

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA



FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSGRADO EN FÍSICA APLICADA

**DEPENDENCIA DEL TIEMPO EN
COSMOLOGÍA CUÁNTICA PARA
EL MODELO DE FLRW CON UN
CAMPO ESCALAR**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE MAESTRO EN FÍSICA APLICADA

PRESENTA

HERNÁN CORTEZ ESPINOZA

ASESOR: DR. CUPATITZIO RAMÍREZ ROMERO

PUEBLA, PUE.

ENERO 2023

DEDICATORIA

A mi familia, a mis amigos ... A tí, que lees esta tesis. Espero que sirva como material de apoyo a tu trabajo ...

Agradecimientos

Devoción.

*No entiendo porque después de tanto tiempo
aún logres despertar las más bellas pasiones dentro de mí.*

*¿Cómo es que, sin permiso alguno
entras como ladrón en el fondo de mis pensamientos?*

¿Debería acaso poner una alarma?

Por supuesto que sí.

Pero arruinaría la sorpresa de descubrir

la magia de tus espacios,

de cómo me elevas con tan poco

y me haces sentir fuera de este mundo.

Sé que a veces me haces mal, lo admito.

No soy el mismo sin tu presencia

pero sabes que siempre que vuelvas a mí

aunque sea unos instantes,

me haces sentir

el más dichoso de todos los mortales.

Este es el resultado de muchos años de estar en el camino de la ciencia. Muchas veces he querido renunciar y hasta me he sentido insuficiente o que la playera me quedó muy grande. Tal vez sea así, pero ustedes me hacen recordar que uno no hace ciencia para pararse frente al mundo y alardear de lo bueno que es, si no porque uno ama descubrir cada día un poco de la naturaleza, emocionarse como niño y que si no fuera porque uno tiene de que trabajar de manera honesta y ganarse el bolillo del día a día, con gusto dedicaría mi vida entera a esta actividad sin remuneración alguna. He aquí un pedacito de mis agradecimientos.

Nuevamente agradezco a mi familia; a mis padres Marcia Espinoza y Fidel Cortez por apoyarme nuevamente en esta aventura sobre todo en estos tiempos de pandemia que nos tocó vivir. A mis hermanos Aldo, Andrés, a mi cuñada Sofia y a la pequeña Anie. Mucho de lo que tengo o soy en parte se lo debo a ustedes.

A mi asesor, el Dr. Cupatitzio Ramírez Romero por tomarme bajo su tutela y tener

la paciencia y la comprensión para explicarme los nuevos temas que tuve que ver y que fue complicado, así como también las consideraciones y el apoyo que tuvo en algún momento para un servidor. A mis sinodales, el Dr. Gerardo Torres del Castillo, el Dr. Victor Vázquez Báez, la Dra. Ana Avilez López y el Dr. Neftalí Martínez por las observaciones realizadas a lo largo de este trabajo.

A mis profesores de la facultad conocidos y algunos ya por conocer en esta etapa: Mercedes Velázquez, Héctor Novales, Gilberto Silva, Martha Palomino, Ana Avilez, Cecilia Uribe, ... La ayuda de un profesor siempre es invaluable, sirve como faro en un mar de conocimientos donde uno anda a la deriva y no sabe a donde ir.

A Katy, Brenda, Julia, Gerardo, Heccarí, Lizeth, Ana -Badillo-, Gaby, Jessy, Nayeli, Tania, Lore, Óscar, Esmeralda -Zúñiga-, ... Su apoyo a lo largo de estos años me ha ayudado a ver lo bueno y lo malo de las situaciones o que incluso no todo es de dos tintas, si no que hay más tonalidades en esta vida. Gracias por el profundo cariño que le guardan a uno.

A Maru, por nuevamente apoyarme en mi tratamiento. Por recordarme el valor de lo que hago, de lo que soy, por no dejarme caer y darme tantos ánimos en estos últimos meses ...

A mis muy queridos estudiantes; Alexia, Marlene, Alan, Moises, Ali, ... Porque aún a pesar de mis deficientes habilidades como profesor, encuentran en mi confianza y al igual que yo, siguen su camino. De todo corazón, espero verlos un día de este lado. Ánimo, no se dejen vencer, tengo toda mi fé en ustedes.

A Ana -Flores-, quien durante el último año llego a enseñarme valiosas lecciones de vida. Sobre que debo y no debo hacer, pero sobre todo por recordarme el mucho amor que me debo procurar a mi mismo siempre. Gracias por todo.

No menos importantes, a todos los amigos que he hecho a través de DC DancEri. No caben todos aquí, pero de antemano, les estoy agradecido por los buenos momentos, las risas, los nervios a la hora de las presentaciones ... En fín. Les deseo lo mejor en su desarrollo profesional y en su vida personal. Ojalá y podamos seguir en contacto y disfrutar la pasión por los ritmos latinos.

Un agradecimiento especial a la Facultad de Ciencias Fisico Matematicas de la BUAP por abrigarme nuevamente. Al CONACYT por apoyarme en mis gastos de manutencion en los ultimos dos años y a todo el pueblo de México, que deposita su confianza en mi y muchos otros becarios para llevar adelante a la ciencia, por ver en nosotros el futuro de la ciencia de nuestro país. Espero devolver todo lo que se me ha dado.

Resumen

La cosmología cuántica se basa en la ecuación de Wheeler-DeWitt, que proviene de la constricción hamiltoniana, por lo que no permite hallar una función de onda dependiente del tiempo. En [Ramírez, Vázquez-Báez, 2016] se propone una manera de obtener trayectorias para las observables a partir de la ecuación de Wheeler-DeWitt. Para este trabajo, se propone estudiar las soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt; estas se interpretan como funciones de onda en la representación de la “posición” y a partir de ellas, es posible hallar una amplitud de probabilidad en el espacio (a, φ) , donde a es el factor de escala y φ es el escalar. Se busca identificar los valores medios del factor de escala con trayectorias. Si la parametrización es correcta, deberá haber una correspondencia uno a uno con el tiempo.

Palabras clave: Observable, ecuación, probabilidad, media, escala, escalar.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	V
1. Introducción	1
2. Fundamento teórico	3
2.1. El algoritmo de Dirac para sistemas singulares	3
2.1.1. El principio de mínima acción y las ecuaciones de Euler-Lagrange	3
2.2. Sistemas singulares	4
2.2.1. Constricciones primarias	4
2.2.2. El Hamiltoniano canónico H_0	5
2.2.3. Principio de acción del Hamiltoniano primario H_p	7
2.2.4. Constricciones secundarias, terciarias, etc.	7
2.2.5. Constricciones de primera y segunda clase.	8
2.3. La Lagrangiana de Relatividad General	9
2.3.1. La formulación ADM de relatividad general	11
2.3.2. La Lagrangiana reducida	12
2.3.3. Análisis canónico	13
2.3.4. El campo escalar	14
2.4. Ecuaciones diferenciales parciales	15
2.4.1. El metodo de diferencias finitas	15
3. Solución analítica de la ecuación de Wheeler-DeWitt	19
3.1. Introducción	19
3.2. Solución analítica	19
4. Análisis numérico de la ecuación de Wheeler-DeWitt	25
4.1. Discretización de la ecuación de WDW	25
4.2. Resultados: Diagramas de la función de onda	27
4.2.1. Primer caso	27
4.2.2. Segundo caso	29
4.2.3. Tercer caso	33

5. Conclusiones	47
A. Cálculos de Mathematica	49
Bibliografía	51

Capítulo 1

Introducción

La mecánica cuántica y la teoría de la relatividad (especial y general) fueron las dos ramas protagonistas de la física en el siglo pasado; gracias a ellas se comprendió lo que sucede en el mundo a nivel microscópico como a grandes escalas. En particular, hablando de la relatividad general, dos de sus grandes triunfos han sido la predicción de que el espacio, bajo la presencia de materia se curva; hecho comprobado por primera vez en la observación de un eclipse total de Sol hecha por Sir Arthur Eddington en 1919. La otra, más recientemente en septiembre de 2015 fue la confirmación de la existencia de ondas gravitacionales hechas por el equipo de LIGO.

Por parte de relatividad general, se presenta análisis a la ecuación de Einstein; el propio Einstein en 1917 desarrolló un modelo de un universo estático con la introducción de una *constante cosmológica*. Un año más tarde, DeSitter muestra que un universo dominado por una constante cosmológica está en expansión constante. Luego Friedmann (1922), Lemaitre (1927), Robertson y Walker (1935) hallaron de manera independiente una solución de la ecuación de Einstein. La peculiaridad de esta solución es que se trataba de un universo dinámico, es decir, primero pasó por una expansión y dependiendo de su densidad inicial, continuaría en una eterna expansión o llegaría a comprimirse, de acuerdo a la ley de Hubble. En la literatura, se le llama usualmente la solución FRLW. Esta solución es importante debido a que sobre ella yacen los fundamentos de las teorías de la cosmología clásica moderna, las cuales se combinan con la existencia de una constante cosmológica. Si bien es cierto que la solución original de Friedmann no describe el universo, es importante aprender de ello para poder entender las teorías cosmológicas modernas.

El desarrollo de la teoría cuántica debida principalmente a Schrödinger, Dirac y Heisenberg en la década de 1920 - 1930. Como ya se ha dicho, su desarrollo fue motivado por comprender que sucede a nivel microscópico, a escala de los átomos y demás partículas conocidas hasta ese entonces. Surge la pregunta ¿Hasta qué escala es aplicable? ¿Al tamaño de grandes moléculas? ¿Al laboratorio mismo donde se hacen estas pruebas? ¿A un planeta completo o sistemas planetarios? Es entonces donde se propone estudiar al Universo mismo. Considerando además la conjetura de un origen singular del universo,

se llega al dominio de la cosmología cuántica.

La cosmología cuántica es la aplicación de la mecánica cuántica al universo mismo, visto como un todo; probablemente no surgió como un problema fundamental de estudio, si no como un intento de cuantizar una teoría clásica más. Los primeros trabajos referentes surgieron en la década de 1960 con DeWitt (1967), Misner (1969) y Wheeler (1963, 1968). Bajo este análisis, la ecuación de Wheeler-DeWitt es el punto de partida en el estudio de la cosmología cuántica. Es el caso que se considera en esta tesis; esta ecuación está caracterizada por la dependencia del factor de escala a y el campo escalar φ . Se consideran las soluciones numéricas usando el método de diferencias finitas, así como una solución analítica, para el potencial del campo escalar $V(\varphi) = V_0$ constante. En el capítulo 2 se presenta el fundamento teórico para comenzar a estudiar este problema. En el capítulo 3 se describe la solución analítica de la ecuación de Wheeler-DeWitt y en el capítulo 4 el análisis numérico que se hizo, así como algunos de los diagramas obtenidos en el espacio (a, φ) . Finalmente en el capítulo 5 se dan las conclusiones obtenidas hasta ahora y el trabajo a futuro con lo que se ha obtenido hasta la fecha. adicionalmente en el capítulo 4, se incluyen las líneas de código en MatLab que se usaron para el análisis numérico.

Capítulo 2

Fundamento teórico

2.1. El algoritmo de Dirac para sistemas singulares

2.1.1. El principio de mínima acción y las ecuaciones de Euler-Lagrange

Para comenzar a hablar de sistemas con constricciones, se parte del principio de acción en su forma Lagrangiana.

Las ecuaciones de movimiento de un sistema son aquellas que se derivan a partir de que la acción¹

$$S[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt \quad (2.1)$$

es estacionaria (máxima o mínima) bajo variaciones $\delta q^i(t)$ de las variables Lagrangianas $q^i (i = 1, \dots, n)$, punto de silla las cuales son cero en los puntos t_0, t_1 .

En otras palabras, para un sistema físico, uno puede imaginarse las distintas trayectorias $\mathbf{q}(t)$ en el espacio de configuración que parten desde $\mathbf{q}(t_0)$ y terminan en $\mathbf{q}(t_1)$, cada una de ellas lleva a un valor distinto de la acción, pero la trayectoria $\mathbf{q}(t)$ que tiene relevancia física es aquella en la que el valor de la acción es estacionario.

Usando los métodos del cálculo variacional, se obtiene que la función $\mathbf{q}(t)$ que satisface el principio de Hamilton es la que satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

para la acción $S[\mathbf{q}(t)]$. A las derivadas $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ se les conoce como los **momentos generalizados** mientras que $\frac{\partial L}{\partial q^i}$ se conocen como las **fuerzas generalizadas**.

¹A lo largo de este texto, aquellas variables en negritas son considerados vectores; a sus componentes no se les resalta en las ecuaciones.

A través de una transformada de Legendre, el sistema de n ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange de segundo orden pasa a ser un sistema de $2n$ ecuaciones de primer orden, llamadas **ecuaciones de Hamilton**

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \\ \dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}},\end{aligned}$$

donde $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ es la transformada de Legendre de la Lagrangiana, vista como una función de $\dot{\mathbf{q}}$.

Ambos sistemas de ecuaciones son equivalentes; el uso de uno u otro depende de la conveniencia de uno al momento de resolver las ecuaciones de movimiento.

2.2. Sistemas singulares

2.2.1. Constricciones primarias

De manera general, las ecuaciones de Lagrange se pueden reescribir de la siguiente forma ²:

$$W_{ij}(q, \dot{q})\ddot{q}^j + K_i(q, \dot{q}) = 0; \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (2.3)$$

donde $K_i(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i \partial t} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} \dot{q}^j$ y $W_{ij}(q, \dot{q}) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}$ es un elemento de la **matriz Hessiana**. Visto de esta forma, las ecuaciones de Lagrange forman un sistema de ecuaciones lineales para las aceleraciones de tal manera que, para que exista una solución única a este sistema, se debe cumplir la condición que:

$$\det(W_{ij}) \neq 0. \quad (2.4)$$

A aquellos sistemas que cumplen la condición se les conoce como *sistemas regulares*. Esto significa que las aceleraciones tendrán una solución única y la transformada de Legendre puede realizarse sin mayor problema; los momentos son expresados en una relación uno a uno con las velocidades generalizadas y puede hallarse la función hamiltoniana. En otro caso, si

$$\det(W_{ij}) = 0, \quad (2.5)$$

se dice que el sistema dinámico es un *sistema singular*.

A partir de la definición de momentos generalizados, si se cumple la condición (2.4), los momentos pueden escribirse en términos de las coordenadas y velocidades generalizadas. En caso contrario se observa que no todas las velocidades pueden ser expresadas

²Para referirse a esta notación, véase [Rothe and Rothe, 2010], capítulo 2 y 3.

como funciones independientes de coordenadas y momentos, por lo que la transformada de Legendre no se puede realizar y las ecuaciones que definen los momentos se pueden ver como relaciones entre los momentos y las coordenadas; dichas relaciones a su vez definen una superficie en el espacio fase que se denota como Σ_1 . Las relaciones tienen la forma:

$$\phi_\mu^1(q^i, p_i) \approx 0 \quad \mu = 1, 2, \dots, M, \quad (2.6)$$

denominadas *constricciones primarias* y se derivan de la definición de momento canónico, el símbolo \approx significa que las constricciones son nulas en la superficie de constricciones primarias Σ_1 y no en todo el espacio fase. El superíndice de ϕ se asocia a las primeras constricciones que surgen de este algoritmo. Se verá mas adelante que es posible hallar más constricciones (si el sistema de estudio lo permite) y cómo es que se derivan.

2.2.2. El Hamiltoniano canónico H_0

Si las constricciones satisfacen las condiciones de regularidad, se define el *hamiltoniano canónico*:

$$H_0 = \dot{q}^i p_i - L(q^i, \dot{q}^i). \quad (2.7)$$

En la ecuación (2.7), debido a la definición de momento generalizado, H_0 se puede ver como una función dependiente de las coordenadas y las velocidades generalizadas. Considere la variación de H_0 en relación a variaciones de las posiciones y las velocidades:

$$\begin{aligned} \delta H_0 &= \dot{q}^i \delta p_i + \delta \dot{q}^i p_i - \delta \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \delta q^i \frac{\partial L}{\partial q^i} \\ &= \dot{q}^i \delta p_i - \delta \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Entonces el Hamiltoniano canónico se puede ver como función de q^i y p_i . Sin embargo las variaciones de δq^i y δp_i en (2.8) no son arbitrarias; tienen que ser tangentes a la superficie de constricciones primarias Σ_1 ; así el Hamiltoniano canónico está bien definido sobre Σ_1 . Se verá más adelante que H_0 puede ser extendido fuera de la superficie de constricciones Σ_1 a través de una combinación lineal de constricciones

$$H_0 \longrightarrow H_0 + c^\mu(q, p)\phi_\mu^1. \quad (2.9)$$

Como H_0 es una función dependiente de q^i y p_i ,

$$\delta H_0 = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial H_0}{\partial q^i} \delta q^i. \quad (2.10)$$

Entonces, a partir de (2.8) y de (2.10),

$$\left(\frac{\partial H_0}{\partial q^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) \delta q^i + \left(\frac{\partial H_0}{\partial p_i} - \dot{q}^i\right) \delta p_i = 0 \quad (2.11)$$

entonces los coeficientes de (2.11) se expresan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H_0}{\partial p_i} + u^\mu \frac{\partial \phi_\mu^1}{\partial p_i}, \\ -\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)_{\dot{q}} &= \left(\frac{\partial H_0}{\partial q^i}\right)_p + u^\mu \frac{\partial \phi_\mu^1}{\partial q^i}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Estas relaciones son importantes porque permiten establecer a las velocidades \dot{q}^i a partir de los momentos p_i (cuando se cumple $\phi_\mu^1 = 0$) y de los parámetros u^μ . Estos parámetros extra pueden verse como coordenadas en la superficie de imágenes inversas de una p_i dada.

Si las constricciones son independientes, los vectores $\partial \phi_\mu^1 / \partial p_i$ son también independientes sobre la superficie ϕ_μ^1 , consecuencia de las condiciones de regularidad³. Por lo tanto, no hay dos conjuntos diferentes de u 's que puedan producir las mismas velocidades. Esto significa que las u 's pueden ser expresadas, en términos de las coordenadas y las velocidades resolviendo las siguientes ecuaciones.

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}(q, p(q, \dot{q})) + u^\mu(q, \dot{q}) \frac{\partial \phi_\mu^1}{\partial p_i}(q, p(q, \dot{q})). \quad (2.13)$$

Definimos la transformada de Legendre partiendo del espacio (q, \dot{q}) hacia la superficie $\phi_\mu^1(q, p) \stackrel{\Sigma_1}{=} 0$ del espacio (q, p, u) mediante:

$$\begin{aligned} q^i &= q^i, \\ p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}), \\ u^\mu &= u^\mu(q, \dot{q}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Note que esta transformación entre espacios de dimensión $2N$ es invertible.

$$\begin{aligned} q^i &= q^i, \\ \dot{q}^i &= \frac{\partial H_0}{\partial p_i} + u^\mu \frac{\partial \phi_\mu^1}{\partial p_i}, \\ \phi_\mu^1(q, p) &= 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

³Existen diferentes maneras de representar una superficie dada por las relaciones (2.6). A grandes rasgos, las condiciones de regularidad se imponen a las constricciones, de tal manera que, al elegir una representación de la restricción hallada, el rango de la matriz jacobiana sobre la superficie de constricciones debe permanecer constante en todos los puntos de su dominio. Para más detalles, consulte [Henneaux and Teitelboim, 2020], capítulo 1, páginas 6 y 7.

Aquí, las ecuaciones (2.14) dan lugar a las ecuaciones (2.15) y viceversa. Debe mencionarse que el desarrollo anterior sólo es válido en regiones cercanas a Σ_1 . Se asumirá a partir de ahora que un Hamiltoniano H_0 puede ser definido globalmente como una función de q 's y p 's.

2.2.3. Principio de acción del Hamiltoniano primario H_p

Las ecuaciones (2.12) pueden escribirse con la ayuda de las ecuaciones de Lagrange en la forma hamiltoniana. A partir de Hamiltoniano canónico H_0 , se define el **Hamiltoniano primario** como sigue:

$$H_p := H_0 + u^\mu \phi_\mu^1. \quad (2.16)$$

Es decir, el hamiltoniano primario es el hamiltoniano canónico más la suma de las combinaciones lineales posibles de las constricciones primarias independientes.

2.2.4. Constricciones secundarias, terciarias, etc.

En el método hamiltoniano es necesario que las constricciones primarias se preserven constantes en el tiempo y esto debe cumplirse para cualquier valor inicial que tomen las variables dinámicas que se están usando; esta es llamada *condición de consistencia* sobre las constricciones primarias. Se verifica que $\dot{\phi}_\mu^1 = d\phi_\mu^1/dt \approx 0$. Visto de otra manera

$$\dot{\phi}_\mu^1 = \{\phi_\mu^1, H_0\} + u^\nu \{\phi_\mu^1, \phi_\nu^1\} \approx 0 \quad (2.17)$$

donde $\{\phi_\mu^1, H_0\}$, $\{\phi_\mu^1, \phi_\nu^1\}$ son paréntesis de Poisson y $\mu, \nu = 1, \dots, M$. Esto se hace con todas las constricciones primarias halladas en el algoritmo, tanto dependientes como independientes.

Una vez que se han hallado todas las constricciones, la atención se centra sobre las condiciones que deben cumplir los multiplicadores de Lagrange. En lo que sigue, a todas las constricciones en el formalismo Hamiltoniano se les denotará de la forma ϕ_μ ; en caso de ser necesario en algún procedimiento, se hará la distinción entre constricciones primarias y secundarias. Por consistencia todas las constricciones de cualquier generación deben cumplir⁴:

$$\{\phi_\mu, H_0\} + u^\nu \{\phi_\mu, \phi_\nu^1\} \approx 0. \quad (2.18)$$

Es posible considerar esta ecuación como un conjunto de J ecuaciones lineales no homogéneas, con $M \leq J$, o definiendo $P'_{\mu\nu} = \{\phi_\nu, \phi_\mu^1\}$ y $h'_\nu = \{\phi_\nu, H_0\}$, la ecuación anterior nuevamente es vista como un sistema matricial donde es necesario hallar una solución para el vector \mathbf{u} . La solución más general a estas ecuaciones es:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{V} \quad (2.19)$$

⁴Todas las constricciones halladas se evolucionan con el hamiltoniano primario.

donde U es una solución particular a la ecuación homogénea (2.18) y V es la solución más general de la ecuación.

$$P'V = 0 \quad (2.20)$$

La solución más general de V es una combinación lineal de los vectores nulos linealmente independientes V_α de la matriz P' . Por lo tanto, el vector u se escribe como:

$$u = U + \sum_{\alpha=1} v^\alpha V_\alpha \quad (2.21)$$

donde los coeficientes $v^\alpha(q, p)$ son totalmente arbitrarios en el espacio fase. Con el desarrollo anterior, se muestra a los multiplicadores de Lagrange separados en una parte que esta determinada por las condiciones de consistencia U y otra parte que sigue siendo arbitraria $\sum_{\alpha=1} v^\alpha V_\alpha$.

Reescribiendo el hamiltoniano primario ahora con las expresiones para el vector u , este se escribe como sigue:

$$\begin{aligned} H_p &= H_0 + u^\mu \phi_\mu^1 \\ &= \underbrace{H_0 + U^\mu \phi_\mu^1}_{H'} + v^\alpha \underbrace{V_\alpha^\mu \phi_\mu^1}_{\phi_\alpha^1} \\ &= H' + v^\alpha \phi_\alpha^1. \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.2.5. Constricciones de primera y segunda clase.

Para el algoritmo, no hay diferencia alguna entre las constricciones primarias o secundarias; son indistintas. Sin embargo, el procedimiento exige clasificar las constricciones de acuerdo a su comportamiento con las demás. Para ello se definen los siguientes conceptos.

Definición 2.1. Sean $F(q, p)$ y $G(q, p)$ dos funciones en el espacio fase. Se dice que estas funciones son **débilmente iguales entre sí** si $F - G = c^\mu(q, p)\phi_\mu$. Es decir, son iguales en la subvariedad definida por las constricciones $\phi_\mu \approx 0$. Se denota como $F \approx G$. Por otro lado, si la igualdad no solo se restringe a la subvariedad, si no que es válida en todo el espacio fase, entonces ambas funciones son **fuertemente iguales entre sí** y se denota esto como $F = G$.

Definición 2.2. Sea $F(q, p)$ una función definida en el espacio fase. F es una función de **primera clase** si

$$\{F, \phi_\mu\} \approx 0 \quad (2.23)$$

es decir, el paréntesis de Poisson con todas las constricciones halladas es nulo sobre la subvariedad definida por las constricciones. En otro caso, si existe alguna en la que el paréntesis sea débilmente diferente de cero se dice que la función F es de **segunda clase**.

Considerando a las constricciones como funciones en el espacio fase, es posible hacer una clasificación entre ellas. Una restricción será de primera clase si su paréntesis de Poisson con ella misma y el resto de constricciones es débilmente cero; estas se denotan como γ_a . En cambio, a aquellas cuyo paréntesis es no nulo al menos con una de las constricciones son llamadas constricciones de segunda clase y se denotan como χ_α . Algunas veces esta separación no es inmediata, es necesario que se cumplan otras condiciones al hacer esta separación.⁵

2.3. La Lagrangiana de Relatividad General

Las ecuaciones de campo de Einstein pueden obtenerse a partir de la llamada *acción de Einstein-Hilbert* dada por

$$S_{EH}[g] = -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left(\sqrt{-\det g} (R + 2\Lambda) + \mathcal{L}_m \right), \quad (2.24)$$

donde Λ es la constante cosmológica, g_{ab} es la métrica del espacio-tiempo, $\kappa = 8\pi$ en unidades naturales, \mathcal{L}_m la densidad lagrangiana que describe la materia del sistema y $R = g^{ab}R_{ab}$ es el escalar de Ricci.

El principio variacional establece que las ecuaciones de movimiento pueden obtenerse extremizando la acción, es decir:

$$\delta S = 0.$$

Aplicando esta condición a la ecuación (2.24), se obtiene

$$\int d^4x \sqrt{-\det g} \delta g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{\sqrt{-\det g}} \frac{\delta \sqrt{-\det g}}{\delta g_{\mu\nu}} (R + 2\Lambda) + \frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \frac{\delta R_{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} + \kappa T^{\mu\nu} \right] = 0, \quad (2.25)$$

donde

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-\det g}} \frac{\delta(\sqrt{-\det g} \mathcal{L}_m)}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (2.26)$$

es el tensor de energía-momento en términos de la densidad lagrangiana.

Sabiendo que $\partial(\det g)/\partial g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \det g$, se puede obtener

$$\frac{\delta \sqrt{-\det g}}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2\sqrt{-\det g}} \frac{\delta(\det g)}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \sqrt{-\det g}. \quad (2.27)$$

⁵En base a la matriz P_{ij} es posible separar las constricciones que se han hallado y verificar si son independientes o son una combinación lineal del resto de constricciones.

Por otra parte, variando la identidad $g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha$,

$$\delta(g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}) = \delta g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} + g^{\alpha\beta}\delta g_{\beta\gamma} = 0, \quad (2.28)$$

es posible hallar

$$\frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} = -g^{\alpha\mu}g^{\nu\beta}. \quad (2.29)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.27) y (2.29) en las ecuaciones (2.25) y (2.26), las expresiones para la variación de la acción y el tensor de energía momento son

$$\int d^4x \sqrt{-\det g} \delta g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R + 2\Lambda) - R^{\mu\nu} + g^{\alpha\beta} \frac{\delta R_{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} + \kappa T^{\mu\nu} \right] = 0, \quad (2.30)$$

$$T^{\mu\nu} = 2 \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g_{\mu\nu}} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_m. \quad (2.31)$$

Finalmente se calcula la variación del tensor de Ricci. Para ello, se usa

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= R^\gamma{}_{\alpha\gamma\beta} \\ R^\gamma{}_{\alpha\gamma\beta} &= \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\gamma - \Gamma_{\delta\beta}^\gamma \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta - \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^\gamma + \Gamma_{\delta\gamma}^\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\delta. \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{\delta R_{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} = \left(\frac{\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma}{\delta g_{\mu\nu}} \right)_{,\gamma} - \frac{\delta \Gamma_{\delta\beta}^\gamma}{\delta g_{\mu\nu}} \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta - \Gamma_{\delta\beta}^\gamma \frac{\delta \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta}{\delta g_{\mu\nu}} - \left(\frac{\delta \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma}{\delta g_{\mu\nu}} \right)_{,\beta} + \frac{\delta \Gamma_{\delta\gamma}^\gamma}{\delta g_{\mu\nu}} \Gamma_{\alpha\beta}^\delta + \Gamma_{\delta\gamma}^\gamma \frac{\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (2.32)$$

Las derivadas “covariantes” de las variaciones $\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ y $\delta \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma$ se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{\alpha\beta;\gamma}^\gamma &= \delta \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\gamma + \Gamma_{\eta\gamma}^\gamma \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\eta - \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \delta \Gamma_{\eta\beta}^\gamma - \Gamma_{\gamma\beta}^\eta \delta \Gamma_{\alpha\eta}^\gamma, \\ \delta \Gamma_{\alpha\gamma;\beta}^\gamma &= \delta \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^\gamma + \Gamma_{\eta\beta}^\gamma \delta \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta - \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \delta \Gamma_{\eta\gamma}^\gamma - \Gamma_{\gamma\beta}^\eta \delta \Gamma_{\alpha\eta}^\gamma. \end{aligned} \quad (2.33)$$

y la métrica conmuta con la derivada covariante

$$g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta;\gamma}^\gamma = D_\gamma (g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma) = D_\gamma \left(g^{\alpha\beta} \frac{\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} \right). \quad (2.34)$$

Si se aplica la última igualdad a las ecuaciones (2.33) y aplicando en la variación (2.32)

$$g^{\alpha\beta} \frac{\delta R_{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = D_\gamma (g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma) - D_\beta (g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma) = D_\gamma (g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - g^{\alpha\gamma} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\beta). \quad (2.35)$$

Entonces el tercer término de (2.30) se anula

$$\int dx^4 \sqrt{-\det g} \delta g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \frac{\delta R_{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} = 0, \quad (2.36)$$

pues se trata de una derivada total.

Por último, para que la variación de la acción (2.30) sea cero para cualquier $\delta g_{\mu\nu}$, se necesita que

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R + 2\Lambda) = \kappa T^{\mu\nu}, \quad (2.37)$$

que son las ecuaciones de campo de Einstein.

2.3.1. La formulación ADM de relatividad general

El formalismo ADM toma foliaciones del espacio-tiempo en hipersuperficies espaciales, luego usa proyecciones de la métrica en estas coordenadas para reescribir la acción gravitacional de manera que de lugar a un Hamiltoniano. Este enfoque Hamiltoniano es importante para manejar aspectos de gravedad cuántica. Sin embargo, la forma ADM de la métrica y las ecuaciones de campo tienen mucha más aplicabilidad.

La métrica ADM es

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij} (N^i dt + dx^i) (N^j dt + dx^j), \quad (2.38)$$

donde N es la función de lapso y N^i es el vector de desplazamiento. La acción (2.24), sin los términos de materia ni constante cosmológica, puede ser escrita como (se elige $2\kappa = 1$ por conveniencia en esta sección)

$$S = \int dt \int d^3x \sqrt{\gamma} N \left({}^{(3)}R + K_{ij} K^{ij} - K^2 \right), \quad (2.39)$$

donde la curvatura extrínseca es

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left(\gamma_{ik} D_j N^k + \gamma_{jk} D_i N^k - \dot{\gamma}_{ij} \right), \quad (2.40)$$

D_i siendo la derivada covariante definida por γ_{ij} . La traza es $K = \gamma^{ij} K_{ij}$.

La acción es considerada una función de la variable Lagrangiana $q = (\gamma_{ij}, N, N^i)$ y \dot{q} , y la densidad Lagrangiana es

$$\mathcal{L}[q, \dot{q}] = \sqrt{\gamma} N \left({}^{(3)}R + K_{ij} K^{ij} - K^2 \right). \quad (2.41)$$

No hay dependencia dinámica de N, N^i , por lo tanto, están asociadas con constricciones. La variable dinámica γ_{ij} define un momento conjugado por medio de la derivada variacional

$$\pi^{ij} := \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\gamma}_{ij}} = \sqrt{\gamma}(K\gamma^{ij} - K^{ij}). \quad (2.42)$$

Así, la densidad Hamiltoniana es

$$\mathcal{H} = \pi^{ij}\dot{\gamma}^{ij} - \mathcal{L}, \quad (2.43)$$

y el Hamiltoniano

$$H = - \int d^3x \sqrt{\gamma}(NC_0 - 2N^i C_i), \quad (2.44)$$

donde las constricciones son $C_0 = {}^{(3)}R - K_{ij}K^{ij}$ y $C_i = -D_i K + D_j K_i^j$. $C_0 = 0$ es la "constricción de energía", y $C_i = 0$ es la "constricción de momento".

2.3.2. La Lagrangiana reducida

Para una métrica homogénea e isotrópica

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right), \quad (2.45)$$

se puede calcular el escalar de Ricci

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{N^2 a} + \frac{\dot{a}}{N^2 a^2} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN^3} + \frac{k}{a^2} \right). \quad (2.46)$$

Con $\det g = -r^4 \sin^2(\theta) N^2 a^6 / (1 - kr^2)$, se obtiene la *acción gravitacional reducida*⁶

$$\begin{aligned} S[a, N] &= \frac{3V_0}{8\pi G} \int dt N a^3 \left(\frac{\ddot{a}}{N^2 a} + \frac{\dot{a}}{N^2 a^2} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN^3} + \frac{k}{a^2} \right) \\ &= -\frac{3V_0}{8\pi G} \int dt \left(\frac{a\dot{a}}{N} - kaN \right). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Con ello, se identifica a la Lagrangiana gravitacional reducida⁷

$$L_{grav} = -\frac{3}{8\pi G} \left(\frac{a\dot{a}}{N} - kaN \right). \quad (2.48)$$

Notar que esta Lagrangiana no depende de la derivada temporal de la función de lapso.

⁶La constante arbitraria $V_0 := \int dr d\theta d\varphi r^2 \sin \theta / \sqrt{1 - kr^2}$ surge a partir de elegir una región de integración compacta.

⁷A partir de aquí, se considera que $V_0 = 1$. Al final de los cálculos, se puede extender a todo el espacio

En este caso, no se están usando la forma completa de las ecuaciones de movimiento, de las que son obtenidas a partir de variar la acción. Con la métrica general, no hay garantía de que esto sea permitido; la acción reducida en algunos casos, puede no producir las ecuaciones de movimiento que se obtendrían al reducir las ecuaciones completas, Sin embargo, uno puede seguir haciéndolo de esta manera porque es más sencillo hacerlo y describe correctamente la cosmología a grandes escalas. Lo anterior sucede también al cuantizar.

2.3.3. Análisis canónico

En la acción reducida, las funciones del tiempo son $a(t)$ y $N(t)$, lo que da lugar a las variables canónicas $(a, p_a; N, p_N)$. Los momentos asociados se obtienen por definición como

$$p_a = \frac{\partial L_{grav}}{\partial \dot{a}} = -\frac{3}{4\pi G} \frac{a\dot{a}}{N}, \quad (2.49)$$

$$p_N = \frac{\partial L_{grav}}{\partial \dot{N}} = 0. \quad (2.50)$$

Puesto que L_{grav} no depende de \dot{N} , el momento p_N se hace cero idénticamente y no es un grado de libertad. Esto representa una *constricción primaria* en el sistema y su dinámica. Las constricciones de esta forma están asociadas a la libertad de norma de la acción; p_N corresponde a la libertad de redefinir el tiempo.

Continuando con el análisis, el *Hamiltoniano gravitacional* es

$$\begin{aligned} H &= \dot{a}p_a + \dot{N}p_N - L_{grav} \\ &= -\frac{2\pi G}{3} \frac{Np_a^2}{a} - \frac{3}{8\pi G} k a N. \end{aligned} \quad (2.51)$$

O, de manera general, añadiendo la contribución del Hamiltoniano de materia H_m y las constricciones primarias halladas, se tiene el *Hamiltoniano total*

$$H_{total} = H_{grav} + H_m + \lambda p_N \quad (2.52)$$

con $\lambda(t)$ una función arbitraria del tiempo. Sus ecuaciones de movimiento son

$$\dot{N} = \frac{\partial H_{total}}{\partial p_N} = \lambda \quad (2.53)$$

$$\dot{p}_N = -\frac{\partial H_{total}}{\partial N} = \frac{2\pi G}{3} \frac{p_a^2}{a} + \frac{3}{8\pi G} k a - \frac{\partial H_m}{\partial N} \quad (2.54)$$

$$\dot{a} = \frac{\partial H_{total}}{\partial p_a} = -\frac{4\pi G}{3} \frac{Np_a}{a} \quad (2.55)$$

$$\dot{p}_a = -\frac{\partial H_{total}}{\partial a} = -\frac{2\pi G}{3} \frac{Np_a^2}{a^2} + \frac{3}{8\pi G} N k - \frac{\partial H_m}{\partial a}. \quad (2.56)$$

La primera ecuación (2.53) dice que $N(t)$ es completamente arbitrario como función del tiempo, debido a que $\lambda(t)$ permanece libre al momento que se agrega la restricción primaria al Hamiltoniano. La segunda ecuación (2.54) implica la existencia de una restricción secundaria pues $p_N = 0$ debido a la condición de consistencia. De tal manera que $\dot{p}_N = 0$, ó

$$\frac{2\pi G}{3} \frac{p_a^2}{a} + \frac{3}{8\pi G} ka - \frac{\partial H_m}{\partial N} = 0. \quad (2.57)$$

La tercera ecuación (2.55) reproduce la definición (2.49) del momento p_a , cuya ecuación de movimiento (2.56) da una ecuación de segundo orden para a .

2.3.4. El campo escalar

Este conjunto de ecuaciones para las variables gravitacionales están acompañadas por ecuaciones para los grados de libertad de la materia, los cuales de estar presentes pueden ser deducidos de un Hamiltoniano de materia. Bajo el principio cosmológico, la única fuente de materia es un campo escalar φ , el cual tiene una acción

$$S_{escalar}[\varphi] = - \int d^4x \sqrt{-\det g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + V(\varphi) \right). \quad (2.58)$$

Para una métrica isotrópica y φ espacialmente homogéneo, esto se reduce a la Lagrangiana

$$L_{escalar} = \frac{a^3}{2N} \dot{\varphi}^2 - Na^3 V(\varphi), \quad (2.59)$$

la cual tiene como momento

$$p_\varphi = \frac{\partial L_{escalar}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{a^3 \dot{\varphi}}{N} \quad (2.60)$$

y su Hamiltoniana es

$$H_{escalar} = \frac{N p_\varphi^2}{2a^3} + Na^3 V(\varphi). \quad (2.61)$$

Las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H_{escalar}}{\partial p_\varphi} = \frac{N p_\varphi}{a^3}, \quad (2.62)$$

que es el mismo resultado de (2.60) y

$$\dot{p}_\varphi = - \frac{\partial H_{escalar}}{\partial \varphi} = -Na^3 V'(\varphi). \quad (2.63)$$

A partir de la ecuación (2.55), uno puede despejar p_a y usarla en (2.56) y (2.60). De este modo se obtienen la *ecuación de Friedmann*

$$\left(\frac{\dot{a}}{aN}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3a^3} \frac{\partial H_m}{\partial N}, \quad (2.64)$$

y la ecuación de Raychaudhuri

$$\frac{(\dot{a}/N)}{aN} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\frac{1}{a^3} \frac{\partial H_m}{\partial N} - \frac{1}{Na^2} \frac{\partial H_m}{\partial a} \right). \quad (2.65)$$

2.4. Ecuaciones diferenciales parciales

Una ecuación diferencial parcial (*PDE por sus siglas en inglés*) describe la relación que hay entre las derivadas parciales de una función desconocida. Estas aparecen en varias áreas de la física e ingeniería, así como en otras áreas de la ciencia como la biología, la química o en economía. La forma general de una ecuación diferencial parcial es

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}) = 0, \quad (2.66)$$

donde x_1, x_2, \dots, x_n son las variables independientes, u es la función desconocida y u_{x_i} denota la derivada parcial $\partial u / \partial x_i$. La ecuación es generalmente acompañada de esas variables, de condiciones iniciales (como ocurre en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias) o condiciones de frontera.

El análisis de ecuaciones diferenciales parciales tiene muchas facetas. El enfoque clásico que dominó durante el siglo XIX, permitió el desarrollo de soluciones analíticas que impulsaron el desarrollo significativo de alguna rama de la física, pero no fue sino hasta la primera mitad del siglo pasado que se vió un acelerado progreso con la introducción de los métodos numéricos, que permiten el uso de computadoras para resolver ecuaciones diferenciales parciales de casi cualquier tipo (al menos en teoría; en la práctica aún existen obstáculos a superar). En esta sección se introduce a la solución numérica de PDE y su utilidad para nuestros objetivos.

2.4.1. El método de diferencias finitas

Para introducir el principio de aproximación de diferencias finitas, considere una función suave en dos variables $u(x, t)$ definida sobre un rectángulo $D = [0, a] \times [0, b]$. Se define una partición sobre D , la cual geoméricamente formará una rejilla sobre esta región:

$$(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t) \quad 0 \leq j \leq J, \quad 0 \leq n \leq N, \quad (2.67)$$

donde $\Delta x = a/J$ y $\Delta t = b/N$. Puesto que es necesario conocer los valores que toma u en todos estos puntos, es conveniente escribir

$$U_j^n = u(x_j, t_n).$$

Usando una expansión de Taylor alrededor del punto (x_j, t_n) para calcular $u(x_{j+1}, t_n)$ (vea la figura 2.1), se obtiene

$$u(x_{j+1}, t_n) = u(x_j, t_n) + u_x(x_j, t_n)\Delta x + \frac{1}{2}u_{xx}(x_j, t_n)(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}u_{xxx}(x_j, t_n)(\Delta x)^3 + \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (2.68)$$

Considerando los tres primeros términos de la serie, se obtiene la *fórmula de diferencia sucesiva*

$$u_x(x_j, t_n) = \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \approx \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x}. \quad (2.69)$$

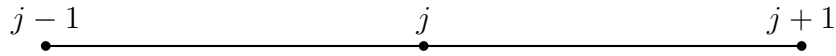


Figura 2.1. Ejemplo de una «rejilla» unidimensional

De manera similar, es posible deducir la siguiente fórmula

$$u_x(x_j, t_n) = \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \approx \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x}. \quad (2.70)$$

El error inducido por la aproximación (2.69) se le llama *error de truncamiento*. Para minimizar esta cantidad y obtener una mejor aproximación de la derivada, es necesario que Δx sea muy pequeño lo que significa que J debe ser muy grande. Al hacer esto, se requiere de una cantidad grande de memoria así como de tiempo para obtener resultados. Por lo tanto, se busca una mejor aproximación para u_x . Para esto se usa nuevamente una expansión de Taylor para $u(x_{j-1}, t_n)$ y restando las dos expansiones de Taylor el resultado es

$$u_x(x_j, t_n) = \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \approx \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (2.71)$$

A la aproximación anterior se le llama *diferencia central finita* o simplemente *diferencia central*. Similarmente, se puede hallar la diferencia central para u_t :

$$u_t(x_j, t_n) \approx \frac{U_j^{n+1} - U_j^{n-1}}{2\Delta t}. \quad (2.72)$$

Usando un método similar, se pueden derivar las diferencias centrales de segundo orden para las segundas derivadas de u

$$u_{xx} = \frac{U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \approx \frac{U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (2.73)$$

y

$$u_{tt} = \frac{U_j^{n-1} - 2U_j^n + U_j^{n+1}}{(\Delta t)^2} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \approx \frac{U_j^{n-1} - 2U_j^n + U_j^{n+1}}{(\Delta t)^2} \quad (2.74)$$

Esquema explícito para la ecuación de onda

Considere la ecuación de onda

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (2.75)$$

con las siguientes condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad t > 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2.76)$$

Se construye para la ecuación (2.75) un esquema de diferencias finitas de segundo orden. Para esto, se toma dos enteros $J, N > 2$ y un número positivo Δt ; sea $\Delta x := 1/J$. Se define una partición $\{x_j = j\Delta x\}$ en el intervalo $[0, 1]$ y otra partición $\{t_n = n\Delta t\}$ sobre el intervalo $[0, T]$ con $\Delta t := T/N$. Además definimos la notación $U_j^n = u(x_j, t_n)$ y de esta manera

$$\frac{U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} = c^2 \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad 1 \leq j \leq J, \quad 0 \leq n \leq N, \quad (2.77)$$

y por consiguiente

$$U_j^{n+1} = 2(1 - s^2)U_j^n + s^2(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - U_j^{n-1}, \quad (2.78)$$

donde

$$s = \frac{c\Delta t}{\Delta x}.$$

Observe que la ec. (2.78) relaciona los valores aproximados de la solución en los puntos (x_j, t_{n+1}) , (x_j, t_n) , (x_{j-1}, t_n) , (x_{j+1}, t_n) y (x_j, t_{n-1}) . Estos cinco puntos forman un **átomo computacional** para el esquema de diferencias (Figura 2.2).

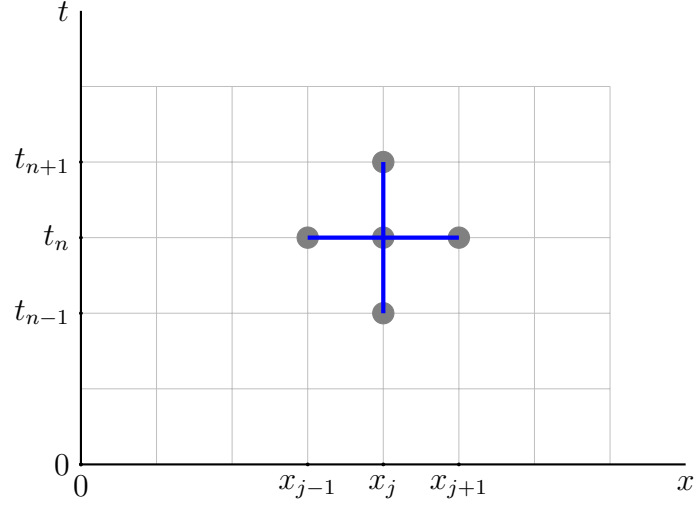


Figura 2.2. Átomo computacional para la ecuación de onda. Los valores en el nivel $(n + 1)$ dependen de los dos anteriores, n y $n - 1$

La ecuación de diferencias (2.78) muestra la solución aproximada en el nodo (x_j, t_{n+1}) en términos de las aproximaciones de los otros cuatro nodos. Ahora, para conocer los valores en cada nodo, se requieren de las dos primeros renglones temporales ($t_0 = 0$) y ($t_1 = \Delta t$). El renglón $t = 0$ está dado por la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, entonces se tiene

$$U_j^0 = f(x_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, J.$$

Para $t = t_1$ se parte de la condición de velocidad inicial $u_t(x, 0) = g(x)$, la cual se halla a partir de una ecuación de diferencias

$$\frac{U_j^1 - U_j^0}{\Delta t} = g(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, J - 1.$$

Los valores de U_j^1 son los del segundo renglón

$$U_j^1 = U_j^0 + \Delta t g(x_j).$$

Ahora ya se tiene lo necesario para iniciar el cálculo de todos los nodos de la rejilla. Por otro lado, la presencia de errores de aproximación presentes en (2.78) debido a reemplazar derivadas por diferencias hace que este esquema no sea siempre una buena referencia. Resulta que si Δt es muy grande, se obtendrán resultados inexactos. Esto se resuelve a través de pedir la **condición de estabilidad**; que $s \leq 1$, ó

$$c \leq \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Capítulo 3

Solución analítica de la ecuación de Wheeler-DeWitt

3.1. Introducción

Obtener una solución analítica de la ecuación de Wheeler-DeWitt puede resultar complicado, si no es que imposible; esto debido a que no es posible resolver la ecuación por el método de separación de variables. Algunos autores hacen este análisis por el método WKB, sin embargo, en este caso, se analiza la ecuación considerando un potencial $V(\varphi) = V_0 = \text{const}$. Bajo esta suposición, es posible proponer una solución $\Psi(a, \varphi)$ a la ecuación de onda y de esta manera obtener una solución analítica. En este capítulo se hace este análisis y se obtiene una parametrización del factor de escala a en función de un tiempo cósmico t .

3.2. Solución analítica

Considérese la ecuación de Wheeler-DeWitt

$$\left[\frac{\kappa^2 c^2 \hbar^2}{12} (a^2 \partial_a^2 - a \partial_a + 2\alpha) - \frac{c^2}{2} \partial_\varphi^2 - \frac{3k}{\kappa^2} a^4 + a^6 V(\varphi) \right] \Psi(a, \varphi) = 0. \quad (3.1)$$

Donde α es un parámetro real que expresa un ordenamiento de los operadores para que el hamiltoniano sea hermítico. Bajo la suposición de que $V(\varphi) = \text{const} = V_0$, se propone una solución por variables separables de la forma $\Psi(a, \varphi) = \Gamma(a)\Xi(\varphi)$. Sustituyendo en la ec.(3.1),

$$\frac{\kappa^2 c^2 \hbar^2 a^2}{12} \frac{d^2 \Gamma}{da^2} \Xi - \frac{\kappa^2 c^2 \hbar^2}{12} a \frac{d\Gamma}{da} \Xi + \frac{\kappa^2 c^2 \hbar^2 \alpha}{6} \Psi - \frac{c^2}{2} \frac{d^2 \Xi}{d\varphi^2} \Gamma - \frac{3ka^4}{\kappa^2} \Psi + a^6 V_0 \Psi = 0, \quad (3.2)$$

dividiendo entre $\Gamma(a)\Xi(\varphi)$,

$$\frac{\kappa^2 c^2 \hbar^2 a^2}{12} \frac{\Gamma''(a)}{\Gamma(a)} - \frac{\kappa^2 c^2 \hbar^2}{12} a \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{\kappa^2 c^2 \hbar^2 \alpha}{6} - \frac{c^2 \Xi''(\varphi)}{2 \Xi(\varphi)} - \frac{3ka^4}{\kappa^2} + a^6 V_0 = 0. \quad (3.3)$$

Luego,

$$\frac{\kappa^2 c^2 \hbar^2 a^2}{12} \frac{\Gamma''(a)}{\Gamma(a)} - \frac{\kappa^2 c^2 \hbar^2}{12} a \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{\kappa^2 c^2 \hbar^2 \alpha}{6} - \frac{3ka^4}{\kappa^2} + a^6 V_0 = \frac{c^2 \Xi''(\varphi)}{2 \Xi(\varphi)} = \beta. \quad (3.4)$$

A partir de aquí, se obtienen dos ecuaciones diferenciales que pueden resolverse de manera separada. Para la variable φ , se tiene

$$\Xi''(\varphi) - \frac{2\beta}{c^2} \Xi(\varphi) = 0, \quad (3.5)$$

y considerando que $k = 0$,

$$a^2 \Gamma''(a) - a \Gamma'(a) + \Gamma \left(2\alpha + \frac{12V_0 a^6}{\kappa^2 c^2 \hbar^2} - \frac{12\beta}{\kappa^2 c^2 \hbar^2} \right) = 0. \quad (3.6)$$

Para la ecuación (3.5), se considera que $c = 1$, su solución es

$$C_1 \exp(\sqrt{2\beta}\varphi) + C_2 \exp(-\sqrt{2\beta}\varphi), \quad (3.7)$$

mientras que para la ecuación (3.6), su solución general está dada por¹

$$C_3 a J \left(\frac{\sqrt{1-2\alpha+\frac{12\beta}{\kappa^2}}}{3} \right) \left(\frac{2\sqrt{3}a^3 \sqrt{\frac{V_0}{\kappa^2}}}{3} \right) + C_4 a Y \left(\frac{\sqrt{1-2\alpha+\frac{12\beta}{\kappa^2}}}{3} \right) \left(\frac{2\sqrt{3}a^3 \sqrt{\frac{V_0}{\kappa^2}}}{3} \right). \quad (3.8)$$

Para el caso particular en el que $V_0 = 0$, la solución es

$$a^{1-\sqrt{1-2\alpha+\frac{12\beta}{\kappa^2}}} \left(C_3 + a^2 \sqrt{1-2\alpha+\frac{12\beta}{\kappa^2}} C_4 \right) = a \left(C_3 a^{-\sqrt{1-2\alpha+\frac{12\beta}{\kappa^2}}} + C_4 a \sqrt{1-2\alpha+\frac{12\beta}{\kappa^2}} \right). \quad (3.9)$$

Supóngase que $\sqrt{2\beta} = i\omega$. Haciendo este cambio, las soluciones (3.7) y (3.9) son ahora

$$C_1 \exp(i\omega\varphi) + C_2 \exp(-i\omega\varphi), \quad (3.10)$$

$$a \left(C_3 a^{-\sqrt{1-2\alpha-\frac{6\omega^2}{\kappa^2}}} + C_4 a \sqrt{1-2\alpha-\frac{6\omega^2}{\kappa^2}} \right). \quad (3.11)$$

Si $\alpha = 1/2$, las ecuaciones (3.7), (3.9) y (3.10) son

¹Para este caso, solo se analiza cuando $V_0 = 0$. El caso general con $V_0 \neq 0$ queda pendiente como trabajo a desarrollar.

$$C_3 J_{\left(\frac{i\omega}{\kappa} \sqrt{\frac{2}{3}}\right)} \left(2\sqrt{3}a^3 \sqrt{\frac{V_0}{\kappa^2}} \right) + C_4 Y_{\left(\frac{i\omega}{\kappa} \sqrt{\frac{2}{3}}\right)} \left(2\sqrt{3}a^3 \sqrt{\frac{V_0}{\kappa^2}} \right), \quad (3.12a)$$

$$C_1 \exp(i\omega\varphi) + C_2 \exp(-i\omega\varphi), \quad (3.12b)$$

$$a \left(C_3 a^{-i\sqrt{6}\frac{\omega}{\kappa}} + C_4 a^{i\sqrt{6}\frac{\omega}{\kappa}} \right). \quad (3.12c)$$

Se considera el cambio de variable $N = \ln a$, de esta manera

$$\begin{aligned} \int |\psi_\omega(a, \varphi)|^2 da d\varphi &= \int |\psi_\omega(e^N, \varphi)|^2 \frac{da}{dN} dN d\varphi \\ &= \int \left| \psi_\omega(e^N, \varphi) \sqrt{\frac{da}{dN}} \right|^2 dN d\varphi \\ &= \int |\tilde{\psi}_\omega(N, \varphi)|^2 dN d\varphi, \end{aligned} \quad (3.13)$$

entonces, poniendo $\kappa = 1$, la ecuación de onda queda como

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_\omega(N, \varphi) &= \psi_\omega(e^N, \varphi) \sqrt{\frac{da}{dN}} \\ &= (C_1 \exp(i\omega\varphi) + C_2 \exp(-i\omega\varphi)) \\ &\quad \left(C_3 e^{\left(\frac{3}{2} - i\sqrt{6}\omega N\right)} + C_4 e^{\left(\frac{3}{2} + i\sqrt{6}\omega N\right)} \right), \end{aligned}$$

Si $\omega = \omega_1 + i\omega_2$, entonces

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_\omega(N, \varphi) &= (C_1 \exp((- \omega_2 + i\omega_1)\varphi) + C_2 \exp((\omega_2 - i\omega_1)\varphi)) \\ &\quad \left(C_3 e^{\left(\frac{3}{2} + \sqrt{6}(\omega_2 - i\omega_1)N\right)} + C_4 e^{\left(\frac{3}{2} + \sqrt{6}(-\omega_2 + i\omega_1)N\right)} \right), \end{aligned}$$

Esta función de onda debe de estar acotada cuando $N \rightarrow \pm\infty$, por lo que la parte real de ambas exponenciales debe ser cero

Si $C_3 = 0$, entonces $\omega_2 = \frac{\sqrt{6}}{4}$; La función queda como

$$\tilde{\psi}_\omega(N, \varphi) = \left(C_1 e^{(i\omega_1 + \frac{\sqrt{6}}{4})\varphi} + C_2 e^{-(i\omega_1 + \frac{\sqrt{6}}{4})\varphi} \right) \left(C_4 e^{(-i\sqrt{6}\omega_1 N)} \right) \quad (3.14)$$

Si $C_2 = 0$ y $C_1 = C_4 = 1$, la función resultante no es normalizable, por lo que se propone una función que actúe como paquete de onda. En este caso, es una función gaussiana que depende de ω_1 . Para (3.14), el procedimiento es el siguiente²:

²Todos los cálculos siguientes fueron hechos con ayuda de Mathematica. Para más detalles, consulte el apéndice A

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}(N, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(i\omega_1 + \frac{\sqrt{6}}{4})\varphi} e^{-i\sqrt{6}\omega_1 N} e^{-\frac{\omega_1^2}{2d}} d\omega_1 \\
&= \sqrt{2\pi d} e^{-3dN^2 + \sqrt{6}dN\varphi - \frac{1}{4}\varphi(\sqrt{6} + 2d\varphi)},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

donde d es la mitad del ancho de la función gaussiana.

La densidad de probabilidad de encontrar al universo en un determinado estado es dado por la siguiente relación, donde directamente se concibe a $\varphi = t$ (clásicamente, existe una relación lineal entre el campo escalar y el tiempo)

$$|\tilde{\psi}(N, \varphi)|^2 \longrightarrow \frac{|\tilde{\psi}(N, \varphi)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi}(N', \varphi)|^2 dN'} \Bigg|_{\varphi=t} = |\Psi(N, t)|^2, \tag{3.16}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\Psi(N, t) &= \frac{\tilde{\psi}(N, \varphi)}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi}(N', \varphi)|^2 dN'}} \Bigg|_{\varphi=t} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi d} e^{\frac{1}{4}(-12dN^2 + \sqrt{6}(1+4dN)t - 2dt^2)}}{\sqrt{\sqrt{\frac{2d}{3}} e^{\sqrt{\frac{3}{2}}t} \pi^{3/2}}} \\
&= e^{\frac{1}{4}(\sqrt{6}t - 2d(6N^2 - 2\sqrt{6}Nt + t^2))} \sqrt{\sqrt{d} e^{\sqrt{\frac{3}{2}}t}} \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/4}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Al calcular el valor medio de la variable N , se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\langle N(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} N |\Psi(N, t)|^2 dN \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} N \left[e^{\frac{1}{4}(\sqrt{6}t - 2d(6N^2 - 2\sqrt{6}Nt + t^2))} \sqrt{\sqrt{d} e^{\sqrt{\frac{3}{2}}t}} \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/4} \right]^2 dN \\
&= \frac{t}{\sqrt{6}}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Dado que $N = \ln a$, entonces $a = \exp \frac{t}{\sqrt{6}}$, de manera que clásicamente para un potencial $V_0 = 0$, se obtiene la solución para un universo de **DeSitter** (Fig. 3.1).

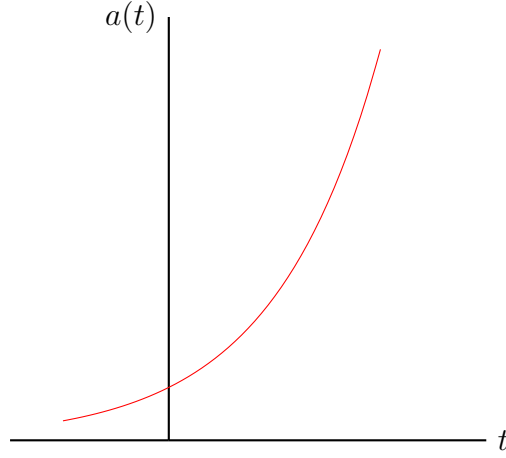


Figura 3.1. Gráfica del factor de escala $a(t)$ para un universo de DeSitter.

Para (3.14), Si $C_1 = 0$ y $C_2 = C_4 = 1$, la función resultante tampoco es normalizable; de igual manera, se usa una función gaussiana como paquete de onda para hallar una función que sí lo sea. El procedimiento es el siguiente:

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(N, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(i\omega_1 + \frac{\sqrt{6}}{4})\varphi} e^{-i\sqrt{6}\omega_1 N} e^{-\frac{\omega_1^2}{2d}} d\omega_1 \\ &= \sqrt{2\pi d} e^{-3dN^2 - \sqrt{6}dN\varphi - \frac{1}{4}\varphi(\sqrt{6} + 2d\varphi)},\end{aligned}\quad (3.19)$$

La densidad de probabilidad de encontrar al universo en un determinado estado es dado por la siguiente relación, donde de nuevo se concibe a $\varphi = t$

$$|\tilde{\psi}(N, \varphi)|^2 \longrightarrow \frac{|\tilde{\psi}(N, \varphi)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi}(N', \varphi)|^2 dN'} \Bigg|_{\varphi=t} = |\Psi(N, t)|^2, \quad (3.20)$$

entonces

$$\begin{aligned}\Psi(N, t) &= \frac{\tilde{\psi}(N, \varphi)}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi}(N', \varphi)|^2 dN'}} \Bigg|_{\varphi=t} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi d} e^{-3dN^2 - \sqrt{6}dN\varphi - \frac{1}{4}\varphi(\sqrt{6} + 2d\varphi)}}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{2\pi d} e^{-3dN'^2 - \sqrt{6}dN'\varphi - \frac{1}{4}\varphi(\sqrt{6} + 2d\varphi)} \right)^2 dN'}} \Bigg|_{\varphi=t} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi d} e^{-3dN^2 - \sqrt{6}dNt - \frac{1}{4}t(\sqrt{6} + 2td)}}{\sqrt{\sqrt{\frac{2d}{3}} e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}t} \pi^{3/2}}} \\ &= e^{\frac{1}{4}(\sqrt{6}t - 2d(6N^2 + 2\sqrt{6}Nt + t^2))} \sqrt{\sqrt{d} e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}t}} \left(\frac{6}{\pi} \right)^{1/4}.\end{aligned}\quad (3.21)$$

Al calcular el valor medio de la variable N , se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \langle N(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} N |\Psi(N, t)|^2 dN \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} N \left[e^{\frac{1}{4}(\sqrt{6}t - 2d(6N^2 + 2\sqrt{6}Nt + t^2))} \sqrt{\sqrt{d}e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}t}} \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/4} \right]^2 dN \\
 &= -\frac{t}{\sqrt{6}}.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Dado que $N = \ln a$, entonces $a = \exp \frac{-t}{\sqrt{6}}$, de manera que clasicamente para un potencial $V_0 = 0$, Se obtiene la siguiente solución (Fig. 3.2).

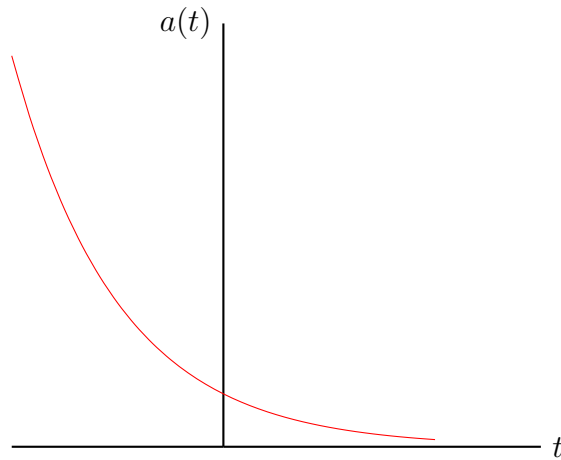


Figura 3.2. Gráfica del factor de escala $a(t)$ cuando $C_1 = 0$

Capítulo 4

Análisis numérico de la ecuación de Wheeler-DeWitt

En este capítulo se resuelve numéricamente la ecuación de Wheeler-DeWitt. A diferencia del capítulo anterior, esta vez se hace con un potencial más general. Se muestran algunos diagramas obtenidos y como podría ser la evolución del universo, cambiando las condiciones iniciales de la ecuación diferencial. El análisis que se hace es a través del método de diferencias finitas visto en el capítulo 2. El software usado para este propósito es MatLab.

4.1. Discretización de la ecuación de WDW

La constricción Hamiltoniana de la relatividad general es $H = 0$ ó

$$H = \frac{\kappa p_a^2}{12a} + \frac{3ka}{\kappa} - \frac{p_\varphi^2}{2a^3} - a^3 V(\varphi) = 0 \quad (4.1)$$

Reordenando y promoviendo H a un operador, se obtiene el operador de constricción Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\kappa}{36} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial^2}{\partial a^2} \frac{1}{a} \right) - \frac{3ka}{\kappa} - \frac{1}{2a^3} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a^3 V(\varphi). \quad (4.2)$$

Al actuar el operador Hamiltoniano sobre la función de onda del universo $\psi(a, \varphi)$, se tiene que $\hat{H}\psi = 0$ o de manera más explícita cambiando la notación para las derivadas parciales

$$\frac{\kappa}{12a} \psi_{aa} - \frac{\kappa}{12a^2} \psi_a + \frac{\kappa}{18a^3} \psi - \frac{3ka}{\kappa} \psi - \frac{1}{2a^3} \psi_{\varphi\varphi} + a^3 V \psi = 0, \quad (4.3)$$

Multiplicando por $12a/\kappa$ y reordenando se llega a la ecuación de Wheeler-DeWitt

$$\psi_{aa} - \frac{6}{\kappa a^2} \psi_{\varphi\varphi} - \frac{1}{a} \psi_a + \frac{2}{3a^2} \psi - \frac{36ka^2}{\kappa^2} \psi + \frac{12a^4}{\kappa} V(\varphi) \psi = 0. \quad (4.4)$$

Para este caso, se considera un potencial de la forma

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{24}\lambda\varphi^4, \quad (4.5)$$

donde m y λ corresponden a la masa y coeficiente de interacción. De tal forma que la forma final de la ecuación es

$$\psi_{aa} - \frac{6}{\kappa a^2}\psi_{\varphi\varphi} - \frac{1}{a}\psi_a + \frac{2}{3a^2}\psi - \frac{36ka^2}{\kappa^2}\psi + \frac{12a^4}{\kappa} \left(\frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{24}\lambda\varphi^4 \right) \psi = 0, \quad (4.6)$$

ó

$$\psi_{\varphi\varphi} - \frac{\kappa a^2}{6}\psi_{aa} + \frac{\kappa a}{6}\psi_a - \frac{\kappa}{9}\psi + \frac{6ka^4}{\kappa}\psi - 2a^6 \left(\frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{24}\lambda\varphi^4 \right) \psi = 0. \quad (4.7)$$

Se usará la forma 4.7 para hallar los criterios de convergencia.

Para usar el método de diferencias finitas en la ecuación de WDW, es necesario establecer un dominio acotado y condiciones de frontera a este problema. Estas son

$$\begin{aligned} 0 \leq a \leq a_f \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_f \quad a_f, \varphi_f > 0, \\ \psi(0, \varphi) = \psi(a_f, \varphi) = 0 \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_f, \\ \psi(a, 0) = f(a) \quad , \quad \psi_\varphi = g(a) \quad 0 \leq a \leq a_f. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Se genera la rejilla con los nodos $a_j = j\Delta a$ y $\varphi_n = n\Delta\varphi$, $j = 0, 1, 2, \dots, J$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$ donde J y N es el número de intervalos en los que se ha dividido el $0 \leq a \leq a_f$ y $0 \leq \varphi \leq \varphi_f$ respectivamente y $\Delta a = a_f/J$, $\Delta\varphi = \varphi_f/N$.

Para la ecuación (4.7), el término $v^2 = \frac{\kappa a^2}{6}$ corresponde a la rapidez de onda al cuadrado, por lo que al aplicar el método de diferencias finitas, este se convierte en $v_j^2 = \frac{\kappa a_j^2}{6}$. Definiendo $s_j = \frac{v_j \Delta\varphi}{\Delta a}$ y considerando las aproximaciones para las derivadas parciales presentes en la ecuación de WDW, se llega a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \Psi_j^{n+1} = & \left\{ 2(1 - s_j^2) + \frac{\Delta a s_j^2}{a_j} + \frac{2(\Delta a)^2 s_j^2}{3a_j^2} - \frac{36k(\Delta a)^2 s_j^2 a_j^2}{\kappa^2} \right. \\ & + \left. \frac{12(\Delta a)^2 s_j^2 a_j^4}{\kappa} \left(\frac{1}{2}m^2\varphi_n^2 - \frac{1}{24}\lambda\varphi_n^4 \right) \right\} \Psi_j^n + s_j^2 \left[\Psi_{j-1}^n + \Psi_{j+1}^n \left(1 - \frac{\Delta a}{a_j} \right) \right] \\ & - \Psi_j^{n-1} \}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Este esquema es el mismo usado para la ecuación de onda. Para hallar el criterio de convergencia, se pide que $s \leq 1$. Se propone que $s_j \leq 1$ ó para este caso en particular

$$\varphi_f - \varphi_i = \varphi_f \leq \sqrt{\frac{6}{k}} \frac{n}{j}. \quad (4.10)$$

4.2. Resultados: Diagramas de la función de onda

4.2.1. Primer caso

Las condiciones de frontera usadas para este caso fueron $0 \leq a \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2, J = 20$ y $N = 40$. Las funciones usadas como condición fueron

$$f(a) = 0, \quad (4.11)$$

$$g(a) = a(1 - a). \quad (4.12)$$

De manera general, se incluyen aquí los las líneas de código usadas para obtener los diagramas que se muestran a continuación. Para este caso, se fija el parámetro de curvatura $k = 0$. En lo que sigue, se muestra la variación de los parámetros m y l ,

```
function WheelerDeWitt_I
am=1; J=20; da=am/J; tm=2; N=40; dt=tm/N; K=1; k=0; m=0; l=0;
U=zeros(J+1,N+1);
V=zeros(J+1,N+1);
g=@(a) a.*(1-a);
for j=1:J+1; U(j,1)=0; end
for j=1:J+1; U(j,2)=U(j,1)+dt*g((j-1)*da); end
for n=2:N
for j=2:J
U(j,n+1)=(2+(K*dt^2)/9+(K*dt^2*j)/6-(K*dt^2*j^2)/3- ...
(6*k*dt^2*(da*j)^4)/K+2*dt^2*(da*j)^6*((m*dt*n)^2/2-...
(1*(dt*n)^4)/24) *U(j,n)+(K*(dt*j)^2/6) *U(j-1,n)+...
((K*dt^2*j)/6*(j-1)) *U(j+1,n)-U(j,n-1);
end
end
for n=1:N+1 % Aqui empiezan los cambios
for j=1:J+1
V(j,n)=(U(j,n))^2;
end
end % Aqui terminan los cambios
[X,T]=meshgrid(0:da:am,0:dt:tm);
figure(1)
mesh(T',X',V,'EdgeColor','blue')
ylabel('Scale factor','FontSize',14),
xlabel('Scalar field','FontSize',14)
title('Diagrama con f(a)=0, g(a)=a(1-a)')
figure(2)
pcolor(T',X',V), shading interp;
%Cambia U por V y tienes resultados anteriores
```

```

ylabel('Scale factor a','FontSize',14),
xlabel('scalar field','FontSize',14)
title('k=0, m=4, l=16 ')

```

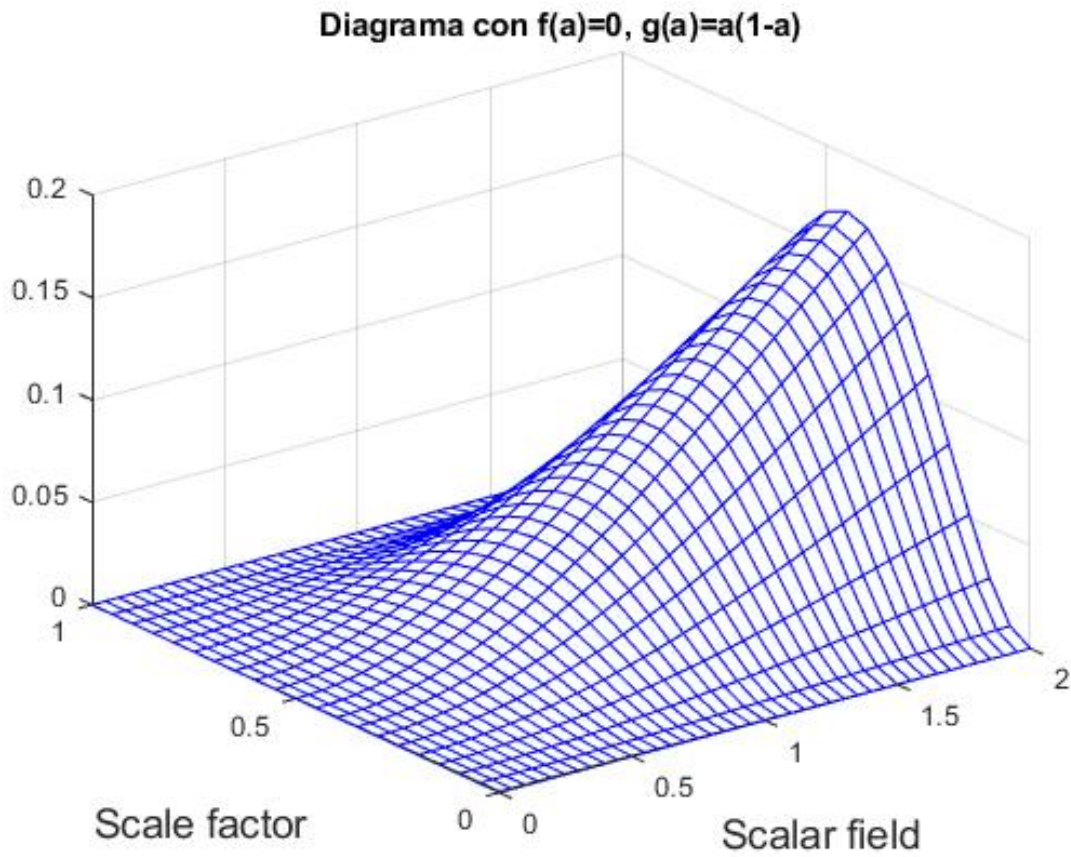


Figura 4.1. Diagrama de densidad de probabilidad con condiciones $f(a) = 0$, $g(a) = a(1 - a)$, $k = 0, m = 0, l = 0$

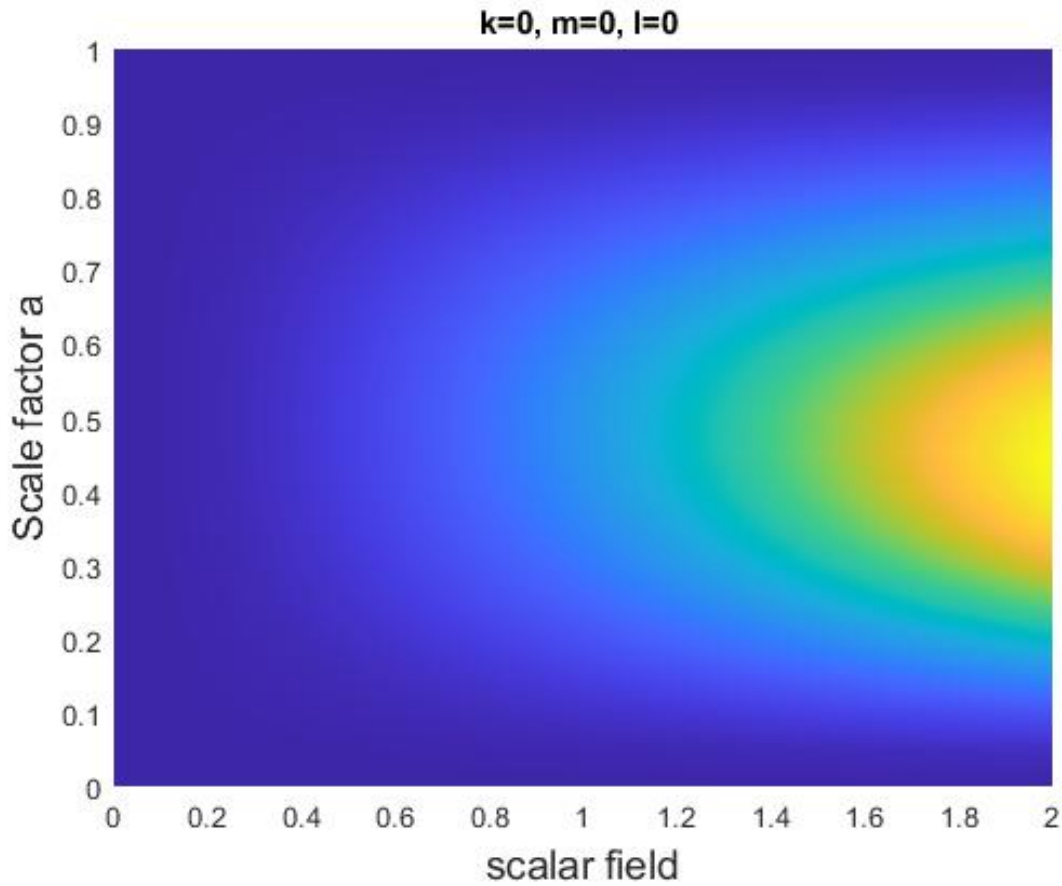


Figura 4.2. Diagrama de densidad de probabilidad con condiciones $f(a) = 0, g(a) = a(1 - a), k = 0, m = 0, l = 0$. Vista superior

4.2.2. Segundo caso

Las condiciones de frontera usadas para este caso fueron $0 \leq a \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 9, J = 100$ y $N = 300$. Las funciones fueron

$$f(a) = a(1 - a), \quad (4.13)$$

$$g(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (4.14)$$

Algunos de los diagramas obtenidos son los siguientes; estos representan la distribución de la función de onda al cuadrado en el dominio $[0, a_f] \times [0, \varphi_f]$. Se han cambiado los valores de los parámetros m, λ, J, N, σ y μ . Los dos últimos son parámetros de la distribución normal (4.14)

```
function WheelerDeWitt_II
mu=0.2; s=0.1; %Parametros de la funcion gaussiana
```

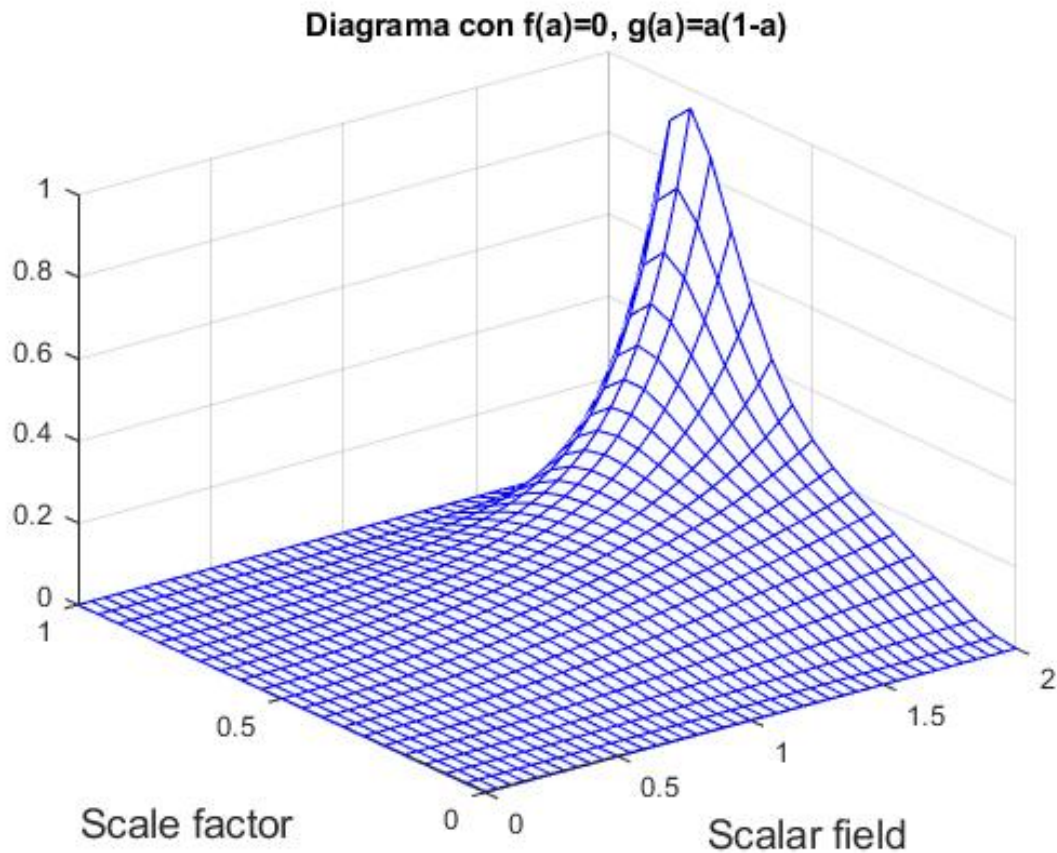


Figura 4.3. Diagrama de densidad de probabilidad con condiciones $f(a) = 0$, $g(a) = a(1 - a)$, $k = 0, m = 3, l = 9$

```

am=1; J=100; da=am/J;
tm=9; N=600; dt=tm/N;
%Parametros iniciales de la ecuacion de WheelerDeWitt
K=1; k=1; m=0; l=0; %parametros del potencial V
U=zeros(J+1,N+1);
V=zeros(J+1,N+1);
f=@(a) (1/s*sqrt(2*pi))*exp(-(a-mu)^2/(2*s^2));
% Definida de acuerdo a M. Spiegel, estadística
g=@(a) a.*(1-a);
for j=1:J+1; U(j,1)=g((j-1)*da); end
for n=1:N+1; U(1,n)=0; end %Sobre a=0, la funcion de onda es cero
for j=1:J+1; U(j,2)=U(j,1)+dt*f((j-1)*da); end
for n=2:N
for j=2:J
U(j,n+1)=(2+(K*dt^2)/9+(K*dt^2*j)/6-(K*dt^2*j^2)/3- ...
(6*k*dt^2*(da*j)^4)/K+2*dt^2*(da*j)^6*(-(m*dt*n)^2/2+ ...

```

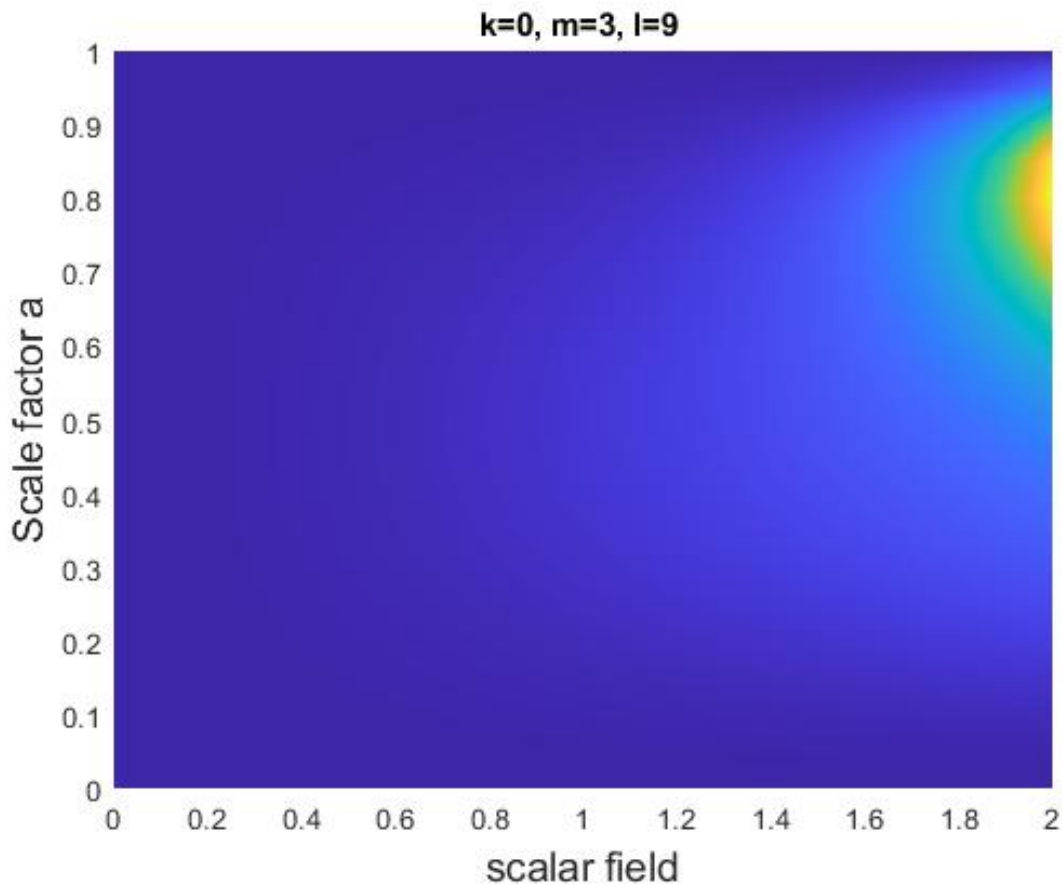


Figura 4.4. Diagrama de densidad de probabilidad con condiciones $f(a) = 0, g(a) = a(1 - a)$, $k = 0, m = 3, l = 9$. Vista superior

```
(1*(dt*n)^4)/24) *U(j,n)+ ...
(K*(dt*j)^2/6) *U(j-1,n)+((K*dt^2*j)/6*(j-1)) *U(j+1,n)-U(j,n-1);
end
end
for n=1:N+1
for j=1:J+1
V(j,n)=(U(j,n))^2;
end
end % Aqui terminan los cambios
%subplot(1,2,1)
[X,T]=meshgrid(0:da:am,0:dt:tm);
figure(1)
%mesh(X',T',V,'EdgeColor','blue')
%Cambia U por V y tienes resultados anteriores
plot3(T',X',V);
ylabel('Factor de escala ','FontSize',14),
```

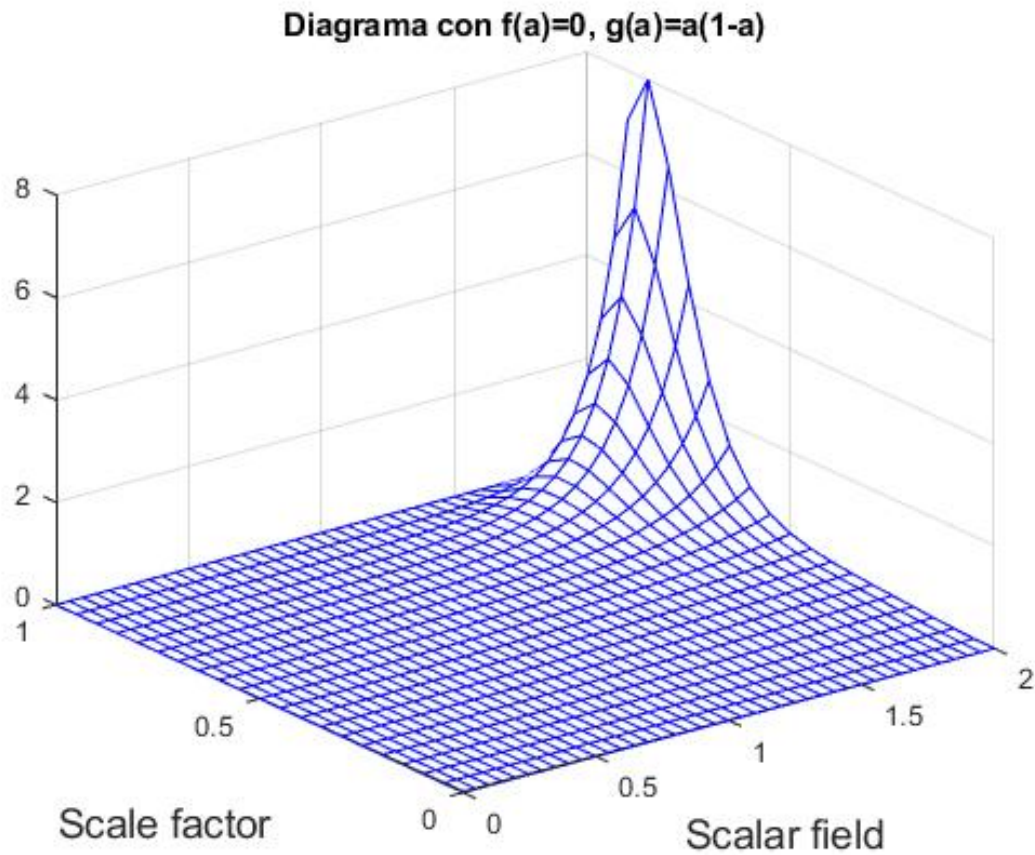


Figura 4.5. Diagrama de densidad de probabilidad con condiciones $f(a) = 0$, $g(a) = a(1 - a)$, $k = 0$, $m = 4$, $l = 16$.

```

xlabel('Campo escalar','FontSize',14)
title('\psi^2 y f función normal')
%subplot(1,2,2)
figure(2)
pcolor(T',X',V), shading interp;
%Cambia U por V y tienes resultados anteriores
ylabel('Scale factor a','FontSize',14),
xlabel('scalar field','FontSize',14)
title('m=2, l=5, \sigma =0.1, \mu = 0.1')

```

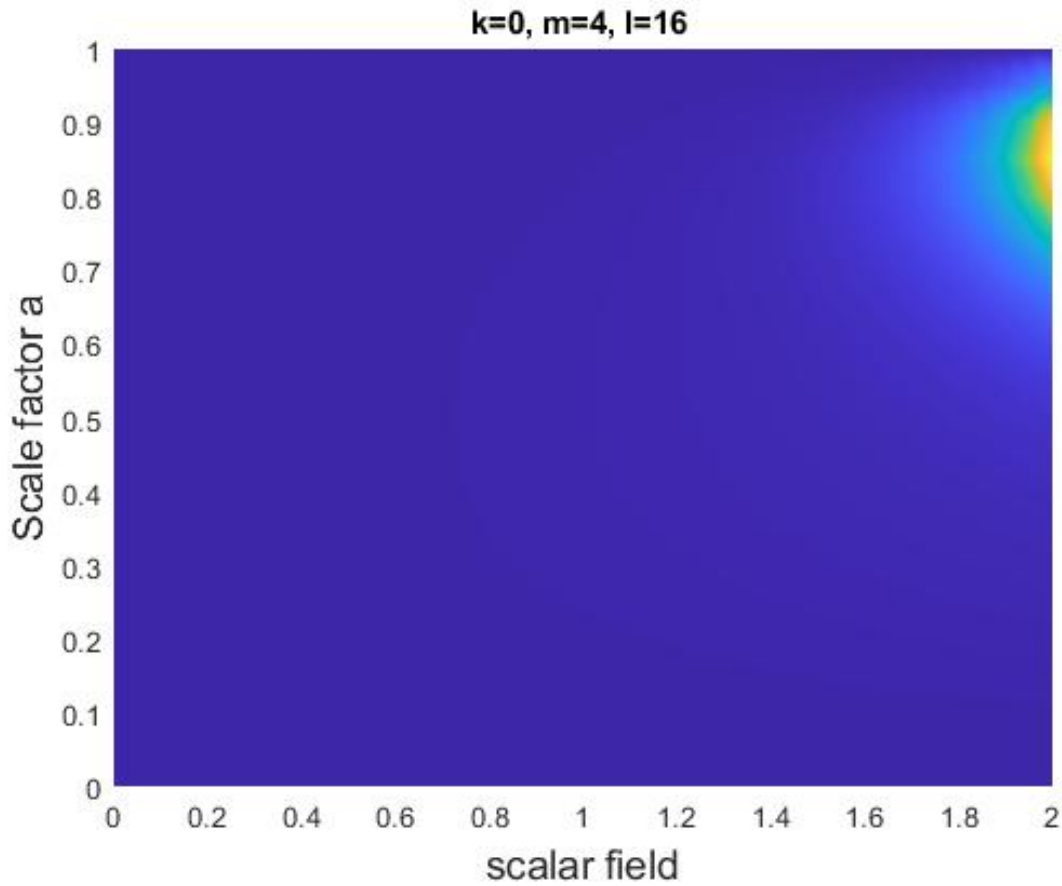


Figura 4.6. Diagrama de densidad de probabilidad con condiciones $f(a) = 0$, $g(a) = a(1 - a)$, $k = 0, m = 4, l = 16$. Vista superior

4.2.3. Tercer caso

Las condiciones de frontera usadas para este caso fueron $0 \leq a \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 9, J = 100$ y $N = 300$. Las funciones fueron

$$f(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (4.15)$$

$$g(a) = f(a). \quad (4.16)$$

Algunos de los diagramas obtenidos son los siguientes; estos representan la distribución de la función de onda al cuadrado en el dominio $[0, a_f] \times [0, \varphi_f]$. Se han cambiado

ψ^2 y g función normal

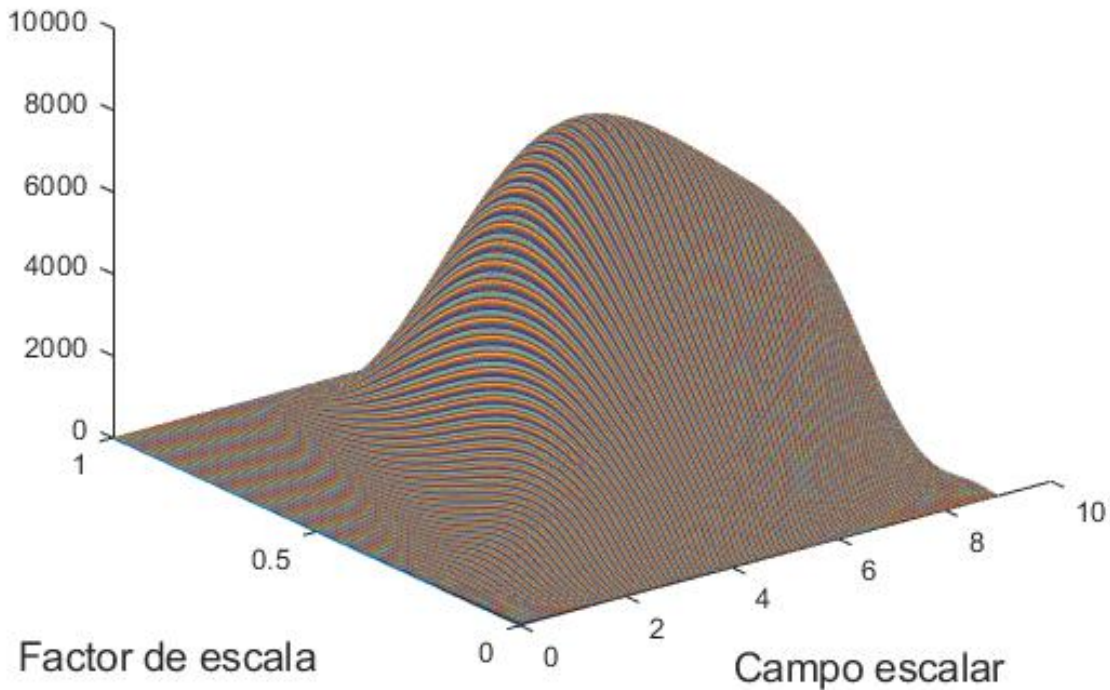


Figura 4.7. Diagrama de densidad de probabilidad con condiciones $f(a) = a(1 - a)$, $g(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(\sigma-\mu)^2}{2\sigma^2}$, $k = 0, m = 0, l = 0$.

los valores de los parámetros m, λ, J, N, σ y μ . Los dos últimos son parámetros de la distribución normal (4.15)

```
function WheelerDeWitt_III
mu=0.5; s=0.1; %Parametros de la funcion gaussiana
am=1; J=100; da=am/J;
tm=9; N=900; dt=tm/N;
%N debe ser mucho mayor que J para mantener las condiciones de estabilidad
%Parametros iniciales de la ecuacion de WheelerDeWitt
K=1; k=0; m=0; l=0; %parametros del potencial V
U=zeros(J+1,N+1);
V=zeros(J+1,N+1);
f=@(a) (1/s*sqrt(2*pi))*exp(-(a-mu)^2/(2*s^2));
% Definida de acuerdo a M. Spiegel, estadística
%g=@(a) a.*(1-a);
for j=1:J+1; U(j,1)=f((j-1)*da ); end
```

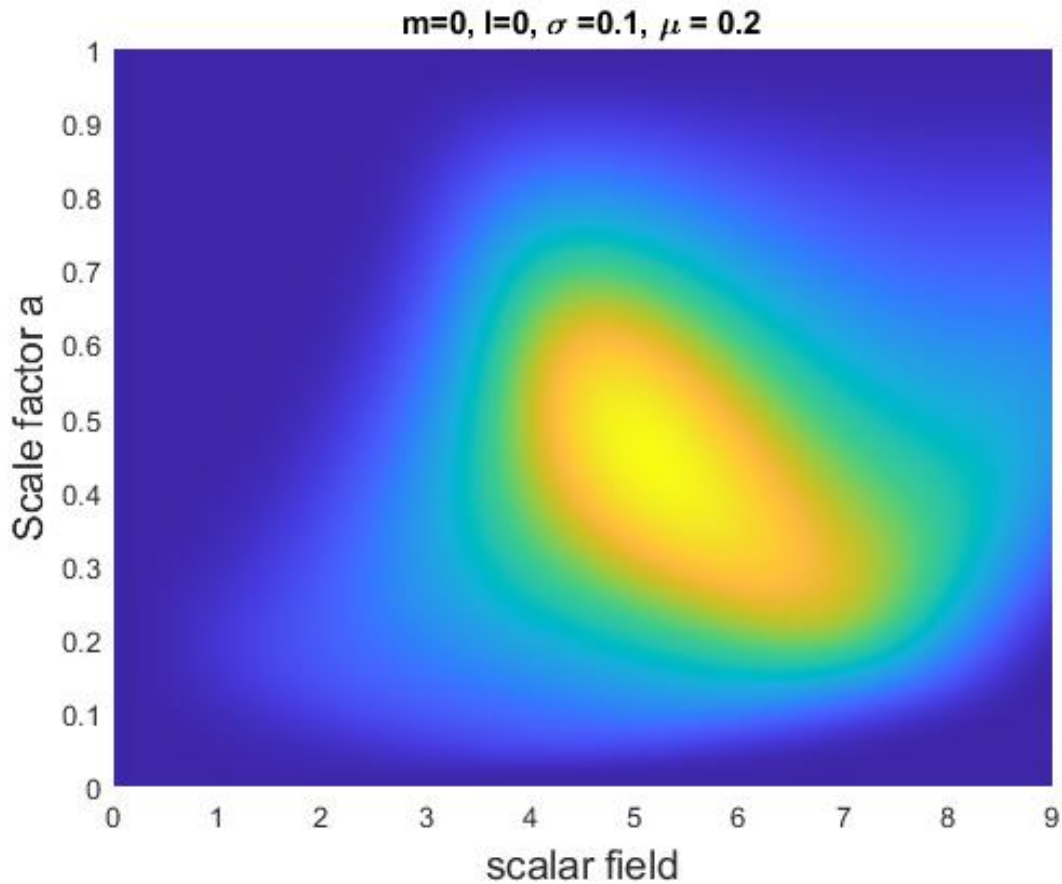


Figura 4.8. Diagrama de densidad de probabilidad con condiciones $f(a) = a(1 - a)$, $g(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sigma-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, $k = 0$, $m = 0$, $l = 0$. Vista superior

```

for n=1:N+1; U(1,n)=0; end %Sobre a=0, la funcion de onda es cero
for j=1:J+1; U(j,2)=U(j,1)+dt*f((j-1)*da); end
for n=2:N
for j=2:J
U(j,n+1)=(2*(1-(dt/da)^2*(K*(da*j)^2/6))+K*j*dt^2/6 +K*dt^2/9 -...
6*k*dt^2*(da*j)^4/K +...
2*(dt)^2*(da*j)^6*(-1/2*m^2*(dt*n)^2 + 1/24*l*(dt*n)^4))*U(j,n) +...
(dt/da)^2*(K*(da*j)^2)/6*(U(j-1,n) + (1-1/j)*U(j+1,n) ) -U(j,n-1);
end
end
for n=1:N+1 % Aqui empiezan los cambios
for j=1:J+1
V(j,n)=(U(j,n))^2;
end
end % Aqui terminan los cambios

```

ψ^2 y f función normal

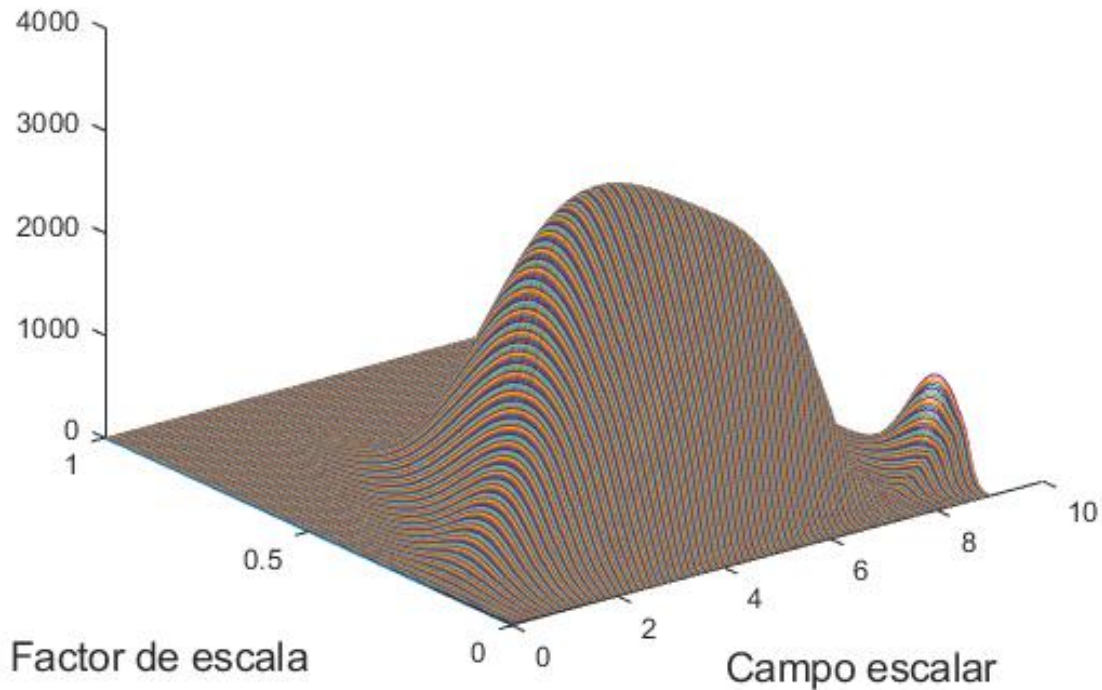


Figura 4.9. Diagrama de densidad de probabilidad con condiciones $f(a) = a(1 - a)$, $g(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(\sigma-\mu)^2}{2\sigma^2}$, $k = 0, m = 2, l = -13$.

```

%subplot(1,2,1)
[X,T]=meshgrid(0:da:am,0:dt:tm);
figure(1)
%mesh(T',X',V,'EdgeColor','blue');
plot3(T',X',V);
%Cambia U por V y tienes resultados anteriores
ylabel('Factor de escala ','FontSize',14),
xlabel('Campo escalar','FontSize',14)
title('\psi^2 y g función normal')
%subplot(1,2,2)
figure(2)
pcolor(T',X',V), shading interp;
%Cambia U por V y tienes resultados anteriores
ylabel('Scale factor a','FontSize',14),
xlabel('scalar field','FontSize',14)

```

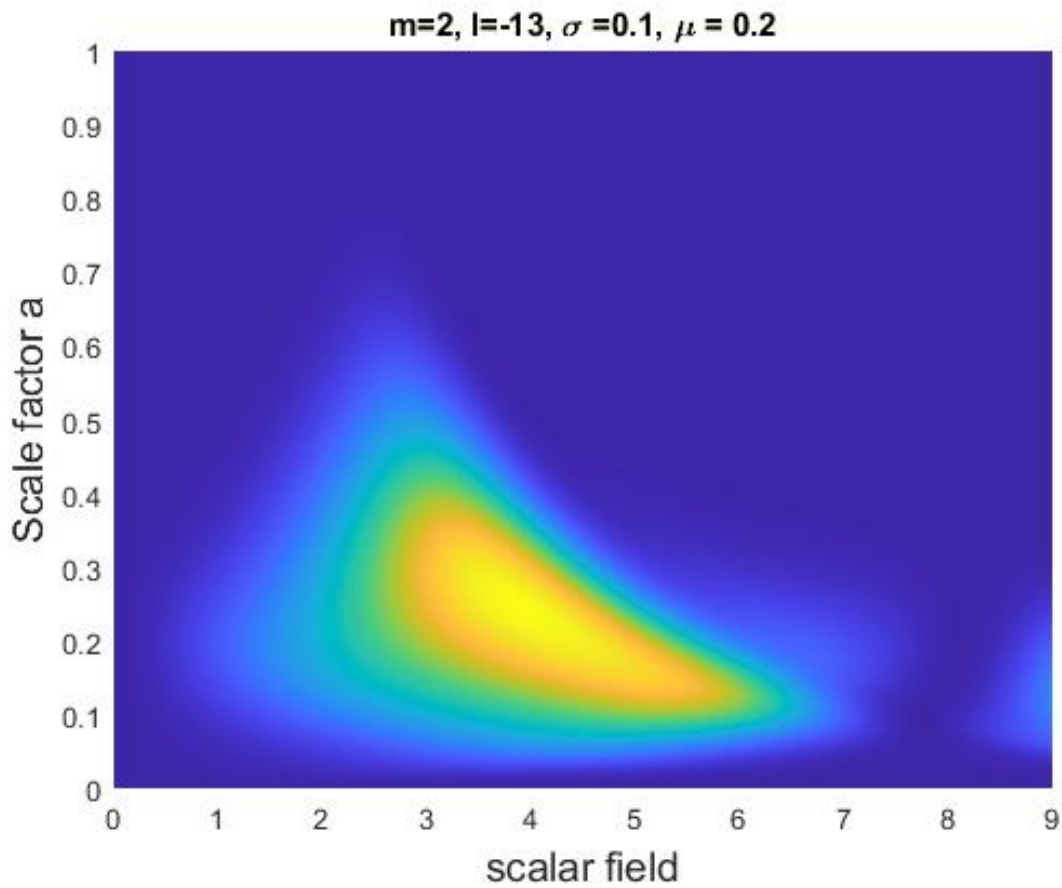


Figura 4.10. Diagrama de densidad de probabilidad con condiciones $f(a) = a(1 - a)$, $g(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(\sigma-\mu)^2}{2\sigma^2}$, $k = 0$, $m = 2$, $l = -13$. Vista superior

```
title('m=20, l=25, \sigma =0.1, \mu = 0.1')
```

ψ^2 y f función normal

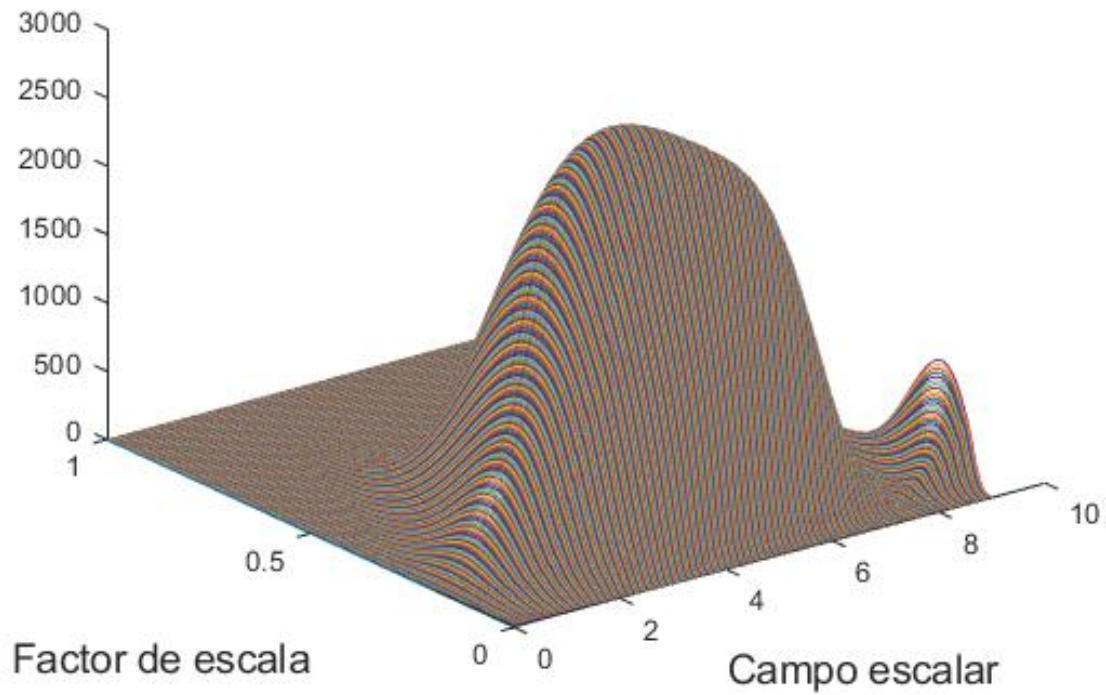


Figura 4.11. Diagrama de densidad de probabilidad con condiciones $f(a) = a(1 - a)$, $g(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(\sigma-\mu)^2}{2\sigma^2}$, $k = 0, m = 4, l = -6$.

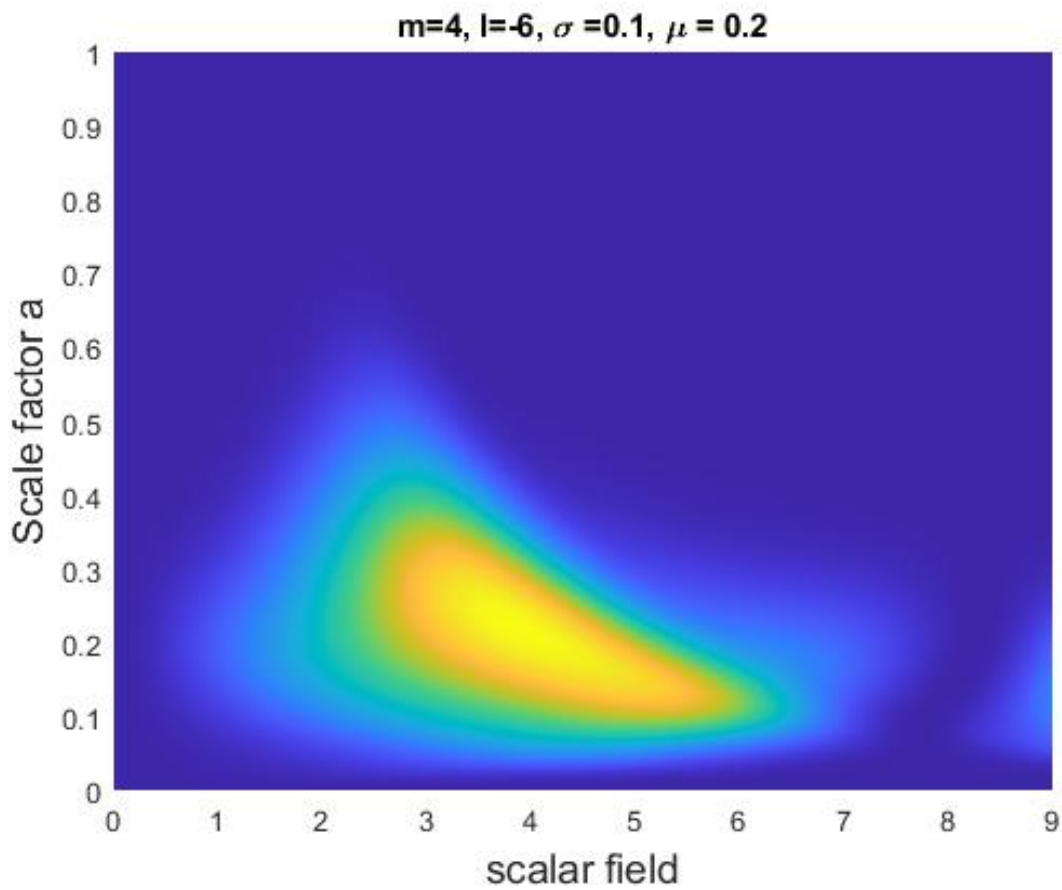


Figura 4.12. Diagrama de densidad de probabilidad con condiciones $f(a) = a(1 - a)$, $g(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(\sigma-\mu)^2}{2\sigma^2}$, $k = 0$, $m = 4$, $l = -6$. Vista superior

ψ^2 , f y g funciones normales

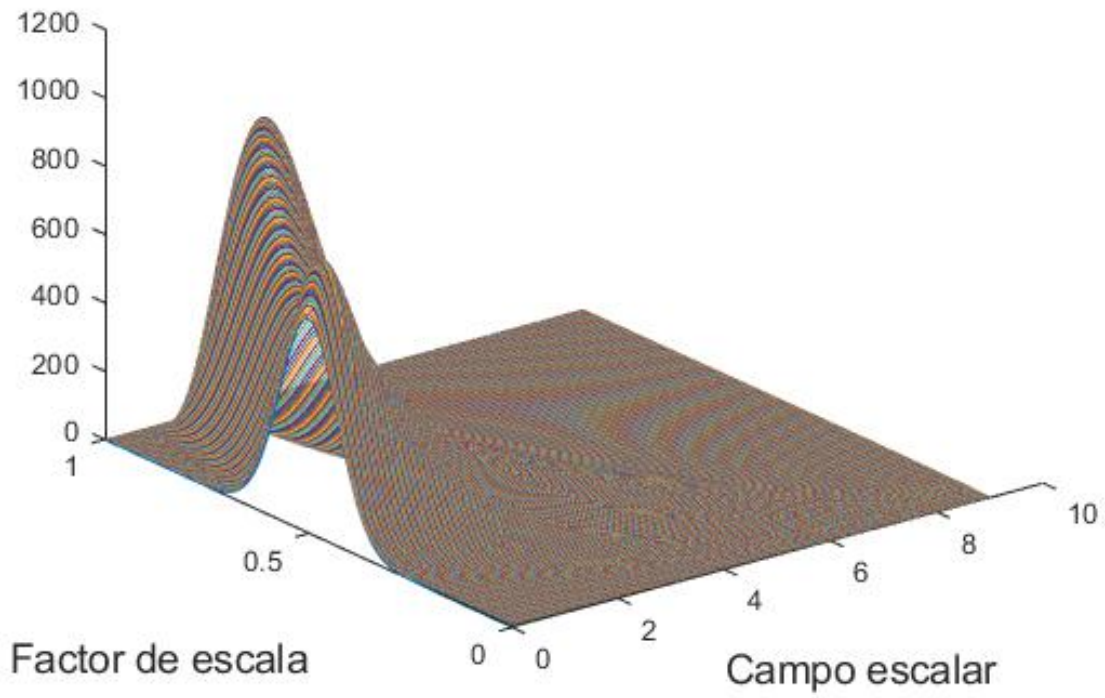


Figura 4.13. Diagrama de densidad de probabilidad con condiciones $f(a) = g(a)$, $g(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(\sigma-\mu)^2}{2\sigma^2}$, $k = 0, m = 0, l = 0$.

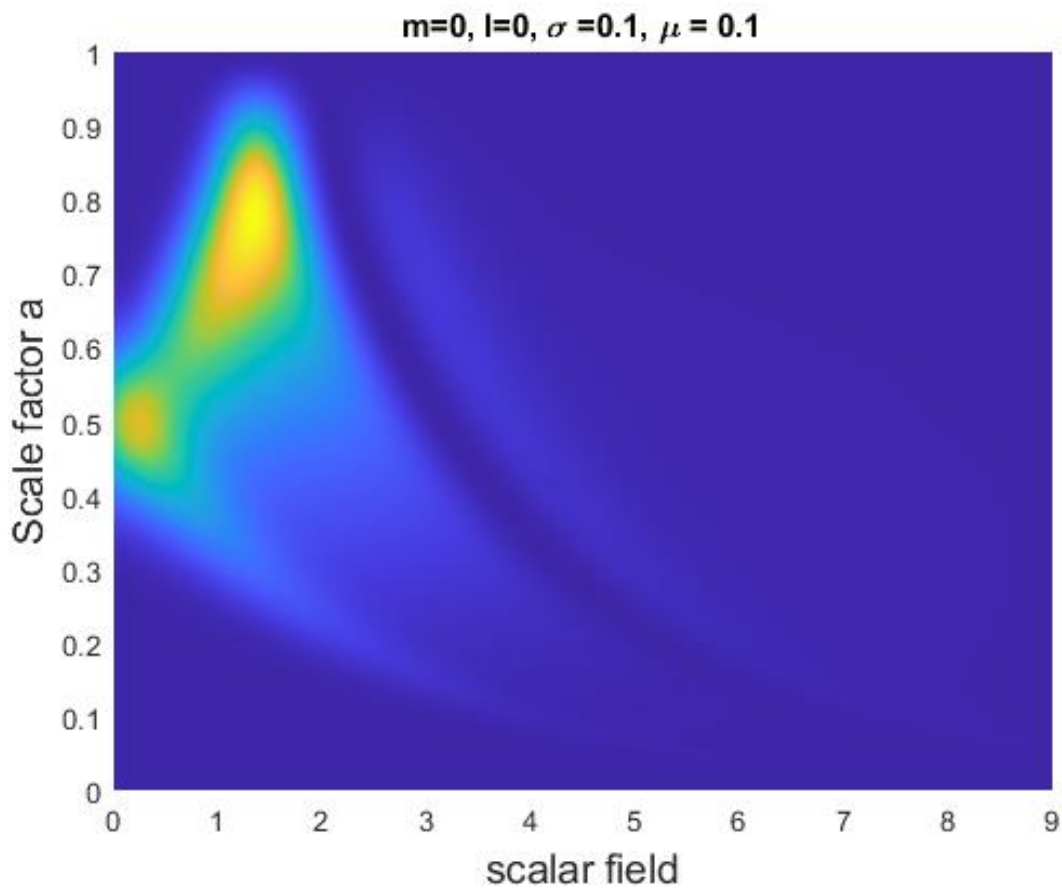


Figura 4.14. Diagrama de densidad de probabilidad con condiciones $f(a) = g(a)$, $g(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(\sigma-\mu)^2}{2\sigma^2}$, $k = 0$, $m = 0$, $l = 0$. Vista superior

ψ^2 , f y g funciones normales

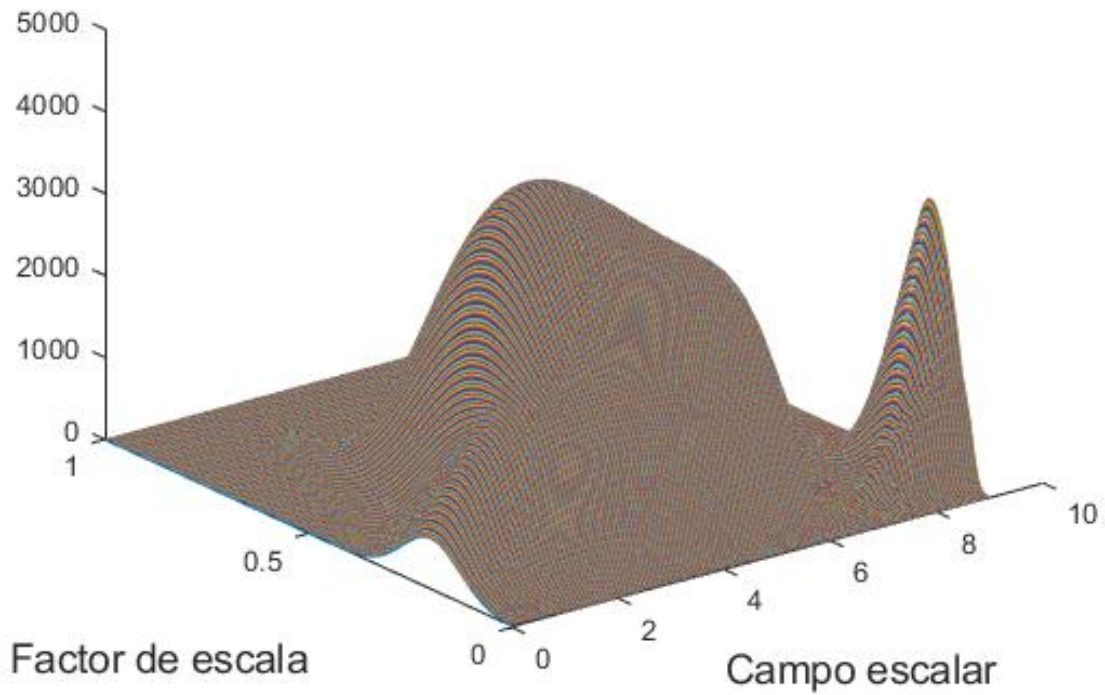


Figura 4.15. Diagrama de densidad de probabilidad con condiciones $f(a) = g(a)$, $g(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(\sigma-\mu)^2}{2\sigma^2}$, $k = 0, m = 3, l = -14$.

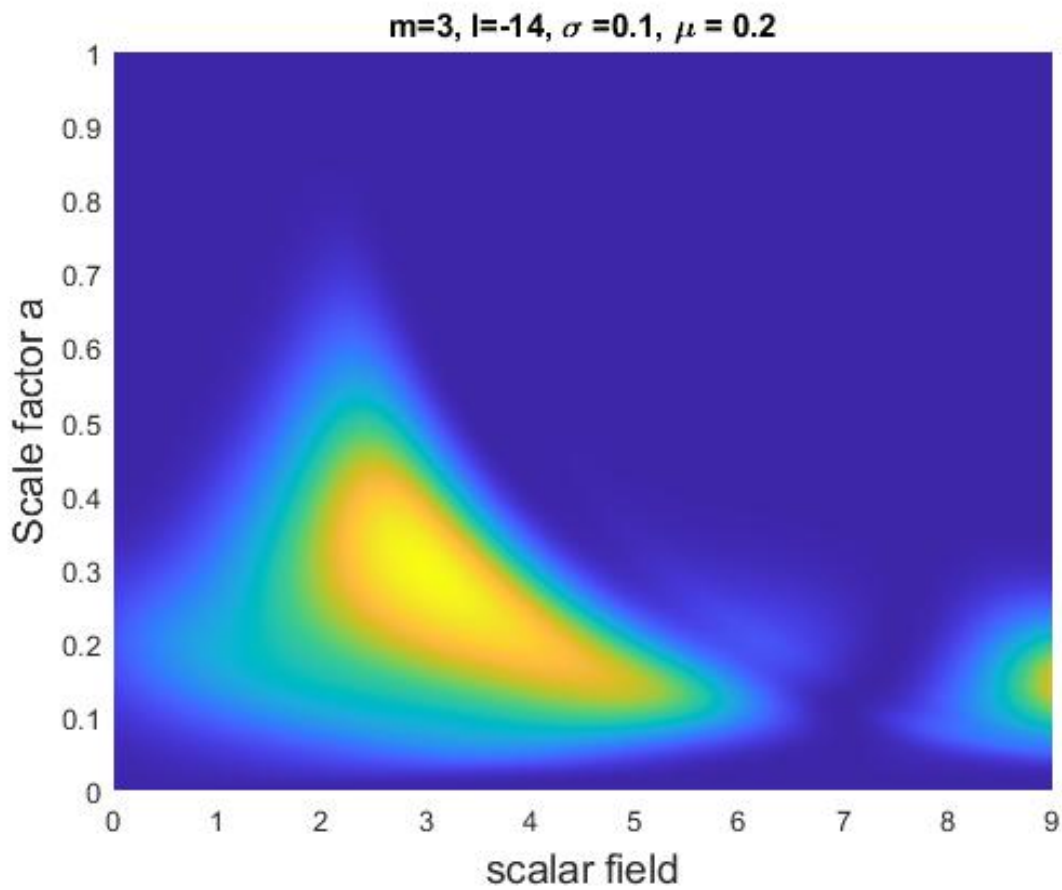


Figura 4.16. Diagrama de densidad de probabilidad con condiciones $f(a) = g(a)$, $g(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(\sigma-\mu)^2}{2\sigma^2}$, $k = 0$, $m = 3$, $l = -14$. Vista superior

ψ^2 , f y g funciones normales

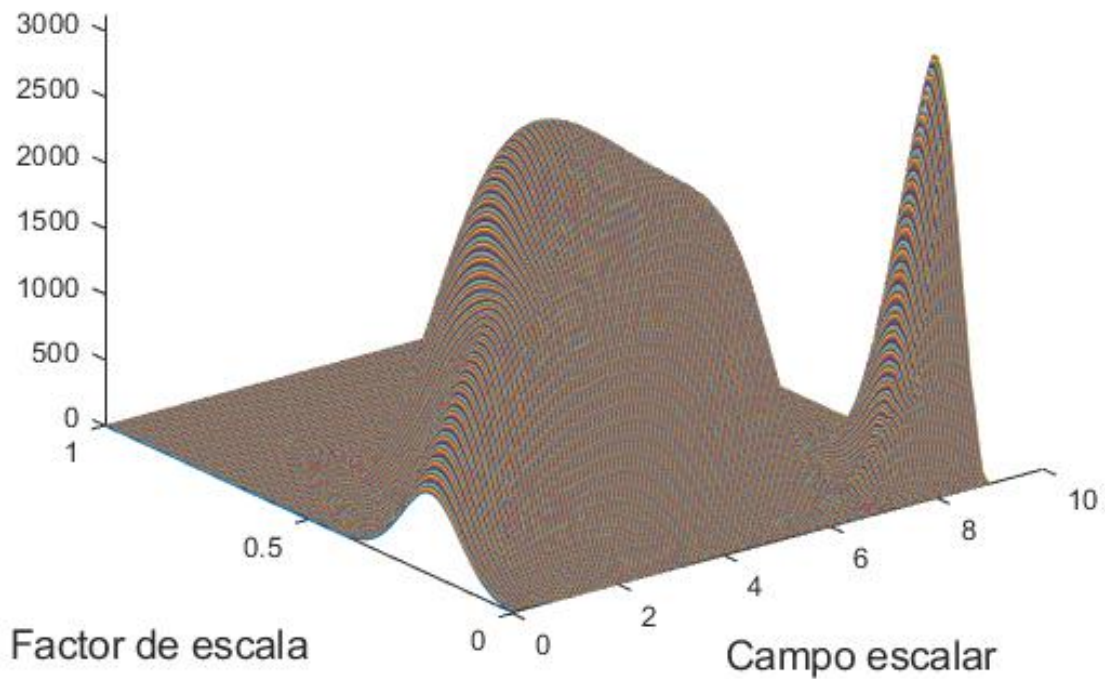


Figura 4.17. Diagrama de densidad de probabilidad con condiciones $f(a) = g(a)$, $g(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(\sigma-\mu)^2}{2\sigma^2}$, $k = 0, m = 8, l = -14$.

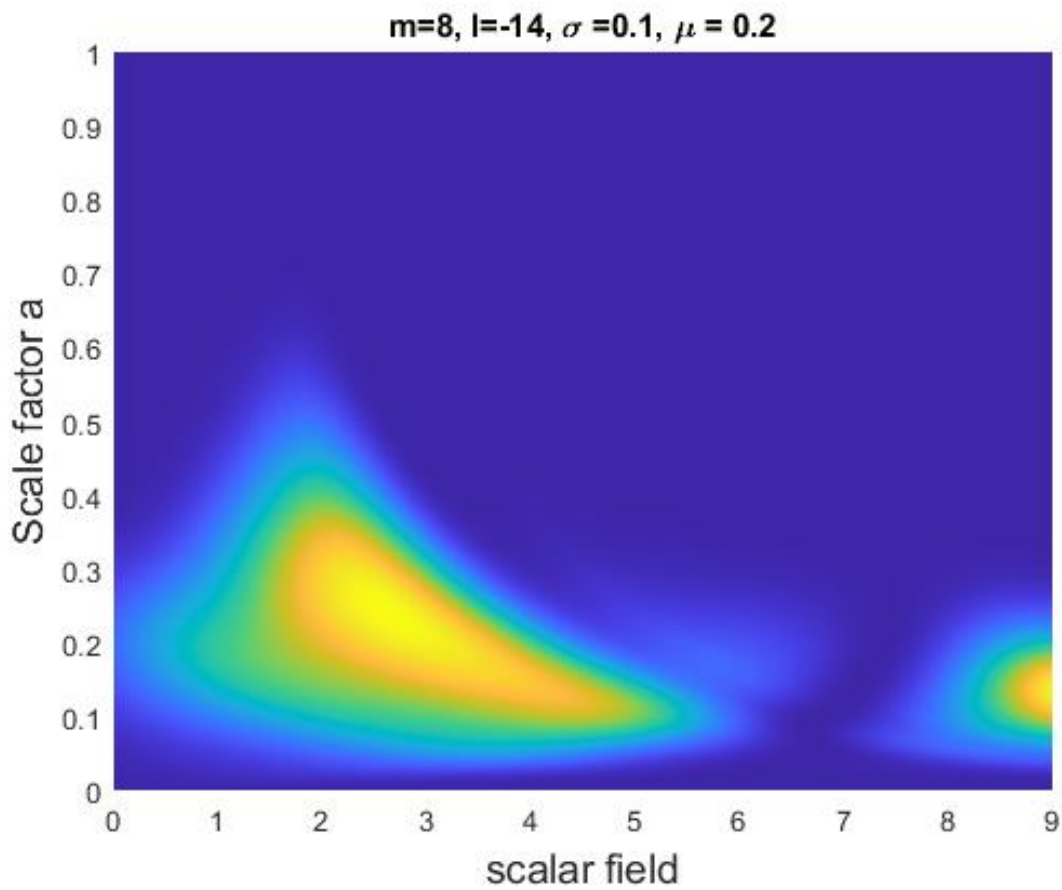


Figura 4.18. Diagrama de densidad de probabilidad con condiciones $f(a) = g(a)$, $g(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(\sigma-\mu)^2}{2\sigma^2}$, $k = 0$, $m = 8$, $l = -14$. Vista superior

Capítulo 5

Conclusiones

Para la solución exacta de la ecuación de Wheeler-DeWitt, se ha visto que al suponer un potencial del campo escalar $V(\varphi) = V_0$ constante, es posible aplicar el método de variables separables para encontrar una solución analítica. En el caso que $V_0 = 0$, al calcular el valor medio del factor de escala a , se llega a dos soluciones; una que corresponde a un universo de DeSitter y la otra puede verse como resultado de la invariancia ante inversiones temporales.

Respecto al análisis numérico hecho en este trabajo, se ha trabajado en encontrar gráficas de la función de densidad de probabilidad de la solución numérica a la ecuación de Wheeler-DeWitt. Para el primer caso, los máximos se obtienen cuando $\varphi \rightarrow 2$ en el dominio. Cuando se calcula la solución para el caso $V_0 = 0$, no se observa algo que indique un crecimiento exponencial como el reportado en la solución exacta. Para el segundo caso, cuando se ha cambiado el dominio de φ y las funciones f y g bajo la condición $V_0 = 0$, tampoco se observa correspondencia a un crecimiento exponencial. Para el caso 3, donde ahora se supone que $f(a) = g(a)$, los máximos de la función están próximos cuando $\varphi \rightarrow 0$. Al cambiar ahora por un potencial $V(\varphi) \neq 0$, hay ocasiones en las que se manifiestan más de dos máximos en la gráfica 3D, como en la vista superior. Hasta el momento, no se ha encontrado algo que se haya reportado en la literatura.

Para la solución exacta, en el caso de un potencial constante distinto de cero; a pesar de haber hallado una solución que depende de funciones de Bessel, se tiene que determinar aún las condiciones iniciales de manera que se observe una solución físicamente viable, es decir, determinar el valor de las constantes C_1-C_4 , así como el valor de α y ω . De manera similar, se espera encontrar el valor medio del factor de escala a . En cuanto a la solución numérica, es necesario cambiar las condiciones de frontera y las condiciones iniciales, asimismo también las funciones $f(a)$ y $g(a)$ para encontrar más gráficas de la función de densidad de probabilidad.

Apéndice A

Cálculos de Mathematica

Estos son los calculos hechos en Mathematica para la función (3.14); se analizan los casos cuando $C_2 = 0$ y $C_1 = 0$ asimismo se ha hecho el cambio $\omega_1 \rightarrow \omega$, $N \rightarrow n$ y $\varphi \rightarrow \phi$. En todo momento se supone que $d \in \mathbb{R}_+$.

CASO $C_2 = 0$, $e^{-i\sqrt{6}n\omega} e^{\left(\frac{\sqrt{6}}{4} + i\omega\right)\phi}$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2d}} e^{-i\sqrt{6}n\omega} e^{\left(\frac{\sqrt{6}}{4} + i\omega\right)\phi} d\omega \right)$$

ConditionalExpression $\left[\sqrt{2\pi}\sqrt{d} \exp\left(-3dn^2 - \sqrt{6}dn\phi - \frac{1}{4}\phi(2d\phi + \sqrt{6})\right), \Re(d) > 0 \right]$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{2\pi}\sqrt{d} \exp\left(-3dn^2 - \sqrt{6}dn\phi - \frac{1}{4}\phi(2d\phi + \sqrt{6})\right) \right)^2 dn \right)$$

ConditionalExpression $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\pi^{3/2}\sqrt{d}e^{\sqrt{\frac{3}{2}}\phi}, \Re(d) > 0 \right]$

$$\left(\sqrt[4]{\frac{6}{\pi}} \sqrt{\sqrt{d}e^{\sqrt{\frac{3}{2}}\phi}} \exp\left(\frac{1}{4}\left(-\sqrt{6}\phi - 2d(6n^2 - 2\sqrt{6}n\phi + \phi^2)\right)\right) \right)$$

Simplify $\left[\frac{\sqrt{2\pi}\sqrt{d} \exp\left(-3dn^2 - \sqrt{6}dn\phi - \frac{1}{4}\phi(2d\phi + \sqrt{6})\right)}{\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3}}\pi^{3/2}\sqrt{d}e^{\sqrt{\frac{3}{2}}\phi}}} \right]$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} n \left(\sqrt[4]{\frac{6}{\pi}} \sqrt{\sqrt{d}e^{\sqrt{\frac{3}{2}}\phi}} \exp\left(\frac{1}{4}\left(-\sqrt{6}\phi - 2d(6n^2 - 2\sqrt{6}n\phi + \phi^2)\right)\right) \right)^2 dn \right)$$

ConditionalExpression $\left[\frac{\phi}{\sqrt{6}}, \Re(d) > 0 \right]$

Plot $\left[e^{\frac{\phi}{\sqrt{6}}}, \{\phi, -2\sqrt{6}, 2\sqrt{6}\} \right]$

$$\text{CASO } C_1 = 0, e^{-i\sqrt{6}n\omega} e^{-\left(\frac{\sqrt{6}}{4}+i\omega\right)\phi}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2d}} e^{-i\sqrt{6}n\omega} e^{-\left(\frac{\sqrt{6}}{4}+i\omega\right)\phi} d\omega \right)$$

$$\text{ConditionalExpression}\left[\sqrt{2\pi}\sqrt{d}\exp\left(-3dn^2 - \sqrt{6}dn\phi - \frac{1}{4}\phi(2d\phi + \sqrt{6})\right), \Re(d) > 0\right]$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi}\sqrt{d}\exp\left(-3dn^2 - \sqrt{6}dn\phi - \frac{1}{4}\phi(2d\phi + \sqrt{6})\right)^2 dn \right)$$

$$\text{ConditionalExpression}\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\pi^{3/2}\sqrt{d}e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}\phi}, \Re(d) > 0\right]$$

$$\left(\sqrt[4]{\frac{6}{\pi}} \sqrt{\sqrt{d}e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}\phi}} \exp\left(\frac{1}{4}(\sqrt{6}\phi - 2d(6n^2 + 2\sqrt{6}n\phi + \phi^2))\right) \right)$$

$$\text{Simplify}\left[\frac{\sqrt{2\pi}\sqrt{d}\exp\left(-3dn^2 - \sqrt{6}dn\phi - \frac{1}{4}\phi(2d\phi + \sqrt{6})\right)}{\sqrt{\frac{2}{3}}\pi^{3/2}\sqrt{d}e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}\phi}}\right]$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} n \left(\sqrt[4]{\frac{6}{\pi}} \sqrt{\sqrt{d}e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}\phi}} \exp\left(\frac{1}{4}(\sqrt{6}\phi - 2d(6n^2 + 2\sqrt{6}n\phi + \phi^2))\right) \right)^2 dn \right)$$

$$\text{ConditionalExpression}\left[-\frac{\phi}{\sqrt{6}}, \Re(d) > 0\right]$$

$$\text{Plot}\left[e^{-\frac{\phi}{\sqrt{6}}}, \{\phi, -2\sqrt{6}, 2\sqrt{6}\}\right]$$

Bibliografía

- [Bojowald, 2010] Bojowald, M. (2010). *Canonical gravity and applications: cosmology, black holes, and quantum gravity*. Cambridge University Press.
- [Bowman, 2012] Bowman, F. (2012). *Introduction to Bessel functions*. Courier Corporation.
- [Copeland and Skordis, 2015] Copeland, E. and Skordis, C. (2015). Modern cosmology notes. *School of physics and astronomy, University of Nottingham*.
- [Corichi and Nunez, 1991] Corichi, A. and Nunez, D. (1991). Introducción al formalismo adm. *Revista Mexicana de Física*, 37(4):720–747.
- [De la Peña, 2014] De la Peña, L. (2014). *Introducción a la mecánica cuántica*. Fondo de Cultura económica.
- [Dodelson and Schmidt, 2020] Dodelson, S. and Schmidt, F. (2020). *Modern cosmology*. Academic Press.
- [Ellis et al., 2012] Ellis, G. F., Maartens, R., and MacCallum, M. A. (2012). *Relativistic cosmology*. Cambridge University Press.
- [Griffiths, 1962] Griffiths, D. J. (1962). *Introduction to quantum mechanics*. Pearson International Edition (Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, 2005).
- [Henneaux and Teitelboim, 2020] Henneaux, M. and Teitelboim, C. (2020). *Quantization of gauge systems*. Princeton university press.
- [Kiefer, 1988] Kiefer, C. (1988). Wave packets in minisuperspace. *Physical Review D*, 38(6):1761.
- [Kiefer and Sandhöfer, 2022] Kiefer, C. and Sandhöfer, B. (2022). Quantum cosmology. *Zeitschrift für Naturforschung A*.
- [Liddle, 2015] Liddle, A. (2015). *An introduction to modern cosmology*. John Wiley & Sons.
- [Logan, 2014] Logan, J. D. (2014). *Applied partial differential equations*. Springer.
- [Meyer Forgues et al., 2020] Meyer Forgues, G. F. et al. (2020). Condiciones iniciales en cosmología cuántica. Master's thesis.

- [Parnovsky and Parnowski, 2017] Parnovsky, S. L. and Parnowski, A. S. (2017). *How the Universe Works: Introduction to Modern Cosmology*. World Scientific.
- [Pinchover et al., 2005] Pinchover, Y., Rubinstein, J., et al. (2005). *An introduction to partial differential equations*, volume 10. Cambridge university press.
- [Ramos-Sánchez, 2018] Ramos-Sánchez, S. (2018). *Relatividad para futuros físicos*, volume 1. CopIt ArXives.
- [Rothe and Rothe, 2010] Rothe, H. J. and Rothe, K. D. (2010). *Classical and quantum dynamics of constrained Hamiltonian systems*, volume 81. World Scientific.
- [Sakurai and Napolitano, 2011] Sakurai, J. and Napolitano, J. (2011). *Modern quantum mechanics*, 2: nd edition. *Person New International edition*.
- [Swanson, 2006] Swanson, D. G. (2006). *Quantum Mechanics: Foundations and Applications*. CRC Press.
- [Zettili, 2003] Zettili, N. (2003). *Quantum mechanics: concepts and applications*.