Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Un recorrido por las variedades diferenciables

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Matemáticas

por

José Noé Díaz Vargas

Asesorado por

M. en C. Juan Francisco Estrada García

Puebla Pue.
Septiembre de 2025

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Un recorrido por las variedades diferenciables

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Matemáticas

por

José Noé Díaz Vargas

Asesorado por

M. en C. Juan Francisco Estrada García

Puebla Pue.
Septiembre de 2025

Título: Un recorrido por las variedades diferenciables
Estudiante: José Noé Díaz Vargas

COMITÉ

Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna
Presidente

M. en C. Julio Erasto Poisot Macías
Secretario

M. en C. Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez
Vocal

Vocal

M. en C. Juan Francisco Estrada García
Asesor

Agradecimientos

Tengo que agradecer a Dios, por prestarme esta vida maravillosa, la voluntad para terminar la carrera de matemáticas y poder culminar este trabajo de tesis.
También tengo que agradecer a mi madre y seres queridos, familiares que me acompañaron y guiaron a lo largo de mi formación, que me dieron consejos y orientación en la vida misma.

A mis compañeros de carrera y facultad David, Javier, Isaac, Vanessa, por el tiempo compartido en aulas y fuera de ellas, las horas de estudio, charlas y consejos que tuvimos relacionados a las matemáticas que se estudian en mi tan querida facultad de ciencias físico matemáticas de la BUAP, además de su gran amistad.

A todos los demás compañeros de diversas carreras de la facultad con los cuales tuve oportunidad de coincidir en clases o compartiendo algún momento entre clases, muchas gracias por haberme permitido conocer un poco de ustedes y la visión que tienen de las matemáticas.

A mi jurado por su valiosa retroalimentación, en la revisión de este trabajo al Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna , al M. en C. Julio Erasto Poisot Macías y al M. en C. Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez

Finalmente le agradezco al M. en C. Juan Francisco Estrada García por su apoyo y dirección en el desarrollo de este trabajo de tesis y de sus enseñanzas en el aula, donde pude aprender de el materias de mi interés sin las cuales no tendría claro cuál es el camino profesional que deseo seguir.
A todos ustedes, muchas gracias.

Índice general

Índice de figuras

Resumen

El propósito general de este trabajo de tesis es conocer como el estudio del concepto de variedad diferenciable o suave generaliza el cálculo diferencial en $\mathbb{R}^n$. A lo largo de los tres capítulos que contiene esta tesis enunciaremos los conceptos necesarios para esta tarea.

En el primer capítulo se dan definiciones de topología general y de teoría de conjuntos; tales como espacio topológico y subespacio topológico, base de una topología, continuidad, compacidad, conexidad además se complementa con ejemplos. Para dar la definición de variedad topológica las nociones de segundo axioma de numerabilidad o 2-numerable, espacio topológico de Hausdorff y el de homeomorfismo son de gran importancia.

Los teoremas **1.0.1, 1.0.2, 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3, 1.1.4, 1.1.5, 1.1.6, 1.1.7, 1.1.8**, los lemas **1.1.1, 1.1.2** y los corolarios **1.1.1, 1.1.2** tratan sobre teoría de conjuntos y topología general, se dejan sin demostración porque solo se pretende recordar las propiedades que se enuncian y aplicarlas en definiciones, teoremas, proposiciones y ejemplos de los capítulos 2 y 3.

Siguiendo a los autores Prieto de Castro en la referencia [9] , y a Tu en la referencia [10] las proposiciones **1.1.1, 1.1.2, 1.1.3**, las enunciaremos pero no se ofrecerá la demostración, como posteriormente veremos , serán útiles para entender los ejemplos de variedades topológicas y diferenciables.

En el segundo capítulo se enuncian los teoremas de invariancia como son el teorema de invariancia de dominio, que además deriva al teorema de invariancia de dimensión . Posteriormente se da la definición de espacio localmente Euclidiano necesario para definir variedad topológica, los teoremas de invariancia mencionados anteriormente le dan buen sentido a esa definición. Enseguida se establecen definiciones que surgen a partir de variedad topológica como el de carta, sistema de coordenadas, función de transición. Posteriormente se presentan ejemplos de variedades topológicas.

El teorema **2.0.1** no se demostrará porque como indica Prieto de Castro en la referencia [9], requiere de conocimientos de topología algebraica, pero nos será útil para probar el teorema **2.0.2**.

En el tercer capítulo nos interesamos en definir variedad diferenciable, subvariedades, suavidad de una función de valor real, suavidad de un mapeo entre dos variedades diferenciables, difeomorfismo entre dos variedades diferenciables o C^∞, y más resultados que nos serán de gran utilidad para poder estudiar por ejemplo el teorema de la función inversa aplicada a variedades diferenciables.
La propiedad **3.0.1** es interesante tenerla en cuenta, pero siguiendo a la referencia [5] se deja sin demostración, del teorema **3.0.1** solo nos interesa tener presentes sus propiedades.
Culminamos todo este trabajo con un corolario que es consecuencia del teorema de la función inversa para variedades.

Palabras clave: *Espacio topológico, Subespacio topológico, Continuidad, Homeomorfismo, Espacio topológico Hausdorff, Espacio localmente Euclidiano, Segundo axioma de numerabilidad o axioma 2-Numerable, Invariancia de dominio, Invariancia de la dimensión, Variedad topológica, Carta, Sistema coordenado, Atlas, Atlas maximal, Difeomorfismo entre variedades diferenciables, Funciones de transición, Suavidad de funciones de valor real, Suavidad entre mapeos de variedades diferenciables, Teorema de la función inversa para variedades.*

Introducción

Como muchos conceptos fundamentales en matemáticas, el de variedad no se debe a una sola persona, más bien fue producto de años de trabajo de diversos matemáticos, por nombrar a algunos, el matemático alemán Carl Friedriech Gauss usó libremente coordenadas en superficies y tuvo la idea de carta, es más, al parecer fue el primero en considerar una superficie como un espacio abstracto que existe por derecho propio, independientemente de una incrustación particular en un espacio Euclidiano en su trabajo "Disquisitiones generales circa superficies curvas" (Disquisiciones generales alrededor de superficies curvas) publicada en 1827. Por otro lado, la idea de variedad diferenciable fue introducida por otro matemático alemán llamado Bernhard Riemann, motivado por el estudio de funciones de variable compleja desde el punto de vista geométrico estableció los fundamentos de la geometría diferencial de dimensiones altas en Gotinga en su tesis doctoral " Uber die hypothesen welche der Geometrizu grunde lige" (Sobre las hipótesis que fundamentan la geometría) en el año 1854. Por supuesto, la palabra variedad es una traducción de la palabra alemana "Mannigfalgtiekeit" la cual Riemann utilizó para describir los objetos que estudió, luego esa idea fue trabajada por otros matemáticos al final del siglo XlX y a principios del siglo XX. La formalización de variedad diferenciable requirió de la teoría de conjuntos de Georg Cantor y del aporte de muchos otros matemáticos entre los cuales se encuentra Poincaré. En dichos trabajos los espacios Euclidianos locales figuraron prominentemente. En 1931 se encontró la definición moderna de variedad diferenciable (c.f.)[10] basada en la topología de conjuntos y un grupo de funciones de transición que estudiaremos con entusiasmo a través de esta tesis; los cuales generalizaron las ideas introducidas por Gauss en el estudio de superficies diferenciables quien además fue el director de tesis doctoral de Riemann. Intuitivamente, una variedad diferenciable es una generalización de curvas y superficies a dimensiones altas, pero como veremos en el desarrollo de esta tesis, una variedad suave puede ser incluso el grupo general lineal.

Una variedad es localmente Euclidiana en el sentido de que en cada punto tiene una vecindad llamada carta, homeomorfa a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Las coordenadas en una carta permiten llevar a cabo cálculos en un espacio Euclidiano, por lo que conceptos de $\mathbb{R}^n$ como diferenciabilidad de funciones pueden ser definidas en variedades, lo cual generaliza el cálculo diferencial en $\mathbb{R}^n$ a el cálculo en variedades diferenciables. (Tu, 2011, p.47)

Las variedades diferenciables son de gran relevancia en física-matemática, además hoy día se aplican en campos de estudio relativamente nuevos como en sistemas dinámicos y la ciencia de datos cuando se estudia análisis multidimensional de datos.

Capítulo 1

Topología

En este primer capítulo nos interesa enunciar definiciones, teoremas, proposiciones que se estudian en libros de topológía general y que nos serán útiles para abordar un estudio de variedades topológicas en el segundo capítulo y variedades diferenciables en el tercer capítulo.

Definición 1.0.1. *Un conjunto S es* ***finito*** *si existe un natural m y una biyección f entre S y $\{1...m\}$, a m se le llama el número de elementos de S.*

Definición 1.0.2. *Un conjunto S es* **numerable** *si es finito o hay una biyección $f : \mathbb{N} \longrightarrow S$.*

La relación que existe entre las operaciones $\bigcup$, $\bigcap$ y complemento se describen en el siguiente teorema y se conocen como las **leyes de De Morgan** .

Teorema 1.0.1. *Suponga que X es un conjunto, S es un subconjunto de X, I es un conjunto de índices y, para cada $\alpha \in I$, A_α es un subconjunto de X, entonces:*

1. $X \setminus \bigcup\{A_\alpha : \alpha \in I\} = \bigcap\{X \setminus A_\alpha : \alpha \in I\}$.
2. $X \setminus \bigcap\{A_\alpha : \alpha \in I\} = \bigcup\{X \setminus A_\alpha : \alpha \in I\}$.
3. $S \cap \bigcup\{A_\alpha : \alpha \in I\} = \bigcup\{S \cap A_\alpha : A_\alpha \in I\}$.
4. $S \cup \bigcap\{A_\alpha : \alpha \in I\} = \bigcap\{S \cup A_\alpha : \alpha \in I\}$.

Demostración. □

Teorema 1.0.2. *1. Cada subconjunto de un conjunto finito es finito y la unión de dos conjuntos finitos es un conjunto finito.*

2. Cada subconjunto de un conjunto numerable es numerable y la unión de una colección numerable de conjuntos numerables es numerable.

3. *Un producto de dos conjuntos numerables es numerable.*

Demostración. □

1.1. Topología

Definición 1.1.1. *Una* ***topología*** *en un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X que satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $X, \emptyset \in \tau$.
2. *La unión de cualesquiera elementos de τ es elemento de τ.*
3. *La intersección finita de elementos de τ es elemento de τ.*

La pareja (X, τ) se llama un ***espacio topológico****, y si no hay posibilidad de confusión respecto a la topología τ referida, se escribirá únicamente X en vez de (X, τ).*
La condición 3 de la definición anterior es equivalente a requerir que
$B_1 \cap B_2 \in \tau$ para cualesquiera $B_1, B_2 \in \tau$. Luego, al usar el principio de inducción se establece que, si $B_i \in \tau$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces $\bigcap_{i=i}^{n} B_i \in \tau$.
Los elementos de la colección τ se denominan ***conjuntos τ-abiertos*** *o simplemente* ***conjuntos abiertos*** *si la topología τ se sobrentiende. Además, los conjuntos cuyos complementos son τ-abiertos se llaman* ***conjuntos τ-cerrados*** *o simplemente* ***conjuntos cerrados****, si no es necesario indicar la topología.*

Ejemplo 1.1.1. *Sea $X = \{a, b, c\}$,*

1. *Hallar todas las topologías de X.*
2. *Encontrar una familia de subconjuntos de X, que contenga a X y a $\emptyset$ pero que no sea topología de X.*
3. *Observar que hay por lo menos dos topologías de X cuya unión no es topología.*

Demostración. 1. El conjunto potencia de X esta conformado por todos los subconjuntos, es decir:

$$\mathcal{P}(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$$

Ahora, una topología es un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ el cual debe cumplir con las 3 propiedades de la definición de espacio topológico por lo que la cantidad de topologías posibles se reduce. Así, obtenemos las siguientes:
$\tau_1 = \{X, \emptyset\}$
$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}\}$
$\tau_3 = \{X, \emptyset, \{b\}\}$
$\tau_4 = \{X, \emptyset, \{c\}\}$

$\tau_5 = \{X, \emptyset, \{a, b\}\}$
$\tau_6 = \{X, \emptyset, \{b, c\}\}$
$\tau_7 = \{X, \emptyset, \{a, c\}\}$
$\tau_8 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$
$\tau_9 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$
$\tau_{10} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, c\}\}$
$\tau_{11} = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$
$\tau_{12} = \{X, \emptyset, \{b\}, \{b, c\}\}$
$\tau_{13} = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, c\}\}$
$\tau_{14} = \{X, \emptyset, \{c\}, \{a, b\}\}$
$\tau_{15} = \{X, \emptyset, \{c\}, \{b, c\}\}$
$\tau_{16} = \{X, \emptyset, \{c\}, \{a, c\}\}$
$\tau_{17} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$
$\tau_{18} = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$
$\tau_{19} = \{X, \emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$
$\tau_{20} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
$\tau_{21} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$
$\tau_{22} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$
$\tau_{23} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$
$\tau_{24} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}\}$
$\tau_{25} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$
$\tau_{26} = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$
$\tau_{27} = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b\}\}$
$\tau_{28} = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$
$\tau_{29} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$

2. Sea $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ una familia de subconjuntos de X la cual contiene a X y $\emptyset$. Sin embargo, $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin \tau$, por lo que esta no es una topología de X.

3. Consideremos a τ_2 y τ_3:
$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ y $\tau_3 = \{X, \emptyset, \{b\}\}$. Luego, $\tau_2 \cup \tau_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$. Consideremos, $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_2 \cup \tau_3$, por lo que esta no es una topología.

$\square$

Ejemplo 1.1.2. *La colección τ de todos los subconjuntos de un conjunto no vacío X satisface las 3 condiciones de la definición de topología, por tanto τ es una topología en X y (X, τ) se denomina* ***espacio topológico discreto****.*

Ejemplo 1.1.3. *La colección $\tau = \{\emptyset, X\}$ con $X \neq \emptyset$ es una topología de X llamada la* ***topología indiscreta*** *de X por tanto, (X, τ) es el* ***espacio topológico indiscreto****.*

Ejemplo 1.1.4. *La colección τ de todos los subconjuntos A de un conjunto X tales que $X \backslash A$ es finito, junto con el conjunto $\emptyset$, es una topología para X y se llama la* ***topología cofinita*** *en X. En efecto, dado que $X \backslash X = \emptyset$ y el conjunto $\emptyset$ es finito,*

$X \in \tau$, y por la definición de τ se tiene que $\emptyset \in \tau$; además, si A_α está en τ para cada $\alpha \in I$, entonces $X \backslash A_\alpha$ es finito, para toda $\alpha \in I$; por tanto, por leyes de De Morgan

$$X \backslash (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (X \backslash A_\alpha) \subseteq X \backslash A_\alpha, \forall \alpha \in I.$$

*Por lo tanto por **1 del teorema 1.1**, $X \backslash \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ es finito, por lo que $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ está en τ. Análogamente , si A_1 y A_2 están en τ, entonces $X \backslash A_1$ y $X \backslash A_2$ son conjuntos finitos y por leyes de De Morgan*

$$X \backslash (A_1 \cap A_2) = (X \backslash A_1) \cup (X \backslash A_2).$$

*En consecuencia, por **1 del teorema 1.1** $X \backslash (A_1 \cap A_2)$ es finito, y por tanto $A_1 \cap A_2 \in \tau$. Por lo tanto, $\tau = \{A \subseteq X : X \backslash A \text{ es finito } \} \cup \{\emptyset\}$ es una topología en X.*

Ejemplo 1.1.5. ***(Topología inducida por una métrica).***
Como los conjuntos abiertos en un espacio métrico (X,d) satisfacen:

1. *Una unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*
2. *Una intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*
3. *$\emptyset, X$ son abiertos.*

La colección τ_d de todos los subconjuntos abiertos de un espacio métrico (X,d) satisface las condiciones de la definición de topología en un conjunto X, entonces τ_d es una topología llamada la topología inducida por d, por lo que (X, τ_d) es un espacio topológico.

Definición 1.1.2. *A continuación enunciaremos algunos subconjuntos de espacios Euclidianos que usaremos en el desarrollo de esta tesis, cada uno es considerado un espacio topológico con la topología inducida por la métrica Euclidiana.*
Sea un entero $n \geq 0$.

- *El **intervalo unitario** es el subconjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ definido por*

$$I = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}.$$

- *La **bola unitaria abierta de dimensión n** es el subconjunto $\mathring{\mathbb{B}}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ formado por todos los vectores de longitud menor estricto a 1:*

$$\mathring{\mathbb{B}}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}.$$

  *En caso de que n=2, usualmente lo llamamos el **disco unitario abierto** $\mathring{\mathbb{B}}^2$.*

- *La **bola unitaria cerrada de dimensión n** es el subconjunto $\mathbb{B}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ formado por todos los vectores de longitud menor o igual a 1:*

$$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}.$$

  *En caso de que n=2, usualmente lo llamamos el **disco unitario cerrado** $\mathbb{B}^2$*

- *La **circunferencia unitaria** es el subconjunto $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ formado por vectores unitarios en el plano:*
$$\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}.$$
- *La **n-esfera unitaria** es el subconjunto $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ que esta formado por vectores unitarios en $\mathbb{R}^{n+1}$:*
$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}.$$

Definición 1.1.3. *Sea (S, τ) un espacio topológico y A un subconjunto de S. Definimos τ_A como la colección de subconjuntos*

$$\tau_A = \{U \cap A | U \in \tau\}$$

por la propiedad distributiva de unión e intersección,

$$\bigcup_\alpha (U_\alpha \cap A) = \left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right) \cap A$$

y

$$\bigcap_i (U_i \cap A) = \left(\bigcap_i U_i\right) \cap A,$$

*Lo cual muestra que τ_A es cerrado bajo uniones arbitrarias e intersecciones finitas. Además, $\emptyset, A \in \tau_A$. Asi que τ_A es una topología en A llamada **subespacio topológico** o topología relativa de A en S, y los elementos de τ_A son llamados abiertos en A. Para enfatizar el hecho de que un conjunto abierto U en A no necesita ser abierto en S, también podemos decir que U es un abierto relativo de A o relativamente abierto en A. El subconjunto A de S con el subespacio topológico τ_A es llamado subespacio topológico de S.*
Si A es un subconjunto abierto de un espacio topológico S, entonces un subconjunto de A es relativamente abierto en A si y solo si es un abierto en S.

Definición 1.1.4. *La topología τ_A o $\tau|A$ de la definición anterior se llama la **topología relativa** de A, y al espacio (A, τ_A) se le llama **subespacio** de (S, τ). Por lo que $V \in \tau A$ si y solo si existe $U \in \tau$ tal que $V = U \cap A$.*

Definición 1.1.5.
1. *Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Un subconjunto U de X es una **vecindad** de x si y solo si hay un conjunto abierto V de X tal que $x \in V \subseteq U$.*
2. *El conjunto $\mathcal{V}_x$ de todas las vecindades de x se llama **sistema de vecindades** en x.*

Definición 1.1.6. *Una colección $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{V}_x$ es una **base local** o **base de vecindades** en un punto x de un espacio topológico X si $V \in \mathcal{V}_x$ implica que existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B \subseteq V$.*
*Es fácil establecer que, si $\mathcal{B}_x$ es una **base local en x**, entonces $\{U \subseteq X\colon B \subseteq U$ para algún $B \in \mathcal{B}_x\}$ es el conjunto $\mathcal{V}_x$ de todas las vecindades de x. Además, en un espacio topológico (X, τ) la colección $\tau_x = \{U \in \tau : x \in U\}$ es una base local (de conjuntos abiertos) en x.*

Definición 1.1.7. *Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Una familia $\mathcal{B}_x$ de vecindades de x en X se denomina **base de vecindades** de x , si dada cualquier vecindad U de x, existe una vecindad V en $\mathcal{B}_x$ tal que $V \subset U$. A los elementos de $\mathcal{B}_x$ se les llama vecindades básicas de x.*

Definición 1.1.8. *Un espacio topológico X satisface el primer axioma de numerabilidad o es **primero numerable** o a menudo abreviado como **1-numerable** si tiene una base local numerable en cada uno de sus puntos.*

Es evidente que en un espacio discreto (X, τ), para cada $x \in X$, la familia $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ es una base de vecindades en x; por lo tanto, la topología discreta en cualquier conjunto X es primero numerable.(Benítez López & Wilson Roberts, 2017, p.49)

Definición 1.1.9. *Una **base** de una topología τ es una subcolección $\mathcal{B}$ de τ si para cada $\emptyset \neq U \in \tau$ hay una subcolección $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}$ tal que*

$$U = \bigcup \{B : B \in \mathcal{A}\}\}.$$

Es decir, $\mathcal{B}$ es una base de τ si cada conjunto abierto no vacío es la unión de elementos de $\mathcal{B}$.
*Obviamente una topología es una base de si misma. Además, es fácil establecer que $\mathcal{B}$ es una base de τ si y sólo si para cada conjunto abierto $U \in \tau$ y $x \in U$ existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$. A los elementos de una base $\mathcal{B}$ de τ se les llama **conjuntos abiertos básicos** del espacio X.*

Ejemplo 1.1.6. *Si (X,d) es un espacio métrico, por definición de la topología metrica τ_d, los discos abiertos forman una base de τ_d. En consecuencia, la colección de todos los intervalos abiertos $(a, b) \in (\mathbb{R}, ||)$ es una base de la topología Euclidiana $\tau \in \mathbb{R}$, pues $(a, b) = B(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2})$. Además, existe una base numerable de esta topología en $\mathbb{R}$. Se sabe que $\mathbb{Q}$ es numerable y, por lo tanto $\mathcal{B} = \{(p, q) : p, q \in \mathbb{Q}, p < q\}$ también lo es, y constituye una base de $(\mathbb{R}, \tau)$. Para ver esto, basta notar que, si U es abierto con $x \in U$, existe $\epsilon > 0$ tal que $x \in (x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq U$, y entonces existen $p \in (x-\epsilon, x) \cap \mathbb{Q}$ y $q \in (x, x+\epsilon) \cap \mathbb{Q}$. Por consiguiente, $x \in (p, q) \subseteq U$.*

Definición 1.1.10. *Un espacio topológico (X, τ) satisface el segundo axioma de numerabilidad o **segundo numerable** o usualmente abreviado **2-numerable** si existe una base numerable de la topología τ.*

Teorema 1.1.1. *$\mathbb{R}^n$ satisface el segundo axioma de numerabilidad.*

Demostración. □

Ejemplo 1.1.7. *En un espacio discreto (X, τ) es primero numerable tal que $\mathcal{B} = \{\{x\} :\in X\}$ es una base de τ, por lo que si $\mathcal{B}'$ es cualquier base del espacio topológico (X, τ), entonces $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$, pues para cada x se tiene $x \in \{x\} \in \tau$, y puesto que $\mathcal{B}'$ es una base, existe $B \in \mathcal{B}'$ tal que, $x \in B \subseteq \{x\}$, claramente $B = \{x\} \in \mathcal{B}'$. En consecuencia, X es segundo numerable si X es numerable.*

Proposición 1.1.1. *Un subespacio A de un espacio 2-numerable S es 2-numerable.*

Demostración. □

Ejemplo 1.1.8. ***(Todo subconjunto abierto N de un espacio topológico X segundo numerable es también segundo numerable).***
Si tomamos una base numerable para X, pero no nos fijamos en todos los conjuntos de bases que no están contenidos en N, entonces es fácil ver que los conjuntos de bases restantes forman una base numerable para la topología de N.

Definición 1.1.11. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $A \subseteq X$ con $x_0 \in A$. Decimos que x_0 es **punto interior** de A si y solo si $\exists\ U \in \tau$ tal que: $x_0 \in U$ y $U \subseteq A$.*

Al conjunto de puntos interiores del conjunto A se le llama **el interior de A** y es usualmente denotado como A^o.

Definición 1.1.12. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $A \subseteq X$ con $x_0 \in X$ decimos que x_0 es **punto de adherencia de A** si y solo si $\forall U \in \tau$ tal que $x_0 \in U \Rightarrow A \cap U \neq \emptyset$.*

Al conjunto de puntos de adherencia de A lo llamamos la **cerradura** o **clausura** de A y se denota por $\overline{A}$.

Definición 1.1.13. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $A \subseteq X$ con $x_0 \in X$ decimos que x_0 es **punto frontera** de de A si y solo si $\forall U \in \tau$ tal que $x_0 \in U \Rightarrow A \cap U \neq \emptyset \neq A \cap X \backslash A$*

Al conjunto de puntos de frontera de A lo llamamos la **frontera** de A y se denota por ∂A.

Definición 1.1.14. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $A \subseteq X$ con $x_0 \in X$ decimos que x_0 es **punto de acumulación** de A si y solo si $\forall u \in \tau$ tal que $x_0 \in U \Rightarrow U \cap A \backslash \{x_0\} \neq \emptyset$.*

Al conjunto de puntos de acumulación de A lo llamamos el **conjunto derivado** A y se denota por A'.

Definición 1.1.15. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $A \subseteq X$ con $x_0 \in X$ decimos que x_0 es **punto aislado** de A si y solo si $x_0 \in A$ pero no es punto de Acumulación de A.*

Definición 1.1.16. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $A \subseteq X$ con $x_0 \in XA$ decimos que x es **punto exterior** de A si y solo si $\exists U \in \tau$ tal que:*

1. *$x_0 \in U$.*
2. *$U \subseteq X \backslash A$.*

Al conjunto de puntos exteriores del conjunto A se le llama el **exterior** de A y es usualmente denotado como $ext(A)$.

Definición 1.1.17. *Sea $A \subset X$ con la topología relativa . En este caso, llamamos a la aplicación continua $i : A \to X$ simplemente **inclusión** (a la que frecuentemente denotaremos por $A \hookrightarrow X$); a los abiertos de A se les nombra **abiertos relativos**, a los cerrados de A, **cerrados relativos**.*

Definición 1.1.18. *Sean (X, τ_x) y (Y, τ_y) espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es **continua** en un punto $x_0 \in X$ si para cada conjunto abierto V con $f(x_0) \in V$ existe un conjunto abierto U tal que $x_0 \in U$ y $f(U) \subseteq V$. Una función f es **continua** (en X) si f es continua en todo punto de $x \in X$.*

Teorema 1.1.2. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función, entonces los siguientes incisos son equivalentes:*

1. *f es continua.*
2. *Para cada conjunto abierto V en Y, $f^{-1}(V)$ es abierto en X.*
3. *Para cada conjunto cerrado H en Y, $f^{-1}(H)$ es cerrado en X.*
4. *Para cada $A \subseteq X$, $f(cl_X(A)) \subseteq cl_Y(f(A))$.*
5. *Para cada $B \subseteq Y$, $cl_X(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(cl_Y(B))$.*

Demostración. □

Corolario 1.1.1. *Si X, Y y Z son espacios topológicos, $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones continuas. Entonces, $g \circ f : X \to Z$ es continua.*

Demostración. □

Definición 1.1.19. *Si $f : X \to Y$ es una función y $A \subseteq X$ la **restricción** de f a A se escribe $f|A$ y se define como:*
$(f|A)(x) = f(x)$ para todo $x \in A$.

Teorema 1.1.3. *Si $A \subseteq X$ y $f : X \to Y$ es continua, entonces $(f|A) : A \to Y$ es continua. Además, si $f : X \to Y$ es continua y Z es un subconjunto de Y tal que $f(X) \subseteq Z$, entonces $f : X \to Z$ es continua; en particular, $f : X \to f(X)$ es continua.*

Demostración. □

Definición 1.1.20. *Sean X y Y espacios topológicos. Una función continua $f : X \to Y$. Es un **homeomorfismo** si f es biyectiva y f^{-1} es continua. Una función $f : X \to Y$ es una **inmersión** si f es inyectiva y f define un homeomorfismo de X a f(X); en este caso, se dice que X está inmerso en Y. Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, los espacios X y Y son homeomorfos, lo cual se escribe $X \cong Y$. Un homeomorfismo entre dos espacios es una correspondencia biunívoca no solo entre los puntos del conjunto, sino también entre las topologías de los dos espacios.*

Teorema 1.1.4. *Si X y Y son espacios topológicos, $G \subseteq X$ y $f : X \to Y$ es biyectiva, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es un homeomorfismo.*
2. *U es abierto en X si y solo si f(U) es abierto en Y.*
3. *C es cerrado en X si y solo si f(C) es cerrado en Y.*

Demostración. □

Teorema 1.1.5. *Sean X y Y espacios topológicos. $f : X \to Y$ es una función biyectiva y continua, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *f^{-1} es continua, o sea, f es un homeomorfismo.*
2. *f es abierta.*
3. *f es cerrada.*
4. *f^{-1} es un homeomorfismo.*

Demostración. □

Definición 1.1.21. *Decimos que una función $f : X \to Y$ entre dos espacios topológicos es un **homeomorfismo local** si cada punto $x \in X$ tiene una vecindad $U \subseteq X$ tal que f(U) es un subconjunto abierto de Y y $f|_U : U \to f(U)$ es un homeomorfismo.*

Teorema 1.1.6. ***(Propiedades de homeomorfismos locales).***

1. *Todo homeomorfismo es un homeomorfismo local.*
2. *Todo homeomorfismo local es continuo y abierto.*
3. *Todo homeomorfismo local biyectivo es un homeomorfismo.*

Demostración. □

Definición 1.1.22. *Una propiedad $\mathcal{P}$ es una* ***propiedad topológica*** *si cada vez que un espacio topológico (X, τ) posee la propiedad $\mathcal{P}$, cualquier otro espacio topológico Y homeomorfo a (X, τ) también posee la propiedad $\mathcal{P}$.*

Definición 1.1.23. *Un espacio topológico (X, τ) es de* ***Hausdorff*** *o un espacio T_2 si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen conjuntos abiertos $U, V \in \tau$ tales que $U \cap V = \emptyset$ con $x \in U$ y $y \in V$.*

Proposición 1.1.2. *Cualquier subespacio A de un espacio topológico de Hausdorff S, es de Hausdorff.*

Demostración. □

Proposición 1.1.3. *En un espacio Hausdorff todo punto es un conjunto cerrado.*

Demostración. □

Ejemplo 1.1.9. *Si (X,d) es un espacio métrico, entonces (X, τ_d) es Hausdorff.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$, sea $r = \frac{d(x,y)}{2} > 0$, es decir tomamos la mitad de la distancia de x a y como radio de las bolas abiertas: U=B(x,r) y V=B(y,r), como el centro de una bola siempre pertenece a la bola, entonces $x \in U$ $y \in V$ y además $U \cap V = \emptyset$, porque si tuviéramos un punto $z \in U \cap V$, entonces $z \in U$ y $z \in V$ pero por la manera en que definimos U y V, tenemos que:
$d(x, y) < r$ y $d(x, z) < r$
Aplicando la desigualdad del triángulo tenemos que
$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2r = d(x, y)$ lo cual es una contradicción.
Así pues encontramos dos abiertos $x \in U$ y $y \in V$, cuya intersección es ajena, como x y y se tomaron arbitrariamente se concluye que (X, τ_d) es Hausdorff.

□

Ejemplo 1.1.10. ***(Todo subconjunto abierto de un espacio de Hausdorff es también de Hausdorff).***
Esto se debe a que si tomamos un conjunto abierto $N \subset X$, cuyos puntos p y q son distintos en N, entonces hay en X subconjuntos abiertos U_p y U_q que separan a los puntos p y q, además las intersecciones $U_p \cap N$ y $U_q \cap N$ contienen a p y a q, son disjuntas y también abiertas en N.

Ejemplo 1.1.11. ***(Un espacio no Hausdorff).***

Sea X cualquier conjunto infinito equipado con la topología cofinita. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Sean U,V abiertos en X tal que $x \in U$ y $y \in V$.
Supongamos que $U \cap V = \emptyset$, entonces, $X \backslash U \cap V = X \backslash \emptyset = X$
entonces, por leyes de De Morgan $(X \backslash U) \cup (X \backslash V) = X$

Por otra parte como U y V son abiertos no vacíos en X y como X está equipado con la topología cofinita
entonces, $X\backslash U$ y $X\backslash V$ son finitos
entonces, $(X\backslash U)\cup(X\backslash V)=X$ porque la unión de dos conjuntos finitos es un conjunto finito
entonces, X es finito, lo cual es una contradicción porque habíamos tomado a X como un conjunto infinito,
entonces, $U\cap V=\emptyset$
por lo tanto (X,τ) no es Hausdorff.

Definición 1.1.24. *Sea X un espacio topológico y $A\subset X$. Se dice que $C=\{U_\lambda\subset X|\lambda\in\Lambda\}$ es una **cubierta abierta** de A en X si $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda\supset A$. Definimos la cubierta C como abierta si U_λ es abierto o como cerrada si éste es cerrado en X para toda $\lambda\in\Lambda$. Si $C\acute{}\subset C$ y $C\acute{}$es también una cubierta, entonces decimos que $C\acute{}$ es una **subcubierta** de C. En particular, afirmamos $C\acute{}$es o bien finita o bien numerable si como conjunto $C\acute{}$es finito o numerable, respectivamente.*

Definición 1.1.25. *Un espacio topológico (X,τ) es **compacto** si cada cubierta abierta $\mathcal{F}$ de X tiene una subcubierta finita.*

Lema 1.1.1. *Sean (X,τ) un espacio topológico, $A\subseteq X$ y τ_A la topología relativa en A. El espacio (A,τ_A) es compacto si y solo si siempre que $\mathcal{F}\subseteq\tau$ y $\bigcup\mathcal{F}\supseteq A$ existe un conjunto finito $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}$ tal que $\bigcup\mathcal{G}\supseteq A$.*

Demostración. □

Teorema 1.1.7. ***Teorema(Heine-Borel-Lebesgue).*** *En $\mathbb{R}^n$, un conjunto A es cerrado y acotado si y solo si toda cubierta abierta de A contiene una subcubierta finita.*

Demostración. □

Definición 1.1.26. *Un espacio topológico X es **conexo** si los únicos conjuntos abiertos y cerrados en X son el conjunto vacío $\emptyset$ y el espacio total X. Un subconjunto Y de un espacio topológico (X,τ) es conexo si el subespacio $(Y,\tau|Y)$ es un espacio topológico conexo. Un espacio X es **disconexo** si no es conexo.*
De este modo observamos que si X es conexo y homeomorfo a Y, entonces Y es conexo.

Lema 1.1.2. *Un espacio es **disconexo** si y solo si es la unión de conjuntos abiertos no vacíos y disjuntos.*

Demostración. □

Teorema 1.1.8. *La imagen contínua de un espacio conexo es conexo.*

Demostración. □

Teorema 1.1.9. *Sean X, Y espacios topológicos y sea $f : X \longrightarrow Y$ continua. Si X es compacto y Y es de Hausdorff, entonces f es cerrada, además si f es sobreyectiva, entonces f es una identificación.*

Demostración. Sea $A \subset X$ cerrado. Por ser X compacto , A es compacto, y por ser f continua, f(A) es compacto . Ya que Y es un espacio de Hausdorff, entonces f(A) es cerrado, Por lo tanto, tenemos que f es cerrada.
Supongamos ahora que, además, f es sobreyectiva y sea $B \subset Y$, tal que $f^{-1}(B)$ es cerrado. Por ser f cerrada, $B = ff^{-1}(B)$ es cerrado. Esto demuestra que f es una identificación. □

Capítulo 2

Introducción a las variedades

Las siguientes definiciones y resultados nos ayudaran a comprender la definición de variedad topológica para posteriormente abordar en el siguiente capítulo el estudio de las variedades diferenciales.

Teorema 2.0.1. ***(Invariancia de dominio).***
Sean $X, Y \subset \mathbb{R}^n$, tales que X es homeomorfo a Y. Entonces, si X es abierto en $\mathbb{R}^n$, Y también lo es.

Teorema 2.0.2. ***(Invariancia de la dimensión).*** *Si $m \neq n$, entonces $\mathbb{R}^m \ncong \mathbb{R}^n, \mathbb{S}^m \ncong \mathbb{S}^n$ y $\mathbb{B}^m \ncong \mathbb{B}^n$.*

Demostración. Sea $m < n$, entonces $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ no es abierto en $\mathbb{R}^n$; sin embargo, $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$ sí es abierto en $\mathbb{R}^n$, por lo que, por el teorema de invariancia de dominio, $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ no pueden ser homeomorfos.
Si suponemos que que hay un homeomorfismo $\varphi : \mathbb{S}^m \longrightarrow \mathbb{S}^n$, entonces, si quitamos de ambas esferas un punto, digamos $p \in \mathbb{S}^m$, $q = \varphi(p) \in \mathbb{S}^n$, por restricción obtenemos un homeomorfismo $\varphi' : \mathbb{S}^m - p \longrightarrow \mathbb{S}^n - q$. A través de las proyecciones estereográficas:

- $$p : \mathbb{S}^n - N \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
  donde $N = (0, 0..., 0, 1) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, dada por
  $p(x) = \big(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, ..., \frac{x^n}{1-x_{n+1}}\big)$,
  donde $x = (x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n - N$. La aplicación p es un homeomorfismo con inversa dada por
  $$p^{-1}(y) = \big(\frac{2y_1}{|y^2|+1}, ..., \frac{2y}{|y^2|+1}, \frac{|y^2|-1}{|y^2|+1}\big)$$
  donde $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

La proyección estereográfica muestra que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{S}^n$ son casi iguales, pues, salvo por un punto, son homeomorfos. Sin embargo, $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{S}^n$ no son homeomorfos.

Por ejemplo, en el caso n=0 esto es claro, pues $\mathbb{R}^0$ es solo un punto, mientras que $\mathbb{S}^0$ consta de dos puntos. Para $n > 0$, $\mathbb{R}^n$ no es compacto, pues no es acotado, mientras que $\mathbb{S}^n$ es compacto pues puede verse como un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^{n+1}$. (Por cierto, $\mathbb{S}^n$ es la compactación de un punto de $\mathbb{R}^n$).

- $$q =: \mathbb{S}^n - S \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

  la proyección estereográfica, pero desde el polo sur $S = (0, 0, ..., 0, -1) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ donde q esta dada por,

  $$q(x) = (\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, ..., \frac{x_n}{1 + x_{n+1}})$$

  Así pues φ' determina un homeomorfismo $\psi : \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n$, por lo que m=n en vista de lo ya probado.
  Finalmente, sea $m < n$, y $\varphi : \mathbb{B}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un homeomorfismo. Por lo tanto, $\mathring{\mathbb{B}}^n \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y homeomorfo a $\varphi^{-1}(\mathring{\mathbb{B}}^n) \subset \mathbb{B}^m \subset \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ que no es abierto en $\mathbb{R}^n$, lo que contradice al teorema de invariancia de dominio.

□

Definición 2.0.1. *Un espacio topológico M es* ***localmente Euclidiano*** *de dimensión n si cada punto p en M tiene una vecindad U tal que hay un homeomorfismo ϕ de U sobre un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Llamamos* ***carta*** *a la pareja $(U, \phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n)$,* ***vecindad coordenada*** *a U o conjunto abierto coordenado, y a ϕ un* ***mapeo coordenado*** *o un sistema coordenado en U.*
Decimos que una carta (U, ϕ) es ***centrada*** *en p en U si $\phi(p) = 0$.*

Para algunos propósitos, es útil ser más específicos acerca del tipo de subconjunto abierto que usamos para caracterizar localmente espacios Euclidianos. El siguiente lema muestra que podríamos haber remplazado conjunto abierto por bola abierta o por $\mathbb{R}^n$ mismo. (Lee, 2011, p.38)

Lema 2.0.1. *Un espacio topológico M es localmente Euclidiano de dimensión n si y solo si se cumple alguna de las siguientes propiedades*

1. *Cada punto de M tiene una vecindad homeomorfa a una bola abierta de $\mathbb{R}^n$.*
2. *Cada punto de M tiene una vecindad homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Es inmediato que cualquier espacio con la propiedad 1 o 2 es localmente Euclidiano de dimensión n.
Procedemos por contradicción, supongamos que M es localmente Euclidiano de dimensión n. Dado que cualquier bola abierta en $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, es decir sea $\mathbb{B}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ la bola unitaria y definimos el mapeo $F : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por $F(x) = \frac{x}{1-|x|}$

Así pues un mapeo $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{B}^n$ definido por $G(y) = \frac{y}{y+|y|}$ es el mapeo inverso de F y por tanto F es biyectiva, ya que F y $F^{-1} = G$ son continuas, F es un homeomorfismo y por tanto $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo a $\mathbb{B}^n$. Las propiedades 1 y 2 son equivalentes, así que solo necesitamos probar 1.
Dado un punto $p \in M$, dada una vecindad U de p que admite un homeomorfismo $\phi : U \longrightarrow V$, donde V es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. El hecho de que V es abierto en $\mathbb{R}^n$ significa que hay alguna bola abierta B alrededor de $\phi(p)$ que está contenida en V, y si $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo y $U \subseteq X$ es abierto en Y y la restricción $f|_U$ es un homeomorfismo de U a f(U) se prueba que $\phi^{-1}(B)$ es una vecindad de p homeomorfa a B.

□

Definición 2.0.2. *Suponga que M es localmente Euclidiano de dimensión n. Si $U \subseteq M$ es un subconjunto abierto que es homeomorfo a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces U es llamado un **dominio coordenado**, y cualquier homeomorfismo ϕ de U a un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es llamado un **mapeo coordenado**. La pareja (U, ϕ) es llamado **carta coordenada** (o solo carta de M).*
*Un dominio coordenado que es homeomorfo a una bola en $\mathbb{R}^n$ es llamada una **bola coordenada.** (Cuando M es de dimensión 2, usamos el término **disco coordenado.***

El lema anterior muestra que cada punto en un espacio localmente Euclidiano es contenido en una bola coordenada. Si $p \in M$ y U es un dominio coordenado que contiene a p, decimos que U es una **vecindad coordenada** o una **vecindad Euclidiana** de p.
La definición de espacio localmente Euclidiano tiene sentido incluso cuando n=0. Porque $\mathbb{R}^0$ es un singulete, la parte (2) del lema anterior implica que un espacio es localmente Euclidiano de dimensión 0 si y solo si cada punto tiene una vecindad homeomorfa a un punto en el espacio, en otras palabras si y solo si el espacio es discreto.(Lee, 2011, p.38)

A continuación se dará la definición de variedad topológica en términos de espacio localmente Euclidiano que se usará de ahora en adelante en esta tesis.

Definición 2.0.3. *Una **variedad topológica** es un espacio topológico M de Hausdorff, 2-numerable y localmente un espacio Euclidiano. Se dice que es de dimensión n si es localmente Euclidiano de dimensión n.*

Para que la dimensión de una variedad topológica este bien definida, necesitamos saber que para $n \neq m$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ no es homeomorfo a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$, este hecho es llamado teorema de invariancia de la dimensión. (Tu, 2011, p.48)

Proposición 2.0.1. *Cada subconjunto abierto de una n-variedad es una n-variedad.*

Demostración. Dada una n-variedad M y dado un subconjunto V abierto de M. Cualquier $p \in V$ tiene una vecindad en M que es homeomorfa a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, la intersección de esta vecindad con V sigue siendo abierta, todavia homeomorfa a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y es contenida en V, así V es localmente Euclidiano de dimensión n. Como se comento anteriormente, cualquier subconjunto abierto de un espacio Hausdorff es Hausdorff y cualquier subconjunto abierto de un espacio segundo numerable es segundo numerable y por tanto V es una n-variedad.

$\square$

En este trabajo de tesis primero hemos hablado de variedades topológicas, para poder definir posteriormente variedad diferenciable. Usualmente las llamaremos variedades n-dimensionales o n-variedades o usualmente variedades si la dimensión es sobrentendida . El termino variedad topológica es frecuentemente utilizado únicamente para enfatizar el tipo de variedad bajo consideración es del tipo que aquí hemos usado, en contraste con otro tipo de variedades que pueden ser definidas, como las variedades de complejas, variedades algebraicas, variedades de Riemann etcétera, como veremos en el siguiente capítulo, una variedad diferenciable o variedad C^∞ o simplemente variedad suave es una variedad topológica con una estructura diferenciable.

Una manera corta de escribir a una variedad topológica M de dimensión n o n-dimensional es simplemente escribir M^n, no debemos confundir esta notación con el n-esimo producto cartesiano $M^n = M \times M \times ... \times M$. (Lee, 2011, p.39)

Cartas compatibles.

Supongamos que $(U, \phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n)$ y $(V, \psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n)$ son dos cartas de una variedad topológica. Dado que $U \cap V$ es abierta en U y $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo en un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, la imagen $\phi(U \cap V)$ también será un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Análogamente $\psi(U \cap V)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.(Tu, 2015, p.49)

Definición 2.0.4. *Dos cartas $(U, \phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n)$ y $(V, \psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n)$ de una variedad topológica son C^∞-**compatibles** si los dos mapeos:*

- $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \longrightarrow \phi(U \cap V)$
- $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$

*son C^∞, estos dos mapeos son llamados **funciones de transición** entre las cartas. Si $U \cap V$ es vacia, entonces las dos cartas son automáticamente C^∞ - compatibles, como se observa en la **Figura 2.1**.*
Para simplificar la notación, escribimos algunas veces $U_{\alpha\beta}$ para $U_\alpha \cap U_\beta$ y $U_{\alpha\beta\gamma}$ para $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Ya que estábamos interesados únicamente en cartas C^∞ - compatibles, usualmente omitimos mencionar C^∞ y decimos simplemente que son cartas compatibles.

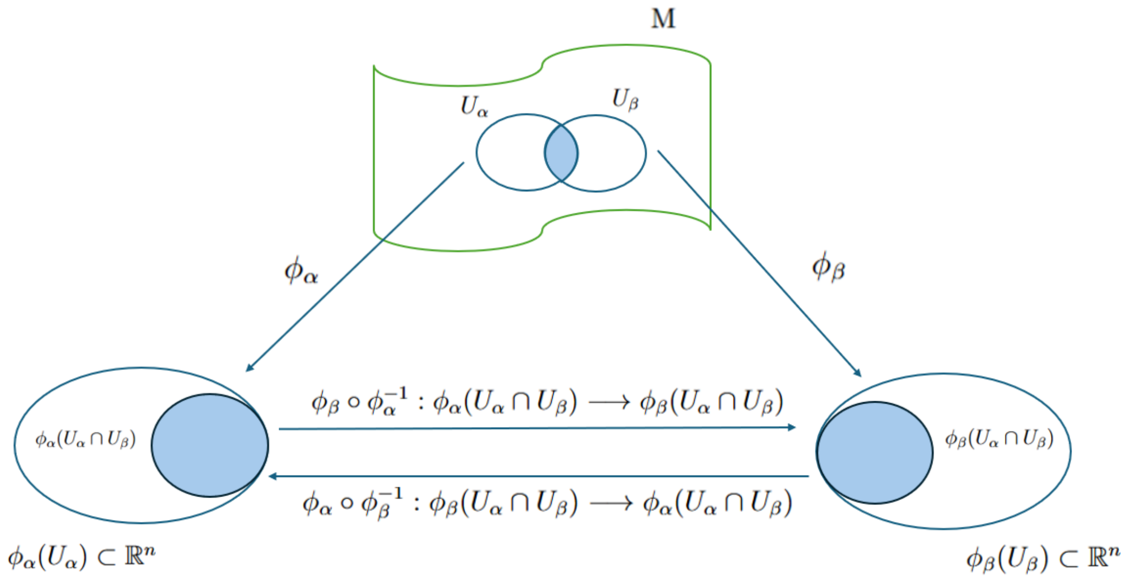

Figura 2.1: Funciones de transición $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ y $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ definidas en $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$

Definición 2.0.5. *Un **atlas** C^∞ o simplemente un **atlas en un espacio localmente Euclidiano M** es una colección $\mathfrak{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ de pares de cartas C^∞-compatibles que cubren a M, es decir que $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$.*

Definición 2.0.6. *Un **atlas diferenciable** es una familia de cartas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ sobre M si cada carta de transición $\phi_\beta \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son diferenciables de clase C^∞ (en caso de que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$).*
Una carta es compatible con un atlas diferenciable si al añadir esta carta al atlas nos produce nuevamente un atlas diferenciable.
*Una **Variedad diferenciable de dimensión n** es una variedad junto con una estructura diferenciable.*

Lema 2.0.2. *Sea $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ un atlas en un espacio localmente Euclidiano. Si dos cartas (V, ψ) y (W, σ) son ambas compatibles con el atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, entonces son compatibles entre si.*

Demostración. Sea $p \in V \cap W$. Necesitamos mostrar que $\sigma \circ \psi^{-1}$ es C^∞ en $\psi(p)$.
Ya que $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ es un atlas para M, $p \in U_\alpha$ para algún α, entonces p esta en la triple intersección $V \cap W \cap U_\alpha$.
De lo anterior $\sigma \circ \psi^{-1} = (\sigma \circ \phi_\alpha^{-1}) \circ (\phi_\alpha \circ \psi^{-1})$ es C^∞ en $\psi(V \cap W \cap U_\alpha)$, por lo tanto en $\psi(p)$. Dado que p fue un punto arbitrario de $V \cap W$, esto prueba que $\sigma \circ \psi^{-1}$ es C^∞ en $\psi(V \cap W)$, análogamente para $\psi \circ \sigma^{-1}$ es C^∞ en $\sigma(V \cap W)$. □

Ejemplo 2.0.1. *El espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$ es cubierto por una sola carta $(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})$, donde $1_{\mathbb{R}^n} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es el mapeo identidad, todo subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ es también una variedad topológica con la carta (U,1u), la condición de que sea 2-numerable y Hausdorff son heredadas a subespacios, un subespacio de un espacio*

Hausdorff es Hausdorff y un subespacio de un espacio 2-numerable es 2-numerable así cualquier subespacio de $\mathbb{R}^n$ es en automático Hausdorff y 2-numerable.

Ejemplo 2.0.2. *La gráfica de $y = x^{\frac{2}{3}}$ en $\mathbb{R}^2$ es una variedad topológica, en virtud de ser un subespacio de $\mathbb{R}^2$, las propiedades de ser espacios topológicos Hausdorff y segundo numerable son heredadas, también es localmente Euclidiano, porque es homeomorfo a $\mathbb{R}$ vía $(x, x^{\frac{2}{3}}) \longrightarrow x$.*

Ejemplo 2.0.3. *Una cruz en $\mathbb{R}^2$ con la topología de subespacio no es localmente Euclidiano en la intersección p y no puede ser una variedad topológica.*
Demostración.
Supongamos que la cruz es localmente Euclidiana de dimensión n en el punto p, entonces p tiene una vecindad U homeomorfa a una bola abierta $B := B(0, \epsilon) \subseteq \mathbb{R}^n$ donde p está mapeado en 0.
El homeomorfismo $U \to B$ se restringe a un homeomorfismo $U - \{P\} \longrightarrow B - \{0\}$. Ahora $B - \{0\}$ es conexo si $n \geq 2$ o tiene dos componentes conexas si n=1. Dado que $U - \{p\}$ tiene 4 componentes conexas, no puede haber un homeomorfismo de $U - \{0\}$ a $B - \{0\}$ lo cual es una contradicción, lo cual prueba que la cruz no es localmente Euclidiana en p.

Ejemplo 2.0.4. *La esfera $\mathbb{S}^n$ es una variedad. Tenemos un atlas con dos cartas; a saber $V_1 = \mathbb{S}^n - N$ y $V_2 = \mathbb{S}^n - S$, donde N=(0,0,...,1) es el polo norte y S=(0,0,...,-1) es el polo sur. El homeomorfismo $\phi_1 : V_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la proyección estereográfica p definida arriba, y $\phi_2 = \phi_1 \circ a$, donde $a : V_2 \longrightarrow V_1$ es la aplicación antípoda, tal que a(x)=-x.*

Capítulo 3

Variedades diferenciables.

Definición 3.0.1. *Para mapeos entre (subconjuntos abiertos de) espacios vectoriales de dimensión finita, la noción mas general de derivada es la derivada total.*
Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita, los cuales asumiremos que están dotados con normas. Si $U \subseteq V$ es un subconjunto abierto y $a \in U$, un mapeo $F : U \to W$ se dice ***diferenciable en a*** *si existe un mapeo lineal $L : V \to W$ tal que*

$$\lim_{v \to 0} \frac{|F(a+v) - F(a) - Lv|}{|v|} = 0. \tag{3.1}$$

La norma en el numerador de esta expresión es la de W, mientras la norma en el denominador es la de V. Dado que todas las normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes, la definición es independiente de la elección de ambas normas.
Si F es diferenciable en a, el mapeo lineal L satisface la expresión (3.1), es denotada por $DF(a)$ y es llamada la ***derivada de F en a****. La condición (3.1) puede ser escrita de la siguiente manera:*

$$F(a+v) = F(a) + DF(a)v + R(v). \tag{3.2}$$

Donde el residuo es el término $R(v) = F(a+v) - F(a) - DF(a)v$, y satisface $\frac{|R(v)|}{|v|} \to 0$ cuando $v \to 0$. Por lo tanto, la derivada total representa "la mejor aproximación lineal" a $F(a+v) - F(a)$ cerca de a.

Al hablar de conjuntos abiertos, las propiedades como compacidad, continuidad, convergencia no dependen de la norma si no de la topología que generan la colección de conjuntos abiertos.
La siguiente definición es apta para mapeos entre espacios Euclidianos.

Definición 3.0.2. *Suponga un subconjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y que $f : U \to \mathbb{R}$ es una función real-valuada. Para cualquier $a = (a^1, ..., a^n) \in U$ y cualquier $j \in \{1, ..., n\}$, la* ***j-ésima derivada parcial de f en a*** *se define como la derivada ordinaria de f con respecto a x^j, mientras se mantienen fijas las demás variables:*

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a^1, ..., a^j + h, ..., a^n) - f(a^1, ..., a^j, ..., a^n)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_j) - f(a)}{h}.$$

Si el límite existe.
*Generalizando más, para una función vectorial-valuada $F : U \to \mathbb{R}^m$, podemos escribir las coordenadas de $F(x)$ como $F(x) = (F^1(x), ..., F^m(x))$. Esto define m funciones $F^1, ..., F^m : U \to \mathbb{R}$ llamadas las **funciones componentes de F**. Las derivadas parciales de F se definen simplemente como las derivadas parciales $\frac{\partial F^i}{\partial x^j}$ de sus funciones componente . La matriz $(\frac{\partial F^i}{\partial x^j})$ de derivadas parciales es llamada **la matriz jacobiana de F**, y su determinante es llamado el **determinante jacobiano de F**.*
*Si $F : U \to \mathbb{R}^m$ es una función para la cual cada derivada parcial existe en cada punto en U y las funciones $\frac{\partial F^i}{\partial x^j} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ así definidas son todas continuas, entonces F es llamada de **clase** C^1 o **continuamente diferenciable.** Si es el caso, podemos diferenciar las funciones $\frac{\partial F^i}{\partial x^j}$ para obtener **derivadas paraciales de segundo orden**, es decir:*

$$\frac{\partial^2 F^i}{\partial x^k \partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right),$$

*si existen. Siguiendo este razonamiento nos conduce a las derivadas parciales de orden superior, es decir las **derivadas paraciales de F de orden k** son las (primeras) derivadas parciales de aquellas de orden k-1, cuando existen.*
*En general, si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subconjunto abierto y $k \geq 0$, una función $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se dice de **clase** C^k o **k veces continuamente diferenciable** si todas las derivadas parciales de F de orden menor o igual a k existen y son funciones continuas en U. (Por lo tanto una función de clase C^0 es solo una función contínua). Esto debido a que la existencia y la continuidad de derivadas son propiedades locales, claramente F es C^k si y solo si tiene esa propiedad en una vecindad de cada punto en U.*

*Una función que es de clase C^k para cada $k \geq 0$ se dice que es de clase C^∞, **suave** o **infinitamente diferenciable**. Si U y V son subconjuntos abiertos de espacios Euclidianos, una función $F : U \longrightarrow V$ es llamada un **difeomorfismo** si es suave y biyectiva y su función inversa es también suave.*

Definición 3.0.3. *Un mapeo f de un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^p$ a un subconjunto abierto V en $\mathbb{R}^q$ es un **difeomorfismo** C^k si admite un mapeo C^k inverso, en dicho caso decimos que U y V son difeomorfos.*

Denotamos al mapeo inverso por g. La regla de la cadena aplicada a $g \circ f$ y $f \circ g$ nos dice que si $a \in U$, las aplicaciones lineales df_a y $dg_{f(a)}$ son mutuamente inversas, en particular, esto fuerza a que $p = q$ por el teorema de invariancia de dominio.

Tenemos el siguiente diccionario que relaciona conceptos del cálculo diferencial y el álgebra lineal.
Función suave – mapeo lineal.
Difeomorfismo local – mapeo local invertible.
Subvariedad – subespacio vectorial. (Lafontaine, 2015, p.1)
Este diccionario es necesario para entender la **proposición 3.0.1**, el **teorema 3.0.1** y la definición **definición 3.0.5**.

Definición 3.0.4.

- *Una* ***carta de una variedad topológica X*** *es un par ordenado (U,ϕ) que consiste de un subconjunto abierto U de X (el dominio de la carta) y un homeomorfismo ϕ de U a un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.*
- ***Un atlas de X*** *es una familia $(U_i,\phi_i)_{i\in I}$ (no necesariamente finito) de cartas, tal que los dominios U_i cubren a X.*

Algunas veces no mencionaremos el dominio de la carta. La expresión sistema local de coordenadas es un sinónimo común de una carta. Esta terminología habla por si misma, por ejemplo la superficie de la tierra es una esfera S^2 que podemos considerar como una variedad de dimensión 2.
Las cartas son representaciones planas, necesariamente parciales (un espacio compacto) no puede ser homeomorfo a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$), es necesario un atlas si queremos representar la tierra entera.
Ahora bien un punto puede pertenecer al dominio de muchas cartas, entonces la siguiente propiedad es clara:(Lafontaine, 2015, p.52)

Propiedad 3.0.1. *Si dos cartas (U,ϕ) y (V,ψ) tal que: $U\cap V\neq\emptyset$, entonces el mapeo $\psi\circ\phi^{-1}:\phi(U\cap V)\longrightarrow\psi(U\cap V)$ es un homeomorfismo.*

Definición 3.0.5. *Un subconjunto $M\subset\mathbb{R}^n$ es una* ***subvariedad p-dimensional*** *de $\mathbb{R}^n$ si para todo $x\in M$, existen vecindades abiertas U y V de x y 0 en $\mathbb{R}^n$ respectivamente, y un difeomorfismo $f:U\to V$ tal que:*

$$f(U\cap M))=V\cap(\mathbb{R}^p\times\{0\}).$$

Entonces decimos que M es de codimensión n-p en $\mathbb{R}^n$.

Observación En esta definición podemos remplazar a 0 y $\mathbb{R}^p\times\{0\}$ por cualquier otro punto y cualquier subespacio afin de dimensión p.

En la práctica una subvariedad puede definirse localmente por un sistema de ecuaciones o por parametrizaciones, hablando vagamente, si el número real de parámetros es igual a la dimensión del espacio ambiente, entonces una subvariedad p-dimensional será formada por n-p ecuaciones. Como en álgebra lineal llamaremos n-p la codimensión, ahora reformularemos esta aclaración cuidadosamente.(Lafontaine, 2015, p.22)

Teorema 3.0.1. *Suponga que M es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *M es una subvariedad de dimensión p en $\mathbb{R}^n$.*
2. *Para toda a en M, existe un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ conteniendo a a y una submersión $g:U\to\mathbb{R}^{n-p}$ tal que $U\cap M=g^{-1}(0)$;*

3. *Para toda a en M, existe un subconjunto abierto U en* $\mathbb{R}^n$ *conteniendo a, y un subconjunto abierto* Ω *en* $\mathbb{R}^p$ *conteniendo 0, un mapeo* $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *el cual es simultáneamente una inmersión en* $\mathbb{R}^n$ *y es un homeomorfismo de* Ω *en* $U \cap M$.

4. *Para todo* $a \in M$*, existe un subconjunto abierto U en* $\mathbb{R}^n$ *conteniendo a a, un subconjunto abierto V en* $\mathbb{R}^p$ *conteniendo* $(a^1, ..., a^p)$ *y un mapeo suave G de V a* $\mathbb{R}^{n-p}$ *tal que después de permutar las coordenadas* $U \cap M$ *es igual a la gráfica de G.*

En el caso de una subvariedad de un espacio Euclidiano, podemos decir mucho más, el mapeo de la ***propiedad 3.0.1*** *es un difeomorfismo. Esta es una consecuencia inmediata de la siguiente proposición.*

Proposición 3.0.1. *Sea* $M \subset \mathbb{R}^n$ *una subvariedad de dimensión p, y sean* (Ω_1, g_1) *y* (Ω_2, g_2) *2 parametrizaciones entonces,*

$$g_2^{-1} \circ g_1 : \Omega_1 \cap g_1^{-1}(g_2(\Omega_2)) \longrightarrow \Omega_2 \cap g_2^{-1}(g_1(\Omega_1))$$

es un difeomorfismo.

Demostración. Dado $m \in g_1(\Omega_1) \cap g_2(\Omega_2)$ no hay nada que probar si esta intersección es vacía). Por la **Definición 3.0.4** existe un subconjunto abierto U conteniendo m y un difeomorfismo f de U a $\mathbb{R}^n$ tal que $f(U \cap M) = f(U) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^p)$. Entonces $f \circ g_1$ y $f \circ g_2$ son inmersiones de Ω_1 y Ω_2 a $\mathbb{R}^n$ Ahora si consideramos estos mapeos como mapeos con valores en $\mathbb{R}^p$, obtenemos homeomorfismos suaves con diferenciables invertibles y por tanto estos mapeos son difeomorfismos. El mismo argumento aplicado a

$$(f \circ g_2)^{-1} \circ (f \circ g_1) = g_2^{-1} \circ g_1$$

□

Como a menudo pasa en matemáticas tomamos una propiedad verificada en su configuración natural y se eleva a axioma. (Lafontaine, 2015, p.53).

Definición 3.0.6. 1. ***Dos cartas*** (U_1, ϕ_1) ***y*** (U_2, ϕ_2) ***de una variedad topológica M son compatibles de orden k*** $(1 \leq k \leq \infty)$ *si* $(U_1 \cap U_2 = \emptyset)$ *o si el mapeo*

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

(llamado función de transición) es un difeomorfismo C^k.

2. ***Un atlas*** C^k *de un espacio topológico M es un atlas* $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ *de M tal que cualesquiera dos cartas son compatibles de orden k.*

Definición 3.0.7. *Un **difeomorfismo entre 2 variedades M y N** es una biyección con C^k inversa.*

Definición 3.0.8. 1. ***Un atlas** C^k de una variedad topológica M es llamado **maximal** si contiene cada carta compatible con las cartas en el atlas (en la literatura también se usan las palabras "completo" y "saturado"). Tal atlas también es llamado una estructura diferenciable C^k.*

2. ***Una variedad diferenciable de clase** C^k es una variedad topológica equipada con una estructura diferenciable de clase C^k*

Cada atlas es claramente contenido en único atlas maximal, obtenido por agregar todas las posibles cartas compatibles. Por ejemplo por la **Proposición 3.0.1** una subvariedad suave de $\mathbb{R}^n$ tiene una estructura suave natural. Esta estructura es obtenida por tomar el atlas formado por las inversas de cada parametrización.
En la práctica definimos una estructura diferenciables tomando un atlas que no es muy grande: la estructura diferenciable es dada por el correspondiente atlas maximal. Ya procedimos de esta forma para subvariedades de $\mathbb{R}^n$.(Lafontainte, 2015, p.54)

Un altas $\mathfrak{M}$ en un espacio localmente Euclidiano es llamado maximal si no es contenido en un atlas más grande; en otras palabras si $\mathfrak{U}$ es cualquier otro atlas que contiene a $\mathfrak{M}$, entonces $\mathfrak{U} = \mathfrak{M}$.(Tu, 2011. p.52)

Definición 3.0.9. ***Una variedad suave** C^∞ es una variedad topológica M con un atlas maximal. El atlas maximal también es llamado estructura diferenciable en M. Una variedad tiene dimensión n si todas sus componentes conexas tienen dimensión n. Una 1-variedad dimensional es llamada curva, una 2-variedad es llamada superficie y una variedad n-dimensional es llamada n-variedad.*

Proposición 3.0.2. *Cualquier atlas $\mathfrak{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ en un espacio localmente Euclidiano está contenido en único atlas maximal.*

Demostración. Adjuntamos al atlas $\mathfrak{U}$ todas las cartas (V_i, ψ_i) compatibles con $\mathfrak{U}$, por el **Lema 2.0.2**, las cartas (V_i, ψ_i) son compatibles una con la otra. Así la colección más grande de cartas es un atlas. Cualquier carta compatible con el nuevo atlas debe ser compatible con el atlas original $\mathfrak{U}$ y por construcción pertenece al nuevo atlas. Esto prueba que el nuevo atlas es maximal.
Sea $\mathfrak{M}$ el atlas maximal que contiene a $\mathfrak{U}$ que acabamos de construir. Si $\mathfrak{M}'$ es cualquier otro atlas maximal que contiene a $\mathfrak{U}$, entonces las cartas en $\mathfrak{M}'$ son compatibles con $\mathfrak{U}$ y por construcción deben pertenecer a $\mathfrak{M}$ forzosamente, esto prueba que $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$. Dado que ambas eran maximal, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$, así pues el altas maximal que contiene $\mathfrak{U}$ es único.

□

En síntesis si queremos demostrar que un espacio topológico M es una variedad C^∞ , es suficiente verificar

- M es Hausdorff y segundo numerable
- M tiene un atlas C^∞ (no necesariamente maximal).(Tu, 2011, p.53)

Dicho lo anterior, por variedad de ahora en adelante entenderemos que estamos hablando de una variedad diferenciable o suave o lisa o C^∞, es decir son sinónimos y los usaremos intercambiadamente en lo que resta de este trabajo de tesis.
En contexto de variedades, dado que las funciones coordenadas estándar en $\mathbb{R}^n$ son funciones $r^i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, denotamos las coordenadas estandar en $\mathbb{R}^n$ como $r^1, r^2, ...r^n$. Si $(U, \phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n)$ es una carta de una variedad, podemos también definir las funciones coordenadas locales en U como $x^i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ cuya regla esta dada por la siguiente composición. $x^i = r^i \circ \phi$ por lo que $x^i(p) = r^i(\phi(p))$ donde x^i es la i-ésima componente en U, por lo que si escribimos a la carta también de la siguiente manera, $(U, \phi) = (U, x^1, ..., x^n)$.
Por tanto, para $p \in U$, $(x^1(p), ..., x^n(p))$. Las funciones $x^1, ..., x^n$ son llamadas funciones coordenadas o coordenadas locales en U. Por abuso de notación, algunas veces omitimos la p. Así que la notación $(x^1, ..., x^n)$ representa alternativamente coordenadas locales en el conjunto abierto U. Por una carta (U, ϕ) sobre p en una variedad M, entenderemos que una carta en la estructura diferenciable de M tal que $p \in U$.

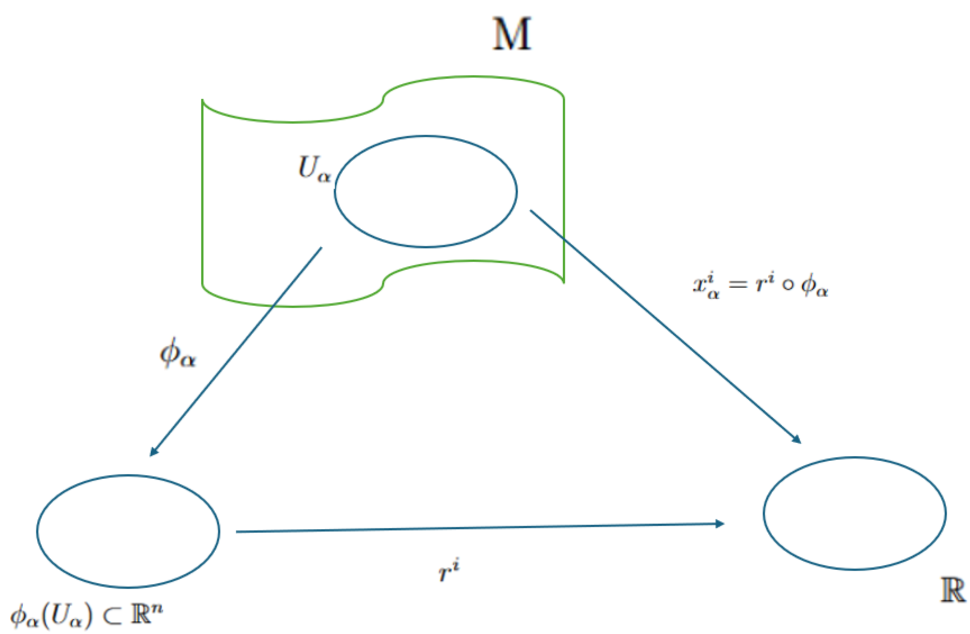

Figura 3.1: Diagrama de composición de la iésima componente de x^i_α.

Ejemplo 3.0.1. *Es un hecho conocido que el espacio topológico $\mathbb{R}^n$ es segundo numerable y también es un espacio topológico de Hausdorff, además de que es homeomorfo a si mismo bajo el mapeo identidad Id, por lo tanto es una variedad topológica. Ahora bien consideremos el mapeo identidad Id en $\mathbb{R}^n$*

$$Id : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

y consideremos a la pareja $(\mathbb{R}^n, Id)$ *es una carta y si consideramos la colección* $\{(\mathbb{R}^n, Id)\}$ *de una sola carta es un atlas en* $\mathbb{R}^n$ *y por lo tanto es una variedad de dimensión n, además dicha carta también puede representarse mediante las coordenadas estándar de* $\mathbb{R}^n$ *es decir,* $(\mathbb{R}^n, r^1, ..., r^n)$.

Ejemplo 3.0.2. ***(Todo subconjunto abierto N de una variedad diferenciable de dimensión n es también una variedad de dimensión n diferenciable).***
Supongamos a una variedad M de dimensión n y a un subconjunto abierto N en M, además consideremos que la carta (U_α, ϕ_α) *que a su vez forma es un atlas, es decir,* $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) | \alpha \in I\}$.
Sabemos que todo subconjunto abierto N de un espacio topológico M segundo numerable es también segundo numerable, no solo eso, también todo subconjunto abierto de un espacio topológico de Hausdorff es también de Hausdorff.
Por la topología de subespacio consideremos abiertos U_α *en el espacio topológico M y tomemos a* $V_\alpha = N \cap U_\alpha$*, es decir intersecciones de abiertos en la variedad M y el subconjunto abierto de N de M, dicha intersección es abierta en M. Por lo que podemos considerar a la carta* $(V_\alpha, \phi_\alpha) = (U_\alpha \cap N, \phi_\alpha(U_\alpha \cap N))$ *en N.*
Por lo que la colección de cartas (V_α, ϕ_α) *forma un atlas en N, es decir,* $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$*, escrito de otra forma* $\{(U_\alpha \cap N, \phi_\alpha(U_\alpha \cap N)\}$ *donde* $\phi_\alpha(U_\alpha \cap N) : U_\alpha \cap N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *y la colección* $\{(V_\alpha, \phi_\alpha)\}$ *cubre a N, es decir,*

$$\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha = N$$

Ejemplo 3.0.3. *Sabemos que* $\mathbb{R}^n$ *es una variedad topológica n dimensional por lo que podemos suponer un atlas* $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, Id)\}$*. Que consiste únicamente de una carta abierta. pero ya sabemos que* $\mathbb{R}^n$ *es abierto en si mismo, también que el mapeo identidad en* $\mathbb{R}^n$ *es un homeomorfismo por lo que en efecto forma un atlas* $\mathcal{A}$*. Para saber si es diferenciable tenemos que darnos cuenta que* $\mathbb{R}^n \cap \mathbb{R}^n$ *y el mapeo de transición será la identidad, es decir* $Id \circ Id^{-1} = Id$ *y además* $Id \circ Id^{-1}$ *es un difeomorfismo por lo tanto tenemos un atlas diferenciable. Además podemos darnos cuenta que para una variedad puede haber más de un atlas diferenciable, esto depende del homeomorfismo, por lo que si cambiamos el homeomorfismo cambiamos el atlas, consideremos ahora el mapeo* $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dado por la regla* $F(x) = x^3$*, la potencia de x es 3, dicho mapeo es un homeomorfismo, además todas las potencias impares positivas son homeomorfismos, son mapeos biyectivos y continuos, así pues podemos decir que* $(\mathbb{R}, F)$ *es una carta, ya que si* $\mathbb{R}$ *se cubre así mismo, decimos que la colección* $\mathfrak{B} = \{(\mathbb{R}, F)\}$ *es un atlas en* $\mathbb{R}$*, como probamos que F es diferenciable pues tenemos que* $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}$ *y tenemos el homeomorfismo* $F \circ F^{-1}$ *que no es otra cosa que el mapeo identidad que es diferenciable por lo que* $\mathfrak{B}$ *también es diferenciable.*

Ejemplo 3.0.4. *La circunferencia unitaria está definida por la siguiente expresión:*

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Sabemos que los conjuntos abiertos en el espacio topológico $\mathbb{R}^2$ *con la topología Euclidiana son bolas abiertas de dimensión 2 o también llamados discos abiertos, por lo*

que los conjuntos abiertos en la topología subespacio que se hereda a la circunferencia unitaria son la intersección de dichos discos abiertos con S^1, es decir los conjuntos abiertos del subespacio topológico S^1 son arcos abiertos. Es un hecho conocido que $\mathbb{R}^2$ es un espacio topológico segundo numerable y de Hausdorff.
Como S^1 es un subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$ por el teorema 1.2.2 y la proposición 1.2.1, S^1 es un espacio topológico de Hausdorff y también 2 numerable.

Ahora bien, consideremos 4 conjuntos abiertos en el subespacio topológico S^1 que cubran a S^1 y cuyos extremos no toquen a S^1, denotándolos por $U_1 = \{(x,y) \in S^1 | y > 0\}$, que es el arco superior de S^1, $U_2 = \{(x,y) \in S^1 | y < 0\}$ que es el arco inferior de S^1, $U_3 = \{(x,y) \in S^1 | x > 0\}$ que es el arco derecho de S^1 y finalmente $U_4 = \{(x,y) \in S^1 | x < 0\}$ que es el arco izquierdo de S^1. Así pues la unión de estos cuatro conjuntos abiertos cubren a S^1, es decir:

$$\bigcup_{i=1}^{4} U_i = S^1$$

Lo siguiente que hay que encontrar son homeomorfismos correspondientes a cada uno de estos conjuntos abiertos para formar cartas, los candidatos para ello son mapeos que proyecten los arcos, es decir para los arcos de S^1 superior e inferior proyectados al intervalo abierto (-1,1) del eje x y para los arcos izquierdo y derecho de S^1 proyectarlos al intervalo abierto (-1,1) del eje y.
Por lo que definimos a:

$$\begin{aligned} \phi_1 : U_1 &\longrightarrow (-1,1) \subset \mathbb{R} \\ \phi_1(x,y) &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2 : U_2 &\longrightarrow (-1,1) \subset \mathbb{R} \\ \phi_2(x,y) &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_3 : U_3 &\longrightarrow (-1,1) \subset \mathbb{R} \\ \phi_3(x,y) &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_4 : U_4 &\longrightarrow (-1,1) \subset \mathbb{R} \\ \phi_4(x,y) &= y \end{aligned}$$

*como podemos observar en la **Figura 3.2**; Dichos mapeos son biyectivos y bicontinuos en su dominio, por lo que obtenemos las cartas $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$, (U_3, ϕ_3), (U_4, ϕ_4). Las cuales forman un atlas $\mathcal{A} = \{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2), (U_3, \phi_3), (U_4, \phi_4)\}$ en S^1.*

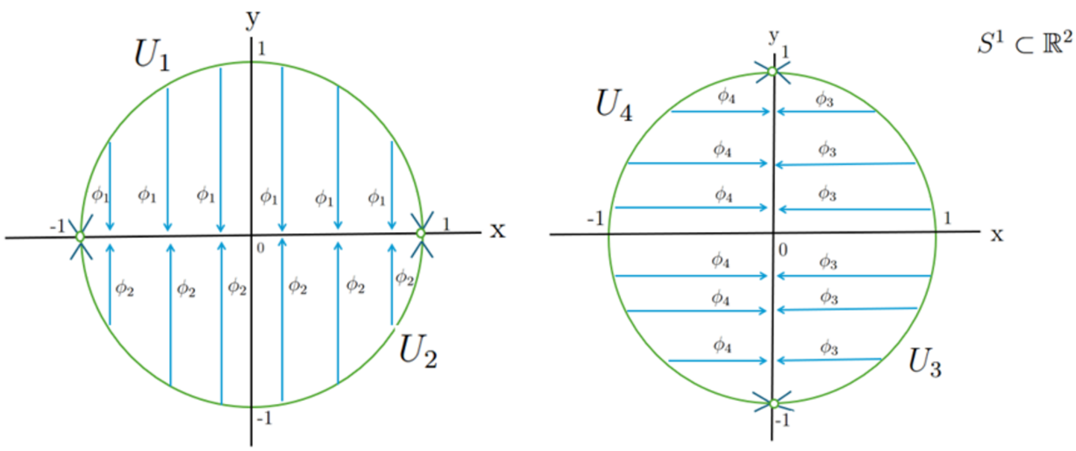

Figura 3.2: Proyección de S^1 a subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$.

Como los subconjuntos abiertos del rango de los homeomorfismos son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ y su dimensión es 1, decimos que S^1 es una variedad de dimensión 1.

Dado que la intersección de los conjuntos abiertos $U_1 \cap U_2 = \emptyset = U_3 \cap U_4$ en su dominio es vacía automáticamente son C^∞-compatibles forman un atlas C^∞-compatible.

No obstante también existe el caso en el que si hay intersección entre conjuntos abiertos en S^1 como es el caso de $U_1 \cap U_3 = \{(x, y) \in S^1 | x > 0, y < 0\}$ en S^1, los mapeos de transición correspondientes son $\phi_1 \circ \phi_3^{-1}$ y $\phi_3 \circ \phi_1^{-1}$.

Tenemos que $\phi_1(x, y) = x$ y $\phi_3(x, y) = y$ y además consideremos que x y y están relacionados por la ecuación de la circunferencia unitaria, es decir:

$$x = \sqrt{1 - y^2}$$

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

Por lo que si $\phi_1(x, y) = x$, entonces $\phi_1^{-1}(x) = (x, y) = (x, \sqrt{1 - x^2})$, análogamente para $\phi_3(x, y) = y$, entonces $\phi_3(y) = (x, y) = (\sqrt{1 - y^2}, y)$.

Así pues,

$$\phi_1 \circ \phi_3^{-1} : (0, 1) \longrightarrow (0, 1)$$

Dicha composición opera a un número t entre 0 y 1, es decir:

$$\phi_1 \circ \phi_3^{-1}(t) = \phi_1(\sqrt{1 - t^2}, t) = \sqrt{1 - t^2}$$

por lo que ϕ_1 envía coordenadas a x, por lo tanto

$$\phi_1 \circ \phi_3^{-1}(t) = \sqrt{1 - t^2}$$

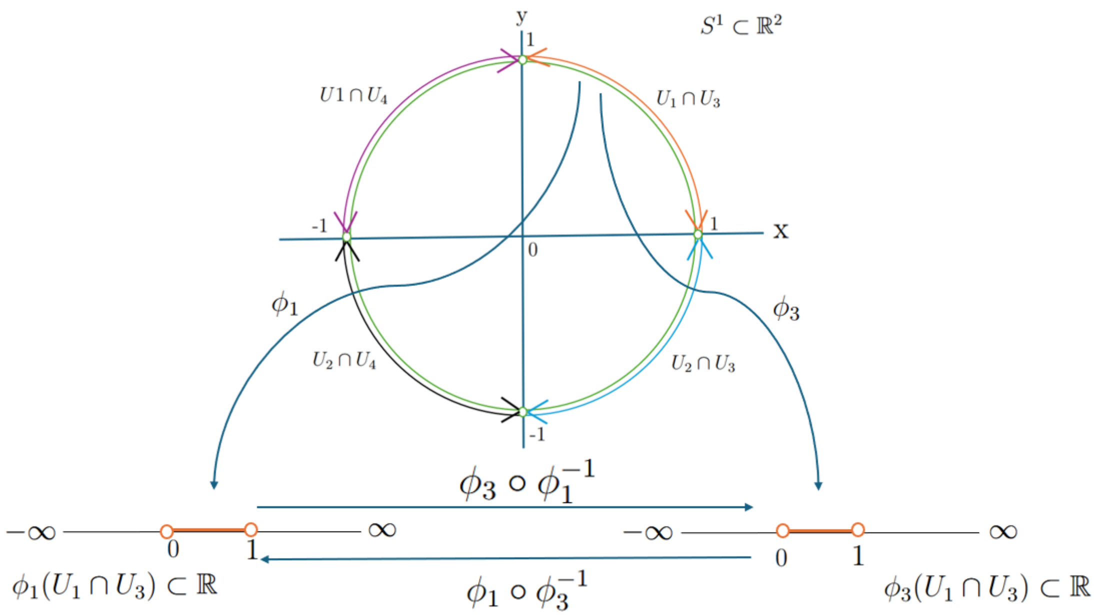

Figura 3.3: Estructura diferenciable de la circunferencia unitaria S^1

Este mapeo es diferenciable excepto cuando t=1, pero t=1, ya se ha excluido cuando se definieron los conjuntos abiertos U_i, es decir $\phi_1 \circ \phi_3^{-1}$ es diferenciable en cada punto de su dominio por lo que es C^∞ o diferenciable. Además dichos mapeos de transición forman un difeomorfismo dado que uno es inverso de otro.

Este análisis se cumple para las otras 3 intersecciones de conjuntos abiertos en S^1, por lo que podemos concluir que $\mathcal{A}$ es un atlas diferenciable o suave o C^∞.

Ejemplo 3.0.5. ***No ejemplo de variedad diferenciable.***

Consideremos las siguientes cartas en $\mathbb{R}$, $((-1,1), Id : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})$ y $((-\frac{1}{2},2),\psi(x))$, donde $\psi(x) = x^3$, nos preguntamos ¿son compatibles?. Para saberlo consideremos a la intersección $U_1 \cap U_2$ y calculemos $\psi \circ Id^{-1}(x) = x^3$, en el intervalo $(-\frac{1}{2},1)$ y en efecto es suave o C^∞.

No obstante $\psi \circ Id^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$ en el intervalo $(-\frac{1}{8},1)$ no es diferenciable en origen, es decir el mapeo $\psi \circ Id^{-1}$ no es un difeomorfismo entre subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ y por lo tanto, estas dos cartas no son compatibles, es decir no son C^∞.

Ejemplo 3.0.6. ***Espacios vectoriales de dimensión finita.***

Comencemos suponiendo un espacio vectorial V de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$, y afirmamos que a dicho espacio vectorial V podemos darle una estructura diferen-

ciable. Sabemos que cualquier norma en un espacio vectorial de dimensión finita produce una topología que es independiente de la elección de la norma. Así pues con esta topología, V es una variedad topológica n dimensional, y naturalmente tiene una estructura diferenciable o suave, esto puede determinarse de la siguiente manera: Como supusimos al espacio vectorial V de dimensión finita, por el teorema de existencia de bases podemos suponer ahora que $\alpha = \{v_1, ..., v_n\}$*, es una base ordenada de V; Ahora bien si tomamos un vector arbitrario v en V, podemos expresarlo de manera única como combinación lineal de elementos de la base* α*, es decir*

$$v = a_1v_1+, a_2v_2+, ..., +a_nv_n$$

Y si usamos a la base canónica $\{e_i | 1 \leq i \leq n\}$ *de* $\mathbb{R}^n$*, es decir los vectores que tienen un 1 en la posición i y ceros en las demás posiciones y procedemos a construir la aplicación:*

$$C_\alpha : V \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Dicha aplicación lineal va de del espacio vectorial a $\mathbb{R}^n$*, además esta aplicación lineal es un isomorfismo porque manda bases en bases.*

Así pues, cuando le aplicamos el isomorfismo anterior al vector v descrito de manera única por su combinación lineal, tenemos que:

$$\begin{aligned} C_\alpha(v) &= C_\alpha(a_1v_1 + a_2v_2, +, ..., +a_nv_n) \\ &= a_1C_\alpha(v_1)+, ..., +a_nC_\alpha(v_n) \\ &= a_1e_1 + a_2e_2+, ..., +a_ne_n \end{aligned} \tag{3.3}$$

Que es el vector de coordenadas de ese vector arbitrario respecto a la base α*, por lo que* C_β *es el isomorfismo de coordenadas que a cada vector le extrae sus coordenadas, además es un homeomorfismo por lo que podemos formar la carta* (V, C_α)*.*
De manera análoga, para el mismo espacio vectorial V mediante otra base ordenada $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *podemos formar el isomorfismo de coordenadas* C_β *que va del espacio vectorial V en* $\mathbb{R}^n$*, que también es un homeomorfismo y podemos formar a la carta* (V, C_β)*.*

Por lo cual, si consideramos a la aplicación identidad $IV : V \longrightarrow V$ *para la base* α *en el dominio y la base* β *en el codominio, dicha aplicación tiene una única matriz asociada* $[IV]_\alpha^\beta$*, que además es invertible, por lo que el mapeo de transición esta dado de la siguiente forma:*

$$S = C_\beta \circ IV \circ C\alpha^{-1}, S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

Si $e_i \in \mathbb{R}^n$*, que es un vector de la base canónica aplicado a* $C_\alpha^{-1}(e_i)$*, es decir tomamos un vector canónico y lo regresamos al vector correspondiente por lo que:*

$$\begin{aligned} S(e_i) &= C_\beta(IV(C_\alpha(e_i))) \\ &= C_\beta(IV(v_i)) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Que es el vector de coordenadas de $T(v_i)$ respecto a la base β, que son n vectores columna de n renglones, por lo que resulta un matriz de $n \times n$, así obtenemos una estructura diferenciable..

Ejemplo 3.0.7. ***Matrices.***

*El espacio de matrices $M(n \times m, \mathbb{R})$ con coeficientes en los reales es un espacio vectorial de dimensión $n \times m$ sobre la suma y la multiplicación por un escalar, del **ejemplo 3.0.6**, por ser un espacio de dimensión finita es una variedad diferenciable, por notación cuando n=m escribimos dicho espacio vectorial como $M(n, \mathbb{R})$*

Ejemplo 3.0.8. ***Grupo general lineal*** $GL(n, \mathbb{R})$.

Para cualesquiera 2 enteros positivos m y n, tenemos que $\mathbb{R}^{m \times n}$ es el espacio vectorial de las matrices $m \times n$, con coeficientes en $\mathbb{R}$, como $\mathbb{R}^{m \times n}$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{nm}$ y además como $\mathbb{R}^{m \times n}$ es un espacio vectorial de dimensión finita todas sus normas son equivalentes y generan una topología.
Ahora bien, si consideramos solo las matrices cuadradas de n por n, podemos darle la topología de $\mathbb{R}^{n \times n}$ a $\mathbb{R}^{n^2}$ por lo que colocando los renglones de la matriz uno tras otro mediante

$$T : \mathbb{R}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{nn}$$

de tal forma que,

$$T(A) = (a_{11}, ..., a_{1n}, a_{21}, ..., a_{2n}, ..., ..., ..., a_{n1}, ..., a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$$

obtenemos el homeomorfismo $\mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$.

Sabemos que el grupo general lineal es por definición:

$$GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | detA \neq 0\} = det^{-1}(\mathbb{R} \backslash \{0\})$$

Y ya que la función determinante está dada por

$$det_{\mathbb{R}} : M(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, A \mapsto det(A)$$

es una función continua porque es una función polinómica y además es diferenciable cuando es no nula y cuando la derivada es no nula tiene inversa y esa inversa es diferenciable.
Como $\mathbb{R} \backslash \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, tenemos que el subconjunto:

$$GL(n, \mathbb{R}) = det_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R} \backslash \{0\})$$

Es abierto porque la unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto y preimágenes de conjuntos abiertos son conjuntos abiertos por lo que $(GL(n,\mathbb{R})$ *es una subvariedad de dimensión* n^2.

Ejemplo 3.0.9. *La n-esfera unitaria o esfera unitaria de dimensión n,* $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *esta definida por la ecuación*

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1$$

podemos darle una estructura diferenciable de la siguiente forma:
Si denotamos al polo sur por S y al polo norte por N tenemos que S=(-1,0,...,0) y N=(1,0...,0), los singuletes $\{S\}$ *y* $\{N\}$ *son conjuntos cerrados porque como* S^n *es un un espacio de Hausdorff y todo singulete en un espacio de Hausdorff es un conjunto cerrado, por lo que obtenemos a los conjuntos abiertos:*

$$U_1 = S^n \backslash \{N\} \quad y \quad U_2 = S^n \backslash \{S\}$$

Tanto U_1 *y* U_2 *son la n-esfera menos el polo norte y la n-esfera sin el polo sur, dichos conjuntos son abiertos porque su complemento es un conjunto cerrado. Por lo que podemos obtener homeomorfismos, denotados por* i_N *y* i_S*, de* U_1 *y* U_2 *que relacionan al polo norte o sur respectivamente con cualquier punto x en la n-esfera y además lo hacen coincidir con el hiperplano* $x_0 = 0$ *homeomorfo a* $\mathbb{R}^n$.
Llamamos la proyección estereográfica del polo norte o sur asignando a cada uno $x \in U_1$ *o* $x \in U_2$ *la intersección de la línea recta pasando a través de x y N(i=1) o S(i=2) con el hiperplano* x_0*. Explícitamente,*

$$i_N(x) = \tfrac{(x_1,x_2,...,x_n)}{1-x_0} \quad y \quad i_S(x) = \tfrac{(x_1,x_2,...,x_n)}{1+x_0},$$

Por lo que nos genera un atlas $\mathcal{A} = \{(iN, U_1), (iS, U_2)\}$ *con estas dos cartas.*
La intersección de U_1 *con* U_2 *nos genera a la n-esfera unitaria sin los polos norte y sur, dicha intersección de conjuntos abiertos nos genera un conjunto abierto porque se está dando en un espacio topológico, por o cual podemos establecer que los homeomorfismos iN e iS mapean este conjunto abierto* $S^n \backslash \{S, N\}$ *a subconjuntos abiertos de* $\mathbb{R}^n$.

Se puede verificar que:

$$i_N^{-1}(y) = \frac{(||y||^2 - 1, 2y_1, ..., 2y_n)}{(||y||^2 + 1)}$$

y

$$i_S^{-1}(y) = \frac{(-||y||^2 + 1, 2y_1, ..., 2y_n)}{(||y||^2 + 1)}$$

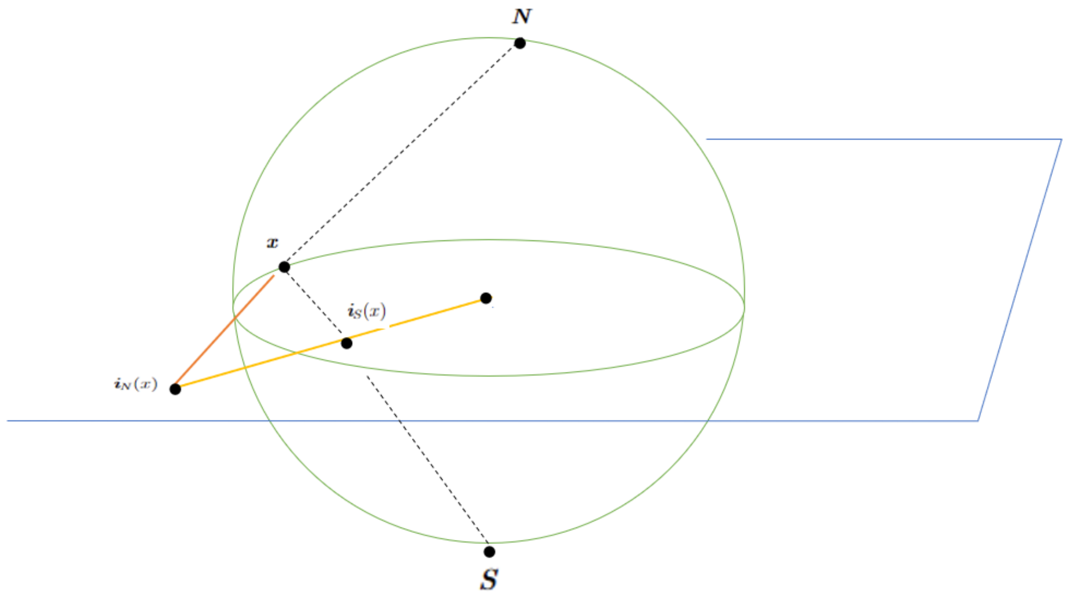

Figura 3.4: La n-esfera vista como variedad.

Son sus inversas, por lo que ahora se puede establecer el siguiente difeomorfismo dado por la regla:

$$i_S \circ i_N^{-1} : i_N(U_1 \cap U_2) \longrightarrow i_S(U_1 \cap U_2)$$

Considerando $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *tenemos que* $y \longmapsto \frac{y}{||y||^2}$.

Ejemplo 3.0.10. ***Gráfica de funciones suaves.***

Para un subconjunto abierto U *de* $\mathbb{R}^n$ *y suponemos que la función* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *es de clase* C^∞*, la gráfica de* f *está definida como el subconjunto:*

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in U \times \mathbb{R}^m\}.$$

entonces los mapeos:

- $\phi : \Gamma(f) \longrightarrow U$*, donde* $(x, (f(x)) \mapsto x$.
- $\phi^{-1} : (1, f) : U \longrightarrow \Gamma(f)$*, donde* $x \mapsto (x, f(x))$.

Son continuos e inversos uno del otro y por tanto forman un homeomorfismo, la gráfica de $\Gamma(f)$ *de una función* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *de clase* C^∞ *tiene una sola carta* $(\Gamma(f), \phi)$ *y es por tanto una variedad.*
De lo anterior muchas superficies que se estudian en cálculo como el paraboloide elíptico son variedades.

Definición 3.0.10. *Sea* M *una variedad suave de dimensión* n*. Una función* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *es llamada* C^∞ ***o suave en un punto p en M*** *si existe una carta* (U, ϕ) *sobre* p *en* M *tal que* $f \circ \phi^{-1}$*, una función definida en un subconjunto abierto* $\phi(U)$

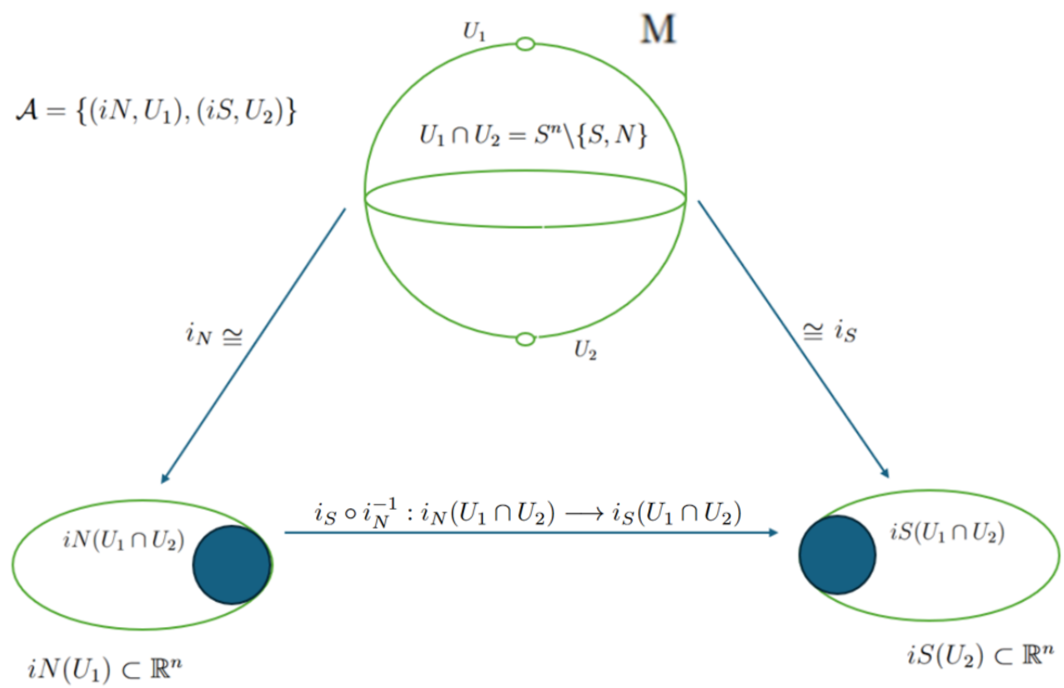

Figura 3.5: Diagrama de composición de la estructura diferenciable de la n-esfera unitaria que dimos.

de $\mathbb{R}^n$*, es* C^∞ *en* $\phi(p)$*. (Ver* ***Figura 3.6****). La función* f *es llamada* C^∞ *en* M *si es* C^∞ *en cada punto de* M*.*

Observación 3.0.1. *La definición de suavidad de una función* f *en un punto es independiente de la carta* (U, ϕ)*, por si* $f \circ \phi^{-1}$ *es* C^∞ *en* $\phi(p)$ *y* (V, ψ) *es cualquier otra carta sobre* p *en* M*, entonces en* $\psi(U \cap V)$*,*

$$f \circ \psi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi^{-1}),$$

la cual es C^∞ *en* $\psi(p)$ *como se observa en la* ***Figura 3.7****.*

En la ***Defnción 3.0.10*** *,* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *no se asume que es continua. Como sea, si* f *es* C^∞ *en* $p \in M$*, entonces* $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$*, siendo una función* C^∞*en el punto* $\phi(p)$ *en un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^n$*, es continua en* $\phi(p)$*. Como una composición de funciones continuas,* $f = (f \circ \phi^{-1}) \circ \phi$ *es continua en* p*. Ya que estamos interesados solo en funciones que son suaves en un conjunto abierto, no hay perdida de generalidad al suponer desde el principio que* f *es continua.*

Definición 3.0.11. *Sean* N *y* M *variedades de dimensión* n *y* m *respectivamente. Un* ***mapeo continuo entre variedades*** $F : N \longrightarrow M$ *es* C^∞ *en un punto* p *en* N *si existen cartas* (U, ϕ) *sobre* p *en* N *y* (V, ψ) *sobre* $F(p)$ *en* M *tal que la composición* $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ *es un mapeo de un subconjunto abierto* $\phi(F^{-1}(V) \cap U))$ *de* $\mathbb{R}^n$ *a* $\mathbb{R}^m$*, es* C^∞ *en* $\phi(p)$*, es decir:*

$$F : \phi(F^{-1}(V) \cap U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

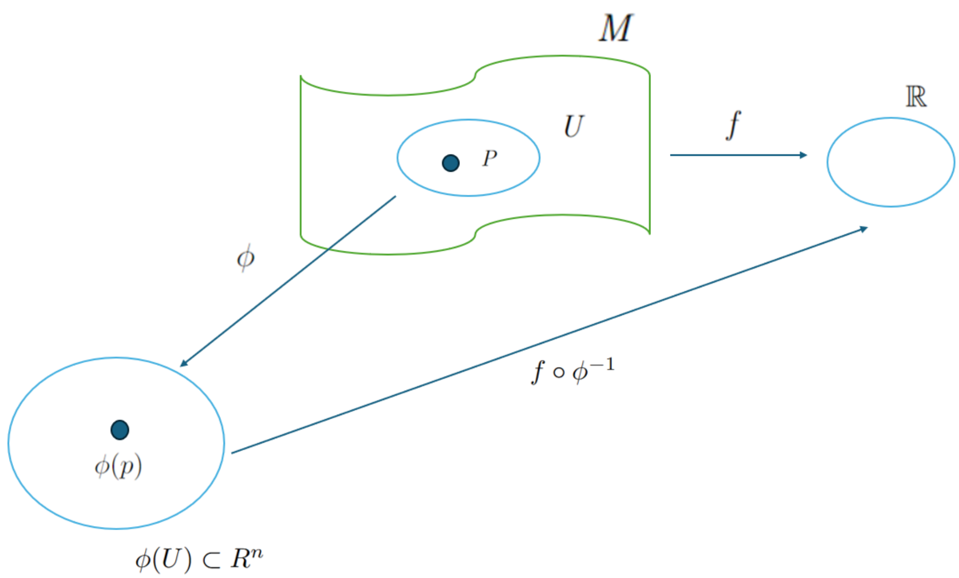

Figura 3.6: Verificando que una funcion f es C^∞ en p mediante un diagrama de espacios topológicos y aplicaciones continuas llamado cuadrado cartesiano o pullback a $\mathbb{R}^n$

Como se ilustra en la ***Figura 3.8*** *, el mapeo continuo $F : N \longrightarrow M$ se dice que es C^∞ si es C^∞ en cada punto de N.*
Asumimos que $F : N \longrightarrow M$ es continuo para asegurar que $F^{-1}(V)$ es un conjunto abierto en N. Por lo tanto, mapeos C^∞ entre variedades son por definición continuos.

Observación 3.0.2. ***(Mapeos continuos en** $\mathbb{R}^m$).*
En caso de que $M = \mathbb{R}^m$, tomamos $(\mathbb{R}^m, Id_{\mathbb{R}^m)}$ como carta sobre F(p) en $\mathbb{R}^m$. De acuerdo a la ***Definición 3.0.11****, $F : N \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es C^∞ en $p \in N$ si y solo si existe una carta (U, ϕ) sobre p en N tal que $F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es C^∞ en $\phi(p)$.*
En caso de que m=1, obtenemos la definición de que una función sea C^∞ en un punto.

Proposición 3.0.3. *Suponga $F : N \longrightarrow M$ es C^∞ en $p \in N$. Si (U, ϕ) es cualquier carta sobre p en N y (V, ψ) es cualquier carta sobre F(p) en M, entonces $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ es C^∞ en $\phi(p)$.*

Demostración. Ya que F es C^∞ en $p \in N$, hay cartas (U_α, ϕ_α) sobre $p \in N$ y (V_β, ψ_β) sobre F(p) en M tal que $\psi_\beta \circ F \circ \phi_\alpha^{-1}$ es C^∞ en $\phi_\alpha(p)$. Por la compatibilidad C^∞ de cartas en una estructura diferenciable, tanto $\phi_\alpha \circ \phi^{-1}$ y $\psi \circ \psi_\beta^{-1}$ son C^∞ en subconjuntos abiertos de espacios Euclidianos. Por lo tanto la composición

$$\phi \circ F \circ \phi^{-1} = (\psi \circ \psi_\beta^{-1}) \circ (\psi_\beta \circ F \circ \phi^{-1}) \circ (\phi_\alpha \circ \phi^{-1})$$

es C^∞ en $\phi(p)$ □

Proposición 3.0.4. ***(Suavidad de un mapeo en términos de cartas).*** *Sean*

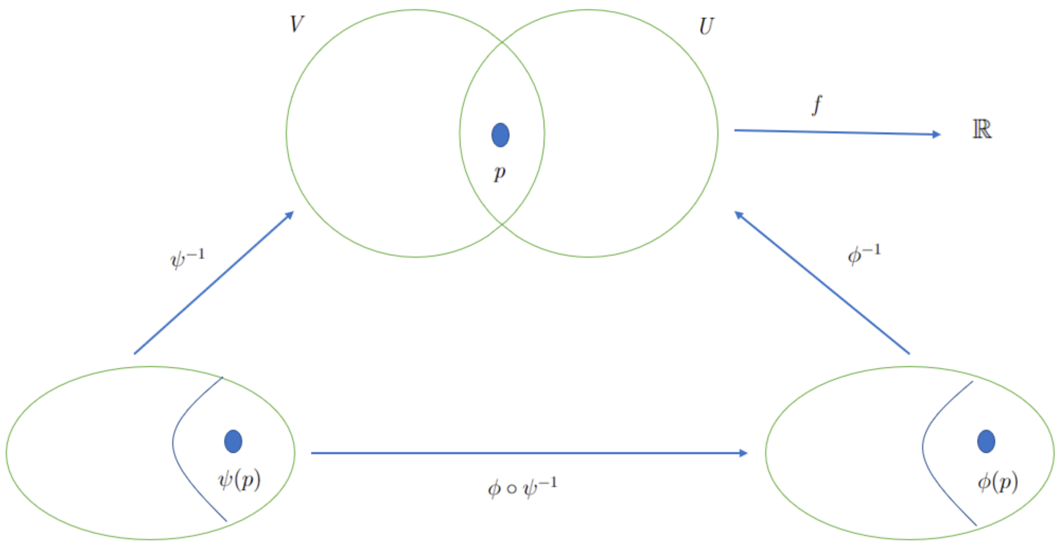

Figura 3.7: Una función f es C^∞ en p via dos cartas.

N y M variedades suaves y $F : N \longrightarrow M$ un mapeo continuo. Lo siguiente es equivalente:

(i) El mapeo $F : N \longrightarrow M$ es C^∞.

(ii) Hay atlas $\mathfrak{U}$ de N y $\mathfrak{B}$ de M tal que para toda carta (U, ϕ) en $\mathfrak{U}$ y (V, ψ) en $\mathfrak{B}$, el mapeo

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap F^{-1}(V)) \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

es C^∞.

(iii) Para toda carta (U, ϕ) en N y (V, ψ) en M, el mapeo

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap F^{-1}(V)) \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

es C^∞.

Demostración. (ii) $\Rightarrow$ (i). Sea $p \in N$. Suponga que (U, ϕ) es una carta sobre p en $\mathfrak{U}$ y (V, ψ) es una carta sobre F(p) en $\mathfrak{B}$. Por (ii), $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ es C^∞ en $\phi(p)$. Por definición de mapeo C^∞, $F : N \longrightarrow M$ es C^∞ en p. Ya que p fue un punto arbitrario en N, el mapeo $F : N \longrightarrow M$ es C^∞.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Suponga que (U, ϕ) y (V, ψ) son cartas en N y M respectivamente, tal que $U \cap F^{-1}(V) \neq \emptyset$. Sea $p \in U \cap F^{-1}(V)$. Entonces (U, ϕ) es una carta sobre p y (V, ψ) es una carta sobre F(p). Por la **Proposición 3.0.3**, $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ es C^∞ en $\phi(p)$. Ya que $\phi(p)$ fue un punto arbitrario de $\phi(U \cap F^{-1}(V))$ el mapeo $\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap F^{-1}(V)) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es C^∞.
(iii) $\Rightarrow$ (ii) Es obvio. $\square$

Definición 3.0.12. *Un* ***difeomorfismo entre variedades*** *es una mapeo biyectivo C^∞ $F : N \longrightarrow M$ cuyo mapeo inverso F^{-1} también es C^∞*

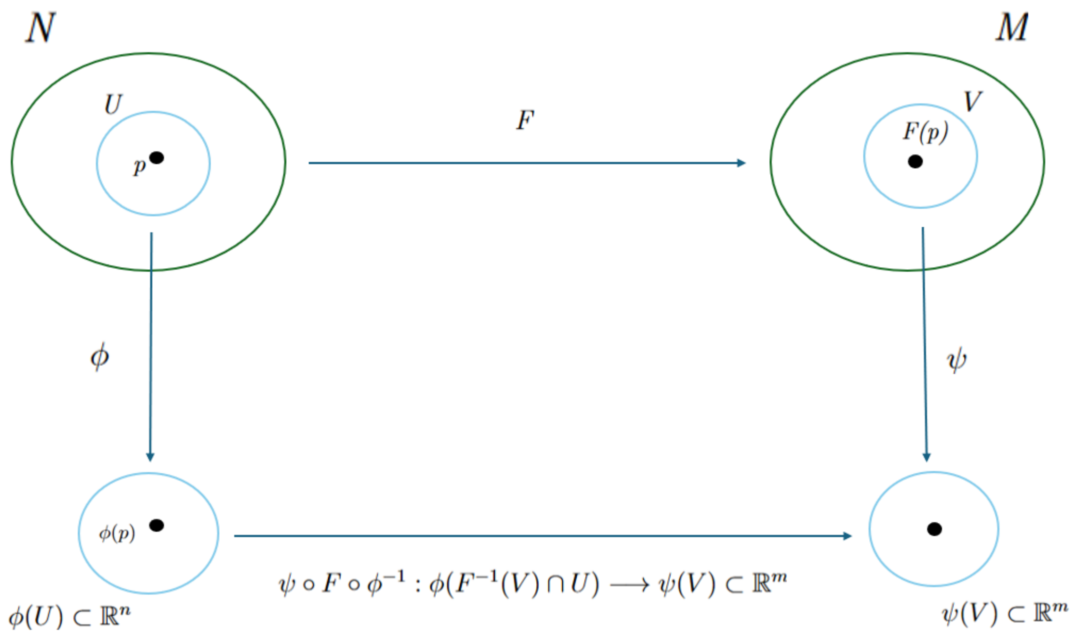

Figura 3.8: El mapeo $F : N \longrightarrow M$ es C^∞ en p.

En las siguientes dos proposiciones, los mapeos coordenados son difeomorfismos y por el contrario, todo difeomorfismo de un subconjunto abierto de una variedad con un subconjunto abierto de un espacio Euclidiano puede funjir como una función coordenada.(Tu, 2011. p.63)

Proposición 3.0.5. *Si (U, ϕ) es una carta en una variedad M de dimensión n, entonces la función coordenada*

$$\phi : U \longrightarrow \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

es un difeomorfismo.

Demostración. Por definición, ϕ es un homeomorfismo, así que es suficiente verificar que tanto ϕ como ϕ^{-1} son lisos. Para verificar la lisura de $\phi : U \longrightarrow \phi(U)$ usamos el atlas $\{(U, \phi)\}$ con una sola carta en U y el atlas $\{(\phi(U), id_{\phi(U)})\}$ con una sola carta en $\phi(U)$. Ya que el mapeo

$$id_{\phi(U)} \circ \phi \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \phi(U)$$

es el mapeo identidad, es C^∞. Por la proposición **3.0.4** $(ii) \Longrightarrow (i)$, ϕ es C^∞.

Para verificar la suavidad de $\phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow U$, usamos los mismos atlas como anteriormente.
Ya que $\phi \circ \phi^{-1} \circ id_{\phi(U)} = id_{\phi(U)} : \phi(U) \longrightarrow \phi(U)$, el mapeo ϕ^{-1}, es también C^∞. □

Proposición 3.0.6. *Sea U un subconjunto abierto de una variedad M de dimensión n. Si $F : U \longrightarrow F(U) \subset \mathbb{R}^n$ es difeomorfismo sobre un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces (U,F) es una carta en la estructura diferenciable de M.*

Demostración. Para cualquier carta (U_α, ϕ_α) en el atlas maximal de M, tanto ϕ_α y ϕ_α^{-1} son C^∞, por la **Proposición 3.0.5**. Como $F \circ \phi_\alpha^{-1}$ y $\phi_\alpha \circ F^{-1}$ son composiciones de mapeos C^∞, son C^∞. Por tanto, la carta (U,F) es compatible con altas maximal. Por la maximalidad del atlas, la carta (U,F) esta en el atlas.

□

Como ya habíamos mencionado anteriormente, las coordenadas estándar están definidas en $\mathbb{R}^n$ como $(r^1, ..., r^n)$, dichas coordenadas también están disponibles para ese subconjunto, además las coordenadas globales en el conjunto abierto U de la variedad M de dimensión n están dadas de la siguiente forma: $(x^1, ..., x^n)$ tal que $x^i = r^i \circ \phi$.
El concepto de derivada parcial no tiene sentido en espacios arbitrarios, por lo cual si queremos hablar de derivada parcial fijamos un punto p en M, lo mapeamos a $\mathbb{R}^n$, y como en $\mathbb{R}^n$ si están definidos conceptos como límite o derivada parcial, hacemos operaciones en $\mathbb{R}^n$ y regresamos a la variedad lo operado, siempre y cuando $f \circ \phi^{-1}$ sea una función suave de valor real. La siguiente definición aterriza todas estas ideas.

Definición 3.0.13. *En una variedad M de dimensión n, sea (U, ϕ) una carta y f una función C^∞. Como función en $\mathbb{R}^n$, ϕ tiene n componentes $x^1, ..., x^n$. Esto significa que si $r^1, ..., r^n$ son las coordenadas estándar en $\mathbb{R}^n$, entonces $x^i = r^i \circ \phi$. Para $p \in U$, definimos la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ de f con respecto a x^i en p como:*

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p f := \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial r^i}(\phi((p)) := \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\phi(p)}(f \circ \phi^{-1})$$

Dado que $p = \phi^{-1}(\phi(p))$, esta ecuación puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(\phi^{-1}(\phi(p))) = \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial r^i}(\phi(p)).$$

Por lo tanto, así como funciones en $\phi(U)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \circ \phi^{-1} = \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial r^i}$$

La derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ es C^∞ en U porque su pullback $(\frac{\partial f}{\partial x^i}) \circ \phi^{-1}$ es C^∞ en $\phi(U)$.

Definición 3.0.14. *Sean $F : N \longrightarrow M$ un mapeo suave y $(U, \phi) = (U, x^1, ..., x^n)$ y $(V, \psi) = (V, y^1, .., y^m)$ cartas para N y M respectivamente tal que $F(U) \subset V$. Denotemos la **i-ésima componente de F en la carta** (V, ψ) como:*

$$F^i := y^i \circ F = r^i \circ \psi \circ F : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

Entonces la matriz $[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}]$ *es llamada la* ***matriz Jacobiana de F relativa a las cartas*** (U,ϕ) *y* (V,ψ)*. En caso de que* N *y* M *tengan la misma dimensión, el determinante* $det[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}]$ *es llamado el* ***determinante Jacobiano de F relativo a las dos cartas****, el determinante Jacobiano también se puede escribir de la siguiente forma* $\frac{\partial(F^1,...,F^n)}{\partial(x^1,...,x^n)}$.
Cuando M *y* N *son subconjuntos abiertos de espacios Euclidianos y las cartas* $(U,r^1,...,r^n)$ *y* $(V,r^1,...,r^m)$*, la matrix Jacobiana* $[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}]$*, donde* $F^i = r^i \circ F$ *es la matriz Jacobiana usual del cálculo.*

Teorema 3.0.2. ***(Teorema de la función inversa para*** $\mathbb{R}^n$***).***

Sea $F : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *un mapeo* C^∞ *definido en un subconjunto abierto* W *de* $\mathbb{R}^n$*. Para cualquier punto* p *en* W*, el mapeo* F *es localmente invertible en* p *si y solo si el determinante Jacobiano es distinto de cero es decir,* $det\big[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\big] \neq 0$.

Teorema 3.0.3. ***(Teorema de la función inversa para variedades).***
Sea $F : N \longrightarrow M$ *un mapeo* C^∞ *entre dos variedades de la misma dimensión, y* $p \in N$*, supongamos las cartas* $(U,\phi) = (U,x^1,...,x^n)$ *sobre* p *en* N *y* $(V,\psi) = (V,y^1,...,y^n)$ *sobre F(p) en M, con* $F(U) \subset V$ *y además* $F^i = y^i \circ F$ *es la i-ésima componente de* F*, entonces* F *es localmente invertible en* p *si y solo si su determinante Jacobiano es distinto de cero es decir,* $det\big[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\big] \neq 0$.

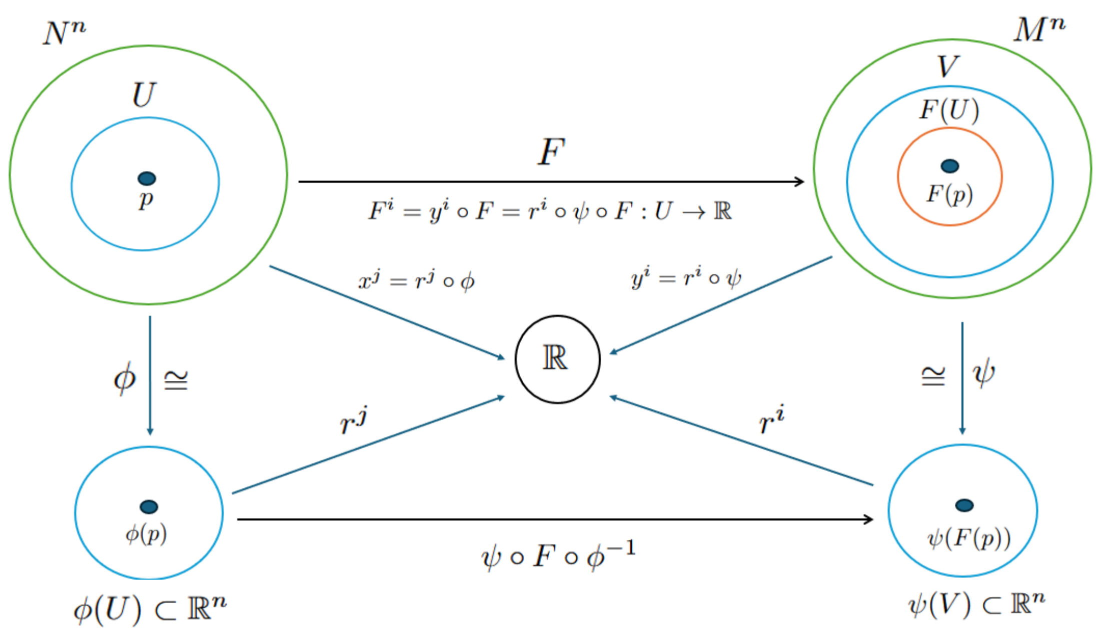

Figura 3.9: La función F es localmente invertible en p porque $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ es localmente invertible en $\phi(p)$.

Demostración. Ya que $F^i = y^i \circ F = r^i \circ \psi \circ F$, la matriz Jacobiana de F relativa a las cartas (U,ϕ), (V,ψ) es :

$$\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right] = \left[\frac{\partial(r^i \circ \psi \circ F)}{\partial x^j}(p)\right] = \left[\frac{\partial(r^i \circ \psi \circ F \circ \phi^{-1})}{\partial r^j}(\phi(p))\right]$$

La cual es precisamente la matríz Jacobiana en $\phi(p)$ del mapeo

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \supset \phi(U) \longrightarrow \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$$

Entre dos subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, por el teorema de la función inversa de $\mathbb{R}^n$,

$$det\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right] = det\left[\frac{\partial r^i \circ (\psi \circ F \circ \phi^{-1})}{\partial r^j}(\phi(p))\right] \neq 0$$

Si y solo si $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ es localmente invertible en $\phi(p)$. Ya que ϕ y ψ son difeomorfismos por la **Proposición 3.0.5**, este último enunciado es equivalente a la invertibilidad local de F en p como vemos en la **Figura 3.10**. □

Usualmente el teorema de la función inversa se aplica de la siguiente manera.

Corolario 3.0.1. *Sea N una variedad de dimensión n. Un conjunto de n funciones lisas $F^1, ..., F^n$ definidas en una vecindad coordenada $(U, x^1, .., x^n)$ de un punto $p \in N$ forma un sistema de coordenadas sobre p si y solo si el determinante Jacobiano es distinto de 0 es decir,* $det\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right] \neq 0$.

Demostración. Sea $F = (F^1, ..., F^n) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, entonces
$det\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right] \neq 0$

$\Longleftrightarrow F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es localmente invertible en p (por el teorema de la función inversa) $\Longleftrightarrow$ hay una vecindad W de p en N tal que $F : W \longrightarrow F(W)$ es un difeomorfismo (por definición de invertibilidad local) $\Longleftrightarrow$ $(W, F^1, ..., F^n)$ es una carta coordenada sobre p en la estructura diferenciable de N por la **Proposición 3.0.6**

□

Bibliografía

[1] Axler Sheldon, *Linear algebra done right*, third edition, Springer, New York 2015.

[2] Benítez López René y Wilson Roberts Richard Gordon, *Topología general*, Primera edición, Trillas, México, 2017.

[3] Casarrubias Segura Fidel y Tamariz Mascarúa Ángel, *Elementos de la topología general*, Primera edición, Instituto de Matemáticas, México, 2019.

[4] James I.M., *History of topology*, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 1999.

[5] Lafontaine Jacques , *An Introduction to Differential Manifolds*, Firsth Edition, Springer, International publishing, 2015.

[6] Lee John M., *Introduction to Smooth Manifolds, Graduate Texts in Mathematics Volumen 218*, Second Edition, Springer, New York, 2012

[7] Lee John M., *Introduction to Topological Manifolds, Gaduate Texts in Mathematics 202*, Second Edition, Springer, New York 2011.

[8] Marsden Jerrold E. y Tromba Anthony J., *Cálculo Vectorial*, Cuarta edición, Pearson Education, México, 1998.

[9] Prieto de Castro Carlos, *Topología Básica*, Segunda edición, FCE, México, 2013.

[10] Tu Loring W., *An Introduction to Manifolds, Universitext*, Second Edition, Springer, New York, 2011.

Índice alfabético