo de relajación lineal está dado por

$$\frac{\zeta}{(p + \rho)\tau} = v^2, \quad (2.10)$$

donde v es la velocidad de las perturbaciones viscosas del *bulk* (la contribución no adiabática a la velocidad del sonido V), la velocidad disipativa del sonido está dada por $V^2 = c_s^2 + v^2 \leq 1$, cuyo límite asegura causalidad y $c_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$ es la contribución adiabática. Para la ecuación de estado barotrópica simplemente $c_s^2 = \omega$ y podemos escribir $v^2 = \epsilon(1 - \omega)$ con $0 < \epsilon < 1$ (condición de causalidad).

Considerando lo anterior, el tiempo de relajación se convierte en

$$\tau = \frac{\zeta}{v^2(p + \rho)} = \frac{\zeta}{v^2 \rho(1 + \omega)} = \frac{\zeta_0}{\epsilon(1 - \omega^2)} \rho^{s-1}. \quad (2.11)$$

Para $0 \leq \omega < 1$. Combinando las ecuaciones (2.3) y (2.11) se puede escribir

$$\tau H = \frac{3^{s-1} \zeta_0}{\epsilon(1 - \omega^2)} H^{2(s-1/2)}. \quad (2.12)$$

Para los valores $s < 1$, $s = 1/2$ y $s < 0$ es posible calcular el límite $\tau \rightarrow 0$ y obtener

²El **tiempo de relajación** es el tiempo que le toma al sistema regresar a su estado de equilibrio.

un parámetro de Hubble positivo. Esto implica que dicho parámetro incrementa y tendremos que la temperatura de cualquier especie de partículas es decreciente, con el fin de mantener el equilibrio térmico con el fluido cósmico, como sucede en el modelo estándar de cosmología. Observemos que tomar el límite cuando $\tau \rightarrow 0$ es regresar al esquema en el estado de equilibrio, donde no existen procesos irreversibles.

Combinando las ecuaciones (2.3), (2.6) y (2.12) obtenemos la ecuación de transporte de Israel-Stewart, que gobierna la dinámica de un fluido con propiedades disipativas en un universo plano:

$$\begin{aligned} \ddot{H} + \left[3H(1 + \omega) + \frac{\Delta}{2} \right] \dot{H} + \frac{9}{2}\epsilon(1 - \omega^2) \left\{ \frac{(1 + \omega)}{3^s \zeta_0} H^{1-2s} - 1 \right\} H^3 \\ + \frac{\epsilon(1 - \omega^2)}{3^{s-1} \zeta_0} \dot{H} H^{2(1-s)} + \frac{3}{4}(1 + \omega)\Delta H^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Resumiendo lo anterior, la descripción del universo se basa en una componente principal dada por un fluido, con dos propiedades principales [38–40]:

- Obedece una ecuación de estado (EoS) barotrópica $p = \omega\rho$, con p la presión y ρ la densidad de materia-energía del fluido, y el parámetro ω toma valores en el intervalo $[0, 1)$.
- A lo largo de la evolución cósmica, hay presentes procesos disipativos.

Además, la termodinámica causal está basada en las siguientes cantidades y leyes físicas:

- La conservación de la 4-corriente de número de partículas n^α :

$$n^\alpha_{;\alpha} = 0 \rightarrow \dot{n} + 3Hn = 0.$$

- La conservación del tensor de energía-momento $T^{\alpha\beta}$:

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0 \rightarrow \dot{\rho} + 3H(\rho + p + \Pi) = 0.$$

- Finalmente, se debe cumplir la segunda ley de la termodinámica (producción de entropía positiva):

$$S_{;\alpha}^{\alpha} \geq 0.$$

En ausencia de disipación vectorial y tensorial [20], la 4-corriente de entropía tomará la forma $S^{\alpha} = S_{ef}n^{\alpha}$, donde n^{α} es la 4-corriente de número de partículas y S_{ef} es la entropía efectiva específica fuera del equilibrio y está dada por

$$S_{ef} = S - \left(\frac{\tau}{2nT\zeta} \right) \Pi^2, \quad (2.14)$$

con T y S las variables en equilibrio local. Dicha forma particular para la entropía efectiva asegura que su razón de cambio respecto al tiempo sea positiva, cumpliéndose así la segunda ley de la termodinámica [41].

2.3. La extensión no lineal de la teoría de Israel-Stewart

Como se comentó en la sección anterior, la limitación de las teorías previas a Israel-Stewart es que están basadas en asumir pequeñas desviaciones del equilibrio, de modo que la ecuación de transporte es lineal en Π , es decir, se cumple $\Pi = -3H\zeta = -\zeta\chi$. Esta expresión relaciona a la presión de viscosidad Π con una “fuerza” termodinámica generalizada $\chi \equiv 3H$ [21]. Cuando se consideran efectos escalares disipativos, las desviaciones grandes del equilibrio surgen de presiones de viscosidad mayores. Esto se traduce en $|\Pi| \geq p$. Mientras que la aproximación lineal dada por la ecuación de transporte de primer grado de Israel - Stewart $\tau\dot{\Pi} + (1 + \frac{1}{2}\Delta)\Pi = -3\zeta H$ es razonable para algunas situaciones cosmológicas y astrofísicas, pueden haber procesos que involucran grandes desviaciones del equilibrio, lo cual conduce a fallas en la teoría. Un ejemplo es el caso de un fluido en expansión [20].

El régimen no lineal conserva las siguientes propiedades:

- Se aproxima a la teoría de IS en el régimen lineal (pequeñas desviaciones del equilibrio), asegurando causalidad y comportamiento estable.

- Asegura producción de entropía positiva (segunda ley de la termodinámica).
- Se impone un límite superior sobre el tensor de esfuerzos viscoso del bulk, análogo a la generalización no lineal de la ecuación de flujo de calor.

La generalización no lineal de la ecuación entre la “presión de viscosidad” y la “fuerza” termodinámica generalizada $\Pi = -\zeta\chi$ no debe restringir $|\Pi|/p$ a ser menor que uno y su forma más simple [21] está dada por

$$\Pi = -\frac{\zeta\chi}{1 + \tau_*\chi}, \quad (2.15)$$

con $\tau_* \geq 0$ una escala de tiempo característica para efectos no lineales y se define como $\tau_* = j^2\tau$.

De este modo, la ecuación de transporte más sencilla en el régimen no lineal para Π está dada por

$$\tau\dot{\Pi} \left(1 + \frac{\tau_*}{\zeta}\Pi\right) + \Pi(1 + 3\tau_*H) = -3\zeta H - \frac{1}{2}\tau\Pi \left[3H + \frac{\dot{\tau}}{\tau} - \frac{\dot{\zeta}}{\zeta} - \frac{\dot{T}}{T}\right] \left(1 + \frac{\tau_*}{\zeta}\Pi\right). \quad (2.16)$$

Observemos que es una ecuación diferencial de primer orden para Π .

Al considerar estas ideas y tomar las mismas definiciones utilizadas en la teoría sencilla de Israel - Stewart, la ecuación se convierte en:

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{j^2}{v^2} - \left(\frac{2j^2}{3(\omega+1)v^2}\right) \frac{\dot{H}}{H^2}\right] \left\{ \ddot{H} + 3H\dot{H} + \left(\frac{1-2(\omega+1)}{\omega+1}\right) \frac{\dot{H}^2}{H} \right. \\ & \left. + \frac{9}{4}(\omega+1)H^3 \right\} + \frac{3(\omega+1)v^2}{2\sqrt{3}\zeta_0} \left[1 + \left(\frac{\sqrt{3}\zeta_0 k^2}{(\omega+1)v^2}\right) H^{2s-1}\right] H^{2(1-s)} (2\dot{H} \\ & + 3(\omega+1)H^2) - \frac{9}{2}(\omega+1)v^2 H^3 = 0, \quad (2.17) \end{aligned}$$

que es la ecuación dinámica fundamental para un bulk viscoso no lineal en un universo plano. Observemos que el parámetro j caracteriza los efectos no lineales cuando $|\Pi| \gg |p|$ y que en el caso $j = 0$ se recupera la ecuación (2.13). A esta generalización se le conoce como **extensión no lineal de la teoría de Israel - Stewart**. Este

esquema es más adecuado para describir el comportamiento del universo observable que otros escenarios.

En este esquema se han encontrado soluciones en distintos contextos, tales como cosmología fantasma e inflación viscosa.

2.3.1. Solución tipo de Sitter

Antes de analizar las características dinámicas de la ecuación (2.17), estudiemos la posibilidad de una solución de tipo de Sitter, la cuál tiene un parámetro de Hubble constante, o en otras palabras, sucede cuando la evolución respecto al tiempo cosmológico del factor de escala es proporcional al factor de escala mismo. De este modo, al hacer que $H = cte \neq 0$, encontramos que

$$H = 2^{\frac{1}{2s-1}} \left[\frac{\sqrt{3}\zeta_0(2v^2 - 1)(v^2 - k^2)}{v^4(\omega + 1)} \right]^{\frac{-1}{2s-1}}, \quad (2.18)$$

de donde se puede ver que no habrá solución de Sitter en el caso $s = 1/2$. De igual modo se debe evitar el caso $\omega \neq -1$, de modo que debemos buscar que el valor de ω sea negativo pero distinto a -1 para que la expansión sea acelerada.

A continuación haremos una pausa en nuestro estudio de la extensión no lineal de la teoría de Israel - Stewart con el fin de introducir brevemente las herramientas matemáticas que utilizamos para analizar de forma cualitativa la dinámica del universo que obedece dicho esquema.

Capítulo 3

Sistemas dinámicos

En este capítulo se introduce de manera muy breve la teoría de estabilidad lineal para sistemas dinámicos, que puede ser utilizada para estudiar el comportamiento de un sistema físico alrededor de sus puntos críticos. Podemos pensar en un sistema dinámico [23] como cualquier sistema abstracto que consiste en dos elementos:

1. Un espacio (espacio de estados o espacio fase) que matemáticamente corresponde a una variedad diferencial.
2. Una regla matemática que describa la evolución de cualquier punto en dicho espacio. Generalmente esta regla matemática corresponde a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias o bien ecuaciones en diferencias, acopladas entre sí, en general no lineales, cuyas variables son las coordenadas del espacio de estados.

Cada estado del sistema que estamos interesados en describir está caracterizado por un conjunto de cantidades que corresponden a las variables dinámicas del sistema, también llamadas grados de libertad, y el espacio de estados es el conjunto de todos los valores posibles de dichas variables. Para ciertos sistemas, elegir las cantidades que describen su dinámica es directo, pero para otros sistemas más complicados (por ejemplo el universo como un todo), la elección no es obvia y resulta útil elegir variables convenientes.

Existen dos tipos de sistemas dinámicos: los **sistemas dinámicos continuos** cuya evolución está dada por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias y

los **sistemas dinámicos discretos** que pueden definirse usando ecuaciones en diferencias. Así mismo, podemos distinguir los **sistemas dinámicos autónomos**, que son los sistemas dinámicos tales que no dependen de la variable independiente, que en este caso será el tiempo t .

La forma estándar de un sistema dinámico usualmente se expresa como

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}), \quad (3.1)$$

donde \vec{x} es un elemento del espacio de estados, cuyas componentes corresponden a los valores de cada variable dinámica y $\vec{f}(\vec{x})$ es un campo vectorial que asocia a cada punto en el espacio de estados un vector definido en el espacio de estados. El punto representa diferenciación respecto a la variable independiente (usualmente el tiempo t). Nos restringiremos a sistemas con un número finito de variables, las cuales toman valores continuos.

La ecuación autónoma $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ tiene un **punto crítico o punto fijo** en $\vec{x} = \vec{x}_0$ si y sólo si $\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{0}$, esto es, puntos donde el campo vectorial se anula y por lo tanto, asociados a soluciones estacionarias, de las cuales se puede determinar su estabilidad. En términos simples, un punto fijo \vec{x}_0 del sistema es estable si todas las soluciones $\vec{x}(t)$ iniciando cerca de \vec{x}_0 permanecen en su vecindad. El punto será asintóticamente estable si es estable y además las soluciones se aproximan al punto crítico para todas las condiciones iniciales en su vecindad. Si el punto es inestable, entonces las soluciones se alejarán de él en al menos una dirección en el espacio fase.

Existen algunos métodos para estudiar las propiedades de estabilidad de puntos críticos, el más utilizado es la teoría de estabilidad lineal.

3.1. Teoría de estabilidad lineal

Sea $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ un sistema dinámico dado con cierto punto crítico \vec{x}_0 , vamos a linealizarlo alrededor de dicho punto. Como $\vec{f}(\vec{x})$ es un campo vectorial, es decir, $\vec{f}(x) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}))$, podemos expandir en serie de Taylor cada f_i alrededor de \vec{x}_0 . A primer orden:

$$f_i = f_i(\vec{x}_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0) y_j, \quad (3.2)$$

donde $y_j = x_j - x_{0j}$. El objeto $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ es de suma importancia, ya que corresponde a la matriz Jacobiana del campo vectorial \vec{f} , definida por:

$$J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Los eigenvalores de J evaluada en \vec{x}_0 son los que nos darán la información sobre la estabilidad del sistema dinámico.

Como J es una matriz de $n \times n$, tendrá a lo más n eigenvalores complejos y la teoría tendrá problemas si uno o más de los eigenvalores es cero. Un punto crítico se llama hiperbólico si ninguno de los eigenvalores de J evaluados en \vec{x}_0 tiene parte real cero, de otro modo, el punto se llama no hiperbólico y la teoría de estabilidad lineal fallará, por lo que se deberán emplear otros métodos.

Para el análisis de estabilidad, podemos distinguir cuatro casos:

1. Si todos los eigenvalores tienen parte real negativa, el punto crítico es estable.
2. Si al menos un eigenvalor tiene parte real positiva, el punto crítico correspondiente no es estable y será un punto silla que atrae trayectorias en algunas direcciones y las repele en otras.
3. Si todos los eigenvalores tienen parte real positiva, todas las trayectorias serán repelidas. El punto crítico es inestable.
4. El determinante de la matriz jacobiana es negativo y la parte real de sus eigenvalores es negativa. Este es el caso de una espiral estable.

Aunado a lo anterior, hay que considerar cuando un eigenvalor es cero, ya que si esto ocurre, como se mencionó anteriormente, la teoría de estabilidad lineal falla, por lo que no se obtendrá información y tendremos que utilizar otro método, por ejemplo el método de variedad central.

Capítulo 4

Dinámica de cosmologías viscosas en el formalismo no lineal de Israel-Stewart

Elegir una descripción basada en fluidos es un camino natural al estudiar la dinámica de los componentes de energía en el universo. En el enfoque más sencillo, se asume que dichos componentes obedecen una ecuación de estado de fluido barotrópico, completamente caracterizados por su densidad de energía ρ y su densidad de presión p , junto con el parámetro ω .

Desde el punto de vista de fluidos y las observaciones cosmológicas actuales, no hay razones para excluir una configuración más real, donde los fluidos cósmicos sean fluidos imperfectos debido a un bulk viscoso en ellos [24], al contrario, la existencia de tensiones en el actual modelo estándar motiva a explorar descripciones más realistas de la materia en el universo. Si le ocurren procesos disipativos a la viscosidad de bulk en el fluido, su ecuación de continuidad toma la forma

$$\dot{\rho} + 3H(\gamma\rho + \Pi) = 0, \quad (4.1)$$

donde el término adicional Π representa la presión de viscosidad del fluido y se define $\gamma \equiv 1 + \omega$. La naturaleza de Π es determinada por el formalismo adoptado en la descripción del fluido viscoso. En general, como se ha comentado anteriormente, existen dos tipos de formalismos que se utilizan en la descripción de fluidos viscosos

en cosmología, uno de ellos es el formalismo de Eckart, que es no-causal, el otro es el formalismo causal de Israel-Stewart, que se ha explicado con detalle en secciones previas. En el régimen no lineal, donde $\tau_* = j^2\tau$, la presión de viscosidad obedece la ecuación de transporte

$$\tau\dot{\Pi}\left(1 + \frac{\tau_*}{\zeta}\Pi\right) + \Pi(1 + 3\tau_*H) = -3\zeta H - \frac{1}{2}\tau\Pi\left[3H + \frac{\dot{\tau}}{\tau} - \frac{\dot{\zeta}}{\zeta} - \frac{\dot{T}}{T}\right]\left(1 + \frac{\tau_*}{\zeta}\Pi\right), \quad (4.2)$$

donde T es la temperatura barotrópica del fluido, ζ el coeficiente de viscosidad del bulk y τ el tiempo de relajación, que es del orden del tiempo de interacción media. En principio, radiación, materia o energía oscura pueden ser un fluido viscoso, pero como la materia oscura se puede agrupar mientras que la energía oscura no y aparte ha contribuido de mayor forma a la formación de estructuras en el universo, es interesante estudiar la viabilidad física de la materia oscura como un fluido viscoso en un universo FRW en expansión. Además, el modelo de materia oscura fría a escalas pequeñas presenta algunas posibles inconsistencias como el problema de los satélites faltantes, el problema del core - cusp, etc [42, 43]. Esto ha motivado a la comunidad a explorar la posibilidad de que la materia oscura tenga propiedades de fluidos más realistas. También debemos considerar que existe la posibilidad de una interacción entre la materia y la energía oscura.

En esta sección se utiliza el enfoque de sistemas dinámicos para investigar la dinámica de un universo cuyo contenido está caracterizado por un fluido de materia oscura viscosa descrita en el régimen no lineal del formalismo causal de Israel - Stewart y un fluido de energía oscura con densidad de energía constante. El estudio de sistemas dinámicos juega un rol prominente en cosmología, ya que permite checar la viabilidad de un modelo para reproducir la historia térmica del universo y la expansión cósmica actual.

Con el fin de describir la evolución cósmica de un universo en el que los efectos disipativos están expresados mediante la extensión no lineal del formalismo de Israel - Stewart (IS), debemos trabajar con la ecuación (4.2) para la presión de viscosidad del bulk. A partir de ella es posible obtener una ecuación diferencial de segundo orden para el parámetro de Hubble H . Dicha ecuación es complicada de resolver, ya que siguiendo el procedimiento estándar, necesitaríamos dos condiciones iniciales para que

la solución quede bien establecida: la primera corresponde al valor del parámetro de Hubble al tiempo actual y la segunda para su derivada respecto al tiempo propio (\dot{H}). El valor de \dot{H}_0 , sin embargo, no está bien caracterizado en el tiempo actual [44]. Por otro lado, la condición de unicidad para la solución no está garantizada, ya que estamos considerando un modelo cosmológico que evoluciona en condiciones muy lejanas al equilibrio desde el punto de vista termodinámico y en consecuencia están involucradas ecuaciones diferenciales no lineales; sin embargo, como se ha comentado previamente, las condiciones cercanas al equilibrio no son consistentes con un fluido cósmico en expansión, por lo que el enfoque no lineal para la evolución del bulk es más adecuado si queremos describir las etapas tardías de la evolución del universo. Bajo tales condiciones, se debe explorar una forma alternativa para extraer información cosmológica del modelo completo. Un enfoque de **sistemas dinámicos** ha demostrado ser una herramienta poderosa para estudiar las propiedades dinámicas globales de varios modelos cosmológicos en Relatividad General [45].

El uso de sistemas dinámicos es conveniente debido a que sin necesidad de resolver el sistema de ecuaciones dinámicas completamente, se puede obtener información cualitativa de características globales importantes del espacio fase, así como un conjunto completo de posibles soluciones en términos de los puntos críticos del sistema y su estabilidad lineal. Además, en este trabajo, la técnica de sistemas dinámicos es útil también para determinar la existencia de soluciones que describen universos en expansión acelerada.

En este contexto, resultan interesantes las **soluciones escaladas**, que son atractores en los que la densidad de energía oscura imita la densidad de materia del fondo cosmológico y por lo tanto, proveen una nueva línea de ataque al problema de ajuste fino (problema de coincidencia cosmológica de la energía oscura). Dichas soluciones se caracterizan por la relación

$$\frac{\rho_x}{\rho_m} = C,$$

donde C es una constante distinta de cero [7].

4.1. Planteamiento del sistema dinámico

Para aplicar el formalismo causal de IS a un fluido cósmico viscoso en un escenario sin alejarse demasiado del modelo estándar de cosmología, debemos considerar que el fluido cósmico total está constituido por radiación, materia oscura y energía oscura, además, debemos considerar que, de acuerdo a la cosmología estándar, la formación de estructuras tuvo su desarrollo más importante durante la época de materia dominante y que el universo actual se expande de manera similar a como lo haría un universo de De Sitter. En un escenario cosmológicamente viable, la historia térmica del universo debe reproducirse, así como las medidas de distancia y otras observables cosmológicas. A tiempos tempranos, luego de inflación, el universo está dominado por radiación. Posteriormente sucede una época de materia oscura dominante que dio lugar a la formación de estructuras (alrededor de $z = 3000$) y finalmente llegó a ser una época de energía oscura dominante, en tiempos tardíos equivalentes a $z \sim 1$. En lo consiguiente se asume que el fluido de materia oscura es viscoso y responde al formalismo de IS. Así, la ecuación de Friedmann y las ecuaciones de conservación están dadas como

$$3H^2 = \rho_r + \rho_m + \rho_{DE}, \quad (4.3)$$

$$\dot{\rho}_r = -4H\rho_r, \quad (4.4)$$

$$\dot{\rho}_m = -3H\rho_m - 3H\Pi + Q, \quad (4.5)$$

$$\rho_{DE} \dot{=} -3H\gamma_{DE}\rho_{DE} - Q, \quad (4.6)$$

donde la densidad de energía total es $\rho_T = \rho_r + \rho_m + \rho_{DE}$ con ρ_r , ρ_m y ρ_{DE} las densidades de energía de radiación, materia y energía oscura, respectivamente. La materia oscura es un fluido viscoso con Π que obedece la ecuación de transporte (4.2) en el formalismo IS y Q representa un posible acoplamiento entre la materia oscura viscosa y la energía oscura. Este término indica que puede haber transferencia de energía y que la dirección de dicha transferencia es desde la materia oscura viscosa hacia la energía oscura viscosa.

La densidad de energía total satisface la ecuación de conservación $\dot{\rho}_T + 3H\gamma_{eff}\rho_T = 0$, donde $\gamma_{eff} \equiv 1 + \omega_{eff}$ y el parámetro efectivo de la ecuación de estado es $\omega_{eff} = p_{eff}/\rho_T = (p_T + \Pi)/\rho_T$, tal que $p_T = p_r + p_m + p_{DE}$ es la presión total

de las componentes de energía. Al tomar en cuenta que la presión de viscosidad del bulk del fluido puede ser negativa, la expansión acelerada del universo ocurre si $\omega_{eff} < -\frac{1}{3}$, o de forma equivalente, si $\gamma_{eff} < \frac{2}{3}$. Como es usual, el coeficiente de viscosidad del bulk toma la forma de una ley de potencias dada por $\zeta(\rho_m) = \zeta_0 \rho_m^{1/2}$ con ζ_0 un parámetro positivo.

Para estudiar la dinámica del modelo, se introducen las siguientes variables [45]:

$$x = \Omega_{DE} = \frac{\rho_{DE}}{3H^2}, \quad (4.7)$$

$$y = \Omega_m = \frac{\rho_m}{3H^2}, \quad (4.8)$$

$$z = \Omega_{\Pi} = \frac{\Pi}{3H^2}. \quad (4.9)$$

En términos de dichas variables, se tiene

$$\omega_{eff} = \gamma_{eff} - 1 = \left(\gamma_{DE} - \frac{4}{3} \right) x + z - \frac{y}{3} + \frac{1}{3}. \quad (4.10)$$

Reescribiendo el conjunto de ecuaciones cosmológicas (4.3), (4.4), (4.5) y (4.6) junto con la ecuación de transporte (4.2)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dN} &= x(3\gamma_{DE}x - 3\gamma_{DE} + 3z - y - 4x + 4) - \frac{Q}{3H^3}, \\ \frac{dy}{dN} &= 3\gamma_{DE}xy + 3(y-1)z - y^2 + (1-4x)y + \frac{Q}{3H^3}, \\ \frac{dz}{dN} &= 3z(\gamma_{DE}x + z) - \frac{3yz}{y+j^2z} \left(\frac{1}{\zeta_0} \sqrt{\frac{y}{3}} + j^2 + \frac{y}{z} \right) + z(1-4x-y) - \frac{3z^2}{2y} + \frac{Q}{6H^3} \frac{z}{y}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Aquí se ha introducido la variable $N = \ln a$, llamada número de e-foldings, utilizado para describir la dinámica de la energía oscura, entre otros regímenes cosmológicos. Cabe mencionar que utilizar esta variable tiene la ventaja de que las ecuaciones de continuidad y de transporte se desacoplan de la ecuación de Friedmann.

Este conjunto de tres ecuaciones diferenciales de primer orden forma un sistema autónomo para tres variables independientes x , y y z , si podemos escribir al acoplamiento Q en términos de ellas.

Punto	x_c	y_c	z_c	Existencia	γ_{eff}	Expansión acelerada	Estabilidad
P_1	0	0	0	Siempre	$\frac{4}{3}$	Nunca	Punto silla para todos los valores
P_2	1	0	0	Siempre	γ_{DE}	$\gamma_{DE} < 2/3$	Espiral estable para $\gamma_{DE} < 0$, punto silla para $0 < \gamma_{DE} < \frac{4}{3}$ y $\frac{4}{3} < \gamma_{DE} < 2$
P_3	$1 - \frac{z_c}{\gamma_{DE}-1}$	$\frac{z_c}{\gamma_{DE}-1}$	z_c	Para $\gamma_{DE}-1 < z_c < 0$ con $1 - \sqrt{2} < \gamma_{DE} < 1$	γ_{DE}	$\gamma_{DE} < 2/3$	Nodo estable para $\zeta_0 < \zeta_0^*$ y $1 - \sqrt{2} < \gamma_{DE} < 1$. Punto silla para $\zeta_0 > \zeta_0^*$ y $1 - \sqrt{2} < \gamma_{DE} < 1$

Cuadro 4.1: Puntos críticos físicos del caso $Q = 0$ con sus condiciones de existencia, estabilidad, expansión acelerada y sus valores correspondientes para el parámetro de la ecuación de estado $\gamma_{eff} = \omega_{eff} - 1$. Para definir el espacio fase se consideraron las variables $x = \Omega_{DE}$, $y = \Omega_m$ y $z = \frac{\Pi}{3H^2}$. También se definió $z_c = \frac{3\zeta_0^2(\gamma_{DE}^2 - 2\gamma_{DE} - 1)^2[(\gamma_{DE} - 1)j^2 + 1]^2}{4(\gamma_{DE} - 1)}$ y $\zeta_0^* = \frac{2(\gamma_{DE} - 1)}{\sqrt{3}(\gamma_{DE}^2 - 2\gamma_{DE} - 1)((\gamma_{DE} - 1)j^2 + 1)}$.

4.1.1. Caso $Q = 0$: Sin interacción entre materia y energía oscura

Primero nos vamos a concentrar en el caso donde no existe interacción entre materia y energía oscura, es decir $Q = 0$. Físicamente, esto implica que no hay energía en tránsito entre la materia oscura viscosa y la energía oscura. Para el segundo caso en el que $Q \neq 0$, estudiaremos tres distintos tipos de acoplamiento.

Los puntos críticos (x_c, y_c, z_c) del sistema dinámico se encuentran al imponer $\frac{dx}{dN} = \frac{dy}{dN} = \frac{dz}{dN} = 0$. Con el fin de examinar la estabilidad de los puntos críticos, se aplica el método de estabilidad lineal alrededor de ellos.

El sistema autónomo admite tres puntos críticos, que se muestran en el cuadro 4.1, junto con sus condiciones de existencia, aceleración y estabilidad. Como se explicó antes, para determinar la estabilidad lineal de las soluciones perturbadas en

torno a los puntos críticos del sistema se realiza un análisis de su matriz jacobiana y sus eigenvalores, el cual se encuentra en el apéndice A.

El punto P_1 existe para todos los valores y corresponde a un universo dominado por radiación, con $\Omega_r = 1$, $\Omega_m = 0$, $\Omega_{DE} = 0$ y $\gamma_{eff} = \frac{4}{3}$, de modo que nunca presenta expansión acelerada. Al estudiar sus eigenvalores, se encuentra que es un **punto silla**.

El punto P_2 es una solución de energía oscura dominante con $\Omega_{DE} = 1$ y $\gamma_{eff} = \gamma_{DE}$, por lo que presenta expansión acelerada para $\gamma_{DE} < \frac{2}{3}$. Del análisis de estabilidad encontramos que para $\gamma_{DE} < 0$ es una **espiral estable**, para $0 < \gamma_{DE} < \frac{4}{3}$ y $\frac{4}{3} < \gamma_{DE} < 2$ es un **punto silla** y para $\gamma_{DE} > 2$ es un **nodo inestable**.

Finalmente, en el punto crítico P_3 tenemos que coexisten materia oscura viscosa y energía oscura. Esta es una **solución escalada**, donde $\Omega_r = 0$, $\Omega_m = \frac{z_c}{\gamma_{eff}-1}$ y $\Omega_{DE} = 1 - \frac{z_c}{\gamma_{eff}-1}$. Existe para $\gamma_{DE} - 1 < z_c < 0$ con $1 - \sqrt{2} < \gamma_{DE} < 1$. El parámetro de estado efectivo es $\gamma_{eff} = \gamma_{DE}$, por lo que presenta expansión acelerada cuando $\gamma_{DE} < \frac{2}{3}$. Con el fin de facilitar el análisis de existencia y estabilidad, para este punto crítico se definen las siguientes cantidades:

$$z_c = \frac{3\zeta_0^2(\gamma_{DE}^2 - 2\gamma_{DE} - 1)^2[(\gamma_{DE} - 1)j^2 + 1]^2}{4(\gamma_{DE} - 1)} \quad (4.12)$$

que se utilizó para escribir las componentes del punto crítico (x_c, y_c, z_c) de una forma sencilla. Por otro lado se define

$$\zeta_0^* = \frac{2(\gamma_{DE} - 1)}{\sqrt{3}(\gamma_{DE}^2 - 2\gamma_{DE} - 1)((\gamma_{DE} - 1)j^2 + 1)} \quad (4.13)$$

que es la constante de viscosidad para un universo dominado por materia oscura viscosa, siendo este un escenario físico interesante. pero no se estudiará a fondo en este trabajo.

4.1.2. Caso $Q \neq 0$: Interacción entre materia y energía oscura

Añadamos el término de acoplamiento a las ecuaciones que conforman sistema dinámico. Así,

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dN} &= x(3\gamma_{DE}x - 3\gamma_{DE} + 3z - y - 4x + 4) - \frac{Q}{3H^3}, \\
 \frac{dy}{dN} &= 3\gamma_{DE}xy + 3(y-1)z - y^2 + (1-4x)y + \frac{Q}{3H^3}, \\
 \frac{dz}{dN} &= 3z(\gamma_{DE}x + z) - \frac{3yz}{y+j^2z} \left(\frac{1}{\zeta_0} \sqrt{\frac{y}{3}} + j^2 + \frac{y}{z} \right) + z(1-4x-y) - \frac{3z^2}{2y} + \frac{Q}{6H^3} \frac{z}{y}.
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

Para ello, consideremos tres formas funcionales para Q , dadas por

$$\begin{aligned}
 Q &= 3H\alpha\rho_{DE}, \\
 Q &= 3H\beta\rho_m, \\
 Q &= \frac{\lambda\rho_m\rho_{DE}}{H}.
 \end{aligned}$$

Los tres términos de acoplamiento considerados previamente han sido ampliamente utilizados en la literatura científica para modelar la interacción entre materia y energía oscura, por ejemplo en [46–48]. El término de acoplamiento introduce sólo una pequeña corrección a la historia de la evolución del universo y la principal razón de considerar dichas opciones es debido a que cada una de ellas permite que nuestro modelo evolucione en regímenes donde la expansión del universo es acelerada, así como también ayudan a explorar formas de resolver el problema de coincidencia [48]. Esto se logra al calcular la razón de densidades de materia y energía oscura $r = \rho_m/\rho_{DE}$. Debido a la interacción, dicha razón evoluciona en función del factor de escala como $r = a^{-p}$, donde p representa a un parámetro constante que puede tomar valores entre $[0, 3]$. La desviación de p del cero cuantifica la severidad del problema de coincidencia. Si $p = 3$, la solución corresponde al modelo Λ CDM, con $\omega_{de} = -1$ y $Q = 0$. Si $p = 0$, entonces $r = cte$ y el problema de coincidencia quedaría resuelto, pudiendo escribir la densidad de energía de la materia oscura en términos de la de energía oscura, teniendo así una solución escalada.

Opción 1

Consideremos el caso más simple para la forma funcional del término de acoplamiento:

$$Q = 3H\alpha\rho_{DE} = 9H^3\alpha x. \quad (4.15)$$

El sistema dinámico queda expresado como

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dN} &= x(3\gamma_{DE}x - 3\gamma_{DE} + 3z - y - 4x + 4 - 3\alpha), \\ \frac{dy}{dN} &= 3\gamma_{DE}xy + 3(y-1)z - y^2 + (1-4x)y + 3\alpha x, \\ \frac{dz}{dN} &= 3z(\gamma_{DE}x + z) - \frac{3yz}{y+j^2z} \left(\frac{1}{\zeta_0} \sqrt{\frac{y}{3}} + j^2 + \frac{y}{z} \right) + z(1-4x-y) - \frac{3z^2}{2y} + \frac{3\alpha xz}{2y}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Al imponer la condición para el método de estabilidad lineal, encontramos que el único punto crítico que admite este tipo de interacción es $(0, 0, 0)$, cuyos eigenvalores son 4 , -2 y $-3(\gamma_{DE} + \alpha) + 4$. Esto implica que será un punto silla para todos los valores de γ_{DE} y α .

Opción 2

Tomemos ahora el caso

$$Q = 3H\beta\rho_m = 9H^3\beta y. \quad (4.17)$$

El sistema dinámico tomará la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dN} &= x(3\gamma_{DE}x - 3\gamma_{DE} + 3z - y - 4x + 4) - 3\beta y, \\ \frac{dy}{dN} &= 3\gamma_{DE}xy + 3(y-1)z - y^2 + (1-4x+3\beta)y, \\ \frac{dz}{dN} &= 3z(\gamma_{DE}x + z) - \frac{3yz}{y+j^2z} \left(\frac{1}{\zeta_0} \sqrt{\frac{y}{3}} + j^2 + \frac{y}{z} \right) + z(1-4x-y) - \frac{3z^2}{2y} + \frac{3\beta z}{2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Al realizar el análisis de estabilidad lineal, se obtienen los puntos críticos $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ y

$$\left(-\frac{\beta B}{(3\beta+1)(3\gamma-4)}, \frac{B}{3(3\beta+1)}, \frac{B}{9} \right),$$

donde

$$B = \frac{\zeta_0^2(3\beta - 17)^2(3\beta j^2 + j^2 + 3)^2}{36(3\beta + 1)}.$$

El punto $(0, 0, 0)$ tiene eigenvalores $4 - 3\gamma_{DE}$, $\frac{1}{4}(-3\sqrt{\beta^2 + 16} + 9\beta + 4)$ y $\frac{1}{4}(3\sqrt{\beta^2 + 16} + 9\beta + 4)$.

El punto $(1, 0, 0)$ tiene eigenvalores $3\gamma_{DE} - 4$, $\frac{3}{4}(-\sqrt{\beta^2 + 16} + 3\beta + 4\gamma - 4)$ y $\frac{3}{4}(\sqrt{\beta^2 + 16} + 3\beta + 4\gamma - 4)$.

Los eigenvalores de

$$\left(-\frac{\beta B}{(3\beta + 1)(3\gamma - 4)}, \frac{B}{3(3\beta + 1)}, \frac{B}{9} \right)$$

no se toman en consideración dado que incluyen términos con factores de j en el denominador, por lo que es imposible recuperar el régimen lineal de la teoría de Israel-Stewart.

Opción 3

Finalmente, si consideramos que la interacción se manifiesta a través del producto entre las densidades de energía de materia oscura viscosa y energía oscura, entonces tendremos:

$$Q = \frac{\lambda \rho_m \rho_{DE}}{H} = 9\lambda H^3 xy. \quad (4.19)$$

Así, el sistema dinámico se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dN} &= x(3\gamma_{DE}x - 3\gamma_{DE} + 3z - y - 4x + 4 - 3\lambda y), \\ \frac{dy}{dN} &= 3\gamma_{DE}xy + 3(y - 1)z - y^2 + (1 - 4x)y + 3\lambda xy, \\ \frac{dz}{dN} &= 3z(\gamma_{DE}x + z) - \frac{3yz}{y + j^2 z} \left(\frac{1}{\zeta_0} \sqrt{\frac{y}{3}} + j^2 + \frac{y}{z} \right) + z(1 - 4x - y) - \frac{3z^2}{2y} + \frac{3\lambda xz}{2}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Nuevamente imponemos $\frac{dx}{dN} = \frac{dy}{dN} = \frac{dz}{dN} = 0$ con el fin de utilizar el método de estabilidad lineal alrededor de los puntos críticos. El sistema admite los puntos $(0, 0, 0)$,

$(1, 0, 0)$ y $\left(-\frac{1}{3\lambda}, \frac{4-3\lambda}{3\lambda}, 0\right)$, de los que ninguno depende explícitamente del parámetro j .

Este último caso es el de mayor interés físico, por lo que realizaremos el análisis de estabilidad lineal a mayor profundidad. El sistema autónomo admite tres puntos críticos que a continuación se detallan junto con sus condiciones de existencia, aceleración y estabilidad. El análisis de la matriz de perturbaciones y sus eigenvalores se encuentra en el apéndice A.

El punto $R_1(0, 0, 0)$ existe para todos los valores de γ_{DE} y además no depende del parámetro λ . Corresponde a un universo dominado por radiación con $\Omega_r = 1$, $\Omega_m = 0$, $\Omega_{DE} = 0$ y $\gamma_{eff} = \frac{4}{3}$, por lo que nunca presenta expansión acelerada. Sus eigenvalores son 4 , -2 y $4 - 3\gamma_{DE}$. Al analizarlos, se encuentra que es un **punto silla**.

El punto $R_2(1, 0, 0)$ es una solución de energía oscura dominante con $\Omega_{DE} = 1$ y $\gamma_{eff} = \gamma_{DE}$, de modo que presenta expansión acelerada para $\gamma_{DE} < \frac{2}{3}$. Sus eigenvalores son

$$3\gamma_{DE} - 4,$$

$$\frac{3}{4}(4\gamma - \sqrt{\lambda^2 + 16} + 3\lambda - 4)$$

y

$$\frac{3}{4}(4\gamma + \sqrt{\lambda^2 + 16} + 3\lambda - 4).$$

Con el fin de estudiar soluciones del sistema dinámico que posiblemente describan la expansión del universo a etapas tardías de su evolución, enfoquemos nuestro análisis en el punto crítico de tipo De Sitter, ya que las soluciones linealizadas a su alrededor describirán un universo con expansión acelerada.

La estabilidad lineal de cada punto crítico se establece de acuerdo al criterio de Lyapunov, dependiendo de los signos de la parte real de los eigenvalores de la matriz jacobiana. De dicho análisis se obtiene que de acuerdo a los valores que tomen los parámetros λ y γ_{DE} , el punto crítico podrá ser **nodo estable**, **punto silla**, **nodo inestable** y **espiral estable**. El análisis detallado en el que se establecen las condiciones que deben ser satisfechas por los parámetros del modelo en cada caso se encuentra en el Apéndice A.4.3 y la figura 4.1 ilustra el espacio de parámetros

(λ, γ_{DE}) para las distintas clasificaciones del punto crítico R_2 . Podemos observar en el espacio de parámetros que existe una cantidad infinita de pares (λ, γ_{DE}) tales que corresponden a nodos estables y espirales estables y que cumplen con la condición $\gamma_{eff} < 2/3$, por lo que dichos pares describen soluciones cosmológicas con expansión acelerada. Estos puntos incluyen valores positivos y negativos para λ , así como el valor $\lambda = 0$ que corresponde a la ausencia de interacción entre las componentes de materia oscura viscosa y energía oscura. Es de gran importancia resaltar que este esquema provee valores para γ_{eff} que corresponden a un universo en expansión acelerada sin necesidad de introducir a mano y de forma arbitraria algún valor para el parámetro de la ecuación de estado que describa dicha evolución. Como se observa en el espacio de parámetros, existen valores de γ_{eff} que corresponden a nodos estables e incluso espirales estables.

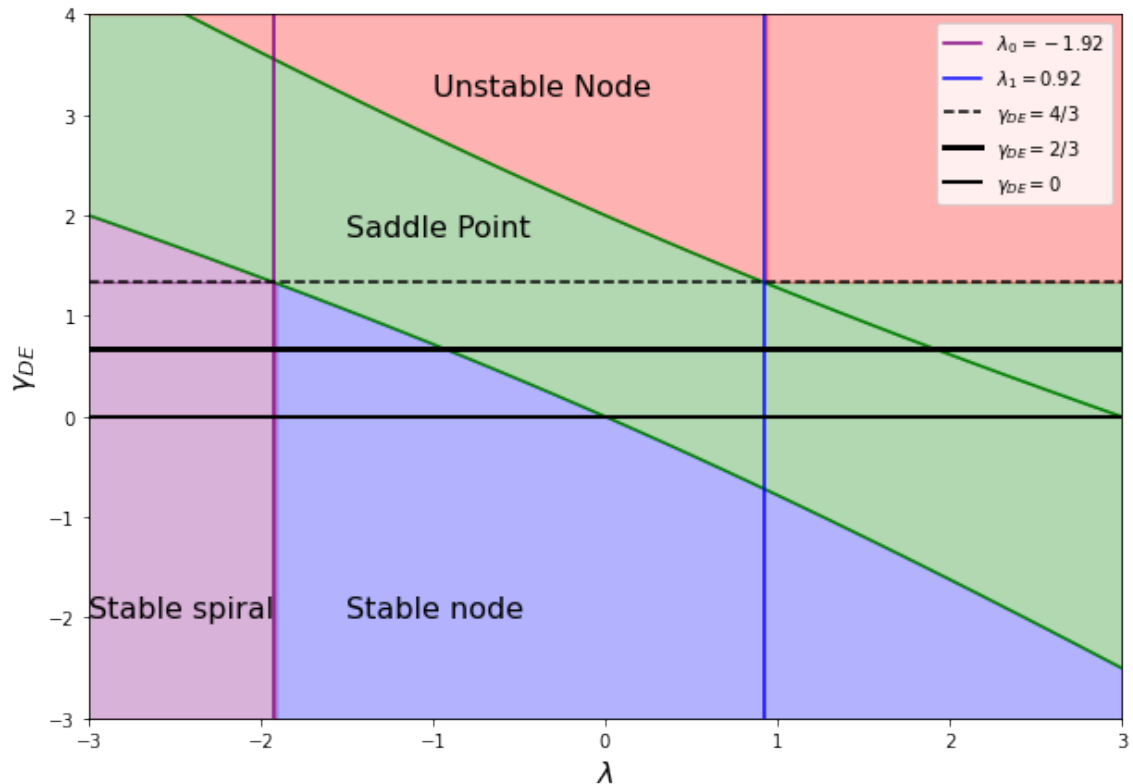


Figura 4.1: Espacio de parámetros para diferentes clasificaciones de R_2 .

En resumen, como se puede ver en la Figura 4.1, las líneas sólidas y la línea

segmentada representan algunos casos de interés en la descripción de los fluidos. La línea segmentada corresponde a radiación, para el caso $\gamma_{DE} = 2/3$ comienza el régimen de quintaesencia y para $\gamma_{DE} = 0$ tenemos un fluido de tipo constante cosmológica. Finalmente, la parte negativa del eje vertical (eje γ_{DE}) está asociada a un comportamiento de tipo fantasma. Aquí vale la pena mencionar que dependiendo del valor del parámetro λ , la estabilidad del punto crítico está garantizada dentro del régimen fantasma y que las condiciones de estabilidad no dependen del parámetro ζ_0 . En el Apéndice B se presentan proyecciones o retratos de fase que muestran las líneas de flujo alrededor del punto crítico R_2 con $\gamma_{DE} = 0$ y distintos valores de λ para los que R_2 es un nodo estable.

El punto $R_3\left(-\frac{1}{3\lambda}, \frac{4-3\lambda}{3\lambda}, 0\right)$ es una **solución escalada** ya que coexisten materia oscura viscosa y energía oscura. Dado que existen denominadores λ , R_3 no permite regresar al caso sin interacción y por lo tanto no es una solución física.

4.2. Soluciones linealizadas

Una vez realizado el análisis de estabilidad lineal, estudiaremos el comportamiento de soluciones linealizadas alrededor del punto crítico $P_2 = R_2 = (1, 0, 0)$ que corresponde a un universo de energía oscura dominante, es decir, el universo de De Sitter. Este punto crítico resulta interesante ya que nos permite analizar la evolución del universo a tiempos tardíos.

El sistema linealizado estará dado por

$$\frac{d\vec{x}}{dN} = J\vec{x},$$

donde J es la matriz jacobiana y $\vec{x} = (x, y, z)$. Recordando que $N = \ln a$ tenemos el sistema linealizado está dado por:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dN} &= (3\gamma_{DE} - 4)x - (3\lambda + 1)y + 3z, \\
 \frac{dy}{dN} &= 3(\gamma_{DE} + \lambda - 1)y - 3z, \\
 \frac{dz}{dN} &= -3y + 3\left(\gamma_{DE} + \frac{\lambda}{2} - 1\right)z.
 \end{aligned}
 \tag{4.21}$$

4.2.1. Régimen sin interacción, $Q = 0$

Para el caso sin interacción, tenemos que $\lambda = 0$, por lo que el sistema se simplifica y tenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dN} &= (3\gamma_{DE} - 4)x - y + 3z, \\
 \frac{dy}{dN} &= 3(\gamma_{DE} - 1)y - 3z, \\
 \frac{dz}{dN} &= -3y + 3(\gamma_{DE} - 1)z.
 \end{aligned}
 \tag{4.22}$$

Resolviendo con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ y $z(0) = z_0$, su solución está dada por

$$x(N) = -\frac{1}{2}e^{-6N} [-2e^{2N}(x_0 + y_0) + e^{6N}(y_0 - z_0) + y_0 + z_0], \tag{4.23}$$

$$y(N) = \frac{1}{2}e^{-6N} (y_0e^{6N} - z_0e^{6N} + y_0 + z_0), \tag{4.24}$$

$$z(N) = \frac{1}{2}e^{-6N} (-y_0e^{6N} + z_0e^{6N} + y_0 + z_0), \tag{4.25}$$

Considerando que $N = \ln a$, reescribimos la solución anterior utilizando el cambio de variable $a = \frac{1}{1+Z}$, donde Z es el corrimiento al rojo, y recordando que $x = \Omega_{DE}$, $y = \Omega_m$ y $z = \Omega_{\Pi}$, entonces podemos graficar la evolución de los parámetros de densidad respecto al corrimiento al rojo Z , mostrada en la figura 4.2.

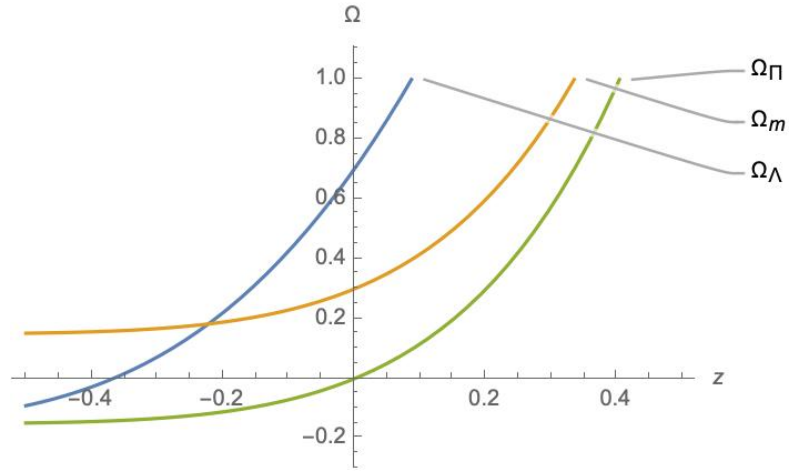


Figura 4.2: Ω vs Z , $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = 0$.

4.2.2. Regimen con interacción, $Q \neq 0$

Para el caso más general, al resolver el sistema 4.21 obtenemos la siguiente solución:

$$\begin{aligned}
 x(N) &= \Theta(N) \left\{ 2\lambda_0^2 e^{\frac{1}{4}(3\lambda_0 - 9\lambda - 4)N} (x_0 + y_0) + e^{\frac{3}{2}\lambda_0 N} [4\lambda_0 z_0 - (\lambda^2 + \lambda_0\lambda + 16) y_0] + \right. \\
 &\quad \left. + (-\lambda^2 + \lambda_0\lambda - 16) y_0 - 4\lambda_0 z_0 \right\}, \\
 y(N) &= \Theta(N) \left\{ y_0 \left[\lambda^2 - \lambda_0\lambda + (\lambda^2 + \lambda_0\lambda + 16) e^{\frac{3}{2}\lambda_0 N} + 16 \right] - 4\lambda_0 z_0 \left(e^{\frac{3}{2}\lambda_0 N} - 1 \right) \right\}, \\
 z(N) &= \Theta(N) \left\{ z_0 \left[\lambda^2 + \lambda_0\lambda + (\lambda^2 - \lambda_0\lambda + 16) e^{\frac{3}{2}\lambda_0 N} + 16 \right] - 4\lambda_0 y_0 \left(e^{\frac{3}{2}\lambda_0 N} - 1 \right) \right\},
 \end{aligned}$$

por simplicidad se han definido las cantidades $\lambda_0 := \sqrt{\lambda^2 + 16}$ y $\Theta(N) := \frac{e^{-\frac{3}{4}(\lambda_0 - 3\lambda + 4)N}}{2\lambda_0^2}$. Para ambos casos hemos considerado el caso especial $\gamma_{DE} = 0$, que representa al caso de la constante cosmológica.

De forma análoga, escribimos la solución en términos del corrimiento al rojo Z y elegimos algunos valores para el parámetro de interacción λ con el fin de graficar la evolución de los parámetros de densidad en función del corrimiento al rojo Z , observado en las figuras 4.3 - 4.6:

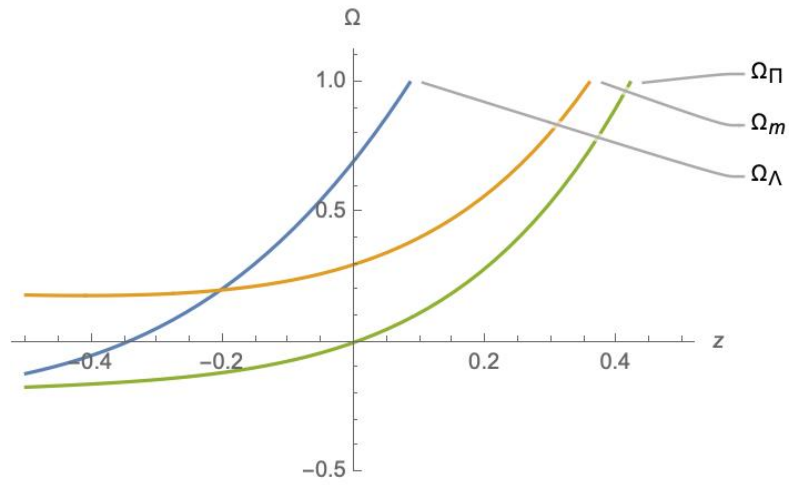


Figura 4.3: Ω vs Z , $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = 1/10$.

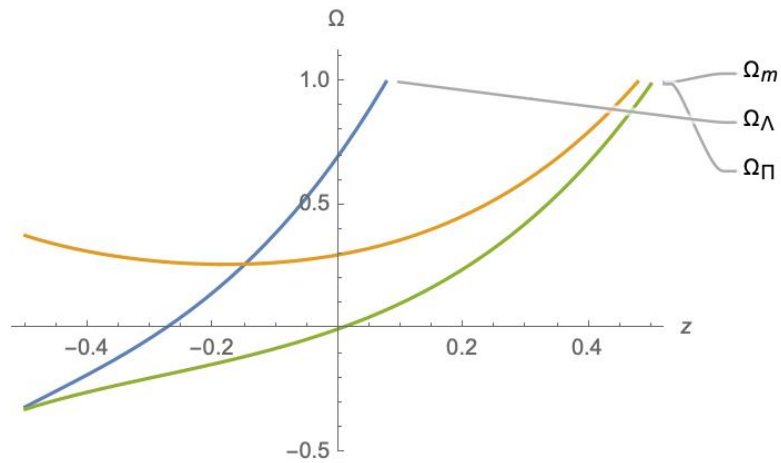


Figura 4.4: Ω vs Z , $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = 1/2$.

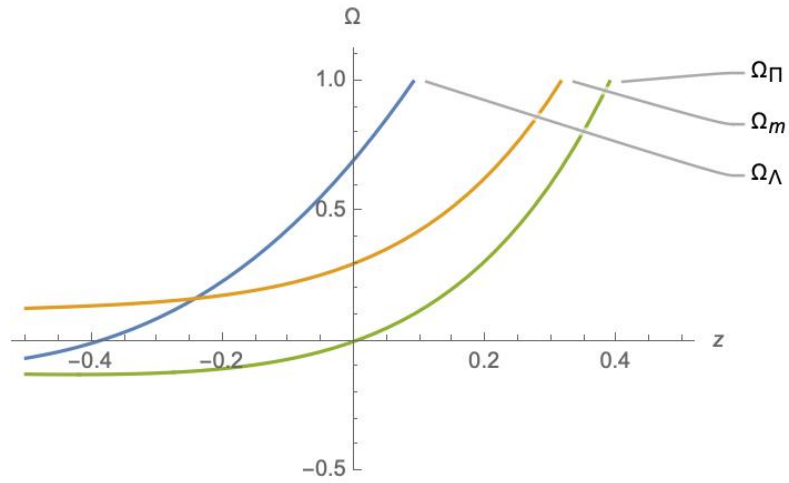


Figura 4.5: Ω vs Z , $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -1/10$.

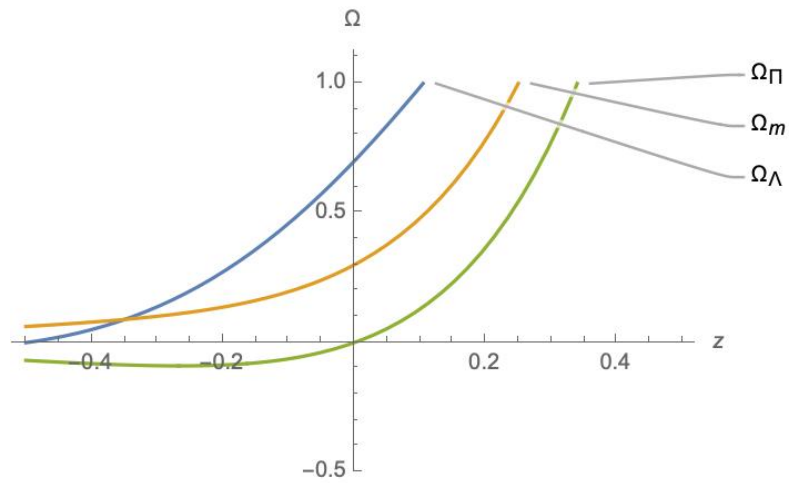


Figura 4.6: Ω vs Z , $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -1/2$.

Capítulo 5

Parámetros cosmológicos

En este capítulo se realiza una comparación entre parámetros cosmológicos calculados a partir de las soluciones linealizadas del sistema dinámico correspondiente a un universo con materia oscura viscosa en el esquema no lineal de Israel - Stewart, soluciones numéricas del sistema dinámico completo, el modelo de concordancia cosmológica y datos observacionales recopilados de diversas fuentes.

5.1. El parámetro de Hubble

Podemos reescribir la ecuación de aceleración en términos del número de e-folds N de la forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dN}(\ln H) + 1 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3H^2} \right) (\rho + 3p_{\text{eff}}) = -\frac{1}{2} [\Omega_{DE} + \Omega_m + 3(-\Omega_{DE} + \Omega_{\Pi})], \\ &= x(N) - \frac{1}{2}y(N) - \frac{3}{2}z(N). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Al utilizar las soluciones para $x(N)$, $y(N)$ y $z(N)$ del proceso de linealización, podemos encontrar una expresión para el parámetro de Hubble en términos de N resolviendo la ecuación anterior y considerando los valores $\Omega_r = \gamma_{DE} = 0$. Notemos que la solución obtenida para H lleva incluida la información de las variables x, y, z del sistema dinámico.

Junto con las soluciones numéricas obtenidas del sistema dinámico original, po-

demos comparar el comportamiento del parámetro de Hubble con el modelo de concordancia cosmológica y datos observacionales obtenidos de [2, 3]. Se puede observar de la Figura 5.1 que para valores grandes de j , las soluciones obtenidas se asemejan tanto al modelo de concordancia como a los datos observacionales. Es decir, si el sistema es altamente no lineal, tenemos una mejor aproximación tanto a datos observacionales como a la solución conocida para $H(z)$. Respecto al parámetro λ , podemos observar que su variación no afecta significativamente el comportamiento del modelo. Al considerar distintos valores, no se observan alteraciones en la naturaleza de H . El régimen no lineal de Israel - Stewart ofrece un mejor marco de trabajo, ya que el parámetro de Hubble resultante puede ajustar los datos observacionales y para valores bajos de corrimiento al rojo, es prácticamente indistinguible del correspondiente al parámetro de Hubble obtenido de Λ CDM. Notemos que las soluciones obtenidas del sistema dinámico establecido a partir del régimen no lineal de IS son muy sensibles a variaciones del parámetro j , que caracteriza a los efectos no lineales. Al aumentar la magnitud de dichos efectos, el parámetro de Hubble resultante es más parecido al modelo Λ CDM y a las observaciones, pero si el valor de j disminuye (es decir, los efectos no lineales son débiles), el modelo difiere al aumentar el valor del corrimiento al rojo. Aquí conviene recordar que no estamos realizando un ajuste de parámetros, sino solamente estamos comparando las soluciones obtenidas a partir del esquema no lineal de Israel - Stewart con datos observacionales y el modelo Λ CDM.

En la figura 5.2 se presenta el caso $\gamma_{DE} = -0,35$. Este parámetro de la ecuación de estado describe un universo en el régimen phantom. Podemos observar que en dicho régimen, valores grandes de j para las soluciones numéricas considerando el esquema completamente no lineal de Israel - Stewart nuevamente producen parámetro de Hubble que se asemeja al modelo de concordancia y a los datos observacionales. Además se observa que para valores de $\gamma_{DE} \neq 0$ el parámetro de Hubble obtenido a partir de las soluciones analíticas linealizadas también tiene un comportamiento que se asemeja al modelo de concordancia.

Se debe enfatizar que en el régimen no lineal, el parámetro de Hubble exhibe un comportamiento decreciente tal y como el modelo Λ CDM. Esta propiedad es relevante para describir de manera adecuada la evolución cósmica del universo ob-

servable.

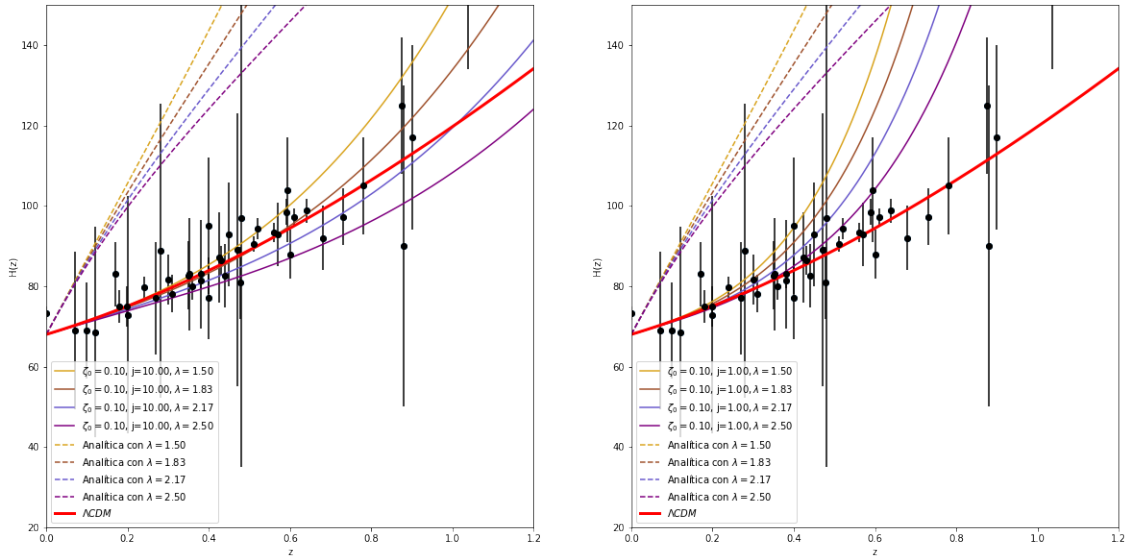


Figura 5.1: Parámetro de Hubble ($\gamma_{DE} = 0$) y datos observacionales de [2, 3].

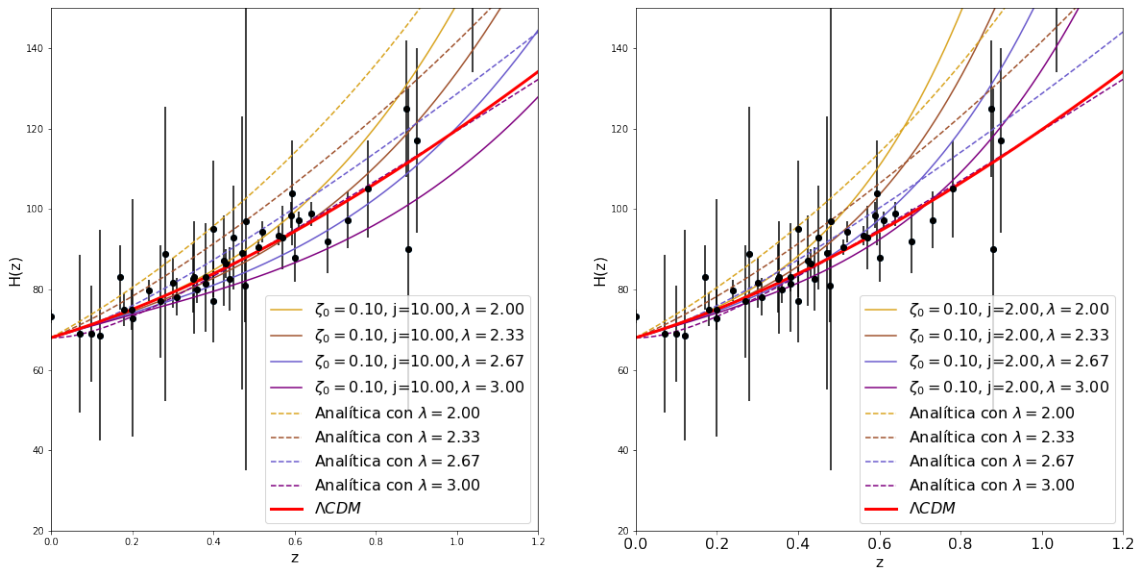


Figura 5.2: Parámetro de Hubble ($\gamma_{DE} = -0,35$) y datos observacionales de [2, 3].

5.2. El parámetro de desaceleración

Como hemos mencionado previamente, no solo el universo se está expandiendo, sino que la razón a la que se expande, dada por el parámetro de Hubble, está variando con el tiempo. El **parámetro de desaceleración** q es una manera de cuantificar esto. Para el modelo Λ CDM, dicho parámetro como función del corrimiento al rojo z está dado por

$$q(z) = -1 + \frac{3}{\left[1 + \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}}(1+z)^{-3}\right]}$$

Si consideramos la definición estándar del parámetro de desaceleración

$$1 + q = -\frac{\dot{H}}{H^2}$$

y usamos la expresión calculada para H , obtenemos:

$$q(N) = \frac{1}{2}(\Omega_{DE} + \Omega_m + 3(-\Omega_{DE} + \Omega_{\Pi})) = \frac{1}{2}y(N) + \frac{3}{2}z(N) - x(N). \quad (5.2)$$

En la figura 5.3 se muestra el parámetro de desaceleración como función del corrimiento al rojo z al considerar distintos conjuntos de valores para los parámetros λ, j y ζ_0 . Como se puede ver en el primer pánel (de izquierda a derecha), para valores fijos de j y λ , el parámetro de desaceleración es idéntico para distintos valores de ζ_0 , el cual caracteriza los efectos viscosos. El pánel de enmedio muestra que se pueden obtener ligeras variaciones en las curvas del parámetro de desaceleración al elegir distintos valores para j , dejando ζ_0 y λ fijos. Finalmente, en el tercer pánel (de izquierda a derecha) observamos que cada caso se puede distinguir claramente si consideramos distintos valores de λ y fijamos ζ_0 y j .

Para los tres casos anteriores, podemos observar la característica de que el parámetro de desaceleración siempre presenta una transición de positivo a negativo para un valor de corrimiento al rojo específico, z_t , tal y como el modelo Λ CDM. Este comportamiento es independiente de los valores asignados a los parámetros del modelo. Esto implica que el modelo tiene una transición de expansión desacelerada a ace-

lerada. Notemos que en todos los casos, $z_t > 0$, es decir, la transición ocurre en el pasado. Esto es consistente con la reciente expansión acelerada de nuestro universo que inició alrededor de $z \sim 0,6$, además, en $z = 0$, el modelo coincide con Λ CDM y el valor de z_t dependerá de los parámetros del modelo: j , λ y ζ_0 .

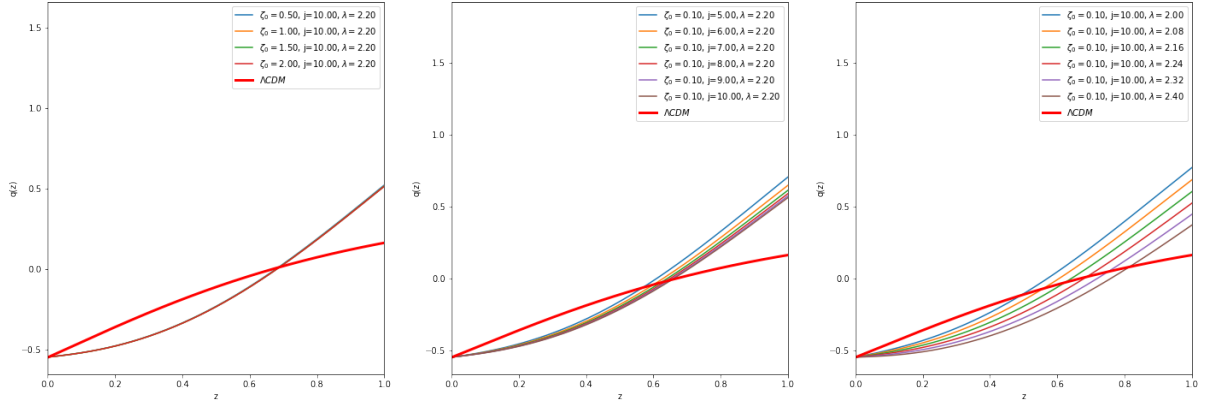


Figura 5.3: Parámetro de desaceleración como función del corrimiento al rojo.

5.3. Error numérico de las soluciones para $x(N)$, $y(N)$ y $z(N)$.

Para concluir esta sección, se presenta el cálculo del error relativo de las soluciones numéricas para $x(N)$, $y(N)$ y $z(N)$. El error relativo se define:

$$E = \frac{M_r - M_c}{M_r},$$

donde M_r es el valor real de la medida y M_c es el valor calculado.

Consideremos que el valor real de la medida es una solución calculada con una resolución muy alta, con $n = 100,000$ siendo n el número de particiones en el método de Runge-Kutta 4. Así, en la figura 5.4 se comparan los errores relativos para cada solución numérica considerando $n = 10, 100, 1000, 10000$. Podemos observar que incluso a una resolución muy baja, el error relativo es del orden de 10^{-1} y entre más refinada sea la partición, el error relativo será menor.

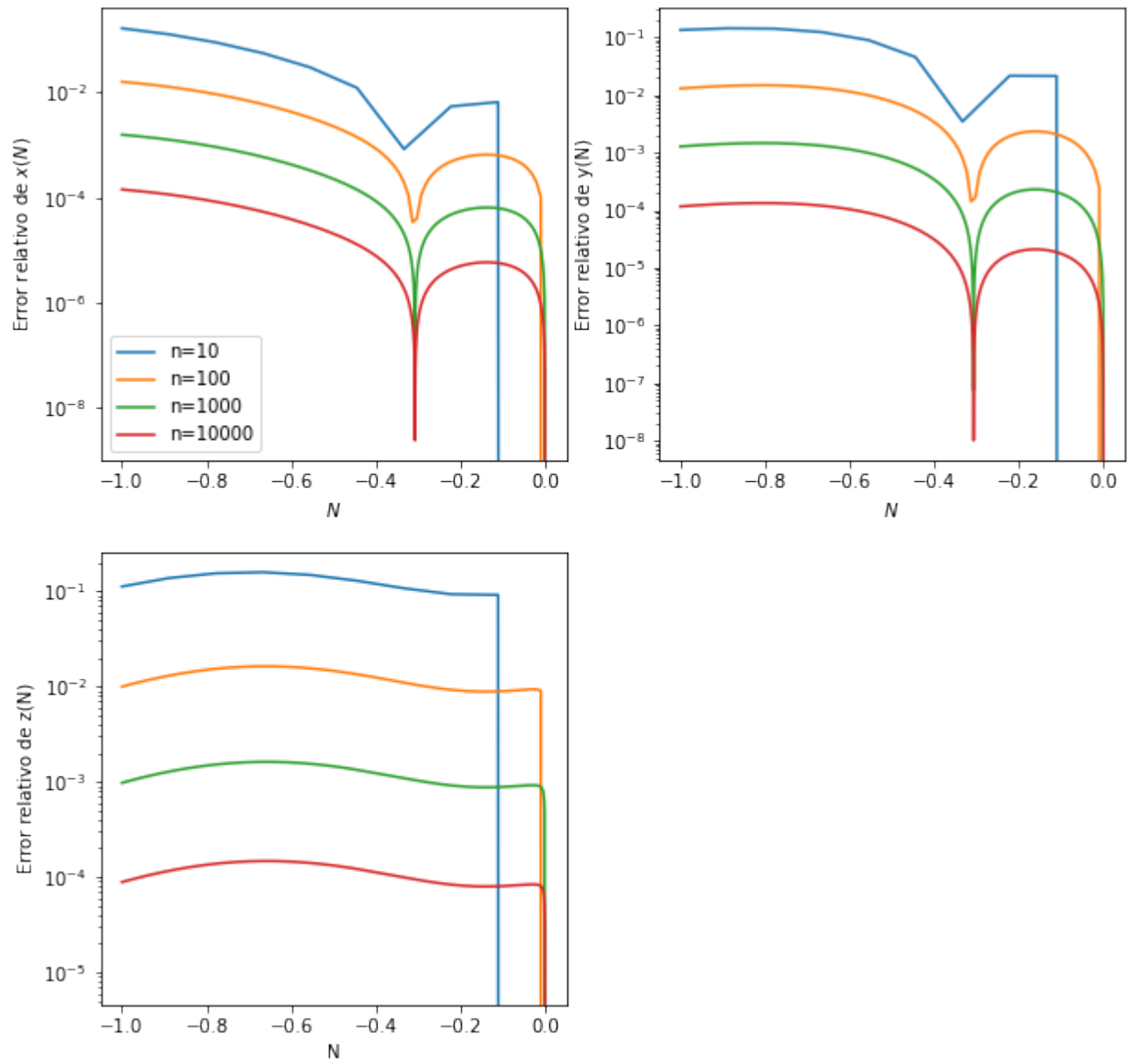


Figura 5.4: Error relativo para $x(N)$, $y(N)$ y $z(N)$.

Capítulo 6

Comentarios y perspectivas

6.1. Comentarios finales

En este trabajo hemos incluido efectos disipativos en el sector de materia para la descripción de fluidos cósmicos. El enfoque para dichos efectos está dado a través de la extensión no lineal de la teoría de Israel - Stewart. En dicho esquema, incluimos también la posibilidad de que las componentes de materia oscura viscosa y energía oscura del universo interactúen a través de un término de acoplamiento.

Se tomó un enfoque de sistemas dinámicos con el fin de establecer una descripción global del modelo y esto permitió comparar los resultados obtenidos con los reportados en el régimen lineal de la teoría de Israel - Stewart [24].

La primera diferencia que se encontró entre los esquemas lineal y no lineal de la teoría de Israel - Stewart es que en el régimen no lineal, el número de puntos críticos es menor. Sin embargo, los puntos críticos obtenidos para el caso en que las componentes del sector oscuro no interactúan preservan algunas propiedades de los puntos críticos obtenidos en el régimen lineal para $Q = 0$.

Al considerar el término de interacción para el sector oscuro, se observa que la información física obtenida de los puntos críticos en el régimen no lineal difiere de la obtenida en el régimen lineal. En nuestro caso, el punto crítico de interés fue R_2 y representa un universo dominado por energía oscura. Un punto de este tipo también aparece para el caso en que el sector oscuro no interactúa.

Los criterios de estabilidad del punto crítico R_2 no dependen de los parámetros

que caracterizan los efectos no lineales j y viscosos ζ_0 , sino que la estabilidad para dicho punto se puede establecer al considerar un espacio reducido de parámetros dado por (λ, γ_{DE}) , es decir, la estabilidad depende únicamente del parámetro que define la interacción en el sector oscuro y aparece en el término Q así como del parámetro de la ecuación de estado para el sector de energía oscura. Para el caso sin interacción se observa que la estabilidad del punto crítico de De Sitter se determina únicamente por el valor de γ_{DE} . Como se mostró previamente, dicho punto crítico presenta estabilidad en una gran región del espacio de parámetros en los regímenes de quintaesencia, constante cosmológica y fluidos de tipo fantasma.

Se consideraron las soluciones numéricas provenientes del sistema dinámico completo y las soluciones analíticas provenientes del conjunto de ecuaciones diferenciales linealizadas en el caso especial $\gamma_{DE} = 0$, ya que se utilizaron para comparar su respectiva tasa de expansión con la obtenida a partir del modelo Λ CDM. Como se comentó previamente, el régimen completamente no lineal resulta más favorecido por los datos observacionales comparado con las soluciones linealizadas analíticas; se observa que el parámetro j es quien gobierna el ajuste entre los datos observacionales y la tasa de expansión de Hubble, ya que mientras los efectos no lineales incrementan (caracterizados por j), obtenemos una mejor coincidencia de nuestro modelo con los datos observacionales y con el modelo fiducial Λ CDM. En cambio, el parámetro de Hubble no es sensible a variaciones para los parámetros ζ_0 y λ , que caracterizan los efectos viscosos y la interacción del sector oscuro, respectivamente.

También es importante destacar que para valores pequeños de corrimiento al rojo z , el parámetro de Hubble del régimen completamente no lineal y el del modelo Λ CDM son prácticamente idénticos. Esto implica que incluir efectos viscosos en el sector de materia oscura descritos por el régimen no lineal de la teoría de Israel - Stewart puede ser un marco de trabajo viable para explicar la expansión acelerada que nuestro universo presenta en épocas recientes. Estos aspectos serán explorados más a fondo en trabajos futuros.

Finalmente, observamos que el parámetro de desaceleración construido a partir de las soluciones numéricas obtenidas con el sistema dinámico completamente no lineal presenta un comportamiento deseable, ya que en el pasado es positivo y en algún valor específico $z_t > 0$ se vuelve negativo. Es decir, se describe un universo

que pasa de tener una expansión desacelerada a una expansión acelerada, tal y como se espera del modelo Λ CDM. Dicho valor de transición para el corrimiento al rojo está directamente relacionado con los valores de los parámetros λ , ζ_0 y j .

Todos los aspectos comentados anteriormente nos motivan a seguir explorando esta descripción del universo considerando a la componente de materia oscura como un fluido viscoso que obedece la extensión no lineal de la teoría de Israel - Stewart, ya que nos presenta un esquema completo que puede ayudar a describir la evolución a épocas tardías de nuestro universo observable y en especial, a explicar la época de expansión acelerada que nuestro universo está atravesando.

6.2. Perspectiva a futuro

Se pretende seguir explorando el enfoque de describir alguna componente del universo como un fluido viscoso. Un primer acercamiento será considerando que las propiedades viscosas ahora se presentan a través del sector de energía oscura. También se tiene el interés de explorar los efectos de términos de acoplamiento distintos al utilizado en este trabajo, ya que se ha visto que si se considera que existen intercambios de energía entre la materia y la energía oscura, la descripción cosmológica resultante es aceptable físicamente.

Por otro lado y continuando del lado de las interacciones en el sector oscuro, es interesante también estudiar los efectos disipativos a través del decaimiento de cierta especie de materia - energía del universo. El interés de esta perspectiva está enfocado en el decaimiento de materia oscura a radiación oscura, donde también aparece un término de acoplamiento Q , que puede ser propuesto mediante un ansatz o calculado a partir de establecer ciertas condiciones en el sistema.

Apéndice A

Análisis de estabilidad para un sistema autónomo de dos variables

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones acopladas para las variables $x(t)$ y $y(t)$ (se puede generalizar fácilmente a más variables):

$$\dot{x} = f(x, y, t) \tag{A.1}$$

$$\dot{y} = g(x, y, t)$$

donde f y g son funciones en términos de x , y y t . El sistema es **autónomo** si f y g no contienen términos que dependan explícitamente del tiempo.

A.1. Puntos fijos o críticos

Un punto (x_c, y_c) es fijo (o crítico) para un sistema autónomo si

$$(f, g)|_{(x_c, y_c)} = 0. \tag{A.2}$$

Un punto crítico se llama **atractor** si satisface la condición

$$(x(t), y(t)) \rightarrow (x_c, y_c) \quad \text{para } t \rightarrow \infty. \tag{A.3}$$

A.2. Estabilidad alrededor de los puntos fijos

Podemos saber si el sistema se aproxima a alguno de los puntos críticos al estudiar la estabilidad alrededor de dichos puntos. Consideremos pequeñas perturbaciones δx y δy alrededor del punto crítico (x_c, y_c) , es decir,

$$\begin{aligned} x &= x_c + \delta x \\ y &= y_c + \delta y. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Sustituyendo en el sistema (A.1) se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{d}{dN} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}, \tag{A.5}$$

donde $N = \ln a$ es el número de e-foldings, que es conveniente usar en la dinámica de energía oscura. La matriz \mathcal{M} depende de x_c y y_c y está dada por

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x=x_c, y=y_c)} \tag{A.6}$$

\mathcal{M} posee dos eigenvalores, μ_1 y μ_2 . La solución general para la evolución de perturbaciones lineales se puede escribir

$$\begin{aligned} \delta x &= C_1 e^{\mu_1 N} + C_2 e^{\mu_2 N} \\ \delta y &= C_3 e^{\mu_1 N} + C_4 e^{\mu_2 N}, \end{aligned} \tag{A.7}$$

donde C_1, C_2, C_3 y C_4 son constantes de integración. Entonces, la estabilidad alrededor de los puntos fijos depende de la naturaleza de los eigenvalores. Generalmente se utiliza la siguiente clasificación:

- Nudo estable: $\mu_1 < 0$ y $\mu_2 < 0$.
- Nudo inestable: $\mu_1 > 0$ y $\mu_2 > 0$.
- Punto silla: $\mu_1 > 0$ y $\mu_2 < 0$ (o $\mu_1 < 0$ y $\mu_2 > 0$).

- Espiral estable: El determinante de \mathcal{M} es negativo y la parte real de μ_1 y μ_2 es negativa.

De los casos anteriores, sólo el nodo estable y la espiral estable son atractores.

A.3. Análisis de estabilidad para el caso $Q = 0$

Las componentes de la matriz de perturbaciones \mathcal{M} correspondiente al sistema dinámico (4.11) estarán dadas por

$$\mathcal{M}_{11} = 3(2x - 1)\gamma_{DE} + 3z - y - 8x + 4, \quad (\text{A.8})$$

$$\mathcal{M}_{12} = -x,$$

$$\mathcal{M}_{13} = 3x,$$

$$\mathcal{M}_{21} = (3\gamma_{DE} - 4)y,$$

$$\mathcal{M}_{22} = 3\gamma_{DE}x + 3z - 2y - 4x + 1,$$

$$\mathcal{M}_{23} = 3(y - 1),$$

$$\mathcal{M}_{31} = (3\gamma_{DE} - 4)z,$$

$$\mathcal{M}_{32} = -\frac{\sqrt{3y}z(y + 3j^2z)}{2\zeta_0(y + j^2z)^2} - \frac{3j^4z^2}{(y + j^2z)^2} - \frac{3y(y + 2j^2z)}{(y + j^2z)^2} - z + \frac{3z^2}{2y^2},$$

$$\mathcal{M}_{33} = (3\gamma_{eff} - 4)x + 6z + 1 - y - \frac{3z}{y} - \frac{\sqrt{3}y^{5/2}}{\zeta_0(y + j^2z)^2}.$$

Para el punto crítico P_1 , los eigenvalores serán

$$\mu_1 = -2 \quad (\text{A.9})$$

$$\mu_2 = 4 \quad (\text{A.10})$$

$$\mu_3 = 4 - 3\gamma_{DE} \quad (\text{A.11})$$

El punto crítico P_1 es un **punto silla**.

Para el punto crítico P_2 , los eigenvalores serán

$$\mu_1 = 3(\gamma_{DE} - 2) \quad (\text{A.12})$$

$$\mu_2 = 3\gamma_{DE} \quad (\text{A.13})$$

$$\mu_3 = 3\gamma_{DE} - 4 \quad (\text{A.14})$$

Aquí tendremos los siguientes casos:

- Si $\gamma_{DE} < 0$, tendremos una **espiral estable**. Esta es la única condición para que exista un **atractor** en el punto P_2 .
- Si $0 < \gamma_{DE} < \frac{4}{3}$, tendremos un **punto silla**.
- Si $\frac{4}{3} < \gamma_{DE} < 2$, tendremos un **punto silla**.
- Si $\gamma_{DE} > 2$, tendremos un **nodo inestable**.

Para el punto P_3 los eigenvalores son

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 3\gamma_{DE} - 4 & (\text{A.15}) \\ \mu_2 &= -\frac{\sqrt{3(\gamma_{DE} - 1) \left[-3\zeta_0^2 ((\gamma_{DE} - 1)j^2 + 1)^4 (-\gamma_{DE}^2(2z_c + 3) + \gamma_{DE}^3 + \gamma_{DE}(4z_c - 1) + 2z_c + 3) + \mathcal{A} \right]}}{2(\gamma_{DE} - 1)\zeta_0 ((\gamma_{DE} - 1)j^2 + 1)^2} \\ &+ \frac{3(\gamma_{DE} - 1)^2\zeta_0 ((\gamma_{DE} - 1)j^2 + 1)^2 - \sqrt{3z_c(\gamma_{DE} - 1)}}{2(\gamma_{DE} - 1)\zeta_0 ((\gamma_{DE} - 1)j^2 + 1)^2} \\ \mu_3 &= +\frac{\sqrt{3(\gamma_{DE} - 1) \left[-3\zeta_0^2 ((\gamma_{DE} - 1)j^2 + 1)^4 (-\gamma_{DE}^2(2z_c + 3) + \gamma_{DE}^3 + \gamma_{DE}(4z_c - 1) + 2z_c + 3) + \mathcal{A} \right]}}{2(\gamma_{DE} - 1)\zeta_0 ((\gamma_{DE} - 1)j^2 + 1)^2} \\ &+ \frac{3(\gamma_{DE} - 1)^2\zeta_0 ((\gamma_{DE} - 1)j^2 + 1)^2 - \sqrt{3z_c(\gamma_{DE} - 1)}}{2(\gamma_{DE} - 1)\zeta_0 ((\gamma_{DE} - 1)j^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

donde se define

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 2\sqrt{3}\zeta_0\sqrt{z_c(\gamma_{DE} - 1)}[(\gamma_{DE} - 1)j^2 + 1]^2(3\gamma_{DE}^2j^2 + \gamma_{DE}(2 - 3j^2(z_c + 2))) \\ &+ 3j^2(z_c + 1) - 3z_c - 2] + z_c \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

y

$$z_c = \frac{3\zeta_0^2(\gamma_{DE}^2 - 2\gamma_{DE} - 1)^2}{4(\gamma_{DE} - 1)} [(\gamma_{DE} - 1)j^2 + 1]^2. \quad (\text{A.17})$$

Para este caso se definió

$$\zeta_0^* = \frac{2(\gamma_{DE} - 1)}{\sqrt{3}(\gamma_{DE}^2 - 2\gamma_{DE} - 1)((\gamma_{DE} - 1)j^2 + 1)}, \quad (\text{A.18})$$

que es el valor de la constante de viscosidad para el caso de materia oscura viscosa dominante.

En el rango de definición, este punto crítico es un **nodo estable** para $\zeta_0 < \zeta_0^*$ y $1 - \sqrt{2} < \gamma_{DE} < 1$. Para $\zeta_0 > \zeta_0^*$ y $1 - \sqrt{2} < \gamma_{DE} < 1$, es un **punto silla**.

A.4. Análisis de estabilidad para el caso $Q \neq 0$

A.4.1. Caso $Q = 3H\alpha\rho_{DE}$

Para el primer caso, las componentes de la matriz de perturbaciones \mathcal{M} son:

$$\mathcal{M}_{11} = 3(2x - 1)\gamma_{DE} + 3z - y - 8x + 4 - 3\alpha, \quad (\text{A.19})$$

$$\mathcal{M}_{12} = -x,$$

$$\mathcal{M}_{13} = 3x,$$

$$\mathcal{M}_{21} = (3\gamma_{DE} - 4)y + 3\alpha,$$

$$\mathcal{M}_{22} = 3\gamma_{DE}x + 3z - 2y - 4x + 1,$$

$$\mathcal{M}_{23} = 3(y - 1),$$

$$\mathcal{M}_{31} = (3\gamma_{DE} - 4)z + \frac{3\alpha z}{2y},$$

$$\mathcal{M}_{32} = -\frac{\sqrt{3}yz(y + 3j^2z)}{2\zeta_0(y + j^2z)^2} - \frac{3j^4z^2}{(y + j^2z)^2} - \frac{3y(y + 2j^2z)}{(y + j^2z)^2} - z + \frac{3z^2}{2y^2} - \frac{3\alpha xz}{2y^2},$$

$$\mathcal{M}_{33} = (3\gamma_{eff} - 4)x + 6z + 1 - y - \frac{3z}{y} - \frac{\sqrt{3}y^{5/2}}{\zeta_0(y + j^2z)^2} + \frac{3\alpha x}{2y}.$$

Para el punto crítico $(0, 0, 0)$ los eigenvalores son $4, -2, 4 - 3\gamma_{DE}$ y es un **punto silla** para todos los valores de γ_{DE} .

A.4.2. Caso $Q = 3H\beta\rho_m$

En este caso, las componentes de la matriz de perturbaciones \mathcal{M} toman la forma:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{11} &= 3(2x - 1)\gamma_{DE} + 3z - y - 8x + 4, \\
 \mathcal{M}_{12} &= -x - 3\beta, \\
 \mathcal{M}_{13} &= 3x, \\
 \mathcal{M}_{21} &= (3\gamma_{DE} - 4)y, \\
 \mathcal{M}_{22} &= 3\gamma_{DE}x + 3z - 2y - 4x + 1 + 3\beta, \\
 \mathcal{M}_{23} &= 3(y - 1), \\
 \mathcal{M}_{31} &= (3\gamma_{DE} - 4)z, \\
 \mathcal{M}_{32} &= -\frac{\sqrt{3y}z(y + 3j^2z)}{2\zeta_0(y + j^2z)^2} - \frac{3j^4z^2}{(y + j^2z)^2} - \frac{3y(y + 2j^2z)}{(y + j^2z)^2} - z + \frac{3z^2}{2y^2}, \\
 \mathcal{M}_{33} &= (3\gamma_{eff} - 4)x + 6z + 1 - y - \frac{3z}{y} - \frac{\sqrt{3y}^{5/2}}{\zeta_0(y + j^2z)^2} + \frac{3\beta}{2}.
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

El punto crítico $(0, 0, 0)$ tiene eigenvalores $4 - 3\gamma_{DE}$, $\frac{1}{4}(-3\sqrt{\beta^2 + 16} + 9\beta + 4)$, $\frac{1}{4}(3\sqrt{\beta^2 + 16} + 9\beta + 4)$.

El punto crítico $(1, 0, 0)$ tiene eigenvalores $3\gamma_{DE} - 4$, $\frac{3}{4}(-\sqrt{\lambda^2 + 16} + 3\beta + 4\gamma - 4)$, $\frac{3}{4}(\sqrt{\lambda^2 + 16} + 3\beta + 4\gamma - 4)$.

Los eigenvalores de $\left(-\frac{\beta\zeta_0^2(3\beta-17)^2(3\beta j^2+j^2+3)^2}{36(3\beta+1)^2(3\gamma-4)}, \frac{\zeta_0^2(3\beta-17)^2(3\beta j^2+j^2+3)^2}{108(3\beta+1)^2}, \frac{\zeta_0^2(3\beta-17)^2(3\beta j^2+j^2+3)^2}{324(3\beta+1)}\right)$ no se toman en consideración dado que incluyen términos con denominador j susceptibles a indefinirse, por lo que es imposible recuperar el régimen lineal de la teoría de Israel-Stewart.

A.4.3. Caso $\frac{\lambda\rho_m\rho_{DE}}{H}$

Finalmente, para este caso, la matriz de perturbaciones \mathcal{M} estará dada por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{11} &= 3(2x - 1)\gamma_{DE} + 3z - y - 8x + 4 - 3\lambda y, \\
 \mathcal{M}_{12} &= -x - 3\lambda x, \\
 \mathcal{M}_{13} &= 3x, \\
 \mathcal{M}_{21} &= (3\gamma_{DE} - 4)y + 3\lambda y, \\
 \mathcal{M}_{22} &= 3\gamma_{DE}x + 3z - 2y - 4x + 1 + 3\lambda x, \\
 \mathcal{M}_{23} &= 3(y - 1), \\
 \mathcal{M}_{31} &= (3\gamma_{DE} - 4)z + \frac{3\lambda z}{2}, \\
 \mathcal{M}_{32} &= -\frac{\sqrt{3y}z(y + 3j^2z)}{2\zeta_0(y + j^2z)^2} - \frac{3j^4z^2}{(y + j^2z)^2} - \frac{3y(y + 2j^2z)}{(y + j^2z)^2} - z + \frac{3z^2}{2y^2}, \\
 \mathcal{M}_{33} &= (3\gamma_{eff} - 4)x + 6z + 1 - y - \frac{3z}{y} - \frac{\sqrt{3y}^{5/2}}{\zeta_0(y + j^2z)^2} + \frac{3\lambda x}{2}.
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

El punto $R_1(0, 0, 0)$ existe para todos los valores de γ_{DE} y además no depende del parámetro λ . Corresponde a un universo dominado por radiación con $\Omega_r = 1$, $\Omega_m = 0$, $\Omega_{DE} = 0$ y $\gamma_{eff} = \frac{4}{3}$, por lo que nunca presenta expansión acelerada. Sus eigenvalores son 4, -2 y $4 - 3\gamma_{DE}$. Al analizarlos, se encuentra que es un **punto silla**.

El punto $R_2(1, 0, 0)$ es una solución de energía oscura dominante con $\Omega_{DE} = 1$ y $\gamma_{eff} = \gamma_{DE}$, de modo que presenta expansión acelerada para $\gamma_{DE} < \frac{2}{3}$. Sus eigenvalores son

$$3\gamma_{DE} - 4,$$

$$\frac{3}{4}(4\gamma - \sqrt{\lambda^2 + 16} + 3\lambda - 4)$$

y

$$\frac{3}{4}(4\gamma + \sqrt{\lambda^2 + 16} + 3\lambda - 4).$$

Del análisis de estabilidad obtenemos las siguientes condiciones:

- **Nodo estable:** Para que el punto crítico sea un nodo estable se debe cumplir

$$\lambda \leq \frac{1}{6}(-3 - \sqrt{73}) \quad y \quad \gamma_{DE} < \frac{4}{3}$$

o

$$\lambda > \frac{1}{6}(-3 - \sqrt{73}) \quad y \quad \gamma_{DE} < \frac{1}{4}(4 - 3\lambda) - \frac{\sqrt{\lambda^2 + 16}}{4}.$$

En ambos casos se cumple que $\gamma_{DE} < \frac{2}{3}$.

- **Punto silla:** Para que el punto crítico sea un punto silla se debe cumplir alguna de las siguientes condiciones.

•

$$\frac{1}{6}(-3 - \sqrt{73}) < \lambda \leq \frac{1}{6}(\sqrt{73} - 3) \quad y \quad \frac{1}{4}(4 - 3\lambda) - \frac{\sqrt{\lambda^2 + 16}}{4} < \gamma_{DE} < \frac{4}{3}$$

(se cumple $\gamma_{DE} < 2/3$) o

$$\lambda > \frac{1}{6}(\sqrt{73} - 3) \quad y \quad \frac{1}{4}(4 - 3\lambda) - \frac{\sqrt{\lambda^2 + 16}}{4} < \gamma_{DE} < \frac{\sqrt{\lambda^2 + 16}}{4} + \frac{1}{4}(4 - 3\lambda),$$

(no se cumple $\gamma_{DE} < 2/3$).

•

$$\lambda < \frac{1}{6}(-3 - \sqrt{73}) \quad y \quad \frac{4}{3} < \gamma_{DE} < \frac{1}{4}(4 - 3\lambda) - \frac{\sqrt{\lambda^2 + 16}}{4}.$$

En este caso tampoco se cumple que $\gamma_{DE} < 2/3$.

•

$$\lambda > \frac{1}{6}(\sqrt{73} - 3) \quad y \quad \frac{\sqrt{\lambda^2 + 16}}{4} + \frac{1}{4}(4 - 3\lambda) < \gamma_{DE} < \frac{4}{3}.$$

En este caso se cumple la condición $\gamma_{DE} < 2/3$.

•

$$\lambda \leq \frac{1}{6}(-3 - \sqrt{73}) \quad y \quad \frac{1}{4}(4 - 3\lambda) - \frac{\sqrt{\lambda^2 + 16}}{4} < \gamma_{DE} < \frac{\sqrt{\lambda^2 + 16}}{4} + \frac{1}{4}(4 - 3\lambda)$$

o

$$\frac{1}{6}(-3 - \sqrt{73}) < \lambda < \frac{1}{6}(\sqrt{73} - 3) \quad y \quad \frac{4}{3} < \gamma_{DE} < \frac{\sqrt{\lambda^2 + 16}}{4} + \frac{1}{4}(4 - 3\lambda).$$

En ninguno de los dos casos se cumple $\gamma_{DE} < 2/3$.

- **Nodo inestable:** El punto crítico será un nodo inestable si se cumple alguna de las siguientes condiciones.

$$\lambda \leq \frac{1}{6}(\sqrt{73} - 3) \quad y \quad \gamma_{DE} > \frac{\sqrt{\lambda^2 + 16}}{4} + \frac{1}{4}(4 - 3\lambda)$$

o

$$\lambda > \frac{1}{6}(\sqrt{73} - 3) \quad y \quad \gamma_{DE} > \frac{4}{3}.$$

- **Espiral estable:** Para que el punto crítico sea una espiral estable, se debe cumplir aparte que

$$\lambda < \frac{1}{6}(-\sqrt{73} - 3) \quad y \quad \left(\gamma < \frac{4}{3} \quad o \quad \frac{1}{4}(4 - 3\lambda) - \frac{\sqrt{\lambda^2 + 16}}{4} < \gamma < \frac{\sqrt{\lambda^2 + 16}}{4} + \frac{1}{4}(4 - 3\lambda) \right)$$

o

$$\lambda = \frac{1}{6}(-\sqrt{73} - 3) \quad y \quad \left(\gamma < \frac{4}{3} \quad o \quad \frac{4}{3} < \gamma < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}(\sqrt{73} + 3) + 4 \right) + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{36}(-\sqrt{73} - 3)^2 + 16} \right)$$

o

$$\frac{1}{6}(-\sqrt{73} - 3) < \lambda < \frac{1}{6}(\sqrt{73} - 3) \quad y \quad \left(\gamma < \frac{1}{4}(4 - 3\lambda) - \frac{\sqrt{\lambda^2 + 16}}{4} \quad o \quad \frac{4}{3} < \gamma < \frac{\sqrt{\lambda^2 + 16}}{4} + \frac{1}{4}(4 - 3\lambda) \right)$$

o

$$\lambda = \frac{1}{6}(\sqrt{73} - 3) \text{ y } \gamma < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}(3 - \sqrt{73}) + 4\right) - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{36}(\sqrt{73} - 3)^2 + 16} \text{ o}$$
$$\lambda > \frac{1}{6}(\sqrt{73} - 3) \text{ y } \left(\gamma < \frac{1}{4}(4 - 3\lambda) - \frac{\sqrt{\lambda^2 + 16}}{4} \text{ o } \frac{\sqrt{\lambda^2 + 16}}{4} + \frac{1}{4}(4 - 3\lambda) < \gamma < \frac{4}{3}\right).$$

El punto $R_3\left(-\frac{1}{3\lambda}, \frac{4-3\lambda}{3\lambda}, 0\right)$ es una **solución escalada** ya que coexisten materia oscura viscosa y energía oscura. Dado que existen denominadores λ , R_3 no permite regresar al caso sin interacción y por lo tanto no es una solución física.

Apéndice B

Proyecciones de las líneas de flujo

En las figuras B.1 - B.15 se presentan proyecciones de las líneas de flujo en la proximidad del punto crítico R_2 con $\gamma_{DE} = 0$ y distintos valores de λ para los que R_2 es un nodo estable

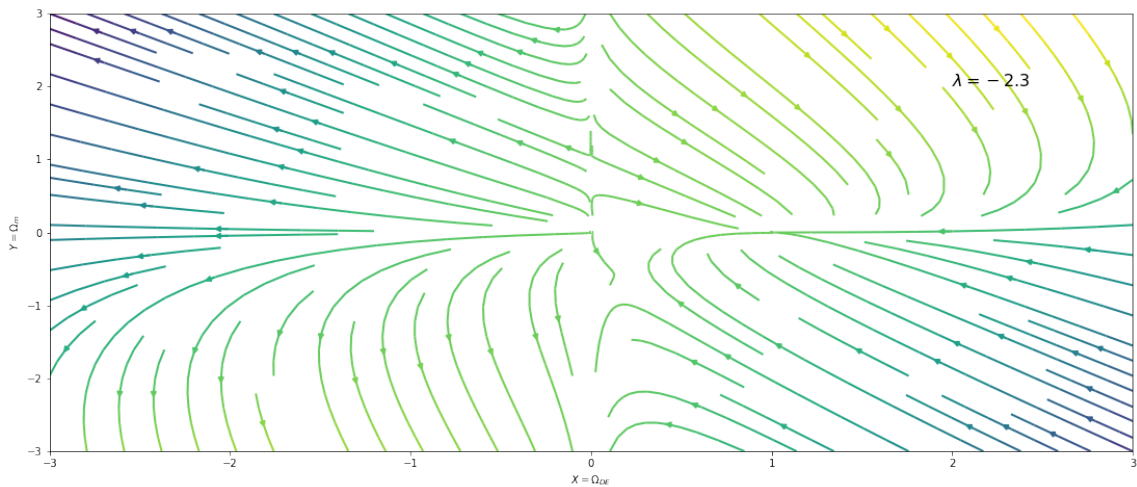


Figura B.1: Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano xy . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -2,3$ corresponden a un nodo estable.

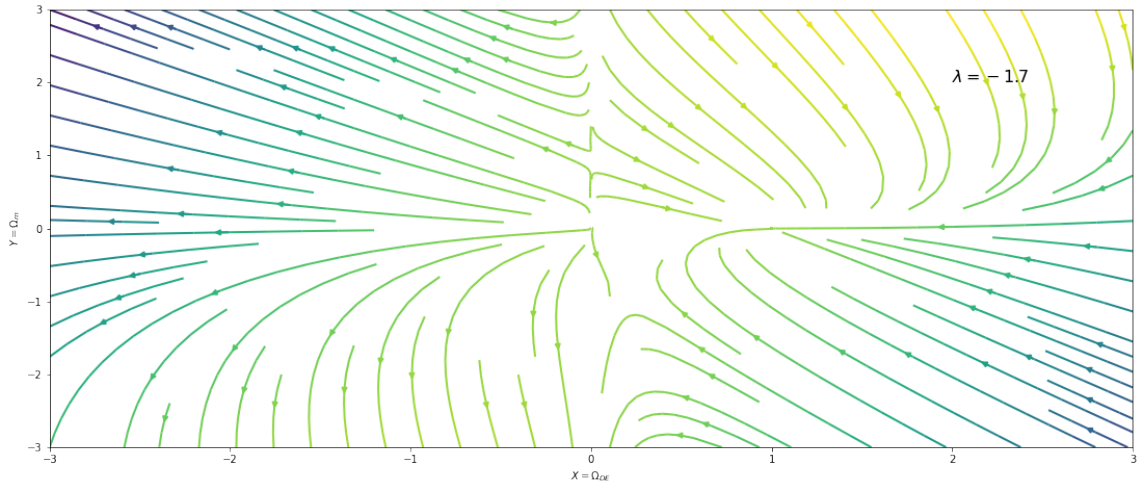


Figura B.2: Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano xy . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -1,7$ corresponden a un nodo estable.

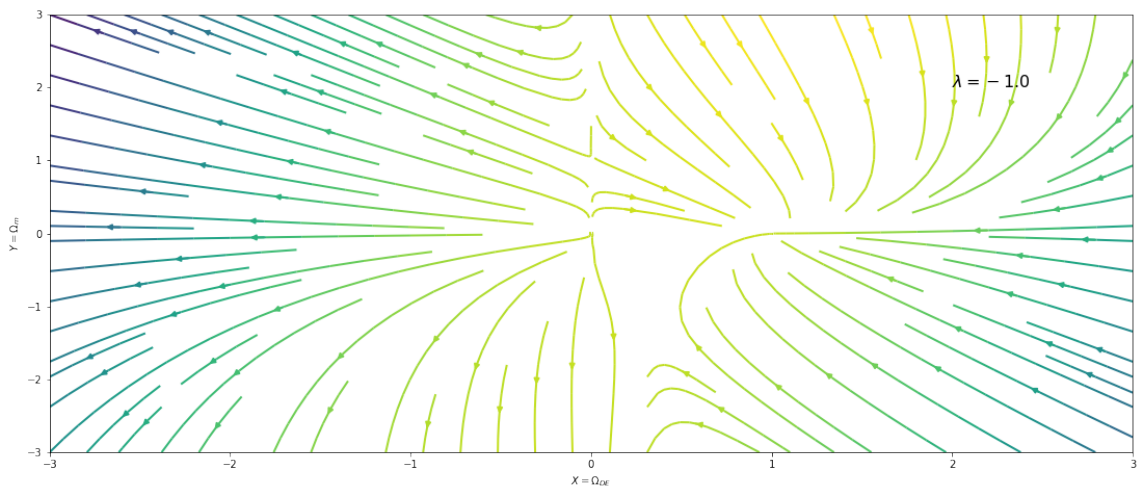


Figura B.3: Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano xy . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -1,0$ corresponden a un nodo estable.

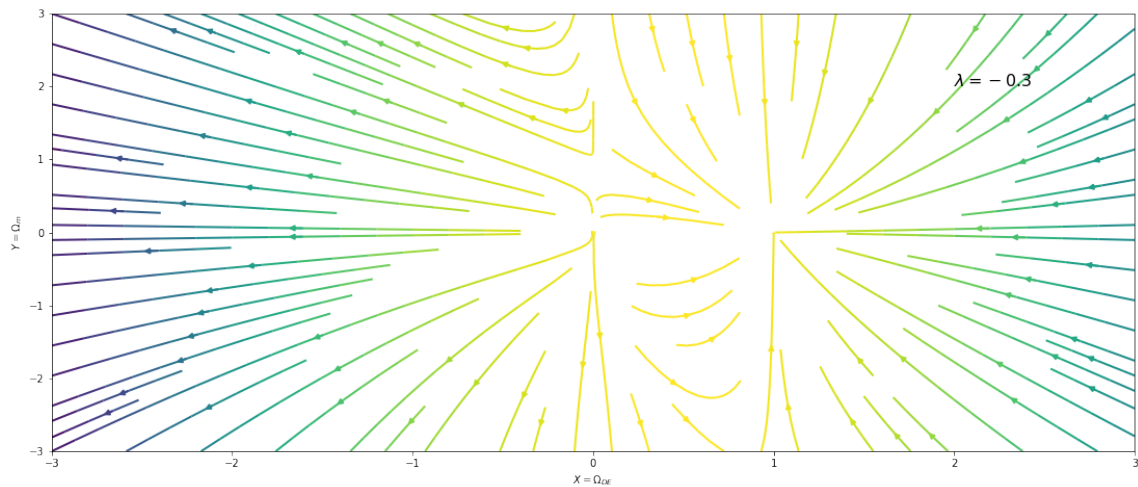


Figura B.4: Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano xy . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -0,3$ corresponden a un nodo estable.

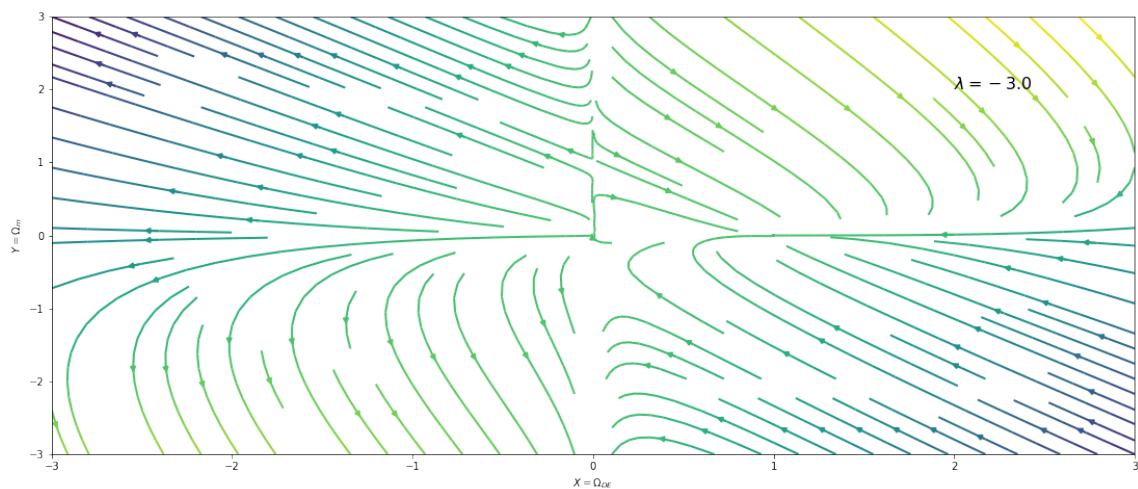


Figura B.5: Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano xy . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -3,0$ corresponden a un nodo estable.

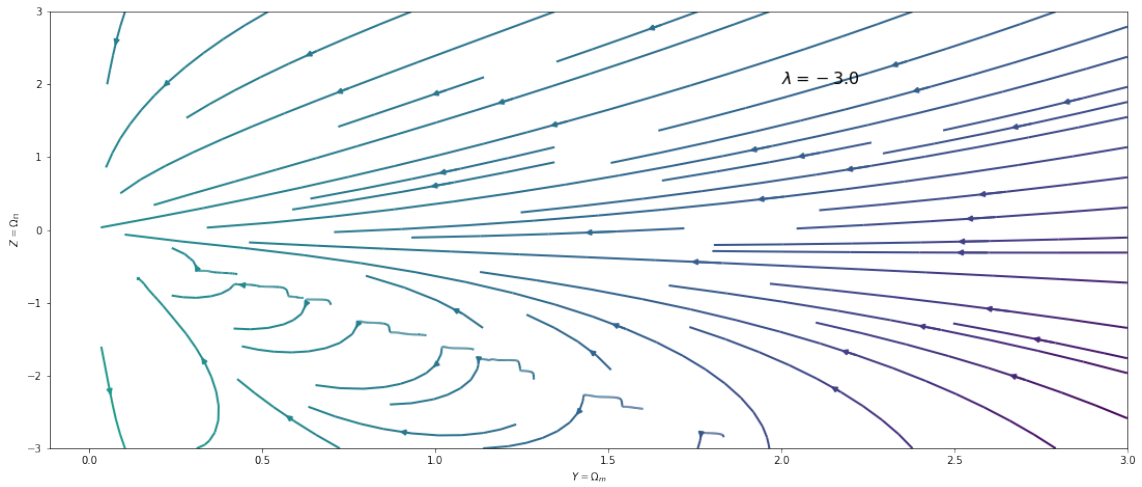


Figura B.6: Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano yz . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -3,0$ corresponden a un nodo estable.

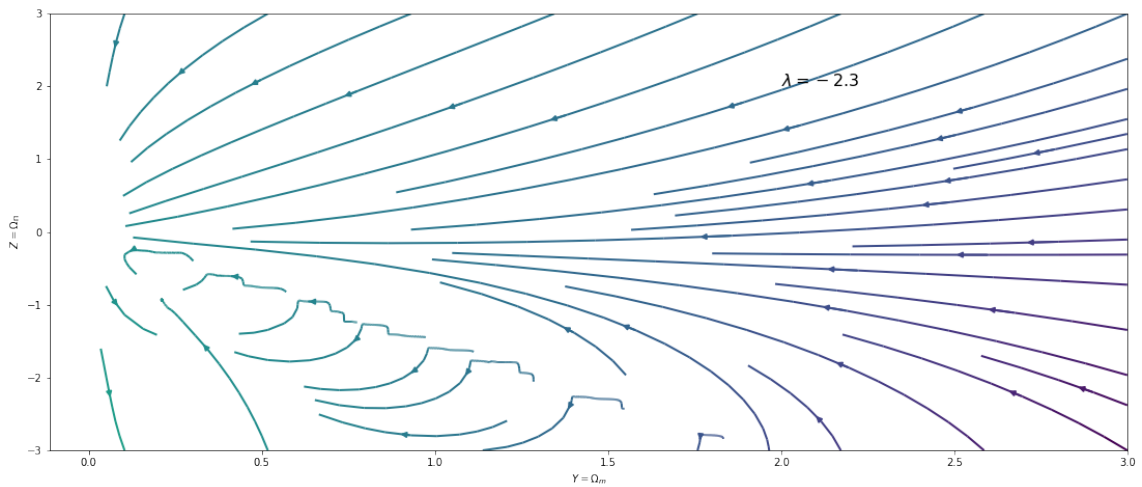


Figura B.7: Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano yz . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -2,3$ corresponden a un nodo estable.

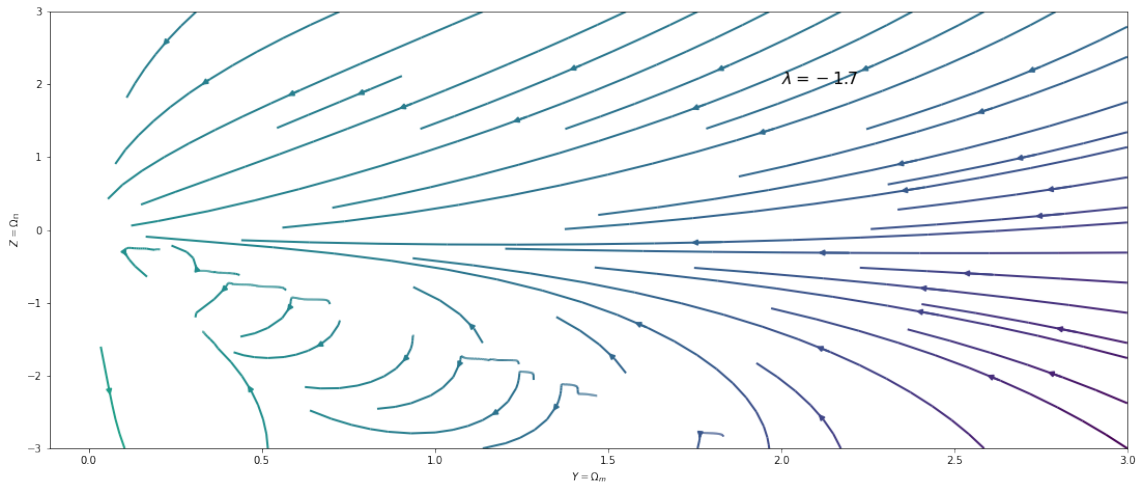


Figura B.8: Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano yz . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -1,7$ corresponden a un nodo estable.

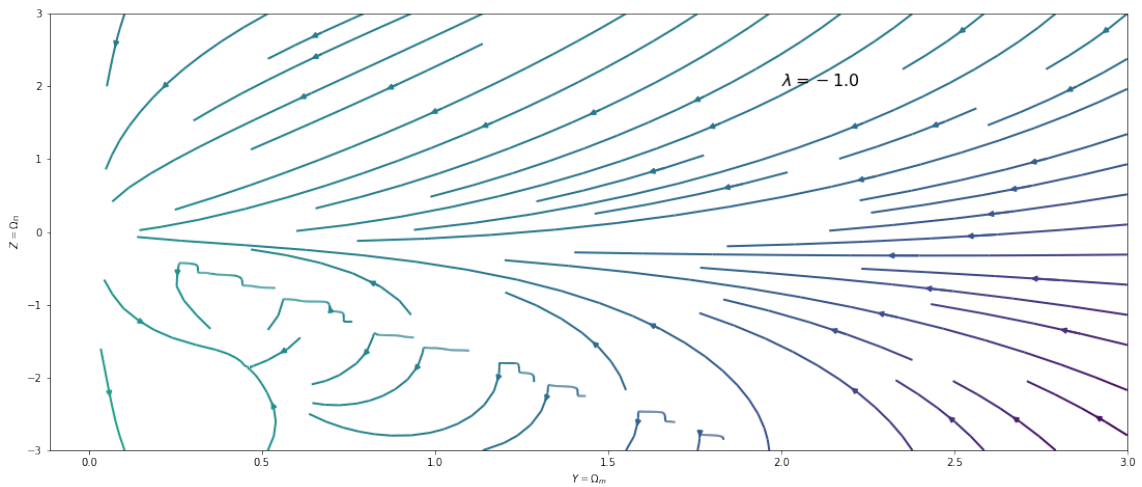


Figura B.9: Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano yz . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -1,0$ corresponden a un nodo estable.

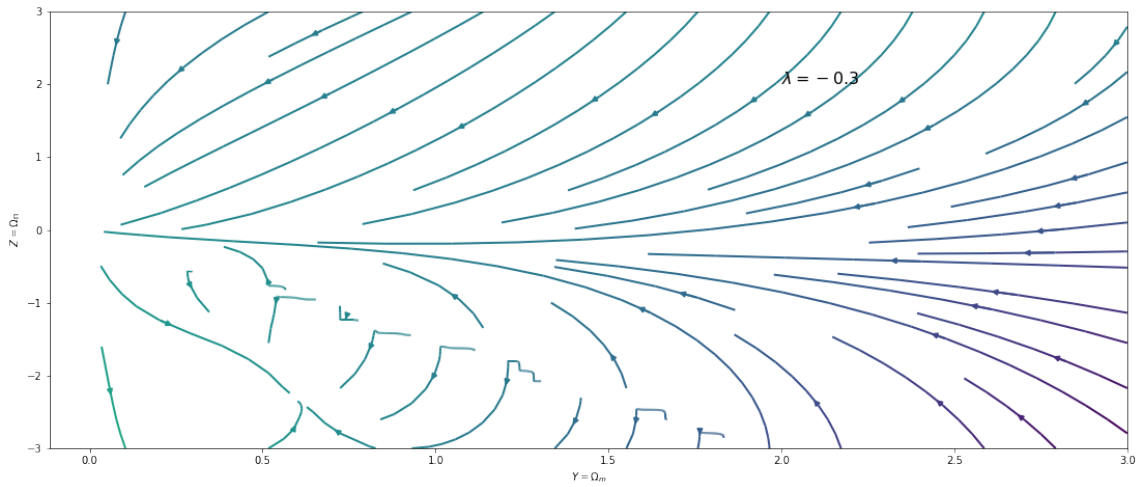


Figura B.10: Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano yz . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -0,3$ corresponden a un nodo estable.

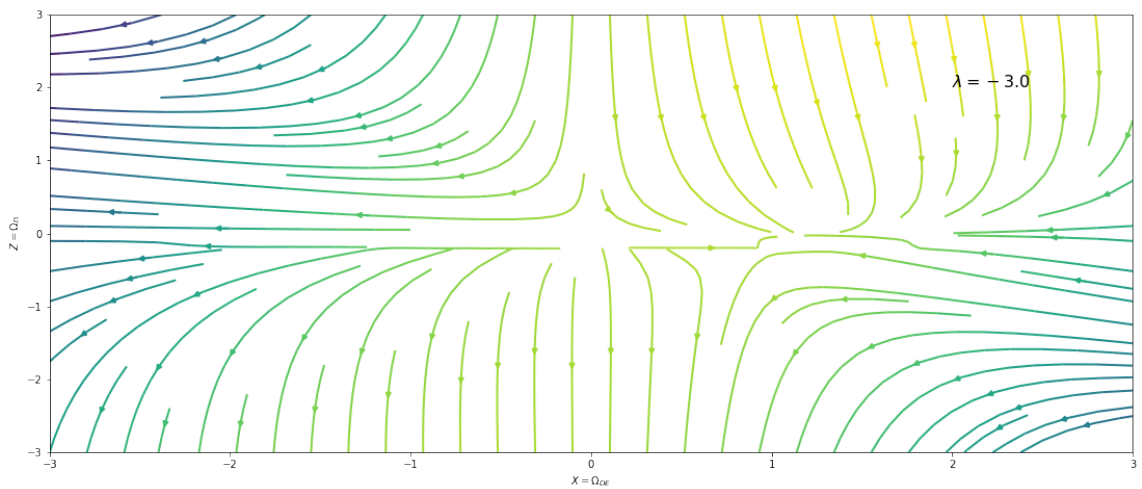


Figura B.11: Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano xz . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -3,0$ corresponden a un nodo estable.

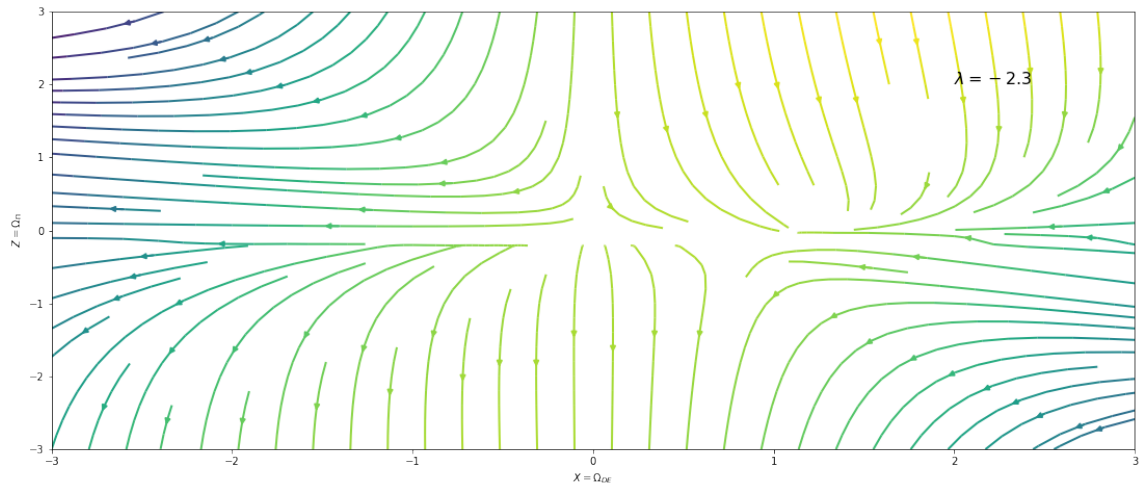


Figura B.12: Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano xz . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -2,3$ corresponden a un nodo estable.

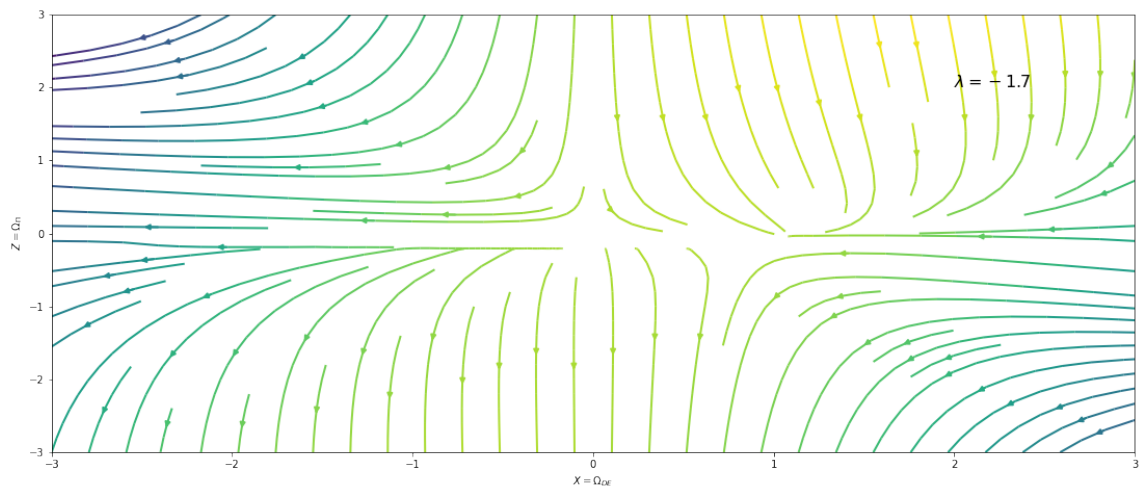


Figura B.13: Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano xz . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -1,7$ corresponden a un nodo estable.

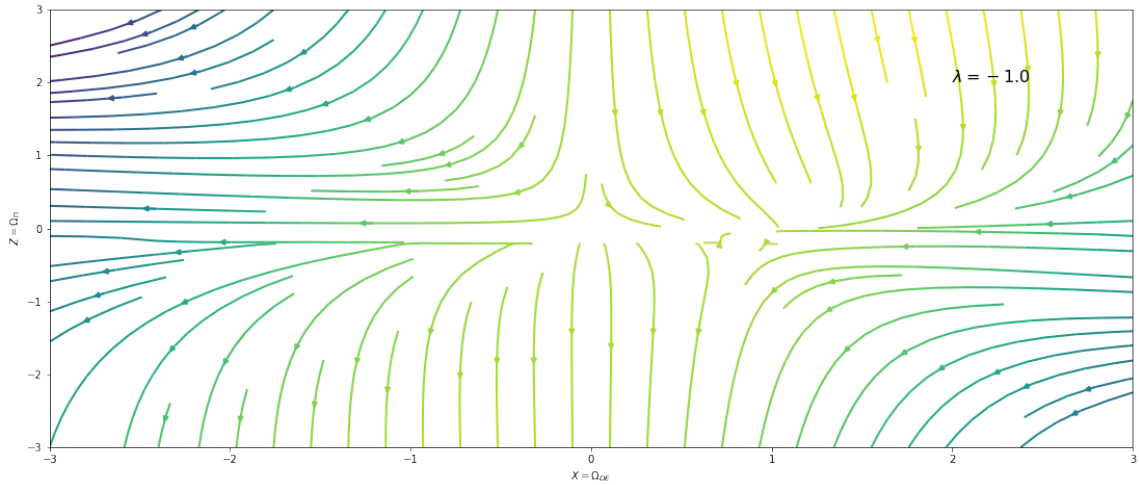


Figura B.14: Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano xz . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -1,0$ corresponden a un nodo estable.

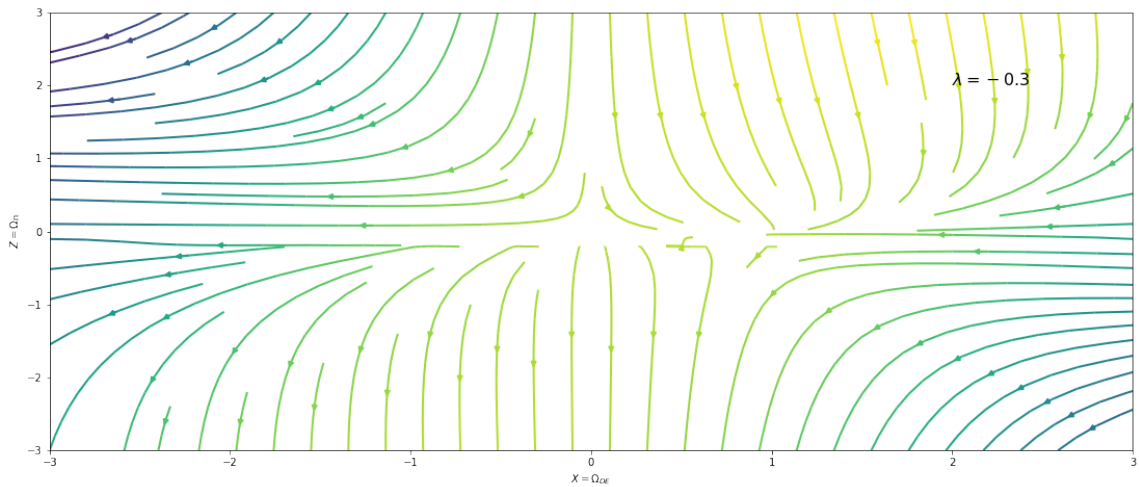


Figura B.15: Proyección de las líneas de flujo alrededor del punto R_2 en el plano xz . Los valores de los parámetros $\gamma_{DE} = 0$ y $\lambda = -0,3$ corresponden a un nodo estable.

Bibliografía

- [1] N Suzuki, D Rubin, C Lidman, G Aldering, R Amanullah, K Barbary, LF Barrientos, J Botyanszki, M Brodwin, N Connolly, et al. The Hubble Space Telescope cluster supernova survey. V. Improving the dark-energy constraints above $z > 1$ and building an early-type-hosted supernova sample. *The Astrophysical Journal*, 746(1):85, 2012.
- [2] Juan Magana, Mario H. Amante, Miguel A. Garcia-Aspeitia, and V. Motta. The Cardassian expansion revisited: constraints from updated Hubble parameter measurements and type Ia supernova data. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 476:1036, 2018.
- [3] Ankan Mukherjee. Acceleration of the universe: a reconstruction of the effective equation of state. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 460:273, 2016.
- [4] Charles L Bennett, Davin Larson, Janet L Weiland, N Jarosik, G Hinshaw, N Odegard, KM Smith, RS Hill, B Gold, M Halpern, et al. Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: final maps and results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 208(2):20, 2013.
- [5] Edwin Hubble. A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 15:168–173, 1929.
- [6] Pierre Astier and Reynald Pain. Observational Evidence of the Accelerated Expansion of the Universe. *astro-ph. 1204.5493*, 2012.
- [7] Edmund J. Copeland, M. Sami, and Shinji Tsujikawa. Dynamics of dark energy. *Int. J. Mod. Phys.*, D15:1753–1936, 2006.

-
- [8] T. Padmanabhan. Cosmological constant: The Weight of the vacuum. *Phys. Rept.*, 380:235–320, 2003.
- [9] E. Kolb and M. Turner. *The early universe*. Taylor and Francis group, 1990.
- [10] Llorenç Espinosa-Portales and Juan García-Bellido. 'Covariant formulation of non-equilibrium thermodynamics in General Relativity. *Physics of the Dark Universe*, 34:100893, 2021.
- [11] Juan García-Bellido and Llorenç Espinosa-Portales. Cosmic acceleration from first principles. *Phys. Dark Univ.*, 34:100892, 2021.
- [12] Winfried Zimdahl, Diego Pavon, and Josep Triginer. Cosmology with bulk pressure. *Helv. Phys. Acta*, 69:225–228, 1996.
- [13] S. Perlmutter et al. Measurements of Ω and Λ from 42 high redshift supernovae. *Astrophys. J.*, 517:565–586, 1999.
- [14] Adam G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J.*, 116:1009–1038, 1998.
- [15] Winfried Zimdahl. Understanding cosmological bulk viscosity. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 280:1239, 1996.
- [16] Carl Eckart. The Thermodynamics of Irreversible Processes. III. Relativistic Theory of the Simple Fluid. *Phys. Rev.*, 58:919–924, Nov 1940.
- [17] W. Israel and J. M. Stewart. Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory. *Annals Phys.*, 118:341–372, 1979.
- [18] Norman Cruz, Esteban González, Samuel Lepe, and Diego Sáez-Chillón Gómez. Analysing dissipative effects in the Λ CDM model. *JCAP*, 12:017, 2018.
- [19] Roy Maartens. Dissipative cosmology. *Class. Quant. Grav.*, 12:1455–1465, 1995.
- [20] Roy Maartens. Causal thermodynamics in relativity. In *Lectures given at the Hanno Rund Workshop on Relativity and Thermodynamics, University of Natal.*, 9 1996.

-
- [21] Roy Maartens and Vicenc Mendez. Nonlinear bulk viscosity and inflation. *Phys. Rev. D*, 55:1937–1942, 1997.
- [22] Fabio S. Bemfica, Marcelo M. Disconzi, and Jorge Noronha. Causality of the Einstein-Israel-Stewart Theory with Bulk Viscosity. *Phys. Rev. Lett.*, 122(22):221602, 2019.
- [23] Christian G. Boehmer and Nyein Chan. Dynamical systems in cosmology. In *LTCC Advanced Mathematics Series: Volume 5 Dynamical and Complex Systems*, pp. 121-156 (2017), 2014.
- [24] Samuel Lepe, Giovanni Otalora, and Joel Saavedra. Dynamics of viscous cosmologies in the full Israel-Stewart formalism. *Phys. Rev. D*, 96(2):023536, 2017.
- [25] Arturo Avelino, Yoelsy Leyva, and L. Arturo Urena-Lopez. Interacting viscous dark fluids. *Phys. Rev. D*, 88:123004, 2013.
- [26] J. N. Islam. *Introduction to mathematical cosmology*. Cambridge University Press, 2001.
- [27] Silvio Bonometto, Vittorio Gorini, and Ugo Moschella. *Modern cosmology*. IOP publishing, 2002.
- [28] Andrew Liddle and David H. Lyth. *Cosmological inflation and large-scale structure*. Cambridge University Press, 2000.
- [29] Matt Roos. *Introduction to cosmology*. John Wiley and Sons, Ltd., 2003.
- [30] Andrew Liddle. *An introduction to modern cosmology*. John Wiley and Sons, Ltd., 2003.
- [31] S. Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2003.
- [32] G. Ellis, R. Maartens, and M. Maccallum. *Relativistic Cosmology*. Cambridge University Press, 2012.
- [33] V. Mukhanov. *Physical foundations of cosmology*. Cambridge University Press, 2005.

-
- [34] Steven Weinberg. *The first three minutes*. Fontana paperbacks, 1976.
- [35] A. D. Dogov, M. V. Sazhin, and Ya. B. Zeldovich. *Basics of modern cosmology*. Edittions Frontieres, 1990.
- [36] A. Guth. D 23, 347. *Phys. Rev*, 1981.
- [37] Miguel Cruz, Norman Cruz, and Samuel Lepe. Phantom solution in a non-linear Israel–Stewart theory. *Phys. Lett.*, B769:159–165, 2017.
- [38] Miguel Cruz, Norman Cruz, and Samuel Lepe. Accelerated and decelerated expansion in a causal dissipative cosmology. *Phys. Rev.*, D96(12):124020, 2017.
- [39] Miguel Cruz, Samuel Lepe, and Sergei D. Odintsov. Thermodynamically allowed phantom cosmology with viscous fluid. *Phys. Rev.*, D98(8):083515, 2018.
- [40] N. D Jerin Mohan, Athira Sasidharan, and Titus K. Mathew. Bulk viscous matter and recent acceleration of the universe based on causal viscous theory. *Eur. Phys. J.*, C77(12):849, 2017.
- [41] J. Bernstein. *Kinetic theory in the expanding universe*. Cambridge University Press, 2003.
- [42] Michael Kopp, Constantinos Skordis, and Dan B. Thomas. Extensive investigation of the generalized dark matter model. *Phys. Rev. D*, 94(4):043512, 2016.
- [43] Jessica N. López-Sánchez, Erick Munive-Villa, Ana Avilez-López, and Oscar M. Martínez-Bravo. Compact groups in GDM cosmological simulations. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 515(3):3199–3211, 2022.
- [44] Eleonora Di Valentino, Olga Mena, Supriya Pan, Luca Visinelli, Weiqiang Yang, Alessandro Melchiorri, David F. Mota, Adam G. Riess, and Joseph Silk. In the realm of the Hubble tension—a review of solutions. *Class. Quant. Grav.*, 38(15):153001, 2021.
- [45] A. Coley. *Dynamical systems and cosmology*. Springer Science + Business Media, 2003.

-
- [46] Miguel Quartin, Mauricio O. Calvao, Sergio E. Joras, Ribamar R. R. Reis, and Ioav Waga. Dark Interactions and Cosmological Fine-Tuning. *JCAP*, 05:007, 2008.
- [47] Winfried Zimdahl and Diego Pavón. Scaling cosmology. *Gen. Rel. Grav.*, 35:413–422, 2003.
- [48] B. Wang, E. Abdalla, F. Atrio-Barandela, and D. Pavon. Dark Matter and Dark Energy Interactions: Theoretical Challenges, Cosmological Implications and Observational Signatures. *Rept. Prog. Phys.*, 79(9):096901, 2016.