BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA “LUIS RIVERA TERRAZAS”

Análisis del modelo FRW mediante el formalismo de cosmología cuántica de lazos en el espacio fase.

Diciembre 2024

Tesis presentada para obtener el grado de:

Maestro en ciencias físicas

Presenta:

Daniel Arturo Morales Tovar

Director de Tesis:

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla

Asesor de Tesis:

Dr. Oscar Jasel Berra Montiel

Agradecimientos

Este trabajo no habría sido posible sin el apoyo y la guía de muchas personas que han sido fundamentales a lo largo de este camino.

En primer lugar, quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mis padres, Mary Tovar y Raymundo Morales. Con todo mi corazón, les agradezco por brindarme el amor, el apoyo y los valores que me han guiado hasta este momento. Sus sacrificios y dedicación han sido la base sobre la cual he construido todos mis logros.
A mi esposa, Patricia Morua, mi compañera en este viaje, gracias por tu amor, comprensión y paciencia, que han sido mi mayor fortaleza. A mis hermanos, por ser siempre un apoyo incondicional y una fuente constante de motivación. A la familia de mi esposa, que se ha convertido en mi nueva familia, les agradezco profundamente por acogerme con tanto cariño y por ofrecerme un hogar lleno de calidez.

Mi agradecimiento especial para el Dr. Valentín García Vázquez, quien, al inicio de mi maestría, me brindó su apoyo y estuvo siempre pendiente de mi situación, especialmente en aquellos momentos en los que me encontraba solo en Puebla. Su ayuda fue crucial para que pudiera avanzar en mis estudios. A la maestra Diana Castro Luna, mi más sincero agradecimiento por su constante apoyo desde antes de que comenzara esta etapa. Su amistad y guía han sido invaluables en todo este proceso.
También quiero agradecer profundamente a mis asesores, el Dr. Oscar Jasel Berra Montiel y el Dr. Roberto Cartas Fuentevilla, por su paciencia, dedicación y sabiduría. Su orientación ha sido esencial para la realización de este trabajo y para alcanzar mis metas académicas.

Expreso mi más sincero agradecimiento al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por el apoyo financiero brindado durante mi maestría. Gracias a su respaldo, he podido concentrarme plenamente en mis estudios y avanzar en mi formación académica sin preocupaciones económicas. Asimismo, agradezco al Instituto de Física de la Universidad Autónoma de Puebla (IFUAP) por proporcionarme un entorno académico y de investigación de primer nivel. La infraestructura, los recursos y el apoyo de su personal han sido fundamentales para el desarrollo de mi trabajo de tesis. La comunidad del IFUAP me ha acogido y motivado a crecer tanto profesional como personalmente, por lo cual siempre estaré profundamente agradecido.

Se agradece a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado por el apoyo otorgado para la conclusión de esta tesis dentro del Eje IV. Modelo de Investigación abierta y compartida. Objetivo 13. Formar recursos humanos que impacten positivamente el contexto social y científico como consecuencia de su accionar en una comunidad

para lograr una educación desarrolladora de la transformación. Indicador establecido en el Plan de Desarrollo Institucional 2021-2025.

Finalmente, quiero expresar mi más sincera gratitud a Dios, por haberme dado la fuerza y el coraje para completar este proceso. Esta fue la primera vez en mi vida que dejé el hogar familiar para enfrentar un desafío por mi cuenta. Aunque al principio fue difícil y lleno de incertidumbres, con su ayuda logré superar cada obstáculo, crecer como persona, y regresar a casa convertido en un adulto más fuerte y resiliente.

A todos ustedes, ¡gracias de corazón!

" El tiempo es lo que impide que todo ocurra al mismo tiempo; el espacio es lo que impide que todo me ocurra a mí ".

John Archibald Wheeler.

Dedicado a
mis padres Mary Tovar y Raymundo Morales,
mi esposa Patricia Morua, mis hermanos
y mi nueva familia Morua Torres.

En memoria de la señora Alicia mi segunda madre, me faltó tiempo para regresarte un poco de lo que me diste.
Hasta pronto.
Q.E.P.D.

Análisis del modelo FRW mediante el formalismo de cosmología cuántica de lazos en el espacio fase

RESUMEN

El modelo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) es esencial para comprender la expansión del universo en el contexto de la relatividad general. En este trabajo, se analiza un universo tipo FRW acoplado con un campo escalar, dentro del marco de la cosmología cuántica de lazos en el espacio fase. El enfoque principal radica en la construcción de la función de Wigner, elemento clave para describir la dinámica cuántica de dicho universo. Este resultado se obtiene resolviendo la constricción hamiltoniana dentro de este esquema teórico.

A diferencia de otras construcciones, este estudio se centra en un espacio fase con topología $S^1 \times \mathbb{R}$, cuyo espacio de Hilbert está dado por $L^2(S^1, d\varphi/2\pi)$, el cual es equivalente al espacio de Bohr-Hilbert, utilizado comúnmente en la cosmología cuántica de lazos. Este enfoque proporciona una perspectiva única y detallada sobre la dinámica cuántica en universos de tipo FRW acoplados a campos escalares, ampliando así el entendimiento de los modelos cosmológicos en el marco de la gravedad cuántica de lazos.

Finalizamos concluyendo que la integración de la función de Wigner en el análisis de modelos cosmológicos representa un paso crucial hacia una comprensión más completa y unificada de los fenómenos cuánticos que subyacen al comportamiento del cosmos en sus primeras etapas.

Analysis of the FRW model through the formalism of loop quantum cosmology in phase space

ABSTRACT

The Friedmann-Robertson-Walker (FRW) cosmological model is essential for understanding the expansion of the universe in the context of general relativity. In this work, a FRW-type universe coupled with a scalar field is analyzed within the framework of loop quantum cosmology in phase space. The main focus lies in the construction of the Wigner function, a key element in describing the quantum dynamics of such a universe. This result is obtained by solving the Hamiltonian constraint within this theoretical framework.

Unlike other constructions, this study focuses on a phase space with the topology $S^1 \times \mathbb{R}$, whose Hilbert space is given by $L^2(S^1, d\varphi/2\pi)$, which is equivalent to the Bohr-Hilbert space commonly used in loop quantum cosmology. This approach provides a unique and detailed perspective on the quantum dynamics of FRW-type universes coupled to scalar fields, thus broadening the understanding of cosmological models within the framework of loop quantum gravity.

We conclude by stating that the integration of the Wigner function into the analysis of cosmological models represents a crucial step toward a more complete and unified understanding of the quantum phenomena underlying the behavior of the cosmos in its early stages.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La mecánica cuántica en el espacio fase presenta una representación donde las variables de posición y momento tienen la misma importancia. A diferencia de la imagen de Schrödinger, que se enfoca exclusivamente en la representación de posición o momento, esta formulación considera ambas variables en igualdad de condiciones dentro del espacio fase [1]. En esta formulación se hace uso de distribuciones de probabilidad en lugar de funciones de onda o matrices de densidad. Además, la multiplicación de operadores es reemplazada por un producto estrella no conmutativo entre funciones suaves [2]. En la literatura existen diferentes distribuciones de probabilidad definidas en el espacio fase, siendo la más común la llamada función de Wigner, denotada generalmente por $W(x,p)$. Es importante destacar que a pesar de que la función $W(x,p)$ comparte muchas de las propiedades de un operador de densidad, no corresponde formalmente a una distribución de probabilidad genuina, esto es debido a que no cumple con los axiomas de la teoría de probabilidad, puesto que puede tomar valores negativos. Estos valores negativos resultan estar íntimamente relacionados con el principio de incertidumbre y se vuelven insignificantes en el límite clásico. Por otro lado, la evolución temporal de la función de Wigner es descrita mediante una versión cuántica de la ecuación de Liouville [3], que se deriva aplicando la transformada de Wigner (conocida como transformada inversa de Weyl o mapeo de cuantización) a la ecuación de von Neumann. En términos del producto estrella o producto de Moyal, la ecuación de evolución temporal ilustra el principio de correspondencia, ya que el límite en el que la constante de Planck tiende a cero, la ecuación de von Neumann se reduce a la ecuación clásica de Liouville.
Una de las principales ventajas de esta formulación de la mecánica cuántica es que hace uso de funciones definidas en el espacio fase, evitando así el formalismo de operadores, los cuales en la mayoría de los casos, conlleva a dificultades en definir de manera precisa el dominio de operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert de dimensión infinita.

Las ideas subyacentes en esta formulación han llevado al desarrollo de lo que actualmente se conoce como el formalismo de cuantización por deformación, el cual consiste en un método general para pasar de un sistema clásico, caracterizado por una estructura de Poisson, a un sistema cuántico [4, 5]. La principal particularidad de este enfoque de cuantización radica en el énfasis adquirido por el álgebra de observables cuánticos, la cual no viene expresada mediante una familia de operadores definidos en un espacio de Hilbert. En cambio, estas observables corresponden a funciones suaves de valores reales o complejos definidas en el espacio fase, donde el producto conmutativo puntual habitual es reemplazado por un producto no conmutativo, denominado producto estrella. Como resultado, este producto estrella induce una deformación del paréntesis de Poisson de tal manera que contiene toda la información relacionada con los conmutadores entre operadores autoadjuntos. Un elemento crucial en esta formulación resulta ser de hecho la distribución de Wigner, que en este formalismo corresponde a una representación en el espacio fase del operador de densidad el cual viene a ser responsable de todas las propiedades de autocorrelación y amplitudes de transición de un sistema mecánico cuántico dado.

A pesar de que el formalismo de cuantización por deformación ha proporcionado sin duda importantes contribuciones en matemáticas puras [6, 7], también ha demostrado ser una técnica confiable para comprender muchos sistemas cuánticos físicos [8, 9], incluyendo recientemente ciertos aspectos de la cosmología cuántica de lazos y la gravedad cuántica [10, 11], y sistemas con simetrías de norma [12, 13, 14].

Por otro lado, ha resultado evidente que es posible utilizar este esquema de cuantización para analizar sistemas cuánticos cuyo espacio fase no corresponde al espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$. Un ejemplo de esto, es el análisis del sistema cuántico dado por un rotor [15], cuyo espacio fase viene dado por un cilíndro $\{(\theta, p) \in S^1 \times \mathbb{R}\}$. En este caso y usando el formalismo de cuantización en el espacio fase, uno puede determinar la función de Wigner empleando operadores unitarios generados a través de representaciones irreducibles de los grupos de simetría del sistema. Es interesante mencionar que la cuantización en el espacio fase del rotor resulta ser equivalente a la cuantización polimérica que surge del formalismo de gravedad cuańtica de lazos.

La cuantización polimérica corresponde a una representación discreta e independiente de la geometría de fondo, asociada al álgebra de holonomías y flujos proveniente de gravedad cuántica de lazos, pero adaptada a sistemas con un número finito de grados de libertad. Este formalismo ha sido usado principalmente para analizar modelos cosmológicos y agujeros negros, ya que al ser una representación no equivalente a la representación de Schrödinger permite remover singularidades clásicas. Cabe destacar que recientemente se ha empleado el formalismo de cuantización en el espacio fase para analizar modelos de gravedad cuántica y cosmología cuántica de lazos [10, 11, 16, 17], por mencionar algunos. Este formalismo ha permitido analizar el límite clásico asociado a cosmología cuántica de lazos, incluídas algunas observables geométricas tales como los operadores de área y volumen [18].

Para iniciar con los cálculos, ofreceremos una breve introducción a los temas relevantes para comprender la investigación realizada. Estos incluyen la relatividad general, en la cual presentaremos las ecuaciones de campo de Einstein y analizaremos la métrica de Friedmann-Robertson-Walker. También exploraremos la cosmología, enfocándonos en el modelo estándar de cosmología, conocido como Lambda-Cold Dark Matter (ΛCDM). Por último, abordaremos la gravedad cuántica de lazos y la cosmología cuántica de lazos, destacando sus principales características.

1.1. Relatividad general

La relatividad general es una teoría de campos, específicamente del campo gravitacional y de los sistemas de referencia generales, publicada entre 1915 y 1916 por Albert Einstein. Esta teoría se deriva de la generalización de la teoría de la relatividad especial y del principio de relatividad para un observador arbitrario. Es decir, si extendemos la relatividad especial a marcos de referencia que se mueven arbitrariamente, podríamos realizar física desde el punto de vista de un observador acelerado.
Las principales características de la relatividad general incluyen el principio de equivalencia débil, que indica la relación entre la masa inercial m_i y la masa gravitacional m_g, es decir, la relación $\frac{m_g}{m_i}$, es una constante universal considerada como unidad en la mecánica clásica. En otras palabras, este principio describe la aceleración y la gravedad como aspectos distintos de la misma realidad [19].
La curvatura del espacio-tiempo nos muestra que la gravedad ya no es una fuerza, sino una consecuencia de esta misma curvatura. Un espacio-tiempo curvo se describe mediante una métrica local:

$$c^2 d\tau^2 = ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \tag{1.1}$$

donde ds^2 es el intervalo ("distancia") entre dos eventos en x^α y $x^\alpha + dx^\alpha$; $g_{\alpha\beta}$ es el tensor métrico, $d\tau$ es el diferencial de tiempo propio y c es la velocidad de la luz.

El principio de equivalencia fuerte amplía el alcance del principio de equivalencia débil y asume que es imposible detectar localmente cualquier efecto de la gravedad en un marco en caída libre, independientemente de otras fuerzas que puedan estar actuando.
Estas leyes/ecuaciones se generalizan reemplazando los tensores que aparecen en ellas por tensores que son invariantes bajo transformaciones de coordenadas arbitrarias, en lugar de solo para transformaciones de Lorentz. A esto se le llama principio de covarianza general.

Con estos conceptos, llegamos a la ecuación de campo de Einstein, la cual describe cómo la materia y la energía influyen en la curvatura del espacio-tiempo. La forma general de la ecuación es:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{1.2}$$

donde $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, que describe la curvatura del espacio-tiempo y se obtiene al contraer el tensor de curvatura de Riemann $\mathcal{R}^\rho_{\sigma\mu\nu}$. Es decir, se define como la traza parcial del tensor Riemann:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}^\rho_{\mu\rho\nu}. \tag{1.3}$$

El tensor de curvatura de Riemann describe como el espacio-tiempo se curva y como esta curvatura afecta la trayectoria de los objetos y la propagación de la luz en el universo. Se puede expresar como:

$$\mathcal{R}^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma,\mu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma,\nu} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}. \tag{1.4}$$

Donde $\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma,\mu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}$ y $\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}$ son los símbolos de Christoffel, que describen cómo los vectores cambian a medida que se trasladan en el espacio-tiempo. Se definen como:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\left(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}\right). \tag{1.5}$$

Con $g_{\mu\sigma}$ siendo el tensor métrico, que describe la geometría del espacio-tiempo. En la ecuación (1.2), $\mathcal{R}$ es el escalar de Ricci, conocido como la curvatura escalar, que describe la curvatura general de un espacio-tiempo en un punto dado. Se define como la traza del tensor de Ricci con respecto al tensor métrico:

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}. \tag{1.6}$$

Λ es la constante cosmológica, G es la constante de gravitación universal de Newton, c es la velocidad de la luz y $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento, que describe la distribución de materia y energía. La ecuación (1.3) igualada a cero es la ecuación de campo de Einstein en el vacío, derivada a partir de campos débiles [20].

La ecuación de campo de Einstein puede expresarse en términos del tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ como:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \tag{1.7}$$

donde

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \tag{1.8}$$

Esta ecuación nos dice que la curvatura del espacio-tiempo, descrita por $G_{\mu\nu}$, es proporcional a la energía y el momento presentes en el espacio-tiempo. En términos simples: la materia y la energía le dicen al espacio-tiempo cómo curvarse, y el espacio-tiempo curvo le dice a la materia cómo moverse. Si consideramos la constante cosmológica Λ, la ecuación de campo de Einstein se modifica de la siguiente manera:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{1.9}$$

El término $\Lambda g_{\mu\nu}$ introduce una contribución adicional a la curvatura del espacio-tiempo que se interpreta como la energía del vacío o energía oscura, la cual afecta la expansión acelerada del universo.

1.1.1. Métrica de Robertson-Walker

La métrica de Robertson-Walker es la métrica más general de un espacio-tiempo, cuyos subespacios $t = constante$ son homogéneos e isotrópicos, y se escribe:

$$ds^2 = \left(dx^0\right)^2 - S(t)^2 \left\{ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \right\}, \tag{1.10}$$

donde k es la curvatura, que se limita a tomar valores $k = 0, \pm 1$.
Para $k = 0$, la geometría es euclidiana y el espacio es plano, lo que describe un universo homogéneo, isotrópico y plano. Para $k = +1$, es un universo esférico con curvatura positiva y para $k = -1$, es un universo hiperbólico con curvatura negativa [21]. Debido a estas propiedades, los espacio-tiempos con $k = +1$ se denominan coloquialmente "universo cerrado", aquellos con $k = -1$ se llaman "universo abierto", y $k = 0$ se denomina "universo plano". Mediante argumentos de simetría, hemos logrado encontrar la métrica hasta un factor de escala desconocido $S(t)$. El factor de escala está determinado por las ecuaciones de campo. Friedmann en 1922, derivó la ecuación de movimiento para S, para el caso especial donde la constante cosmológica Λ es cero, tal ecuación es:

$$\left(\frac{s'}{s}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3c^2} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{S^2}. \tag{1.11}$$

De esta ecuación, podemos encontrar el valor de S y sustituirlo en la métrica, por lo que suele llamarse métrica de Friedmann-Robertson-Walker.

El primer autor que investigó estos espacio-tiempos fue A. A. Friedmann en 1922 y 1924. Resolvió las ecuaciones de Einstein para estas métricas, con fuente de polvo y con la constante cosmológica permitida. Friedmann trató su resultado como una mera curiosidad matemática, ya que la expansión del universo aún no se había descubierto en ese momento y no se podía ver ninguna aplicación para esas soluciones en astronomía. Poco después de encontrar estas soluciones, Friedmann murió prematuramente y no tuvo oportunidad de reclamar el crédito por sus descubrimientos cuando Hubble (1929) detectó la expansión del universo. El caso más simple, $k = 0$, fue introducido por primera vez por Robertson (1929) en un estudio sistemático del espacio-tiempo con las hoy llamadas geometrías de Robertson-Walker. El caso, $k > 0$, fue discutido por Lemaître (1927, 1931), quien generalizó la solución de Friedmann a presiones distintas de cero y era consciente que el resultado refleja algunas propiedades del universo observable. La métrica general (1.10) fue derivada por primera vez a partir de consideraciones geométricas por Robertson (1933) y Walker (1935). Friedmann y Lemaître derivaron las soluciones de las ecuaciones de Einstein (con fuentes ligeramente diferentes) para esa métrica. Los espacio-tiempos con esta geometría a menudo se denominan modelos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), pero también se utilizan varios subconjuntos de esta colección de cuatro nombres [20].

Los espacio-tiempos R–W son las únicas soluciones fluidas perfectas de las ecuaciones de Einstein.

1.2. Cosmología

Sabemos por observación que, en escalas superiores a aproximadamente 100 Mpc ($1\, pc = 3{,}086x10^{13}\, km$, $1\, Mpc = 3{,}086x10^{19}\, km$), nuestro universo es uniforme. Esto implica un nuevo conjunto de simetrías que son lo suficientemente fuertes para permitirnos encontrar soluciones exactas de las ecuaciones de campo. La búsqueda de soluciones cosmológicas se remonta a los primeros días de la relatividad general. Recientemente, la cosmología se ha vuelto mucho más rica en datos, lo que permite la construcción y prueba de modelos más elaborados y detallados.

La cosmología es la ciencia que estudia el origen, formación y evolución del universo o cosmos, considerado como un todo. Consideramos las propiedades de un universo modelo idealizado y perfectamente uniforme. Una ciencia que considera galaxias enteras como objetos pequeños podría parecer, a primera vista, muy alejada de las preocupaciones de la humanidad. Sin embargo, la cosmología aborda cuestiones fundamentales para la condición humana. Los cosmólogos se preguntan: "¿De qué está hecho el universo? ¿Es finito o infinito en extensión espacial? ¿Tuvo un comienzo en algún momento del pasado? ¿Terminará en algún momento en el futuro?

1.2.1. Modelo ΛCDM

El modelo ΛCDM (Lambda-Cold Dark Matter) es el actual modelo estándar cosmológico, el cual es el modelo más simple y elegante, capaz de explicar el origen y la evolución del universo, así como la mayoría de los datos experimentales y observaciones realizadas hasta el momento.

El modelo estándar cosmológico se fundamenta en la teoría de la relatividad general de Einstein, el principio cosmológico, que supone la homogeneidad e isotropía del universo a gran escala y cuatro bases experimentales: la Ley de Hubble, la radiación del fondo cósmico de microondas, la determinación de la abundancia de elementos primigenios formados durante los primeros instantes del universo, y las estructuras del universo a gran escala.

Este modelo describe un universo euclidiano que hoy está dominado por materia oscura fría no bariónica (CDM) y una constante cosmológica, con perturbaciones iniciales generadas por la inflación en el universo primitivo. Dado que actualmente todas las mediciones son consistentes con la idea de que la energía oscura es una constante cosmológica, este modelo de concordancia en cosmología se conoce como CDM (plano). La parte "fría" de este apodo proviene del requisito donde las partículas de materia oscura pudieran agruparse de manera eficiente en el universo primitivo. Aunque estas partículas se encuentran calientes, es decir, tienen grandes velocidades, la estructura no se formará en los niveles apropiados. Entre otras cosas, esto excluye a los neutrinos conocidos de ser candidatos a materia oscura. Las faltas de homogeneidad esperadas en un modelo sin materia oscura son demasiado pequeñas.

La idea más popular actualmente es que la materia oscura está formada por partículas elementales producidas durante los primeros momentos del Big Bang [22].

1.3. Gravedad cuántica de lazos

En 1916, Einstein sugirió que la teoría cuántica debía modificar tanto la electrodinámica de Maxwell como la nueva teoría de la gravitación. A pesar de un siglo de investigaciones, la unificación de la relatividad general y la física cuántica sigue siendo un desafío debido a la falta de datos experimentales directos sobre los aspectos cuánticos de la gravitación y la dificultad conceptual de crear una nueva sintaxis de geometría cuántica. La gravedad en relatividad general se manifiesta a través de la geometría del espacio-tiempo, y sus predicciones más importantes, como el Big Bang y los agujeros negros, surgen de esta descripción geométrica. Einstein introdujo la geometría riemanniana para describir toda la física clásica. Por lo tanto, el espacio-tiempo se representa como una variedad $\mathcal{M}$ de 4 dimensiones, equipada con una métrica (pseudo-)riemanniana $g_{\mu\nu}$, y la materia se representa mediante campos tensoriales.

La teoría de la gravedad cuántica de lazos se basa en la idea de que la geometría del espacio-tiempo es cuántica y se enfoca en los regímenes extremos donde la geometría continua de Einstein falla. Gravedad cuántica de lazos propone una geometría cuántica de Riemann, donde se considera como una superposición de varias geometrías del espacio-tiempo en lugar de una única métrica, utilizando técnicas no perturbativas de teorías de gauge y respetando la covariancia de difeomorfismos (las transformaciones que preservan la estructura de la variedad), lo que lleva a una estructura fundamentalmente discreta de la geometría.

1.3.1. Cosmología cuántica de lazos

La cosmología cuántica de lazos aplica los principios de gravedad cuántica de lazos a modelos cosmológicos simplificados, específicamente a los modelos del universo homogéneo e isotrópico (FLRW). En este contexto, se ha demostrado que los efectos de la gravedad cuántica pueden resolver la singularidad del Big Bang, reemplazándola por un "rebote cuántico" (big bounce). Esto significa que, en lugar de una singularidad infinita, el universo se contrae hasta una densidad finita extremadamente alta y luego se expande de nuevo.

El rebote cuántico en cosmología cuántica de lazos resuelve la singularidad del Big Bang y sugiere que nuestro universo actual podría haber surgido de un ciclo previo de contracción y expansión. Este modelo permite extender los escenarios inflacionarios estándar hasta el régimen de Planck, proporcionando predicciones observables. Los efectos de la geometría cuántica en la fase preinflacionaria pueden dejar huellas en las mayores escalas angulares observadas en el fondo cósmico de microondas, ofreciendo posibles explicaciones para ciertas anomalías observadas [23].

Capítulo 2

Funciones de Wigner y transformada de Weyl

2.1. ¿Porqué función de Wigner?

En la formulación estándar de la mecánica cuántica, la densidad de probabilidad en el espacio de posiciones y en el espacio de momentos se encuentran de forma separada. Es decir, si nosotros obtenemos la función de onda $\psi(x)$ en el espacio de posiciones, podemos encontrar la densidad de probabilidad mediante $|\psi(x)|^2$. Sin embargo, si deseamos hallar la densidad de probabilidad en el espacio de momentos, primero necesitamos realizar una transformada de Fourier para cambiar de espacio. Es decir,

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int e^{-ixp/\hbar} \psi(x) dx, \tag{2.1}$$

y luego se calcula $|\varphi(p)|^2$ para obtener la densidad de probabilidad en el espacio de momentos.
La función de Wigner, introducida por Eugene Wigner en 1932 [24], permite representar las distribuciones de probabilidad simultáneamente en las variables x y p, sin la necesidad de realizar la transformada de Fourier para cambiar de espacio. Sin embargo, es necesario definir qué es una transformada de Weyl, ya que esta se utiliza para encontrar las densidades de probabilidad y es crucial para calcular los valores esperados. Las características principales de la función de Wigner son que es una función de dos variables, generalmente posición y momento $W(x, p)$, y que no es una función de probabilidad simple, por lo que suele llamarse cuasi-distribución.

2.2. Transformada de Weyl y función de Wigner

La transformada de Weyl $\tilde{A}$ de un operador $\hat{A}$ se define como [25],

$$\tilde{A}(x,p) = \int e^{-ipy/\hbar}\langle x + y/2|\hat{A}|x - y/2\rangle dy, \tag{2.2}$$

donde el operador $\hat{A}$ está expresado en la base x como la matriz $\langle x'|\hat{A}|x\rangle$. La transformada de Weyl convierte un operador en una función de x y p. La transformada de Weyl a partir de la base de p se obtiene como:

$$\tilde{A}(x,p) = \int e^{ixu/\hbar}\langle p + u/2|\hat{A}|p - u/2\rangle du. \tag{2.3}$$

Ahora definimos el operador de densidad $\hat{\rho}$, que se utiliza para representar el estado. Para un estado puro $|\psi\rangle$, está dado por:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|, \tag{2.4}$$

y expresado en la base de posición, se obtiene:

$$\langle x|\hat{\rho}|x'\rangle = \langle x|\psi\rangle\langle\psi|x'\rangle = \psi(x)\psi^*(x'). \tag{2.5}$$

Con lo anterior, la transformada de Weyl del operador de densidad resulta:

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(x,p) &= \int e^{-ipy/\hbar}\langle x + y/2|\hat{\rho}|x - y/2\rangle dy,\\ &= \int e^{-ipy/\hbar}\psi(x + y/2)\psi^*(x' - y/2)dy.\end{aligned}$$

La función de Wigner se define entonces como [26]:

$$W(x,p) = \frac{\tilde{\rho}}{\hbar} = \frac{1}{h}\int e^{-ipy/\hbar}\psi(x + y/2)\psi^*(x - y/2)dy, \tag{2.6}$$

y el valor esperado de cualquier operador $\hat{A}$ está dado por:

$$\langle A\rangle = \int\int W(x,p)\tilde{A}(x,p)dxdp, \tag{2.7}$$

por lo que la distribución de probabilidad en la variable x se obtiene de:

$$\int W(x,p)dp = \psi^*(x)\psi(x), \tag{2.8}$$

de manera similar, la distribución de probabilidad para la variable canónicamente conjugada p se obtiene con:

$$\int W(x,p)dx = \varphi^*(p)\varphi(p). \tag{2.9}$$

La integral en x de la función de Wigner $W(x,p)$ proporciona la distribución de probabilidad en el espacio de posiciones, y de manera análoga, en el espacio de momentos.

2.3. Características de la transformada de Weyl y la función de Wigner

Una consecuencia de la definición de la función de Wigner de la ecuación(2.6) es que la función de Wigner es real. La función de Wigner a partir de la representación de momentos se expresa como:

$$W(x,p) = \frac{\tilde{\rho}}{\hbar} = \frac{1}{h}\int e^{ixu/\hbar}\varphi^*(p+u/2)\varphi(p-u/2)du, \tag{2.10}$$

donde hemos utilizado la ecuación (2.3).
La transformada de Weyl del operador identidad $\hat{1}$ es 1 porque:

$$\begin{aligned}\tilde{1} &= \int e^{-ipy/\hbar}\langle x+y/2|\hat{1}|x-y/2\rangle dy,\\ &= \int e^{-ipy/\hbar}\delta(x+y/2-(x-y/2))dy = 1.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Integrando la función de Wigner con respecto a x y p, obtenemos:

$$\int\int W(x,p)dxdp = 1. \tag{2.12}$$

Por lo que la función de Wigner está normalizada en el espacio x, p.
La función de Wigner tiene la propiedad de traslación que nos dice: si la función de onda $\psi(x)$ nos da la función de Wigner $W(x,p)$, entonces la función de onda $\psi(x-b)$ nos da $W(x-b,p)$. Si combinamos la función de onda con $\psi(x)e^{ixb_p/\hbar}$, la nueva función de Wigner resultará $W(x,p-b_p)$. Es decir, los cambios en la función de onda en la variable x o p, llevará cambios en la función de Wigner en la variable x o p, respectivamente.

Consideremos dos operadores de densidad $\hat{\rho}_a$ y $\hat{\rho}_b$, de diferentes estados ψ_a y ψ_b, respectivamente. Podemos formar la combinación:

$$Tr\left[\hat{\rho}_a\hat{\rho}_b\right] = |\langle\psi_a|\psi_b\rangle|^2. \tag{2.13}$$

La transformada de Weyl de la ecuación (2.13) es:

$$\int\int W_a(x,p)W_b(x,p)dxdp = h^{-1}|\langle\psi_a|\psi_b\rangle|^2. \tag{2.14}$$

El producto de las funciones de Wigner integradas en el espacio fase es el cuadrado del producto interno de las funciones de onda originales dividido por h. El lado izquierdo de la ecuación (2.14) actúa como un producto interno positivo de los estados originales. Si ahora consideramos estados ortogonales, donde $\langle\psi_a|\psi_b\rangle = 0$, tenemos:

$$\int\int W_a(x,p)W_b(x,p)dxdp = 0. \tag{2.15}$$

Para más propiedades acerca de la función de Wigner y la transformada de Weyl, ver [26].

La transformada de Weyl para $\hat{H}(\hat{x},\hat{p}) = \hat{T}(\hat{p}) + \hat{U}(\hat{x})$, donde $\hat{T}$ y $\hat{U}$ son los operadores de la energía cinética y la energía potencial, respectivamente, resulta:

$$\hat{H}(\hat{x},\hat{p}) = \hat{T}(\hat{p}) + \hat{U}(\hat{x}) \to H(x,p) = T(p) + U(x). \tag{2.16}$$

Los valores esperados de x, p, T, U y H, están dados por:

$$\langle x \rangle = \int\int W(x,p)\, x\, dxdp, \tag{2.17}$$

$$\langle p \rangle = \int\int W(x,p)\, p\, dxdp, \tag{2.18}$$

$$\langle T \rangle = \int\int W(x,p)\, T(p)\, dxdp, \tag{2.19}$$

$$\langle U \rangle = \int\int W(x,p)\, U(x)\, dxdp, \tag{2.20}$$

$$\langle H \rangle = \int\int W(x,p)\, H(x,p)\, dxdp. \tag{2.21}$$

Las propiedades de la función de Wigner y la transformada de Weyl mencionadas en este capítulo son aplicables solo para el caso de un espacio fase $\mathbb{R}^n$. La generalización a otros espacios fase es más compleja, sin embargo, en el siguiente capítulo realizaremos el caso del espacio fase cuya topología es $S^1 \times \mathbb{R}$, que corresponde a un cilindro.

Capítulo 3

Cuantización en el espacio fase $S^1 \times \mathbb{R}$

Ahora pasemos a la cuantización del espacio fase de un rotor alrededor de un eje fijo, cuya posición está dada por θ y su momento angular por $p \in \mathbb{R}$. Es decir, el espacio fase tiene la topología de un cilindro: $\{(\theta, p) \in S^1 \times \mathbb{R}\}$. El objetivo es analizar la mecánica cuántica en este espacio, así como encontrar la formulación de la función de Wigner. Para hallar la función de Wigner y describir la mecánica cuántica del rotor, notemos que el grupo correspondiente a la geometría de este espacio fase es el grupo euclidiano $E(2)$ del plano y sus representaciones unitarias. Donde reemplazamos el ángulo θ por el par $(\cos\theta, \sin\theta)$ que corresponde únicamente a los puntos del círculo unitario [27].

3.1. Operador unitario

Probemos la existencia de la estrecha relación entre el rotor y el grupo $E(2)$. Para evitar los problemas asociados con la cuantificación del ángulo θ en sí, se propone utilizar el par $(\cos\theta, \sin\theta)$, ya que está relacionado con la cuantización del ángulo y tiene una correspondencia uno a uno con los puntos del círculo unitario. Además, este par consta de funciones periódicas 2π con límites suaves, a diferencia de usar la variable angular θ, la cual no es univaluada.

Las funciones básicas:

$$\tilde{h}_1 = \cos\theta, \quad \tilde{h}_2 = \sin\theta, \quad \tilde{h}_3 = p_\theta \equiv p, \tag{3.1}$$

en el espacio fase clásico:

$$\mathcal{S}_{\theta,p} = \{s = (\theta, p);\ \theta \in \mathbb{R} \quad mod\ \ 2\pi,\ \ p \in \mathbb{R}\}, \tag{3.2}$$

obedecen los corchetes de Poisson (ver apéndice (A)):

$$\{\tilde{h}_3, \tilde{h}_1\}_{\theta,p} = \tilde{h}_2, \quad \{\tilde{h}_3, \tilde{h}_2\}_{\theta,p} = -\tilde{h}_1, \quad \{\tilde{h}_1, \tilde{h}_2\}_{\theta,p} = 0. \tag{3.3}$$

Estas funciones constituyen el álgebra de Lie del grupo euclidiano de tres parámetros $E(2) = \{g(\vartheta, \vec{a})\}$, del plano $\vec{x} \longrightarrow R(\vartheta) \cdot \vec{x} + \vec{a}$, que podemos escribir como:

$$g(\vartheta,\vec{a})\circ\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\vartheta & -\sin\vartheta & a_1\\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & a_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R(\vartheta) & \vec{a}\\ 0\,0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\1\end{pmatrix},$$

por lo que el elemento de grupo resulta:

$$g(\vartheta,\vec{a})=\begin{pmatrix}\cos\vartheta & -\sin\vartheta & a_1\\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & a_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R(\vartheta) & \vec{a}\\ 0\,0 & 1\end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Donde se pueden leer inmediatamente los generadores del álgebra de Lie (ver apéndice (B)):

$$\tilde{L}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \tilde{K}_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\qquad \tilde{K}_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

que se obtienen analizando el comportamiento de los elementos de grupo cerca de la identidad. Los generadores del álgebra de Lie obedecen las relaciones de conmutación (ver apéndice (B.1)):

$$[\tilde{L},\tilde{K}_1]=\tilde{K}_2,\qquad [\tilde{L},\tilde{K}_2]=-\tilde{K}_1,\qquad [\tilde{K}_1,\tilde{K}_2]=0. \tag{3.6}$$

En la teoría cuántica correspondiente, los generadores $\tilde{L}$ y $\vec{\tilde{K}}=(\tilde{K}_1,\tilde{K}_2)$ se convertirán en los operadores autoadjuntos $\hat{L}$ y $\vec{\hat{K}}$, que describen la mecánica cuántica del momento angular p y del par $(\cos\theta,\sin\theta)$.
Usando la expansión en serie para las exponenciales obtenemos (ver apéndice (B.2)):

$$g(\vartheta,\vec{a}=0)=g(\vartheta)=e^{\vartheta\tilde{L}}=\begin{pmatrix}\cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0\\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

$$g(\vartheta=0,a_1,a_2=0)=g(a_1)=e^{a_1\tilde{K}_1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & a_1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

$$g(\vartheta=0,a_1=0,a_2)=g(a_2)=e^{a_2\tilde{K}_2}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & a_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Así, el elemento de grupo en la ecuación (3.4) lo podemos escribir como:

$$g(\vartheta,\vec{a})=g(a_2)\circ g(a_1)\circ g(\vartheta). \tag{3.10}$$

Recordando el caso del grupo de Heisemberg-Weyl, el elemento del grupo especial:

$$\begin{aligned}g_0(\vartheta,\vec{b})&=e^{(b_1\tilde{K}_1+b_2\tilde{K}_2+\vartheta\tilde{L})},\\ &=\begin{pmatrix}R(\vartheta) & sinc(\vartheta/2)\,R(\vartheta/2)\vec{b}\\ 0\,0 & 1\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{3.11}$$

comparando la ecuación (3.11) con la ecuación (3.4), tenemos:

$$\vec{a} = sinc(\vartheta/2)R(\vartheta/2)\vec{b}. \tag{3.12}$$

Ahora notemos que el elemento g_0 de la ecuación (3.11) se puede escribir como:

$$g_0(\vartheta, \vec{b}) = e^{(\vartheta/2)\tilde{L}} \circ e^{sinc(\vartheta/2)\vec{b}\cdot\vec{\tilde{K}}} \circ e^{(\vartheta/2)\tilde{L}}, \tag{3.13}$$

lo que equivale a una especie de simetrización de Weyl. Sustituyendo el valor de $\vec{b}$, ecuación (3.12), en la ecuación (3.13), obtenemos (ver apéndice (B.3)):

$$g_0(\vartheta, \vec{a}) = e^{(\vartheta/2)\tilde{L}} \circ e^{R(-\vartheta/2)\vec{a}\cdot\vec{\tilde{K}}} \circ e^{(\vartheta/2)\tilde{L}}. \tag{3.14}$$

De la teoría cuántica, recordemos que al elemento de grupo se promueve como un operador unitario, es decir:

$$\hat{U}_0(\vartheta, \vec{a}) = e^{i(\vartheta/2)\hat{L}} \circ e^{i\vec{a}_{-(\vartheta/2)}\cdot\vec{\hat{K}}} \circ e^{i(\vartheta/2)\hat{L}}. \tag{3.15}$$

Donde hacemos uso de la notación:

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = R(\vartheta)\vec{x} = \vec{x}_\vartheta.$$

3.2. Construcción del operador de Wigner

El operador de Wigner adecuado para el espacio fase con la topología $S^1 \times \mathbb{R}$ se puede obtener de:

$$V\left[\vec{\chi}(\vartheta), p\right] = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \int_{-\infty}^{\infty} da_1 da_2 \hat{U}_0, \tag{3.16}$$

donde $\vec{\chi}(\vartheta)$ es el observable clásico que contiene toda la información necesaria sobre el ángulo θ. Este observable se define como:

$$\vec{\chi}(\vartheta) = \chi(\cos\theta, \sin\theta), \quad \chi > 0.$$

El operador $\hat{U}_0$ se expresa como:

$$\hat{U}_0 = e^{i(\hat{L}-p)(\vartheta/2)} \circ e^{i(\vec{\hat{K}}-\vec{\chi}(\vartheta))\cdot\vec{a}_{(-\vartheta/2)}} \circ e^{i(\hat{L}-p)(\vartheta/2)}, \tag{3.17}$$

que es el operador unitario obtenido del elemento de grupo $g_0(\theta, \vec{a})$, junto con un promedio de diferencias entre las cantidades clásicas $\vec{\chi}(\theta)$ y p. Lo cual se denomina como un grupo ordenado.

Todas las representaciones unitarias de $E(2)$ y sus infinitos grupos de cobertura pueden implementarse en el espacio de Hilbert:

$$L^2(S^1, \frac{d\varphi}{2\pi}; \delta), \tag{3.18}$$

con el producto escalar definido por:

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \psi_2^*(\varphi)\psi_1(\varphi), \tag{3.19}$$

y una base:

$$e_{n,\delta}(\varphi) = e^{i(n+\delta)\varphi}, \qquad (e_{m,\delta}, e_{n,\delta}) = \delta_{m,n}, \quad m, n \in \mathbb{Z}, \tag{3.20}$$

donde $\delta \in [0, 1)$ caracteriza la elección de grupo de cobertura. $\delta \neq 0$ es importante para los momentos angulares orbitales fraccionarios. Para cualquier $\psi^{[\delta]}(\varphi) \in L^2(S^1, \frac{d\varphi}{2\pi}; \delta)$, es decir:

$$\psi^{[\delta]}(\varphi + 2\pi) = e^{i2\pi\delta}\psi^{[\delta]}(\varphi), \tag{3.21}$$

tenemos la expansión:

$$\psi^{[\delta]}(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e_{n,\delta}(\varphi) = c_n\, e_{n,\delta}(\varphi), \quad c_n = (e_{n,\delta}, \psi^{[\delta]}). \tag{3.22}$$

Donde hemos utilizado la notación de Einstein, donde $\sum_n A_n B_n = A_n B_n$. Es decir, índices repetidos indican suma sobre ese índice. En el resto de este documento, utilizaremos esta notación. Los coeficientes c_n son independientes de δ. Para el resto de nuestros cálculos, asumimos $\delta = 0$.

La acción de los operadores $\vec{\hat{K}}$ y $\hat{L}$ viene dada por:

$$\vec{\hat{K}}\psi(\varphi) = k(\cos\varphi, \sin\varphi)\psi(\varphi), \tag{3.23}$$

y

$$\hat{L}\psi(\varphi) = \frac{1}{i}\partial_\varphi \psi(\varphi). \tag{3.24}$$

En términos de exponenciales, tenemos:

$$e^{i\vec{a}_{(-\vartheta/2)}\cdot\vec{\hat{K}}}\psi(\varphi) = e^{i\vec{a}_{(-\vartheta/2)}\cdot\vec{k}(\varphi)}\psi(\varphi), \tag{3.25}$$

y

$$e^{i(\vartheta)\hat{L}}\psi(\varphi) = \psi(\varphi + \vartheta). \tag{3.26}$$

Las funciones $e_{n,\delta}$ son funciones propias de $\hat{L}$ con valores propios de $n + \delta$, mientras que $\vec{\hat{K}}$ actúa como un operador de multiplicación. Diferentes valores de k pertenecen a diferentes representaciones irreducibles.

Los elementos de la matriz $V^{(k)}_{\psi_2\psi_1}[\vec{\chi}(\theta), p]$ se obtienen de:

$$V^{(k)}_{\psi_2\psi_1}[\vec{\chi}(\theta), p] \equiv (\psi_2, V[\vec{\chi}(\theta, p]\, \psi_1)\,.$$

Después de realizar algunos cálculos (ver apéndice C), obtenemos la matriz hermitiana de Wigner-Moyal (W-M) de dimensión infinita $V(\theta, p) = (V_{mn}(\theta, p))$:

$$V_{mn}(\theta, p) = \frac{1}{(2\pi)^2} e^{i(n-m)\theta} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i[(n+m)/2-p]\vartheta}, \tag{3.27}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{i(n-m)\theta} sinc\pi \left[p - (m+n)/2\right]. \tag{3.28}$$

La matriz hermitiana de dimensión infinita tiene las siguientes propiedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp V_{mn}(\theta, p)) = \frac{1}{2\pi} e^{i(n-m)\theta}, \tag{3.29}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta V_{mn}(\theta, p) = sinc(\pi(p-m))\delta_{mn}, \tag{3.30}$$

$$\int_{\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp V_{mn}(\theta, p) = \delta_{nm}, \tag{3.31}$$

$$Tr(V_{mn}(\theta, p)) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} sinc(\pi(p-n)) = \frac{1}{2\pi}, \tag{3.32}$$

$$\int_{\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp V_{kl}(\theta, p) V_{mn}(\theta, p) = \frac{1}{2\pi} \delta_{kn} \delta_{lm}, \tag{3.33}$$

$$|V_{mn}| \leq \frac{1}{2\pi}. \tag{3.34}$$

Estas propiedades se han probado en el apéndice (C.1), haciendo uso de las relaciones:

$$sinc(\pi x) = 1, \qquad para \quad x = 0. \tag{3.35}$$

$$|sinc(\pi x)| < 1, \qquad para \quad x \neq 0. \tag{3.36}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, sinc(\pi(x+a)) = 1, \qquad a \in \mathbb{R}, \tag{3.37}$$

y

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\beta} = \delta(\beta), \qquad para \quad \beta \in [\pi, \pi]. \tag{3.38}$$

De la ecuación (3.33) se deduce que:

$$\int_{\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp V^T(\theta, p) \cdot V(\theta, p) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}, \tag{3.39}$$

y

$$\int_{\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp V(\theta, p) \cdot V^T(\theta, p) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}, \tag{3.40}$$

donde $V^T(\theta, p) = V^*$ es la transpuesta de la matriz V y $\mathbb{1}$ es el operador unitario en el espacio de Hilbert. Podemos observar que V es hermitiano y ortogonal, pero no unitario.

La función $sinc(\pi(p-m))$ interpola los números cuánticos discretos m en términos de la variable continua p.

Realizando la expansión:

$$\psi_j(\varphi) = c_n^{(j)} e_n(\varphi), \qquad j = 1, 2; \qquad c_n^{(j)} = (e_n, \psi_j) \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3.41}$$

en la ecuación (3.27), obtenemos la función de Moyal:

$$\begin{aligned} V_{\psi_2\psi_1}(\theta, p) &= c_m^{(2)*} V_{mn}(\theta, p) c_n^{(1)}, \quad m, n \in \mathbb{Z}, && (3.42a)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{-ip\vartheta} \psi_2^*(\theta - \vartheta/2)\psi_1(\theta + \vartheta/2), && (3.42b)\\ &= (\psi_2, V(\theta, p)\psi_1), && (3.42c) \end{aligned}$$

demostradas en el apéndice (D). De acuerdo con las ecuaciones (3.29)-(3.33), esta función tiene las propiedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp V_{\psi_2\psi_1}(\theta, p)) = \frac{1}{2\pi} \psi_2^*(\theta)\psi_1(\theta), \tag{3.43}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta V_{\psi_2\psi_1}(\theta, p) = c_m^{(2)*} sinc(\pi(p-m)) c_m^{(1)}. \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{3.44}$$

$$\int_{\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp V_{\psi_2\psi_1}(\theta, p) = (\psi_2, \psi_1), \tag{3.45}$$

$$\int_{\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp V_{\psi_2\psi_1}^*(\theta, p) V_{\phi_2\phi_1}(\theta, p)) = \frac{1}{2\pi} (\psi_1, \phi_1)(\psi_2, \phi_2)^*, \tag{3.46}$$

las cuales son probadas en el apéndice (D.1). Debido a las relaciones de ortonormalidad, se tiene que:

$$\int_{\infty}^{\infty} dp\, sinc(\pi(m-p)) sinc(\pi(n-p)) = \delta_{mn}. \tag{3.47}$$

Por lo tanto, la función *sinc* puede eliminarse rápidamente:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, sinc(\pi(n-p)) \int_{\pi}^{\pi} d\theta V_{\psi_2\psi_1} &= \int_{-\infty}^{\infty} dp\, sinc(\pi(n-p)) \left(c_m^{(2)*} sinc(\pi(p-m)) c_m^{(1)} \right), \\ &= c_m^{(2)*} c_m^{(1)} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, sinc(\pi(n-p)) * sinc(\pi(p-m)), \\ &= c_m^{(2)*} c_m^{(1)} \delta_{mn}, \\ &= c_n^{(2)*}\, c_n^{(1)}. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Donde hemos utilizado las ecuaciones (3.44) y (3.47).

3.3. Funciones en el espacio fase asociadas con operadores del espacio de Hilbert.

Si $\psi_1(\varphi) = \hat{A}\psi(\varphi)$, donde $\hat{A}$ es algún operador, la ecuación (3.45) proporciona los elementos de la matriz $\hat{A}$ y para $\psi_2 = \psi$ su valor esperado $(\psi, \hat{A}\psi)$ en términos de integrales sobre densidades del espacio fase: para $\psi_1 = \hat{A}\psi$ tenemos:

$$c_n^{(1)} = c_k(e_n, \hat{A}e_k), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{3.49}$$

Probemos lo anterior. Retomemos la ecuación (3.41)

$$\psi_j(\varphi) = c_n^{(j)} e_n(\varphi), \qquad j = 1, 2; \qquad c_n^{(j)} = (e_n, \psi_j), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Por lo que tendremos:

$$\psi_1(\varphi) = c_n^{(1)} e_n(\varphi), \qquad c_n^{(1)} = (e_n, \psi_1), \tag{3.50}$$

$$\psi_2(\varphi) = c_m^{(2)} e_m(\varphi), \qquad c_m^{(2)} = (e_m, \psi_2). \tag{3.51}$$

Recordemos que podemos escribir las funciones de onda como:

$$\psi_1 = e_n \quad y \quad \psi_2 = e_m. \tag{3.52}$$

Si $\psi_1 = \hat{A}\psi$ de la ecuación (3.50), tenemos:

$$\begin{aligned} c_n^{(1)} &= (e_n(\varphi), \psi_1(\varphi)), \\ &= (e_n(\varphi), \hat{A}(\varphi)\psi(\varphi)), \\ &= \left(e_n(\varphi), \hat{A}(\varphi)[c_k e_k(\varphi)]\right), \\ &= c_k \left(e_n, \hat{A}e_k)\right), \end{aligned} \tag{3.53}$$

y de la ecuación (3.45), se sigue que:

$$(\psi_2, \hat{A}\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta a_{\psi_2\psi}(\theta, p), \tag{3.54}$$

con

$$a_{\psi_2\psi}(\theta, p) = \frac{1}{2} c_m^{(2)*} \left[\hat{V}(\theta, p) \cdot \hat{A} + \hat{A} \cdot \hat{V}(\theta, p)\right]_{mn} c_n. \tag{3.55}$$

La forma más general de encontrar $a_{\psi_2\psi}(\theta, p)$, asegurando que sea hermítico, es suponiendo que $\hat{V}(\theta, p)$ y $\hat{A}(\theta, p)$ son hermitianos, así entonces:

$$a_{\psi_2\psi}(\theta, p) = \hat{V}(\theta, p) \cdot \hat{A} + \hat{A} \cdot \hat{V}(\theta, p), \tag{3.56}$$

es un operador hermítico y está escrito en la forma más general. Por tanto la ecuación (3.55) expresa un elemento de matriz de mecánica cuántica en términos de una integral en el espacio fase sobre una densidad asociada a $a_{\psi_2\psi}(\theta, p)$.

La simetrización de Weyl de $\hat{V} = (V_{mn})$ y $\hat{A} = (a_{mn})$ en la ecuación (3.57) es requerida para que $a_{\psi_2\psi} = A_{\psi_2\psi}$ sea real y $\hat{A}$ sea autoadjunto.

Para $\psi_2 = e_m$ y $\psi = e_n$, tenemos:

$$\begin{aligned} A_{nm} &= (e_m, \hat{A}e_n), \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta a_{mn}(\theta, p). \end{aligned} \tag{3.57}$$

Con ayuda de la ecuación (3.56), podemos escribir formalmente:

$$\hat{A} = (A_{mn}) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2} \left[\hat{V}(\theta, p) \cdot \hat{A} + \hat{A} \cdot \hat{V}(\theta, p) \right]. \tag{3.58}$$

Para los elementos de la diagonal, tenemos:

$$a_{mm} = \frac{1}{2} \left[\hat{V} \cdot \hat{A} + \hat{A} \cdot \hat{V} \right], \tag{3.59}$$

por lo que la traza resulta ser:

$$Tr\hat{A} = \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \; Tr[\hat{A} \cdot \hat{V}(\theta, p)]. \tag{3.60}$$

Para probarlo, tomamos la ecuación (3.57) y la reescribimos para la traza, es decir:

$$\begin{aligned} Tr\hat{A} &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta a_{mn}, \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2} \left[\hat{V} \cdot \hat{A} + \hat{A} \cdot \hat{V} \right]_m, \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[\hat{V} \cdot \hat{A} + \hat{A} \cdot \hat{V} \right]_m, \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left[\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[\hat{V} \cdot \hat{A} \right]_m + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[\hat{A} \cdot \hat{V} \right]_m \right], \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left[Tr\left[\hat{V} \cdot \hat{A} \right] + Tr\left[\hat{A} \cdot \hat{V} \right] \right], \\ &= \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \cancel{2}\, Tr\left[\hat{V} \cdot \hat{A} \right], \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta Tr\left[\hat{V} \cdot \hat{A} \right]. \end{aligned}$$

Si $\hat{A}$ es una matriz de densidad diagonal,

$$\hat{\rho} = (\lambda_n \delta_{mn}), \qquad \lambda_n \geq 0; \qquad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n = 1, \tag{3.61}$$

entonces tenemos:

$$Tr\hat{A} = \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} Tr\left[\hat{V} \cdot \hat{\rho}\right], \tag{3.62}$$

donde:

$$\begin{aligned}
Tr\left[\hat{V} \cdot \hat{\rho}\right] &= \left[\hat{\rho} \cdot \hat{V}\right]_{nn}, \\
&= \rho_{nm} V_{mn}, \\
&= \left[\lambda_n \delta_{nm}\right] \left\{ \frac{1}{2\pi} e^{i(n-m)\theta} \, sinc\pi\left[p - (m+n)/2\right] \right\}, \\
&= \lambda_n \cancel{\delta_{nn}}^{=1} \frac{1}{2\pi} \cancel{e^{i(n-n)\theta}}^{=1} \, sinc\pi\left[p - (n+n)/2\right], \\
&= \frac{\lambda_n}{2\pi} \, sinc\pi\left[p - n\right],
\end{aligned}$$

$$Tr\left[\hat{V} \cdot \hat{\rho}\right] = \frac{\lambda_n}{2\pi} \, sinc\pi\left[p - n\right], \tag{3.63}$$

sustituimos (3.63) en (3.62):

$$\begin{aligned}
Tr\hat{A} &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{\lambda_n}{2\pi} \, sinc\pi\left[p - n\right], \\
&= \frac{1}{2\pi} \lambda_n \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \cancel{\int_{-\infty}^{\infty} dp \, sinc\pi\left[p - n\right]}^{=1}, \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} d\theta}^{=2\pi}, \\
&= \frac{1}{\cancel{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n \cancel{2\pi}, \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n,
\end{aligned}$$

por lo que:

$$Tr\hat{A} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n = 1. \tag{3.64}$$

Usando la relación (3.47) las probabilidades λ_m pueden ser extraídas de la ecuación (3.63),

$$\lambda_m = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dp \, sinc(\pi(p - m)) Tr[\hat{\rho} \cdot \hat{V}(\theta, p)]. \tag{3.65}$$

Para probar esta relación, a partir de la ecuación (3.63) tenemos:

$$2\pi Tr\left[\hat{\rho} \cdot \hat{V}(\theta, p)\right] = \lambda_m \, sinc\pi\left[p - m\right],$$

multiplicamos ambos lados por $sinc\,\pi\,(p - n)$ e integramos en la variable p de $(-\infty, \infty)$, es decir:

$$\begin{aligned}
2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dp \, sinc\,\pi\left[p - n\right] Tr\left[\rho \cdot V(\theta, p)\right] &= \lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} dp \, sinc\pi\left[p - m\right] sinc\pi\left[p - n\right], \\
&= \lambda_n \delta_{mn}.
\end{aligned}$$

Así, tenemos que:

$$\lambda_m = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dp\, sinc\pi \left[p - m\right] Tr\left[\rho \cdot V(\theta, p)\right] .$$

Como $\hat{A}$ es cualquier operador en la ecuación (3.60), podemos tomar $\hat{A} = \hat{O} \cdot \hat{\rho}$, donde $\hat{\rho}$ es una matriz de densidad y $\hat{O}$ es una observable autoadjunta. Entonces:

$$Tr(\hat{\rho} \cdot \hat{O}) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{1}{2} Tr[\hat{V}(\theta, p) \cdot \{\hat{O}, \hat{\rho}\}], \tag{3.66}$$

donde $\hat{O}, \hat{\rho}\} = \hat{O} \cdot \hat{\rho} + \hat{\rho} \cdot \hat{O}$, por lo cual es lo mismo que:

$$Tr(\hat{\rho} \cdot \hat{O}) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta Tr[\hat{V}(\theta, p) \cdot (\hat{\rho} \cdot \hat{O})], \tag{3.67}$$

debido a la propiedad del producto de las trazas. Como $Tr(\hat{\rho} \cdot \hat{O}) = Tr(\hat{O} \cdot \hat{\rho})$, el lado derecho de la ecuación (3.66) está simetrizada en $\hat{\rho}$ y $\hat{O}$. La representación en el espacio fase de la traza de $Tr(\hat{A} \cdot \hat{B})$ se puede tratar de forma similar al caso de (q, p) [28]. Entonces, escribamos explícitamente la traza del producto $Tr[\hat{A} \cdot \hat{V}(\theta, p)]$, es decir:

$$Tr[\hat{A} \cdot \hat{V}(\theta, p)] = A_{mn} V_{nm}(\theta, p),$$

sustituyendo el valor de V_{mn}, tenemos:

$$\begin{aligned} Tr[\hat{A} \cdot \hat{V}(\theta, p)] &= A_{mn} \left(\frac{1}{(2\pi)^2} e^{i(m-n)\theta} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i[(n+m)/2-p]\vartheta} \right), \\ &= \frac{A_{mn}}{(2\pi)^2} e^{i(m-n)\theta} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i[(n+m)/2-p]\vartheta}, \end{aligned} \tag{3.68}$$

y con la correspondiente expresión para $Tr[\hat{B} \cdot \hat{V}(\theta, p)]$, la cual es:

$$\begin{aligned} Tr[\hat{B} \cdot \hat{V}(\theta, p)] &= B_{kl} \left(\frac{1}{(2\pi)^2} e^{i(k-l)\theta} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i[(k+l)/2-p]\vartheta} \right), \\ &= \frac{B_{kl}}{(2\pi)^2} e^{i(k-l)\theta} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i[(k+l)/2-p]\vartheta}. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Podemos construir:

$$Tr[\hat{A} \cdot \hat{B}] = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta Tr[\hat{A} \cdot \hat{V}(\theta, p)] Tr[\hat{B} \cdot \hat{V}(\theta, p)]. \tag{3.70}$$

Para ver esto, tomamos la parte derecha de la ecuación (3.70) y sustituimos los valores de las trazas de las ecuaciones (3.68) y (3.69):

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta Tr[\hat{A}\cdot\hat{V}(\theta,p)]Tr[\hat{B}\cdot\hat{V}(\theta,p)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left(\frac{A_{mn}}{(2\pi)^2} e^{i(m-n)\theta} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i[(n+m)/2-p]\vartheta}\right)\left(\frac{B_{kl}}{(2\pi)^2} e^{i(k-l)\theta} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i[(k+l)/2-p]\vartheta}\right), \\
&= \frac{A_{mn}B_{kl}}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{i(m-n)\theta} e^{i(k-l)\theta} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i[(n+m)/2-p]\vartheta} \int_{-\pi}^{\pi} d\beta e^{i[(k+l)/2-p]\beta}, \\
&= \frac{A_{mn}B_{kl}}{(2\pi)^4} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{i(m-n+k-l)\theta} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i\frac{\vartheta}{2}(n+m)} \int_{-\pi}^{\pi} d\beta e^{i\frac{\beta}{2}(k+l)} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-ip\beta} e^{-ip\vartheta}, \\
&= \frac{A_{mn}B_{kl}}{(2\pi)^4} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{i(m-n+k-l)\theta} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i\frac{\vartheta}{2}(n+m)} \int_{-\pi}^{\pi} d\beta e^{i\frac{\beta}{2}(k+l)} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-ip(\beta+\vartheta)}, \\
&= \frac{A_{mn}B_{kl}}{(2\pi)^4} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{i(m-n+k-l)\theta} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i\frac{\vartheta}{2}(n+m)} \int_{-\pi}^{\pi} d\beta e^{i\frac{\beta}{2}(k+l)} \left[2\pi\delta(\beta+\vartheta)\right], \\
&= \frac{A_{mn}B_{kl}}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{i(m-n+k-l)\theta} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i\frac{\vartheta}{2}(n+m)} \int_{-\pi}^{\pi} d\beta e^{i\frac{\beta}{2}(k+l)} \delta(\beta+\vartheta), \\
&= \frac{A_{mn}B_{kl}}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{i(m-n+k-l)\theta} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i\frac{\vartheta}{2}(n+m)} e^{i\frac{-\vartheta}{2}(k+l)}, \\
&= \frac{A_{mn}B_{kl}}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{i((m+k)-(n+l))\theta} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i\frac{\vartheta}{2}((n+m)-(k+l))}.
\end{aligned}$$

Si $(m+k)\to m$, $(n+l)\to l$ y $\frac{n+m}{2}\to n$, $\frac{k+l}{2}\to k$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta Tr[\hat{A}\cdot\hat{V}(\theta,p)]Tr[\hat{B}\cdot\hat{V}(\theta,p)] &= \frac{A_{mn}B_{kl}}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{i(m-l)\theta} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i\vartheta(n-k)}, \\
&= \frac{A_{mn}B_{kl}}{(2\pi)^3} \left(2\pi\delta_{ml}\right)\left(2\pi\delta_{nk}\right), \\
&= \frac{A_{mn}B_{nm}}{(2\pi)}, \\
&= \frac{1}{(2\pi)}[\hat{A}\cdot\hat{B}]_{mm}, \\
&= \frac{1}{(2\pi)} Tr[\hat{A}\cdot\hat{B}].
\end{aligned}$$

Despejamos 2π y obtenemos la ecuación (3.70). Especialmente tenemos, para el valor esperado del operador O, para un ρ dado:

$$\begin{aligned}
\langle\hat{O}\rangle_\rho &= Tr(\hat{\rho}\cdot\hat{O}) \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \; Tr\left[\hat{\rho}\cdot\hat{V}(\theta,p)\right] Tr\left[\hat{O}\cdot\hat{V}(\theta,p)\right],
\end{aligned} \tag{3.71}$$

donde $Tr\left[\hat{\rho}\cdot\hat{V}(\theta,p)\right]$ se obtiene de la ecuación (3.63).

3.4. Evolución temporal

La evolución temporal la podemos encontrar haciendo uso de la ecuación de Schrödinger, la cual recordemos es:

$$i\partial_t\psi(t,\varphi) = \hat{H}\psi(t\varphi), \tag{3.72}$$

donde tomaremos la función de onda como $\psi(t,\varphi) \equiv \psi_j(t,\varphi)$, por lo que:

$$i\partial_t\psi_j(t,\varphi) = \hat{H}\psi_j(t\varphi), \tag{3.73}$$

hacemos uso de la ecuación (3.41), lo que nos da:

$$i\partial_t(c_n^{(j)}e_n(\varphi)) = \hat{H}(c_n^{(j)}e_n(\varphi)), \tag{3.74}$$

donde $c_n^{(j)} = (e_n, \psi_j(\varphi,t)) = c_n^{(j)}(t)$ y $e_n(\varphi) = e^{in\varphi}$, por lo que:

$$\partial_t(c_n^{(j)}e_n(\varphi)) = \dot{c}\,_n^{(j)}e_n(\varphi), \tag{3.75}$$

así la ecuación de Schrödinger resulta ser:

$$i\dot{c}\,_n^{(j)}e_n(\varphi) = \hat{H}(c_n^{(j)}e_n(\varphi)), \tag{3.76}$$

que puede ser reescrita como:

$$i\dot{c}_m^{(j)}(t) = c_n^{(j)}(t)(e_m, \hat{H}e_n). \tag{3.77}$$

Partimos de la ecuación (3.76), la cual multiplicamos ambos lados por $\frac{1}{2\pi}e_k^*(\theta)$ e integramos sobre la variable $\theta \in [-\pi,\pi]$, realizamos el álgebra necesaria, es decir:

$$\begin{aligned}
i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\dot{c}\,_n^{(j)}(t)e_n(\varphi)e_k^*(\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\hat{H}(c_n^{(j)}(t)e_n(\varphi))e_k^*(\varphi), \\
i\frac{1}{2\pi}\dot{c}\,_n^{(j)}(t)\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e_n(\varphi)e_k^*(\varphi) &= \frac{1}{2\pi}c_n^{(j)}(t)\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\hat{H}e_n(\varphi)e_k^*(\varphi), \\
\dot{c}\,_n^{(j)}(t)\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{i\varphi(n-k)} &= \frac{1}{2\pi}c_n^{(j)}(t)\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e_k^*(\varphi)\hat{H}(\varphi), \\
i\frac{1}{2\pi}\dot{c}\,_n^{(j)}(t)2\pi\delta_{nk} &= c_n^{(j)}(t)(e_k(\varphi),\hat{H}e_n(\varphi)), \\
i\dot{c}\,_k^{(j)}(t) &= c_n^{(j)}(t)\left(e_k(\varphi),\hat{H}e_n(\varphi)\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la evolución temporal de Schrödinger para la función de Wigner está dada por:

$$\partial_t V_{\psi_2\psi_1}(\theta,p;t) = i\left(\psi_2(t), [\hat{H},\hat{V}(\theta,p)]\psi_1(t)\right). \tag{3.78}$$

Para demostrarlo, comenzamos con el lado izquierdo de la ecuación anterior y sustituimos la ecuación (3.42c), obteniendo:

$$\begin{aligned}
\partial_t V_{\psi_2\psi_1}(\theta,p;t) &= \partial_t(\psi_2, \hat{V}(\theta,p)\psi_1),\\
&= \partial_t\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \psi_2^*(\theta)\hat{V}(\theta,p)\psi_1(\theta)\right),\\
&= \partial_t\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left(c_m^{(2)}(t)e_m(\theta)\right)^* \hat{V}(\theta,p)\left(c_n^{(1)}(t)e_n(\theta)\right)\right),\\
&= \frac{1}{2\pi}\partial_t\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta c_m^{*(2)}(t)e_m^*(\theta)\hat{V}(\theta,p)c_n^{(1)}(t)e_n(\theta)\right),\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\partial_t\left(c_m^{*(2)}(t)e_m^*(\theta)\hat{V}(\theta,p)c_n^{(1)}(t)e_n(\theta)\right),\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\left(\dot{c}_m^{*(2)}(t)e_m^*(\theta)\hat{V}(\theta,p)[c_n^{(1)}(t)e_n(\theta)] + [c_m^{*(2)}(t)e_m^*(\theta)]\hat{V}(\theta,p)\dot{c}_n^{(1)}(t)e_n(\theta)\right),\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\left[\left\{-ic_k^{(2)}(t)\left(e_m(\varphi),\hat{H}e_k(\varphi)\right)\right\}^* e_m^*(\theta)\hat{V}(\theta,p)\psi_1(t)\right.\\
&\qquad\left. + \psi_2^*(t)\hat{V}(\theta,p)\left\{-ic_l^{(1)}(t)\left(e_n(\varphi),\hat{H}e_l(\varphi)\right)\right\}e_n(\theta)\right],\\
&= \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\left[c_k^{*(2)}(t)\left(e_m(\varphi),\hat{H}e_k(\varphi)\right)^* e_m^*(\theta)\hat{V}(\theta,p)\psi_1(t)\right.\\
&\qquad\left. - \psi_2^*(t)\hat{V}(\theta,p)c_l^{(1)}(t)\left(e_n(\varphi),\hat{H}e_l(\varphi)\right)e_n(\theta)\right].
\end{aligned}$$

Ahora recordemos que:

$$(e_k, \hat{A}e_l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta e_k(\theta)^*\hat{A}e_l(\theta). \tag{3.79}$$

Sustituimos lo anterior con $\hat{A} = \hat{H}$, lo que nos da:

$$\begin{aligned}
\partial_t V_{\psi_2\psi_1}(\theta,p;t) &= \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\left[c_k^{*(2)}(t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e_m^*(\varphi)\hat{H}e_k(\varphi)\right)^* e_m^*(\theta)\hat{V}(\theta,p)\psi_1(t)\right.\\
&\qquad\left. - \psi_2^*(t)\hat{V}(\theta,p)c_l^{(1)}(t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e_n^*(\varphi)\hat{H}e_l(\varphi)\right)e_n(\theta)\right],\\
&= \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\left[c_k^{*(2)}(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e_m(\varphi)\hat{H}e_k^*(\varphi)e_m^*(\theta)\hat{V}(\theta,p)\psi_1(t)\right.\\
&\qquad\left. - \psi_2^*(t)\hat{V}(\theta,p)c_l^{(1)}(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e_n^*(\varphi)\hat{H}e_l(\varphi)e_n(\theta)\right],\\
&= \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\left[c_k^{*(2)}(t)\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\hat{H}e_k^*(\varphi)\left(\frac{1}{2\pi}e_m(\varphi)e_m^*(\theta)\right)\hat{V}(\theta,p)\psi_1(t)\right.\\
&\qquad\left. - \psi_2^*(t)\hat{V}(\theta,p)c_l^{(1)}(t)\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\hat{H}e_l(\varphi)\left(\frac{1}{2\pi}e_n^*(\varphi)e_n(\theta)\right)\right],
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left[c_k^{*\,(2)}(t)\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \hat{H} e_k^*(\varphi)\left(\frac{1}{2\pi}\sum_m e^{m(\varphi-\theta)}\right)\hat{V}(\theta,p)\psi_1(t)\right.\\
&\qquad\left. -\ \psi_2^*(t)\hat{V}(\theta,p)c_l^{(1)}(t)\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \hat{H} e_l(\varphi)\left(\frac{1}{2\pi}\sum_n e^{(\theta-\varphi)}\right)\right],\\
&= \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left[c_k^{*\,(2)}(t)\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \hat{H} e_k^*(\varphi)\left(\delta(\varphi-\theta)\right)\hat{V}(\theta,p)\psi_1(t)\right.\\
&\qquad\left. -\ \psi_2^*(t)\hat{V}(\theta,p)c_l^{(1)}(t)\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \hat{H} e_l(\varphi)\left(\delta(\theta-\varphi)\right)\right],\\
&= \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left[c_k^{*\,(2)}(t)\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \hat{H} e_k^*(\varphi)\delta(\varphi-\theta)\right)\hat{V}(\theta,p)\psi_1(t)\right.\\
&\qquad\left. -\ \psi_2^*(t)\hat{V}(\theta,p)c_l^{(1)}(t)\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \hat{H} e_l(\varphi)\delta(\varphi-\theta)\right)\right],\\
&= \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left[c_k^{*\,(2)}(t)\left(\hat{H}e_k^*(\theta)\right)\hat{V}(\theta,p)\psi_1(t) - \psi_2^*(t)\hat{V}(\theta,p)c_l^{(1)}(t)\left(\hat{H}e_l(\theta)\right)\right],\\
&= \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left[c_k^{*\,(2)}(t)e_k^*(\theta)\hat{H}\hat{V}(\theta,p)\psi_1(t) - \psi_2^*(t)\hat{V}(\theta,p)\hat{H}c_l^{(1)}(t)e_l(\theta)\right],\\
&= \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left[\psi_2^*(t)\hat{H}\hat{V}(\theta,p)\psi_1(t) - \psi_2^*(t)\hat{V}(\theta,p)\hat{H}\psi_1(t)\right],\\
&= \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \psi_2^*(t)\left[\hat{H}\hat{V}(\theta,p) - \hat{V}(\theta,p)\hat{H}\right]\psi_1(t),\\
&= \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \psi_2^*(t)\left[\hat{H},\hat{V}(\theta,p)\right]\psi_1(t),\\
&= i(\psi_2(t),\left[\hat{H},\hat{V}(\theta,p)\right]\psi_1(t)).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la ecuación (3.78), es la evolución temporal de la función de Wigner, que está determinada por el operador:

$$\hat{K}(\theta,p) = i[\hat{H},\hat{V}], \tag{3.80}$$

el cual es hermitiano si $\hat{H}$ y $\hat{V}$ son hermitianos, y para el cual $Tr\hat{K} = 0$. Con $\hat{H}$ siendo el hamiltoniano del sistema y $\hat{V}(\theta,p)$ el operador de Wigner-Moyal.
La función de Wigner se propone como:

$$V_\rho(\theta,p;t) = Tr[\hat{\rho}(t)\cdot\hat{V}(\theta,p)]. \tag{3.81}$$

Si un estado no se caracteriza por una única función de onda $\psi(t)$, si no por una matriz de densidad $\hat{\rho}(t)$, que obedece la ecuación de von Neumann:

$$\partial_t\hat{\rho}(t) = i[\hat{H},\hat{\rho}(t)], \tag{3.82}$$

obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\partial_t V_\rho(\theta,p;t) &= \partial_t Tr[\hat{\rho}(t)\cdot\hat{V}(\theta,p)],\\
&= Tr\left(\partial_t\hat{\rho}(t)\cdot\hat{V}(\theta,p)\right)\\
&= Tr\left\{i[\hat{H},\hat{\rho}(t)]\cdot\hat{V}(\theta,p)\right\},\\
&= iTr\left\{-[\hat{\rho}(t),\hat{H}]\cdot\hat{V}(\theta,p)\right\},\\
&= iTr\left\{[\hat{H},\hat{V}]\cdot\hat{\rho}(t)\right\},\\
&= iTr\left\{\hat{\rho}(t)\cdot[\hat{H},\hat{V}]\right\},\\
&= iTr\left\{\hat{\rho}(t)\cdot\hat{K}(\theta,p)\right\},
\end{aligned}
$$

por lo que:

$$\partial_t V_\rho(\theta,p;t) = iTr\left\{\hat{\rho}(t)\cdot\hat{K}(\theta,p)\right\}. \tag{3.83}$$

3.5. Función de Wigner para un estado dado

Si $\psi_2 = \psi_1 = \psi$ en la ecuación (3.42) , entonces la función real:

$$
\begin{aligned}
V_\psi(\theta,p) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{-ip\vartheta}\psi^*(\theta-\vartheta/2)\psi(\theta+\vartheta/2), && \text{(3.84a)}\\
&= c_m^* V_{mn}(\theta,p)c_n, \quad m,n\in\mathbb{Z}, && \text{(3.84b)}\\
&= (\psi, V(\theta,p)\psi), && \text{(3.84c)}
\end{aligned}
$$

es el análogo estricto de la función de Wigner que obtuvimos en el capítulo 2, ecuación (2.10) para un espacio fase dado por un cilindro. De acuerdo a las ecuaciones (3.43)-(3.46) y (3.48), obedece:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp V_\psi(\theta,p) = \frac{1}{2\pi}|\psi(\theta)|^2, \tag{3.85}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta V_\psi(\theta,p) = |c_m|^2\, sinc(\pi(p-m)) \equiv \omega_\psi(p). \quad m\in\mathbb{Z}, \tag{3.86}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp\omega_\psi(p) sinc(\pi(p-m)) = |c_m|^2. \tag{3.87}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta V_\psi(\theta,p) = \sum_n |c_n|^2 = 1. \tag{3.88}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp V_{\psi_2}(\theta,p)V_{\psi_1}(\theta,p)) = \frac{1}{2\pi}|(\psi_2,\psi_1)|^2, \tag{3.89}$$

las cuales son probadas en el apéndice (E). Además, la desigualdad:

$$|V_\psi(\theta,p)| \leq \frac{1}{\pi}, \tag{3.90}$$

se cumple.

Ahora tenemos las herramientas necesarias para poder encontrar la función de Wigner para poder estudiar el modelo cosmológico FRW a través de la cosmología cuántica de lazos en el espacio fase.

Capítulo 4

Función de Wigner para el modelo cosmológico FRW en el formalismo de cosmología cuántica de lazos

Antes de comenzar a construir la función de Wigner, primero encontremos la constricción hamiltoniana en términos de holonomías mediante observables de Dirac. Para ello, estudiaremos la cuantización del modelo plano, isotrópico y homogéneo de FRW en presencia de un campo escalar sin masa.

4.1. Constricción hamiltoniana

El modelo plano de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) del universo con un campo escalar libre se describe mediante la restricción hamiltoniana:

$$H = H_{grav} + H_{\phi} \approx 0, \tag{4.1}$$

donde la parte gravitacional del modelo FRW plano contiene la teoría cuántica de cosmología cuántica de lazos en términos de holonomías. H_{ϕ} es la parte del campo escalar sin masa [29].
La relación $H \approx 0$ define el espacio de fase físico del sistema gravitacional considerado con restricciones y las cuales se conservan en el tiempo.

La restricción hamiltoniana total dentro del marco cosmología cuántica de lazos resulta [30]:

$$H^{(\lambda)} = N\left(-\frac{3}{8\pi G\gamma^2}\frac{\sin^2(\lambda\beta)}{\lambda^2}\nu + \frac{p_{\phi}^2}{2\nu}\right) \approx 0, \tag{4.2}$$

donde γ es el parámetro de Barbero-Immirzi, N es la función de lapso, y el parámetro λ se define como:

$$\lambda \equiv \mu|p|^{1/2} = \mu v a V_o^{1/3},$$

que corresponde a una longitud física cuyo valor está relacionado con el valor propio mínimo del operador de área, $\triangle = \left(2\sqrt{3}\pi\gamma\right) l_p^2$, en gravedad cuántica de lazos. Este valor puede fijarse mediante datos cosmológicos. También hemos utilizado las nuevas variables canónicas [29][31]:

$$\beta \equiv \frac{c}{|p|^{1/2}}, \qquad \nu \equiv |p|^{3/2}. \tag{4.3}$$

Que equivalen a términos proporcionales al parámetro de Hubble y al factor de escala, respectivamente.
Introduciendo las variables:

$$q \equiv \beta, \quad p \equiv \frac{1}{4\pi G\gamma}\nu, \quad t \equiv -sgn(p_\phi)\sqrt{3\pi}G\phi, \tag{4.4}$$

se puede probar, que el hamiltoniano con el cual evoluciona el sistema viene dado por [32]:

$$H_\lambda = \frac{2p}{\lambda\sqrt{G}}\sin(\lambda q). \tag{4.5}$$

Donde se ha seleccionado una fijación de norma particular para el lapso N con el fin de simplificar los cálculos, dado que la dinámica relativa es independiente de la elección de este multiplicador de Lagrange.

De esta manera, y según la prescripción de Dirac para sistemas restringidos [33], se puede afirmar que la restricción dinámica inicial ha sido resuelta. Dentro del hamiltoniano (4.5), la variable t corresponde al tiempo intrínseco de la dinámica relativa en términos del campo escalar, y la variable p es proporcional al volumen total del espacio, siempre que la topología sea compacta. Además, H es definida positiva si $q \in (0, \pi/\lambda)$ y $p > 0$, lo que nos permite eliminar la aparición de posibles inestabilidades dinámicas.

4.1.1. Dinámica cuántica

Para realizar la cuantización del sistema, introducimos el espacio de Hilbert:

$$\mathcal{H} = L^2\left([0, \pi/\lambda], dq\right), \tag{4.6}$$

donde el operador de posición $\hat{q}$ y el operador de momento $\hat{p}$ actúan sobre cualquier $\psi \in \mathcal{H}$ de la manera habitual:

$$\begin{aligned} \hat{q}\psi(q) &= q\psi(q), \\ \hat{p}\psi(q) &= -i\frac{\partial}{\partial q}\psi(q). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Dado que hemos definido H_λ como positivo, el hamiltoniano cuántico correspondiente está dado por:

$$\hat{H}_\lambda = \frac{2}{\lambda\sqrt{G}}\sin^{1/2}(\lambda\hat{q})\hat{p}\sin^{1/2}(\lambda\hat{q}). \tag{4.8}$$

Realizando un reordenamiento de factores, el hamiltoniano H_λ se escribe como [34]:

$$\hat{H}_\lambda = \frac{1}{\lambda\sqrt{G}} \left(\hat{p}\sin(\lambda\hat{q}) + \sin(\lambda\hat{q})\hat{p} \right), \tag{4.9}$$

para que sea simétrico.

Mediante la representación de Schrödinger de los operadores de posición y momento, dados en la ecuación (4.7), el operador hamiltoniano aplicado a un estado ψ resulta ser:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_\lambda\psi(q) &= \frac{1}{\lambda\sqrt{G}} \left(\hat{p}\sin(\lambda\hat{q}) + \sin(\lambda\hat{q})\hat{p} \right) \psi(q), \\
&= \frac{1}{\lambda\sqrt{G}} \left(\hat{p}\sin(\lambda\hat{q})\psi(q) + \sin(\lambda\hat{q})\hat{p}\psi(q) \right) \psi(q), \\
&= \frac{1}{\lambda\sqrt{G}} \left(-i\frac{\partial}{\partial t} \left(\sin(\lambda q)\psi(q) \right) + \sin(\lambda q) \left(-i\frac{\partial\psi(q)}{\partial t} \right) \right), \\
&= \frac{1}{\lambda\sqrt{G}} \left(-i\{\psi(q)\cos(\lambda q)\lambda + \sin(\lambda q)\frac{\partial\psi(q)}{\partial t}\} + \sin(\lambda q) \left(-i\frac{\partial\psi(q)}{\partial t} \right) \right), \\
&= \frac{-i}{\lambda\sqrt{G}} \left(\psi(q)\lambda\cos(\lambda q) + 2\sin(\lambda q)\frac{\partial\psi(q)}{\partial t} \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el operador hamiltoniano toma la forma:

$$\hat{H}_\lambda\psi(q) = \frac{-i}{\lambda\sqrt{G}} \left[2\sin(\lambda q)\frac{d}{dq} + \lambda\cos(\lambda q) \right] \psi(q). \tag{4.10}$$

La ecuación de Schrödinger asociada con el operador hamiltoniano toma la forma de ecuación de eigenvalores:

$$E\psi(q) = \frac{-i}{\lambda\sqrt{G}} \left[2\sin(\lambda q)\frac{d\psi(q)}{dq} + \lambda\cos(\lambda q)\psi(q) \right], \tag{4.11}$$

donde $E \in \mathbb{R}$. La solución correspondiente son funciones propias, dadas por:

$$\psi_E(q) = \frac{C}{\sqrt{\sin(\lambda q)}} e^{\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{\lambda q}{2})|}, \tag{4.12}$$

donde $C = (\frac{\lambda\sqrt{G}}{4\pi})^{1/2}$ es una constante de normalización tal que las soluciones satisfacen la condición de ortonormalidad:

$$\langle\psi_E|\psi_{E'}\rangle = \delta(E - E'). \tag{4.13}$$

Para probar que en efecto $\psi(q)$ es la solución de la ecuación (4.11), sustituimos la función

$\psi(q)$ en la ecuación (4.11):

$$
\begin{aligned}
E\psi(q) &= \frac{-i}{\lambda\sqrt{G}}\left[2\sin(\lambda q)\frac{d\left(\frac{C}{\sqrt{\sin(\lambda q)}}e^{\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{\lambda q}{2})|}\right)}{dq}+\lambda\cos(\lambda q)\psi(q)\right],\\
&= \frac{-i}{\lambda\sqrt{G}}\left[2\sin(\lambda q)\left(C\left[\sin^{-1/2}(\lambda q)\frac{d\left(e^{\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{\lambda q}{2})|}\right)}{dq}+e^{\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{\lambda q}{2})|}\frac{d\left(\sin^{-1/2}(\lambda q)\right)}{dq}\right]\right)\right.\\
&\quad \left.+\lambda\cos(\lambda q)\psi(q)\right],\\
&= \frac{-i}{\lambda\sqrt{G}}\left[2C\sin(\lambda q)\left(\sin^{-1/2}(\lambda q)\left[\frac{i\lambda\sqrt{G}Ee^{\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{\lambda q}{2})|}}{2\sin(\lambda q)}\right]+e^{\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{\lambda q}{2})|}\left[\frac{-\lambda\cos(\lambda q)}{2\sin^{3/2}(\lambda q)}\right]\right)\right.\\
&\quad \left.+\lambda\cos(\lambda q)\psi(q)\right],\\
&= \frac{-i}{\lambda\sqrt{G}}\left[2\sin(\lambda q)\left(\left[\frac{i\lambda\sqrt{G}E}{2\sin(\lambda q)}\psi(q)\right]-\psi(q)\left[\frac{\lambda\cos(\lambda q)}{2\sin(\lambda q)}\right]\right)+\lambda\cos(\lambda q)\psi(q)\right],\\
&= \frac{-i\psi(q)}{\lambda\sqrt{G}}\left[\cancel{2\sin(\lambda q)}\left(\left[\frac{i\lambda\sqrt{G}E}{\cancel{2\sin(\lambda q)}}\right]-\left[\frac{\lambda\cos(\lambda q)}{\cancel{2\sin(\lambda q)}}\right]\right)+\lambda\cos(\lambda q)\right],\\
&= \frac{-i\psi(q)}{\cancel{\lambda\sqrt{G}}}\left[i\cancel{\lambda\sqrt{G}}E-\cancel{\lambda\cos(\lambda q)}+\cancel{\lambda\cos(\lambda q)}\right],\\
&= E\psi(q).
\end{aligned}
$$

Ahora, probemos que las funciones propias $\psi(q)$ cumplen la relación de ortonormalidad según la ecuación (4.13). Realizamos la integral de $\psi^*(q)$ por $\psi(q)$ en el intervalo de $q\in[0,\pi/\lambda]$, es decir:

$$
\begin{aligned}
\langle\psi_E(q)|\psi_{E'}(q)\rangle &= \int_0^{\pi/\lambda}dq\psi^*(q)*\psi(q),\\
&= \int_0^{\pi/\lambda}dq\left(\frac{C}{\sqrt{\sin(\lambda q)}}e^{\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{\lambda q}{2})|}\right)^*\left(\frac{C}{\sqrt{\sin(\lambda q)}}e^{\frac{i}{2}E'\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{\lambda q}{2})|}\right),\\
&= \int_0^{\pi/\lambda}dq\left(\frac{C^*}{\sqrt{\sin(\lambda q)}}e^{\frac{-i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{\lambda q}{2})|}\right)\left(\frac{C}{\sqrt{\sin(\lambda q)}}e^{\frac{i}{2}E'\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{\lambda q}{2})|}\right),\\
&= |C|^2\int_0^{\pi/\lambda}\frac{e^{\frac{i}{2}\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{\lambda q}{2})|(E'-E)}}{\sin(\lambda q)}dq,
\end{aligned}
$$

realizamos el cambio de variable:

$$
x=\frac{\sqrt{G}}{2}\ln|\tan(\frac{\lambda q}{2})|,
$$

por lo que obtenemos:

$$\begin{aligned}
\langle\psi_E(q)|\psi_{E'}(q)\rangle &= |C|^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix(E'-E)}}{\sin(\lambda q)}\frac{2\sin(\lambda q)dx}{\lambda\sqrt{G}},\\
&= \frac{2|C|^2}{\lambda\sqrt{G}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix(E'-E)}dx,\\
&= \frac{2|C|^2}{\lambda\sqrt{G}}\left(2\pi\delta(E'-E)\right),\\
&= \frac{4\pi|C|^2}{\lambda\sqrt{G}}\delta(E'-E).
\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de la constante C, tenemos:

$$\begin{aligned}
\langle\psi_E(q)|\psi_{E'}(q)\rangle &= \frac{4\pi((\frac{\lambda\sqrt{G}}{4\pi})^{1/2})^2}{\lambda\sqrt{G}}\delta(E'-E),\\
\langle\psi_E(q)|\psi_{E'}(q)\rangle &= \delta(E'-E).
\end{aligned}$$

Para construir la función de Wigner utilizaremos el formalismo del capítulo anterior, particularmente la ecuación (3.84). Notemos que la función propia $\psi(q)$ está definida el espacio de Hilbert, ecuación (4.6), cuyo intervalo es $\psi(q)\in[0,\pi/\lambda]$. Este no es el que utilizamos en la ecuación (3.84), que va de $[-\pi,\pi]$. Para poder utilizar esta ecuación realizamos el siguiente cambio de variable:

$$x = 2\lambda q - \pi, \tag{4.14}$$

así, la función propia que utilizaremos para obtener la función de Wigner es:

$$\phi_E(x) = \frac{d}{\sqrt{\sin(\frac{x+\pi}{2})}}e^{\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{x+\pi}{4})|}, \quad \phi_e(x)\in[-\pi,\pi], \tag{4.15}$$

donde la constante de normalización ahora resulta ser:

$$d = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{G}}{8\pi}}\right), \tag{4.16}$$

y por construcción cumplen la relación de ortonormalidad:

$$\langle\phi_E|\phi_{E'}\rangle = \delta(E-E'). \tag{4.17}$$

4.2. Función de Wigner para el modelo FRW plano en el esquema de cosmología cuántica de lazos en el espacio fase.

Ahora podemos encontrar la función de Wigner haciendo uso de las ecuaciones (3.84). Tomando la ecuación (3.84a), primero tenemos que construir las funciones $\phi^*(x-\vartheta/2)$ y $\phi^*(x+\vartheta/2)$, las cuales resultan ser:

$$\begin{aligned}\phi^*(x-\vartheta/2) &= \frac{d}{\sqrt{\sin(\frac{x-\vartheta/2+\pi}{2})}} e^{-\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{x-\vartheta/2+\pi}{4})|}, \\ &= \frac{d}{\sqrt{\sin(\frac{2x-\vartheta+2\pi}{4})}} e^{-\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{2x-\vartheta+2\pi}{8})|}.\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}\phi(x+\vartheta/2) &= \frac{d}{\sqrt{\sin(\frac{x+\vartheta/2+\pi}{2})}} e^{\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{x+\vartheta/2+\pi}{4})|}, \\ &= \frac{d}{\sqrt{\sin(\frac{2x+\vartheta+2\pi}{4})}} e^{\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{2x+\vartheta+2\pi}{8})|}.\end{aligned} \tag{4.19}$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.18) y (4.19) en la ecuación (3.84a), la función de Wigner la podemos obtener de:

$$\begin{aligned}V_\phi(x,p) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{-ip\vartheta} &\left(\frac{d}{\sqrt{\sin(\frac{2x-\vartheta+2\pi}{4})}} e^{-\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{2x-\vartheta+2\pi}{8})|}\right) \\ &\times \left(\frac{d}{\sqrt{\sin(\frac{2x+\vartheta+2\pi}{4})}} e^{\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{2x+\vartheta+2\pi}{8})|}\right),\end{aligned}$$

Realizamos el siguiente cambio:

$$\eta = 2x + 2\pi, \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}V_\phi(\eta,p) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{-ip\vartheta}\left(\frac{d}{\sqrt{\sin(\frac{\eta-\vartheta}{4})}} e^{-\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{\eta-\vartheta}{8})|}\right)\left(\frac{d}{\sqrt{\sin(\frac{\eta+\vartheta}{4})}} e^{\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{\eta+\vartheta}{8})|}\right), \\ &= \frac{|d|^2}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{-ip\vartheta}\frac{e^{-\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{\eta-\vartheta}{8})|+\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{\eta+\vartheta}{8})|}}{\sqrt{\sin(\frac{\eta-\vartheta}{4})\sin(\frac{\eta+\vartheta}{4})}}, \\ &= \frac{|d|^2}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{-ip\vartheta}\frac{e^{\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{\eta+\vartheta}{8})|-\ln|\tan(\frac{\eta-\vartheta}{8})|}}{\sqrt{\sin(\frac{\eta-\vartheta}{4})\sin(\frac{\eta+\vartheta}{4})}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, en primera instancia, la función de Wigner corresponde a la integral:

$$V_\phi(\eta, p) = \frac{|d|^2}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{-ip\vartheta} \frac{e^{\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln\left|\frac{\tan(\frac{\eta+\vartheta}{8})}{\tan(\frac{\eta-\vartheta}{8})}\right|}}{\sqrt{\sin(\frac{\eta-\vartheta}{4})\sin(\frac{\eta+\vartheta}{4})}}. \tag{4.21}$$

Otra forma en la cual podemos calcular $V(\theta, p)$ es utilizando la ecuación (3.84b), pero para ello tenemos que encontrar los coeficientes c_m^* y c_n, los cuales recordemos están definidos como:

$$c_k = (e_k, \phi_E(x)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\phi_E(x)dx, \quad e_n = e^{inx}. \tag{4.22}$$

Sustituyendo los valores tenemos:

$$\begin{aligned}
c_m^* &= \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx}\left(\frac{d}{\sqrt{\sin(\frac{x+\pi}{2})}} e^{\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{x+\pi}{4})|}\right)dx\right]^*, \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\left(\frac{d}{\sqrt{\sin(\frac{x+\pi}{2})}} e^{-\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{x+\pi}{4})|}\right)dx, \\
&= \frac{d}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{imx}e^{-\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{x+\pi}{4})|}}{\sqrt{\sin(\frac{x+\pi}{2})}}dx.
\end{aligned}$$

El primer coeficiente resulta ser:

$$c_m^* = (e_m, \phi_E(x))^* = \frac{d}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{imx}e^{-\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{x+\pi}{4})|}}{\sqrt{\sin(\frac{x+\pi}{2})}}dx. \tag{4.23}$$

El segundo coeficiente es muy similar, por lo que asumimos los cálculos y solo lo presentamos el resultado:

$$c_n = (e_n, \phi_E(x)) = \frac{d}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}e^{\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan\left(\frac{x+\pi}{4}\right)|}}{\sqrt{\sin\left(\frac{x+\pi}{2}\right)}}dx. \tag{4.24}$$

Sustituimos los coeficientes en la ecuación (3.84b) y obtenemos:

$$V(\theta, p) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} c_m^* V_{mn}(\theta, p) c_n,$$

$$
\begin{aligned}
V(\theta,p) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} &\left(\frac{d}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{im\theta}e^{-\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{\theta+\pi}{4})|}}{\sqrt{\sin(\frac{\theta+\pi}{2})}}d\theta,\right)V_{mn}(\theta,p)\\
&\times\left(\frac{d}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-in\theta}e^{\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan\left(\frac{\theta+\pi}{4}\right)|}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}}d\theta\right),\\
V(\theta,p) = \frac{d^2}{4\pi^2}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} &\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{im\theta}e^{-\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan(\frac{\theta+\pi}{4})|}}{\sqrt{\sin(\frac{\theta+\pi}{2})}}d\theta,\right)V_{mn}(\theta,p)\\
&\times\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-in\theta}e^{\frac{i}{2}E\sqrt{G}\ln|\tan\left(\frac{\theta+\pi}{4}\right)|}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}}d\theta\right).
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

Nótese que hemos realizado el cambio de x a θ, solo por facilidad en notación. Resolviendo ambas integrales y sustituyendo el valor de: $V_{mn}(\theta,p) = \frac{1}{2\pi}e^{i\theta(n-m)}sinc(\pi(p-\frac{m+n}{2}))$, obtenemos la función de Wigner en términos de sumatorias.

4.3. Diferentes representaciones de la función de Wigner

Para no cargar tantas constantes y simplificar cálculos, regresamos a la restricción hamiltoniana:

$$H^{(\lambda)} = N\left(-\frac{3}{8\pi G\gamma^2}\frac{\sin^2(\lambda\beta)}{\lambda^2}\nu + \frac{p_\phi^2}{2\nu}\right) \approx 0. \tag{4.26}$$

Notemos que tal hamiltoniano tiene simetría:

$$\beta \to \beta + \frac{\pi}{\lambda}. \tag{4.27}$$

Por lo tanto, la parte gravitacional del espacio fase tiene topología de un cilindro, con lo que obtenemos la función propia en el intervalo deseado:

$$\phi_E(x) = k\frac{e^{iE\ln|\tan(\frac{x+\pi}{4})|}}{\sqrt{\sin(\frac{x+\pi}{2})}}, \tag{4.28}$$

donde k es la constante de ortonormalización, con la cual se sigue cumpliendo la relación de ortonormalidad de la ecuación (4.17). Por lo tanto, la constante k resulta ser:

$$k = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}. \tag{4.29}$$

Sustituyendo la constante k, la función de onda en la variable x resulta ser:

$$\phi_E(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{e^{iE\ln|\tan(\frac{x+\pi}{4})|}}{\sqrt{\sin(\frac{x+\pi}{2})}}. \tag{4.30}$$

Con esta función propia realizaremos todos los cálculos para encontrar la función de Wigner.

4.3.1. Representación integral

Como primer forma, tenemos nuevamente la más directa, que es la forma integral, la cual resulta ser:

$$V_\psi(\theta, p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{-ip\vartheta} \psi^*(\theta - \vartheta/2)\psi(\theta + \vartheta/2). \tag{4.31}$$

Para este caso, tenemos que las funciones son:

$$\begin{aligned}
\phi_E^*(x - \vartheta/2) &= \frac{k}{\sqrt{\sin(\frac{x-\vartheta/2+\pi}{2})}} e^{-iE\ln|\tan(\frac{x-\vartheta/2+\pi}{4})|}, \\
\phi_E^*(x - \vartheta/2) &= \frac{k}{\sqrt{\sin(\frac{2x-\vartheta+2\pi}{4})}} e^{-iE\ln|\tan(\frac{2x-\vartheta+2\pi}{8})|},
\end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
\phi_E(x + \vartheta/2) &= \frac{k}{\sqrt{\sin(\frac{x+\vartheta/2+\pi}{2})}} e^{iE\ln|\tan(\frac{x+\vartheta/2+\pi}{4})|}, \\
\phi_E(x + \vartheta/2) &= \frac{k}{\sqrt{\sin(\frac{2x+\vartheta+2\pi}{4})}} e^{iE\ln|\tan(\frac{2x+\vartheta+2\pi}{8})|},
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.32) y (4.33) en la ecuación (4.31), la función de Wigner la podemos obtener de:

$$\begin{aligned}
V_\phi(x, p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{-ip\vartheta} & \left(\frac{k}{\sqrt{\sin(\frac{2x-\vartheta+2\pi}{4})}} e^{-iE\ln|\tan(\frac{2x-\vartheta+2\pi}{8})|} \right) \\
& \times \left(\frac{k}{\sqrt{\sin(\frac{2x+\vartheta+2\pi}{4})}} e^{iE\ln|\tan(\frac{2x+\vartheta+2\pi}{8})|} \right),
\end{aligned}$$

realizamos el siguiente cambio:

$$\eta = 2x + 2\pi, \tag{4.34}$$

por lo que la función ahora resulta:

$$\begin{aligned}
V_\phi(\eta,p) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{-ip\vartheta}\left(\frac{k}{\sqrt{\sin(\frac{\eta-\vartheta}{4})}}e^{-iE\ln|\tan(\frac{\eta-\vartheta}{8})|}\right)\left(\frac{k}{\sqrt{\sin(\frac{\eta+\vartheta}{4})}}e^{iE\ln|\tan(\frac{\eta+\vartheta}{8})|}\right),\\
&= \frac{|k|^2}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{-ip\vartheta}\frac{e^{-iE\ln|\tan(\frac{\eta-\vartheta}{8})|+iE\ln|\tan(\frac{\eta+\vartheta}{8})|}}{\sqrt{\sin(\frac{\eta-\vartheta}{4})\sin(\frac{\eta+\vartheta}{4})}},\\
&= \frac{|k|^2}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{-ip\vartheta}\frac{e^{iE\ln|\tan(\frac{\eta+\vartheta}{8})|-\ln|\tan(\frac{\eta-\vartheta}{8})|}}{\sqrt{\sin(\frac{\eta-\vartheta}{4})\sin(\frac{\eta+\vartheta}{4})}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la función de Wigner está dada por la siguiente representación integral:

$$V_\phi(\eta,p) = \frac{1}{16\pi^3}\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{-ip\vartheta}\frac{e^{iE\ln\left|\frac{\tan(\frac{\eta+\vartheta}{8})}{\tan(\frac{\eta-\vartheta}{8})}\right|}}{\sqrt{\sin(\frac{\eta-\vartheta}{4})\sin(\frac{\eta+\vartheta}{4})}}, \tag{4.35}$$

donde hemos sustituido el valor de k.

4.3.2. Representación de la función de Wigner por medio de series

Para esta parte, utilizaremos la ecuación (3.84b), es decir:

$$V_\phi(\theta,p) = \sum_{mn} c_m^* V_{mn}(\theta,p) c_n, \quad m,n\in\mathbb{Z}, \tag{4.36}$$

donde los coeficientes están dados por la ecuación (4.24). Para nuestra función de onda $\phi_E(x)$, estos coeficientes resultan ser:

$$\begin{aligned}
c_m^* &= \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx}\left(\frac{k}{\sqrt{\sin(\frac{x+\pi}{2})}}e^{iE\ln|\tan(\frac{x+\pi}{4})|}\right)dx\right]^*,\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\left(\frac{k}{\sqrt{\sin(\frac{x+\pi}{2})}}e^{-iE\ln|\tan(\frac{x+\pi}{4})|}\right)dx,\\
&= \frac{k}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{imx}e^{-iE\ln|\tan(\frac{x+\pi}{4})|}}{\sqrt{\sin(\frac{x+\pi}{2})}}dx,
\end{aligned}$$

realizamos el cambio de variable:

$$y = \frac{x+\pi}{4},$$

y obtenemos:

$$\begin{aligned} c_m^* &= \frac{k}{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{e^{im(4y-\pi)}e^{-iE\ln|\tan(y)|}}{\sqrt{\sin(2y)}}4dy, \\ &= \frac{2e^{-im\pi}}{\sqrt{4\pi}\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{e^{i4my}e^{-iE\ln|\tan(y)|}}{\sqrt{\sin(2y)}}4dy, \end{aligned}$$

por lo que el coeficiente finalmente resulta ser:

$$c_m^* = \frac{4(-1)^m}{\pi^{3/2}}\int_0^{\pi/2} \frac{e^{i4my}e^{-iE\ln|\tan(y)|}}{\sqrt{\sin(2y)}}dy. \tag{4.37}$$

El otro coeficiente lo obtenemos de forma similar, por lo que resulta ser:

$$c_n = \frac{4(-1)^n}{\pi^{3/2}}\int_0^{\pi/2} \frac{e^{-i4ny}e^{iE\ln|\tan(y)|}}{\sqrt{\sin(2y)}}dy. \tag{4.38}$$

La solución de estas integrales resulta ser, para c_m^*:

$$\begin{aligned} c_m^* =& \frac{4(-1)^m}{\pi^{3/2}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{iE}{2}\right)\Gamma(-4m)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{iE}{2}+2m\right){}_3F_2\left(\frac{1}{4}-\frac{iE}{2},\frac{1}{2}-2m,-2m;\frac{1}{2},\frac{3}{4}-\frac{iE}{2}-2m;1\right)\right. \\ &+2i\left\{2m\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{iE}{2}\right)\Gamma(-4m)\Gamma\left(-\frac{1}{4}+\frac{iE}{2}+2m\right){}_3F_2\left(\frac{3}{4}-\frac{iE}{2},\frac{1}{2}-2m,1-2m;\frac{3}{2},\frac{5}{4}-\frac{iE}{2}-2m;1\right)\right. \\ &+\Gamma\left(\frac{1}{2}+iE\right)\Gamma\left(2m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}-iE-4m\right){}_3F_2\left(\frac{1}{4}+\frac{iE}{2},\frac{3}{4}+\frac{iE}{2},2m+\frac{1}{2};\frac{3}{4}+\frac{iE}{2}+2m,\frac{5}{4}+\frac{iE}{2}+2m;1\right) \\ &\left.\left.\left(\sin\left(\frac{1}{4}\pi(2iE+8m+1)\right)-i\sin\left(\frac{1}{4}\pi(-2iE-8m+1)\right)\right)\right\}\right]\Big/\left[2\sqrt{2}\Gamma(-4m)\Gamma\left(2m+\frac{1}{2}\right)\right], \end{aligned}$$

reescribiendo tenemos:

$$\begin{aligned} c_m^* =& \frac{\sqrt{2}(-1)^m}{\pi^{3/2}\Gamma(-4m)\Gamma\left(2m+\frac{1}{2}\right)}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{iE}{2}\right)\Gamma(-4m)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{iE}{2}+2m\right){}_3F_2\left(\frac{1}{4}-\frac{iE}{2},\frac{1}{2}-2m,-2m;\frac{1}{2},\frac{3}{4}-\frac{iE}{2}-2m;1\right)\right. \\ &+2i\left\{2m\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{iE}{2}\right)\Gamma(-4m)\Gamma\left(-\frac{1}{4}+\frac{iE}{2}+2m\right){}_3F_2\left(\frac{3}{4}-\frac{iE}{2},\frac{1}{2}-2m,1-2m;\frac{3}{2},\frac{5}{4}-\frac{iE}{2}-2m;1\right)\right. \\ &+\Gamma\left(\frac{1}{2}+iE\right)\Gamma\left(2m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}-iE-4m\right){}_3F_2\left(\frac{1}{4}+\frac{iE}{2},\frac{3}{4}+\frac{iE}{2},2m+\frac{1}{2};\frac{3}{4}+\frac{iE}{2}+2m,\frac{5}{4}+\frac{iE}{2}+2m;1\right) \\ &\left.\left.\left(\sin\left(\frac{1}{4}\pi(2iE+8m+1)\right)-i\sin\left(\frac{1}{4}\pi(-2iE-8m+1)\right)\right)\right\}\right], \end{aligned} \tag{4.39}$$

y para el coeficiente c_n tenemos:

$$
\begin{aligned}
c_n =& \frac{\sqrt{2}(-1)^n}{\pi^{3/2}\Gamma(-4n)\Gamma\left(2n+\frac{1}{2}\right)}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{iE}{2}\right)\Gamma(-4n)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{iE}{2}+2n\right)\,{}_3F_2\left(\frac{1}{4}+\frac{iE}{2},\frac{1}{2}-2n,-2n;\frac{1}{2},\frac{3}{4}+\frac{iE}{2}-2n;1\right)\right.\\
&-2i\left\{2n\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{iE}{2}\right)\Gamma(-4n)\Gamma\left(-\frac{1}{4}-\frac{iE}{2}+2n\right)\,{}_3F_2\left(\frac{3}{4}+\frac{iE}{2},\frac{1}{2}-2n,1-2n;\frac{3}{2},\frac{5}{4}+\frac{iE}{2}-2n;1\right)\right.\\
&+\Gamma\left(\frac{1}{2}-iE\right)\Gamma\left(2n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}+iE-4n\right)\,{}_3F_2\left(\frac{1}{4}-\frac{iE}{2},\frac{3}{4}-\frac{iE}{2},2n+\frac{1}{2};\frac{3}{4}-\frac{iE}{2}+2n,\frac{5}{4}-\frac{iE}{2}+2n;1\right)\\
&\left.\left.\left(\sin\left(\frac{1}{4}\pi(-2iE+8n+1)\right)+i\sin\left(\frac{1}{4}\pi(2iE-8n+1)\right)\right)\right\}\right].
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

Notemos que prácticamente son los mismos coeficientes, solo que uno es el conjugado del otro. Nótese que hemos hecho uso de la propiedad:

$$(\Gamma(z))^* = \Gamma(z^*), \tag{4.41}$$

donde la función gamma se define como:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1} dt. \tag{4.42}$$

Tomando el conjugado, tenemos:

$$
\begin{aligned}
(\Gamma(z))^* &= \left(\int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1} dt\right)^*,\\
&= \int_0^\infty \left(e^{-t}\right)^* \left(t^{z-1}\right)^* dt, \qquad t\in\mathbb{R},\\
&= \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z^*-1} dt,\\
&= \Gamma(z^*).
\end{aligned}
$$

También hemos utilizado la propiedad:

$$ {}_3F_2^*(\alpha,\beta,\gamma;a,b;z) = {}_3F_2(\alpha^*,\beta^*,\gamma^*;a^*,b^*;z^*), \tag{4.43}$$

ya que la función hipergeométrica ${}_3F_2$ se define:

$$ {}_3F_2(\alpha,\beta,\gamma;a,b;z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\gamma)_n}{(a)_n(b)_n}\frac{z^n}{n!}, \tag{4.44}$$

donde:

$$(\lambda)_n = \begin{cases} (\lambda)_0 = 1 \\ (\lambda)_n = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n-1). \end{cases}$$

Al tomar el complejo conjugado, tenemos:

$$\begin{aligned}({}_3F_2(\alpha,\beta,\gamma;a,b;z))^* &= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\gamma)_n}{(a)_n(b)_n}\frac{z^n}{n!}\right]^*,\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n^*(\beta)_n^*(\gamma)_n^*}{(a)_n^*(b)_n^*}\frac{z^{*n}}{n!},\end{aligned}$$

así:

$$(\lambda)_n^* = \begin{cases}(\lambda)_0^* = 1\\ (\lambda)_n^* = \lambda^*(\lambda+1)^*(\lambda+2)^*\cdots(\lambda+n-1)^*,\end{cases}$$

$$(\lambda)_n^* = \left\{\begin{matrix}(\lambda)_0^* = 1\\ (\lambda)_n^* = \lambda^*(\lambda^*+1)(\lambda^*+2)\cdots(\lambda^*+n-1)\end{matrix}\right\} = (\lambda^*)_n.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}{}_3F_2^*(\alpha,\beta,\gamma;a,b;z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha^*)_n(\beta^*)_n(\gamma^*)_n}{(a^*)_n(b^*)_n}\frac{z^{*n}}{n!},\\ &={}_3F_2(\alpha^*,\beta^*,\gamma^*;a^*,b^*;z^*).\end{aligned}$$

Como ya hemos encontrado los coeficientes, lo que resta es sustituirlos en la ecuación (4.36) junto con la ecuación (3.28) para finalmente encontrar la tan ansiada función de Wigner. Por lo tanto, sustituyendo, tenemos:

$$\begin{aligned}V_\phi(\theta,p) = \sum_{mn}&\left(\frac{\sqrt{2}(-1)^m}{\pi^{3/2}\Gamma(-4m)\Gamma\left(2m+\frac{1}{2}\right)}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{iE}{2}\right)\Gamma(-4m)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{iE}{2}+2m\right){}_3F_2\left(\frac{1}{4}-\frac{iE}{2},\frac{1}{2}-2m,-2m;\frac{1}{2},\frac{3}{4}-\frac{iE}{2}-2m;1\right)\right.\right.\\ &+2i\left\{2m\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{iE}{2}\right)\Gamma(-4m)\Gamma\left(-\frac{1}{4}+\frac{iE}{2}+2m\right){}_3F_2\left(\frac{3}{4}-\frac{iE}{2},\frac{1}{2}-2m,1-2m;\frac{3}{2},\frac{5}{4}-\frac{iE}{2}-2m;1\right)\right.\\ &+\Gamma\left(\frac{1}{2}+iE\right)\Gamma\left(2m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}-iE-4m\right){}_3F_2\left(\frac{1}{4}+\frac{iE}{2},\frac{3}{4}+\frac{iE}{2},2m+\frac{1}{2};\frac{3}{4}+\frac{iE}{2}+2m,\frac{5}{4}+\frac{iE}{2}+2m;1\right)\\ &\left.\left.\left.\left(\sin\left(\frac{1}{4}\pi(2iE+8m+1)\right)-i\sin\left(\frac{1}{4}\pi(-2iE-8m+1)\right)\right)\right\}\right]\right)\\ &\left(\frac{1}{2\pi}e^{i(n-m)\theta}Sinc\pi\left[p-(m+n)/2\right]\right)\\ &\left(\frac{\sqrt{2}(-1)^n}{\pi^{3/2}\Gamma(-4n)\Gamma\left(2n+\frac{1}{2}\right)}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{iE}{2}\right)\Gamma(-4n)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{iE}{2}+2n\right){}_3F_2\left(\frac{1}{4}+\frac{iE}{2},\frac{1}{2}-2n,-2n;\frac{1}{2},\frac{3}{4}+\frac{iE}{2}-2n;1\right)\right.\right.\\ &-2i\left\{2n\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{iE}{2}\right)\Gamma(-4n)\Gamma\left(-\frac{1}{4}-\frac{iE}{2}+2n\right){}_3F_2\left(\frac{3}{4}+\frac{iE}{2},\frac{1}{2}-2n,1-2n;\frac{3}{2},\frac{5}{4}+\frac{iE}{2}-2n;1\right)\right.\\ &+\Gamma\left(\frac{1}{2}-iE\right)\Gamma\left(2n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}+iE-4n\right){}_3F_2\left(\frac{1}{4}-\frac{iE}{2},\frac{3}{4}-\frac{iE}{2},2n+\frac{1}{2};\frac{3}{4}-\frac{iE}{2}+2n,\frac{5}{4}-\frac{iE}{2}+2n;1\right)\\ &\left.\left.\left.\left(\sin\left(\frac{1}{4}\pi(-2iE+8n+1)\right)+i\sin\left(\frac{1}{4}\pi(2iE-8n+1)\right)\right)\right\}\right]\right),\end{aligned}$$

reescribiendo:

$$
\begin{aligned}
V_\phi(\theta,p) = \sum_{mn} \frac{(-1)^{m+n}}{\pi^4} & \left(\frac{1}{\Gamma(-4m)\Gamma\left(2m+\frac{1}{2}\right)} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{iE}{2}\right)\Gamma(-4m)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{iE}{2}+2m\right) {}_3F_2\left(\frac{1}{4}-\frac{iE}{2},\frac{1}{2}-2m,-2m;\frac{1}{2},\frac{3}{4}-\frac{iE}{2}-2m;1\right) \right.\right. \\
& + 2i \left\{ 2m\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{iE}{2}\right)\Gamma(-4m)\Gamma\left(-\frac{1}{4}+\frac{iE}{2}+2m\right) {}_3F_2\left(\frac{3}{4}-\frac{iE}{2},\frac{1}{2}-2m,1-2m;\frac{3}{2},\frac{5}{4}-\frac{iE}{2}-2m;1\right) \right. \\
& + \Gamma\left(\frac{1}{2}+iE\right)\Gamma\left(2m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}-iE-4m\right) {}_3F_2\left(\frac{1}{4}+\frac{iE}{2},\frac{3}{4}+\frac{iE}{2},2m+\frac{1}{2};\frac{3}{4}+\frac{iE}{2}+2m,\frac{5}{4}+\frac{iE}{2}+2m;1\right) \\
& \left.\left.\left. \left(\sin\left(\frac{1}{4}\pi(2iE+8m+1)\right) - i\sin\left(\frac{1}{4}\pi(-2iE-8m+1)\right)\right)\right\}\right]\right) \\
& \left(\frac{1}{\Gamma(-4n)\Gamma\left(2n+\frac{1}{2}\right)} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{iE}{2}\right)\Gamma(-4n)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{iE}{2}+2n\right) {}_3F_2\left(\frac{1}{4}+\frac{iE}{2},\frac{1}{2}-2n,-2n;\frac{1}{2},\frac{3}{4}+\frac{iE}{2}-2n;1\right) \right.\right. \\
& - 2i \left\{ 2n\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{iE}{2}\right)\Gamma(-4n)\Gamma\left(-\frac{1}{4}-\frac{iE}{2}+2n\right) {}_3F_2\left(\frac{3}{4}+\frac{iE}{2},\frac{1}{2}-2n,1-2n;\frac{3}{2},\frac{5}{4}+\frac{iE}{2}-2n;1\right) \right. \\
& + \Gamma\left(\frac{1}{2}-iE\right)\Gamma\left(2n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}+iE-4n\right) {}_3F_2\left(\frac{1}{4}-\frac{iE}{2},\frac{3}{4}-\frac{iE}{2},2n+\frac{1}{2};\frac{3}{4}-\frac{iE}{2}+2n,\frac{5}{4}-\frac{iE}{2}+2n;1\right) \\
& \left.\left.\left. \left(\sin\left(\frac{1}{4}\pi(-2iE+8n+1)\right) + i\sin\left(\frac{1}{4}\pi(2iE-8n+1)\right)\right)\right\}\right]\right) e^{i(n-m)\theta} Sinc\pi\left[p-(m+n)/2\right].
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

Ahora la reescribimos en términos de funciones beta haciendo uso de:

$$
B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \tag{4.46}
$$

así:

$$
\begin{aligned}
\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{iE}{2}\right)\Gamma(-4m)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{iE}{2}+2m\right)}{\Gamma(-4m)\Gamma\left(2m+\frac{1}{2}\right)} &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{iE}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{iE}{2}+2m\right)}{\Gamma\left(2m+\frac{1}{2}\right)}, \\
&= B\left(\frac{1}{4}-\frac{iE}{2},\frac{1}{4}+\frac{iE}{2}+2m\right).
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{iE}{2}\right)\Gamma(-4m)\Gamma\left(-\frac{1}{4}+\frac{iE}{2}+2m\right)}{\Gamma(-4m)\Gamma\left(2m+\frac{1}{2}\right)} &= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{iE}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{4}+\frac{iE}{2}+2m\right)}{\Gamma\left(2m+\frac{1}{2}\right)}, \\
&= B\left(\frac{3}{4}-\frac{iE}{2},-\frac{1}{4}+\frac{iE}{2}+2m\right).
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{iE}{2}\right)\Gamma(2m+\frac{1}{2})\Gamma\left(-\frac{1}{2}-iE-4m\right)}{\Gamma(-4m)\Gamma\left(2m+\frac{1}{2}\right)} &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{iE}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}-iE-4m\right)}{\Gamma(-4m)}, \\
&= B\left(\frac{1}{2}+\frac{iE}{2},-\frac{1}{2}-iE-4m\right).
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{iE}{2}\right)\Gamma(-4n)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{iE}{2}+2n\right)}{\Gamma(-4n)\Gamma\left(2n+\frac{1}{2}\right)} &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{iE}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{iE}{2}+2n\right)}{\Gamma\left(2n+\frac{1}{2}\right)}, \\ &= B\left(\frac{1}{4}+\frac{iE}{2},\frac{1}{4}-\frac{iE}{2}+2n\right).\end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{iE}{2}\right)\Gamma(-4n)\Gamma\left(-\frac{1}{4}-\frac{iE}{2}+2n\right)}{\Gamma(-4n)\Gamma\left(2n+\frac{1}{2}\right)} &= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{iE}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{4}-\frac{iE}{2}+2n\right)}{\Gamma\left(2n+\frac{1}{2}\right)}, \\ &= B\left(\frac{3}{4}+\frac{iE}{2},-\frac{1}{4}-\frac{iE}{2}+2n\right).\end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{iE}{2}\right)\Gamma(2n+\frac{1}{2})\Gamma\left(-\frac{1}{2}+iE-4n\right)}{\Gamma(-4n)\Gamma\left(2n+\frac{1}{2}\right)} &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{iE}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}+iE-4m\right)}{\Gamma(-4m)}, \\ &= B\left(\frac{1}{2}-\frac{iE}{2},-\frac{1}{2}+iE-4n\right).\end{aligned} \tag{4.52}$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores, la función de Wigner resulta:

$$\begin{aligned}V_\phi(\theta,p) = \sum_{mn}\frac{(-1)^{m+n}}{\pi^4}&\left[B\left(\frac{1}{4}-\frac{iE}{2},\frac{1}{4}+\frac{iE}{2}+2m\right){}_3F_2\left(\frac{1}{4}-\frac{iE}{2},\frac{1}{2}-2m,-2m;\frac{1}{2},\frac{3}{4}-\frac{iE}{2}-2m;1\right)\right.\\ &+2i\left\{2mB\left(\frac{3}{4}-\frac{iE}{2},-\frac{1}{4}+\frac{iE}{2}+2m\right){}_3F_2\left(\frac{3}{4}-\frac{iE}{2},\frac{1}{2}-2m,1-2m;\frac{3}{2},\frac{5}{4}-\frac{iE}{2}-2m;1\right)\right.\\ &+B\left(\frac{1}{2}+\frac{iE}{2},-\frac{1}{2}-iE-4m\right){}_3F_2\left(\frac{1}{4}+\frac{iE}{2},\frac{3}{4}+\frac{iE}{2},2m+\frac{1}{2};\frac{3}{4}+\frac{iE}{2}+2m,\frac{5}{4}+\frac{iE}{2}+2m;1\right)\\ &\left.\left.\left(\sin\left(\frac{1}{4}\pi(2iE+8m+1)\right)-i\sin\left(\frac{1}{4}\pi(-2iE-8m+1)\right)\right)\right\}\right]\\ &\left[B\left(\frac{1}{4}+\frac{iE}{2},\frac{1}{4}-\frac{iE}{2}+2n\right){}_3F_2\left(\frac{1}{4}+\frac{iE}{2},\frac{1}{2}-2n,-2n;\frac{1}{2},\frac{3}{4}+\frac{iE}{2}-2n;1\right)\right.\\ &-2i\left\{2nB\left(\frac{3}{4}+\frac{iE}{2},-\frac{1}{4}-\frac{iE}{2}+2n\right){}_3F_2\left(\frac{3}{4}+\frac{iE}{2},\frac{1}{2}-2n,1-2n;\frac{3}{2},\frac{5}{4}+\frac{iE}{2}-2n;1\right)\right.\\ &+B\left(\frac{1}{2}-\frac{iE}{2},-\frac{1}{2}+iE-4n\right){}_3F_2\left(\frac{1}{4}-\frac{iE}{2},\frac{3}{4}-\frac{iE}{2},2n+\frac{1}{2};\frac{3}{4}-\frac{iE}{2}+2n,\frac{5}{4}-\frac{iE}{2}+2n;1\right)\\ &\left.\left.\left(\sin\left(\frac{1}{4}\pi(-2iE+8n+1)\right)+i\sin\left(\frac{1}{4}\pi(2iE-8n+1)\right)\right)\right\}\right]e^{i(n-m)\theta}Sinc\pi\left[p-(m+n)/2\right].\end{aligned} \tag{4.53}$$

Recordemos que:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{1}{4}\pi(2iE+8m+1)\right) &= \sin\left(\frac{1}{4}\pi(2iE+1)+2m\pi)\right), \\
&= \sin\left(\frac{1}{4}\pi(2iE+1)\right)\cancel{\cos\left(2m\pi\right)}^{=1} \\
&\quad + \cos\left(\frac{1}{4}\pi(2iE+1)\right)\cancel{\sin\left(2m\pi\right)}^{=0}, \\
&= \sin\left(\frac{1}{4}\pi(2iE+1)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{1}{4}\pi(-2iE-8m+1)\right) &= \sin\left(\frac{1}{4}\pi(-2iE+1)-2m\pi)\right), \\
&= \sin\left(\frac{1}{4}\pi(-2iE+1)\right)\cancel{\cos\left(-2m\pi\right)}^{=1} \\
&\quad + \cos\left(\frac{1}{4}\pi(-2iE+1)\right)\cancel{\sin\left(-2m\pi\right)}^{=0}, \\
&= \sin\left(\frac{1}{4}\pi(-2iE+1)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{1}{4}\pi(-2iE+8n+1)\right) &= \sin\left(\frac{1}{4}\pi(-2iE+1)+2n\pi)\right), \\
&= \sin\left(\frac{1}{4}\pi(-2iE+1)\right)\cancel{\cos\left(2n\pi\right)}^{=1} \\
&\quad + \cos\left(\frac{1}{4}\pi(-2iE+1)\right)\cancel{\sin\left(2n\pi\right)}^{=0}, \\
&= \sin\left(\frac{1}{4}\pi(-2iE+1)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{1}{4}\pi(2iE-8n+1)\right) &= \sin\left(\frac{1}{4}\pi(2iE+1)-2n\pi)\right), \\
&= \sin\left(\frac{1}{4}\pi(2iE+1)\right)\cancel{\cos\left(-2n\pi\right)}^{=1} \\
&\quad + \cos\left(\frac{1}{4}\pi(2iE+1)\right)\cancel{\sin\left(-2n\pi\right)}^{=0}, \\
&= \sin\left(\frac{1}{4}\pi(2iE+1)\right),
\end{aligned}$$

Sustituyendo, obtenemos la función de Wigner en forma compacta.

$$
\begin{aligned}
V_\phi(\theta,p) = \sum_{mn} \frac{(-1)^{m+n}}{\pi^4} \Bigg[& B\left(\frac{1}{4}-\frac{iE}{2}, \frac{1}{4}+\frac{iE}{2}+2m\right) {}_3F_2\left(\frac{1}{4}-\frac{iE}{2}, \frac{1}{2}-2m, -2m; \frac{1}{2}, \frac{3}{4}-\frac{iE}{2}-2m; 1\right) \\
& + 2i \left\{ 2mB\left(\frac{3}{4}-\frac{iE}{2}, -\frac{1}{4}+\frac{iE}{2}+2m\right) {}_3F_2\left(\frac{3}{4}-\frac{iE}{2}, \frac{1}{2}-2m, 1-2m; \frac{3}{2}, \frac{5}{4}-\frac{iE}{2}-2m; 1\right) \right. \\
& + B\left(\frac{1}{2}+\frac{iE}{2}, -\frac{1}{2}-iE-4m\right) {}_3F_2\left(\frac{1}{4}+\frac{iE}{2}, \frac{3}{4}+\frac{iE}{2}, 2m+\frac{1}{2}; \frac{3}{4}+\frac{iE}{2}+2m, \frac{5}{4}+\frac{iE}{2}+2m; 1\right) \\
& \left. \left(\sin\left(\frac{1}{4}\pi(2iE+1)\right) - i\sin\left(\frac{1}{4}\pi(-2iE+1)\right)\right) \right\} \Bigg] \\
& \Bigg[B\left(\frac{1}{4}+\frac{iE}{2}, \frac{1}{4}-\frac{iE}{2}+2n\right) {}_3F_2\left(\frac{1}{4}+\frac{iE}{2}, \frac{1}{2}-2n, -2n; \frac{1}{2}, \frac{3}{4}+\frac{iE}{2}-2n; 1\right) \\
& - 2i \left\{ 2nB\left(\frac{3}{4}+\frac{iE}{2}, -\frac{1}{4}-\frac{iE}{2}+2n\right) {}_3F_2\left(\frac{3}{4}+\frac{iE}{2}, \frac{1}{2}-2n, 1-2n; \frac{3}{2}, \frac{5}{4}+\frac{iE}{2}-2n; 1\right) \right. \\
& + B\left(\frac{1}{2}-\frac{iE}{2}, -\frac{1}{2}+iE-4n\right) {}_3F_2\left(\frac{1}{4}-\frac{iE}{2}, \frac{3}{4}-\frac{iE}{2}, 2n+\frac{1}{2}; \frac{3}{4}-\frac{iE}{2}+2n, \frac{5}{4}-\frac{iE}{2}+2n; 1\right) \\
& \left. \left(\sin\left(\frac{1}{4}\pi(-2iE+1)\right) + i\sin\left(\frac{1}{4}\pi(2iE+1)\right)\right) \right\} \Bigg] e^{i(n-m)\theta} Sinc\pi\left[p-(m+n)/2\right].
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

Ahora probemos que, en efecto, la función de Wigner cumple las ecuaciones (3.85-3.89). Por construcción, la función de Wigner obtenida cumple las ecuaciones (3.85-3.89), sin embargo probemos algunas de ellas.

Probemos que cumple la ecuación (3.85). Tenemos que probar:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} dp V_\phi(\theta,p) = \frac{1}{2\pi}|\phi(\theta)|^2,
$$

sustituyendo tenemos:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} dp V_\phi(\theta,p) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \left(\sum_{m,n} c_m^* V_{mn}(\theta,p) c_n \right),
$$

Para no cargar tantas constantes utilizaremos la definición de los coeficientes, es decir, las ecuaciones (4.23) y (4.24), por lo que obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dp V_\phi(\theta,p) = \sum_{m,n}\int_{-\infty}^{\infty} dp &\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{4\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{imx}e^{-iE\ln|\tan(\frac{x+\pi}{4})|}}{\sqrt{\sin(\frac{x+\pi}{2})}}dx\right)\\
&\left(\frac{1}{2\pi}e^{i(n-m)\theta}sinc(\pi(p-\frac{m+n}{2}))\right)\\
&\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{4\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-inx'}e^{iE\ln|\tan\left(\frac{x'+\pi}{4}\right)|}}{\sqrt{\sin\left(\frac{x'+\pi}{2}\right)}}dx'\right),\\
&= \frac{1}{36\pi^4}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-iE\ln|\tan(\frac{x+\pi}{4})|}}{\sqrt{\sin(\frac{x+\pi}{2})}}dx\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{iE\ln|\tan\left(\frac{x'+\pi}{4}\right)|}}{\sqrt{\sin\left(\frac{x'+\pi}{2}\right)}}dx'\\
&\quad \sum_{m,n}\cancel{\int_{-\infty}^{\infty}dp\,sinc(\pi(p-\frac{m+n}{2}))}^{=1}e^{i(n-m)\theta}e^{imx}e^{-inx'},\\
&= \frac{1}{36\pi^4}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-iE\ln|\tan(\frac{x+\pi}{4})|}}{\sqrt{\sin(\frac{x+\pi}{2})}}dx\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{iE\ln|\tan\left(\frac{x'+\pi}{4}\right)|}}{\sqrt{\sin\left(\frac{x'+\pi}{2}\right)}}dx'\sum_n e^{in(\theta-x')}\sum_m e^{im(x-\theta)},\\
&= \frac{1}{36\pi^4}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-iE\ln|\tan(\frac{x+\pi}{4})|}}{\sqrt{\sin(\frac{x+\pi}{2})}}dx\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{iE\ln|\tan\left(\frac{x'+\pi}{4}\right)|}}{\sqrt{\sin\left(\frac{x'+\pi}{2}\right)}}dx'\left(2\pi\delta(\theta-x')\right)\left(2\pi\delta(x-\theta)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-iE\ln|\tan(\frac{x+\pi}{4})|}}{\sqrt{\sin(\frac{x+\pi}{2})}}\delta(x-\theta)dx\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{iE\ln|\tan\left(\frac{x'+\pi}{4}\right)|}}{\sqrt{\sin\left(\frac{x'+\pi}{2}\right)}}\delta(\theta-x')dx',\\
&= \frac{1}{8\pi^2}\frac{e^{-iE\ln|\tan(\frac{\theta+\pi}{4})|}}{\sqrt{\sin(\frac{\theta+\pi}{2})}}\frac{e^{iE\ln|\tan\left(\frac{\theta+\pi}{4}\right)|}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}},\\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-iE\ln|\tan(\frac{\theta+\pi}{4})|}}{\sqrt{4\pi\sin(\frac{\theta+\pi}{2})}}\frac{e^{iE\ln|\tan\left(\frac{\theta+\pi}{4}\right)|}}{\sqrt{4\pi\sin\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}},\\
&= \frac{1}{2\pi}\phi^*(\theta)\phi(\theta),\\
&= \frac{1}{2\pi}|\phi(\theta)|^2.
\end{aligned}$$

Por lo que en efecto, se cumple.

Ahora probemos que la función de Wigner está normalizada; es decir, tenemos que probar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta V_\phi(\theta, p) = \sum_n |c_n|^2 = 1.$$

Realizaremos un proceso similar al anterior, por lo que tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta V_\phi(\theta, p) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left(\int_{-\infty}^{\infty} dp V_\phi(\theta, p) \right),$$

La parte entre paréntesis es lo que acabamos de probar, por lo que:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta V_\phi(\theta, p) &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left(\frac{1}{2\pi} |\phi(\theta)|^2 \right), \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left(\frac{1}{4\pi \sin\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)} \right), \\
&= \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \csc\left(\frac{\theta+\pi}{2} \right),
\end{aligned}$$

realizamos el cambio de variable:

$$\theta = 2x - \pi,$$

así tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta V_\phi(\theta, p) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\pi} 2dx \csc(x), \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi} dx \csc(x),
\end{aligned}$$

Pero resulta que esta integral diverge, ya que la función de Wigner que encontramos está normalizada con respecto a las energías. Por lo tanto, al realizar esta serie de integrales, tendríamos que llegar a la delta de Dirac $\delta(E - E')$; es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta V_\phi(\theta, p) = \sum_n |c_n|^2 = \frac{\delta(E - E')}{2\pi}. \tag{4.55}$$

Por lo que tenemos que considerar diferentes energías en nuestras funciones de onda.

Comencemos con:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta V_{\phi}(\theta,p) &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left(\int_{-\infty}^{\infty} dp V_{\psi}(\theta,p) \right), \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{4\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{imx} e^{-iE \ln|\tan(\frac{x+\pi}{4})|}}{\sqrt{\sin(\frac{x+\pi}{2})}} dx \right) \\
&\quad \left(\sum_{m,n} \frac{1}{2\pi} e^{i(n-m)\theta} sinc(\pi(p - \frac{m+n}{2})) \right) \\
&\quad \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{4\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx'} e^{iE' \ln|\tan\left(\frac{x'+\pi}{4}\right)|}}{\sqrt{\sin\left(\frac{x'+\pi}{2}\right)}} dx' \right), \\
&= \frac{1}{36\pi^4} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-iE \ln|\tan(\frac{x+\pi}{4})|}}{\sqrt{\sin(\frac{x+\pi}{2})}} dx \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iE' \ln|\tan\left(\frac{x'+\pi}{4}\right)|}}{\sqrt{\sin\left(\frac{x'+\pi}{2}\right)}} dx' \\
&\quad \sum_{m,n} e^{i(n-m)\theta} e^{imx} e^{-inx'} \int_{-\infty}^{\infty} dp sinc(\pi(p - \frac{m+n}{2})), \\
&= \frac{1}{36\pi^4} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-iE \ln|\tan(\frac{x+\pi}{4})|}}{\sqrt{\sin(\frac{x+\pi}{2})}} dx \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iE' \ln|\tan\left(\frac{x'+\pi}{4}\right)|}}{\sqrt{\sin\left(\frac{x'+\pi}{2}\right)}} dx' \\
&\quad \left(\sum_{m} e^{im(x-\theta)} \right) \left(\sum_{m} e^{in(\theta-x')} \right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta V_{\psi}(\theta,p) &= \frac{1}{36\pi^4} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-iE \ln|\tan(\frac{x+\pi}{4})|}}{\sqrt{\sin(\frac{x+\pi}{2})}} dx \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iE' \ln|\tan\left(\frac{x'+\pi}{4}\right)|}}{\sqrt{\sin\left(\frac{x'+\pi}{2}\right)}} dx' \\
&\quad \left(2\pi\delta(x-\theta)\right) \left(2\pi\,\delta(\theta-x')\right), \\
&= \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-iE \ln|\tan(\frac{x+\pi}{4})|}}{\sqrt{\sin(\frac{x+\pi}{2})}} \delta(x-\theta) dx \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iE' \ln|\tan\left(\frac{x'+\pi}{4}\right)|}}{\sqrt{\sin\left(\frac{x'+\pi}{2}\right)}} \delta(\theta-x') dx', \\
&= \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{e^{-iE \ln|\tan(\frac{\theta+\pi}{4})|}}{\sqrt{\sin(\frac{\theta+\pi}{2})}} \frac{e^{iE' \ln|\tan\left(\frac{\theta+\pi}{4}\right)|}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}}, \\
&= \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{e^{i \ln|\tan(\frac{\theta+\pi}{4})|(E'-E)}}{\sin(\frac{\theta+\pi}{2})},
\end{aligned}
$$

realizamos el siguiente cambio de variable:

$$y = \frac{\theta + \pi}{4},$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta V_{\psi}(\theta, p) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{0}^{\pi/2} 4dy \frac{e^{i\ln|\tan(y)|(E'-E)}}{\sin(2y)}, \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{0}^{\pi/2} dy \frac{e^{i\ln|\tan(y)|(E'-E)}}{\sin(2y)},\end{aligned}$$

ahora realizamos un segundo cambio de variable:

$$z = \ln|\tan(y)|,$$

por lo que obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta V_{\psi}(\theta, p) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2} e^{iz(E'-E)}, \\ &= \frac{1}{4\pi^2} 2\pi\delta(E' - E), \\ &= \frac{\delta(E' - E)}{2\pi}.\end{aligned}$$

De esta manera, vemos que se cumple. Como mencionamos, las demás también se cumplen debido a la forma en que encontramos la función de Wigner.

Capítulo 5

Conclusión

En este trabajo, hemos analizado el modelo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) mediante la aplicación del formalismo de cosmología cuántica de lazos en el espacio fase, logrando obtener la función de Wigner, herramienta fundamental para el análisis de la dinámica cuántica en este contexto. Una vez calculada la función de Wigner, podemos usarla para estudiar diversos operadores geométricos como el operador de volumen y el operador de área en cosmología cuántica de lazos, los cuales seguimos analizando.

La metodología aplicada utilizando la cuantización en el espacio fase de un cilindro, sienta las bases para futuras investigaciones, en las que se podrían analizar modelos cosmológicos más complejos como es el caso de modelos de Bianchi, y otros con anisotropías. Comparar nuestros hallazgos con modelos más sofisticados permitirá ampliar el entendimiento del modelo cosmológico de FRW desde la perspectiva de la cosmología cuántica de lazos.

La obtención de la función de Wigner representa un avance significativo, ya que permite explorar con mayor profundidad la evolución temporal y las características dinámicas del modelo cosmológico de FRW, abriendo nuevas vías para comprender los comportamientos cuánticos en las primeras etapas del universo.

En conclusión, este estudio no solo reafirma la importancia del formalismo de la cosmología cuántica de lazos en el espacio fase, sino que también destaca su potencial para revolucionar nuestro entendimiento del origen y la evolución del universo. La integración de la función de Wigner en el análisis de modelos cosmológicos representa un paso crucial hacia una comprensión más completa y unificada de los fenómenos cuánticos que subyacen al comportamiento del cosmos en sus primeras etapas.

Apéndice A

Corchete de Poisson

Probemos la ecuación (3.3), es decir, probemos los siguientes corchetes de Poisson:

$$\{\tilde{h}_3, \tilde{h}_1\}_{\theta,p} = \tilde{h}_2, \quad \{\tilde{h}_3, \tilde{h}_2\}_{\theta,p} = -\tilde{h}_1, \quad \{\tilde{h}_1, \tilde{h}_2\}_{\theta,p} = 0,$$

donde:

$$\tilde{h}_1 = \cos\theta, \quad \tilde{h}_2 = \sin\theta, \quad \tilde{h}_3 = p_\theta = p.$$

Prueba:

Los corchetes de Poisson se definen como:

$$\{u, v\}_{q,p} = \frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i}.$$

Para nuestro caso en particular $q_i = \theta$, por lo que obtenemos:

$$\{u, v\}_{\theta,p} = \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial \theta},$$

por tanto tenemos:

$$\begin{aligned}
\{\tilde{h}_3, \tilde{h}_1\}_{\theta,p} &= \tilde{h}_2, \\
\{p, \cos\theta\}_{\theta,p} &= \cancelto{0}{\frac{\partial p}{\partial \theta}\frac{\partial(\cos\theta)}{\partial p}} - \cancelto{1}{\frac{\partial p}{\partial p}}\frac{\partial(\cos\theta)}{\partial \theta}, \\
&= -(-\sin\theta), \\
&= \sin\theta, \\
&= \tilde{h}_2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\tilde{h}_3, \tilde{h}_2\}_{\theta,p} &= -\tilde{h}_1, \\
\{p, \sin\theta\}_{\theta,p} &= \cancelto{0}{\frac{\partial p}{\partial \theta}\frac{\partial(\sin\theta)}{\partial p}} - \cancelto{1}{\frac{\partial p}{\partial p}}\frac{\partial(\sin\theta)}{\partial \theta}, \\
&= -(\cos\theta), \\
&= -\tilde{h}_1.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\{\tilde{h}_1, \tilde{h}_2\}_{\theta,p} &= -\tilde{h}_1, \\
\{\cos\theta, \sin\theta\}_{\theta,p} &= \frac{\partial(\cos\theta)}{\partial\theta}\cancelto{=0}{\frac{\partial(\sin\theta)}{\partial p}} - \cancelto{=0}{\frac{\partial(\cos\theta)}{\partial p}}\frac{\partial(\sin\theta)}{\partial\theta}, \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Lo cual son correctos.

Apéndice B

Generadores del álgebra de Lie

Probemos que los generadores del álgebra de Lie son:

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prueba:
De la ecuación (3.4), tenemos que el elemento de grupo es:

$$g(\vartheta, \vec{a}) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & a_1 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

del cual a través de:

$$\left.\frac{dg}{d\beta}\right|_{\beta=0},$$

con $\beta = \vartheta$ tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}\left.\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & a_1 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right|_{\vartheta=0} &= \left.\begin{pmatrix} -\sin\vartheta & -\cos\vartheta & 0 \\ \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right|_{\vartheta=0}, \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &= \tilde{L}, \end{aligned}$$

con $\beta = a_1$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{da_1}\begin{pmatrix}\cos\vartheta & -\sin\vartheta & a_1\\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & a_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Bigg|_{a_1=0} &= \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Bigg|_{a_1=0},\\
&= \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\\
&= \tilde{k_1},
\end{aligned}
$$

con $\beta = a_2$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{da_2}\begin{pmatrix}\cos\vartheta & -\sin\vartheta & a_1\\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & a_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Bigg|_{a_2=0} &= \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Bigg|_{a_2=0},\\
&= \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\\
&= \tilde{k_2}.
\end{aligned}
$$

B.1. Conmutadores de los generadores del álgebra de Lie

Los generadores del álgebra de Lie obedecen las relaciones de conmutación:

$$[\tilde{L}, \tilde{K}_1] = \tilde{K}_2, \qquad [\tilde{L}, \tilde{K}_2] = -\tilde{K}_1, \qquad [\tilde{K}_1, \tilde{K}_2] = 0. \tag{B.1}$$

Prueba:

$$
\begin{aligned}
[\tilde{L}, \tilde{K}_1] &= \tilde{L}\tilde{K}_1 - \tilde{K}_1\tilde{L},\\
&= \begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\\
&= \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\\
&= \tilde{K}_2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\tilde{L},\tilde{K}_2] &= \tilde{L}\tilde{K}_2 - \tilde{K}_2\tilde{L}, \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
&= -\tilde{K}_1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\tilde{K}_1,\tilde{K}_2] &= \tilde{K}_1\tilde{K}_2 - \tilde{K}_2\tilde{K}_1, \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

B.2. Expansión en serie de potencias

Probemos que, utilizando la expansión en serie de potencias, los generadores del álgebra de Lie se pueden escribir como:

$$
\begin{aligned}
g(\vartheta,\vec{a}=0) = g(\vartheta) = e^{\vartheta\tilde{L}} &= \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
g(\vartheta=0,a_1,a_2=0) = g(a_1) = e^{a_1\tilde{K}_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
g(\vartheta=0,a_1=0,a_2) = g(a_2) = e^{a_2\tilde{K}_2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Prueba:
Probaremos que, de forma exponencial, llegamos a lo que teníamos; es decir, iniciaremos del lado izquierdo y llegaremos al lado derecho. Para el primero tenemos:

$$
e^{\vartheta\tilde{L}} = 1 + \theta\tilde{L} + \frac{(\theta\tilde{L})^2}{2!} + \frac{(\theta\tilde{L})^3}{3!} + \frac{(\theta\tilde{L})^4}{4!} + \frac{(\theta\tilde{L})^5}{5!} + \cdots,
$$

donde notemos que:

$$\tilde{L}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{L}^3 = \tilde{L}^2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\tilde{L}.$$

$$\tilde{L}^4 = \tilde{L}^3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\tilde{L} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{L}^5 = \tilde{L}^4 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{L}.$$

Por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned}
e^{\vartheta \tilde{L}} &= 1 + \theta \tilde{L} + \frac{\theta^2}{2!}\tilde{L}^2 - \frac{\theta^3}{3!}\tilde{L} - \frac{\theta^4}{4!}\tilde{L}^2 + \frac{\theta^5}{5!}\tilde{L} + \cdots, \\
&= 1 + \tilde{L}^2 \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \cdots \right) + \tilde{L} \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots \right), \\
&= 1 - \tilde{L}^2 - \tilde{L}^2 \left(-\frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \right) + \tilde{L} (\sin\theta) + \tilde{L}^2, \\
&= 1 - \tilde{L}^2 - \tilde{L}^2 (\cos\theta) + \tilde{L} (\sin\theta) + \tilde{L}^2, \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\cos\theta) + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\sin\theta), \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Para el segundo tenemos:

$$e^{a_1 \tilde{K}_1} = 1 + a_1 \tilde{K}_1 + \frac{(a_1 \tilde{K}_1)^2}{2!} + \frac{(a_1 \tilde{K}_1)^3}{3!} + \frac{(a_1 \tilde{K}_1)^4}{4!} + \frac{(a_1 \tilde{K}_1)^5}{5!} + \cdots,$$

donde notemos que:

$$\tilde{K}_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto tenemos:

$$\tilde{K}_1^n = 0.$$

Así:

$$\begin{aligned}
e^{a_1\tilde{K}_1} &= 1 + a_1\tilde{K}_1, \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Para el tercero, tenemos:

$$e^{a_2\tilde{K}_2} = 1 + a_2\tilde{K}_2 + \frac{(a_2\tilde{K}_2)^2}{2!} + \frac{(a_2\tilde{K}_2)^3}{3!} + \frac{(a_2\tilde{K}_2)^4}{4!} + \frac{(a_2\tilde{K}_2)^5}{5!} + \cdots,$$

donde notemos que:

$$\tilde{K}_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, tenemos:

$$\tilde{K}_2^n = 0.$$

Así:

$$\begin{aligned}
e^{a_2\tilde{K}_2} &= 1 + a_2\tilde{K}_2, \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

B.3. Elemento de grupo

Probaremos que el elemento de grupo lo podemos escribir como:

$$g_0(\vartheta,\vec{a}) = e^{(\vartheta/2)\tilde{L}} \circ e^{R(-\vartheta/2)\vec{a}\cdot\vec{\tilde{K}}} \circ e^{(\vartheta/2)\tilde{L}}.$$

Prueba:

Partiremos igualando los elementos de grupo $g_0(\vartheta,\vec{b})$ y $g(\vartheta,\vec{a})$, es decir:

$$\begin{pmatrix} R(\vartheta) & \vec{a} \\ 00 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\vartheta) & sinc(\vartheta/2)\, R(\vartheta/2)\vec{b} \\ 0\,0 & 1 \end{pmatrix},$$

igualando cada elemento de la matriz obtenemos que:

$$\vec{a} = sinc(\vartheta/2)\, R(\vartheta/2)\vec{b},$$

del cual encontramos:

$$\begin{aligned} R^{-1}(\vartheta/2)\vec{a} &= R^{-1}(\vartheta/2) sinc(\vartheta/2)\, R(\vartheta/2)\vec{b}, \\ R^{-1}(\vartheta/2)\vec{a} &= R^{-1}(\vartheta/2)\, R(\vartheta/2) sinc(\vartheta/2)\vec{b}, \\ R^{-1}(\vartheta/2)\vec{a} &= sinc(\vartheta/2)\vec{b}, \\ \vec{b} &= \frac{R^{-1}(\vartheta/2)\vec{a}}{sinc(\vartheta/2)}. \end{aligned}$$

Notemos que el elemento de grupo de g_0, debido a la similitud con el elemento de grupo g, se puede escribir como:

$$g_0(\vartheta,\vec{b}) = e^{(\vartheta/2)\tilde{L}} \circ e^{sinc(\vartheta/2)\vec{b}\cdot\vec{\tilde{K}}} \circ e^{(\vartheta/2)\tilde{L}},$$

sustituyendo el valor de $\vec{b}$ en términos de $\vec{a}$, tenemos:

$$\begin{aligned} g_0(\vartheta,\vec{b}) &= e^{(\vartheta/2)\tilde{L}} \circ e^{sinc(\vartheta/2)\left(\frac{R^{-1}(\vartheta/2)\vec{a}}{sinc(\vartheta/2)}\right)\cdot\vec{\tilde{K}}} \circ e^{(\vartheta/2)\tilde{L}}, \\ &= e^{(\vartheta/2)\tilde{L}} \circ e^{R^{-1}(\vartheta/2)\vec{a}\cdot\vec{\tilde{K}}} \circ e^{(\vartheta/2)\tilde{L}}, \end{aligned}$$

recordemos que:

$$\begin{aligned} R(\vartheta/2) &= \begin{pmatrix} \cos(\vartheta/2) & -\sin(\vartheta/2) \\ \sin(\vartheta/2) & \cos(\vartheta/2) \end{pmatrix}, \\ R^{-1}(\vartheta/2) &= \begin{pmatrix} \cos(\vartheta/2) & \sin(\vartheta/2) \\ -\sin(\vartheta/2) & \cos(\vartheta/2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ya que la matriz de rotación cumplen $R^{-1}(\vartheta/2) = R^{\dagger}(\vartheta/2)$, ahora:

$$
\begin{aligned}
R(-\vartheta/2) &= \begin{pmatrix} \cos(-\vartheta/2) & -\sin(-\vartheta/2) \\ \sin(-\vartheta/2) & \cos(-\vartheta/2) \end{pmatrix}, \\
R(-\vartheta/2) &= \begin{pmatrix} \cos(\vartheta/2) & -\sin(\vartheta/2) \\ \sin(\vartheta/2) & \cos(\vartheta/2) \end{pmatrix} = R^{-1}(\vartheta/2).
\end{aligned}
$$

por lo tanto:

$$
g_0(\vartheta, \vec{b}) = e^{(\vartheta/2)\tilde{L}} \circ e^{R(-\vartheta/2)\vec{a}\cdot\vec{\tilde{K}}} \circ e^{(\vartheta/2)\tilde{L}}.
$$

Apéndice C

Matriz hermitiana de Wigner Moyal

Probemos:

$$\begin{aligned} V_{mn}(\theta, p) &= \frac{1}{(2\pi)^2} e^{i(n-m)\theta} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i[(n+m)/2-p]\vartheta}, \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{i(n-m)\theta} Sinc\pi \left[p - (m+n)/2\right]. \end{aligned}$$

Prueba:

Partimos de:

$$\begin{aligned} V^{(k)}_{\psi_2\psi_1}\left[\vec{\chi}(\theta), p\right] &\equiv \left(\psi_2(\varphi), V\left[\vec{\chi}(\theta, p\right]\psi_1(\varphi)\right), \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \psi_2^*(\varphi)\, V\left[\vec{\chi}(\theta, p\right]\psi_1(\varphi), \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \psi_2^*(\varphi) \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \int_{-\infty}^{\infty} da_1 da_2 \hat{U}_0\right] \psi_1(\varphi), \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \psi_2^*(\varphi) \left[\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \int_{-\infty}^{\infty} da_1 da_2 \hat{U}_0\right] \psi_1(\varphi), \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \psi_2^*(\varphi) \int g(\vartheta, \vec{a}) \hat{U}_0\, \psi_1(\varphi), \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int dg(\vartheta, \vec{a})\, d\varphi\, \psi_2^*(\varphi)\, \hat{U}_0\, \psi_1(\varphi), \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int dg(\vartheta, \vec{a})\, d\varphi\, \psi_2^*(\varphi) \left[e^{i(L-p)(\vartheta/2)} \circ e^{i(\vec{K}-\vec{\chi}(\vartheta))\cdot\vec{a}_{(-\vartheta/2)}} \circ e^{i(L-p)(\vartheta/2)}\right] \psi_1(\varphi). \end{aligned}$$

Hacemos uso de las ecuaciones (3.25)-(3.26):

$$
\begin{aligned}
V^{(k)}_{\psi_2\psi_1}[\vec{\chi}(\theta),p] &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int dg(\vartheta,\vec{a})\,d\varphi\, e^{-i(\vec{\chi}(\vartheta)\cdot\vec{a}_{(-\vartheta/2)}\,+\,p\vartheta)}\psi_2^*(\varphi) \\
&\qquad \times \left[e^{iL(\vartheta/2)}\circ e^{i\vec{K}\cdot\vec{a}_{(-\vartheta/2)}}\circ e^{iL(\vartheta/2)}\right]\,\psi_1(\varphi), \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int dg(\vartheta,\vec{a})\,d\varphi\, e^{-i\omega}\left(\psi_2^*(\varphi)e^{iL(\vartheta/2)}\right)\circ e^{iL(\vartheta/2)}\,\circ\,\left(e^{i\vec{K}\cdot\vec{a}_{(-\vartheta/2)}}\psi_1(\varphi)\right), \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int dg(\vartheta,\vec{a})\,d\varphi\, e^{-i\omega}\left(\psi_2(\varphi)e^{-iL(\vartheta/2)}\right)^*\circ e^{iL(\vartheta/2)}\,e^{i\vec{k}(\varphi)\cdot\vec{a}_{(-\vartheta/2)}}\psi_1(\varphi), \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int dg(\vartheta,\vec{a})\,d\varphi\, e^{-i\omega}\,e^{i\vec{k}(\varphi)\cdot\vec{a}_{(-\vartheta/2)}}\left(\psi_2(\varphi-\frac{\vartheta}{2})\right)^* e^{iL(\vartheta/2)}\psi_1(\varphi),
\end{aligned}
$$

así llegamos a:

$$
V^{(k)}_{\psi_2\psi_1}[\vec{\chi}(\theta),p] = \frac{1}{(2\pi)^4}\int dg(\vartheta,\vec{a})\,d\varphi\, e^{-i\omega\,+i\vec{k}(\varphi)\cdot\vec{a}_{(-\vartheta/2)}}\psi_2^*(\varphi-\frac{\vartheta}{2})\psi_1(\varphi+\frac{\vartheta}{2}), \tag{C.1}
$$

donde $\omega = \vec{\chi}(\vartheta)\cdot\vec{a}_{(-\vartheta/2)} + p\vartheta$. Ahora realicemos el cambio a coordenadas polares, por lo que tenemos:

$$
\vec{a} = a(\cos\alpha,\sin\alpha), \quad dg(\vartheta,\vec{a}) = d\vartheta d\vec{a} = a\,d\vartheta\,dad\alpha,
$$

lo que nos lleva a:

$$
\begin{aligned}
\vec{a}_{-\vartheta/2} &= \begin{pmatrix}\cos(\vartheta/2) & \sin(\vartheta/2)\\ -\sin(\vartheta/2) & \cos(\vartheta/2)\end{pmatrix} a\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}, \\
&= a\begin{pmatrix}\cos(\vartheta/2)\cos\alpha+\sin\alpha\sin(\vartheta/2)\\ -\cos\alpha\sin(\vartheta/2)+\sin\alpha\cos(\vartheta/2)\end{pmatrix}, \\
&= a\begin{pmatrix}\cos(\alpha-\vartheta/2)\\ \sin(\alpha-\vartheta/2)\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

por lo que:

$$
\begin{aligned}
\vec{\chi}(\theta)\cdot\vec{a}_{-\vartheta/2} &= \chi\,(\cos\theta,\sin\theta)\cdot a\begin{pmatrix}\cos(\alpha-\vartheta/2)\\ \sin(\alpha-\vartheta/2)\end{pmatrix}, \\
&= a\chi\,(\cos\theta\cos(\alpha-\vartheta/2)+\sin\theta\sin(\alpha-\vartheta/2)), \\
&= a\chi\cos(\theta-\alpha+\vartheta/2).
\end{aligned}
$$

Similarmente tenemos:

$$
\vec{K}(\varphi)\cdot\vec{a}_{-\vartheta/2} = a\,k\cos(\varphi-\alpha+\vartheta/2).
$$

sustituyendo lo anterior en la ecuación (C.1), tenemos:

$$V^{(k)}_{\psi_2\psi_1}[\vec{\chi}(\theta),p] = \frac{1}{(2\pi)^4}\int a\,da\,d\alpha\,d\vartheta\,d\varphi\,e^{-i(a\chi\cos(\theta-\alpha+\vartheta/2)\,+\,p\vartheta\,-a\,k\cos(\varphi-\alpha+\vartheta/2))}$$
$$\times\,\psi_2^*(\varphi-\frac{\vartheta}{2})\psi_1(\varphi+\frac{\vartheta}{2}),$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int a\,da\,d\alpha\,d\vartheta\,d\varphi\,e^{-ip\vartheta}e^{-i(a\chi\cos(\theta-\alpha+\vartheta/2)\,-a\,k\cos(\varphi-\alpha+\vartheta/2))}$$
$$\times\,\psi_2^*(\varphi-\frac{\vartheta}{2})\psi_1(\varphi+\frac{\vartheta}{2}),$$

si tomamos las funciones ψ_1 y ψ_2 como:

$$\psi_1(\varphi) = e_n(\varphi) \rightarrow \quad \psi_1(\varphi+\frac{\vartheta}{2}) = e^{in(\varphi+\frac{\vartheta}{2})},$$
$$\psi_2(\varphi) = e_m(\varphi) \rightarrow \quad \psi_2^*(\varphi-\frac{\vartheta}{2}) = e^{-im(\varphi-\frac{\vartheta}{2})},$$

nos lleva a:

$$V^{(k)}_{\psi_2\psi_1}[\vec{\chi}(\theta),p] = \frac{1}{(2\pi)^4}\int a\,da\,d\alpha\,d\vartheta\,d\varphi\,e^{-ip\vartheta}e^{-i(a\chi\cos(\theta-\alpha+\vartheta/2)\,-a\,k\cos(\varphi-\alpha+\vartheta/2))}$$
$$\times\,e^{-im(\varphi-\frac{\vartheta}{2})}e^{in(\varphi+\frac{\vartheta}{2})},$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int a\,da\,d\alpha\,d\vartheta\,d\varphi\,e^{-ip\vartheta}e^{-i(a\chi\cos(\theta-\alpha+\vartheta/2)\,-a\,k\cos(\varphi-\alpha+\vartheta/2))}$$
$$\times\,e^{i\frac{\vartheta}{2}(m+n)}e^{i\varphi(n-m)},$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int a\,da\,d\alpha\,d\vartheta\,d\varphi\,e^{-i(a\chi\cos(\theta-\alpha+\vartheta/2)\,-a\,k\cos(\varphi-\alpha+\vartheta/2))}$$
$$\times\,e^{i\frac{\vartheta}{2}(m+n-2p)}e^{i\varphi(n-m)},$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int a\,da\,d\alpha\,d\vartheta\,e^{i\frac{\vartheta}{2}(m+n-2p)}e^{-ia\chi\cos(\theta-\alpha+\vartheta/2)}$$
$$\times\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi e^{i\varphi(n-m)}\,e^{ia\,k\cos(\varphi-\alpha+\vartheta/2)}.$$

Realicemos el cambio de variable:

$$\kappa = \varphi-\alpha+\frac{\vartheta}{2} \quad \rightarrow \quad \varphi = \kappa+\alpha-\frac{\vartheta}{2},$$
$$d\varphi = d\kappa,$$
$$\varphi = -\pi \longrightarrow \kappa = -\pi-\alpha+\frac{\vartheta}{2}$$
$$\varphi = \pi \longrightarrow \kappa = \pi-\alpha+\frac{\vartheta}{2}$$

con lo que tenemos:

$$V^{(k)}_{\psi_2\psi_1}[\vec{\chi}(\theta),p] = \frac{1}{(2\pi)^4}\int a\,da\,d\alpha\,d\vartheta\, e^{i\frac{\vartheta}{2}(m+n-2p)}e^{-ia\chi\cos(\theta-\alpha+\vartheta/2)} \times \int_{-\pi-\alpha+\frac{\vartheta}{2}}^{\pi-\alpha+\frac{\vartheta}{2}} d\kappa e^{i(\kappa+\alpha-\frac{\vartheta}{2})(n-m)}\, e^{ia\,k\cos(\kappa)},$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int a\,da\,d\alpha\,d\vartheta\, e^{i\frac{\vartheta}{2}(m+n-2p)}e^{-ia\chi\cos(\theta-\alpha+\vartheta/2)} \times e^{i(\alpha-\frac{\vartheta}{2})(n-m)}\int_{-\pi-\alpha+\frac{\vartheta}{2}}^{\pi-\alpha+\frac{\vartheta}{2}} d\kappa e^{i\kappa(n-m)}\, e^{ia\,k\cos(\kappa)}.$$

Ahora realicemos:

$$\begin{aligned}
\cos(\kappa+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}) \quad &\rightarrow \quad \xi = \kappa+\frac{\pi}{2},\\
\cos(\xi-\frac{\pi}{2}) = \sin(\xi) \quad &\rightarrow \quad \kappa = \xi-\frac{\pi}{2}, \quad d\kappa = d\xi,\\
si\ \kappa = \pi-\alpha+\frac{\vartheta}{2} \quad &\rightarrow \quad \xi = \frac{3\pi}{2}-\alpha+\frac{\vartheta}{2},\\
si\ \kappa = -\pi-\alpha+\frac{\vartheta}{2} \quad &\rightarrow \quad \xi = -\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\vartheta}{2}.
\end{aligned} \tag{C.2}$$

Así:

$$V^{(k)}_{\psi_2\psi_1}[\vec{\chi}(\theta),p] = \frac{1}{(2\pi)^4}\int a\,da\,d\alpha\,d\vartheta\, e^{i\frac{\vartheta}{2}(m+n-2p)}e^{-ia\chi\cos(\theta-\alpha+\vartheta/2)} \times e^{i(\alpha-\frac{\vartheta}{2})(n-m)}\int_{-\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\vartheta}{2}}^{\frac{3\pi}{2}-\alpha+\frac{\vartheta}{2}} d\xi e^{i(\xi-\frac{\pi}{2})(n-m)}\, e^{ia\,k\sin(\xi)},$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int a\,da\,d\alpha\,d\vartheta\, e^{i\frac{\vartheta}{2}(m+n-2p)}e^{-ia\chi\cos(\theta-\alpha+\vartheta/2)} \times e^{i(\alpha-\frac{\vartheta}{2})(n-m)}e^{-i\frac{\pi}{2}(n-m)}\int_{-\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\vartheta}{2}}^{\frac{3\pi}{2}-\alpha+\frac{\vartheta}{2}} d\xi e^{i\xi(n-m)}\, e^{ia\,k\sin(\xi)},$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int a\,da\,d\alpha\,d\vartheta\, e^{i\frac{\vartheta}{2}(m+n-2p)}e^{-ia\chi\cos(\theta-\alpha+\vartheta/2)} \times e^{i(\alpha-\frac{\vartheta}{2})(n-m)}e^{-i\frac{\pi}{2}(n-m)}\int_{-\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\vartheta}{2}}^{\frac{3\pi}{2}-\alpha+\frac{\vartheta}{2}} d\xi e^{i(a\,k\sin(\xi)+(n-m)\xi)}.$$

$$V^{(k)}_{\psi_2\psi_1}[\vec{\chi}(\theta),p] = \frac{1}{(2\pi)^4}\int a\,da\,d\alpha\,d\vartheta\, e^{i\frac{\vartheta}{2}(m+n-2p)}e^{-ia\chi\cos(\theta-\alpha+\vartheta/2)} \times e^{i(\alpha-\frac{\vartheta}{2})(n-m)}e^{-i\frac{\pi}{2}(n-m)}\int_{-\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\vartheta}{2}}^{\frac{3\pi}{2}-\alpha+\frac{\vartheta}{2}} d\xi e^{i(a\,k\sin(\xi)+(n-m)\xi)}. \tag{C.3}$$

Recordemos que:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\beta e^{i(x\sin\beta - n\beta)}. \tag{C.4}$$

Entonces, si en la ecuación (C.3)tomamos que $l = m - n$ y notemos que los intervalos de integración tiene de diferencia 2π, tenemos:

$$\begin{aligned} V^{(k)}_{\psi_2\psi_1}[\vec{\chi}(\theta), p] &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int a\, da\, d\alpha\, d\vartheta\, e^{i\frac{\vartheta}{2}(m+n-2p)} e^{-ia\chi\cos(\theta-\alpha+\vartheta/2)} \\ &\qquad \times e^{-il(\alpha-\frac{\vartheta}{2}-\frac{\pi}{2})}\frac{1}{(2\pi)}\int_{-\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\vartheta}{2}}^{\frac{3\pi}{2}-\alpha+\frac{\vartheta}{2}} d\xi e^{i(a\,k\sin(\xi)-l\xi)}, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int a\, da\, d\alpha\, d\vartheta\, e^{i\frac{\vartheta}{2}(m+n-2p)} e^{-ia\chi\cos(\theta-\alpha+\vartheta/2)} \\ &\qquad \times e^{-il(\alpha-\frac{\vartheta}{2}-\frac{\pi}{2})} J_l\left[ak\right]. \end{aligned}$$

Ahora realicemos la integral con respecto a α:

$$\begin{aligned} V^{(k)}_{\psi_2\psi_1}[\vec{\chi}(\theta), p] = \frac{1}{(2\pi)^2}\int a\, da\, d\vartheta\, J_l\left[ak\right] e^{i\frac{\vartheta}{2}(m+n-2p)}\, e^{il(\frac{\vartheta}{2}+\frac{\pi}{2})} \\ \times \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha e^{-ia\chi\cos(\theta-\alpha+\vartheta/2)} e^{-il\alpha}, \end{aligned}$$

realicemos el cambio de variable:

$$\begin{aligned} &\varpi = \theta - \alpha + \vartheta/2, \quad \alpha = \theta - \varpi + \vartheta/2, \quad d\alpha = -d\varpi, \\ &si\ \alpha = \pi \quad \to \quad \varpi = -\pi + \theta + \vartheta/2, \\ &si\ \alpha = -\pi \quad \to \quad \varpi = \pi + \theta + \vartheta/2, \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} V^{(k)}_{\psi_2\psi_1}[\vec{\chi}(\theta), p] &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int a\, da\, d\vartheta\, J_l\left[ak\right] e^{i\frac{\vartheta}{2}(m+n-2p)}\, e^{il(\frac{\vartheta}{2}+\frac{\pi}{2})} \\ &\qquad \times \frac{1}{2\pi}\int_{\pi+\theta+\vartheta/2}^{-\pi+\theta+\vartheta/2} (-d\varpi)\, e^{-ia\chi\cos(\varpi)} e^{-il(\theta-\varpi+\vartheta/2)}, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int a\, da\, d\vartheta\, J_l\left[ak\right] e^{i\frac{\vartheta}{2}(m+n-2p)}\, e^{il(\frac{\vartheta}{2}+\frac{\pi}{2})} \\ &\qquad \times e^{-il(\theta+\vartheta/2)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\theta+\vartheta/2}^{\pi+\theta+\vartheta/2} d\varpi\, e^{-ia\chi\cos(\varpi)} e^{il\varpi}, \end{aligned}$$

repetimos el proceso (C.2):

$$\begin{aligned}
\cos(\varpi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) &\quad \rightarrow \quad -\xi' = \varpi + \frac{\pi}{2}, \\
\cos(-\xi' - \frac{\pi}{2}) = \cos(\xi' + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\xi') &\quad \rightarrow \quad \varpi = -\xi' - \frac{\pi}{2}, \quad d\varpi = -d\xi' \\
si\ \varpi = \pi + \theta + \vartheta/2 &\quad \rightarrow \quad \xi' = -\frac{3\pi}{2} - \theta - \frac{\vartheta}{2} \\
si\ \varpi = -\pi + \theta + \vartheta/2 &\quad \rightarrow \quad \xi' = \frac{\pi}{2} - \theta - \frac{\vartheta}{2},
\end{aligned} \tag{C.5}$$

sustituyendo:

$$\begin{aligned}
V^{(k)}_{\psi_2\psi_1}[\vec{\chi}(\theta), p] &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int a\, da\, d\vartheta\, J_l[ak]\, e^{i\frac{\vartheta}{2}(m+n-2p)}\, e^{il(\frac{\vartheta}{2}+\frac{\pi}{2})} \\
&\qquad \times e^{-il(\theta+\vartheta/2)}\ \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}-\theta-\frac{\vartheta}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}-\theta-\frac{\vartheta}{2}} (-d\xi')\, e^{ia\chi\sin(\xi')} e^{-il(\xi'+\pi/2)}, \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int a\, da\, d\vartheta\, J_l[ak]\, e^{i\frac{\vartheta}{2}(m+n-2p)}\, e^{il(\frac{\vartheta}{2}+\frac{\pi}{2})} \\
&\qquad \times e^{-il(\theta+\vartheta/2)}\, e^{-il\pi/2}\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{3\pi}{2}-\theta-\frac{\vartheta}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\theta-\frac{\vartheta}{2}} d\xi'\, e^{i(a\chi\sin(\xi')-l\xi')}, \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int a\, da\, d\vartheta\, J_l[ak]\, e^{i\frac{\vartheta}{2}(m+n-2p)}\, e^{il(\frac{\vartheta}{2}+\frac{\pi}{2})} \\
&\qquad \times e^{-il(\theta+\vartheta/2)}\, e^{-il\pi/2}\, J_l[a\chi], \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int a\, da\, d\vartheta\, J_l[ak]\, e^{i\frac{\vartheta}{2}(m+n-2p)}\, e^{il(\frac{\vartheta}{2}+\frac{\pi}{2}-\theta-\vartheta/2-\pi/2)}\, J_l[a\chi], \\
&= \frac{e^{-il\theta}}{(2\pi)^2}\left(\int_0^\infty a\, da\, J_l[a\chi]\, J_l[ak]\right)\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i\frac{\vartheta}{2}(m+n-2p)}, \\
&= \frac{e^{-il\theta}}{(2\pi)^2}\left(\frac{1}{k}\delta(k-\chi)\right)\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i\frac{\vartheta}{2}(m+n-2p)}\ ,
\end{aligned}$$

finalmente tenemos:

$$V^{(k)}_{\psi_2\psi_1}[\vec{\chi}(\theta), p] = e^{i(n-m)\theta}\left(\frac{1}{k}\delta(k-\chi)\right)\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i\vartheta(\frac{m+n}{2}-p)}. \tag{C.6}$$

Ahora introducimos la medida de Plancherel kdk, para obtener lo deseado:

$$\begin{aligned}
V_{mn}(\theta, p) &= \int_0^\infty dkk V^k_{mn}(\theta, p), \\
&= e^{i(n-m)\theta}\int_0^\infty dkk\left(\frac{1}{k}\delta(k-\chi)\right)\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i\vartheta(\frac{m+n}{2}-p)}, \\
&= e^{i(n-m)\theta}\int_0^\infty dk\delta(k-\chi)\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i\vartheta(\frac{m+n}{2}-p)}.
\end{aligned}$$

$$V_{mn}(\theta,p) = \frac{1}{(2\pi)^2} e^{i(n-m)\theta} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i\vartheta(\frac{m+n}{2}-p)}, \tag{C.7}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{i(n-m)\theta} sinc\left[\pi\left(p - \frac{m+n}{2}\right)\right]. \tag{C.8}$$

C.1. Propiedades de la matriz de Wigner-Moyal

Probemos que la matriz $V(\theta, p\,(V_{mn}(\theta,p))$ cumple las siguientes propiedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp V_{mn}(\theta,p)) = \frac{1}{2\pi} e^{i(n-m)\theta},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta V_{mn}(\theta,p) = Sinc(\pi(p-m))\delta_{mn},$$

$$\int_{\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp V_{mn}(\theta,p) = \delta_{nm},$$

$$Tr(V_{mn}(\theta,p)) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} Sinc(\pi(p-n)) = \frac{1}{2\pi},$$

$$\int_{\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp V_{kl}(\theta,p) V_{mn}(\theta,p) = \frac{1}{2\pi} \delta_{kn}\delta_{lm}.$$

Prueba:

1)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dp V_{mn}(\theta,p)) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \left(\frac{1}{2\pi} e^{i(n-m)\theta} sinc\left[\pi\left(p - \frac{m+n}{2}\right)\right]\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{i(n-m)\theta} \cancel{\int_{-\infty}^{\infty} dp(sinc\left[\pi\left(p - \frac{m+n}{2}\right)\right]}^{=1}, \quad Ec.(3{,}37) \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{i(n-m)\theta}.
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} d\theta V_{mn}(\theta,p) &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left(\frac{1}{2\pi} e^{i(n-m)\theta} sinc\left[\pi\left(p - \frac{m+n}{2}\right)\right]\right), \\
&= \frac{sinc\left[\pi\left(p - \frac{m+n}{2}\right)\right]}{2\pi} \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{i(n-m)\theta}}\, 2\pi\delta_{mn}, \\
&= sinc\left[\pi\left(p-m\right)\right]\delta_{mn}.
\end{aligned}$$

3)

$$
\begin{aligned}
\int_{\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp V_{mn}(\theta, p) &= \int_{\pi}^{\pi} d\theta \left(\int_{-\infty}^{\infty} dp V_{m,n}(\theta, p) \right), \\
&= \int_{\pi}^{\pi} d\theta \frac{1}{2\pi} e^{i(n-m)\theta}, \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} d\theta e^{i(n-m)\theta}, \\
&= \frac{1}{2\pi} 2\pi \delta_{mn}, \\
&= \delta_{nm} .
\end{aligned}
$$

4)

$$
\begin{aligned}
Tr(V_{mn}(\theta, p)) &= Tr\left(\frac{1}{2\pi} e^{i(n-m)\theta} sinc \left[\pi \left(p - \frac{m+n}{2} \right) \right] \right), \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n} e^{i(n-n)\theta} \left[\pi \left(p - n \right) \right], \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n} sinc \left[\pi \left(p - n \right) \right], \\
&= \frac{1}{2\pi} .
\end{aligned}
$$

5)

$$
\begin{aligned}
\int_{\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp V_{kl}(\theta, p) V_{mn}(\theta, p) &= \int_{\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp \left(\frac{1}{2\pi} e^{i(l-k)\theta} sinc \left[\pi \left(p - \frac{k+l}{2} \right) \right] \right), \\
&\quad \times \left(\frac{1}{2\pi} e^{i(n-m)\theta} sinc \left[\pi \left(p - \frac{m+n}{2} \right) \right] \right), \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp \, e^{i(l-k)\theta} e^{i(n-m)\theta} \\
&\quad \times \ sinc \left[\pi \left(p - \frac{k+l}{2} \right) \right] \ sinc \left[\pi \left(p - \frac{m+n}{2} \right) \right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp V_{kl}(\theta,p)V_{mn}(\theta,p) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{i(l-k)\theta} e^{i(n-m)\theta} \\
&\quad \times \ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i\vartheta(\frac{k+l}{2}-p)} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta'\, e^{i\vartheta'(\frac{m+n}{2}-p)}, \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{\pi}^{\pi} d\theta\, e^{i(l-k+n-m)\theta} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i\vartheta(\frac{k+l}{2})} \\
&\quad \times \ \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta'\, e^{i\vartheta'(\frac{m+n}{2})} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-i\,p(\vartheta+\vartheta')}, \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{\pi}^{\pi} d\theta\, e^{i(l-k+n-m)\theta} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i\vartheta(\frac{k+l}{2})} \\
&\quad \times \ \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta'\, e^{i\vartheta'(\frac{m+n}{2})} \left(2\pi\delta(\vartheta+\vartheta')\right), \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\pi}^{\pi} d\theta\, e^{i(l-k+n-m)\theta} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i\vartheta(\frac{k+l}{2})} \\
&\quad \times \ e^{-i\vartheta(\frac{m+n}{2})}, \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\pi}^{\pi} d\theta\, e^{i(l-k+n-m)\theta} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i\vartheta(\frac{k+l}{2}-\frac{m+n}{2})}, \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\pi}^{\pi} d\theta\, e^{i(k-n)\theta} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i\vartheta(l-m)}, \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}(2\pi\delta_{kn})(2\pi\delta_{lm}), \\
&= \frac{1}{2\pi}\delta_{kn}\delta_{lm}\,.
\end{aligned}
$$

Apéndice D

Función de Moyal

Probemos:

$$V_{\psi_2\psi_1}(\theta, p) = c_m^{(2)*} V_{mn}(\theta, p) c_n^{(1)}, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

$$V_{\psi_2\psi_1}(\theta, p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{-ip\vartheta} \psi_2^*(\theta - \vartheta/2) \psi_1(\theta + \vartheta/2).$$

$$V_{\psi_2\psi_1}(\theta, p) = (\psi_2, V(\theta, p)\psi_1).$$

Prueba: 1)

$$V_{mn}(\theta, p) = \frac{1}{2\pi} e^{i(n-m)\theta} sinc\left[\pi\left(p - \frac{m+n}{2}\right)\right],$$

tomamos:

$$\psi_1(\theta) = e_n(\theta) = e^{in\theta},$$
$$\psi_2(\theta) = e_m(\theta) = e^{im\theta},$$

por lo que:

$$\begin{aligned} e^{i(n-m)\theta} &= e^{in\theta} e^{-im\theta}, \\ &= \psi_1(\theta)\psi_2^*(\theta). \end{aligned}$$

Sustituimos:

$$V_{mn}(\theta, p) = \frac{1}{2\pi} \psi_1(\theta)\psi_2^*(\theta)\, sinc\left[\pi\left(p - \frac{m+n}{2}\right)\right],$$

realizamos la expansión:

$$\psi_j(\varphi) = c_n^{(j)} e_n(\varphi), \qquad j = 1, 2; \qquad C_n^{(j)} = (e_n, \psi_j) \quad n \in \mathbb{Z},$$

así tenemos:

$$
\begin{aligned}
V_{mn}(\theta,p) &= \frac{1}{2\pi}\sum_n c_n^{(1)} e_n(\theta)\sum_m c_m^{*(2)} e_m^*(\theta)\, sinc\left[\pi\left(p-\frac{m+n}{2}\right)\right],\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{mn} c_m^{*(2)} c_n^{(1)} e^{in\theta} e^{-im\theta}\, sinc\left[\pi\left(p-\frac{m+n}{2}\right)\right],\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{mn} c_m^{*(2)} e^{i(n-m)\theta}\, sinc\left[\pi\left(p-\frac{m+n}{2}\right)\right] c_n^{(1)},\\
&= \sum_{mn} c_m^{*(2)} V_{mn}(\theta,p) c_n^{(1)}\,.
\end{aligned}
$$

Ahora tomemos que:

$$
C_n^{(j)} = (e_n,\psi_j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\beta e^{-in\beta}\psi_j(\beta),
$$

así tenemos:

$$
\begin{aligned}
V_{mn}(\theta,p) &= \sum_{mn}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\beta e^{-im\beta}\psi_2(\beta)\right)^* V_{mn}(\theta,p)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\beta' e^{-in\beta'}\psi_1(\beta')\right),\\
&= \sum_{mn}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\beta e^{-im\beta}\psi_2(\beta)\right)^*\left(\frac{1}{(2\pi)^2} e^{i(n-m)\theta}\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{i\vartheta(\frac{m+n}{2}-p)}\right)\\
&\quad\times\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\beta' e^{-in\beta'}\psi_1(\beta')\right),\\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{mn}\int_{-\pi}^{\pi} d\beta\,\psi_2^*(\beta)\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta\int_{-\pi}^{\pi} d\beta'\psi_1(\beta')\, e^{im\beta} e^{i(n-m)\theta} e^{i\vartheta(\frac{m+n}{2}-p)}\, e^{-in\beta'},\\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{mn}\int_{-\pi}^{\pi} d\beta\,\psi_2^*(\beta)\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta\int_{-\pi}^{\pi} d\beta'\psi_1(\beta')\, e^{im(\beta-\theta+\frac{\vartheta}{2})} e^{in(\theta+\frac{\vartheta}{2}-\beta')}\, e^{-ip\vartheta},\\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\pi}^{\pi} d\beta\,\psi_2^*(\beta)\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta\; e^{-ip\vartheta}\int_{-\pi}^{\pi} d\beta'\psi_1(\beta')\sum_m e^{im(\beta-\theta+\frac{\vartheta}{2})}\sum_n e^{in(\theta+\frac{\vartheta}{2}-\beta')},\\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\pi}^{\pi} d\beta\,\psi_2^*(\beta)\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta\; e^{-ip\vartheta}\int_{-\pi}^{\pi} d\beta'\psi_1(\beta')\, 2\pi\delta(\beta-\theta+\frac{\vartheta}{2}) 2\pi\delta(\theta+\frac{\vartheta}{2}-\beta'),\\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta\; e^{-ip\vartheta}\int_{-\pi}^{\pi} d\beta\,\psi_2^*(\beta)\;\delta(\beta-\theta+\frac{\vartheta}{2})\int_{-\pi}^{\pi} d\beta'\psi_1(\beta')\delta(\theta+\frac{\vartheta}{2}-\beta'),\\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta\; e^{-ip\vartheta}\,\psi_2^*(\theta-\frac{\vartheta}{2})\int_{-\pi}^{\pi} d\beta'\psi_1(\beta')\delta(\beta'-\theta-\frac{\vartheta}{2}),\\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta\; e^{-ip\vartheta}\,\psi_2^*(\theta-\frac{\vartheta}{2})\psi_1(\theta+\frac{\vartheta}{2})\,.
\end{aligned}
$$

La última ecuación es la definición.

D.1. Propiedades de la función de Moyal

Probemos lo siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp V_{\psi_2\psi_1}(\theta,p) = \frac{1}{2\pi}\psi_2^*(\theta)\psi_1(\theta),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta V_{\psi_2\psi_1}(\theta,p) = C_m^{(2)*} sinc(\pi(p-m))C_m^{(1)}. \quad m\in\mathbb{Z},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp V_{\psi_2\psi_1}(\theta,p) = (\psi_2,\psi_1),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp V^*_{\psi_2\psi_1}(\theta,p) V_{\phi_2\phi_1}(\theta,p)) = \frac{1}{2\pi}(\psi_1,\phi_1)(\psi_2,\phi_2)^*.$$

Prueba:

1)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dp V_{\psi_2\psi_1}(\theta,p) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \left(\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta\; e^{-ip\vartheta}\,\psi_2^*(\theta-\frac{\vartheta}{2})\psi_1(\theta+\frac{\vartheta}{2})\right)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta\;\; \psi_2^*(\theta-\frac{\vartheta}{2})\psi_1(\theta+\frac{\vartheta}{2})\int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-ip\vartheta},\\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta\;\; \psi_2^*(\theta-\frac{\vartheta}{2})\psi_1(\theta+\frac{\vartheta}{2})2\pi\delta(\vartheta),\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta\;\; \psi_2^*(\theta-\frac{\vartheta}{2})\psi_1(\theta+\frac{\vartheta}{2})\delta(\vartheta),\\ &= \frac{1}{2\pi}\psi_2^*(\theta)\psi_1(\theta)\,.\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta V_{\psi_2\psi_1}(\theta,p) &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left(\sum_{mn} c_m^{*(2)} V_{mn}(\theta,p) c_n^{(1)}\right),\\ &= \sum_{mn} c_m^{*(2)}\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta V_{mn}(\theta,p)\right) c_n^{(1)}, \quad Ec.(3{,}30),\\ &= \sum_{m} c_m^{*(2)} sinc(\pi(p-m)) c_m^{(1)},\\ &= C_m^{(2)*} sinc(\pi(p-m)) C_m^{(1)}.\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp V_{\psi_2\psi_1}(\theta,p) &= \int_{\pi}^{\pi} d\theta \left[\int_{-\infty}^{\infty} dp V_{\psi_2\psi_1}(\theta,p)\right], \\
&= \int_{\pi}^{\pi} d\theta \left[\psi_2^*(\theta)\psi_1(\theta)\right], \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} d\theta \left[\psi_2^*(\theta)\psi_1(\theta)\right], \quad \textit{utilizamos } 1), \\
&= (\psi_2, \psi_1)\,.
\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp V^*_{\psi_2\psi_1}(\theta,p) V_{\phi_2\phi_1}(\theta,p) &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp \left(\sum_{mn} c_m^{*(2)} V_{mn}(\theta,p) c_n^{(1)}\right)^* \\
&\qquad \times \sum_{kl} c_k^{*(2)} V_{kl}(\theta,p) c_l^{(1)}, \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp \sum_{mn} c_m^{(2)} V^*_{mn}(\theta,p) c_n^{*(1)} \\
&\qquad \times \sum_{kl} c_k^{*(2)} V_{kl}(\theta,p) c_l^{(1)}, \\
&= \sum_{mnkl} c_k^{*(2)} c_l^{(1)} c_m^{(2)} c_n^{*(1)} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp V^*_{mn}(\theta,p) V_{kl}(\theta,p), \\
&= \sum_{mnkl} c_k^{*(2)} c_l^{(1)} c_m^{(2)} c_n^{*(1)} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp V_{nm}(\theta,p) V_{kl}(\theta,p), \\
&= \sum_{mnkl} c_k^{*(2)} c_l^{(1)} c_m^{(2)} c_n^{*(1)} (\frac{1}{2\pi}\delta_{nl}\delta mk), \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{mn} c_m^{*(2)} c_n^{(1)} c_m^{(2)} c_n^{*(1)},
\end{aligned}$$

utilizamos:

$$C_n^{(j)} = (e_n, \psi_j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\beta e^{-in\beta}\psi_j(\beta),$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp V^*_{\psi_2\psi_1}(\theta,p) V_{\phi_2\phi_1}(\theta,p) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{mn}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\beta e^{-im\beta}\phi_2(\beta)\right)^* \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\beta' e^{-in\beta'}\phi_1(\beta')\right) \\
&\qquad \times \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\mu e^{-im\mu}\psi_2(\mu)\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\mu' e^{-in\mu'}\psi_1(\mu')\right)^*, \\
&= \frac{1}{(2\pi)^5}\sum_{mn}\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\beta e^{im\beta}\phi_2^*(\beta)\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\beta' e^{-in\beta'}\phi_1(\beta')\right) \\
&\qquad \times \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\mu e^{-im\mu}\psi_2(\mu)\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\mu' e^{in\mu'}\psi_1^*(\mu')\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp V^*_{\psi_2\psi_1}(\theta,p) V_{\phi_2\phi_1}(\theta,p) = \frac{1}{(2\pi)^5} \sum_{mn} \int_{-\pi}^{\pi} d\beta\, \phi_2^*(\beta) \int_{-\pi}^{\pi} d\beta'\, \phi_1(\beta') \int_{-\pi}^{\pi} d\mu\, \psi_2(\mu) \\
\times \int_{-\pi}^{\pi} d\mu'\, \psi_1^*(\mu')\, e^{im\beta}\, e^{-in\beta'}\, e^{-im\mu}\, e^{in\mu'}, \\
= \frac{1}{(2\pi)^5} \int_{-\pi}^{\pi} d\beta\, \phi_2^*(\beta) \int_{-\pi}^{\pi} d\beta'\, \phi_1(\beta') \int_{-\pi}^{\pi} d\mu\, \psi_2(\mu) \\
\times \int_{-\pi}^{\pi} d\mu'\, \psi_1^*(\mu') \sum_m e^{im(\beta-\mu)} \sum_n e^{in(\mu'-\beta')}, \\
= \frac{1}{(2\pi)^5} \int_{-\pi}^{\pi} d\beta\, \phi_2^*(\beta) \int_{-\pi}^{\pi} d\beta'\, \phi_1(\beta') \int_{-\pi}^{\pi} d\mu\, \psi_2(\mu) \\
\times \int_{-\pi}^{\pi} d\mu'\, \psi_1^*(\mu')\, \left(2\pi\delta(\beta-\mu)\right) \left(2\pi\delta(\mu'-\beta')\right), \\
= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} d\mu\, \psi_2(\mu) \int_{-\pi}^{\pi} d\beta\, \phi_2^*(\beta)\delta(\beta-\mu) \int_{-\pi}^{\pi} d\beta'\, \phi_1(\beta') \\
\times \int_{-\pi}^{\pi} d\mu'\, \psi_1^*(\mu')\, \delta(\mu'-\beta'), \\
= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} d\mu\, \psi_2(\mu)\phi_2^*(\mu) \int_{-\pi}^{\pi} d\beta'\, \phi_1(\beta')\, \psi_1^*(\beta'), \\
= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\mu\, \phi_2^*(\mu)\psi_2(\mu) \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\beta'\, \psi_1^*(\beta')\, \phi_1(\beta') \right), \\
= \frac{1}{2\pi} (\phi_2, \psi_2)\, (\psi_1, \phi_1)\,, \\
= \frac{1}{2\pi}\, (\psi_1, \phi_1)\, (\psi_2, \phi_2)^*\,.
\end{aligned}$$

Apéndice E

Propiedades de la función de Wigner

Probemos que la función de Wigner satisface:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp V_{\psi}(\theta, p) = \frac{1}{2\pi}|\psi(\theta)|^2,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta V_{\psi}(\theta, p) = |c_m|^2 sinc(\pi(p-m)) \equiv \omega_{\psi}(p). \quad m \in \mathbb{Z},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp \omega_{\psi}(p) sinc(\pi(p-m)) = |C_m|^2.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta V_{\psi}(\theta, p) = \sum_n |c_n|^2 = 1.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp V_{\psi_2}(\theta, p) V_{\psi_1}(\theta, p)) = \frac{1}{2\pi}|(\psi_2, \psi_1)|^2.$$

Prueba:
1)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dp V_{\psi}(\theta, p) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta e^{-ip\vartheta} \psi^*(\theta - \vartheta/2)\psi(\theta + \vartheta/2), \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \psi^*(\theta - \vartheta/2)\psi(\theta + \vartheta/2) \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-ip\vartheta}, \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \psi^*(\theta - \vartheta/2)\psi(\theta + \vartheta/2) 2\pi\delta(\vartheta), \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \psi^*(\theta - \vartheta/2)\psi(\theta + \vartheta/2)\delta(\vartheta), \\
&= \frac{1}{2\pi}\psi^*(\theta)\psi(\theta), \\
&= \frac{1}{2\pi}|\psi(\theta)|^2.
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta V_{\psi}(\theta,p) &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, c_m^* V_{mn}(\theta,p) c_n,\\ &= c_m^* c_n \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, V_{mn}(\theta,p)\\ &= c_m^* c_n\, sinc[\pi(p-m)]\delta_{mn},\\ &= c_m^* c_m\, sinc[\pi(p-m)],\\ &= |C_m|^2 sinc(\pi(p-m)) \equiv \omega_{\psi}(p).\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dp\omega_{\psi}(p) sinc(\pi(p-m)) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp |c_n|^2\, sinc(\pi(p-n)) sinc(\pi(p-m)),\\ &= |c_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp\, sinc(\pi(p-n)) sinc(\pi(p-m)),\\ &= |c_n|^2 \delta_{mn},\\ &= |c_m|^2\,.\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta V_{\psi}(\theta,p) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta V_{\psi}(\theta,p) \right),\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \left(|C_m|^2 sinc(\pi(p-m)) \right),\\ &= |C_m|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp\, sinc(\pi(p-m)),\\ &= \sum_n |c_m|^2 = 1\,.\end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp V_{\psi_2}(\theta,p) V_{\psi_1}(\theta,p) &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp (c_m^{*(2)} V_{mn}(\theta,p) c_n^{(2)})(c_k^{*(1)} V_{kl}(\theta,p) c_l^{(1)}),\\ &= c_m^{*(2)} c_n^{(2)} c_k^{*(1)} c_l^{(1)} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp V_{mn}(\theta,p) V_{kl}(\theta,p),\\ &= c_m^{*(2)} c_n^{(2)} c_k^{*(1)} c_l^{(1)} \left(\frac{1}{2\pi} \delta_{ml} \delta_{nk} \right),\\ &= \frac{1}{2\pi} c_m^{*(2)} c_n^{(2)} c_m^{(1)} c_n^{*(1)},\end{aligned}$$

utilizamos:

$$C_n^{(j)} = (e_n, \psi_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\beta e^{-in\beta} \psi_j(\beta),$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp V_{\psi_2}(\theta,p) V_{\psi_1}(\theta,p) &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\beta e^{-im\beta}\psi_2(\beta)\right)^* \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\beta' e^{-in\beta'}\psi_2(\beta')\right) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\mu e^{-im\mu}\psi_1(\mu)\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\mu' e^{-in\mu'}\psi_1(\mu')\right)^*, \\
&= \frac{1}{(2\pi)^5}\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\beta e^{im\beta}\psi_2^*(\beta)\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\beta' e^{-in\beta'}\psi_2(\beta')\right) \\
&\quad \times \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\mu e^{-im\mu}\psi_1(\mu)\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\mu' e^{in\mu'}\psi_1^*(\mu')\right), \\
&= \frac{1}{(2\pi)^5}\int_{-\pi}^{\pi} d\beta\, \psi_2^*(\beta)\int_{-\pi}^{\pi} d\mu\, \psi_1(\mu)\int_{-\pi}^{\pi} d\beta'\, \psi_2(\beta') \\
&\quad \times \int_{-\pi}^{\pi} d\mu' \psi_1^*(\mu') e^{im\beta} e^{-in\beta'} e^{-im\mu} e^{in\mu'}, \\
&= \frac{1}{(2\pi)^5}\int_{-\pi}^{\pi} d\beta\, \psi_2^*(\beta)\int_{-\pi}^{\pi} d\mu\, \psi_1(\mu)\int_{-\pi}^{\pi} d\beta'\, \psi_2(\beta') \\
&\quad \times \int_{-\pi}^{\pi} d\mu' \psi_1^*(\mu') e^{im(\beta-\mu)} e^{in(\mu'-\beta')}, \\
&= \frac{1}{(2\pi)^5}\int_{-\pi}^{\pi} d\beta\, \psi_2^*(\beta)\int_{-\pi}^{\pi} d\mu\, \psi_1(\mu)\int_{-\pi}^{\pi} d\beta'\, \psi_2(\beta') \\
&\quad \times \int_{-\pi}^{\pi} d\mu' \psi_1^*(\mu')(2\pi\delta(\beta-\mu))(2\pi\delta(\mu'-\beta')), \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\pi}^{\pi} d\mu\, \psi_1(\mu)\int_{-\pi}^{\pi} d\beta\, \psi_2^*(\beta)\delta(\beta-\mu))\int_{-\pi}^{\pi} d\beta'\, \psi_2(\beta') \\
&\quad \times \int_{-\pi}^{\pi} d\mu' \psi_1^*(\mu')\delta(\mu'-\beta')), \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\pi}^{\pi} d\mu\, \psi_1(\mu)\, \psi_2^*(\mu)\int_{-\pi}^{\pi} d\beta'\, \psi_2(\beta')\psi_1^*(\beta')), \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\mu\, \psi_2^*(\mu)\psi_1(\mu)\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\beta'\, \psi_1^*(\beta')\psi_2(\beta')\right), \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\psi_2,\psi_1\right)\left(\psi_1,\psi_2\right), \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\psi_2,\psi_1\right)\left(\psi_2,\psi_1\right)^*, \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|(\psi_2,\psi_1)\right|^2 .
\end{aligned}
$$

Bibliografía

Bibliografía

[1] Sakurai, J. J., and Commins. *Modern quantum mechanics, revised edition*. (1995)

[2] Groenewold, H. J., and Groenewold, H. J. *On the principles of elementary quantum mechanics*, Springer Netherlands, (pp. 1-56),(1946).

[3] Moyal, J. E., *Quantum mechanics as a statistical theory*, In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (Vol. 45, No. 1, pp. 99-124).

[4] Bayen, F., Flato, M., Fronsdal, C., Lichnerowicz, A., and Sternheimer, D., *Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures.*, Annals of Physics, 111(1), 61-110, (1978).

[5] Bayen, F., Flato, M., Fronsdal, C., Lichnerowicz, A., and Sternheimer, D., *Deformation theory and quantization*, II. Physical applications. Annals of Physics, 111(1), 111-151,(1978).

[6] Kontsevich, M., *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Letters in Mathematical Physics, 66, 157-216, (2003).

[7] Reichert, T., *Characteristic classes of star products on Marsden–Weinstein reduced symplectic manifolds*, Letters in Mathematical Physics, 107, 643-658, (2017).

[8] Waldmann, S., *Recent developments in deformation quantization*, Quantum mathematical physics: A bridge between mathematics and physics, 421-439.(2016).

[9] A Concise Treatise on Quantum Mechanics in Phase Space (Singapore: World Scientific)

[10] Berra-Montiel, J., and Molgado, A., *Polymer quantum mechanics as a deformation quantization*, Classical and Quantum Gravity, 36(2), (2018).

[11] Berra-Montiel, J., *The Polymer representation for the scalar field: a Wigner functional approach*, Classical and Quantum Gravity, 37(2),(2019)

[12] Antonsen, F., *Deformation quantisation of constrained systems*. arXiv preprint gr-qc/9710021.(1997).

[13] Batalin, I. A. E., Grigoriev, M. A. E., and Lyakhovich, S. L., *Star product for second-class constraint systems from a BRST theory*, Theoretical and Mathematical Physics, 1109-1139, (2001)

[14] Hori, T., Koikawa, T., and Maki, T., *Moyal quantization for constrained system*, Progress of theoretical physics, 1123-1141, (2002).

[15] Kastrup, H. A., *Wigner functions for the pair angle and orbital angular momentum*, Physical Review A, 94(6), (2016).

[16] Fewster, C. J., and Sahlmann, H., *Phase space quantization and loop quantum cosmology: a Wigner function for the Bohr-compactified real line*. Classical and Quantum Gravity, 25(22), (2008).

[17] Morales-Técotl, H. A., Rivera, M., Turrubiates, F. J., and Villa, K. *Wigner function for polymer particle and Galileo relativity*. Annals of Physics, 452, (2023).

[18] Berra-Montiel J. and Molgado A. *Tomography in Loop Quantum Cosmology*. Eur. Phys. J. Plus, 137, (2022).

[19] Carlip, S. (2019), *General relativity: a concise introduction*, Oxford University Press.

[20] Plebanski, J., & Krasinski, A. (2006), *An introduction to general relativity and cosmology*, Cambridge University Press.

[21] Hoyng, Peter, 2006, *Relativistic astrophysics and cosmology: A primer*, Springer Science & Business Media

[22] Dodelson, S., & Schmidt, F. (2020), *Modern cosmology*, Academic press.

[23] Ashtekar, A., & Bianchi, E. (2021), *A short review of loop quantum gravity*, Reports on Progress in Physics, 84(4), 042001.

[24] Wigner, E. *On the quantum correction for thermodynamic equilibrium*, Physical review, 40(5), 749, (1932).

[25] Weyl, H. (1950), *The theory of groups and quantum mechanics*. Courier Corporation.p.275

[26] Case, William B, *Wigner functions and Weyl transforms for pedestrians*, American Journal of Physics, American Association of Physics Teachers 937–946, 2008.

[27] Kastrup H. A., *Quantization of the canonically conjugate pair angle and orbital angular momentum*, Phys. Rev. A 73, 052104 (2006).

[28] H. Romer, *Theoretical Optics: An Introduction*, 2nd ed. (Wiley-VCH, Weinheim, 2009).

[29] Ashtekar, A., Pawlowski, T., & Singh, P. *Quantum nature of the big bang: Improved dynamics*. Phys. Rev. D74(8), 084003(2006).

[30] Perez, A., *Regularization ambiguities in loop quantum gravity.*, Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology, 73(4), 044007 (2006).

[31] Ashtekar, A., Corichi, A., & Singh, P. *Robustness of key features of loop quantum cosmology.* Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology, 77(2), 024046 (2008).

[32] Dzierżak, P., Małkiewicz, P., & Piechocki, W. *Turning big bang into big bounce. I. Classical dynamics.* Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology, 80(10), 104001 (2009).

[33] Dirac, P. A. M. *Generalized hamiltonian dynamics.* Canadian journal of mathematics, 2, 129-148, (1950).

[34] Gazeau, J. P., Mielczarek, J., & Piechocki, W. *Quantum states of the bouncing universe.* Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology, 87(12), 123508 (2013).