



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Aplicación y comparación del Movimiento Browniano Geométrico y el Modelo de Difusión de Saltos, utilizando los datos de The Walt Disney Company y Pfizer, Inc.

Tesis presentada a la

Academia de Actuaría

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN ACTUARÍA

por

David Palma Chino

Asesorado por

Dr. Hugo Adán Cruz Suárez

Puebla Pue.
Septiembre de 2023



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Aplicación y comparación del Movimiento Browniano Geométrico y el Modelo de Difusión de Saltos, utilizando los datos de The Walt Disney Company y Pfizer, Inc.

Tesis presentada a la

Academia de Actuaría

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN ACTUARÍA

por

David Palma Chino

Asesorado por

Dr. Hugo Adán Cruz Suárez

Puebla Pue.
Septiembre de 2023

Título: Aplicación y comparación del Movimiento Browniano Geométrico y el Modelo de Difusión de Saltos, utilizando los datos de The Walt Disney Company y Pfizer, Inc.
Estudiante: DAVID PALMA CHINO

COMITÉ

Dr. Ortega Gutiérrez Rei Israel
Presidente

Dr. Blancas Rivera Rubén
Secretario

Mtra. Mercado Ortiz Rosalba
Vocal

Dr. Hugo Adán Cruz Suárez
Asesor

Agradecimientos

Quiero comenzar agradeciendo a mi madre, por su apoyo, amor y consejos.

Agradezco infinitamente a Luz Angélica (ma Lumière) por siempre apoyarme, escucharme y motivarme en cada cosa que hago. Sin ella, no habría terminado la Licenciatura.

Gracias a mis profesores, que me compartieron sus conocimientos a lo largo de mi estancia en la Universidad.

Y mi reconocimiento y agradecimiento al Dr. Hugo Adán Cruz Suárez, por su apoyo, guía y asesoramiento a lo largo de la elaboración del presente trabajo. Y por la manera en que imparte sus cursos, muchas gracias.

Índice general

Introducción	XIII
1. Preliminares	1
1.1. Procesos Estocásticos	1
1.1.1. Tipos de Procesos Estocásticos	1
1.1.2. Distribución Finito Dimensional	2
1.2. Cadenas de Markov	2
1.3. Proceso Poisson	3
1.4. Proceso Poisson Compuesto	5
1.5. Movimiento Browniano	5
1.6. Máxima Verosimilitud	6
2. Movimiento Browniano Geométrico	9
2.1. Desarrollo del Modelo	9
2.2. Valor Esperado y Varianza del GBM	11
2.3. Simulación del GBM	11
2.4. Estimación de los Parámetros del Modelo	14
3. Modelo de Difusión de Saltos	19
3.1. Desarrollo del Modelo	19
3.2. Discretización del Modelo	20
3.3. Simulación del Modelo JDM	21
4. Aplicación de los Modelos	25
4.1. Obtención de los Datos	25
4.1.1. PFIZER, Inc.	25
4.1.2. The Walt Disney Company	26
4.2. Análisis de los Precios Históricos	26
4.3. Rendimientos	28
4.3.1. Pruebas de Normalidad	30
4.4. Aplicación del GBM	31
4.4.1. GBM Aplicado en Disney	32
4.4.2. GBM Aplicado en Pfizer	35
4.5. Aplicación del JDM	38
4.5.1. JDM Aplicado en Disney	38
4.5.2. JDM Aplicado en Pfizer.	40
Conclusión	46
A. Código para simular el Movimiento Browniano Geométrico	49

B. Código para simular el Modelo de Difusión de Saltos	51
C. Código para descargar los datos de Yahoo Finance	53
D. Código para aplicar el MGB a Disney	55
E. Código para aplicar el MGB a Pfizer	57
F. Código para aplicar el JDM a Pfizer	59
Bibliografía	61

Índice de figuras

1.1. Simulación del Proceso de Wiener en R	6
2.1. Matriz de las trayectorias de la simulación del GBM	13
2.2. Simulación del GBM	14
3.1. Matriz de las trayectorias de la simulación del JDM	23
3.2. Gráfica de las trayectorias de la simulación del JDM	24
4.1. Comportamiento del precio de cierre de Pfizer.	26
4.2. Comportamiento del precio de cierre de Disney.	27
4.3. Rendimientos de Pfizer.	29
4.4. Rendimientos de Disney.	30
4.5. Histograma de los rendimientos de Disney.	31
4.6. Histograma de los rendimientos de Pfizer.	32
4.7. Gráfica Cuantil-Cuantil de Pfizer.	33
4.8. Gráfica Cuantil-Cuantil de Disney.	33
4.9. Predicción de los precios de Disney.	34
4.10. Predicción de los precios de Disney vs Precios reales.	35
4.11. Diferencia entre los precios estimados y los precios reales.	36
4.12. Predicción de los precios de Pfizer.	37
4.13. Predicción de los precios de Pfizer vs Precios reales.	38
4.14. Diferencia entre los precios estimados y los precios reales de Pfizer.	39
4.15. Predicción de los precios de Disney (JDM).	40
4.16. Comparación del precio de Disney vs Precios simulados (JDM).	41
4.17. Comparación del precio de Disney vs Precios simulados (JDM).	42
4.18. Predicción de los precios de Pfizer (JDM).	43
4.19. Comparación del precio de Pfizer vs Precios simulados (JDM).	44
4.20. Comparación del precio de Pfizer vs Precios simulados (JDM).	45

Índice de tablas

1.1. Tipos de Procesos Estocásticos.	1
4.1. Resumen del precio de Pfizer.	27
4.2. Resumen del precio de Disney.	28
4.3. Resumen de los rendimientos	29
4.4. Resultados de la prueba de normalidad (Disney).	30
4.5. Resultados de la prueba de normalidad (Pfizer).	30
4.6. Parámetros para la simulación de DISNEY.	38
4.7. Parámetros para la simulación de PFIZER.	43

Introducción

Es muy común que nos aterre la incertidumbre. Es decir, todos aquellos eventos que no podemos saber con certeza, el "que" y "cuando" sucederán, ya sea un desastre natural, o algo más cotidiano como saber cuando perderá nuestro equipo favorito, o cuando el profe no revisará la tarea, etc. Pero cuando el hecho de que ocurran o no, estos eventos aleatorios, nos perjudicará económicamente hablando, nos causa más temor.

Un claro ejemplo de esto, es no saber cuando los precios de las acciones suben o bajan. Es un hecho que no podremos saberlo con exactitud. Pero si existen diversas técnicas que nos ayudan a tener información confiable sobre el probable comportamiento del activo. Lo que nos ayuda a poder tomar una mejor decisión.

Por ello, en el presente documento, se analizan e implementan, dos modelos que nos permiten simular las posibles trayectorias del comportamiento de un activo. Por lo cual, se desarrollan y se muestran la aplicación de dichos modelos.

Para la simulación se usa el lenguaje de programación *R*, y los códigos empleados se encuentran en la parte de anexos. Este lenguaje facilitará la presentación de gráficas y tablas que enriquecerán la explicación y comparación de los modelos.

Los modelos que se implementan son el Movimiento Browniano Geométrico (GBM) (Brigo, 2007) y el Modelo de Difusión de Saltos (JDM) (Brigo, 2007). Ambos, describen el comportamiento aleatorio del precio de un activo. Los dos modelos, parten de un Proceso de Wiener o Movimiento Browniano estándar. La diferencia radica, en que el JDM, al agregarle un Proceso de Poisson Compuesto, puede estimar de mejor manera los saltos, tanto a la baja, como a la alza, que presentan los activos. Por lo que dependiendo de la presencia de estos "saltos", en la información histórica de las acciones, alguno de los dos modelos puede ajustarse de mejor manera.

Las acciones que se escogieron para la implementación de los modelos, son las de Disney y Pfizer. Por un lado, Disney es una empresa consolidada, además de que todos hemos oído hablar de ella. En los últimos años ha mostrado un crecimiento, ya sea por innovar en la industria Cinematográfica o por la adquisición de otras grandes empresas como lo fue el caso de Fox y Marvel Estudios. Disney debutó en la Bolsa de Nueva York (NYSE) en mayo de 1991 a unos 10 dólares por acción. Tres décadas después, sus títulos cotizan a un precio de 110 dólares cada una (10 de febrero de 2023), lo que refleja el enorme crecimiento de este conglomerado a lo largo de su historia hasta alcanzar los 201 450 millones dólares de capitalización (Mora, C. C. ,2023).

Por otro lado, Pfizer Inc. es una compañía biofarmacéutica multinacional centrada en la investigación, desarrollo y fabricación de medicamentos y vacunas. La cual, fue sumamente relevante durante la pandemia de Covid-19, ya que su vacuna ayudó a salvar la vida de millones de personas. Lo que generó que sus acciones subieran, pero también presenta una volatilidad, además de cambios muy notables en periodos muy cortos de tiempo. Por lo que es una acción que nos

ayuda a la implementación del JDM.

"Si nos fijamos en sus datos históricos, en las cuentas anuales de la farmacéutica, podemos observar que los ingresos se dispararon de 2020 a 2021: 41 651 millones de dólares en 2020 a 81 288 millones de dólares en 2021", (Mora, C. C. ,2022).

Esta tesis se divide en 4 capítulos. El primer capítulo, son conceptos básicos de Procesos estocásticos y estadística, que son las bases para los capítulos 2 y 3, en los cuales se explica y desarrollan los dos modelos. En ambos modelos se explica la manera en que se realizan las simulaciones. En el último capítulo, se detallan las acciones elegidas para la implementación de los modelos, así como la obtención de los mismos. Se analizan los precios históricos de ambas acciones y se aplican pruebas de normalidad. Para finalmente implementar los modelos. Para la estimación de los parámetros de Modelo de Difusión de saltos, se utiliza como base el código extraído de la página Web <https://rdr.io/github/shill1729/FeynmanKacSolver/src/R/merton.R>. Mismo código que se encuentra en el apéndice F.

En la sección de apéndices se encuentran los códigos utilizados para la realización de las simulaciones.

Capítulo 1

Preliminares

El contenido de este capítulo se basa en los siguientes referencias: [7], [8], [11] y [16].

1.1. Procesos Estocásticos

Definición 1.1.1. Sea T un conjunto no vacío (denominado espacio tiempo) y (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. Un proceso estocástico es una función:

$$X : T \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que para cada $t \in T$, $X(t, \cdot)$ es una variable aleatoria que toma valores en un mismo espacio muestral Ω . Si fijamos $w \in \Omega$ obtenemos una función $X(\cdot, w): T \longrightarrow \mathbb{R}$ que se conoce como una trayectoria del proceso.

Se denomina espacio de estados del proceso S , al conjunto de todos los posibles valores de las variables aleatorias que componen el proceso.

1.1.1. Tipos de Procesos Estocásticos

Sean:

T : = Espacio tiempo, T un subconjunto no vacío.

S : = Espacio de estados: Posibles valores que puede tomar el proceso.

Entonces el tiempo T y el espacio de estados S pueden ser discretos o continuos. Por lo que son 4 tipos de procesos [11].

	T (discreto)	T (continuo)
S (discreto)	Proceso de estado discreto y tiempo discreto	Proceso de estado discreto y tiempo continuo
S (continuo)	Proceso de estado continuo y tiempo discreto	Proceso de estado continuo y tiempo continuo

Tabla 1.1: Tipos de Procesos Estocásticos.

Ejemplo 1.1.1. *Los siguientes enunciados son ejemplos de procesos estocásticos:*

- $X(t)$ puede ser el número unidades producidas cada mes.*
- $X(t)$ puede ser el número de pokemon variocolor atrapados en el tiempo t .*
- $X(t)$ puede ser el dinero recaudado en cada hora, para alguna fundación.*
- $X(t)$ el nivel de agua de una presa en el tiempo t .*

1.1.2. Distribución Finito Dimensional

Un proceso estocástico se encuentra caracterizado por su distribución finito dimensional, la cual se define para toda secuencia finita $t_1, t_2, \dots, t_k \in T$ y $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}$, como:

$$F_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = P[X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_k) \leq x_k]$$

También puede ser descrita vía su función de densidad (continuas) o de masa (discretas) conjuntas.

$$P_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = P[X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_k) = x_k]$$

Un proceso estocástico se describe especificando sus distribuciones finito-dimensionales, que permiten obtener la probabilidad de cualquier suceso involucrado en el proceso [11].

1.2. Cadenas de Markov

Definición 1.2.1. *Una cadena de Markov es un proceso estocástico a tiempo discreto $\{X(t) : t = 0, 1, 2, \dots\}$ con espacio de estados discretos, tal que para cualquier entero $t \geq 0$ y para cualquier estado $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{t-1}, x, y \in S$ se cumple que:*

$$P(X(t+1) = y \mid X(0) = x_0, X(1) = x_1, \dots, X(t-1) = x_{t-1}, X(t) = x) = P(X(t+1) = y \mid X(t) = x).$$

Donde

$$P(X(t+1) = y \mid X(t) = x) := p(x, y), \quad x, y \in S$$

es la probabilidad de que $X(t+1)$ este en el estado y , dado que $X(t)$ esta en el estado x , esta probabilidad es llamada la probabilidad de transición en un paso de x a y . La denotaremos como $p(x, y)$. Es decir, en este proceso estocástico la probabilidad del evento futuro X_{t+1} no depende de los eventos anteriores X_1, \dots, X_{t-1} y solamente depende del estado actual X_t [8].

Ejemplo 1.2.1. *Imaginemos que queremos modelar la cantidad existente de algún producto en una tienda departamental. Es decir, $\{X(t) : t = 0, 1, 2, \dots\}$ representa la cantidad existente de producto en la tienda en el instante t .*

Supongamos que la política de la empresa es que sólo se puede resurtir el producto cuando la cantidad existente sea 0. Por lo que nuestro espacio de estados sería $S = \{0, 1, 2, 3, \dots, Z\}$ donde Z representa la cantidad máxima que se puede tener del producto en la tienda.

Entonces, si quisieramos saber cual sería la cantidad del producto en el instante $t+1$, tendríamos la siguiente formula:

$$\begin{array}{lll} X(t+1) = X(t) - \epsilon_t & \text{si} & X(t) > 0, \\ X(t+1) = X(t) - \epsilon_t + Z & \text{si} & X(t) = 0. \end{array}$$

Donde ϵ_t es la demanda del producto en el instante t , la cual es una cantidad aleatoria, con $\{\epsilon_t\}$ independientes e idénticamente distribuidas.

Por lo tanto, la cantidad existente del producto en el instante $t + 1$ sólo depende de la cantidad en el instante inmediato anterior t .

El proceso $\{X(t) : t \geq 0\}$ corresponde a una cadena de Markov.

1.3. Proceso Poisson

Definición 1.3.1. Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{N(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados el conjunto discreto $\{0, 1, 2, \dots\}$, es un proceso de Poisson con parámetro $\lambda > 0$ si cumple las siguientes propiedades:

- a) $N(0) = 0$.
- b) Tiene incrementos independientes y estacionarios.
- c) $N(t + s) - N(s) \sim Poi(\lambda t)$ para cualesquiera $s \geq 0, t > 0$.

$\{N(t)\}$ representa el número de eventos de interés que han ocurrido hasta el instante t [8].

De esta manera $\{N(t)\}$ es considerado un proceso de conteo, el cual cumple las siguientes propiedades:

- a) $N(t) \geq 0$.
- b) $N(t)$ toma valores enteros.
- c) Si $s < t$ implica que $N(s) \leq N(t)$.
- d) Si $s < t$, entonces $N(s) - N(t)$ es igual al número de eventos que han ocurrido en el intervalo $(s, t]$.

Proposición 1.3.1. La variable $N(t)$ tiene una distribución Poisson con parámetro λt , es decir, para cualquier $t > 0$, y para toda $n \geq 0$ tenemos que:

$$P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Proposición 1.3.2. El proceso de Poisson $\{N(t) : t \geq 0\}$ satisface las siguientes propiedades:

- a) Es un proceso de Markov.
- b) Para cualesquiera $s, t \geq 0$ y enteros $k \geq j \geq 0$ se cumple que:

$$P(N(s + t) = k \mid N(s) = j) = P(N(t) = k - j)$$

La demostración de las proposiciones anteriores las podemos encontrar en [8].

Ejemplo 1.3.1. Supongamos que en un evento de pokemón go, te aparece un pokemón variocolor (shiny) de acuerdo a un proceso poisson $\{N(t) : t \geq 0\}$ con parámetro $\lambda = 2$.

Si el evento comienza a las 11:00:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que te haya aparecido un shiny antes de 11:30?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que hayas encontrado 5 pokémones variocolor a las 14:00 dado que a las 13:00 llevabas 2?

Solución:

- a)

Como estamos midiendo en horas, entonces a las 11:30 llevaríamos media hora, por lo que tenemos que calcular $P(N(\frac{1}{2}) = 1)$, es decir:

$$\begin{aligned} P\left(N\left(\frac{1}{2}\right) = 1\right) &= e^{-\lambda 0.5} \frac{(\lambda 0.5)^1}{1!} \\ &= e^{-2 * 0.5} \frac{(2 * 0.5)^1}{1!} \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

Po lo tanto, la probabilidad sería de 36.79%.

b)

Tenemos que calcular:

$$\begin{aligned} P(N(3) = 5 \mid N(2) = 2) &= P(N(2+1) = 5 \mid N(2) = 2) \\ &= P(N(1) = 3) \\ &= e^{-2*1} \frac{(2*1)^3}{3!} \\ &= 0.18045 \end{aligned}$$

Así, la probabilidad de haber encontrado 5 pokémones variocolor a las 14:00 dado que ya habíamos encontrado 2 a las 13:00 es de 18.045%.

1.4. Proceso Poisson Compuesto

Definición 1.4.1. Sea $\{N(t) : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson, y sea Y_1, Y_2, \dots una sucesión de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas e independientes del Proceso Poisson. Sea $Y_0 = 0$; el proceso de Poisson Compuesto se define de la siguiente forma:

$$X(t) = \sum_{n=0}^{N(t)} Y_n.$$

La variable $X(t)$ es una suma de variables aleatorias en donde el número de sumandos es aleatorio [8].

Ejemplo 1.4.1. Modelo Colectivo de Riesgo

Considere un conjunto de un número no determinado de contratos de seguros con vigencia en un periodo $[0, T]$.

Supongamos que el número de reclamaciones ocurridas en este intervalo siguen un proceso de Poisson $\{N(t) : t \geq 0\}$, y sean las variables positivas $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_N$ el monto de estas reclamaciones. Consideraremos que las reclamaciones y los montos son variables aleatorias independientes.

Entonces el monto agregado o el monto acumulado de todas las reclamaciones efectuadas es la variable aleatoria S , llamada riesgo y se define de la siguiente manera:

$$S = \sum_{n=0}^{N(t)} Y_n.$$

Notemos que cada sumando es una variable aleatoria y que el número de sumandos es también aleatorio [7].

Para poder profundizar sobre el Modelo Colectivo de Riesgo y sus aplicaciones, ver referencia [7].

1.5. Movimiento Browniano

El fenómeno natural que ahora se conoce como movimiento Browniano tiene una interesante historia. El primer registro, aunque no así la primera observación de él, data de 1828 cuando el botánico Robert Brown reportó en una revista científica que granos de polen suspendidos en una cierta substancia y vistos a través de un microscopio, realizaban un movimiento irregular e inexplicable. Este extraño movimiento fue objeto de mucha discusión y muy diversas controversias se suscitaron a partir de su divulgación en la comunidad científica de aquella época. Con la intención de dar una explicación satisfactoria del extraño fenómeno observado, se llevaron a cabo diversos experimentos y se formularon muy diversas hipótesis. Hoy en día este movimiento es entendido y explicado a través de las múltiples colisiones aleatorias de las moléculas del líquido con los granos de polen. Llegar a tal aseveración tomó muchos años pues debió aceptarse la teoría cinético molecular de la materia, y el seminal trabajo de Einstein de 1905 sobre este fenómeno contribuyó decididamente a tal tarea [8].

Definición 1.5.1. Un proceso estocástico $\{B(t) : t \geq 0\}$ es llamado un proceso de Wiener o movimiento Browniano con parámetro σ^2 , si se verifican las siguientes propiedades:

i) $B(0) = 0$ casi seguramente (c.s.)

ii) Las trayectorias son continuas.

iii) El proceso tiene incrementos independientes.

iv) Para cualesquiera tiempos $0 \leq s < t$, la variable incremento $B(t) - B(s)$ tiene distribución $N(0, \sigma^2(t - s))$.

Tenemos entonces que para el movimiento Browniano estándar, es decir cuando $\sigma^2 = 1$; cada variable aleatoria $B(t)$ tiene distribución $N(0, t)$ y por lo tanto $E[B(t)] = 0$ y la $Var(B(t)) = E[B(t)^2] = t$. En particular $E[B(t) - B(s)]^2 = t - s$ para $0 \leq s < t$.

En la figura 1.1 podemos observar la grafica de una simulación del proceso de Wiener generada en Rstudio. Para lo cual, se generará un vector W con n entradas, y la entrada inicial le asignamos el valor 0. Para la entrada 2, se hace uso de la función `rnorm()` para crear un valor aleatorio con distribución Normal, con media 0 y desviación h , la cual es el tamaño del intervalo deseado. Y para la entrada 3 en adelante, con ayuda de un ciclo FOR, realizamos lo siguiente:

$$W[i] = rnorm(1, 0, h) + W[i - 1].$$

Finalmente, graficamos el vector generado, obteniendo una grafica como la que aqui se muestra.

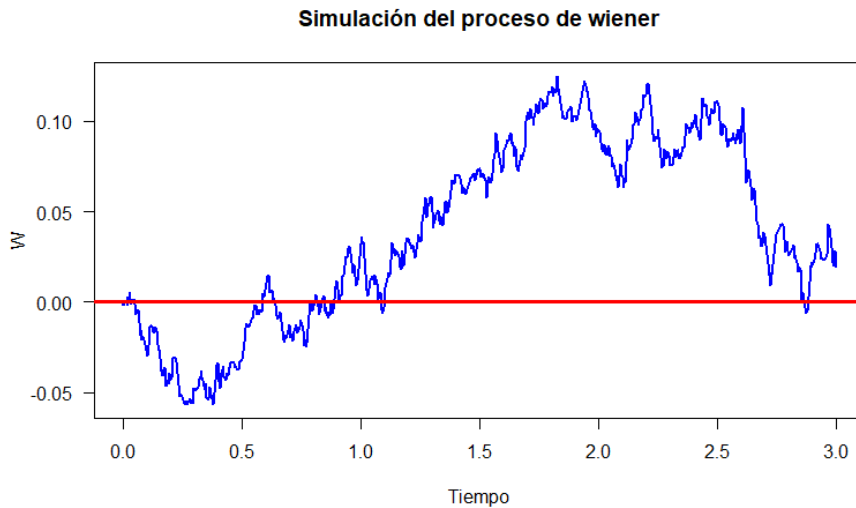


Figura 1.1: Simulación del Proceso de Wiener en R
Fuente: Elaboración propia

Proposición 1.5.1. Para cualquier $t > 0$, $B(t)$ tiene una distribución normal con esperanza 0 y varianza t

Es decir, el movimiento Browniano sigue una distribución Normal

1.6. Máxima Verosimilitud

Muchos procedimientos estadísticos suponen que los datos siguen algún tipo de modelo matemático que se define mediante una ecuación, en la que se desconoce alguno de sus parámetros, siendo éstos calculados o estimados a partir de la información obtenida en un muestreo bien

diseñado para tal fin. Existen diferentes procedimientos para estimar los coeficientes de un modelo de regresión, o para estimar los parámetros de una distribución de probabilidad. De entre esos procedimientos probablemente el más versátil, ya que se puede aplicar en gran cantidad de situaciones, y por ello uno de los más empleado se conoce con el nombre de "método de máxima verosimilitud" (en inglés "method of maximum likelihood").

Podemos considerar que el método de máxima verosimilitud, abreviado a menudo como MLE, tal y como hoy lo conocemos e interpretamos fue propuesto por Fisher, aunque ya de una forma mucho más artificiosa fue inicialmente atisbado por Bernoulli, cuyo planteamiento fue revisado y modificado por su coetáneo y amigo el gran matemático Euler.

Sin embargo, la resolución de los problemas numéricos planteados por este método en la mayor parte de los casos son de tal magnitud que no ha sido posible su amplia utilización hasta la llegada de los modernos ordenadores (Molinero Casares L. M. , 2003)

Definición 1.6.1. Sea X una variable aleatoria discreta con función de masa $f(x; \theta)$. Y sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria. Así su función de masa conjunta esta dada por:

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = f_{X_1}(x_1; \theta) \dots f_{X_n}(x_n; \theta).$$

La función de verosimilitud de la muestra se define como:

$$L(\theta) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n).$$

Donde θ es un vector conformado por un número finito de parámetros reales desconocidos $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \Theta \subset \mathbb{R}^n$, donde Θ es el espacio parametral o la región de valores posibles que puede tomar el vector de parámetros θ .

El método de máxima verosimilitud consiste en maximizar la función de verosimilitud ($L(\theta)$) con respecto al parámetro θ .

Ahora, definamos que es un estimador de máxima verosimilitud [16].

Definición 1.6.2. Un estimador de máxima verosimilitud lo denotamos por $\hat{\theta}_{MLE}$ y es un valor que satisface:

$$\hat{\theta}_{MLE} = \operatorname{argmax} L(\theta), \theta \in \Theta.$$

Donde θ denota el espacio parametral. Es decir, el espacio válido de búsqueda congruente con la definición del modelo.

Capítulo 2

Movimiento Browniano Geométrico

El Movimiento Browniano Geométrico (GBM por sus siglas en inglés) describe el comportamiento aleatorio del nivel de precios de los activos $S(t)$ durante el tiempo [1].

El desarrollo del modelo se sustenta en [1].

2.1. Desarrollo del Modelo

El GBM se especifica de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t). \\ S(0) &= S_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Donde:

$W(t)$ es un movimiento Browniano estándar.

$S(t)$ es el precio del activo en el tiempo t .

S_0 es el precio inicial del activo.

μ es la deriva o tendencia.

$\sigma > 0$ mide la volatilidad del precio.

Dado que es una ecuación diferencial estocástica con condición inicial podemos escribirla en forma integral.

$$\int_0^t dS(r) = \int_0^t \mu S(r)dr + \int_0^t \sigma S(r)dW(r). \quad (2.2)$$

O de manera equivalente:

$$S(t) - S(0) = \int_0^t \mu S(r)dr + \int_0^t \sigma S(r)dW(r). \quad (2.3)$$

Ahora, podemos aplicar el Lema de Itô [6]. Para este fin, primero considere:

$$X(t) = S(t)$$

$$f(t, X(t)) = f(t, S(t)) = \mu S(t)$$

$$g(t, X(t)) = g(t, S(t)) = \sigma S(t).$$

Y escogemos $F(t, x) = \ln(x)$.

Entonces calculamos las derivadas parciales:

$$F_1(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = 0,$$

$$F_2(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = \frac{1}{x},$$

$$F_{22}(t, x) = \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

De esta manera:

$$\begin{aligned} \ln(S(t)) - \ln(S_0) &= \int_0^t \left(\mu S(r) \frac{1}{S(r)} + \frac{1}{2} (\sigma S(r))^2 \left(\frac{-1}{(S(r))^2} \right) \right) dr + \int_0^t \sigma(S(r)) \frac{1}{S(r)} dW(r) \\ &= \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dr + \int_0^t \sigma dW(r) \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma (W(t) - W(0)). \end{aligned}$$

Dado que $W(t)$ es un movimiento Browniano, entonces $W(0) = 0$.

Por lo tanto, tenemos que:

$$\ln \left(\frac{S(t)}{S_0} \right) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t)$$

$$\left(\frac{S(t)}{S_0} \right) = \text{Exp} \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right)$$

$$S(t) = S_0 e^{((\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) t + \sigma W(t))}. \quad (2.4)$$

Recordemos que $W(t)$ tiene distribución $N(0, t)$, lo que implica que $(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) t + \sigma W(t)$ también tiene una distribución normal.

Por lo tanto, $S(t)$ tiene una distribución log-normal.

2.2. Valor Esperado y Varianza del GBM

Calculemos el valor esperado de $S(t)$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S(t)] &= \mathbb{E} \left[S_0 e^{((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t))} \right] \\ &= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \mathbb{E} \left[e^{\sigma W(t)} \right] \\ &= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} \\ &= S_0 e^{\mu t}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[S(t)] = S_0 e^{\mu t} [8].$$

Ahora, calculemos la varianza de $S(t)$:

$$\begin{aligned}\text{Var}(S(t)) &= \text{Var} \left(S_0 e^{((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t))} \right) \\ &= S_0^2 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)2t} \text{Var}(\sigma W(t)) \\ &= S_0^2 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)2t} \left[\mathbb{E}[e^{2\sigma W(t)}] - \mathbb{E}^2[e^{\sigma W(t)}] \right] \\ &= S_0^2 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)2t} \left[e^{\frac{1}{2}t(2\sigma)^2} - e^{2\frac{1}{2}t\sigma^2} \right] \\ &= S_0^2 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)2t} \left[e^{2t\sigma^2} - e^{t\sigma^2} \right] \\ &= S_0^2 e^{2\mu t} \left(e^{\sigma^2 t} - 1 \right).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{Var}(S(t)) = S_0^2 e^{2\mu t} \left(e^{\sigma^2 t} - 1 \right) [8].$$

2.3. Simulación del GBM

Una trayectoria de un proceso $\{X(t) \geq 0\}$ que sigue la ley del movimiento de una ecuación estocástica de la forma:

$$\left. \begin{aligned}dX(t) &= b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t). \\ X(0) &= x_0.\end{aligned} \right\}$$

Puede obtenerse mediante la discretización de Euler-Maruyama[8]. Para hacer esto, se divide el intervalo $[0, t]$ de manera uniforme en n subintervalos de la misma longitud $\Delta t = \frac{1}{t}$. Suponiendo que Y_j es un valor al aleatorio de la distribución Normal Estándar, se definen los valores sucesivos de la trayectoria solución de la ecuación estocástica de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= x_0. \\ X_{t_{j+1}} &= X_{t_j} + b(t_j, X_{t_j})\Delta t + \sigma(t_j, X_{t_j})\sqrt{\Delta t}Y_j. \end{aligned} \right\}$$

Para el caso específico del Movimiento Browniano Geométrico tenemos lo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} S(0) &= S_0. \\ S(t_{j+1}) &= S(t_j) + \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_j \right]. \end{aligned} \right\}$$

La simulación se llevará a cabo en Rstudio. Para ello, comenzamos generando una función llamada MBG, la cual necesita las siguientes variables:

simulaciones : Número de simulaciones que se desean realizar

mu : Valor de de la deriva o tendencia (μ).

sigma : Valor de la variación del modelo (σ).

T : tiempo que se desea simular, este tiempo se tomará como días.

S_0 : Valor inicial del activo.

Ahora, definimos dt como $\frac{1}{T}$ y generamos una matriz con columnas igual al número de simulaciones que se desea realizar y renglones igual al valor de T+1.

En la primera fila de la matriz colocamos el valor de S_0 y con ayuda de un ciclo for, comenzamos a llenar las entradas de la primera columna utilizando la ecuación mencionada anteriormente. Después con otro ciclo for, hacemos lo mismo pero cambiandonos de columna.

De esta manera tenemos una matriz donde cada columna representa una trayectoria del modelo. Para finalmente graficar las trayectorias.

Para hacer un ejemplo, utilizamos los siguientes valores:

$$Simulaciones = 100 \quad mu = 0.3 \quad sigma = 0.65 \quad T = 200 \quad S_0 = 500$$

La Figura 2.1, muestra parte de la matriz obtenida al realizar la simulación del modelo. Como se observa, cada columna representa una trayectoria, por lo que cada columna comienza con nuestro valor inicial, que en este caso es 500.

Movimiento Browniano Geométrico
2.3 Simulación del GBM

500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000
496.0676	524.0873	471.4686	501.3391	484.6765	503.7834	474.6349	520.2141	474.0742	524.5101	456.8021	499.8011	469.1755	515.1938	504.2364
559.0198	553.9975	475.5113	482.1425	491.6501	508.9616	457.1788	521.7757	462.6627	530.1543	444.1248	507.2994	463.4230	503.2770	506.0282
561.4852	559.5612	443.9559	466.3938	492.3522	536.1037	455.9063	517.1695	438.6971	468.9093	452.7548	489.9950	445.9518	485.0844	511.5281
549.7893	558.9408	447.9573	480.6031	486.6165	592.3533	448.6712	512.1054	475.3740	455.6612	445.6853	469.7649	467.3915	511.3924	566.2559
533.8480	536.0919	441.7596	473.6383	492.0309	629.0587	434.2605	519.0124	453.6586	432.0576	485.2947	475.0939	466.9946	509.5219	553.4598
540.2052	543.7975	415.0472	443.9138	495.2482	610.5871	430.4176	521.8554	428.5450	452.0640	469.8129	490.9225	470.9756	497.7266	565.5030
554.2901	569.2878	413.6657	429.2388	547.6399	554.8013	417.3082	531.6802	443.6909	458.5619	474.0111	532.2438	475.8915	524.0093	530.1643
580.6422	522.7613	434.4177	472.1197	567.5909	547.2620	398.9419	513.4701	433.6355	492.7526	470.1227	507.9200	472.8737	536.6982	561.7951
584.8572	512.4263	436.3134	465.1031	535.3797	530.6984	391.9864	508.9666	476.2214	491.4348	463.4501	547.2441	458.7034	534.2902	533.8811
632.6863	495.1135	423.7864	461.4165	520.7560	533.3360	363.9646	462.9283	499.4747	490.4216	466.1278	575.2313	426.7959	523.4026	520.5433
604.9277	483.3638	440.0978	449.9548	491.3634	535.5692	370.1434	496.5699	514.4118	520.1901	460.1197	607.6817	402.2997	556.0140	502.5354
610.9086	489.5762	451.0576	428.2004	480.9836	506.4847	391.7946	459.7731	491.2247	467.7424	452.2142	606.6293	416.0036	586.8760	467.8637
604.2902	493.3926	429.9344	442.0494	542.7586	487.9600	407.5661	463.4268	528.6684	522.4697	462.9959	621.5583	410.6246	558.9522	468.2564
558.8898	527.7816	393.8546	456.9266	588.3993	482.0495	404.6509	468.9729	554.8177	487.9372	492.4511	590.6831	398.0490	512.9812	455.1935
560.4445	550.5410	407.4894	451.8472	610.9670	504.3287	401.3474	451.0392	570.7496	475.2562	463.3591	565.7245	389.8976	513.5306	465.7318
529.1692	532.9488	411.5484	425.0624	621.0366	485.5068	416.7507	443.0762	557.6286	460.4781	451.1842	567.3723	410.3356	508.4541	481.6010
492.1250	569.1290	384.8733	418.8028	646.0254	484.2661	443.9374	396.5009	590.1402	452.6628	472.3919	584.2334	414.1571	533.2174	523.6362
470.7675	528.3225	391.4945	436.5425	690.0436	446.0034	436.4787	394.0434	598.6062	430.6525	483.7655	649.2056	418.3153	536.0620	528.9720
447.1767	580.3112	379.5591	383.2028	736.8440	427.1705	476.3422	391.9833	561.3177	425.0615	475.9458	660.3546	418.2864	536.2169	493.6985
458.9832	551.2804	370.7597	398.4822	727.4401	459.1081	456.7076	389.1145	626.4291	429.0092	509.5103	656.1129	388.9627	506.0398	496.1406
478.1609	607.6223	400.7923	405.3809	666.3691	471.9444	457.5625	388.6522	610.0234	427.0832	500.9418	617.4236	380.4861	504.2528	518.5496
475.2528	585.8446	377.6141	406.2488	693.1535	482.7181	470.6144	368.9280	579.3810	441.8011	523.4828	642.8514	344.7152	482.5110	483.9282
445.4395	576.8842	383.3988	396.4022	677.7293	487.7266	472.7811	345.0158	588.5704	445.5814	544.7112	660.8068	359.1438	419.6475	472.2738
427.4922	623.2428	339.6153	398.5922	667.7897	478.7819	476.8648	344.7387	578.7561	444.6638	517.6720	664.4973	341.0122	417.5757	469.1425
425.4029	631.9929	383.4579	394.1425	691.6029	540.7667	490.5814	357.4971	616.1210	419.1319	537.4612	631.6809	337.7278	400.4052	511.0714
418.9513	642.0729	392.2269	398.0738	645.7930	501.7539	491.6990	374.7013	675.8706	433.4286	522.8689	667.2168	319.4155	391.2109	499.1654
430.6697	624.5833	405.5759	400.4887	622.2633	504.6477	496.5300	399.4895	711.1492	437.6625	553.6364	660.4249	329.1160	415.3287	532.7880
424.2467	644.5467	420.8772	395.4639	613.3637	500.8956	450.2079	380.4451	716.8707	443.0969	551.3569	597.9872	316.2770	454.9665	536.0712
428.4612	685.8830	394.3058	387.2728	617.2841	507.5884	441.9376	402.7032	676.1628	460.5633	572.5343	638.1673	310.4523	448.3382	530.1718

Figura 2.1: Matriz de las trayectorias de la simulación del GBM
Fuente: Elaboración propia

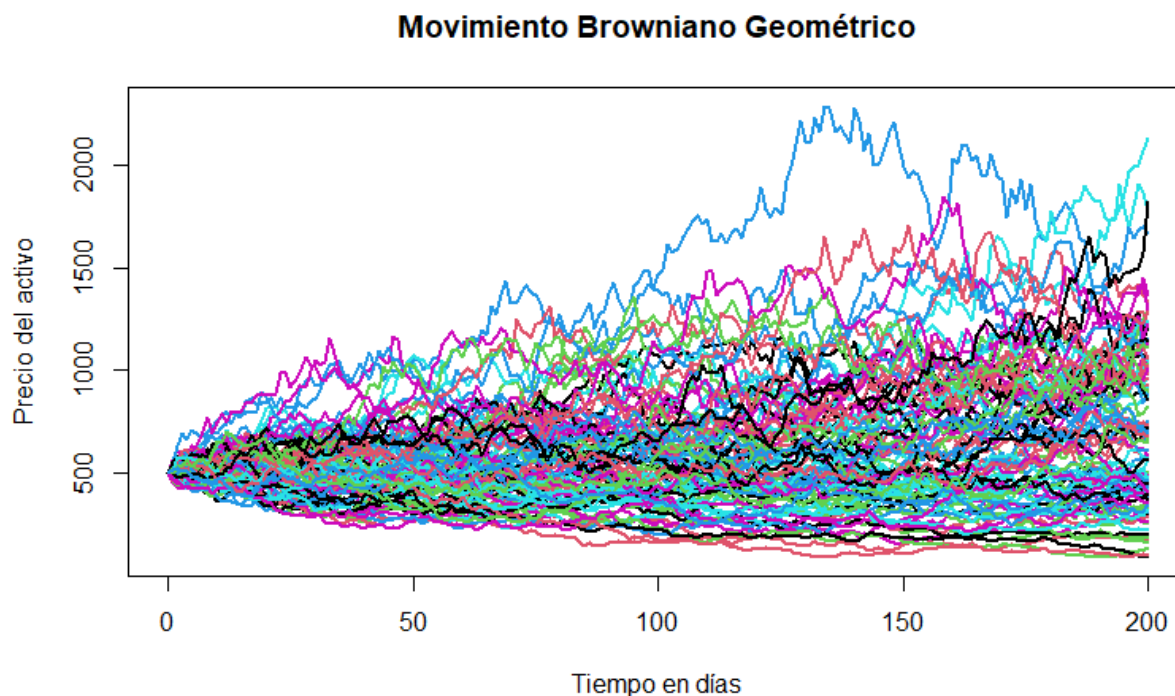


Figura 2.2: Simulación del GBM
Fuente: Elaboración propia

La Figura 2.2 muestra las trayectorias simuladas del Movimiento Browniano Geométrico. Notemos que se cumple que este modelo no deja que tome valores negativos.

2.4. Estimación de los Parámetros del Modelo

Para poder estimar los parámetros de este modelo se usará el método de máxima verosimilitud. El objetivo de la estimación por este método es establecer los valores de los parámetros que hacen que la función de verosimilitud del proceso se maximice [12].

Para la aplicación de este método, necesitamos tener un conjunto de observaciones del proceso (X_0, X_1, \dots, X_n) , con esta muestra la función de densidad del proceso puede verse como la función de parámetros desconocidos, es decir, la función de verosimilitud f_θ . De esta manera, se plantea y resuelve el problema de determinar los valores de los parámetros que maximizan el logaritmo de f_θ .

Dado que el GBM es un proceso de Markov, podemos escribir f_θ con base en una serie temporal de observaciones, ya que:

$$f_\theta = f_{X_0, X_1, \dots, X_n; \theta} = f_{X_n | X_{n-1}; \theta} \cdot f_{X_{n-1} | X_{n-2}; \theta} \cdots f_{X_1 | X_0; \theta}$$

Sí las observaciones son independientes e idénticamente distribuidas entonces:

$$f_{X_i|X_{i-1};\theta} = f_{X_i;\theta}.$$

De esta manera, la función de verosimilitud se puede escribir de la siguiente manera:

$$f_{\theta} = \prod_{i=0}^n f_{X_i;\theta}.$$

Aplicando logaritmo obtenemos la función de log-veroisimilitud:

$$L(\theta) = \ln(f_{\theta}) = \sum_{i=0}^n \ln(f_{X_i;\theta}).$$

Entonces se tendría que igualar a cero las derivadas parciales con respecto a los parámetros y resolver el sistema de ecuaciones.

Podemos escribir la ecuación (2.4) de la siguiente forma:

$$S(t) = S(t-1)e^{((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma W(t))} \quad , t \geq 0. \quad (2.5)$$

Entonces el logaritmo de los retornos se calcularía de la siguiente manera:

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(t-1)}\right) = \left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma W(t)\right) \quad , t \geq 0. \quad (2.6)$$

Dado que $S(t)$ sigue una distribución Log-Normal, entonces el logaritmo de los rendimientos siguen una distribución Normal.

Sea $Y_t = \ln\left(\frac{S(t)}{S(t-1)}\right)$ entonces:

$$Y_t \sim Normal\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t, \sigma^2\Delta t\right)$$

Definimos lo siguiente:

$$m = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t$$
$$v = \sigma^2\Delta t$$

Por lo que la función de densidad de Y sería:

$$\begin{aligned} f_{Y;m,v} &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(y_i - m)^2}{2v}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2v} \sum_{i=1}^n (y_i - m)^2\right) \\ &= (n\pi v)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2v} \sum_{i=1}^n (y_i - m)^2}. \end{aligned}$$

Ahora, aplicamos logaritmo natural a $f_{Y;m,v}$ y tenemos:

$$\begin{aligned} \ln(f_{Y;m,v}) &= \ln\left((n\pi v)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2v} \sum_{i=1}^n (y_i - m)^2}\right) \\ &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi v) - \frac{1}{2v} \sum_{i=1}^n (y_i - m)^2. \end{aligned}$$

Es decir, nuestra función de logverosimilitud $L(\theta)$ es:

$$L(\theta) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi v) - \frac{1}{2v} \sum_{i=1}^n (y_i - m)^2. \quad (2.7)$$

Ahora tenemos que calcular las derivadas parciales de $L(\theta)$ con respecto a los parámetros m y v .
Primero con respecto a m

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m} L(\theta) &= \frac{\partial}{\partial m} \left(-\frac{n}{2} \ln(2\pi v) - \frac{1}{2v} \sum_{i=1}^n (y_i - m)^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - m). \end{aligned}$$

Igualemos a cero y despejamos m :

$$\sum_{i=1}^n (y_i - m) = 0 \Rightarrow \hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \bar{y}.$$

Es decir, \hat{m} es igual a la media muestral.

Ahora calculamos la derivada parcial con respecto a v :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v} L(\theta) &= \frac{\partial}{\partial m} \left(-\frac{n}{2} \ln(2\pi v) - \frac{1}{2v} \sum_{i=1}^n (y_i - m)^2 \right) \\ &= -\frac{n}{2v} + \frac{1}{2v^2} \sum_{i=1}^n (y_i - m)^2.\end{aligned}$$

Iguálamos a cero y despejamos v :

$$-\frac{n}{2v} + \frac{1}{2v^2} \sum_{i=1}^n (y_i - m)^2 = 0$$

$$\frac{1}{2v^2} \sum_{i=1}^n (y_i - m)^2 = \frac{n}{2v}$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - m)^2 = vn.$$

Como $m = \bar{y}$, entonces

$$\hat{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2.$$

Ahora podemos obtener los estimadores de $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$.

$$m = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t = \bar{y},$$

lo cual implica

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{y}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \tag{2.8}$$

Ahora:

$$v = \sigma^2 \Delta t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2.$$

Entonces

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n \Delta t} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2. \tag{2.9}$$

Recordemos que:

$$\begin{aligned} m = \bar{y} &= \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln(S(i)) - \ln(s(i-1))) \\ &= \frac{1}{n} (\ln(S(n)) - \ln(S_0)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\hat{m} = \frac{1}{n} (\ln(S(n)) - \ln(S_0)).$$

Es decir, para obtener el estimador de m sólo necesitamos el valor inicial y el valor final del precio del activo.

Capítulo 3

Modelo de Difusión de Saltos

Como vimos en el capítulo anterior, los retornos de los activos pueden comportarse como una distribución normal. Sin embargo, también pueden tener una distribución con cola pesada. Es decir, el comportamiento del precio del activo puede tener saltos demasiado bruscos, ya sea subir o bajar. Y estos saltos no están contemplados en el GBM. Por lo cual se presentará el modelo de saltos de difusión.

3.1. Desarrollo del Modelo

El desarrollo del modelo se sustenta en [1].

Un proceso de salto de difusión (JDM por sus siglas en inglés) viene descrito por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\left. \begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) + S(t)dJ(t). \\ S(0) &= S_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Donde:

$$J(T) = \sum_{j=1}^{N(T)} (Y_j - 1)$$

ó

$$dJ(t) = (Y_{N(t)} - 1)dN(t).$$

Y $\{N(T)\}_{T \geq 0}$ sigue un proceso de Poisson homogéneo con parámetro λ y distribución Poisson con parámetro λT .

Es decir, $J(t)$ es un proceso de Poisson compuesto. Además, notemos que los primeros dos sumandos de la ecuación (3.1), corresponden a un Movimiento Browniano Geométrico. Por lo que $W(t)$ es un Movimiento Browniano estándar.

El proceso de Poisson $\{N(T)\}_{T \geq 0}$ cuenta el número de llegadas en el intervalo $[1, T]$ y Y_j es la medida del j -ésimo salto.

Las Y son variables Log-normales independientes e idénticamente distribuidas

$$Y_j \sim \exp(\text{Normal}(\mu_Y, \sigma_Y^2))$$

siendo estas variables independientes tanto de Proceso de Wiener $W(t)$ y del Proceso Poisson $\{N_T\}_{T \geq 0}$.

Como se hizo con el GBM, podemos escribir la ecuación (3.1) de la siguiente manera.

$$d \ln(S(t)) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t) + \ln(Y_{N(t)}) dN(t). \quad (3.2)$$

De forma equivalente:

$$d \ln(S(t)) = \left(\mu + \lambda \mu_Y - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t) + [\ln(Y_{N(t)}) dN(t) - \lambda \mu_Y dt]. \quad (3.3)$$

Entonces la solución de la ecuación diferencial estocástica es:

$$S(T) = S(0) * \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W(T) \right) \prod_{j=1}^{N(T)} Y_j. \quad (3.4)$$

Equivalentemente:

$$S(T) = S(0) * \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W(T) + \sum_{j=1}^{N(T)} \ln(Y_j) \right). \quad (3.5)$$

3.2. Discretización del Modelo

Si tomamos un intervalo de tiempo $[0, t]$ y lo dividimos en subintervalos Δt con la misma longitud podemos reescribir la ecuación (3.4) de la siguiente forma [1]:

$$S(T) = S(t - \Delta t) \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_t \right) \prod_{j=1}^{n_t} Y_j \quad (3.6)$$

Donde:

ε_t sigue una distribución $\text{Normal}(0, 1)$.

$n_t = N_t - N_{t-\Delta t}$ cuenta los saltos que hayan ocurrido entre Δt y t .

De esta manera, podemos calcular el logaritmo de los retornos de la siguiente manera:

$$X(t) := \Delta \ln(S(t)) = \ln(S(t)) - \ln(S(t - \Delta t)).$$

Es decir:

$$X(t) = \left(\mu + \lambda \mu_Y - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_t + \Delta J_t^*. \quad (3.7)$$

Donde ΔJ_t^* se define como:

$$\Delta J_t^* = \sum_{j=1}^{n_t} \ln(Y_j) - \mu + \lambda \mu_Y \Delta t.$$

3.3. Simulación del Modelo JDM

Para la creación del código del algoritmo de la simulación se utilizó como base [2] y [15].

Para poder simular las posibles trayectorias del Modelo de Difusión de Saltos, utilizaremos la discretización de la ecuación (3.5).

$$S(t) = S(t - \Delta t) * \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{n_t} \ln(Y_j) \right). \quad (3.8)$$

La simulación se realizará en Rstudio.

Al igual que con el GBM, crearemos una función, para este caso la llamaremos JDM. Esta función necesitará las siguientes variables:

simulaciones : Número de simulaciones que se desean realizar

mu : Valor de la tendencia (μ).

Sigma : Valor de la variación del modelo (σ).

mu_y : Valor del parámetro μ_y para las variables Log-Normales Y_j

sigma_y : Valor del parámetro σ_y para las variables Log-Normales Y_j

lambda : Valor del parámetro λ para simular el proceso Poisson.

T : tiempo que se desea simular, este tiempo se tomará como días.

S_0 : Valor inicial del activo.

De la misma manera que en el GBM, definimos dt como $\frac{1}{T}$ y generamos una matriz con columnas igual al número de simulaciones que se desea realizar y renglones igual al valor de $T+1$.

En la primera fila de la matriz colocamos el valor de S_0 y con ayuda de un ciclo for, comenzamos a llenar las entradas de la primera columna utilizando la ecuación 3.8.

Aquí es donde con ayuda de un if, tenemos que generar un variable Poisson, luego si la variable Poisson es 0, definimos una variable llamada "salto", para después asignarle el valor 0, pero si la variable Poisson generada es diferente de 0, entonces generamos n variables normales con los parámetros dados, donde n sera el valor de la variable poisson generada, sumamos las variables normales y le asignamos el valor de la suma a la variable "salto".

Después con otro ciclo for, cambiamos de columna y se repite el proceso.

De esta manera tenemos una matriz donde cada columna representa una trayectoria del modelo. Para finalmente graficar las trayectorias.

La figura 3.1 muestra la matriz con las trayectorias simuladas del JDM, para la cual se tomaron los siguientes valores:

simulaciones = 20.
mu = 0.17.
Sigma = 0.055.
mu_y = 0.005.
sigma_y = 0.08.
lambda = 5.
T = 100.
S₀ = 500.

La figura 3.2 muestra la gráfica de las trayectorias simuladas del JDM.

Podemos observar los saltos en las trayectorias, ya sean positivos o negativos. Por lo cual se puede modelar de mejor manera el comportamiento de los activos. Ya que como sabemos, el mercado es demasiado volátil, lo cual generará cambios bruscos en el valor de los activos.

Modelo de Difusión de Saltos
3.3 Simulación del Modelo JDM

1	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000
2	501.6931	500.0304	498.3382	498.4174	499.0156	501.8547	504.2704	502.2577	508.4116	506.1703	503.9261	503.3407	502.8404	505.5255	502.4613
3	503.4441	497.7745	504.2795	520.5787	503.7430	497.4538	503.1611	505.4272	507.3086	513.1837	507.1619	501.8174	503.0535	540.3583	500.6413
4	506.3534	502.0554	509.8702	518.5490	504.7622	500.4437	499.4992	504.3115	506.3284	510.2707	504.8603	506.8670	503.5309	539.7544	503.4864
5	503.6921	502.0111	509.4895	519.3561	504.6832	499.8386	497.3188	510.4460	509.7320	505.7515	508.3216	503.4697	504.2332	542.4392	505.3966
6	504.4018	501.2593	511.5588	523.1786	502.1336	504.6789	498.1539	512.6113	507.7180	506.1599	506.6944	505.9455	507.4331	545.1427	506.8082
7	505.1547	503.4574	510.6012	523.3141	503.2082	502.8273	499.5830	513.6604	505.5087	503.8174	510.6255	484.1954	507.3216	545.5745	510.5809
8	502.7731	552.6752	517.3107	520.7736	502.3389	506.6003	497.7541	513.8903	507.5181	504.0258	511.9640	485.0563	507.2930	548.1688	512.8834
9	500.2122	558.3079	517.2219	515.0670	504.1161	506.7735	499.3596	518.3372	504.9287	503.0273	515.7058	489.4254	508.6025	546.9503	509.7289
10	496.6997	564.0842	514.1624	518.5408	505.6262	512.3578	498.3848	501.0250	507.5156	501.8182	517.7729	571.4986	511.3301	545.7157	505.6659
11	502.5216	564.4295	514.3207	516.8068	507.3387	516.3869	500.0554	501.9703	505.0827	507.8534	516.7926	571.7088	453.8264	548.8100	501.2900
12	476.4800	567.6029	517.1877	518.6630	510.9703	536.0790	462.4485	504.4885	505.6820	508.9974	518.8985	569.4009	457.6446	549.9630	503.9812
13	474.9907	567.4892	520.2905	521.7320	509.2085	533.5422	465.1530	502.0204	506.9457	511.1611	526.2282	566.4296	459.8446	550.3260	504.5074
14	511.9533	567.7812	520.0218	526.9871	508.6732	536.7450	465.2400	503.0091	503.2894	509.7187	528.9456	570.3319	486.2247	550.8166	502.8591
15	510.9511	565.9617	518.3351	529.8601	487.1151	539.1153	464.5478	507.4557	503.9774	514.6148	532.8189	574.3816	490.3651	551.1035	506.5647
16	511.6175	568.1773	523.1073	527.5976	489.7213	539.0624	464.6048	513.2529	506.8496	520.6021	533.3435	577.6567	493.6934	553.5276	511.0348
17	512.9918	567.2070	531.0056	530.6060	435.3729	541.3878	465.8811	515.6025	503.1995	521.3221	528.2722	580.9181	492.1854	565.0026	513.1511
18	506.8596	569.3018	460.0751	533.7144	432.7494	546.0820	465.6536	516.8936	504.4399	523.2819	530.6124	582.6901	477.1653	570.8540	607.8368
19	506.7112	571.3264	457.3085	534.0299	436.4023	548.3209	466.3663	515.7932	499.9101	525.7767	538.0601	576.2084	479.4011	576.5720	607.9908
20	508.0574	591.4417	457.2980	531.4620	439.0532	547.3965	463.7150	523.5916	501.4682	530.9539	539.8079	576.8433	482.6075	581.6001	609.4791
21	507.8300	592.5329	423.2366	530.8622	439.9398	546.4298	467.2208	521.2716	501.4488	534.0117	540.5502	581.5970	482.7104	584.5690	614.1286
22	510.2198	662.0475	430.0231	531.7878	437.8534	546.1152	468.1543	524.6943	503.0327	532.5163	539.4334	598.0376	482.7555	582.6144	612.0154
23	510.5141	665.8428	430.4679	531.5543	500.6106	540.7857	463.4142	527.8081	505.4253	533.0605	545.6346	599.1454	483.0674	582.7397	614.1763
24	510.6659	668.7775	433.0558	528.0605	500.8739	541.1132	458.6858	525.7451	500.3841	532.5284	543.1207	601.3433	488.7768	581.7935	617.9808
25	513.4005	671.3157	434.7134	524.0837	496.1898	538.3070	462.5416	522.8057	502.4353	529.2620	547.6638	603.0066	492.9787	582.1216	617.7604
26	516.5043	645.4774	434.2642	524.4626	497.9005	539.2515	462.6197	527.1713	468.4836	531.5332	545.2061	599.8951	490.0817	582.8062	625.4095
27	514.2485	641.8652	434.4280	519.7513	492.6911	537.8099	461.4319	531.0092	466.6398	528.2994	544.6893	602.8423	492.8129	585.1997	623.7392
28	518.3261	642.4712	433.8525	517.9855	490.8808	534.1594	459.5322	532.3270	467.3515	534.6499	544.7606	606.7812	493.2257	585.9277	621.7681
29	511.8854	641.5097	436.9821	520.1885	491.6455	538.7327	459.8489	534.3065	469.8363	533.1707	550.8393	606.2887	498.1228	584.1475	618.9830
30	515.4796	642.1332	437.7111	522.3938	471.6014	538.3364	462.3798	532.7591	473.7659	537.1272	554.1376	610.1410	502.4718	584.1420	615.1144

Figura 3.1: Matriz de las trayectorias de la simulación del JDM
Fuente: Elaboración propia

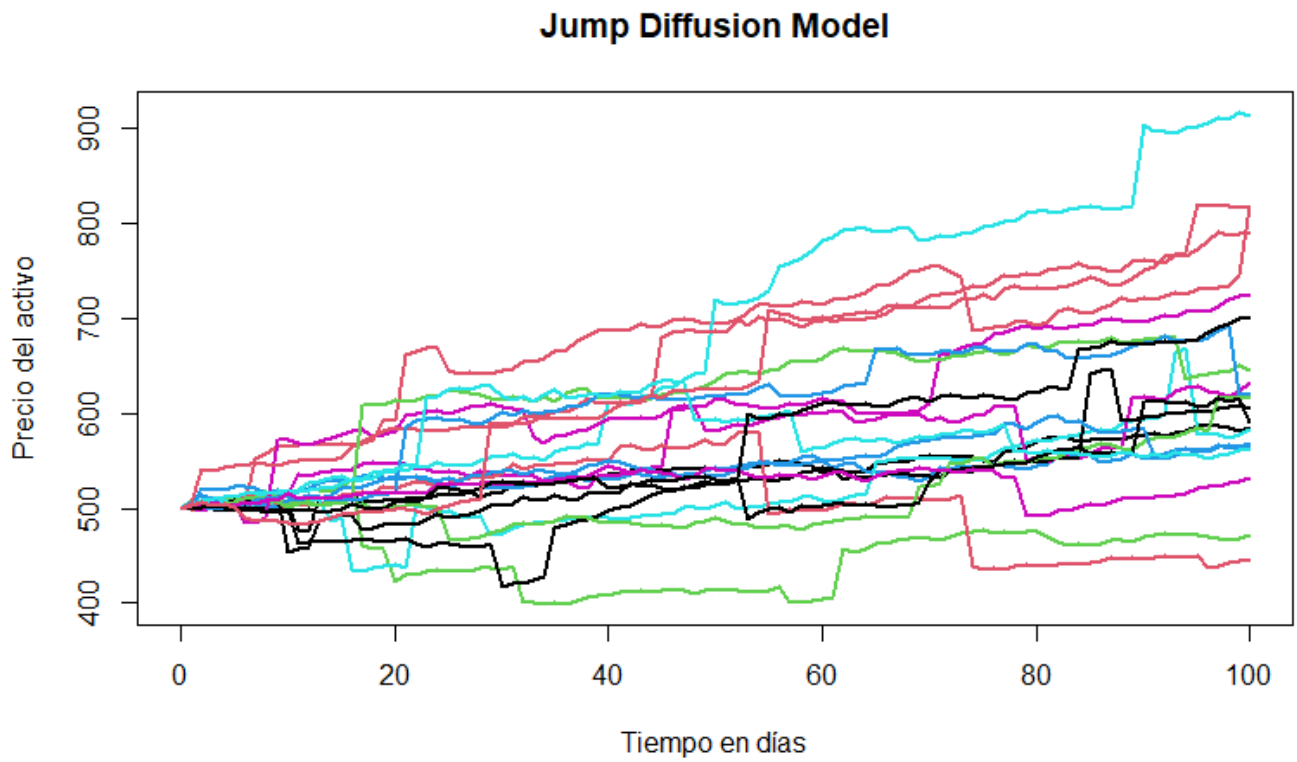


Figura 3.2: Gráfica de las trayectorias de la simulación del JDM
Fuente: Elaboración propia

Capítulo 4

Aplicación de los Modelos

Se realizará la aplicación de los dos modelos desarrollados en los capítulos anteriores. Para ello, se escogieron las acciones de dos empresas que cotizan en la Bolsa de Nueva York (New York Stock Exchange, NYSE, en inglés).

4.1. Obtención de los Datos

Los datos se obtendrán de la página web <https://es.finance.yahoo.com/>. Tomaremos los precios históricos, pero sólo los precios de cierre.

Los datos se descargarán directamente en Rstudio. Por lo cual se necesitará la librería "quantmod", utilizando la función "getSymbols" podremos extraer los precios.

Las acciones seleccionadas son las siguientes: Pfizer y Disney.

Por lo tanto, se aplicarán ambos modelos a las dos empresas escogidas. Para poder tener una comparación y observar en que caso un modelo se ajusta de mejor manera a los datos que tenemos. Recalcando que lo que queremos comparar son los dos modelos, utilizando los datos de las acciones para tener dos escenarios diferentes.

A continuación se describe el análisis.

4.1.1. PFIZER, Inc.

Pfizer Inc. es una compañía biofarmacéutica multinacional centrada en la investigación, desarrollo y fabricación de medicamentos y vacunas. Uno de sus medicamentos más célebres, por la revolución que supuso en su momento (1998) es Viagra, para la disfunción eréctil, aunque entre sus marcas también figuran otros como Lipitor, para reducir el colesterol o Lyrica para el dolor neuropático y la fibromialgia.

Pfizer tiene su sede central en Nueva York y sus ingresos proceden principalmente de Estados Unidos. Actualmente en la Bolsa de Nueva York (NYSE). Hace 16 años, las acciones de la farmacéutica cotizaban a un precio cercano a los 28 dólares. En la actualidad (abril de 2023) sus títulos se intercambian a alrededor de 40 dólares. [5]

"Pfizer fue una de las compañías protagonistas durante la pandemia de Covid-19 por el lanzamiento de una vacuna contra esta enfermedad"(Caro, 2023). Este protagonismo se ha dejado

notar en su cotización en bolsa, con una elevada volatilidad.

4.1.2. The Walt Disney Company

The Walt Disney Company también llamado simplemente Disney, es el conglomerado de medios de comunicación y entretenimiento estadounidense más grande del mundo. Su actual sede se halla en Burbank, California.

Disney es una de las compañías más conocidas del mundo, además de ser probablemente la más grande del planeta ya que abarca numerosos sectores del entretenimiento. Fundada en octubre de 1923 por Walt Disney, su primer gran éxito fue Blancanieves, estrenada en 1937. [4]

Disney debutó en la Bolsa de Nueva York (NYSE) en mayo de 1991 a unos 10 dólares por acción. Tres décadas después, sus títulos cotizan a un precio de 120 dólares cada una (26 de abril de 2022), lo que refleja el enorme crecimiento de este conglomerado a lo largo de su historia hasta alcanzar los 218 380 millones dólares de capitalización. [4]

Algunas de las grandes subidas que ha protagonizado en bolsa han estado precedidas por los eventos más destacados de su historia, como las adquisiciones de grandes franquicias.

4.2. Análisis de los Precios Históricos

Se descargaron los datos desde el primero de enero del 2016 al 30 de mayo del 2022, y graficamos los precios de cierre de cada acción.



Figura 4.1: Comportamiento del precio de cierre de Pfizer.
Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

PFIZER	
nobs	1613.00
NAs	0.00
Minimum	27.03
Maximum	61.25
1. Quartile	32.71
3. Quartile	39.93
Mean	36.93
Median	34.97
Sum	59564.85
SE Mean	0.16
LCL Mean	36.62
UCL Mean	37.23
Variance	38.78
Stdev	6.23
Skewness	1.33
Kurtosis	1.61

Tabla 4.1: Resumen del precio de Pfizer.
Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.



Figura 4.2: Comportamiento del precio de cierre de Disney.
Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

En la figura 4.1 podemos observar como los precios de Pfizer han ido creciendo, sin embargo, como la mayoría de empresas, tuvo un caída a finales del 2019 y principios del 2021. Y notamos el crecimiento que está teniendo en 2022.

Por otro lado, en la figura 4.2, notemos como las acciones de Disney presentan una caída desde finales del 2021 a la fecha en que se descargaron los datos. Pero viendo el comportamiento que tiene desde 2016 a 2020, se observa un crecimiento, dado que en 2016 tenía un valor alrededor de los 90 USD, y en enero del 2020, ya alcanzaba los 150 USD. Sin embargo, como la mayoría de las empresas, en marzo del 2020, presenta una caída muy grande, derivado con el inicio de la pandemia. Pero gracias a su plataforma de streaming Disney+, es como logró el crecimiento del valor de sus acciones, aún durante la emergencia sanitaria.

Observando las figuras 4.1 y 4.2, comparando en el mismo periodo de tiempo el comportamiento del precio de cierre de cada acción, podemos notar que en el caso de Disney es la que presenta cambios más notorios en periodos cortos de tiempo. Lo que en capítulos anteriores definimos como un salto. Para el caso de Pfizer, si tenemos caídas y subidas en el nivel del precio de sus acciones, pero en periodos más largos.

Por lo que esperaríamos que el JDM se ajuste mejor en Disney, y el GBM en Pfizer.

DISNEY	
nobs	1613.00
NAs	0.00
Minimum	85.76
Maximum	201.91
1. Quartile	103.73
3. Quartile	141.02
Mean	124.84
Median	113.04
Sum	201360.91
SE Mean	0.69
LCL Mean	123.49
UCL Mean	126.18
Variance	762.60
Stdev	27.62
Skewness	0.95
Kurtosis	-0.23

Tabla 4.2: Resumen del precio de Disney.
Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

En las tablas 4.1 y 4.2 tenemos un resumen de las estadísticas de cada acción. En ambos casos, contamos con un total de 1613 observaciones, y no se tienen valores nulos o inválidos.

También si vemos los valores mínimos y máximos, podemos notar que los valores del precio de Disney, son las que presentan una mayor diferencia entre ambos valores. Lo cual, se ve reflejado en el valor de la desviación estandar (Stdev) ya que es más grande el valor de la desviación de Disney que la de Pfizer.

4.3. Rendimientos

Se calcularan los rendimientos diarios utilizando las siguiente formula:

$$\text{rendimiento} = \text{Ln} \left(\frac{S(t)}{S(t-1)} \right)$$

Entonces utilizando Rstudio, calculamos los rendimientos de cada activo y los graficamos.

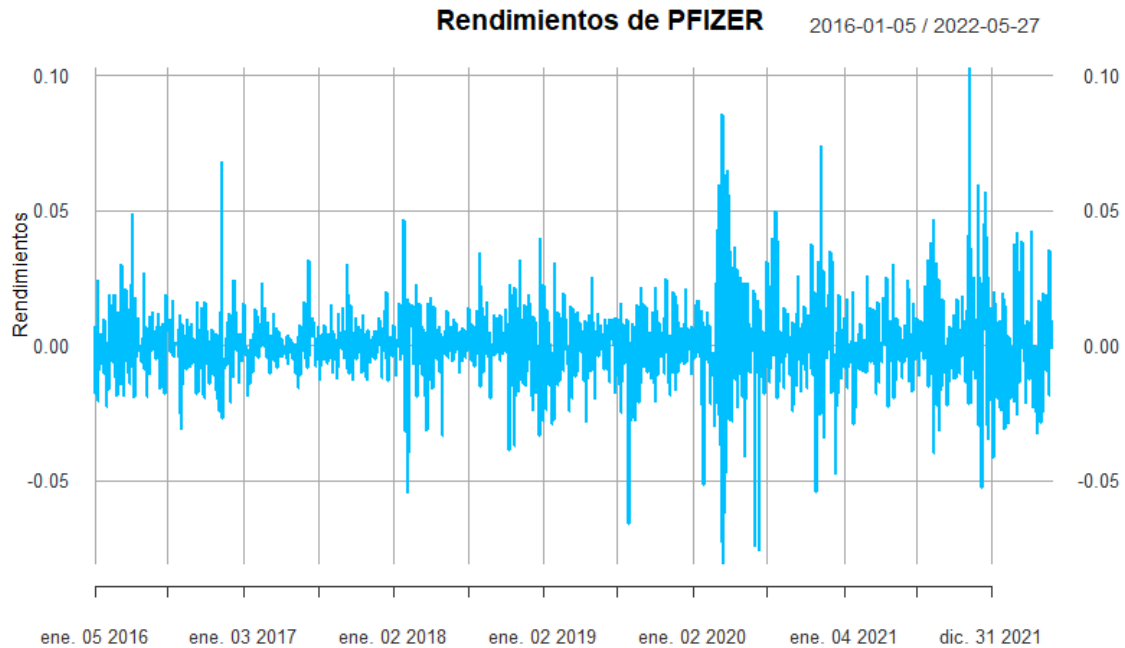


Figura 4.3: Rendimientos de Pfizer.
Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

	DISNEY	PFIZER
nobs	1612.000000	1612.000000
NAs	0.000000	0.000000
Minimum	-0.139085	-0.080501
Maximum	0.134639	0.103055
1. Quartile	-0.006895	-0.006356
3. Quartile	0.007345	0.006991
Mean	0.000037	0.000357
Median	-0.000029	0.000243
Sum	0.059745	0.575736
SE Mean	0.000435	0.000369
LCL Mean	-0.000817	-0.000367
UCL Mean	0.000891	0.001081
Variance	0.000306	0.000219
Stdev	0.017480	0.014814
Skewness	0.343385	0.188536
Kurtosis	12.166095	6.106352

Tabla 4.3: Resumen de los rendimientos
Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

En la tabla 4.3 podemos observar que contamos con 1612 datos de cada acción, no se tienen

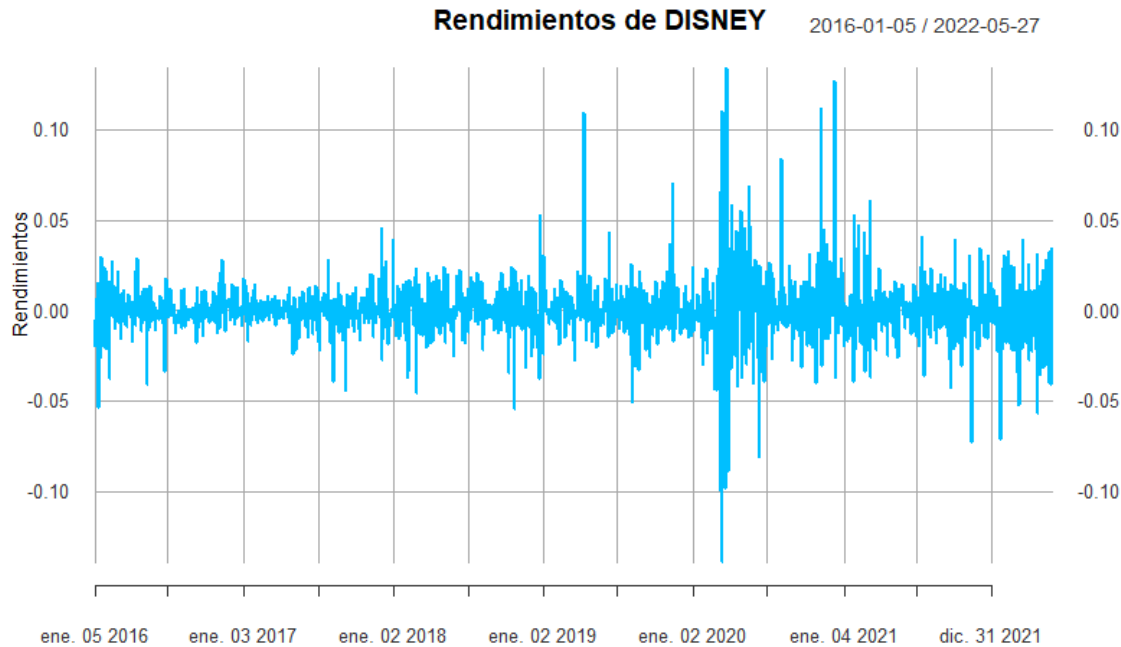


Figura 4.4: Rendimientos de Disney.
Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

datos faltantes. Además podemos comparar ambas acciones, notemos que el valor de la varianza de Disney es mayor que el de Pfizer, pero el valor promedio de los rendimientos de Pfizer es mayor que el de disney.

4.3.1. Pruebas de Normalidad

Utilizaremos los histogramas de los rendimientos de ambas acciones, así como la prueba de normalidad de Jarque-Bera, para ver si nuestros datos siguen una distribución normal.

Jarque - Bera Normalality Test (DISNEY)	
X-squared:	10004.1407
P VALUE:	<0.00000000000000022

Tabla 4.4: Resultados de la prueba de normalidad (Disney).
Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

Jarque - Bera Normalality Test (PFIZER)	
X-squared:	2523.3319
P VALUE:	<0.00000000000000022

Tabla 4.5: Resultados de la prueba de normalidad (Pfizer).
Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

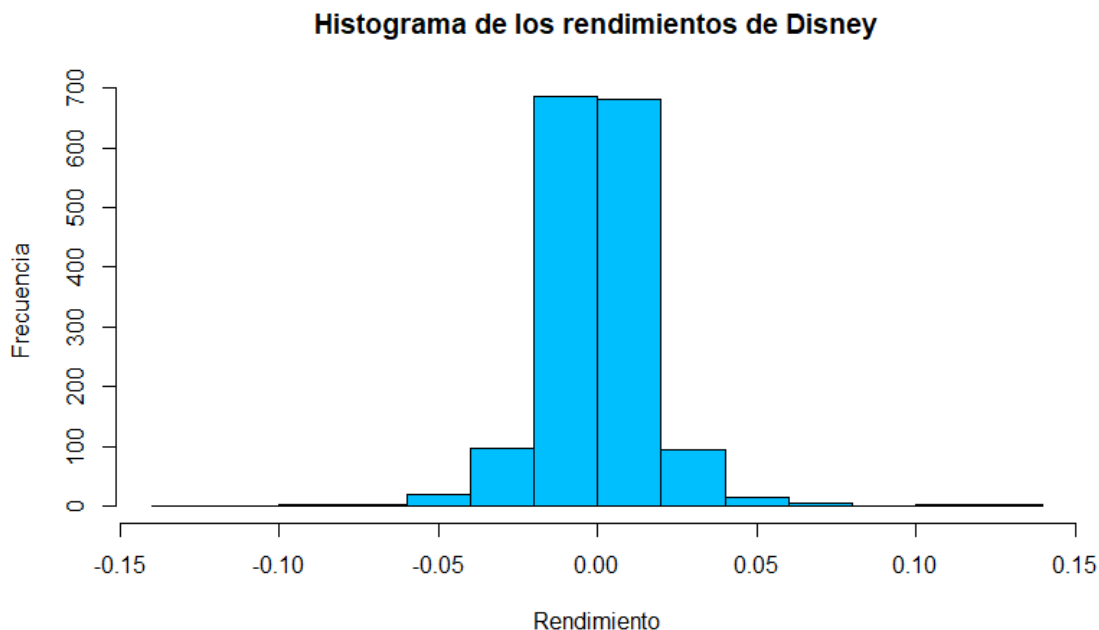


Figura 4.5: Histograma de los rendimientos de Disney.
Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

Al observar los histogramas, notamos que no tienen una distribución Normal. Y al ver los valor-p en la Tabla 4.4 y la Tabla 4.5, se corrobora que los rendimientos de ambas acciones no siguen una distribución Normal.

En las figuras 4.7 y 4.8 podemos observar que tanto los rendimientos de Pfizer como los de Disney, presentan colas pesadas, lo que puede indicar que siguen una distribución log-normal.

4.4. Aplicación del GBM

Comencemos con la aplicación del Movimiento Browniano Geométrico, a nuestras dos acciones seleccionadas, siguiendo el proceso que describimos en el capítulo 2.

Para poder aplicar el GBM, necesitamos los valores de μ y σ . Los cuales se encuentran en la Tabla 4.3, tanto para Disney, como para Pfizer.

Ya que se tienen estos valores, usaremos las ecuaciones (2.8) y (2.9) para estimar los parámetros que necesitamos para aplicar el modelo.

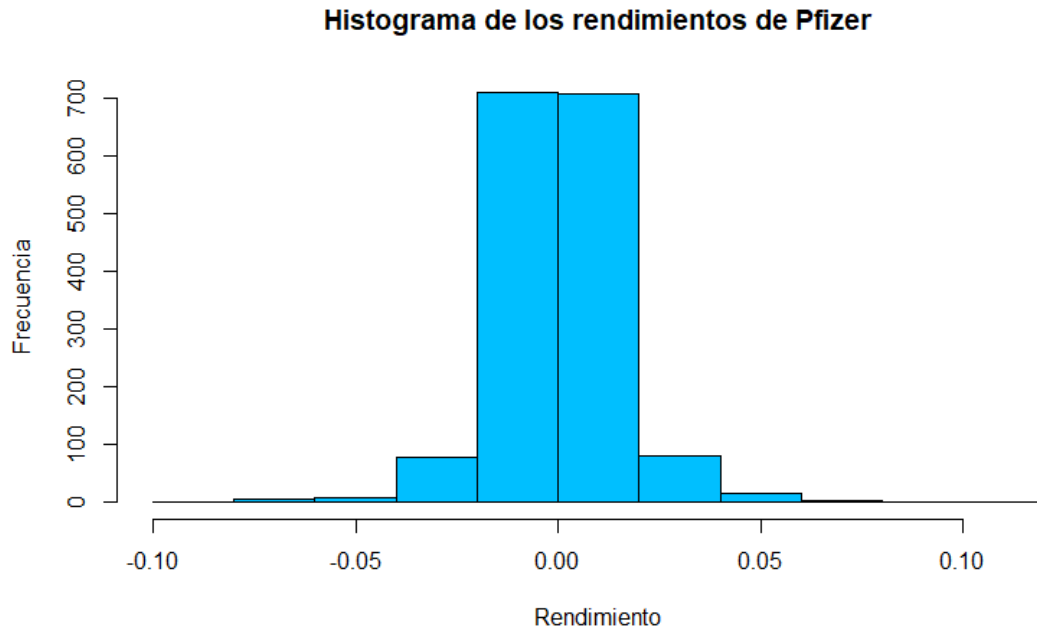


Figura 4.6: Histograma de los rendimientos de Pfizer.
Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

4.4.1. GBM Aplicado en Disney

Tenemos los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\mu &= 0.000037 \\ \sigma &= 0.017480 \\ \sigma^2 &= 0.000306 \\ S(0) &= 102.98 \\ S(n) &= 109.32 \\ n &= 1612\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \frac{1}{n} \left(\text{Ln} \left(\frac{S(n)}{S(0)} \right) \right) = 0.00003706239 \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 0.0003053751\end{aligned}$$

Ahora que tenemos nuestros parámetros podemos utilizar nuestro código en Rstudio para realizar la simulación de los precios de Disney, y de esta manera predecir los próximos precios de esta acción.

Para este caso tomaremos como precio inicial S_0 el valor de 109.32, el cual corresponde al

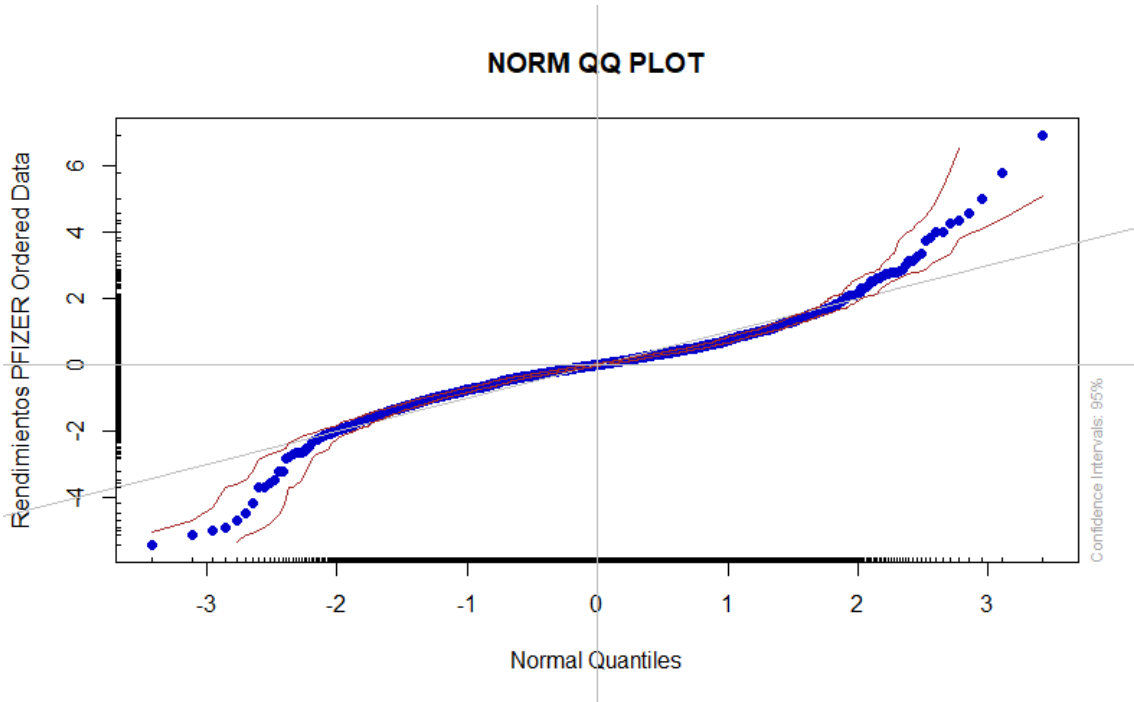


Figura 4.7: Gráfica Cuantil-Cuantil de Pfizer.
Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

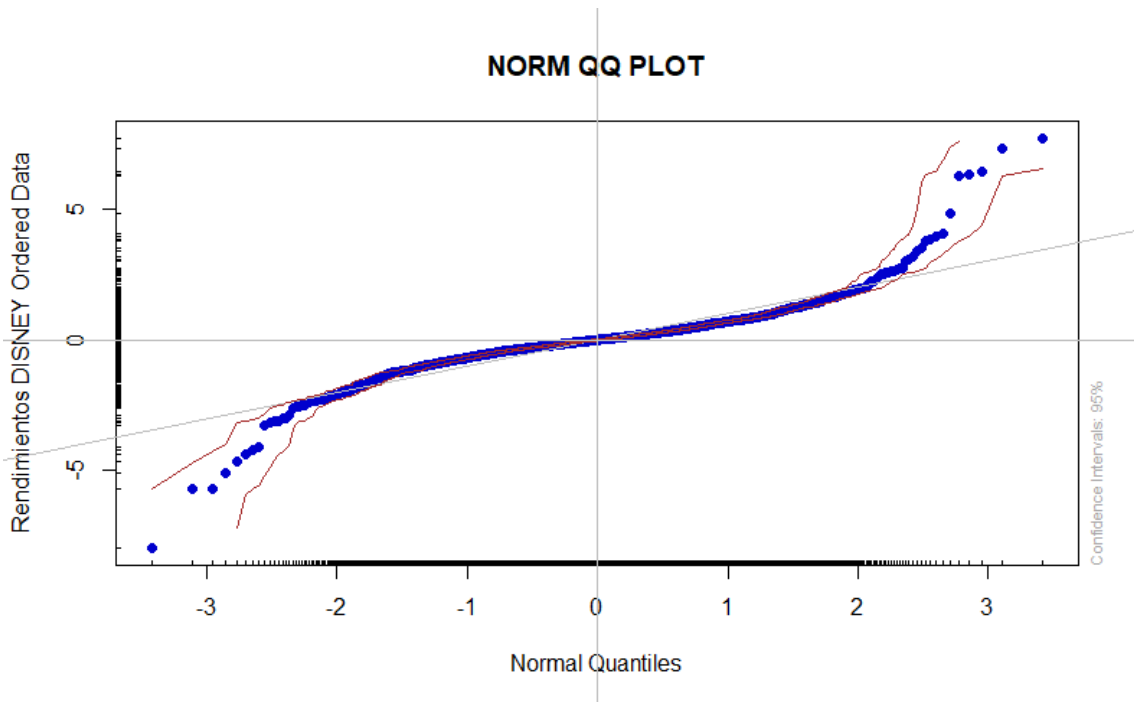


Figura 4.8: Gráfica Cuantil-Cuantil de Disney.
Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

último valor de nuestra base de datos de los precios de Disney.

Generaremos 22 precios de esta acción, lo que corresponde a el mes de junio del 2022, recordemos que en nuestra base de datos, se tomaron valores hasta mayo.

Una vez generadas nuestras predicciones los compararemos con los valores reales de la ac-

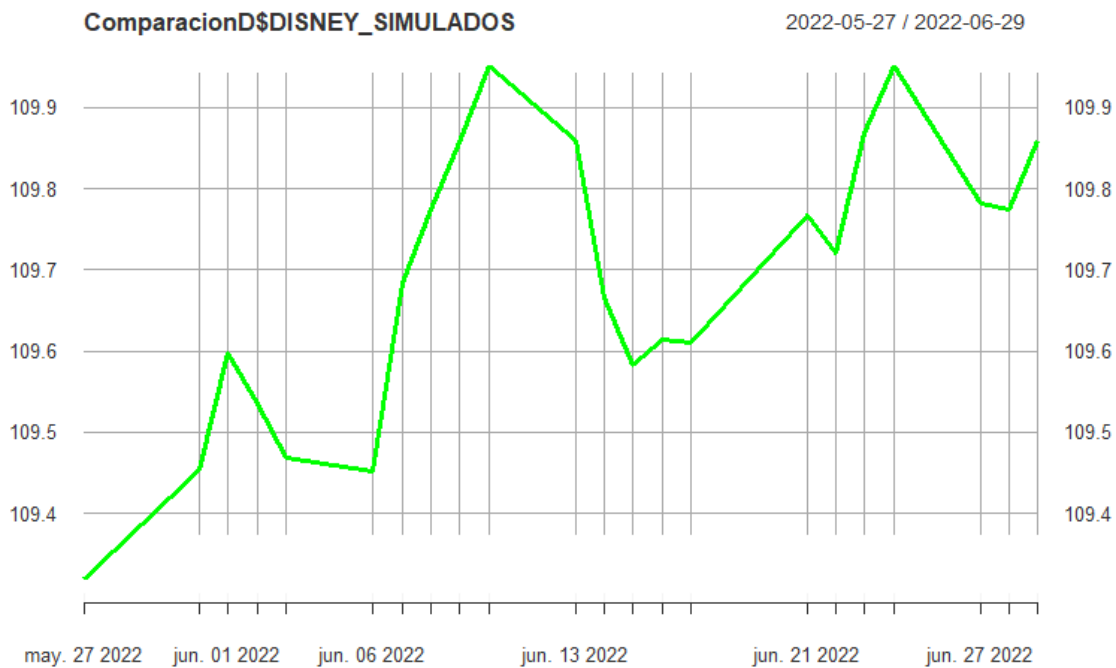


Figura 4.9: Predicción de los precios de Disney.
Fuente: Elaboración propia.

ción, es decir, se descargarán los precios de cierre de Disney, para poder hacer la comparación.

En la figura 4.10 podemos observar de manera gráfica la comparación de nuestros precios estimados contra los precios reales del activo, notemos que nuestra simulación pareciera una línea recta, sin embargo en la figura 4.9 podemos notar que esto no es así, sólo que la variación es pequeña, y los precios reales presentan una gran caída, lo cual no lo puede simular el GBM.

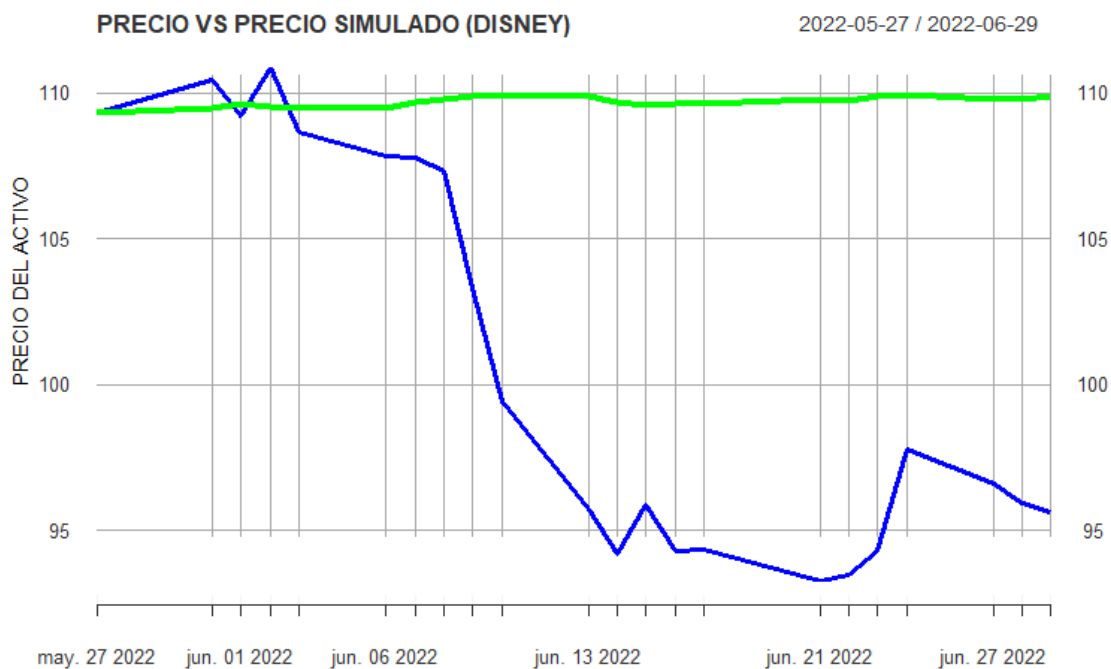


Figura 4.10: Predicción de los precios de Disney vs Precios reales.
Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

4.4.2. GBM Aplicado en Pfizer

Tenemos los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \mu &= 0.000357 \\ \sigma &= 0.014814 \\ \sigma^2 &= 0.000219 \\ S(0) &= 30.31309 \\ S(n) &= 53.91 \\ n &= 1612 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{n} \left(Ln \left(\frac{S(n)}{S(0)} \right) \right) = 0.000357156 \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 0.0.000219330040062322 \end{aligned}$$

Ahora que tenemos nuestros parámetros podemos utilizar nuestro código en Rstudio para realizar la simulación de los precios de Pfizer, y de esta manera predecir los próximos precios de esta acción.

Para este caso tomaremos como precio inicial S_0 el valor de 53.91, el cual corresponde al

	DISNEY	DISNEY_SIMULADOS	DIFERENCIA
2022-05-27	109.32	109.3200	0.0000000
2022-05-31	110.44	109.4548	0.9852263
2022-06-01	109.19	109.5978	-0.4077677
2022-06-02	110.87	109.5353	1.3346648
2022-06-03	108.67	109.4677	-0.7977415
2022-06-06	107.83	109.4528	-1.6228447
2022-06-07	107.79	109.6836	-1.8935561
2022-06-08	107.34	109.7739	-2.4339453
2022-06-09	103.30	109.8584	-6.5584083
2022-06-10	99.40	109.9520	-10.5520102
2022-06-13	95.71	109.8590	-14.1489714
2022-06-14	94.22	109.6653	-15.4453473
2022-06-15	95.88	109.5837	-13.7036864
2022-06-16	94.28	109.6134	-15.3333953
2022-06-17	94.34	109.6100	-15.2700391
2022-06-21	93.29	109.7676	-16.4776223
2022-06-22	93.50	109.7209	-16.2209491
2022-06-23	94.30	109.8678	-15.5677693
2022-06-24	97.78	109.9521	-12.1721111
2022-06-27	96.61	109.7823	-13.1723323
2022-06-28	95.92	109.7754	-13.8553756
2022-06-29	95.65	109.8601	-14.2100558

Figura 4.11: Diferencia entre los precios estimados y los precios reales.
Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

último valor de nuestra base de datos de los precios de Pfizer.

Generaremos 22 precios de esta acción, lo que corresponde al mes de junio del 2022, recordemos que en nuestra base de datos, se tomaron valores hasta mayo del mismo año.

Una vez generados nuestras predicciones los compararemos con los valores reales de la acción, es decir, se descargarán los precios de cierre de Pfizer, para poder hacer la comparación.

Se realizaron varias simulaciones y se obtuvo un promedio de las mismas, para poder realizar las comparación con los precios reales.

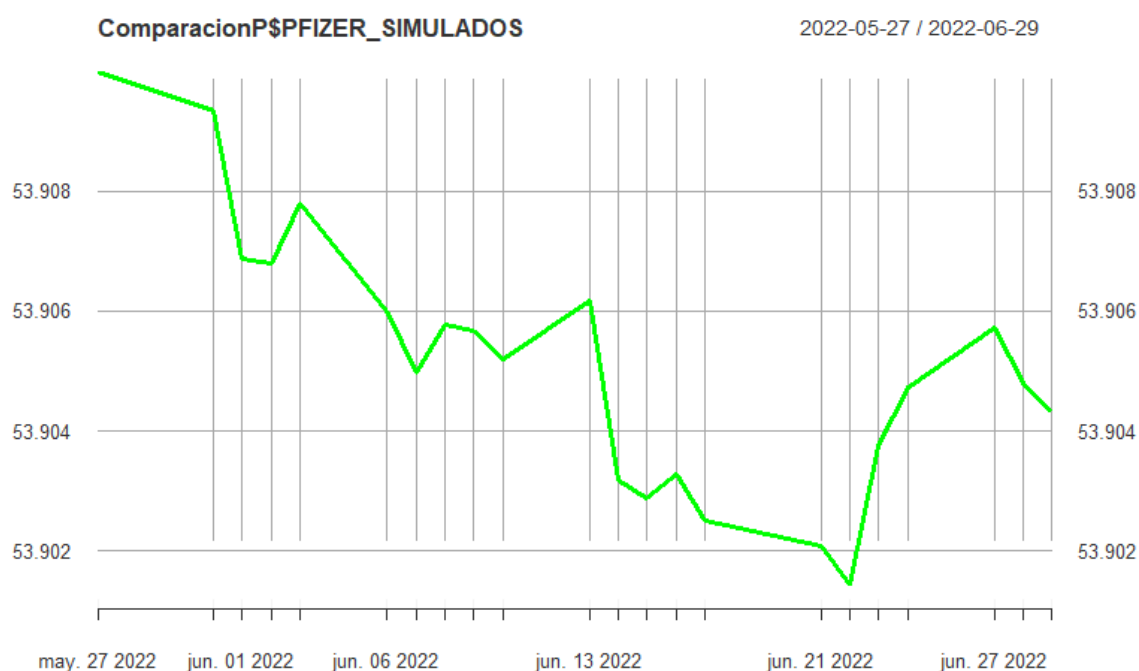


Figura 4.12: Predicción de los precios de Pfizer.
Fuente: Elaboración propia.

En la figura 4.13 podemos observar de manera gráfica la comparación de nuestros precios estimados contra los precios reales del activo. Notemos que para este periodo, nuestro activo presenta una caída grande, ya que comenzado en 53 llega a los 46.

Ahora bien, si miramos la Gráfica de la figura 4.12, podemos notar que tiene la misma forma, es decir, nuestra predicción pareciera ser correcta, pero notemos que en este caso la caída es de centesimas, por lo que en la figura 4.13, al realizar la comparación, nuestra predicción parece una línea recta en comparación al precio real.

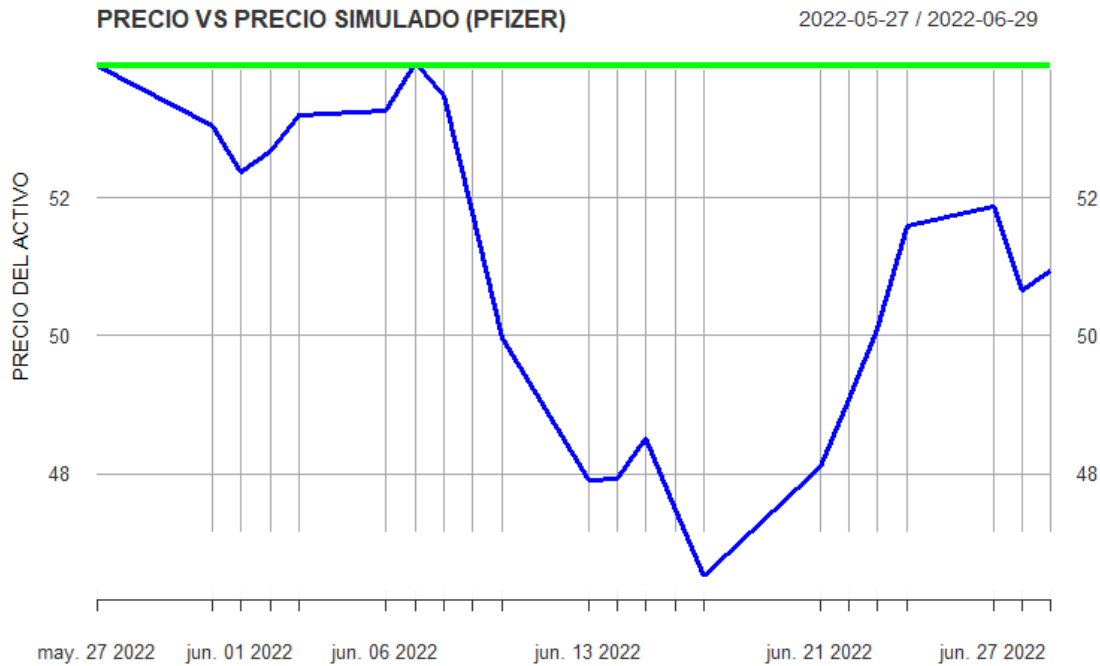


Figura 4.13: Predicción de los precios de Pfizer vs Precios reales.
Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

4.5. Aplicación del JDM

Para poder aplicar el Modelo de Difusión de Saltos, recordemos que necesitamos estimar varios parámetros, los que se mencionaron en la sección 3.3. Sin embargo, a diferencia del GBM, estos parámetros solo se pueden estimar mediante métodos numéricos, por lo que los estimaremos usando Rstudio por el método de máxima verosimilitud. La explicación del algoritmo la encontraremos en la sección de Anexos.

4.5.1. JDM Aplicado en Disney

Usando el método de máxima verosimilitud obtenemos los siguientes parámetros:

DISNEY	
mu	0.0456629427
Sigma	0.1516996412
mu_y	-0.0000118116
Sigma_y	0.0284559449
lambda	61.3208103331

Tabla 4.6: Parámetros para la simulación de DISNEY.
Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

Ahora, generamos 22 valores, de igual manera como se hizo en la aplicación del GBM, en el capítulo pasado. Tomando como precio inicial $S_0 = 109.32$.

	PFIZER	PFIZER_SIMULADOS	DIFERENCIA
2022-05-27	53.91	53.91000	0.00000000
2022-05-31	53.04	53.90934	-0.86934018
2022-06-01	52.37	53.90687	-1.53687474
2022-06-02	52.68	53.90680	-1.22680227
2022-06-03	53.20	53.90780	-0.70779586
2022-06-06	53.26	53.90600	-0.64600588
2022-06-07	53.96	53.90498	0.05501719
2022-06-08	53.47	53.90578	-0.43578089
2022-06-09	51.78	53.90567	-2.12566657
2022-06-10	49.97	53.90519	-3.93519143
2022-06-13	47.91	53.90618	-5.99618016
2022-06-14	47.92	53.90319	-5.98318703
2022-06-15	48.51	53.90287	-5.39287058
2022-06-16	47.48	53.90328	-6.42327586
2022-06-17	46.53	53.90252	-7.37251638
2022-06-21	48.11	53.90209	-5.79209005
2022-06-22	49.07	53.90144	-4.83144088
2022-06-23	50.09	53.90375	-3.81375090
2022-06-24	51.59	53.90474	-2.31473761
2022-06-27	51.88	53.90573	-2.02573372
2022-06-28	50.66	53.90481	-3.24480901
2022-06-29	50.94	53.90434	-2.96433618

Figura 4.14: Diferencia entre los precios estimados y los precios reales de Pfizer.
Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

Utilizando el mismo código que creamos en el capítulo 3, para la simulación del JDM, obtenemos la siguiente gráfica.

Podemos notar, como la gráfica muestra caídas y subidas en el valor del activo. Ahora, gráfiquemos los precios reales de Disney, para poder hacer la comparación de nuestra predicción y los valores reales.

De manera visual, figura 4.16, se observa que no difieren tanto, nuestros valores predichos con los precios reales. Esto podemos corroborarlo en la figura 4.17; en donde se nos muestra los valores numéricos del precio real, los precios obtenidos mediante el JDM y la diferencia que existe entre ambos valores.

Para lograr estos valores, se realizaron varias simulaciones y posteriormente se obtuvo un promedio de los valores para graficar los resultados.

Si sólo se realiza un simulación, esta podría parecerse o diferir más de la trayectoria real. Sin embargo ya obtenemos una noción más certera de como se comportará el activo en el futuro.

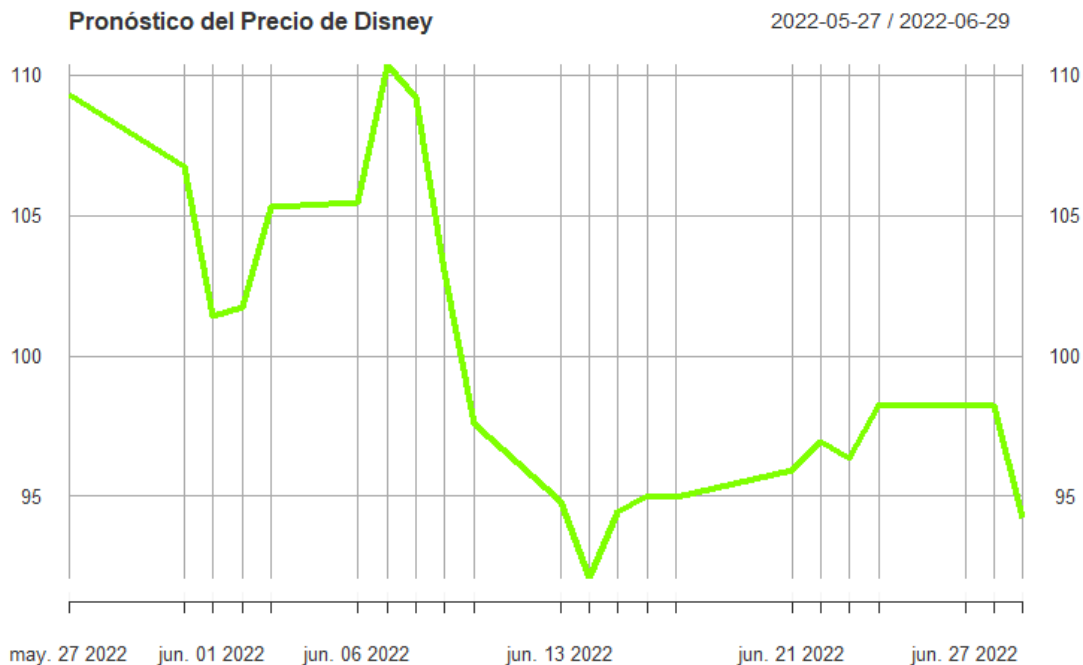


Figura 4.15: Predicción de los precios de Disney (JDM).
Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

4.5.2. JDM Aplicado en Pfizer.

De igual manera que en la sección anterior, aplicando el método de máxima verosimilitud obtenemos los siguientes parámetros:

Entonces generaremos 22 valores, de igual manera como se hizo en la aplicación del GBM, en el capítulo pasado. Tomando como precio inicial $S_0 = 53.91$ el cual corresponde al último valor de la base de datos que se utilizó para la estimación de los parámetros. Estos valores corresponden a

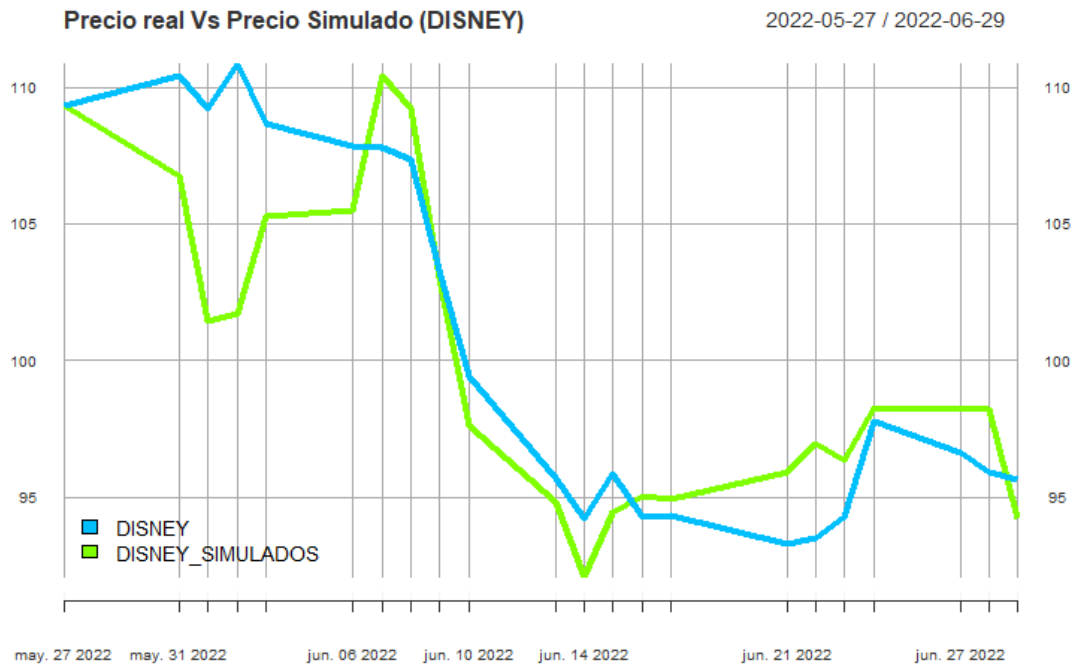


Figura 4.16: Comparación del precio de Disney vs Precios simulados (JDM).
Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

	DISNEY	DISNEY_SIMULADOS	DIFERENCIA
2022-05-27	109.32	109.32000	0.0000000
2022-05-31	110.44	106.77118	3.6688251
2022-06-01	109.19	101.42115	7.7688477
2022-06-02	110.87	101.72053	9.1494768
2022-06-03	108.67	105.28529	3.3847094
2022-06-06	107.83	105.46611	2.3638945
2022-06-07	107.79	110.39090	-2.6009002
2022-06-08	107.34	109.21502	-1.8750283
2022-06-09	103.30	103.02965	0.2703488
2022-06-10	99.40	97.60004	1.7999582
2022-06-13	95.71	94.82657	0.8834330
2022-06-14	94.22	92.11332	2.1066855
2022-06-15	95.88	94.45025	1.4297484
2022-06-16	94.28	95.03058	-0.7505771
2022-06-17	94.34	94.95203	-0.6120355
2022-06-21	93.29	95.91465	-2.6246527
2022-06-22	93.50	96.94080	-3.4407968
2022-06-23	94.30	96.37087	-2.0708700
2022-06-24	97.78	98.29575	-0.5157524
2022-06-27	96.61	98.22392	-1.6139209
2022-06-28	95.92	98.19762	-2.2776244
2022-06-29	95.65	94.21396	1.4360376

Figura 4.17: Comparación del precio de Disney vs Precios simulados (JDM).

Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

PFIZER	
mu	0.1177345477
Sigma	0.1397057606
mu_y	0.0009470938
Sigma_y	0.0222902599
lambda	69.9531811244

Tabla 4.7: Parámetros para la simulación de PFIZER.
Fuente: *Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.*

los precios de Pfizer del 27 de mayo al 30 de junio del 2022.
Esto para poder hacer la comparación de la predicción y los precios reales.

Utilizando el mismo código se utilizó para la simulación del JDM, obtenemos la siguiente gráfica.

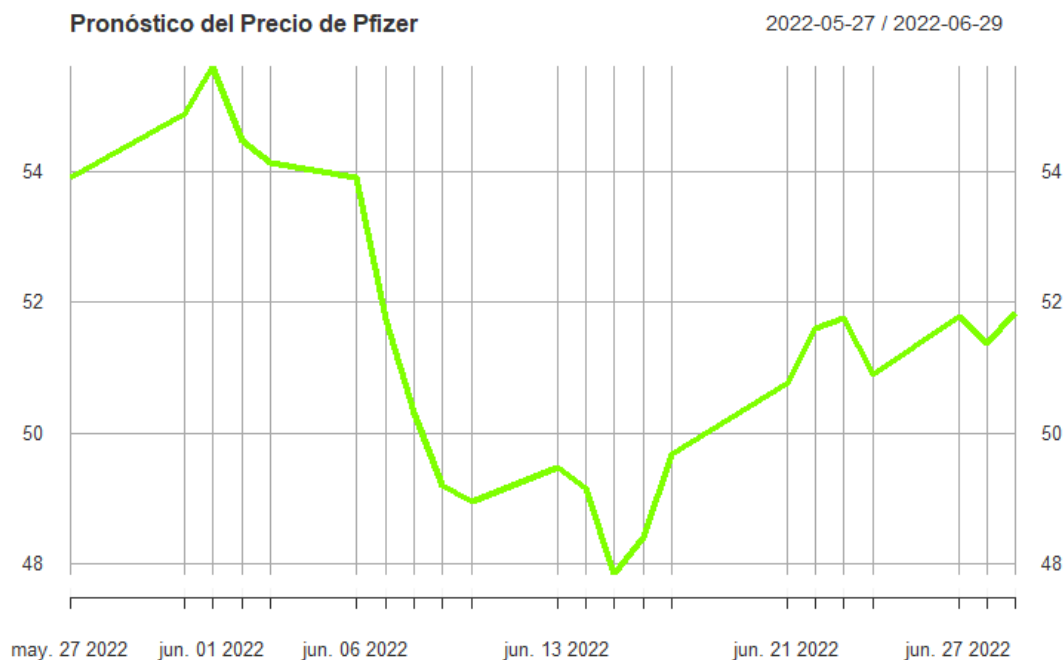


Figura 4.18: Predicción de los precios de Pfizer (JDM).
Fuente: *Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.*

Se observa, como la trayectoria del activo varía y muestra como puede cambiar el precio de un día con otro, inclusive los cambios, tanto a la alza como a la baja, son más grandes. Es decir se está simulado de manera correcta. Gráficamente notamos la similitud de las trayectorias, claramente no son exactas, pero si obtenemos valores muy cercanos, lo cual se verifica de manera analítica en la figura 4.20, en la cual tenemos una tabla donde las columnas son los precios reales de Pfizer, en el periodo que se mencionó anteriormente, los precios simulados y la diferencia entre estos precios.

De igual manera, la trayectoria en simulada, se obtuvo del promedio de varias simulacio-

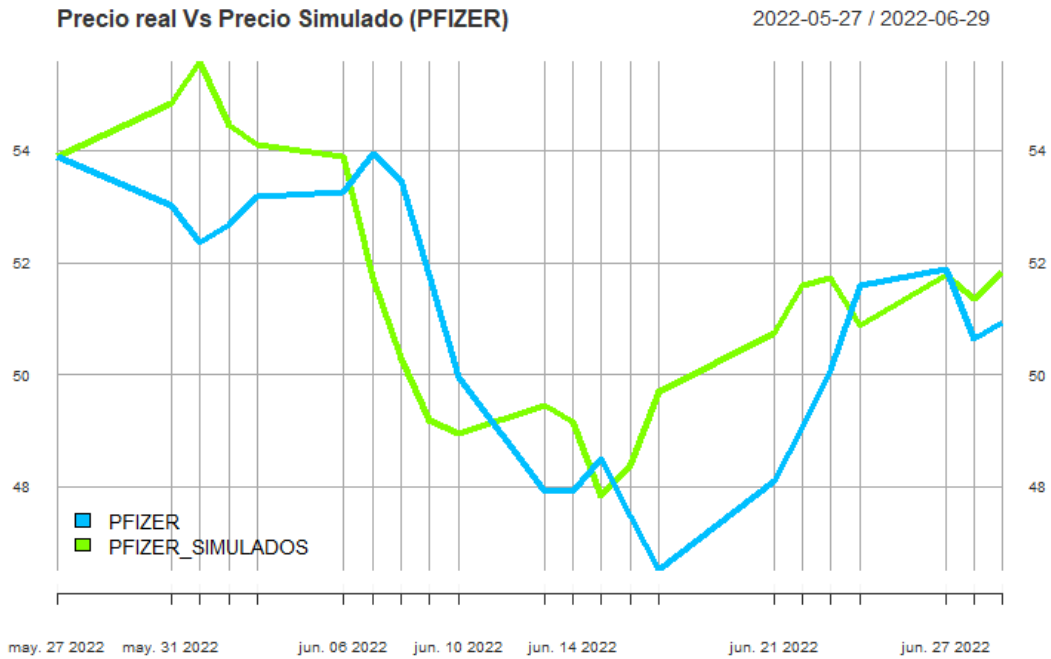


Figura 4.19: Comparación del precio de Pfizer vs Precios simulados (JDM).
Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

nes.

Cabe aclarar, que si se realiza otra vez el mismo proceso, se obtendrán valores diferentes, pero si serán parecidos con los aquí presentados.

	▲ PFIZER ▲	PFIZER_SIMULADOS ▲	DIFERENCIA ▲
2022-05-27	53.91	53.91000	0.00000000
2022-05-31	53.04	54.86126	-1.82125860
2022-06-01	52.37	55.60306	-3.23306061
2022-06-02	52.68	54.46248	-1.78247725
2022-06-03	53.20	54.12520	-0.92520269
2022-06-06	53.26	53.89552	-0.63552598
2022-06-07	53.96	51.73675	2.22324819
2022-06-08	53.47	50.30224	3.16776503
2022-06-09	51.78	49.19675	2.58325277
2022-06-10	49.97	48.94589	1.02411092
2022-06-13	47.91	49.46030	-1.55029718
2022-06-14	47.92	49.16100	-1.24100496
2022-06-15	48.51	47.85007	0.65992800
2022-06-16	47.48	48.40072	-0.92071675
2022-06-17	46.53	49.68243	-3.15243105
2022-06-21	48.11	50.76643	-2.65643384
2022-06-22	49.07	51.60261	-2.53260767
2022-06-23	50.09	51.74360	-1.65359567
2022-06-24	51.59	50.89669	0.69331156
2022-06-27	51.88	51.78558	0.09441961
2022-06-28	50.66	51.37471	-0.71471315
2022-06-29	50.94	51.84820	-0.90819762

Figura 4.20: Comparación del precio de Pfizer vs Precios simulados (JDM).
Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

Conclusión

En el presente documento desarrollamos y aplicamos el Movimiento Browniano Geométrico (MGB) y el Modelo de Difusión de Saltos (JDM), los cuales describen el comportamiento del precio de un activo. En este caso, se utilizaron los precios de Disney y Pfizer para la aplicación de los modelos.

En el capítulo 4, en las figuras 4.1 Y 4.2 observamos como se ha ido comportando el precio de cada acción desde enero 2016 a mayo 2022. Siendo los datos de Disney, donde se puede notar que presenta cambios considerables en periodos de tiempo muy cortos. Por otro lado, en el caso de Pfizer, los cambios considerables en el precio del activo, se presentan en periodos más grandes por lo que en primera instancia estos no se considerarían como "saltos". Ahora bien, en las gráficas de las figuras 4.3 (Rendimientos de Pfizer) y 4.3 (Rendimientos de Disney), podríamos considerar los valores que salen del intervalo $[-0.05, +0.05]$ como saltos, siendo en el caso de Disney donde se presentan más estos saltos. Es por esto que se aplican ambos modelos en ambas empresas, para poder compararlas en escenarios diferentes, puesto que lo que buscamos es ver en que casos se ajusta mejor un modelo.

Como se notó en el desarrollo de ambos modelos, la gran diferencia radica, en que en el JDM se incorpora un Proceso de Poisson Compuesto, lo cual nos proporciona los "saltos" que presenta el precio del activo. De esta forma, se puede modelar de mejor manera las trayectorias de los precios. Puesto que el GBM no reconoce estos cambios, y se ajusta mejor a datos con una trayectoria más constante, sin "saltos".

En la sección 4.4, se aplicó el Modelo Browniano Geométrico en ambos activos y se obtienen valores muy alejados de los precios reales. Esto no implica que el modelo sea malo. Sin embargo, para activos que de un día a otro, tiene cambios muy bruscos. Y como se observa en la figura 4.2, la trayectoria de Disney, presenta este tipo de saltos en todo el periodo de estudio, pero se notan más pronunciados, en los meses que corresponden a la pandemia. Por otro lado, en el caso de Pfizer, tiene un cambio grande al inicio de la pandemia, y de ahí en adelante presenta cambios a la alza, pero estos se dan de manera constante, por lo que no parecieran saltos. Pero como podemos observar en la Figura 4.13, al comparar nuestros precios estimados con los precios reales de Pfizer, estos están muy alejados unos de otros, por lo que el GBM, tampoco se ajustó en Pfizer.

En la sección 4.5, se implementó el Modelo de Difusión de Saltos en ambos activos. Para ello primero se estimaron los 5 parámetros que requiere el modelo. Esto se hizo con el código del Apéndice F. Ya con los valores de los parámetros, se puede aplicar el modelo en ambas acciones, obteniendo las gráficas de las figuras 4.15 y 4.18. Y se puede notar como estas gráficas ya presentan trayectorias más cercanas a los precios reales. Para el caso de Disney en la figura 4.16 se pueden comparar el precio real con el precio estimado, logrando estimar una trayectoria más parecida al comportamiento real y en la figura 4.17 tenemos la diferencia entre el valor estimado y el valor real de manera numérica. En el caso de Pfizer, tenemos el mismo comparativo en las figuras 4.19

y 4.20. Obteniendo los mismos resultados.

En ambos casos el Modelo de Difusión de Saltos se ajusto mucho mejor en comparación al Modelo Browniano Geométrico. Además, como se observó en las trayectorias estimadas con el GBM, al utilizarlo se obtienen valores muy alejados del precio real. Por lo que utilizarlo para hacer proyecciones sería un error. Sin embargo también depende de los datos históricos que se tengan, puesto que si utilizáramos un activo con rendimientos constantes, si sería conveniente utilizar el GBM.

En la actualidad, la mayoría de las acciones que cotizan en la Bolsa de Valores no tienen un comportamiento constante. Y las empresas muy grandes, como lo es Disney, el precio de sus acciones puede verse afectado por un comunicado, una filtración en Internet o incluso un Tweet. Siendo este último el que afecta, generalmente a la baja, el precio de un activo. Lo que hace que sea más volátiles. Por lo que la utilización de modelos más robustos para hacer proyecciones es lo más recomendable.

Como se pudo observar, la dificultad del JDM radica en la estimación de sus parámetros; pero actualmente existen muchos softwares y técnicas que nos ayudan a obtener una mejor estimación de estos. Lo que implica poder obtener mejores simulaciones en incluso poder utilizar modelos más complejos.

Apéndice A

Código para simular el Movimiento Browniano Geométrico

```
MBG<-function(simulaciones ,mu, sigma ,T, So){
  dt<-1/T
  paro<-T+1
  mm<- matrix(ncol = simulaciones , nrow =paro)
  for (i in 1:simulaciones) {
    mm[1,i] <- So
    for (h in 2:paro) {
      e <- rnorm(1)
      mm[h, i]<- mm[(h-1),i]*exp((mu-(sigma^2)/2)*dt+sigma*e*sqrt(dt))
    }
  }
  tt<-0:T
  matplot(tt, mm, type="l" , lwd=2 , lty=1 , main="Movimiento Browniano Geométrico ",
          ylab= "Precio del activo",
          xlab = "Tiempo en días")
  mm
}
```


Apéndice B

Código para simular el Modelo de Difusión de Saltos

```
JDM<-function(simulaciones ,mu, sigma , mu_y, sigma_y, lambda ,T, So){
  dt<-1/T
  paro<-T+1
  m2<- matrix(ncol = simulaciones , nrow =paro)
  for (i in 1:simulaciones) {
    m2[1, i] <- So
    for (h in 2:paro) {
      e <- rnorm(1)
      p<-rpois(1, lambda*dt)
      if (p==0) {
        salto<-0
      } else {
        salto<-sum((rnorm(p, mu_y, sigma_y)))
      }
      m2[h, i]<- m2[(h-1), i]*exp((mu-(sigma^2)/2)*dt+sigma*e*sqrt(dt)+salto)
    }
  }
  tt<-0:T
  matplot(tt ,m2, type="l", lwd=2, lty=1, main="Jump Diffusion Model",
          ylab= "Precio del activo",
          xlab = "Tiempo en días")
  precios_P<-data.frame(m2)
}
```


Apéndice C

Código para descargar los datos de Yahoo Finance

```
library(readxl)
library(BLCOP)
library(quantmod)
library(fBasics)
library(xtable)
library(car)
library("ggplot2")
#Obtencion de los datos
PFIZER <-getSymbols("PFE", src="yahoo",from = "2016-01-01", to ="2022-05-30",
                    periodicity= "daily",auto.assign = FALSE)
PFIZER_DATOS<-data.frame(PFIZER)
View(PFIZER_DATOS)
PFIZER<-(PFIZER[,c(4)])
DISNEY<-getSymbols("DIS", src="yahoo",from = "2016-01-01", to ="2022-05-30",
                    periodicity= "daily", auto.assign = FALSE)
DISNEY_DATOS<-data.frame(DISNEY)
View(DISNEY_DATOS)
DISNEY<-(DISNEY[,c(4)])
tail(DISNEY)
chart_Series(DISNEY)
chart_Series(PFIZER)
#Rendimientos
options(scipen=999)
ren_P<-NULL
ren_P<-na.omit(ROC(PFIZER))
#qq<-((ren_P-0.000357156)^2)/1612
#ppp<-sum(qq)
#ppp
ren_D<-NULL
ren_D<-na.omit(ROC(DISNEY))
colnames(ren_P)<- "Rendimientos PFIZER"
colnames(ren_D)<- "Rendimientos DISNEY"
chart_Series(ren_P,col = "blue")
chart_Series(ren_D)
```

Código para descargar los datos de Yahoo Finance

```
plot(ren_P, main=" ", col="deepskyblue", xlab="Fecha", ylab="Rendimientos")
title(main="Rendimientos de PFIZER")
plot(ren_D, main=" ", col="deepskyblue", xlab="Fecha", ylab="Rendimientos")
title(main="Rendimientos de DISNEY")
DOS<-cbind(ren_D,ren_P)
ren<-data.frame(DOS)
sR<-basicStats(ren)
xtable(sR, digits=6)
```

Apéndice D

Código para aplicar el MGB a Disney

```
#####PREDICCIÓN DISNEY CON GBM#####
simulaciones <- 100
mu <- -0.00003706239
sigma <- -0.01747499
T <- 21
So <- -109.32
dt <- 1/T
paro <- T+1
mm <- matrix(ncol = simulaciones, nrow = paro)
for (i in 1:simulaciones) {
  mm[1, i] <- So
  for (h in 2:paro) {
    e <- rnorm(1)
    mm[h, i] <- mm[(h-1), i] * exp((mu - (sigma^2)/2) * dt + sigma * e * sqrt(dt))
  }
}
tt <- 0:T
matplot(tt, mm, type="l", lwd=2, lty=1, main="Movimiento Browniano Geométrico",
        ylab="Precio del activo",
        xlab="Tiempo en días")
S_simulados <- matrix(ncol = 1, nrow = paro)
S_simulados <- rowMeans(mm)
S_simulados
DISNEY2 <- getSymbols("DIS", src="yahoo", from = "2022-05-27", to = "2022-06-30",
                    periodicity = "daily", auto.assign = FALSE)
DISNEY_DATOS2 <- data.frame(DISNEY2)
DISNEY2 <- (DISNEY2[, c(4)])
difer <- DISNEY2 - S_simulados
difer
ComparacionD <- cbind(DISNEY2, S_simulados, difer)
colnames(ComparacionD) <- list("DISNEY", "DISNEY_SIMULADOS", "DIFERENCIA")
View(ComparacionD)
plot(ComparacionD$DISNEY_SIMULADOS, col="green", lwd=3)
plot(ComparacionD$DISNEY, col="deepskyblue", lwd=3)
```

```
plot (ComparacionD$DISNEY , type="l " , col="blue " , lwd=3 ,
      main="PRECIO VS PRECIO SIMULADO (DISNEY)" ,
      ylab="PRECIO DEL ACTIVO" , las=1 , col.axis="red ")
lines (ComparacionD$DISNEY_SIMULADOS , col="green " , lwd=4)
legend (" bottomleft " , col=c (" blue " , " green " ) ,
       legend =c (" Precio real " , " Precio simulado " ) , lwd=3 , bty = "n ")
```


Apéndice E

Código para aplicar el MGB a Pfizer

```
#####PREDICCION PFIZER CON GBM#####
simulaciones <-100
mu<-0.0000357156
sigma <-0.000219330040062322
T<-21
So<-53.91
dt<-1/T
paro<-T+1
mm<- matrix(ncol = simulaciones , nrow =paro)
for (i in 1:simulaciones) {
  mm[1,i] <- So
  for (h in 2:paro) {
    e <- rnorm(1)
    mm[h, i]<- mm[(h-1),i]*exp((mu-(sigma^2)/2)*dt+sigma*e*sqrt(dt))
  }
}
tt<-0:T
matplot(tt,mm,type="l",lwd=2,lty=1,main="Movimiento Browniano Geométrico",
        ylab="Precio del activo",
        xlab="Tiempo en días")
S_simuladosP<-matrix(ncol = 1, nrow =paro)
S_simuladosP<-rowMeans(mm)
S_simuladosP
PFIZER2<-getSymbols("PFE", src="yahoo",from = "2022-05-27", to = "2022-06-30",
                    periodicity="daily", auto.assign = FALSE)
PFIZER_DATOS2<-data.frame(PFIZER2)
PFIZER2<-(PFIZER2[,c(4)])
difer<-PFIZER2-S_simuladosP
difer
ComparacionP<-cbind(PFIZER2,S_simuladosP,difer)
colnames(ComparacionP)<-list("PFIZER" , "PFIZER_SIMULADOS", "DIFERENCIA")
View(ComparacionP)
plot(ComparacionP$PFIZER_SIMULADOS,col="green",lwd=3)
plot(ComparacionP$PFIZER,col="deepskyblue",lwd=3)
plot(ComparacionP$PFIZER,type="l",col="blue",lwd=3,
     main="PRECIO VS PRECIO SIMULADO (PFIZER)",
```

Código para aplicar el MGB a Pfizer

```
ylab="PRECIO DEL ACTIVO", las=1, col.axis="red")
lines(ComparacionP$PFIZER_SIMULADOS, col="green", lwd=4)
legend("bottomleft", col=c("blue", "green"),
       legend=c("Precio real", "Precio simulado"), lwd=3, bty="n")
```

Apéndice F

Código para aplicar el JDM a Pfizer

El siguiente código se encuentra en la pagina web:

<https://rdr.io/github/shill1729/FeynmanKacSolver/src/R/merton.R>

Por lo que se utilizó como una herramienta que ya se encontraba creada.

```
#' Estimación de los parámetros del jump-diffusion model (JDM) por MLE
dmerton1 <- function(x, t, drift, volat, lambda, a, b)
{
  # 200 debería ser suficiente.
  n <- 0:200
  p <- stats::dpois(n, lambda = lambda*t)
  phi <- stats::dnorm(x, drift*t+n*a, sqrt(t*volat^2+n*b^2))
  sum(p*phi)
}
dmerton <- function(x, t, drift, volat, lambda, a, b)
{
  if(length(x)==1)
  {
    dmerton1(x, t, drift, volat, lambda, a, b)
  } else
  {
    mapply(function(X){
      dmerton1(X, t, drift, volat, lambda, a, b)
    }, X = x)
  }
}

#'
#' log_returns Logaritmo de los retornos de los activos
#' thresh_hold Medida del umbral
#' tn Años observados
#' time_step tamaño de los pasos (1/252).
#' compensate Tomar la media como compensada o no
#' direction estimar los saltos en que direccion (arriba, abajo o ambas)
#' @description {Estimación de los parámetros para el jump-diffusion model
#' dado un conjunto de variables, usando MLE y R's basic \code{optim} function.}
```

```

#' @return list
#' @export merton_mle
merton_mle <- function(log_returns, thresh_hold , tn, time_step,
                       compensate, direction)
{
  if(direction == "both")
  {
    jumps <- abs(log_returns) > thresh_hold
  } else if(direction == "down")
  {
    jumps <- log_returns < -thresh_hold
  } else if(direction == "up")
  {
    jumps <- log_returns > thresh_hold
  }

  lambda1 <- sum(jumps)/tn
  if(!compensate)
  {
    volat1 <- stats::sd(log_returns[!jumps])/(sqrt(time_step))
    mu1 <- (2*mean(log_returns[!jumps]+(time_step)*volat1^2))/(2*time_step)
    volatj <- sqrt(stats::var(log_returns[jumps])-(time_step)*volat1^2)
    muj <- mean(log_returns[jumps])-(mu1-volat1^2/2)*(time_step)
  } else {
    volat1 <- stats::sd(log_returns[!jumps])/(sqrt(time_step))
    volatj <- stats::sd(log_returns[jumps])
    muj <- mean(log_returns[jumps])
    eta1 <- exp(mu1+0.5*volatj^2)-1
    mu1 <- mean(log_returns[!jumps])/time_step+0.5*volat1^2+lambda1*eta1
  }

  initial_v <- c(mu1, volat1, lambda1, muj, volatj)
  print("Initial estimate")
  print(initial_v)

  Sys.sleep(2)

  log_lik <- function(v)
  {
    eta <- exp(v[4]+0.5*v[5]^2)-1
    -sum(log(dmerton(log_returns, t = time_step, drift = v[1]-v[3]*eta-0.5*v[2]^2,
                    volat = v[2], lambda = v[3], a = v[4], b = v[5])))
  }
  mle <- stats::optim(par = initial_v, fn = log_lik, method = "L-BFGS-B",
                    control = list(trace = 5), lower = c(-1, 0.001, 0, -1, 0.001))
  return(mle)
}

```

Con los parámetros obtenidos con este código, se introducen en el código del Apéndice B, para de esta manera realizar la simulación del JDM.

Bibliografía

- [1] BRIGO D., DALESSANDRO A., NEUGEBAUER M. Y TRIKI F. (2007), *A Stochastic Processes Toolkit for Risk Management*. Disponible en: <https://doi.org/10.2139/ssrn.1109160>
- [2] JOHN(2021), *Merton Jump Diffusion Model with Python*, CodeArmo. Disponible en: <https://www.codearmo.com/python-tutorial/merton-jump-diffusion-model-python>
- [3] MOLINERO L. (2003), *¿Qué es el método de estimación de Máxima Verosimilitud y cómo se interpreta?*, SEHLELHA. Disponible en: <https://seh-lelha.org/que-es-el-metodo-de-estimacion-de-maxima-verosimilitud-y-como-se-interpreta/>
- [4] MORA, C. (2023), *Comprar Acciones de Disney 2023 ¿Es buen momento?* Admirals. Disponible en: <https://admiralmarkets.com/es/education/articles/shares/comprar-acciones-disney>
- [5] MORA, C. (2022), *¿Momento de invertir en Pfizer? ¡No te pierdas este análisis!* Admirals. Disponible en: <https://admiralmarkets.com/es/education/articles/shares/comprar-acciones-pfizer>
- [6] ØKSENDAL B. (2000), *Stochastic differential equations: an introduction with applications - 5th ed.*, Springer-Verlag Heidelberg, New York.
- [7] RINCÓN, L. (2012), *Introducción a la teoría del riesgo*, UNAM, México.
- [8] RINCÓN, L. (2012), *Introducción a los procesos estocásticos*, UNAM, México.
- [9] ROSS, S. (2010), *A first course in probability - 8th ed.*, Pearson, New Jersey.
- [10] ROSS, S. (1996), *Stochastic Processes - 2nd ed.*, John Wiley and Sons, New York.
- [11] SUAY, F. (2007), *Procesos Estocásticos para Ingenieros: Teoría y Aplicaciones*, Departamento de Estadística e Investigación Operativa de Valencia, España.
- [12] TRUJILLO J. (2011), *Estimación de parámetros en ecuaciones diferenciales estocásticas aplicadas a finanzas*, Revista ODEON. 6. Disponible en: <https://revistas.uexternado.edu.co/index.php/odeon/article/view/3325/2975>
- [13] PÁGINA WEB: <https://es-us.finanzas.yahoo.com/quote/DIS/>
- [14] PÁGINA WEB: <https://finance.yahoo.com/quote/PFE/>
- [15] PÁGINA WEB: <https://rdr.io/github/shill1729/FeynmanKacSolver/src/R/merton.R>
- [16] PÁGINA WEB: <https://tereom.github.io/fundamentos>