



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Postgrado en Ciencias Físico Matemáticas

Estabilización robusta de los sistemas mecánicos inestables

Tesis que presenta el M.C. Gustavo Mendoza Torres,
para obtener el grado de

Doctor en Ciencias Matemáticas

Autor

M.C. Gustavo Mendoza Torres

Directores de Tesis

**Vladimir V. Alexandrov
Alexandre Grebenikov**



Facultad de Ciencias
Físico Matemáticas

Puebla, Puebla.

Marzo del 2015

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Posgrado en Ciencias Físico Matemáticas

**Estabilización robusta de los sistemas
mecánicos inestables**

Tesis que presenta el M.C. Gustavo Mendoza Torres para obtener el
grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Autor

Gustavo Mendoza Torres

Directores de tesis

Vladimir Alexandrov. Y Alexandre Grebenikov

Puebla, Pue.

Marzo del 2015

Índice

1. Antecedentes y planteamiento Matemático	6
1.1. Estabilidad por Lyapunov	6
1.2. Análisis de la estabilidad por la primera aproximación	9
1.3. Controlabilidad completa y estabilización asintótica	10
1.4. Estabilización	12
1.5. Teorema de Thikhonov	16
1.6. Teoremas de Thomson y Tait	16
1.7. Influencia de la estructura de las fuerzas en la estabilidad del movimiento	19
1.8. Estabilidad bajo perturbaciones permanentes	27
1.9. Planteamiento	30
2. Análisis de la estabilidad robusta y síntesis de la estabilización mini-max del sistema mecánico	32
2.1. Estabilización asintótica de minimax cuando hay perturbacio- nes iniciales	32
2.1.1. Reducción del problema de estabilización asintótica mi- nimax al problema de programación no lineal	32
2.1.2. Ejemplo 1.1	37
2.2. Algoritmo de estimación de la calidad para estabilidad robusta	43
2.2.1. Solución al problema interno	44
2.3. Sobre la posibilidad de optimizar la calidad de estabilización robusta	46
2.3.1. Ejemplo 1.3	46
2.3.2. Estimación del conjunto de accesibilidad con desigual- dades matriciales	49
2.3.3. Ejemplo 1.2 (Comparación de algoritmos para $k_1 = 2$) .	52
3. Modelación Matemática del péndulo invertido movable	56
3.1. Modelo Matemático no-lineal del péndulo invertido movable . .	56
3.2. Restricciones cinemáticas y ecuaciones con multiplicadores de Lagrange	59

3.3. Modelo no-lineal del sistema con Multiplicadores de Lagrange	63
3.4. Modelo lineal del sistema controlable	63
3.5. Reducción a un sistema de orden 3 con ayuda del Teorema de Tikhonov	65
3.6. Información necesaria para estabilizar la posición vertical del péndulo movable	69
3.7. Modelo lineal del sistema cerrado con perturbaciones	73
4. Algoritmo numérico para determinar los parámetros de esta- bilización en un sistema de tres variables	74
4.1. Introducción a la aplicación del algoritmo	74
4.2. Algoritmo de estabilización de minimax cuando tenemos per- turbaciones iniciales ($r(t) \equiv 0$)	79
4.3. Aplicación del método numérico para buscar parámetros opti- males de control	85

Introducción

Un sistema de control es un tipo de sistema dinámico que se caracteriza por tener una serie de elementos que permiten influir en el funcionamiento del sistema ya sea mecánico, eléctrico, etc. El sistema de control debe ser capaz de conseguir su objetivo, garantizando que las soluciones del sistema se aproximen a una solución dada, a esta condición en un sistema de control se le llama estabilidad y debe ser robusto frente a perturbaciones externas o internas. Los elementos básicos que basados en sus mediciones, forman parte de un sistema de control, y que generan las variables de entrada, valores que se aplican al sistema de control y permiten su manipulación son: sensores, controlador, actuadores.

Los sensores nos permiten conocer los valores de las variables de medida del sistema. El controlador utilizando los valores determinados por los sensores, calcula la acción que se aplica para modificar las variables. Los actuadores son mecanismos que van a ejecutar la acción calculada por el controlador y que modifican las variables del control. En un sistema de control podemos considerar cuatro variables, las perturbaciones, las variables controladas, las variables de control y las variables de medidas.

En este trabajo, nos enfocaremos en las perturbaciones. Por ejemplo; un avión se diseña para funcionar sin problemas en cierto rango de la velocidad del viento, entonces cuando el viento excede de esta velocidad, a estas fuerzas se les consideran perturbaciones externas, pero si las perturbaciones son originadas por errores en alguno de los sensores, entonces se les llaman perturbaciones internas.

Uno de los objetivos de un sistema de control es garantizar la estabilidad del sistema. En el presente trabajo se estabiliza el sistema considerando perturbaciones internas, es decir, errores en los sensores. Consideramos que la información generada es información incompleta e inexacta.

En la primera parte del trabajo, presento la teoría de estabilidad, también

las condiciones para que ésta ocurra. En la segunda sección justificamos los algoritmos de mini-max que emplearemos para estabilizar los sistemas, además aplicamos los algoritmos para el sistema con un grado de libertad. En la tercera sección presentamos un sistema con dos grados de libertad, en el sistema de la tercera sección se consideraron las restricciones del sistema para obtener el modelo matemático. En la última parte presentamos las conclusiones.

1. Antecedentes y planteamiento Matemático

1.1. Estabilidad por Lyapunov

Para hacer posible la descripción matemática de un fenómeno real cualquiera, inevitablemente hay que simplificarlo, idealizarlo haciendo resaltar y tomando en cuenta sólo los factores más sustanciales que actúan sobre éste y despreciando los menos considerables. Entonces surge inevitablemente el problema sobre si fueron correctamente escogidas o no las suposiciones de simplificación. Es posible que los factores no considerados influyan fuertemente sobre el fenómeno estudiado, y cambien sus características cuantitativas, y aún cualitativas. En última instancia esta cuestión se resuelve en la práctica, viendo si corresponden o no las conclusiones obtenidas con los datos del experimento, pero de todas formas en muchos problemas se pueden señalar las condiciones bajo las cuales ciertas simplificaciones no son posibles.

Si cierto fenómeno se describe [1] por medio del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy_i}{dt} = \phi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

las cuales por lo general son el resultado de ciertas mediciones y por lo tanto, han sido obtenidas inevitablemente con cierto error, entonces surge el problema sobre la influencia de pequeñas variaciones de las condiciones iniciales sobre la solución buscada.

Si variaciones arbitrarias pequeñas de los valores iniciales pueden cambiar mucho la solución, entonces la solución determinada por las condiciones iniciales inexactas que hemos elegido no tiene comúnmente ningún valor práctico y no puede describir ni siquiera aproximadamente el fenómeno estudiado.

Por consiguiente, surge el problema, de gran importancia práctica, de hallar las condiciones bajo las cuales una variación suficientemente pequeña de los valores iniciales ocasiona una variación arbitrariamente pequeña de la solución.

Si t varía en el intervalo finito $t_0 \leq t \leq T$, entonces la solución a este problema la da el teorema sobre la dependencia continua de la solución con respecto a las condiciones iniciales. Si, en cambio, t puede tomar valores arbitrariamente

grandes, de este caso se ocupa la teoría de la estabilidad.

La solución $\phi_i(t)$ del sistema (1) se llama estable o, más exactamente, estable según Lyapunov, si para cualquier $\epsilon > 0$ se puede escoger un $\delta(\epsilon) > 0$ tal que para cualquier solución $y_i(t)$ de dicho sistema cuyos valores iniciales satisfacen las desigualdades

$$|y_i(t_0) - \phi_i(t_0)| < \delta(\epsilon) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

se cumplen, para todas las $t \geq t_0$, las desigualdades

$$|y_i(t) - \phi_i(t)| < \epsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

es decir, las soluciones cercanas respecto a sus valores iniciales permanecen cercanas para todas las $t \geq t_0$.

Si para un $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño, por lo menos para una solución $y_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) las desigualdades (2) no se cumplen, entonces la solución $\phi_i(t)$ se llama *inestable*. Las soluciones inestables rara vez son de interés práctico.

Si la solución $\phi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) no sólo es estable, sino que además satisface la condición

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i(t) - \phi_i(t)| = 0, \quad (3)$$

si $|y_i(t_0) - \phi_i(t_0)| < \delta_1$, y $\delta_1 > 0$, entonces la solución $\phi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) se llama *asintóticamente estable*.

Observación: La condición (3) descrita en [1] aún no implica la estabilidad de la solución $\phi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Transformemos el sistema de ecuaciones (1) a nuevas variables, haciendo

$$x_i = y_i - \bar{y}_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Las nuevas funciones desconocidas x_i serán las desviaciones $y_i - \bar{y}_i(t)$ de las funciones desconocidas anteriores de las funciones $y_i(t)$, las cuales determinan la solución cuya estabilidad se investiga.

En virtud de (5) el sistema (4) en las nuevas variables toma la forma

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{dy_i}{dt} + \phi_i(t, x_1 + \bar{y}_1, x_2 + \bar{y}_2, \dots, x_n + \bar{y}_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Evidentemente a la solución cuya estabilidad se estudia $y_i = \bar{y}_i(t)$ del sistema (4) le corresponde, debido a la dependencia $x_i = y_i - \bar{y}_i(t)$, la solución trivial $x_i = 0$ del sistema (5) y el estudio de la estabilidad de la solución $y_i = \bar{y}_i$ del sistema (1) puede sustituirse por la investigación de la estabilidad de la solución trivial del sistema (5). Por esto en adelante sin limitaciones de la generalidad podemos considerar que se investiga la estabilidad de la solución trivial o lo que es lo mismo, del punto de reposo del sistema de ecuaciones, situado en el origen de coordenadas.

Formulemos las condiciones de estabilidad aplicadas al punto de reposo $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

El punto de reposo $x_i \equiv 0$ del sistema (6) es estable según Lyapunov, si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon) > 0$ tal que de la desigualdad

$$|x_i(t_0)| < \delta(\epsilon) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

se deduce que

$$|x_i(t)| < \epsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

para todo $t \geq T \geq t_0$.

En otras palabras: el punto de reposo $x_i \equiv 0$ es estable según Lyapunov, si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta_1(\epsilon) > 0$ tal que de la desigualdad

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(t_0) < \delta_1^2(\epsilon)$$

se deduce que

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(t) < \epsilon^2$$

para $t \geq T$, es decir, la trayectoria cuyo punto inicial se encuentra en el δ_1 entorno del origen de coordenadas para $t \geq T$ no sale fuera de los límites del ϵ entorno de dicho punto.

1.2. Análisis de la estabilidad por la primera aproximación

Para el análisis de la estabilidad del punto de reposo $x_i = 0$ del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

donde f_i es una función derivable en un entorno del origen de coordenadas, se aplica con frecuencia el siguiente método: como la función $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ es derivable, el sistema (7) en un entorno del origen de coordenadas $x_i = 0$ puede representarse en la forma

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + r_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

donde las r_i son infinitésimos de orden mayor que 1 con respecto a $\|x_i\|$, luego de esto, en lugar de investigar la estabilidad del punto de reposo $x_i = 0$ del sistema (8), se analiza la estabilidad de este mismo punto del sistema lineal

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

llamado *sistema de ecuaciones de primera aproximación* respecto al sistema (8). Las condiciones de aplicabilidad de este método, utilizado durante mucho tiempo sin ninguna base, fueron analizadas detalladamente por A.M. Lyapunov y otros.

El análisis de la estabilidad del sistema de ecuaciones de primera aproximación, claro está, es un problema mucho más fácil que el estudio del sistema original, en general no lineal, sin embargo aún la investigación del sistema lineal (9) con coeficientes $a_{ij}(t)$ variables es un problema muy complejo. Si, en cambio, todas las a_{ij} son constantes, es decir, si el sistema es estacionario en primera aproximación, la investigación de la estabilidad del sistema lineal (1.9) no posee dificultades.

Teorema 1 [1] *Si el sistema de ecuaciones (7) es estacionario en primera aproximación, si todos los términos r_{ij} , en un entorno suficientemente pequeño del origen de coordenadas, cuando $t \geq T \geq t_0$, satisfacen las desigualdades $|r_i| \leq N(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2+\alpha}$, donde N y α son constantes, y $\alpha > 0$ y si todas las raíces de la ecuación característica:*

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

tiene partes reales negativas entonces las soluciones triviales del sistema de ecuaciones (7) y del sistema (8) son asintóticamente estables, por lo tanto, en este caso es posible el análisis de la estabilidad por la primera aproximación.

Teorema 2 [1] *Si el sistema de ecuaciones (7) es estacionario en primera aproximación, si todas las funciones r_i satisfacen las condiciones del teorema anterior y si por lo menos una raíz de la ecuación característica (10) tiene parte real positiva, entonces los puntos de reposo del sistema (7) y del (8) son inestables. En consecuencia, en este caso también es posible investigar la estabilidad por la primera aproximación.*

Los teoremas (1) y (2) desde el punto de vista de las limitaciones que imponen a las raíces de la ecuación característica, no abarcan solamente el llamado caso crítico, o sea, cuando todas las partes reales de las raíces de la ecuación característica no son positivas y además la parte real de por lo menos una raíz es igual a cero.

En el caso crítico, los términos no lineales r_i comienzan a influir sobre la estabilidad de la solución trivial del sistema (7) y la investigación de la estabilidad por la primera aproximación en general no es posible.

1.3. Controlabilidad completa y estabilización asintótica

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad u(\cdot) \in W \quad (11)$$

A es una matriz constante de dimensión $n \times n$, B es una matriz constante de $n \times 1$ y x es el vector de estado y $u(\cdot)$ es llamado control que es un funcional y W es un conjunto funcional que abarca las restricciones del control. En esta sección explicamos la influencia de u sobre el vector de estado x , posteriormente analizamos la estabilización asintótica.

Es claro que si $B = 0$ el sistema (11) no puede controlarse. Cuando $B \neq 0$ el sistema se denomina controlable. Supóngase que al momento inicial se le denota $x(0) = 0$, y denótese por D al *conjunto de accesibilidad* en el espacio de estado, que es el conjunto de todas las $x \in R^n$ a las que se puede acceder con un control u en un tiempo dado t_1 que cumple $0 < t_1 < \infty$.

La matriz por bloques $U = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ se llama *matriz de controlabilidad*.

Lema 3 [2],[3] *Si $\text{rang}U = n$, entonces, el conjunto de accesibilidad D es una región convexa en R^n y $\dim D = n$.*

Supongamos que $\bar{\Omega} = R^s$, es decir que los controles $u_1(t), \dots, u_s(t)$ pueden tomar cualesquiera de los valores en el espacio de controles R^s . En este caso es efectivo el concepto de controlabilidad completa.

los controles $u_i(t)$ $i = 1, \dots, s$ pueden tomar cualquier valor en el espacio de controles R^s . En este caso es efectivo el concepto de controlabilidad completa.

Definición 4 [2] *El sistema (11) es completamente controlable si le puede llevar de cualquier estado inicial a uno final cualquiera por medio de un control $u(t)$ para $0 < t < \infty$.*

En virtud de la linealidad de (16) el origen puede tomarse como el punto inicial. Entonces la noción de controlabilidad completa corresponde al caso en que la región de accesibilidad D coincide con el espacio R^n .

Definición 5 [2] *El sistema (11) se denomina completamente controlable si la región de accesibilidad D coincide con el espacio R^n .*

El cálculo del rango de la matriz U proporciona un criterio constructivo de controlabilidad total.

Teorema 6 [2] *El sistema (1.13) es completamente controlable si y sólo si $\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$.*

Corolario 7 [2] *Para $s = 1$ el criterio de controlabilidad total se puede escribir en forma más simple $\det(B, AB, \dots, A^{n-1}B) \neq 0$.*

En el caso anterior el sistema se dice que es de una sola entrada y se puede escribir como;

$$\dot{x} = Ax + bu_1,$$

b es una matriz de la forma $(1, 0, \dots, 0)^T$.

1.4. Estabilización

Suponemos que el sistema mecánico controlable, es gobernado por el sistema de ecuaciones

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{12}$$

donde A es una matriz de dimensión $n \times n$ constante, x es el vector de estado en R^n , B una matriz de $n \times 1$, está provisto con sensores, los cuales informan sobre las perturbaciones que ocurren en x . Entonces es posible establecer el control de la forma $u = kx$ y la búsqueda de los elementos de la matriz k que aseguran estabilidad.

Definición 8 [2],[3] *El sistema lineal (12) se dice estabilizable, si existe una matriz k tal que para $u = kx$ la solución trivial de (12) es asintóticamente estable.*

La noción de estabilidad está directamente relacionada con la noción de controlabilidad completa.

Teorema 9 [2] *Un sistema (12) completamente controlable es estabilizable.*

Analicemos la técnica de estabilización, esto es, al estado de síntesis de retroalimentación $s = 1$ y $m = n$ y donde $\det H \neq 0$:

$$\dot{x} = Ax + bu_1 \quad x(0) = 0 \quad (13)$$

$$\tilde{z} = Hx \quad (A, b, H \text{ constantes}) \quad (14)$$

Denotemos por $\lambda_i = \nu_i + i\mu_i$ a los eigenvalores de la matriz A donde ν_i y μ_i son reales.

Supóngase que $u_1 = 0$. Una solución arbitraria de (12) puede escribirse como

$$x_j(t) = \sum_k \bar{c}_k P_{kj}(t) \operatorname{sen} \mu_k t e^{\nu_k(t)} + \sum_k \bar{c}_k Q_{kj}(t) \operatorname{cos} \mu_k t e^{\nu_k(t)} \quad (15)$$

En virtud de (13), la existencia de un eigenvalor λ_s con parte real positiva $\nu_s > 0$ da lugar a $|x(t)| \rightarrow \infty$ mientras $t \rightarrow \infty$, es decir la solución cero de (11) es inestable.

Supóngase ahora que todas las raíces satisfacen la condición $\nu_k = \operatorname{Re} \lambda_k < 0$. Entonces existe una constante c_0 tal que

$$|x(t)| < [c_0(1 + t^n) e^{\frac{\nu_0 t}{2}}] e^{\frac{\nu_0 t}{2}}$$

donde $\nu_0 = -\min_k(\nu_k)$ es decir que el sistema (13) es exponencial y asintóticamente estable. En el caso general cuando algunos eigenvalores tengan parte real ν_k igual a cero se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \neq 0$, de modo que se violan las condiciones de estabilidad asintótica. Se sigue que la solución cero de las ecuaciones en desviaciones (14) es asintóticamente y exponencialmente estable, si y sólo si las partes reales de todos los eigenvalores son negativas.

Corolario 10 [2] *Para $s = 1$ el criterio de controlabilidad total puede escribirse en la forma más simple*

$$\det(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) \neq 0 \quad (16)$$

Cuando tenemos el caso

$$\dot{x} = Ax + bu_1, \quad (17)$$

se dice que el sistema es de entrada única.

Si el sistema (17) es completamente controlable puede escribirse en forma canónica

$$\dot{\xi} = A_0\xi + e^n u_1 \quad (18)$$

donde

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$e^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

ó en forma de una sola ecuación

$$\xi^{(n)} + a_1\xi^{(n-1)} + \dots + a_n\xi = u_1 \quad (21)$$

esta propiedad se establece como un teorema

Teorema 11 [2] *El sistema multidimensional de entrada única (17) puede presentarse en la forma de una sola ecuación unidimensional (21) si y sólo si*

$$\text{rang } U = n \quad \text{o bien si} \quad \det U \neq 0$$

Criterio de Routh-Hurwitz

Así las condiciones de estabilidad para (12) se reducen a verificar la negatividad de las partes reales de los eigenvalores.

El primer paso es algebraico y se reduce a verificar el criterio de Hurwitz-Routh. Escribamos la ecuación característica como

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad (22)$$

formemos la matriz de Hurwitz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad (23)$$

e introduzcamos sus menores principales como

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \dots, D_n > 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Teorema 12 (de Hurwitz) *Las partes reales de las raíces de (16) son negativas, es decir $Re\lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$ si y solamente si*

$$a_0 > 0, \quad D_i > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

En muchos casos el criterio de Hurwitz nos permite seleccionar los parámetros de diseño de los Sistemas Dinámicos Controlables, que garantizan la estabilidad asintótica del movimiento estacionario.

Teorema 13 [2],[3] *Si la matriz A es una matriz de Hurwitz, es decir, $Re\lambda_j < 0$ para $j = 1, \dots, n$, $x(0) \equiv 0$ entonces el sistema (12) es estable.*

También si se cumplen las condiciones de Hurwitz, no hay necesidad de estabilizar la solución trivial de (12), puesto que el teorema de Lyapunov en la primera aproximación de estabilidad, garantiza la estabilidad exponencial.

1.5. Teorema de Thikhonov

Teorema 14 Consideremos el sistema singularmente perturbado descrito en [4]

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= Y(y, z, \mu, t); \quad y(0) = y_0, \quad y \in R^n \\ \mu \frac{dz}{dt} &= Z(y, z, \mu, t); \quad z(0) = z_0, \quad z \in R^n, \quad \mu \ll 1 \end{aligned} \quad (24)$$

Suponga que las siguientes condiciones se satisfacen

1.- Las funciones $Y(y, z, \mu, t)$ y $Z(y, z, \mu, t)$ son analíticas con respecto a (y, z, μ, t) en algún dominio de las variables de estado.

2.- La ecuación $Z(y, z, \mu, t) = 0$, tiene una raíz $z = \phi(y, t)$ en algún dominio limitado D de variables y y t , esta raíz está aislada.

3.- Los puntos estacionarios $z = \phi(y, t)$ del sistema $\frac{dz}{d\tau} = Z(y, z, 0, t)$, con $\tau = \frac{t}{\mu}$, son asintóticamente estables de acuerdo a Lypapunov [4] para todo y y t , para el cual la raíz de $Z(y, z, \mu, t) = 0$ está definida.

4.- Las condiciones iniciales z_0 están en el dominio de influencia de la raíz $z = \phi(y, t)$ del sistema $\frac{dz}{d\tau} = Z(y, z, \mu, t)$.

5.- La función $Y(\bar{y}, \phi(\bar{y}, t), 0, t)$ es analítica con respecto a y y t .

Si las condiciones de 1 – 5 se satisfacen, entonces existe $\mu_0 > 0$ tal que la única solución $y(t, \mu)$, $z(t, \mu)$ del problema (24) existe para $0 \leq \mu \leq \mu_0$ en $[0, T]$ y satisface:

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} y(t, \mu) &= \bar{y}(t) \quad \text{para } 0 \leq t \leq T, \\ \lim_{\mu \rightarrow 0} z(t, \mu) &= \bar{z}(t) \quad \text{para } 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (25)$$

donde $\bar{y}(t)$ es la solución del sistema simplificado

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = f(\bar{y}, \phi(\bar{y}, t), 0, t), \quad (26)$$

y

$$\bar{z}(t) = \phi(\bar{y}, t). \quad (27)$$

1.6. Teoremas de Thomson y Tait

En esta sección, se describen las condiciones y algunos resultados presentados a principio de los 1900,s, por Thomson y Tait, en un [5].

Teorema 15 Si las matrices cuadradas A y C de orden s son simétricas, con la matriz A de signo determinado, entonces:

1) Todas las raíces de la ecuación característica

$$\det(A\lambda + C) = 0 \quad (28)$$

son reales:

2) Siempre se va a encontrar una matriz no particular Λ , tal que

$$\Lambda' A \Lambda = I, \quad \Lambda' C \Lambda = C_0, \quad (29)$$

donde I es la matriz identidad, C_0 es la matriz diagonal

$$C_0 = \begin{vmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_s \end{vmatrix} \quad (30)$$

donde c_1, c_2, \dots, c_s son las raíces de la ecuación característica (39).

La segunda parte del teorema tiene la misma validez, justificamos la siguiente afirmación: si dadas dos formas cuadráticas:

$$T = 1/2 A x \cdot x = 1/2 \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s a_{kj} x_k x_j,$$

$$\Pi = 1/2 C x \cdot x = 1/2 \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s c_{kj} x_k x_j,$$

donde la primera de ellas es definida positiva, entonces siempre se va a encontrar una transformación

$$x = \Lambda z$$

con matrices comunes Λ , aplicamos la transformación a las dos formas cuadráticas, ambas formas cuadráticas van a ser igual a la suma de cuadrados:

$$T = 1/2 z \cdot z = 1/2 (z_1^2 + \dots + z_s^2),$$

$$\Pi = 1/2 C_0 z \cdot z = 1/2 (c_1 z_1^2 + \dots + c_s z_s^2),$$

donde en la primera de ellas (definida positiva) todos los coeficientes son iguales a 1, de esto se sigue de que con la sustitución de la variables $x = \Lambda z$, la matriz A_1 de cualquier forma cuadrática $Ax \cdot x$ en las nuevas variables se determinan por la igualdad

$$A_1 = \Lambda' A \Lambda.$$

Vamos a aplicar a la segunda igualdad de la ecuación (50) la propiedad para determinantes:

$$\det(AB) = \det A \det B,$$

obtenemos

$$\det C_0 = \det \Lambda' \cdot \det C \cdot \det \Lambda.$$

Tomando en cuenta, que $\det \Lambda' = \det \Lambda$, obtenemos

$$\det C_0 = \Delta^2 \det C,$$

donde $\Delta = \det \Lambda$ el determinante de la matriz de transformación.

Así como la matriz C_0 es diagonal, entonces $\det C_0 = c_1 c_2 \dots c_s$. Consecuentemente

$$c_1 c_2 \dots c_s = \Delta^2 \det C. \tag{31}$$

Estos teoremas y las igualdades obtenidas las aplicaremos más adelante.

Teorema 16 (Primer Teorema de Thomson y Tait) *Si la inestabilidad de un movimiento no perturbado de un sistema potencial tiene grado impar, entonces no se puede estabilizar el movimiento con ningunas fuerzas giroscópicas.*

Observación: El teorema permanece válido y en el caso no lineal del problema debido a que con la existencia de raíces de la ecuación característica con parte real positiva la inestabilidad del sistema no depende de los miembros que contienen z_k y \dot{z}_k en grado mayor que uno (es decir de fuerzas no lineales Z) (ver el segundo teorema de Lyapunov).

Al inicio de este párrafo se demostró que un sistema potencial inestable se puede en algunos casos estabilizar con fuerzas giroscópicas en este caso no se consideraron fuerzas disipativas. Vamos a ver el significado que tienen estas fuerzas para la estabilización giroscópica.

Teorema 17 (Cuarto Teorema de Thomson y Tait) *Un movimiento no perturbado $z = 0, \dot{z} = 0$, que es inestable bajo la acción de fuerzas potenciales, que es potencial bajo la acción de fuerzas potenciales, permanece inestable si se le añaden cualesquiera fuerzas giroscópicas y fuerzas disipativas si las últimas poseen disipación completa.*

1.7. Influencia de la estructura de las fuerzas en la estabilidad del movimiento

Clasificación de las fuerzas por su estructura matemática

En muchos casos la estabilidad del movimiento se determina por la estructura de las fuerzas que actúan en el sistema. Por eso este capítulo empieza con un párrafo introductorio en el cual se dará una clasificación de fuerzas por su estructura matemática. Vamos a considerar que la investigación de la estabilidad del movimiento en relación a las magnitudes o a los valores x_k y \dot{x}_k se introduce al análisis de ecuaciones diferenciales de un movimiento perturbado las cuales pueden ser llevadas a una igualdad de matrices de la forma

$$A\ddot{x} + B_1\dot{x} + C_1x = X. \quad (32)$$

aquí x es la matriz columna con elementos x_1, \dots, x_s ; A , B_1 y C_1 son matrices cuadradas de orden s con coeficientes constantes; X es la matriz columna con elementos X_1, \dots, X_s que contienen x_k y \dot{x}_k en un orden no menor al segundo

y que se transforma a cero, si todos los x_k y \dot{x}_k son iguales a cero. Además la matriz $A = (a_{kj})$ es simétrica ($A = A^T$) y la forma cuadrática

$$T = 1/2 A \dot{x} \cdot (\dot{x}) \quad (33)$$

definida positiva

La ecuación (28) puede ser relacionada con algún sistema real en el cual las variables x_1, \dots, x_s sirven de coordenadas, considerando el tiempo $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_s$ son las velocidades, y la forma cuadrática (29) es la energía cinética. Frecuentemente esta forma cuadrática es la energía cinética del sistema real, pero en muchos casos la forma (29) surge como resultado de la transformación de ecuaciones de movimiento como ocurrió en la deducción de las ecuaciones (28).

Las componentes de las matrices columna $B_1 \dot{x}$ y $C_1 x$ de la igualdad se tomaron con los signos correspondientes, se pueden tratar como fuerzas donde en algunos casos ellas representan fuerzas reales y en otros, los miembros que surgen en la deducción de igualdades de movimiento perturbado. Más adelante por simplicidad, la forma cuadrática (19) se va a referir a la energía cinética, las componentes de las matrices $B_1 \dot{x}$ y $C_1 x$ como fuerzas aplicadas al sistema, las variables x_1, \dots, x_s las coordenadas, y sus derivadas en el tiempo $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_s$ las velocidades.

Vamos a separar las matrices B_1 y C_1 en simétricas y casi-simétrica, poniendo (18) y (19)

$$B_1 = B + G, \quad C_1 = C + P, \quad (34)$$

donde las matrices simétricas B y C y las matrices Cososimétricas G y P están determinadas por las igualdades

$$\begin{aligned} B &= \dot{B} = 1/2(B_1 + B_1'), & G &= -G' = 1/2(B_1 - B_1'), \\ C &= \dot{C} = 1/2(C_1 + C_1'), & P &= -P' = 1/2(C_1 - C_1'). \end{aligned} \quad (35)$$

Ahora la ecuación (18) toma la forma

$$A \ddot{x} + B \dot{x} + G \dot{x} + C x + P x = X. \quad (36)$$

las fuerzas Cx con matriz simétrica $C = (c_{kj})$ se llaman potenciales o conservativas y la forma cuadrática

$$\Pi = 1/2Cx \cdot x \quad (37)$$

energía potencial del sistema. Por regla las fuerzas Cx representan la parte lineal de las fuerzas potenciales reales, elasticidad y otras similares (la parte no lineal de las fuerzas potenciales se representan en la matriz X).

Establecemos con ayuda de la matriz $B = (b_{kj})$ la forma cuadrática

$$F = 1/2B\dot{x} \cdot \dot{x} \quad (38)$$

Si esta función no es negativa, entonces se llama función de dispersión o función disipativa de Raleigh, (el origen de este termino se va a explicar posteriormente) las fuerzas correspondientes $B\dot{x}$ en este caso se llaman fuerzas disipativas. Si la forma cuadrática F no es definida positiva y positiva determinada entonces la disipación se llama completa, en el caso contrario se llama incompleta. Por fin, si la función F puede tomar un valor negativo entonces de entre las fuerzas que están en la matriz $B\dot{x}$ se tienen fuerzas acelerativas.

Antes de estudiar la estabilidad del movimiento no perturbado $x = 0$ y $\dot{x} = 0$, vamos a ir a unas nuevas variables z_1, \dots, z_s aplicando la formula

$$x = \Lambda z,$$

en la ecuación (32) obtenemos

$$A\Lambda\ddot{z} + B\Lambda\dot{z} + G\Lambda\dot{z} + C\Lambda z + P\Lambda z = X(\Lambda z).$$

multiplicamos del lado izquierdo las dos partes de la igualdad anterior con la matriz Λ' , que es la transpuesta de Λ ,

$$\Lambda' A \Lambda \ddot{z} + \Lambda' B \Lambda \dot{z} + \Lambda' G \Lambda \dot{z} + \Lambda' C \Lambda z + \Lambda' P \Lambda z = Z, \quad (39)$$

donde $Z = \Lambda' X(\Lambda z)$ es una matriz columna cuyos elementos contienen z_k y \dot{z}_k en grados mayores al primero.

Ahora consideramos que la matrices A y C son simétricas y además la matriz A es definida positiva. Con base en el segundo teorema, existe una

matriz no particular Λ para cual se va a cumplir las igualdades (35). Sea Λ tal matriz. Entonces

$$\Lambda' A \Lambda = I, \quad \Lambda' C \Lambda = C_0, \quad (40)$$

donde C_0 es una matriz diagonal e I la matriz identidad.

Es facil ver que la matriz $\Lambda' B \Lambda$ es simétrica, y que las matrices $\Lambda' G \Lambda$ y $\Lambda' P \Lambda$ son COSO simétricas. Se cumple con base en la regla de la derivada de la transpuesta de las matrices (31) que tenemos

$$(\Lambda' B \Lambda)' = (B \Lambda)' (\Lambda')' = \Lambda' B' (\Lambda')'.$$

De la misma forma, se sigue que transponiendo dos veces la matriz, ésta se vuelve la matriz original, es decir $(\Lambda')' = \Lambda$. Además la matriz B es simétrica y consecuentemente $B = B'$. De esta manera

$$(\Lambda' B \Lambda)' = \Lambda' B \Lambda$$

que con base en la misma formula (29) sirve de operación de la simétria de la matriz $\Lambda' B \Lambda$.

Y en lugar de la matriz simétrica B tenemos la matriz coso simetrica G (P), entonces tenemos

$$(\Lambda' G \Lambda)' = (G \Lambda)' (\Lambda')' = \Lambda' G' (\Lambda')'.$$

O Tomando en cuenta que la matriz G es cososimétrica y para ella es válida la fórmula (29), con base en la cual $G' = -G$,

$$(\Lambda' G \Lambda)' = -\Lambda' G \Lambda.$$

De acuerdo a la misma fórmula (29) concluimos que la matriz $\Lambda' G \Lambda$ es cososimétrica. Una conclusión analoga es válida para la matriz $\Lambda' P \Lambda$.

Tomando en cuenta lo dicho y poniendo tambien $I\ddot{z} = \ddot{z}$, la ecuación (36) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\ddot{z} + B\dot{z} + Gz + C_0 z + Pz = Z, \quad (41)$$

donde por simplicidad la matriz simetrica $\Lambda' B \Lambda$ y las matrices COSOsimetricas $\Lambda' G \Lambda$ y $\Lambda' P \Lambda$ se expresan por B , G y P respectivamente.

Entonces obtenemos otras dos nuevas formas de la ecuación (28)

$$\ddot{z} + B_0 \dot{z} + G \dot{z} + C_0 z + P z = Z, \quad (42)$$

$$A \ddot{z} + B_0 \dot{z} + G \dot{z} + C_0 z + P z = Z, \quad (43)$$

donde C_0 y B_0 son matrices diagonales y de elementos

$$C_0 = \begin{vmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_s \end{vmatrix}, \quad B_0 = \begin{vmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_s \end{vmatrix} \quad (44)$$

(en la última igualdad a la matriz B_0 se le puede transformar en unitaria).

De esta manera con ayuda de la transformación $x = \Lambda z$ la ecuación (28) se puede llevar a alguna de las tres formas (32), (33) o (34) además las fuerzas potenciales, disipativas, giroscópicas y no conservativas se transforman en fuerzas de esa estructura. Es evidente que de la estabilidad (inestabilidad) relación a las coordenadas z_k y a las velocidades \dot{z}_k se sigue la estabilidad (inestabilidad) en relación a las coordenadas x_j y a las velocidades \dot{x}_j , e inversamente. Por eso no nos interesa la transformación misma $x = \Lambda z$, que lleva a la ecuación (18) a una de las ecuaciones (32)-(34). Es suficiente saber que tal transformación existe.

Entre las matrices iniciales B y C y las obtenidas de ellas B_0 y C_0 existen relaciones (36)

$$b_1 b_2 \dots b_s = \Delta^2 \det B, \quad c_1 c_2 \dots c_s = \Delta^2 \det C \quad (45)$$

donde $\Delta = \det \Lambda$ el determinante de la matriz de la transformación.

Con la ausencia de fuerzas acelerativas dentro de los elementos b_k de la matriz B no negativos, ni con disipación total todas las b_k son positivas. Si se tienen fuerzas acelerativas entonces dentro de los elementos b_k se tienen

negativos. Con el mínimo de energía potencial Π todos los coeficientes c_k son positivos, y con el máximo Π son negativos.

Coefficientes de Estabilidad

Vamos a considerar que en el sistema actúan solamente las fuerzas potenciales Cx , y que todas las fuerzas restantes no están presentes ($B=G=P=Z=0$). Entonces, usando la ecuación (32), la igualdad del movimiento perturbado se puede escribir de la siguiente manera :

$$\ddot{z} + C_0 z = 0 \quad (46)$$

Esta ecuación matricial es equivalente a s la igualdad escalar (recordamos que C_0 es la matriz diagonal)

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 + c_1 z_1 &= 0, \\ \dots &\dots \dots \\ \ddot{z}_s + c_s z_s &= 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Las coordenadas z_1, \dots, z_s , en las cuales las igualdades de movimiento perturbado tiene la forma de la ecuación (37), se llaman coordenadas normalizadas. Las igualdades (37) no están relacionadas entre sí y se integran independientemente unas de otras. Tenemos

$$\begin{aligned} 1.- \quad c_k &> 0; & c_k &= \mu_k^2, \\ z_k &= A_k \sin(\mu_k t + \varepsilon_k); \\ 2.- \quad c_k &< 0; & c_k &= -\nu_k^2, \\ z_k &= A_k e^{\nu_k t} + B_k e^{-\nu_k t}, \end{aligned} \quad (48)$$

donde A_k, B_k y ε_k son las integraciones constantes. Hacemos notar que en el primer caso los valores característicos $\lambda = \pm \mu_k i$, y en el segundo caso $\lambda = \pm \nu_k$.

De esta solución se ve que si todos los valores c_k son positivos, entonces el movimiento no perturbado $z_k = 0$ y $\dot{z}_k = 0$ es estable en relación a las coordenadas normalizadas z_k y las velocidades \dot{z}_k (a ellas mismas y en relación x_j y \dot{x}_j). A cada valor negativo c_k (si se cuenta con él) corresponde una coordenada inestable z_k y consecuentemente un movimiento no perturbado con la existencia de $c_k < 0$ va a ser inestable (debido a que con $c_k < 0$ uno de los valores

característicos $\lambda = \pm\nu_k$ es positivo, entonces el movimiento no perturbado va a ser inestable y bajo cualesquiera fuerzas no lineales Z (ver segundo teorema de Lyapunov). En relación con esto los valores c_k se llaman coeficientes de estabilidad del sistema), y los valores negativos c_k es el grado de inestabilidad (estas definiciones fueron hechas por Poincare).

En adelante va a tener significado no el número de coeficientes de inestabilidad c_k sino su paridad. Utilizando la segunda igualdad (6.12) tenemos

$$c_1 c_2 \dots c_s = \Delta^2 \det C,$$

se puede determinar la paridad del grado de la inestabilidad del sistema, sin ser necesario pasar a coordenadas normales. Se cumple que si el número de coeficientes negativos c_k es par, entonces la colección $c_1 \dots c_s$ es positiva (suponiendo que entre los coeficientes de estabilidad no hay ceros). Pero entonces de la última igualdad se sigue que el $\det C > 0$; si el número de valores negativos c_k es impar entonces la colección $c_1 \dots c_s$ es negativa y consecuentemente el $\det C < 0$; la inversa es evidente y también se cumple. De esta manera tenemos una regla sencilla; si el determinante de la matriz C de fuerzas potenciales de las igualdades iniciales del movimiento perturbado es positivo, entonces el grado de inestabilidad del sistema es par, si el $\det C < 0$, entonces el grado de inestabilidad del sistema es impar.

Influencia de fuerzas disipativas y giroscópicas en la estabilidad del movimiento de un sistema potencial

En condiciones reales a un sistema potencial se le suman las fuerzas disipativas que surgen debido a la oposición del medio (oposición omica) o como resultado de la acción de instrumentos establecidos especialmente. Además frecuentemente se encuentran sistemas en los cuales actúan no solamente fuerzas potenciales disipativas sino giroscópicas.

Vamos a suponer primero que el movimiento no perturbado $z = 0$ y $\dot{z} = 0$ bajo la acción de algunas de las fuerzas potenciales es inestable. Surge la siguiente pregunta: se puede estabilizar el movimiento añadiendo a las fuerzas potenciales fuerzas giroscópicas? ejemplos sencillos muestran que en algunos casos esto se puede realizar. Ciertamente, el sistema potencial

$$\begin{aligned}\ddot{z}_1 + c_1 z_1 &= 0 \\ \ddot{z}_2 + c_2 z_2 &= 0\end{aligned}\tag{49}$$

con c_1 y c_2 negativos es inestable. Añadimos al sistema las fuerzas giroscópicas $g\dot{z}_2$ y $-g\dot{z}_1$. Obtenemos

$$\begin{aligned}\ddot{z}_1 + g\dot{z}_2 + c_1 z_1 &= 0 \\ \ddot{z}_2 - g\dot{z}_1 + c_2 z_2 &= 0\end{aligned}\tag{50}$$

Vamos a buscar la solución común

$$z_1 = Ae^{\lambda t}, \quad z_2 = Be^{\lambda t}$$

y establecemos la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + c_1 & g\lambda \\ -g\lambda & \lambda^2 + c_2 \end{vmatrix} = \lambda^4 + (g^2 + c_1 + c_2)\lambda^2 + c_1 c_2 = 0.\tag{51}$$

Debido a que en esta igualdad se tiene a λ solo en grados pares, entonces a cada raíz λ le corresponde una raíz $-\lambda$. Por eso, si la parte real aunque una de las raíces no sea igual a cero, entonces se encuentra la raíz de la parte real la cual es positiva. De esto se sigue que la estabilidad llega solo en el caso si es que todas las raíces de la ecuación característica van a ser puramente imaginarias y las raíces en relación a λ^2 - valores reales negativos. Para esto es necesario y suficiente que los coeficientes de la ecuación característica cumplan con las siguientes condiciones:

$$c_1 \cdot c_2 > 0, \quad g^2 + c_1 + c_2 > 0, \quad (g^2 + c_1 + c_2)^2 - 4c_1 c_2 > 0.$$

Estas 3 desigualdades facilmente se pasan a una condición (recordamos que por una suposición $c_1 < 0$ y $c_2 < 0$):

$$|g| > \sqrt{-c_1} + \sqrt{-c_2}.\tag{52}$$

De esta manera, si el coeficiente g cumple esta condición entonces el sistema potencial inestable (46) va a estabilizarse añadiendole fuerzas giroscópicas $g\dot{z}_2$ y $-g\dot{z}_1$.

Como consecuencia de esto naturalmente surge otra pregunta se puede siempre estabilizar con fuerzas giroscópicas un sistema potencial inestable?.

1.8. Estabilidad bajo perturbaciones permanentes

Las perturbaciones de corta duración descritas en [1] se reducen a perturbaciones de las condiciones iniciales, y el problema de la estabilidad con respecto a dichas perturbaciones, se reduce al análisis de la estabilidad según Lyapunov.

Si, en cambio, las perturbaciones son de acción constante, el sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n); \quad x_i(t_0) = x_{i0}, \quad (53)$$

debe ser sustituido por el sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) + r_i(t, x_1, \dots, x_n); \quad x_i(\bar{t}_0) = \bar{x}_i(\bar{t}_0), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (54)$$

para todas las $t \geq t_0$. Luego se hace necesario el estudio de la estabilidad bajo perturbaciones permanentes. Este problema fue estudiado por I. G. Malkin y por G. N. Duboshin. en [1]

Definición 18 [1] *La solución trivial del sistema (26) se llama estable con respecto a perturbaciones permanentes, si para todo $\epsilon > 0$, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que las desigualdades $\sum_{i=1}^n r_i^2 < \delta_1^2$ para todo $t \geq t_0$ y $\sum_{i=1}^n x_{i0}^2 < \delta_2^2$, implican que $\sum_{i=1}^n x_i^2 < \epsilon^2$ cuando $t \geq t_0$, donde $x_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) es la solución del sistema (1.4), determinada por las condiciones iniciales $x_i(t_0) = x_{i0}$ ($i = 1, \dots, n$).*

Igual que al investigar la estabilidad según A. M. Liapunov, se puede, por el cambio de variables $x_i = y_i - \varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) transforma la solución estudiada $y_i = \varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) del sistema $\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ para $i = 1, 2, \dots, n$ en la solución trivial $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) del nuevo sistema. Por

esto, en lo sucesivo se puede considerar que se investiga la estabilidad bajo perturbaciones de acción constante de la solución trivial $x_i \equiv 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ del sistema de ecuaciones (26).

La solución trivial del sistema (26) se llama *estable* con respecto a las perturbaciones permanentes, si para todo $\epsilon > 0$ existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que las desigualdades

$$\sum_{i=1}^n r_i^2 < \delta_1^2$$

para $t \geq t_0$ y $\sum_{i=1}^n x_{i0}^2 < \delta_2^2$ implican que $\sum_{i=1}^n x_i^2(t) < \epsilon^2$ cuando $t \geq t_0$, donde $x_i(t) (i = 1, 2, \dots, n)$ es la solución del sistema (18), determinada por las condiciones iniciales $x_i(t_0) = x_{i0} (i = 1, 2, \dots, n)$.

Teorema 19 (Teorema de Malkin, Duboshin) [1]

Si para el sistema de ecuaciones (17) existe una función de Liapunov $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ la cual tiene derivada y que además satisfaga en un entorno del origen de coordenadas, para $t \geq t_0$ las siguientes condiciones:

1) $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \geq w_1(x_1, x_2, \dots, x_n), v(t, 0, 0, \dots, 0) = 0$

donde w_1 es una función continua que se anula sólo en el origen de coordenadas.

2) las derivadas $\frac{\partial v}{\partial x_s} (s = 1, 2, \dots, n)$ están acotadas en valor absoluto.

3) la derivada $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i \leq -w_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$, donde la función continua $w_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se puede anular sólo en el origen de coordenadas, entonces la solución trivial del sistema (27) es estable con respecto a las perturbaciones de acción constante.

Corolario Si el sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

es asintóticamente estable, entonces el sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + r_i(t, x_1, \dots, x_n)$$

tiene estabilidad robusta.

1.9. Planteamiento

Cuando hablamos de sistemas mecánicos, sabemos que asociado a cada uno de estos tenemos un modelo Matemático que lo representa. El modelo Matemático equivale a una ecuación o un conjunto de ellas en base a las cuales podemos conocer el comportamiento del sistema. Ya formulado el modelo Matemático del sistema, tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales, las soluciones del sistema son la parte más importante del sistema, aquí lo ideal sería calcular explícitamente todas las soluciones de cada ecuación diferencial o sistema de ecuaciones, sin embargo como se sabe, solo algunas ecuaciones muy específicas lo permiten. De ahí la importancia del estudio de las propiedades cualitativas de las soluciones para las ecuaciones diferenciales. Esto marca el comienzo de la teoría moderna de las ecuaciones diferenciales cuyos iniciadores fueron A.M. Lyapunov y H. Poincare, Matemáticos cuyos trabajos al inicio del siglo pasado han motivado investigaciones recientemente. Un fenómeno cualitativo de gran interés práctico, es la noción de estabilidad de un estado particular del sistema o de sus soluciones. Actualmente, el análisis de estabilidad se basa principalmente en estudiar las propiedades y condiciones bajo las cuales una solución es estable. Para que un sistema de control sea útil, lo primero que debe de cumplir es que sea ESTABLE. Una característica importante de los sistemas de control es la capacidad de reducir los efectos inferidos por las perturbaciones o disturbios. Se debe diferenciar entre las perturbaciones del proceso y las perturbaciones en la medición. En el carro llamado Segway, tenemos un sistema mecánico que tiene que responder en poco tiempo y de forma efectiva a las ordenes del operador. Además los movimientos tienen que ser suaves, estas consideraciones son las ideales, por que sabemos que tendremos perturbaciones, las cuales pueden ser externas, el piso, la falta de pericia del operador, etc. perturbaciones internas, estas son las ocasionadas por los dispositivos del carro y pueden ser generadas por los sensores, motores, etc. En el presente trabajo propongo Estabilizar sistemas considerando perturbaciones internas, de corta duración y continuas.

En el capítulo 2.- Presento el desarrollo de dos algoritmos:

- a) Algoritmo de síntesis de estabilización asintótica de mini-max.
- b) Algoritmo de análisis de estabilidad robusta.

Por la forma como se plantean los algoritmos, podemos obtener los parámetros y determinar estabilidad para algunas de las variables que se consideran en el sistema. Presento algunos ejemplos para cada uno de los algoritmos propuestos.

En el capítulo 3, obtengo el modelo Matemático de un sistema, cuyo objetivo es mantener una varilla en posición vertical, la cual esta montada sobre un carro, como se describe en las figuras 8 y 10, se obtiene el modelo Matemático basandonos en resultados obtenidos respecto a la aceleración total, cuando consideramos distintas posiciones para los acelerómetros y giroscopos, finalmente obtenemos un sistema de tres variables con dos grados de libertad.

En el capítulo 4, aplicamos el primer algoritmo al modelo matemáticos descrito en el capítulo anterior, utilizamos programas de computadora para obtenerlos, sin embargo, las operaciones resultantes son demasiado complicadas, por lo que, hago aproximaciones basadas en métodos numéricos.

2. Análisis de la estabilidad robusta y síntesis de la estabilización mini-max del sistema mecánico

En este capítulo presento dos algoritmos que sirven para determinar los parámetros de estabilización cuando el sistema es inestable debido a perturbaciones originadas por errores instrumentales, es decir, perturbaciones internas. En el primer algoritmo, considero las perturbaciones iniciales, este problema se reduce a un problema de programación no-lineal, determino estabilidad asintótica. En el segundo algoritmo, considero perturbaciones permanentes, una vez determinados los parámetros de estabilización, determino la calidad del estabilizador y su estabilidad robusta.

2.1. Estabilización asintótica de minimax cuando hay perturbaciones iniciales

2.1.1. Reducción del problema de estabilización asintótica minimax al problema de programación no lineal

En esta sección considero el sistema

$$\dot{x} = Ax + bu_1 \quad (55)$$

con control $u_1 = k^T z$ con múltiples sensores y modelo algebraico del sensor $z = Hx + r(t)$ donde $r(t)$ representan las perturbaciones.

El sistema representado por la ecuación 55 es un caso particular del sistema de la ecuación 11. El objetivo es proponer un algoritmo que nos permita determinar los parámetros Óptimos de estabilización, cuando consideramos perturbaciones iniciales, aplicando programación no-lineal para que el sistema sea asintóticamente estable.

Después de sustituir la ecuación del control u_1 en (55), obtenemos

$$\dot{x} = Ax + b(k^T Hx + k^T r(t)) = (A + bk^T H)x + bk^T r(t) = A_c x + Cr(t), \quad (56)$$

las dimensiones de la matrices son: A $n \times n$, H $m \times n$, b $n \times 1$, k^T $1 \times m$, z $m \times 1$, $r(t)$ $m \times 1$.

Considero perturbaciones iniciales y por el Teorema de Malkin-Duboshin y como ($r(t) = 0$), el sistema (56) puede ser sustituido por el sistema,

$$\dot{x} = A_c(k)x, \quad (57)$$

donde la matriz $A_c(k) = A + bk^T H$ cumple las condiciones (Lema 3, definiciones 4 y 5, Teorema 6 y Corolario 7) para que el sistema 57, sea controlable y de Hurwitz, de dimensión $n \times n$, donde $k \in Q$ y $Q = \{k / Re(\lambda_j(k)) \leq \alpha, \alpha > 0, j = 1, \dots, n\}$.

La solución del sistema (57) es $x(t) = e^{A_c t} x(0)$, con condiciones iniciales $x(0) = x_0$.

Como parte importante de la forma en que vamos a obtener el algoritmo, presento el siguiente Lema.

Lema 20 (Lyapunov) *La ecuación de Lyapunov*

$$AH_0 + H_0 A^T = -G \quad (58)$$

es valida para algunas matrices $G = G^T$ y $H_0 = H_0^T$ definidas positivas si y sólo si $Re(\lambda_i + \lambda_j) \neq 0$ para todos los valores propios de matriz A . Bajo esto

$$H_0 = \int_0^{\infty} e^{At} G e^{A^T t} dt > 0. \quad (59)$$

si y sólo si la matriz A es estable y ya sea que;

$G > 0$ (si $G \geq 0$, entonces existe una solución definida semi-positiva $H \geq 0$).

Como notamos, en este lema las matrices G y H son definidas positivas. Nosotros vamos a demostrar que bajo el esquema de este lema, podemos obtener un algoritmo para la estabilidad asintótica del sistema para ciertas variables, entonces tenemos que demostrar que si $G \geq 0$, la matriz $H > 0$ es definida positiva, cuando A_c es matriz de Frobenius.

Teorema 1

Para un sistema completamente controlable y unidimensional, de la forma (55) el problema de estabilización mini-max, se puede reducir al problema extremal de dimensión finita, para todo $l = 1, \dots, n$,

$$\mu_0^2 \nu_{\max} \rightarrow \min_{k \in Q}. \quad (60)$$

Demostración

Considero la ecuación diferencial y matricial

$$\dot{Z} = A_c^T Z + Z A_c, \quad Z(0) = G \quad (61)$$

donde G es una matriz casi-identidad y $A_c = A + bk$.

La solución general de (61) tiene la forma

$$Z(t) = e^{A_c^T t} G e^{A_c t} \quad (62)$$

Intégro la ecuación (61),

$$A_c^T \int_0^\infty Z(t) dt + \int_0^\infty Z(t) dt A_c = \int_0^\infty \dot{Z}(t) dt = Z(\infty) - Z(0) = -G, \quad (63)$$

el valor de $Z(\infty)$ es cero por que considero a la matriz $A_c(k)$ de tal forma que la parte real de sus valores propios es negativa.

Comparando con la ecuación de Lyapunov, integral de 62 es la matriz H , es decir,

$$H = \int_0^\infty Z(t) dt \quad (64)$$

sustituimos el valor de H en la ecuación 63, obtengo ecuación de Lyapunov (58)

$$A_c^T H + H A_c = -G. \quad (65)$$

La matriz H es simétrica, la forma cuadrática es igual a la integral

$$\begin{aligned}
x^T(0)Hx(0) &= \int_0^{\infty} (x^T(0)e^{A_c^T t} G e^{A_c t} x(0)) dt, \\
&= \int_0^{\infty} x(t)^T G x(t) dt = \int_0^{\infty} \left(\sum_{j=1}^l x_j^2(t) \right) dt, \tag{66}
\end{aligned}$$

donde $l \leq n$ y $x(t) = e^{A_1 t} x(0)$ es la solución de la ecuación $\dot{x} = A_c x$ con condición inicial $x(0) \neq 0$.

La matriz A_c , para cualquier $k \in Q$, es una matriz de Hurwitz y $A_c = A_{Fr}$ (matriz de Frobenius),

$$A_c = A_{Fr} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n + k_n & \cdot & \cdot & \dots & -a_1 + k_n \end{pmatrix}$$

el sistema que representa la matriz de Frobenius (A_{Fr}), es

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
&\dots\dots\dots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n \\
\dot{x}_n &= (-a_n + k_1)x_1 + (-a_{n-1} + k_2)x_2 + \dots + (-a_1 - k_n)x_n,
\end{aligned}$$

en la última ecuación del sistema, sustituimos los valores de x_j para $j = 1, \dots, n$, obtenemos la ecuación

$$\frac{dx_n}{dt} = \dot{x}_n = (-a_n + k_1)x_1 + (-a_{n-1} + k_2)x_2 + \dots + (-a_1 - k_n)x_n, \tag{67}$$

notamos que $\frac{dx_n}{dt} = \dot{x}_n = x_1^{(n)} = \frac{d^n x_1}{dt^n}$, empleamos este hecho y a la vez igualamos a cero la ecuación (67)

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} + (a_1 - k_n) \frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}} + \dots + (a_n - k_1)x_1 = 0. \tag{68}$$

Suponemos que $x_1(t) \equiv 0$ entonces $\dot{x}_1 \equiv x_2 \equiv 0$ consecutivamente, hasta llegar a que $\frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}} = x_n(t) \equiv 0$, entonces $x_0 \equiv 0$. Concluimos que esto no ocurre ya que como sabemos $x_0 \neq 0$. Por lo tanto, la matriz H es definida positiva ($H > 0$), es decir, no puede ser igual a cero.

Por todo esto, para todo $x(0) \neq 0$ se cumple que

$$x_0^T H_0 x_0 = \int_0^\infty \sum_{i=1}^l x_i^2(t) dt > 0 \quad (69)$$

Maximizamos la parte derecha de la igualdad (69) y además suponemos que $|x(0)| \leq \mu_0$

$$\max_{|x(0)| \leq \mu_0} \int_0^\infty \sum_{i=1}^l x_i^2(t) dt = \max_{|x(0)| \leq \mu_0} x^T(0) H_0 x(0). \quad (70)$$

Por otro lado y sin pérdida de generalidades, para cualquier matriz simétrica definida positiva se cumple la siguiente desigualdad

$$x^T(0) H_0 x(0) \leq \mu_0 \nu_{\max} \quad (71)$$

para ν_{\max} , máximo valor propio de la matriz H_0 .

De las condiciones iniciales $|x(0)| \leq \mu_0$, existe una con la cual se alcanza la igualdad de la ecuación (71). Por lo tanto

$$\max_{|x(0)| \leq 1} \int_0^\infty \left(\sum_{j=1}^\infty x_j^2 \right) dt = \mu^2 \nu_{\max}. \quad (72)$$

■

Cuando $l = n$, la matriz $G = I$, del Lema 20, $G > 0$, la ecuación matricial $A^T H_0 + H_0 A = -G$ es la *Ecuación de Lyapunov*, la matriz H_0 que es solución de esta ecuación es una matriz simétrica, definida positiva. Si $l < n$ tenemos que $G \geq 0$). Según el Teorema 1, la matriz H es casi identidad y $H > 0$.

2.1.2. Ejemplo 1.1

Aplicamos el algoritmo descrito en la sección 2.1, para perturbaciones iniciales o de corta duración

Para el sistema de ecuaciones

$$\ddot{x}_1 + 2\dot{x}_1 - x_1 = u_1 \text{ donde } u_1 = -k_1(x_1 + r_1(t)). \quad (73)$$

sustituyendo el valor de u_1 resulta la ecuación

$$\ddot{x}_1 + 2\dot{x}_1 + (k_1 - 1)x_1 = -k_1 r_1.$$

Cuando $(r_1(t)) = 0$.

El sistema de ecuaciones en forma de Cauchy es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 - (k_1 - 1)x_1, \end{aligned}$$

la matriz A_c del sistema descrito anteriormente es

$$A_c(k_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - k_1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para determinar el conjunto Q , definido de la siguiente forma

$$Q = \{k / Re\lambda_j \leq -0.1 \ (j = 1, 2)\}$$

y donde los valores propios de la matriz A_c son:

$$\lambda_1 = -1 + \sqrt{2 - k_1} \text{ y } \lambda_2 = -1 - \sqrt{2 - k_1},$$

empleo el siguiente criterio:

La parte real de los valores propios es negativa, $Re\lambda_{1,2} < 0$, y si el discriminante $D = 2 - k_1 > 0$, esto ocurre para los $k_1 \leq 2$ y si además $\lambda_{1,2} \leq -0,1$ entonces para cuando los valores propios $\lambda_{1,2}$ son reales, $k_1 \in [1.19, 2]$.

Y si $D < 0$ los valores propios $\lambda_{1,2}$ son números complejos y además siguen cumpliendo la condición $Re\lambda_{1,2} < 0$, en esta caso los k_1 para los que $D < 0$ son $k_1 \in (2, \infty)$.

De aquí que el conjunto conjunto $Q = [1.19, \infty)$.

Para el análisis y la síntesis de la estabilización mini-max del sistema mecánico con un grado de libertad, en esta sección aplico el resultado de la sección (2.1).

Desarrollo del algoritmo de mini-max para obtener el parámetro mínimo de estabilidad, cuando $r_1(t) \equiv 0$ y con condiciones iniciales $|x(0)| \leq 1$

Determinar la matriz simétrica H_0 descrita en la ecuación

$$A_c^T H_0 + H_0 A_c = -G \quad (74)$$

para el caso donde $l = n$, esto es, $G = I$ es la matriz identidad (ecuación de Lyapunov).

a)

Resolver el sistema de ecuaciones que se genera las siguientes operaciones entre matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 - k_1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2 & h_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_{23} & h_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - k_1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (75)$$

este es el sistema de ecuaciones para obtener la matriz H_1

$$\begin{aligned} 2(1 - k_1)h_2 &= -1 \\ (1 - k_1)h_4 + h_1 - 2h_2 &= 0 \\ h_1 - 2h_2 + (1 - k_1)h_4 &= 0 \\ 2h_2 - 4h_4 &= -1 \end{aligned} \quad (76)$$

se resuelve para h_1 , h_2 , y h_4 estos valores son las componentes de la matriz H_1 , entonces la matriz es:

$$H_1 = \begin{pmatrix} \frac{k_1^2 - k_1 + 4}{4(k_1 - 1)} & \frac{1}{2(k_1 - 1)} \\ \frac{1}{2(k_1 - 1)} & \frac{k_1}{4(k_1 - 1)} \end{pmatrix} \quad (77)$$

La matriz H_1 es simétrica y definida positiva, esto es $\det H_1 > 0$ y la componente $a_{1,1} > 0$ de la matriz, para $k_1 \in (1, \infty)$.

Determinar los valores propios en el polinomio característico $\det(I\lambda - H) = 0$. Los valores propios son:

$$\nu_1 = \frac{\frac{k_1^2+4}{4(k_1-1)} + \sqrt{\left(\frac{k_1^2+4}{4(k_1-1)}\right)^2 - 4\left(\frac{k_1^3-k_1^2+4k_1-4}{16(k_1-1)^2}\right)}}{2} \quad (78)$$

y

$$\nu_2 = \frac{\frac{k_1^2+4}{4(k_1-1)} - \sqrt{\left(\frac{k_1^2+4}{4(k_1-1)}\right)^2 - 4\left(\frac{k_1^3-k_1^2+4k_1-4}{16(k_1-1)^2}\right)}}{2}, \quad (79)$$

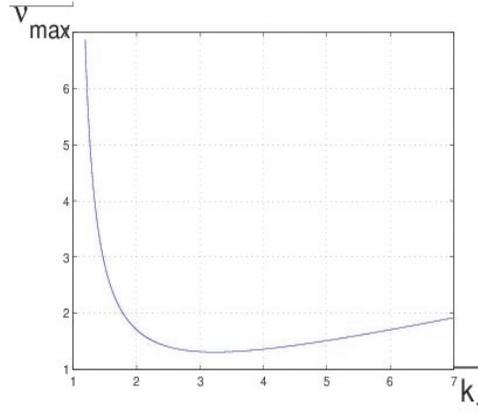


Figura 1: gráfica para $\nu_{max}(k_1)$.

de forma analítica los valores propios $\nu_1 \geq \nu_2$, por lo que el ν_{max} es $\nu_1(k_1)$, para los valores de $k_1 \in (1, \infty)$.

El valor del parámetro donde el valor propio ν_{max} tiene su mínimo cuando

$$k_1 = 3,236316.$$

En este parámetro la solución del sistema es asintóticamente estable y asintóticamente optimalmente estable.

b)

Desarrollo del algoritmo de mini-max para obtener el parámetro mínimo de estabilidad, para la variable x_1 , cuando $r_1(t) \equiv 0$ y las condiciones iniciales satisfacen $|x(0)| \leq \mu_0$.

Para este caso, la matriz G tiene elemento unitario en la posición $a_{1,1}$, entonces la ecuación matricial $A_c^T H_0 + H_0 A_c = -G$, aquí aplico el teorema 1.

Realizo las operaciones entre matrices, para determinar las componentes de la matriz H_2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 - k_1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2 & h_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2 & h_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - k_1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (80)$$

resulta el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2(1 - k_1)h_2 &= -1 \\ (1 - k_1)h_4 + h_1 - 2h_2 &= 0 \\ h_1 - 2h_2 + (1 - k_1)h_4 &= 0 \\ 2h_2 - 4h_4 &= 0 \end{aligned} \quad (81)$$

resuelvo para h_1 , h_2 , h_3 y h_4 , son las componentes de la matriz H_2 , entonces la matriz es:

$$H_2 = \begin{pmatrix} \frac{3+k_1}{4(1-k_1)} & \frac{1}{2(k_1-1)} \\ \frac{1}{2(k_1-1)} & \frac{1}{4(k_1-1)} \end{pmatrix} \quad (82)$$

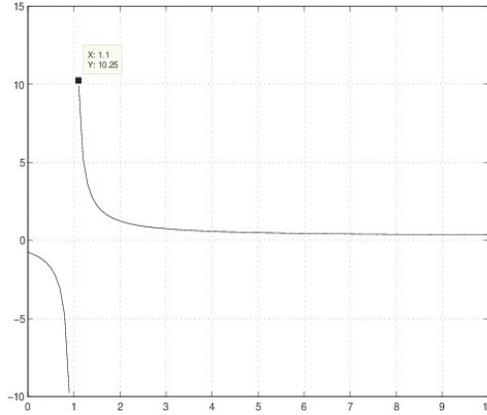


Figura 2: en esta gráfica vemos que $a_{1,1} > 0$

La matriz H_2 es simétrica y definida positiva, esto es $\det H_2 > 0$ y la componente $a_{1,1} > 0$ de la matriz, para $k_1 \in Q$.

Los valores propios en el polinomio característico $\det(I\lambda - H_2) = 0$.
 Los valores propios son:

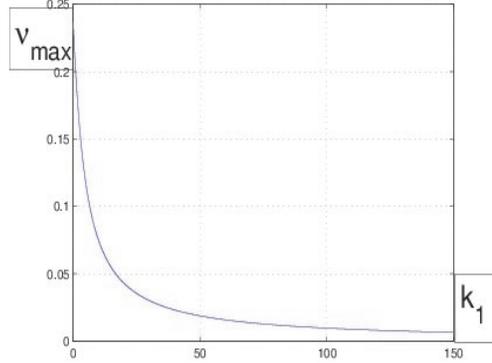


Figura 3: gráfica para $\nu_{max}(k_1)$ cuando $l < n$ y la matriz G cumple $G \neq I$.

$$\nu_1 = \frac{4 + k_1 + \sqrt{k_1^2 + 4k_1 + 12}}{8(k_1 - 1)} \quad (83)$$

y

$$\nu_2 = \frac{4 + k_1 - \sqrt{k_1^2 + 4k_1 + 12}}{8(k_1 - 1)} \quad (84)$$

de forma analítica resulta que $\nu_{max}(k_1) = \nu_1$ para los valores de $k_1 \in \mathbb{Q}$

De aquí que $\nu_{max}(k_1)$ es una función monótona decreciente para $k_1 \in \mathbb{Q}$, no podemos decir que existe un k_1 para el que $\nu_{max}(k_1)$ alcanza su valor mínimo, sin embargo considerando cualquier valor de k_1 y se asegura estabilidad asintótica para x_1 .

Esta parte del ejemplo, es la más importante, ya que como tenemos una matriz G definida semi-positiva y una matriz H definida positiva.

Como el valor propio ν_{max} es una función decreciente, tomamos un valor $k_1^0 = 2$, la matriz H_2 es la siguiente

$$H_2 = \begin{pmatrix} 5/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \quad (85)$$

y $\nu_{max}(k_1^0) = \nu_{max}(2) = 1.44571$.

Conclusión Para la variable x_1 de la presentación en forma de Cauchy del sistema (73). Aplicamos el algoritmo, obtenemos el parametro de estabilización $k_1 = 2$, las perturbaciones iniciales son $r(t) = (r_1, r_2) = (-0.9293, -0.3827)$. El sistema se puede estabilizar aplicando este algoritmo.

c)

Ahora para obtener el parámetro mínimo de estabilidad, de la variable x_2 , cuando $r_1(t) \equiv 0$ y las condiciones iniciales satisfacen $|x(0)| \leq \mu_0$.

Entonces se considera la matriz G cuando solo tiene elemento unitario en la posición $a_{2,2}$ la ecuación matricial $A_c^T H_3 + H_3 A_c = -G$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 - k_1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2 & h_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2 & h_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - k_1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (86)$$

resulta el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2(1 - k_1)h_2 &= 0 \\ (1 - k_1)h_4 + h_1 - 2h_2 &= 0 \\ h_1 - 2h_2 + (1 - k_1)h_4 &= 0 \\ 2h_2 - 4h_4 &= -1 \end{aligned} \quad (87)$$

se resuelve para h_1, h_2, h_3 y h_4 , son las componentes de la matriz H_3 , entonces la matriz es:

$$H_3 = \begin{pmatrix} \frac{k_1 - 1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (88)$$

La matriz H_3 es simétrica y definida positiva, esto es $\det H_3 > 0$ y la componente $a_{1,1} > 0$ de esta matriz para $k_1 \in [1.19, \infty)$, como notamos el intervalo donde H_3 es definida positiva es el mismo Q .

Se determinan los valores propios en el polinomio característico

$$\det(I\nu - H_3) = 0.$$

Los valores propios son:

$$\nu_1 = \frac{k_1 + \sqrt{k_1^2 - 4k_1 + 4}}{8} = \frac{k_1 - 1}{4} \quad (89)$$

y

$$\nu_2 = \frac{k_1 - \sqrt{k_1^2 - 4k_1 + 4}}{8} \quad (90)$$

de forma analítica se obtiene $\nu_{max}(k_1) = \nu_1$ para los valores de $k_1 \in Q$

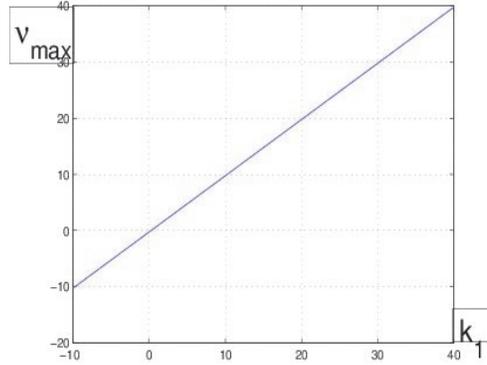


Figura 4: gráfica para $\nu_{max}(k_1)$ cuando $l < n$ y la matriz G cumple $G \neq I$.

En este caso $\nu_{max}(k_1)$ es una función creciente para $k_1 \in Q$ y toma su valor mínimo para $k_1 = 1.19 \in Q$.

2.2. Algoritmo de estimación de la calidad para estabilidad robusta

En este algoritmo que propongo, se utiliza la norma, para obtener la máxima solución del sistema, para después minimizarlo, respecto a los parámetros de estabilización k_1, k_2, \dots, k_m donde $1 \leq m \leq n$.

2.2.1. Solución al problema interno

El modelo matemático de un sistema con un control está dado por las ecuaciones

$$\dot{x} = Ax + bu_1, \quad (91)$$

con condiciones iniciales $x(0) = 0$ y control $u_1 = k^T z$ la matriz A no necesariamente es una matriz de Hurwitz, donde $k = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ son escalares, llamados parámetros de estabilización. El modelo algebraico del sensor es $z = Hx + r(t)$, donde $r(\cdot)$ es una función acotada, para todo $t \geq t_0$, es decir, $|r_j(t)| \leq r_j^0$, para $j = 1, \dots, m$, $u_1 = k^T Hx + k^T r(t)$ se obtiene el sistema

$$\dot{x} = (A + bk^T H)x + bk^T r(t), \quad (92)$$

la matriz $A_c = A + bk^T H$ se llamara matriz cerrada, para que el sistema sea estable es necesario que esta matriz sea una matriz de Hurwitz. Para que esto ocurra, es suficiente que los valores de los parámetros de estabilización k pertenezcan al conjunto Q ,

$$Q = \{k / \operatorname{Re} \lambda_i \leq -\alpha, \alpha > 0, i = 1, \dots, n\}.$$

La solución general del sistema (91) para $t = t_s$ con condiciones iniciales $x(0) = 0$, tiene la forma

$$x_i(t_s) = \int_0^{t_s} C_{i^T} e^{A_c(t_s-t)} bk^T r(t) dt, \quad i = 1, \dots, n, \quad (93)$$

donde $C_i^T = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, (el 1 esta en la posición i .) y $k \in Q$.

Para determinar el valor máximo de la solución, se define la norma de la solución cuando $|r_i(t)| \leq r^0$,

$$\max_{|r_j(t)| \leq r_j^0, j=1, \dots, m} x_i(t_s) = \int_0^{t_s} \sum_{j=1}^m r_j^0 |C_i^T e^{A_c(t_s-t)} bk_j| dt, \quad (94)$$

para $\tau = t_s - t$ resulta

$$\max_{|r_j(t)| \leq r_j^0, j=1, \dots, m} x_i(t_s) = \int_0^{t_s} \sum_{j=1}^m r_j^0 |C_i^T e^{A_c \tau} b k_j| d\tau, \quad (95)$$

entonces cuando $t_s \rightarrow \infty$ y para todo $k \in Q$ se obtiene

$$\max_{|r_j(t)| \leq r_j^0, 1 \leq j \leq m} x_i(\infty) = \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^m r_j^0 |C_i^T e^{A_c(k)\tau} b k_j| d\tau, \quad (96)$$

sabemos que si $|r_j(t)| \leq r_0 = r_0(\epsilon)$ y cumple que $\|x_i(t)\| \leq \epsilon$, entonces el sistema es estable para perturbaciones permanentes (Duboshin, Malkin).

Las norma elevada al cubo de dimensión n

$$\|x(t_s)\| = \max_{1 \leq i \leq n} x_i(t_s) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \int_0^{t_s} \sum_{j=1}^m r_j^0 |C_i^T e^{A_c(k)\tau} b k_j| d\tau,$$

la norma del máximo para x_i es

$$\|x(t_s)\|_{0 < t_s < \infty} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^m r_j^0 |C_i^T e^{A_c(k)\tau} b k_j| d\tau,$$

donde $k \in Q$.

Por ejemplo, si para todo $\epsilon > 0$ tenemos que

$$r_0 \leq \frac{\epsilon}{\max_{1 \leq i \leq n} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^m |C_i^T e^{A_c(k)\tau} b k_j| d\tau},$$

entonces

$$\|x(t)\| \leq r_0 \max_{1 \leq i \leq n} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^m |C_i^T e^{A_c(k)\tau} b k_j| d\tau \leq \epsilon. \quad (97)$$

Con este resultado, garantizamos la calidad de la estabilidad robusta del sistema cuando tenemos perturbaciones permanentes, uno de los objetivos del presente trabajo.

2.3. Sobre la posibilidad de optimizar la calidad de estabilización robusta

El valor de la integral del lado derecho de la desigualdad (96), es el máximo valor de la solución del sistema, para la variable $x_i(t)$,

$$x_i(t) = \max_{1 \leq i \leq n} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^m r_j^0 |C_i^T e^{A_c(k)\tau} b k_j| d\tau, \quad (98)$$

La norma del máximo se puede establecer como un funcional, si primero integramos sobre la variable x y el resultado se minimiza sobre los valores de k . El funcional $J(k)$ se define de la siguiente forma

$$J(k) = \max_{1 \leq i \leq n} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^m r_j^0 |C_i^T e^{A_c(k)\tau} b k_j| d\tau \rightarrow \min_{k \in Q}. \quad (99)$$

para $k = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ escalares.

2.3.1. Ejemplo 1.3

Al sistema mecánico inestable con un grado de libertad $n = 1$, $k^T = (k_1, 0, \dots, 0)$ y $r_1(t) \neq 0$, le aplicamos el Algoritmo de estabilización de min-max.

La ecuación de movimiento del sistema bajo la perturbación permanente r_1 es

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - x_1 = u_1 \quad \text{donde} \quad u_1 = -k_1(x_1 + r_1(t)) \quad \text{y} \quad |r_1(t)| \leq r_0 = 1 \quad (100)$$

sustituyendo el valor de u_1 y obtenemos la ecuación

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + (k_1 - 1)x_1 = -k_1 r_1.$$

El objetivo es estabilizar el sistema cuando tenemos perturbación permanente ($r_1(t)$).

Se aplican los resultados de la sección (2.2) al sistema, que esta en forma de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 - (k_1 - 1)x_1, \end{aligned}$$

la matriz A_c del sistema descrito anteriormente es:

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - k_1 & -2 \end{pmatrix}$$

Entonces, se tiene que resolver la integral, para determinar el parámetro de estabilización de la variable x_1

$$x_1 = r_0 \int_0^{\infty} |C^T e^{A_c(k_1)\tau} b k_1| d\tau \quad (101)$$

y el resultado minimizarlo sobre los valores de k_1 .

Los valores propios de $A_c(k)$ son: $\lambda_1 = -1 + \sqrt{2 - k_1}$ y $\lambda_2 = -1 - \sqrt{2 - k_1}$

Al conjunto de los valores para el parámetro k_1 que hacen la parte real negativa de los valores propios $\lambda_{1,2} \leq -0,1$ se le llama Q , lo definimos

$$Q = \{k_1 / \text{Re}\lambda_{1,2} \leq -0,1\}.$$

Para obtener este conjunto consideramos tres casos.

Caso I) $D = 2 - k_1 > 0$ entonces $k_1 < 2$ y para los valores propios cuya parte real es menor o igual a $-0,1$, esto es, $\text{Re}\lambda_j = \text{Re}\lambda_{1,2} \leq -0,1$ se cumple que

$$-1 \pm \sqrt{2 - k_1} \leq -0,1.$$

Para λ_1 tenemos que: $\lambda_1 = -1 + \sqrt{2 - k_1} \leq -0,1$,

$$\sqrt{2 - k_1} \leq 1 - 0,1 = 0,9$$

$$2 - k_1 \leq 0,81$$

$$2 - 0,81 \leq k_1$$

$$1,19 \leq k_1,$$

por lo que $1,19 \leq k_1 < 2$.

Y para λ_2 tenemos que: $\lambda_2 = -1 - \sqrt{2 - k_1} \leq -0,1$,

$$\begin{aligned} -\sqrt{2 - k_1} &\leq 1 - 0,1 = 0,9 \\ -1 + 0,1 &\leq \sqrt{2 - k_1} \\ -0,9 &\leq \sqrt{2 - k_1}. \end{aligned}$$

Esta desigualdad se cumple cuando $1,19 \leq k_1 < 2$.

El conjunto $Q = [1,19, 2)$, del parametro k_1 que pertenecen a este conjunto, entonces la matriz A_c es una matriz de Hurwitz y el sistema (100) es estable.

Ahora se aplica el algoritmo de estabilización de mini-max cuando existen perturbaciones permanentes, descrito por la integral (98).

Resolviendo la integral (98) para el caso I):

$$x_1 = \frac{k_1}{2\sqrt{2 - k_1}} \int_0^{\infty} (e^{-1+\sqrt{2-k_1}(t)} - e^{-1-\sqrt{2-k_1}(t)}) dt = \frac{k_1}{k_1 - 1}$$

para $k_1 \in [1,19, 2)$.

Caso II) Cuando $D = 2 - k_1 = 0$ entonces $k_1 = 2$ tenemos un valor propio -1 con multiplicidad 2.

Para $k_1 = 2$

$$x_1 = k_1 \int_0^{\infty} |C_1^T e^{At} b| dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 2,$$

cuando $k_1^0 = 2$, se obtiene $x_1^0 = 2$.

Caso III) Para $k_1 \in (2, \infty)$ $D = 2 - k_1 < 0$, entonces los valores propios son $\lambda_{1,2} = -1 + i\sqrt{k_1 - 2}$ la parte real $Re\lambda_{1,2} = -1$. Por lo tanto, el valor de $x_1(t)$ dado por la integral (111) es:

$$x_1 = \frac{k_1}{\sqrt{k_1 - 2}} \int_0^{\infty} e^{-t} |\sin((\sqrt{k_1 - 2})t)| dt$$

para $k_1 \in (2, \infty)$.

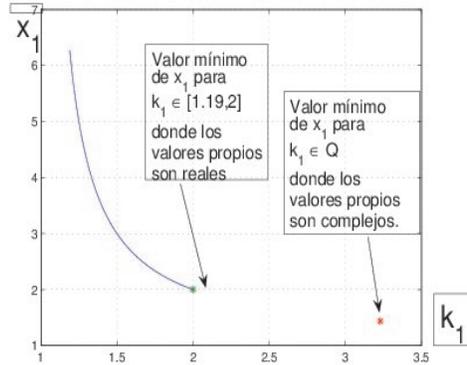


Figura 5: gráfica para $x_1(\infty)$, donde los valores propios son reales para $k_1 \in [1.19, 2]$ y complejos para $k_1 \in (2, \infty)$

El valor mínimo para k_1 se alcanza cuando $k_1^0 = 3.23$, donde $x_1^0 = 1.437$.

Conclusión: el procedimiento para determinar el conjunto Q , notamos que para los valores de $k_1 \in [1, 19, 2]$, los valores son reales, mientras que para $k_1 \in (2, \infty)$ son complejos, sin embargo podemos encontrar los valores de x_1 , descritos en la gráfica, con lo cual me atrevo a decir que tenemos dos parámetros mínimos, uno $k_1 = 2$ para los valores propios reales y otro $k_1 = 3,23$ para valores propios complejos.

2.3.2. Estimación del conjunto de accesibilidad con desigualdades matriciales

Ecuación matricial de Lyapunov y desigualdades matriciales

La ecuación matricial de Lyapunov [6]

$$AP + PA^T = -Q \tag{102}$$

con A , P y $Q = Q^T \in R^{n \times n}$ tiene como solución la matriz simétrica $P = P^T$ si, y sólo si la matriz A tiene eigenvalores $\lambda_i \neq 0$ que no sólo pertenecen al eje

imaginario, es decir, $Re\lambda_i \neq 0$ ($i = 1, \dots, n$).

Desigualdades matriciales [6]

Una desigualdad matricial lineal (LMI) tiene su representación por bloques:

$$0 < F(X) = \begin{bmatrix} F_{11}(X) & F_{12}(X) \\ F_{21}(X) & F_{22}(X) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} S_{11} + G_{11}XH_{11} + H_{11}^T X G_{11}^T & S_{12} + G_{12}XH_{12} + H_{12}^T X G_{12}^T \\ S_{21} + G_{21}XH_{21} + H_{21}^T X G_{21}^T & S_{22} + G_{22}XH_{22} + H_{22}^T X G_{22}^T \end{bmatrix}$$

donde las matrices $X \in R^{n \times n}$, $S_{ii} \in R^{n \times n}$, ($i = 1, 2$) son simétricas y $S_{ij} = S_{ji} \in R^{n \times n}$, $G_{ij} = G_{ji} \in R^{n \times n}$, $H_{ij} = H_{ji} \in R^{n \times n}$, ($i, j = 1, 2$) tal que cada bloque $F_{ij}(X)$ es una transformación de $R^{n \times n}$ a $R^{n \times n}$.

Desigualdad de Lyapunov [6]

Sea la desigualdad matricial

$$XA + A^T X < 0 \quad (103)$$

donde $A \in R^{n \times n}$ es una matriz estable, es equivalente a la siguiente desigualdad matricial lineal, en ingles Linear Matrix Inequalities (LMI),

$$0 < \begin{bmatrix} -XA - A^T X & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & I_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (104)$$

Aplicación de la ecuación de Lyapunov para estimar conjunto de accesibilidad

El objetivo de esta sección es verificar que el conjunto de accesibilidad del sistema dado, pertenece al elipsoide invariante mínimo.

Dado el sistema

$$\dot{x} = Ax + br_1, \quad x(0) = 0, \quad r_1^T(t)r_1 \leq 1, \quad \text{para } 0 \leq t \leq \infty. \quad (105)$$

donde A es una matriz de Hurwitz, r_1 perturbaciones, es controlable.

Para el elipsoide $E_\infty = \{x \in R^n / x^T Q x \leq 1\}$ con $Q^T = Q$ y la función de Lyapunov en su forma cuadrática $v(x) = x^T Q x$, entonces $\dot{v}(x) \leq 0$, si $x^T Q x \geq 1$ y $r_1^T(t)r_1 \leq 1$.

El conjunto de todos los puntos $x \in \mathbb{R}^n$ para los cuales la solución de (105) puede acceder bajo la influencia de algunas perturbaciones r en el instante de tiempo t_i se le llama *conjunto de accesibilidad en el instante de tiempo t_i* y se denota S_{t_i} .

Y el conjunto de accesibilidad S del sistema (105), para cualquier instante de tiempo se define como

$$S = \bigcup_{t_i > 0} S_{t_i}.$$

Se define el conjunto de accesibilidad del sistema de orden n .

Teorema 21 (S-teorema) *Las siguientes desigualdades*

$$\begin{aligned} x^T A_1 x &\leq a_1 \\ x^T A_2 x &\leq a_2 \end{aligned}$$

se puede escribir en la forma

$$x^T A_0 x \leq a_0 \tag{106}$$

donde A_0, A_1, A_2 son matrices, si existe un $\alpha \geq 0$ y $\beta \geq 0$ tales que $A_0 \leq \alpha A_1 + \beta A_2$ y $a_0 \leq \alpha a_1 + \beta a_2$.

Se emplea el resultado y teorema anterior al sistema (105),

$$\begin{aligned} x^T(-Qx) &\leq -1, \text{ entonces } A_1 = -Q \text{ y } a_1 = -1, \\ w^T w &\leq 1, \text{ entonces } A_2 = I \text{ y } a_2 = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_0 = \begin{pmatrix} x^T & w^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T Q + Q A & Q B \\ B^T Q & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\leq a_0 = 0 \tag{107} \\ 0 &\geq -\alpha + \beta, \text{ y } \alpha \geq \beta \geq 0, \end{aligned}$$

sustituimos en la desigualdad matricial $A_0 \leq \alpha A_1 + \beta A_2$, obtenemos que

$$\begin{pmatrix} A^T Q + QA + \alpha Q & QB \\ B^T Q & -\beta I \end{pmatrix} \leq 0 \text{ si y sólo si } A^T Q + QA + \alpha Q + 1/\beta(QBB^T Q) \leq 0. \quad (108)$$

Lema Si A es una matriz de Hurwitz, y $\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$ y $P_0 = P_0^T$ es la solución de la ecuación de Lyapunov $AP_0 + P_0A^T = -BB^T$, entonces

1.- La desigualdad de Lyapunov $AP + PA^T \leq -BB^T$ tiene soluciones P y para cualquier solución P se cumple $P \geq P_0$ (P_0 solución minimal)

2.- Solución del problema extremal $\min \text{Tr}(P)$ con restricción $AP + PA^T + BB^T \leq 0$ es P_0 .

Si $P = Q^{-1}$ de la ecuación (107) tenemos

$$Q^{-1}(A^T Q + QA + \alpha Q) + 1/\beta(QBB^T Q) \leq 0Q^{-1}$$

entonces

$$PA^T + AP + \alpha P + \beta^{-1}BB^T \leq 0 \quad \beta \geq 0.$$

Resulta el siguiente teorema, que simplifica la obtención del elipsoide minimal.

Teorema 22 Si A es una matriz de Hurwitz y $U = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ la cumple que $\text{rang}U = n$, entonces el conjunto de accesibilidad S pertenece al elipsoide invariante $E_\infty = \{x \in \mathbb{R} : x^T P^{-1}x \leq 1\}$ donde $P = P(\alpha)$ es la solución de la ecuación de Lyapunov con $\beta = \alpha$

$$AP + PA^T + \alpha P + \alpha^{-1}BB^T = 0 \quad (109)$$

existe un α_0 tal que S pertenece al menor elipsoide mínimo, donde

$$P(\alpha_0) = \min_{0 < \alpha < \infty} \text{tr}P(\alpha).$$

2.3.3. Ejemplo 1.2 (Comparación de algoritmos para $k_1 = 2$)

Por el teorema 22, se puede calcular el elipsoide minimal para la matriz $A_c(k)$, que es la matriz del sistema que estamos considerando para el ejemplo.

Este método nos sirve para comparar el resultado para los valores para x_1 que obtuvimos al aplicar el algoritmo propuesto en la sección (2.2), tienen que estar dentro del elipsoide mínimo.

Determinar el elipsoide mínimo para ejemplo con $k_1 = 2$

Se quiere determinar el elipsoide mínimo y probar que el valor de x_1 para k_1^0 se localiza dentro de dicho elipsoide, para lograr este objetivo, se aplica el Teorema (22) a la ecuación

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + (k_1 - 1)x_1 = -k_1 r_1. \quad (110)$$

El sistema de ecuaciones en forma de Cauchy es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 - (k_1 - 1)x_1 - k_1 r_1 \end{aligned}$$

la matriz centrada para $k_1 = 2$ es:

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad (111)$$

se sustituye la matriz A_c en la ecuación de Lyapunov

$$A_c P + P A_c^T + \alpha P + \alpha^{-1} B B^T = 0 \quad (112)$$

se obtiene el valor de las componentes de la matriz P simétrica

$$P(\alpha) = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \quad (113)$$

Los valores de sus componentes son

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{-8(\alpha^{-1})}{\alpha^3 - 6\alpha^2 + 12\alpha - 8} \\ p_2, p_3 &= \frac{4}{\alpha^3 - 6\alpha^2 + 12\alpha - 8} \\ p_4 &= \frac{-4\alpha^2 + 8\alpha - 8}{\alpha(\alpha^3 - 6\alpha^2 + 12\alpha - 8)}. \end{aligned}$$

La matriz $P(\alpha)$ tiene que ser definida positiva, como vemos las componentes dependen del valor de α , bajo estas premisas, la matriz cumple, si $p_1 > 0$ y $p_1 p_4 - p_2^2 > 0$.

La matriz es definida positiva para todo $\alpha \in (0, 0.7947)$. De acuerdo al método establecido para determinar el elipsoide, tenemos que encontrar el valor mínimo de $\alpha = \alpha_0$ para la traza de P ($Tr(P(\alpha))$), esta es la traza

$$Tr(P(\alpha)) = \frac{-4\alpha^2 + 8\alpha - 16}{\alpha(\alpha^3 - 6\alpha^2 + 12\alpha - 8)} \quad (114)$$

Para obtener el valor de α_0 derivamos $Tr(P(\alpha))$ y se determinan sus valores extremos. Después de realizar estas operaciones, el valor es $\alpha_0 = 0.551724$, el cual pertenece al intervalo $\alpha \in (0, 0.7947)$.

Con este valor de α , se obtiene el elipsoide mínimo

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.1321x_1^2 + x_1x_2(0.1756) + 0.4654x_2^2 = 1 \quad (115)$$

Ahora se determina el valor de $x_1(t)$ del funcional (98) para $k_1 = 2$,

$$x_1 = k_1 \int_0^{\infty} |C_1^T e^{A_c(k_1)t} b| dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 2,$$

cuando $k_1^0 = 2$, el resultado es $x_1^0 \in [-2, 2]$.

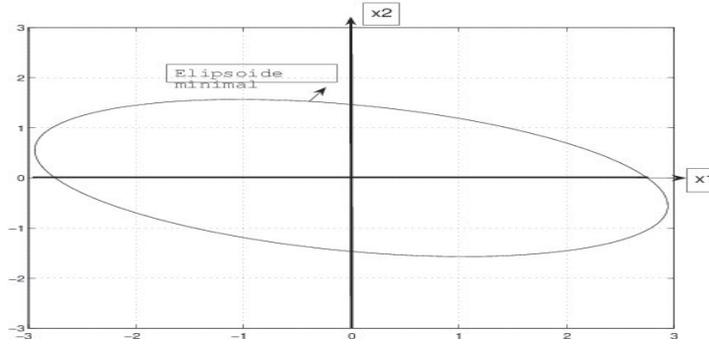


Figura 6: Gráfica del elipsoide minimal para $k_1 = 2$

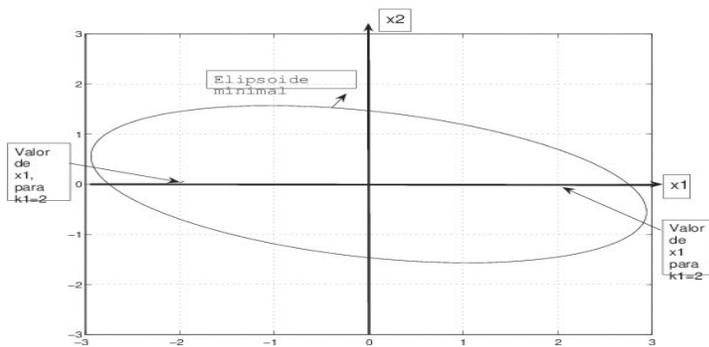


Figura 7: Gráfica del elipse y los valores de x_1 cuando $k_1 = 2$.

El parámetro optimal $k_1 = 2$, que se obtiene por medio del algoritmo de estabilización Mini-max, cuando existen perturbaciones permanentes, evaluado en el funcional $J(k)$, da como resultado el valor de $x_1 = 2$ del ejemplo 1.2, este valor esta contenido en el elipsoide minimal que se obtuvo, esto se muestra en las gráficas.

Conclusión Comparando el método del elipsoide minimal con el algoritmo propuesto, notamos que; tenemos resultados que nos permiten concluir, la exactitud de los algoritmos, cuando consideramos perturbaciones permanentes.

3. Modelación Matemática del péndulo invertido movable

3.1. Modelo Matemático no-lineal del péndulo invertido movable

En este sistema se considera una varilla montada sobre un eje, este eje tiene movimiento generado por dos motores que accionan cada una de las llantas, que están montadas a cada lado del eje. El objetivo es que la varilla se mantenga en posición vertical, como sabemos el movimiento en las llantas se debe al voltaje que se aplica al motor de corriente directa, por lo cual, si necesitamos controlar este sistema mecánico, el voltaje se define como el control del sistema.

En este trabajo, se consideran ligaduras no-holonomas.

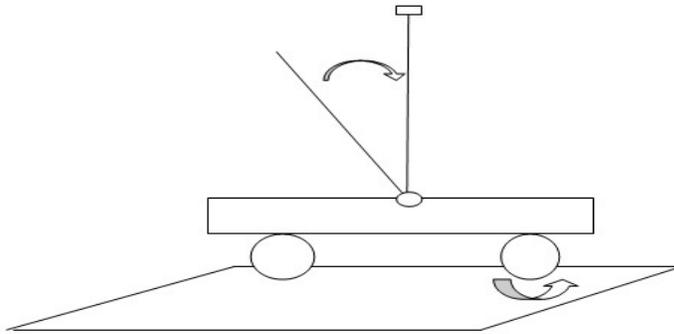


Figura 8: Dibujo del péndulo movable.

Descripción geométrica del sistema

El movimiento de la varilla forma un ángulo β , durante este desplazamiento, al final de la varilla tenemos lo siguiente: \dot{x}_c es la velocidad horizontal de la varilla, $l\dot{\beta}$ es la componente de la velocidad Total, la cual es perpendicular de la varilla, V_T es la velocidad total del sistema, tenemos dos masas m_1 es la masa de la varilla y m_2 es la masa de las ruedas.

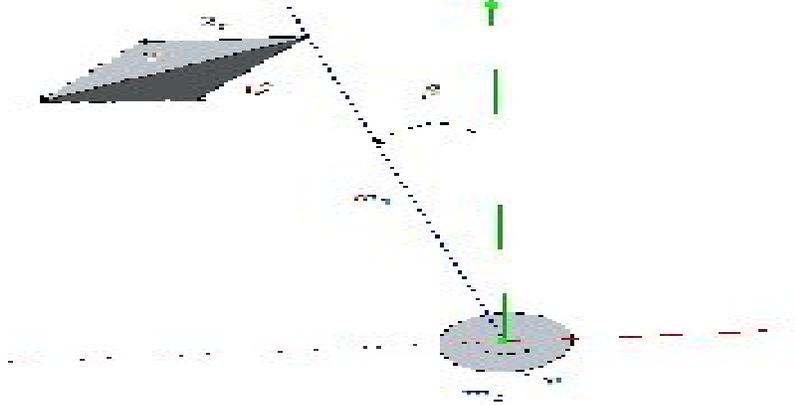


Figura 9: Descripción del péndulo móvil y su geometría.

Para obtener el modelo matemático del sistema se realiza lo siguiente; por la ley de los cosenos para determinar la velocidad total (V_T) del sistema,

$$V_T^2 = (l\dot{\beta})^2 + \dot{x}_c^2 - 2\dot{\beta}\dot{x}_cl \cos \beta. \quad (116)$$

La energía cinética en este punto es la siguiente

$$T = 1/2\dot{x}_c^2 m_2 + 1/2V_T^2 m_1 + 2J\dot{\varphi}^2 \quad (117)$$

la energía potencial cuando la masa principal está en el vértice del sistema

$$U = m_1 gl \cos \beta. \quad (118)$$

se sustituye el valor de la velocidad total V_T , en la ecuación de la energía cinética, el resultado es

$$\begin{aligned} T &= 1/2m_1V_T^2 + 1/2m_2\dot{x}_c^2 + 4J\dot{\varphi}^2, \\ &= 1/2m_1\dot{x}_c^2 + 1/2m_1l^2\dot{\beta}^2 - m_1l\dot{\beta}\dot{x}_c \cos(\beta) + 1/2m_2\dot{x}_c^2 + 2J\dot{\varphi}^2 \end{aligned} \quad (119)$$

La Lagrangiana del sistema es $L = T - U$, se sustituyen las ecuaciones (117) y (118)

$$L = 1/2\dot{x}_c^2 m_1 + 1/2m_1 l^2 \dot{\beta}^2 - m_1 l \dot{\beta} \dot{x}_c \cos(\beta) + 1/2m_2 \dot{x}_c^2 + 2J\dot{\varphi}^2 - m_1 g l \cos \beta \quad (120)$$

empleando la ecuación de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (121)$$

en nuestro sistema $q_i = (x_c, \beta, \varphi)$, x_c es la velocidad del centro de masas, β es la velocidad angular de la varilla, φ es la velocidad angular de las ruedas del carrito.

Para β , la ecuación tiene la forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \beta} &= \frac{d}{dt} [m_1 l^2 \dot{\beta} - m_1 l \dot{x}_c \cos(\beta)] - m_1 l \dot{\beta} \dot{x}_c \sin \beta - m_1 g l \sin \beta \\ &= m_1 l^2 \ddot{\beta} + m_1 l \dot{x}_c \dot{\beta} \sin(\beta) - m_1 l \ddot{x}_c \cos(\beta) - m_1 l \dot{x}_c \dot{\beta} \sin(\beta) - m_1 g l \sin(\beta) \\ &= m_1 l^2 (\ddot{\beta}) - m_1 l \ddot{x}_c \cos(\beta) - m_1 g l \sin(\beta) = Q_1 \end{aligned} \quad (122)$$

Para x_c ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_c} &= \frac{d}{dt} [\dot{x}_c m_1 - m_1 l \dot{\beta} \cos(\beta) + m_2 \dot{x}_c] \\ &= \ddot{x}_c m_1 - m_1 l \ddot{\beta} \cos(\beta) + m_1 l \dot{\beta}^2 \sin(\beta) + m_2 \ddot{x}_c = Q_2. \end{aligned} \quad (123)$$

Para φ ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} [J\dot{\varphi}] = 2J\ddot{\varphi} = Q_3. \quad (124)$$

El modelo Matemático no-lineal del sistema para las coordenadas generalizadas (x_c, β, φ) es:

$$\begin{aligned} m_1 l^2 \ddot{\beta} - m_1 l \ddot{x}_c \cos \beta - m_1 g l \sin \beta &= Q_1 \\ \ddot{x}_c m_1 - m_1 l \ddot{\beta} \cos \beta + m_1 l \dot{\beta}^2 \sin \beta + m_2 \ddot{x}_c &= Q_2 \\ 2J\ddot{\varphi} &= Q_3. \end{aligned} \quad (125)$$

El sistema que se obtiene es de orden 6 con tres grados de libertad.

En el análisis del péndulo invertido montado sobre un carro, es necesario considerar la fuerza que se ejerce al movimiento de las ruedas del carro, este

Cuadro 1: TABLA DE UNIDADES

ángulo plano (radián)	<i>rad</i>
velocidad angular	<i>rad/seg</i>
aceleración angular	<i>rad/seg²</i>
velocidad	<i>mts/seg</i>
aceleración	<i>m/seg²</i>
fuerza (Newton)	<i>kg mts/seg²</i>
momento angular	<i>Kg m²/seg o N m seg</i>
potencial eléctrico (V- Voltio)	<i>W/A</i>
Potencia (W-watio)	<i>Kg m²/seg²</i>
resistencia (ohm- Ω)	<i>V/A</i>
inductancia (H-henrio)	<i>W/A</i>

tipo de fuerzas se incluyen en el sistema, por lo cual dicho sistema considera una coordenada más, llamada restricción. En la sección que sigue, describo algunos de los tipos de restricciones y como se relaciona con las coordenadas del sistema de ecuaciones de Lagrange.

3.2. Restricciones cinemáticas y ecuaciones con multiplicadores de Lagrange

Se denominan restricciones sobre las coordenadas de un sistema siendo independientes de las fuerzas actuantes, es decir, son condiciones que restringen el movimiento de una partícula o sistema de partículas.

Los tipos de restricciones que existen por la forma de expresarse son: restricciones unilateral cuando se expresa mediante una desigualdad, bilateral cuando se expresa mediante una igualdad. Este tipo de restricciones se puede escribir de forma general,

$$f_l(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) = 0 \text{ con } i = 1, 2, \dots, N; \quad l = 1, 2, \dots, K \quad (126)$$

El subíndice l indica que puede haber más de una restricción de este tipo en el sistema, siendo k el número total de ellas.

Si la restricción depende explícitamente del tiempo, se llama reónoma y se llama esclerónoma si no depende explícitamente del tiempo.

Por su integrabilidad, las restricciones se llaman *holónomas*; son restricciones bilaterales que no dependen de las velocidades, sólo dependen de las posiciones de las partículas y el tiempo, exclusivamente. Son integrables, por lo tanto, es posible emplearlas para eliminar las coordenadas dependientes puesto que expresan relaciones algebraicas entre las coordenadas.

Este tipo de restricciones son geométricas (curvas, superficies, etc.) y se pueden escribir en la forma

$$f_l(\vec{r}_i, t) = 0 \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, N; \quad l = 1, 2, \dots, K \quad (127)$$

Las restricciones *no-holonomas* son aquellas que no se pueden escribir como holonomas, es decir, no se pueden escribir en la forma expresada por (126). No son integrables, por lo tanto, es imposible emplear las ecuaciones que las expresan para eliminar las coordenadas dependientes.

La ecuación (126) aparece frecuentemente, en la forma

$$f_l(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) = \sum_{j=1}^{3N} A_{ij}(\vec{r}_i, t) \dot{x}_j + B_l(\vec{r}_i, t) = 0 \quad \text{con } l = 1, 2, \dots, K \quad (128)$$

llamadas ligaduras diferenciales.

En particular sí,

$$A_{lj} = \frac{\partial f_l}{\partial x_j}, \quad B_l = \frac{\partial f_l}{\partial t}, \quad f_l = f_l(\vec{r}_i, t)$$

entonces la expresión (128) queda en la forma

$$\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_l}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f_l}{\partial t} dt = 0, \quad \text{con } l = 1, 2, \dots, K \quad (129)$$

que es justo

$$\frac{df_l}{dt} = 0 \quad (130)$$

y que al ser integrada resulta

$$f_l(\vec{r}_i, t) - C = 0 \quad C = \text{constante de integración} \quad (131)$$

La expresión (125) es de la forma (129) por lo tanto la restricción es, para este caso, holonóma.

Disco que rueda sobre una línea recta

Para un disco que rueda sobre una línea recta (eje x) obligado a moverse de modo que su plano permanezca siempre vertical. El movimiento del centro del disco, se describe únicamente sobre el eje x , un ángulo de giro φ alrededor de su eje, entonces como resultado de la restricción, la magnitud de la velocidad del centro del disco, descrita únicamente sobre el eje x es proporcional a $\dot{\varphi}$

$$x_c = r_0 \dot{\varphi} \quad (132)$$

donde r_0 es el radio del disco, la velocidad v se reduce a la velocidad del centro de masa sobre el eje x , x_c .

De aquí, obtenemos que la restricción para nuestro sistema son:

$$\dot{x}_c - r_0 \dot{\varphi} = 0. \quad (133)$$

Sistemas no-holónomos

Las restricciones no-holónomas sólo pueden ser introducidas en forma explícita ya que, por su naturaleza, no es posible usarlas para eliminar coordenadas dependientes. Estas restricciones, vienen dadas (en coordenadas generalizadas) por,

$$f_l(\vec{q}_i, \dot{\vec{q}}_i, t) = 0 \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, N; \quad l = 1, 2, \dots, K \quad (134)$$

que son frecuentemente encontradas en forma de la ecuación (133).

Los desplazamientos virtuales δq_j para sistemas no-holónomos con k restricciones obedecidas por los caminos verdaderos, están también obligados a obedecer las K condiciones instantáneas

$$\sum_{j=1}^{3N} A_{lj}(q_i, t) \delta q_j = 0 \quad \text{con } l = 1, 2, \dots, K. \quad (135)$$

Al igual que se hizo con (128), las condiciones lineales (129) también pueden ser anexadas al principio de D'Alembert en forma explícita, ya que es lineal en δq_j .

Sumando

$$\sum_{l=1}^K \sum_{j=1}^{3N} \lambda_l(q_i, t) A_{lj}(q_i, t) \delta q_j = 0 \quad (136)$$

las ecuaciones de Lagrange para las restricciones no-holónomas, resulta en la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^K \lambda_l(q_i, t) A_{lj} + Q_j^{NU}, \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, 3N \quad (137)$$

para todas las coordenada. Aquí las fuerzas generalizadas de las restricciones vienen dadas por:

$$Q_j^{lig} = \sum_{l=1}^K \lambda_l(q_i, t) A_{lj}, \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, 3N \quad (138)$$

Para el caso en que las fuerzas sean derivables de potenciales, las ecuaciones (137) se reducen a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^K \lambda_l(q_i, t) A_{lj}, \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, 3N, \quad (139)$$

en el problema del péndulo movible la representación de la ecuación (139) es la siguiente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^K \lambda_l A_{lj}, \quad \text{con } j = 1, 2, , 3. \quad (140)$$

3.3. Modelo no-lineal del sistema con Multiplicadores de Lagrange

Voy a encontrar el sistema de ecuaciones no-lineales (124) con restricciones no-holonomas (137), con multiplicadores de Lagrange utilizando la ecuación (138), para esto igualo (124) con (140)

$$\dot{x}_c - r_0\dot{\varphi} = \sum_{l=1}^K \lambda_l A_{1j} \quad \text{con } j = 1, 2, 3$$

$$\dot{x}_c - r_0\dot{\varphi} = \lambda_1 A_{1,1} + \lambda_1 A_{1,2} + \lambda_1 A_{1,3},$$

entonces $A_{1,1} = 0$, $A_{1,2} = 1$ y $A_{1,3} = -r_0$.

El sistema no-lineal con multiplicadores de Lagrange es el siguiente

$$\begin{aligned} m_1 l^2 \ddot{\beta} - m_1 l \ddot{x}_c \cos \beta - m_1 g l \sin \beta &= 0 \\ \ddot{x}_c m_1 - m_1 l \ddot{\beta} \cos \beta + m_1 l \dot{\beta}^2 \sin \beta + m_2 \ddot{x}_c &= \lambda \\ 2J\ddot{\varphi} &= M - r_0 \lambda. \end{aligned} \quad (141)$$

donde M es el momento del motor.

3.4. Modelo lineal del sistema controlable

Para linealizar el sistema (141) se supone que $|\beta| \ll 1$, entonces $\sin \beta = \beta$ y $\cos \beta = 1$, estos valores se sustituyen y se obtiene el sistema.

$$\begin{aligned} m_1 l^2 \ddot{\beta} - m_1 \ddot{x}_c - m_1 g \beta &= 0 \\ \ddot{x}_c (m_1 + m_2) - m_1 l \ddot{\beta} + m_1 l \dot{\beta}^2 \beta &= \lambda \\ 2J\ddot{\varphi} &= M - r_0 \lambda. \end{aligned} \quad (142)$$

Se deriva respecto a t la ecuación (132) y del resultado se despeja $\ddot{\varphi}$, resulta

$$\ddot{\varphi} = \ddot{x}_c / r_0,$$

y de la segunda ecuación del sistema (141)

$$\lambda = \ddot{x}_c (m_1 + m_2) - m_1 l \ddot{\beta} + m_1 l \dot{\beta}^2 \beta,$$

se sustituye λ y $\ddot{\varphi}$ en el sistema (141) el sistema que resulta es

$$\begin{aligned} m_1 l \ddot{\beta} - m_1 \ddot{x}_c - m_1 g \beta &= 0 \\ \ddot{x}_c \left[\frac{2J}{r_0} + r_0(m_1 + m_2) \right] - m_1 l \ddot{\beta} r_0 + r_0 m_1 l \dot{\beta}^2 \beta &= M. \end{aligned} \quad (143)$$

El momento del motor M se escribe como el producto de una constante k_0 por la corriente i , $M = k_0 i$, se sustituye en el sistema

$$\begin{aligned} m_1 l^2 \ddot{\beta} - m_1 \ddot{x}_c - m_1 g \beta &= 0 \\ \ddot{x}_c \left[\frac{2J}{r_0} + r_0(m_1 + m_2) \right] - m_1 l \ddot{\beta} r_0 + r_0 m_1 l \dot{\beta}^2 \beta &= k_0 i. \end{aligned} \quad (144)$$

Se agrega al sistema (143) la ecuación que representa el modelo Matemático del motor

$$L \dot{i} = u_1 - Ri - C \dot{\varphi}, \quad (145)$$

L es la inductancia de la armadura del motor, R resistencia eléctrica, C es la constante de fuerza electromotriz, i es la corriente, u_1 es el voltaje, para controlar nuestro sistema emplearemos al voltaje, se obtiene

$$\begin{aligned} m_1 l^2 \ddot{\beta} - m_1 \ddot{x}_c - m_1 g \beta &= 0 \\ \ddot{x}_c \left[\frac{2J}{r_0} + r_0(m_1 + m_2) \right] - m_1 l \ddot{\beta} r_0 + r_0 m_1 l \dot{\beta}^2 \beta &= k_0 i \\ L \dot{i} &= u_1 - Ri - C \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (146)$$

se realiza un cambio en la notación, para describir el sistema en coordenadas x_j para $j = 1, 2, 3, 4$, se dice que $x_1 = \beta$, $x_2 = \dot{\beta}$, $x_3 = \dot{x}_c$ y $x_4 = i$,

$$\begin{aligned} m_1 l^2 \dot{x}_2 - m_1 \dot{x}_3 - m_1 g x_1 &= 0 \\ \dot{x}_3 \left[\frac{2J}{r_0} + r_0(m_1 + m_2) \right] - m_1 l \dot{x}_2 r_0 + r_0 m_1 l x_2^2 x_1 &= k_0 x_4 \\ L \dot{x}_4 &= u_1 - R x_4 + C x_3 / r_0. \end{aligned} \quad (147)$$

El sistema en forma de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \left(\frac{g}{l} + \frac{g m_1 r_0}{\frac{2J}{r_0} + l r_0 m_2} \right) x_1 + \frac{k_0}{\frac{2J}{r_0} + l r_0 m_2} x_4 \\ \dot{x}_3 &= \frac{g m_1 r_0}{\frac{2J}{r_0} + m_2 r_0} x_1 + \frac{k_0}{\frac{2J}{r_0} + r_0 m_2} x_4 \\ L \dot{x}_4 &= u_1 - C x_3 / r_0 - R x_4. \end{aligned} \quad (148)$$

Cuadro 2: TABLA DE VALORES

LONGITUD DE LA VARILLA	l	0.5	mts.
RADIO DE LA RUEDA	r_0	0.3	mt.
ACELARACIÓN	g	9.8	m/seg^2
MOMENTO ANGULAR	J	0.05	$Kg m^2/seg$ o $N m seg$
CONSTANTE	k_0	200	$N \cdot R$
CENTRO DE MASAS	m_2	2	Kgs.
MASA	m_1	0.3	Kgs.
RESISTENCIA	R	0.05	Ohm.
INDUCTANCIA ARMADURA	L	0.0025	H.

si $\sigma = \frac{2J}{r_0} + r_0 m_2$, el sistema se simplifica

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= \left(\frac{g}{l} + \frac{gm_1 r_0}{l\sigma}\right)x_1 + \frac{k_0}{l\sigma}x_4 \\
 \dot{x}_3 &= \frac{gm_1 r_0}{\sigma}x_1 + \frac{k_0}{\sigma}x_4 \\
 L\dot{x}_4 &= u_1 - Cx_3/r_0 - Rx_4.
 \end{aligned} \tag{149}$$

Hasta aquí se tiene un sistema con 4 variables, una de ellas cíclica, con la idea de simplificar el sistema, en la siguiente sección aplicare el Teorema de Tikhonov.

3.5. Reducción a un sistema de orden 3 con ayuda del Teorema de Tikhonov

Normalización

El sistema de ecuaciones (149) se puede escribir en forma normalizada. En un sistema de ecuaciones normalizado podemos comparar el orden de magnitud entre todas las variables, por lo que es posible decidir cuál de ellas contribuye eb mayor grado en la dinámica del sistema.

Para normalizar un sistema, aplicamos una transformación a cada una de las variables del sistema.

Se normaliza el sistema (148) con las siguientes transformaciones

$$x_1 = \bar{x}_1 b \quad x_2 = \bar{x}_2 d \quad x_3 = \bar{x}_3 c \quad x_4 = \bar{x}_4 I \quad L = \bar{L} z \quad u_1 = U u, \quad (150)$$

en la parte derecha de cada una de las transformaciones, hay una variable sin dimensiones físicas, esta es letra minúscula, un coeficiente representado por la variable con barra, que contiene las dimensiones físicas de las variables y que indica los valores máximos que puede tener éstas, respectivamente.

Se aplican las transformaciones

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 b &= \bar{x}_2 d \\ \dot{\bar{x}}_2 d &= \left(\frac{g}{l} + \frac{gm_1 r_0}{l\sigma}\right) \bar{x}_1 b + \frac{k_0}{l\sigma} \bar{x}_4 I \\ \dot{\bar{x}}_3 c &= \frac{gm_1 r_0}{\sigma} \bar{x}_1 b + \frac{k_0}{\sigma} \bar{x}_4 I \\ L \dot{\bar{x}}_4 I &= U u - C/r_0 \bar{x}_3 c - R \bar{x}_4 I. \end{aligned} \quad (151)$$

presento el sistema en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \frac{d}{b} \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \left(\frac{g}{l} + \frac{gm_1 r_0}{l\sigma}\right) \bar{x}_1 \frac{b}{d} + \frac{k_0}{l\sigma} \bar{x}_4 \frac{I}{d} \\ \dot{\bar{x}}_3 &= \frac{gm_1 r_0}{\sigma} \bar{x}_1 \frac{b}{c} + \frac{k_0}{\sigma} \bar{x}_4 \frac{I}{c} \\ \frac{IL \dot{\bar{x}}_4}{U} &= u - \frac{C}{r_0} \bar{x}_3 \frac{c}{U} - R \bar{x}_4 \frac{I}{U}. \end{aligned} \quad (152)$$

Cuadro 3: TABLA DE VALORES DEL SISTEMA DE ECUACIONES (152)

$\left(\frac{g}{l} + \frac{gm_1 r_0}{l\sigma}\right) \frac{b}{d}$	$\frac{k_0}{l\sigma} \frac{I}{d}$	$\frac{gm_1 r_0}{\sigma} \frac{b}{c}$	$\frac{k_0}{\sigma} \frac{I}{c}$	$\frac{C}{r_0} \frac{c}{U}$	$R \frac{I}{U}$	$\frac{IL}{U}$
7.7	1.58	1.4	3.16	0.33	0.05	0.0025

De los máximos valores en el cuadro 3 y las ecuaciones (149), suponemos que el valor más pequeño es $\frac{IL}{U} = 0.0025 = \epsilon$ y sustituimos los valores del cuadro 4, podemos escribir es sistema (152) en la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \beta x_1 + \delta x_4 \\ \dot{x}_3 &= \beta_1 x_1 + \delta_1 x_4 \\ \epsilon \dot{x}_4 &= u - \theta x_3 - \delta_2 x_4. \end{aligned} \quad (153)$$

Cuadro 4: TABLA DE VALORES PARA SIMPLIFICAR EL SISTEMA (152)

$(\frac{g}{l} + \frac{gm_1 r_0}{l\sigma}) \frac{b}{d}$	$\frac{k_0}{l\sigma} \frac{I}{d}$	$\frac{gm_1 r_0}{\sigma} \frac{b}{c}$	$\frac{k_0}{\sigma} \frac{I}{c}$	$\frac{C}{r_0} \frac{c}{U}$	$R \frac{I}{U}$
β	δ	β_1	δ_1	θ	δ_2

Reducción del sistema de orden cuatro a un sistema de orden tres

Un sistema singularmente perturbado es un sistema de ecuaciones diferenciales en el que una o varias variables esta multiplicada por un parámetro pequeño.

En el sistema (148) de orden cuatro la cuarta ecuación esta multiplicada por $\epsilon \ll 1$, decimos que es un parámetro muy pequeño, como vemos el sistema (153) es un sistema singularmente perturbado.

Si el sistema de ecuaciones (153) satisface las condiciones del Teorema de Tikhonov, podemos reducir el orden de dicho sistema, de tal manera simplificar el sistema.

1.- Se observa que las funciones del sistema de ecuaciones (153), son continuas y además las derivadas parciales con respecto a las variables, son continuas en el espacio de las variables de estado.

2.- Si probamos que la ecuación $\dot{x}_4 = 0$ tiene raíz unica, entonces decimos que $\epsilon = 0$, de aquí obtenemos la ecuación

$$u - \theta x_3 - \delta_2 x_4 = 0 \quad (154)$$

cuya raíz es

$$x_4 = \frac{u - \theta x_3}{\delta_2}, \quad (155)$$

única y podemos afirmar que es una raíz aislada.

3.- Sustituimos la ecuación (155), en las ecuaciones dos y tres del sistema (153), obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \beta x_1 + \delta \left(\frac{u - \theta x_3}{\delta_2} \right) \\
\dot{x}_3 &= \beta_1 x_1 + \delta_1 \left(\frac{u - \theta x_3}{\delta_2} \right).
\end{aligned} \tag{156}$$

observamos que las ecuaciones son continuas, igualmente sus derivadas parciales.

El sistema (153) es lineal, de aquí que sus soluciones son asintóticamente estables hacia la solución estacionaria (155), entonces el dominio de influencia de la solución estacionaria es todo R (reales), por lo que las condiciones iniciales i_0 de (155) pertenecen al dominio de influencia de la solución estacionaria, las condiciones 4 y 5 se satisfacen.

El sistema que resulta es de orden 3 y dos grados de libertad.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \left(\frac{g}{l} + \frac{gm_1 r_0}{l\sigma} \right) x_1 - \frac{k_0 C}{l\sigma r_0 R} x_3 + \frac{k_0}{l\sigma R} u_1 \\
\dot{x}_3 &= \frac{gm_1 r_0}{\sigma} x_1 - \frac{k_0 C}{\sigma r_0 R} x_3 + \frac{k_0}{\sigma R} u_1.
\end{aligned} \tag{157}$$

la forma matricial del sistema de ecuaciones es la siguiente

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{l} + \frac{gm_1 r_0}{\sigma l} & 0 & \frac{-k_0 C}{l\sigma r_0 R} \\ \frac{gm_1 r_0}{\sigma} & 0 & \frac{-k_0 C}{\sigma r_0 R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k_0}{l\sigma R} \\ \frac{k_0}{\sigma R} \end{pmatrix} \tag{158}$$

Al inicio de este capítulo el modelo matemático del péndulo invertido móvil es un sistema de 6 variables, con restricciones holonomas, consideré necesario simplificarlo considerando todas las condiciones de este, para finalmente obtener un sistema de la forma $\dot{x} = Ax + bu_1$, necesaria para aplicarle alguno de los dos algoritmos propuestos, el sistema tiene tres variables con dos grado de libertad.

En la siguiente sección considero toda información necesaria para estabilizar la varilla del péndulo en posición vertical, como resultado de este análisis obtengo el control para el sistema (169).

3.6. Información necesaria para estabilizar la posición vertical del péndulo movable

Aceleración aparente

La aceleración aparente del sistema cuando la posición del acelerómetro se encuentra al final de la varilla, montada sobre una pequeña plataforma con un eje el cual es muy sensible, es la siguiente

$$a_x = \ddot{x}_c \cos(\beta) - l\ddot{\beta} + g \sin(\beta) \quad (159)$$

para $\beta \ll 1$, $\cos(\beta) = 1$ y $\sin(\beta) = 0$, la aceleración aparente tiene la forma

$$a_x = \ddot{x}_c - l\ddot{\beta} + g\beta, \quad (160)$$

de las ecuaciones (142) despejamos los valores de \ddot{x}_c y $l\ddot{\beta}$ y los sustituimos en la ecuación de la aceleración aparente, obtenemos

$$a_x = \frac{r_0 k_0 I + m_1 g \beta r_0^2}{2J + r_0^2 m_2} - \frac{r_0 k_0 I + m_1 g \beta r_0^2}{2J + r_0^2 m_2} - g\beta + g\beta = 0. \quad (161)$$

Cuando ubicamos el acelerómetro al final de la varilla y sobre la plataforma, de tal forma que el punto geométrico coincide con el que consideramos al inicio de este capítulo, observamos un hecho muy importante para el desarrollo del trabajo. La aceleración aparente es 0. Este resultado, nos indica que es necesario ubicar el acelerómetro en un lugar distinto al propuesto y ya analizado.

Aceleración aparente considerando dos acelerómetros

Hacemos un análisis similar al anterior, si consideramos dos acelerómetros, uno ubicado en el mismo lugar y otro en un extremo de la plataforma con ruedas. Las aceleraciones aparentes de para estos puntos geométricos son:

$$\begin{aligned} a_x^1 &= \ddot{x}_c \cos(\beta) - l\ddot{\beta} + g \sin(\beta) \\ a_x^2 &= \ddot{x}_c \end{aligned} \quad (162)$$

la aceleración total aparente a_x^T es la información z_1 según diferencia de las señales entre los dos acelerómetros

$$z_1 = a_x^1 - a_x^2 = \ddot{x}_c \cos(\beta) - l\ddot{\beta} + g \sin(\beta) - \ddot{x}_c \quad (163)$$

para $\beta \ll 1$, $\cos(\beta) = 1$ y $\sin(\beta) = 0$, la aceleración total aparente es

$$z_1 = -l\ddot{\beta} + g\beta, \quad (164)$$

pero recordemos que

$$l\ddot{\beta} = \ddot{x}_c + g\beta, \quad (165)$$

entonces

$$z_1 = -\ddot{x}_c. \quad (166)$$

$$z_1 = -\frac{r_0 k_0}{2J + r_0^2 m_2} I - \frac{m_1 g r_0^2}{2J + r_0^2 m_2} \beta. \quad (167)$$

Como notamos, la aceleración total aparente no es igual a *cero*, esto nos permite incluirla en el modelo matemático del control y como dije anteriormente, también considerare un giroscopio.

En la siguiente sección obtendré el modelo del control considerando lo antes descrito.

Modelo Matemático del sistema con dos acelerómetros y un giroscopio

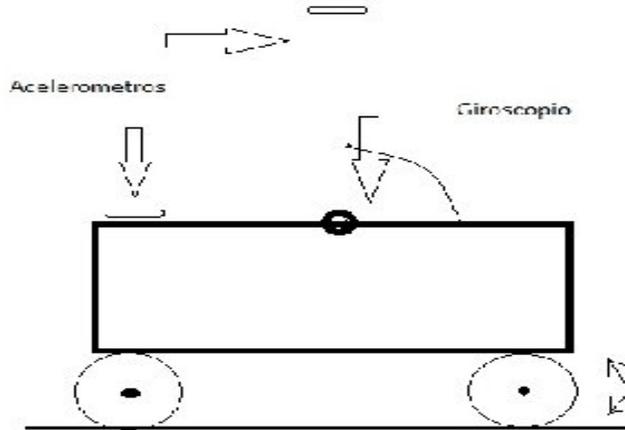


Figura 10: Dibujo del péndulo móvil con dos acelerómetros y un giroscopio.

El control u_1 considerando dos acelerómetros y un giroscopio, las ecuaciones de la combinación de los acelerómetros es la que resulta de la aceleración total aparente

$$a_x^T = -\frac{r_0 k_0}{2J + r_0^2 m_2} I - \frac{m_1 g r_0^2}{2J + r_0^2 m_2} \beta. \quad (168)$$

de acuerdo a la sustitución $I = x_4$ y $\beta = x_1$ propuesta anteriormente, la fórmula que obtengo es la siguiente

$$z_1 = -\frac{r_0 k_0}{2J + r_0^2 m_2} x_4 - \frac{m_1 g r_0^2}{2J + r_0^2 m_2} x_1. \quad (169)$$

y la ecuación del giroscopio es

$$z_2 = x_2 \quad (170)$$

si consideramos las perturbaciones, la forma general propuesta para el control tiene la forma

$$u_1 = k_1(z_1 + r_1(t)) + k_2(z_2 + r_2(t)) \quad (171)$$

realizo las sustituciones, el sistema que resulta, es el siguiente,

$$u_1 = k_1(S_1x_1 + S_4x_4 + r_1(t)) + k_2(x_2 + r_2(t)) \quad (172)$$

donde

$$S_1 = -\frac{gr_0^2}{2J + r_0^2} \quad (173)$$

y

$$S_4 = -\frac{r_0k_0}{2J + r_0^2}. \quad (174)$$

Sustituimos el control u_1 , ecuación (172) en el sistema de ecuaciones (158), obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \left(\frac{g}{l} + \frac{gm_1r_0}{l\sigma} + \frac{k_0k_1S_1}{l\sigma R(r_0 - S_4k_1)}\right)x_1 + \frac{k_0k_2}{l\sigma R(r_0 - S_4k_1)}x_2 - \frac{Ck_0}{l\sigma R(r_0 - S_4k_1)}x_3 \\ &+ \frac{k_0k_1}{l\sigma R(r_0 - S_4k_1)}r_1(t) + \frac{k_0k_2}{l\sigma R(r_0 - S_4k_1)}r_2(t) \\ \dot{x}_3 &= \left(\frac{gm_1r_0}{\sigma} + \frac{k_0k_1S_1}{\sigma R(r_0 - S_4k_1)}\right)x_1 + \frac{k_0k_2}{\sigma R(r_0 - S_4k_1)}x_2 - \frac{Ck_0}{\sigma R(r_0 - S_4k_1)}x_3 \\ &+ \frac{k_0k_1}{\sigma R(r_0 - S_4k_1)}r_1(t) + \frac{k_0k_2}{\sigma R(r_0 - S_4k_1)}r_2(t). \end{aligned} \quad (175)$$

En este sistema tenemos las perturbaciones $r_1(t)$ y $r_2(t)$, tres variables con dos grados de libertad: Tenemos que llevarlo a la forma que nos conviene de tal forma que sea facil de identificar la matriz $A_c(k_1, k_2)$ para aplicarle los algoritmos propuestos en el capítulo 2.

3.7. Modelo lineal del sistema cerrado con perturbaciones

La representación matricial del sistema (175) es un sistema cerrado, $\dot{x}_c = A(k_1, k_2)_c x + Cr$,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{l} + \frac{gm_1 r_0}{l\sigma} + \frac{k_0 k_1 S_1}{l\sigma R(r_0 - S_4 k_1)} & \frac{k_0 k_2}{l\sigma R(r_0 - S_4 k_1)} & \frac{-k_0 C}{l\sigma R(r_0 - S_4 k_1)} \\ \frac{gm_1 r_0}{\sigma} + \frac{k_0 k_1 S_1}{\sigma R(r_0 - S_4 k_1)} & \frac{k_0 k_2}{\sigma R(r_0 - S_4 k_1)} & \frac{-C k_0}{\sigma R(r_0 - S_4 k_1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k_0 k_1}{l\sigma R(r_0 - S_4 k_1)} & \frac{k_0 k_2}{l\sigma R(r_0 - S_4 k_1)} \\ \frac{k_0 k_1}{\sigma R(r_0 - S_4 k_1)} & \frac{k_0 k_2}{\sigma R(r_0 - S_4 k_1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix} \quad (176)$$

como dijimos el sistema tiene dos grados de libertad. Para aplicar los dos algoritmos que estoy proponiendo, necesitamos determinar el conjunto Q ya descrito anteriormente, recordemos que para determinar este conjunto empleamos el criterio de Hurwitz para la matriz $A_c(k_1, k_2)$.

En la representación en la forma matricial (176) del modelo matemático del péndulo invertido movable, consideramos perturbaciones en el control u_1 con dos acelerómetros y un giroscopio. Esto nos permite aplicar el algoritmo a el sistema mecánico, para obtener los parámetros optimales de estabilización. En el siguiente capítulo aplico el primer Algoritmo.

4. Algoritmo numérico para determinar los parámetros de estabilización en un sistema de tres variables

4.1. Introducción a la aplicación del algoritmo

En esta sección hago un análisis de lo necesario para poder proponer y desarrollar un algoritmo numérico que se aplique al sistema (178), para determinar los parámetros de estabilización y obtener estabilización asintótica.

Debido a lo extenso de las funciones, utilizo programas de computadora para aproximarme a los parámetros optimos.

Primero necesito obtener la región Q para k_1, k_2 , con esto garantizo que la matriz $A_c(k_1, k_2)$ es de Hurwitz,

$$A_c(k_1, k_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{l} + \frac{gm_1 r_0}{l\sigma} + \frac{k_0 k_1 S_1}{l\sigma R(r_0 - S_4 k_1)} & \frac{k_0 k_2}{l\sigma R(r_0 - S_4 k_1)} & \frac{-k_0 C}{l\sigma R(r_0 - S_4 k_1)} \\ \frac{gm_1 r_0}{\sigma} + \frac{k_0 k_1 S_1}{\sigma R(r_0 - S_4 k_1)} & \frac{k_0 k_2}{\sigma R(r_0 - S_4 k_1)} & \frac{-C k_0}{\sigma R(r_0 - S_4 k_1)} \end{pmatrix} \quad (177)$$

las componentes de la matriz A_c dependen de los parámetros k_1 y k_2 estas son:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{g}{l} + \frac{gm_1 r_0}{l\sigma} + \frac{k_0 k_1 S_1}{l\sigma R(r_0 - S_4 k_1)} = 25.92 - \frac{1764k_1}{0,02325 + 27,9k_1} \\ a_2 &= \frac{k_0 k_2}{l\sigma R(r_0 - S_4 k_1)} = \frac{200k_2}{0,02325 + 27,9k_1} \\ a_3 &= \frac{-k_0 C}{l\sigma R(r_0 - S_4 k_1)} = \frac{-200}{0,006975 + 8,37k_1} \\ a_4 &= \frac{gm_1 r_0}{\sigma} + \frac{k_0 k_1 S_1}{\sigma R(r_0 - S_4 k_1)} = 0.9484 - \frac{1764k_1}{0,0465 + 55,8k_1} \\ a_5 &= \frac{k_0 k_2}{\sigma R(r_0 - S_4 k_1)} = \frac{200k_2}{0,0465 + 55,8k_1} \\ a_6 &= \frac{-C k_0}{\sigma R(r_0 - S_4 k_1)} = \frac{-20}{0,01395 + 16,74k_1}. \end{aligned} \quad (178)$$

Para determinar la región Q , primero obtengo el polinomio característico de la matriz A_c , la parte real de los valores propios de este polinomio debe ser negativa. Este hecho depende de los valores de los parámetros k_1 y k_2 .

A continuación presento el polinomio característico de la matriz cerrada $A_c(k_1, k_2)$.

$$\det |A_c - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 - \lambda & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (179)$$

$$\det |A_c - \lambda I| = \lambda^3 - \lambda^2(a_2 + a_6) - \lambda(a_3a_5 - a_2a_6 + a_1) - a_4a_3 + a_1a_6 = 0.$$

Una matriz es de Hurwitz, si en el polinomios de tercer orden, $\lambda^3 + \bar{a}_1\lambda^2 + \bar{a}_2\lambda + \bar{a}_3 = 0$, los coeficientes del polinomio cumplen con lo siguiente;

$$\bar{a}_1 > 0, \bar{a}_3 > 0, \text{ y } \bar{a}_1\bar{a}_2 - \bar{a}_3 > 0,$$

comparo los polinomios y tengo que

$$\bar{a}_1 = -(a_2 + a_6), \quad \bar{a}_2 = -(a_3a_5 - a_2a_6 + a_1), \quad \bar{a}_3 = -a_4a_3 + a_1a_6.$$

Aplicando este criterio puedo determinar el conjunto Q para los parámetros k_1 y k_2 del polinomio característico, obtengo las siguientes desigualdades

$$\bar{a}_1 = \frac{lCk_0 - k_0k_2R}{lR\sigma(r_0 - S_4k_1)} > 0, \quad (180)$$

$$\bar{a}_3 = - \left[\frac{[(Ck_0g\sigma)(r_0 - S_4k_1)][1 - m_1R] + Ck_0^2S_1k_1(1 - \sigma) + (Ck_0gm_1)(r_0 - S_4k_1)}{lR\sigma(r_0 - S_4k_1)^2} \right] > 0, \quad (181)$$

$$a_1a_2 - a_3 = \frac{2Ck_0g}{lR\sigma(r_0 - S_4k_1)} - \frac{2Ck_0gm_1}{lR\sigma^2(r_0 - S_4k_1)} - \frac{Ck_0^2lS_1k_1}{l^2R\sigma^2(r_0 - S_4k_1)^2} \\ - \frac{k_0k_2g}{l^2\sigma(r_0 - S_4k_1)} - \frac{k_0k_2gm_1}{l^2\sigma^2(r_0 - S_4k_1)} \quad (182)$$

$$- \frac{k_0^2k_2k_1S_1}{l^2\sigma^2(r_0 - S_4k_1)} - \frac{Ck_0gm_1R}{lR\sigma^2(r_0 - S_4k_1)} > 0.$$

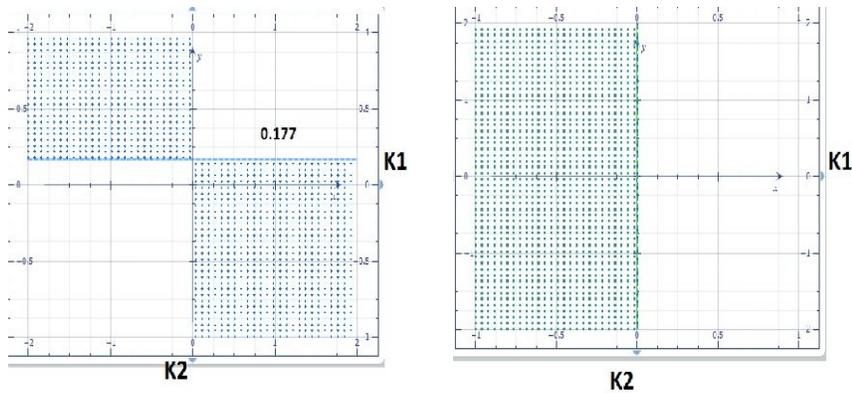


Figura 11: Gráficas de las desigualdades 180, $\bar{a}_1 > 0$ y 181 $\bar{a}_3 > 0$, respectivamente.

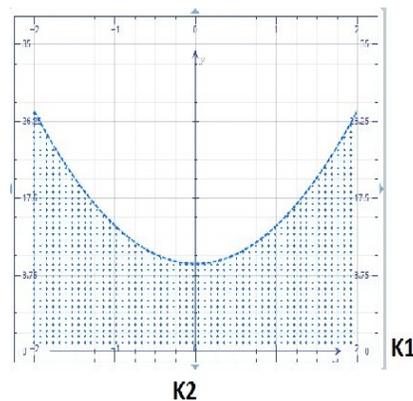


Figura 12: Gráfica de la desigualdad 182, $\bar{a}_1\bar{a}_2 - \bar{a}_3 > 0$

Observaciones: las componentes de la matriz A , son ecuaciones demasiado complicadas, por lo cual, propongo lo siguiente:

1.- Sustituir los valores de las unidades (cuadro 2) que se describen en las ecuaciones.

2.- Suponer que las raíces del polinomio característico son iguales. Utilizo el método de Cardano para obtener las raíces de polinomios de tercer orden, considerando el caso de multiplicidad 3.

A continuación presento el Teorema de Cardano y el caso particular.

Teorema 23 Sea K un cuerpo de característica distinta de 2 o 3 y sean $a, b, y c \in K$. Entonces, las raíces de la ecuación

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (183)$$

es una clausura algebraica de K vienen dadas por

$$x = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{\Delta}} - a/3,$$

donde

$$p = \frac{3b - a^2}{3} \quad q = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27} \quad \Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

la raíz cuadrada de Δ se escoge arbitrariamente y fijara ésta, las raíces cúbicas de u y v se escogen de modo que $p = -3/uv$.

Caso de una raíz triple ($p=q=0$)

La ecuación (183) tiene una raíz triple α si y sólo si es de la forma

$$(x - \alpha)^3 = x^3 - 3\alpha x^2 + 3\alpha^2 x - \alpha^3 = 0$$

igualamos los polinomios y obtenemos que $a = -3\alpha$, es claro que la fórmula de Cardano la raíz única es $x = -a/3$.

Suponemos que el polinomio característico de nuestra matriz cerrada cumple con el caso descrito anteriormente, es decir, que las raíces del polinomio de tercer grado son iguales, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Al aplicar el criterio de Hurwitz para determinar el conjunto $Q = \{Re\lambda_j < -\alpha, \alpha > 0\}$, se tiene que cumplir lo siguiente para cada raíz del polinomio

$$Q = \{\lambda_1 \leq \lambda_0 \quad \lambda_2 \leq \lambda_0 \quad \lambda_3 \leq \lambda_0 \quad \text{donde } \lambda_0 < 0\}$$

Para determinar el conjunto Q tenemos de determinar los valores de k_1 y k_2 además las raíces del polinomio característico son $\lambda_{1,2,3} = -\bar{a}_1/3$. Encontramos la siguiente desigualdad, si decimos que $\lambda_0 < -0,1$

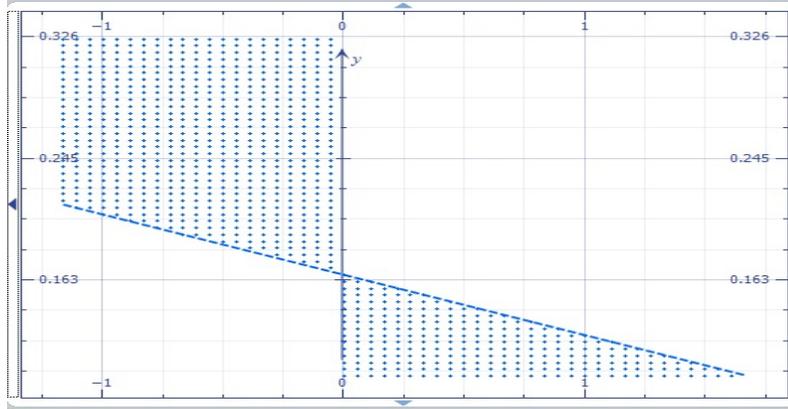


Figura 13: gráfica de la región para la desigualdad 185

$$\lambda_0 = -\bar{a}_1/3 = \frac{k_0 k_2 R - l C k_0}{3lR\sigma(S_4 k_1 - r_0)} < -0.1. \quad (184)$$

Sustituyo los valores del cuadro 2 y obtengo la desigualdad

$$\frac{60k_2 - 10}{0.02025 + 24.3k_1} < -0.1 \quad (185)$$

en la figura (13) vemos los valores de k_1 y k_2 para los que se cumple la desigualdad 185, entonces la región Q es una intersección de las regiones descritas en las figuras 11, 12 y 13, que presento en la figura 14.

En la región Q de los parametros k_1 y k_2 , debo hallar los valores optimales de dichos parametros, aplicando los algoritmos propuestos.

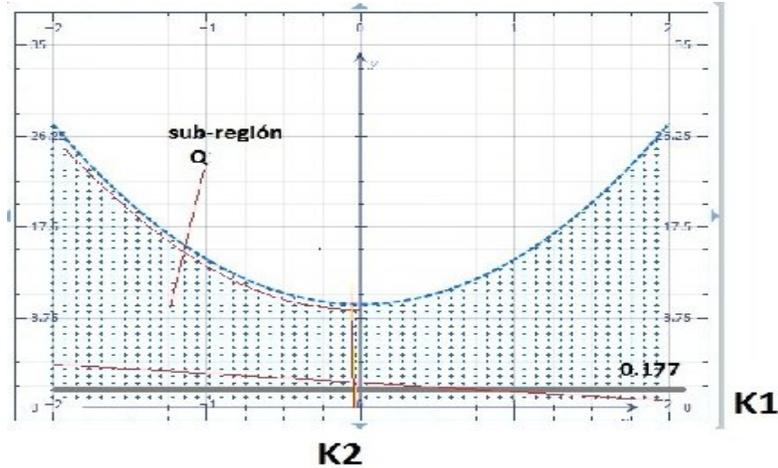


Figura 14: Región Q .

4.2. Algoritmo de estabilización de minimax cuando tenemos perturbaciones iniciales ($r(t) \equiv 0$)

Reducción del problema de estabilización minimax asintótica al problema de programación no lineal

Si el sistema

$$\dot{x} = Ax + bu_1 \quad (186)$$

donde $u_1 = k^T z$, el modelo algebraico del sensor es $z = Hx + r(t)$ entonces el sistema (186) debe ser sustituido por el sistema

$$\dot{x} = Ax + b(k(x + r(t))) = A(k)_c x + Cr(t), \quad (187)$$

en esta sección considero perturbaciones iniciales $r(t) = 0$, por lo tanto el sistema (187) se reduce

$$\dot{x} = A(k)_c x. \quad (188)$$

El objetivo es determinar los parámetros de estabilización de dicho sistema, por lo que necesitamos determinar el valor de k , empleamos el algoritmo de solución del problema de estabilización *mini-max*.

$$J = \max_{|x(0)| \leq \mu_0} \int_0^{\infty} (x^T G x) dt \rightarrow \min_{k \in Q} \quad (189)$$

El problema de estabilización Minimax se reduce a un problema de programación no lineal, con el cual se logra una simplificación considerable de los cálculos a la hora de resolver el problema.

Teorema 1

Para un sistema completamente controlable y unidimensional, de la forma (55) el problema de estabilización mini-max, se puede reducir al problema extremal de dimensión finita,

$$\mu_0^2 \nu_{\max} \rightarrow \min_{k \in Q} . \quad (190)$$

En el caso del péndulo invertido movable, tenemos $k = (k_1, k_2)$ y $x = (x_1, x_2, x_3)$, como vemos la matriz A_c tiene dimensión 3×3 , con condiciones iniciales $|x(0)| < 1$, utilizando el funcional

$$J = \max_{|x(0)| \leq \mu_0} \int_0^{\infty} (x^T G x) dt \rightarrow \min_{(k_1, k_2) \in Q} . \quad (191)$$

ya descrito en la sección (2.1).

Diagrama del Algoritmo de estabilización asintótica para perturbaciones iniciales.

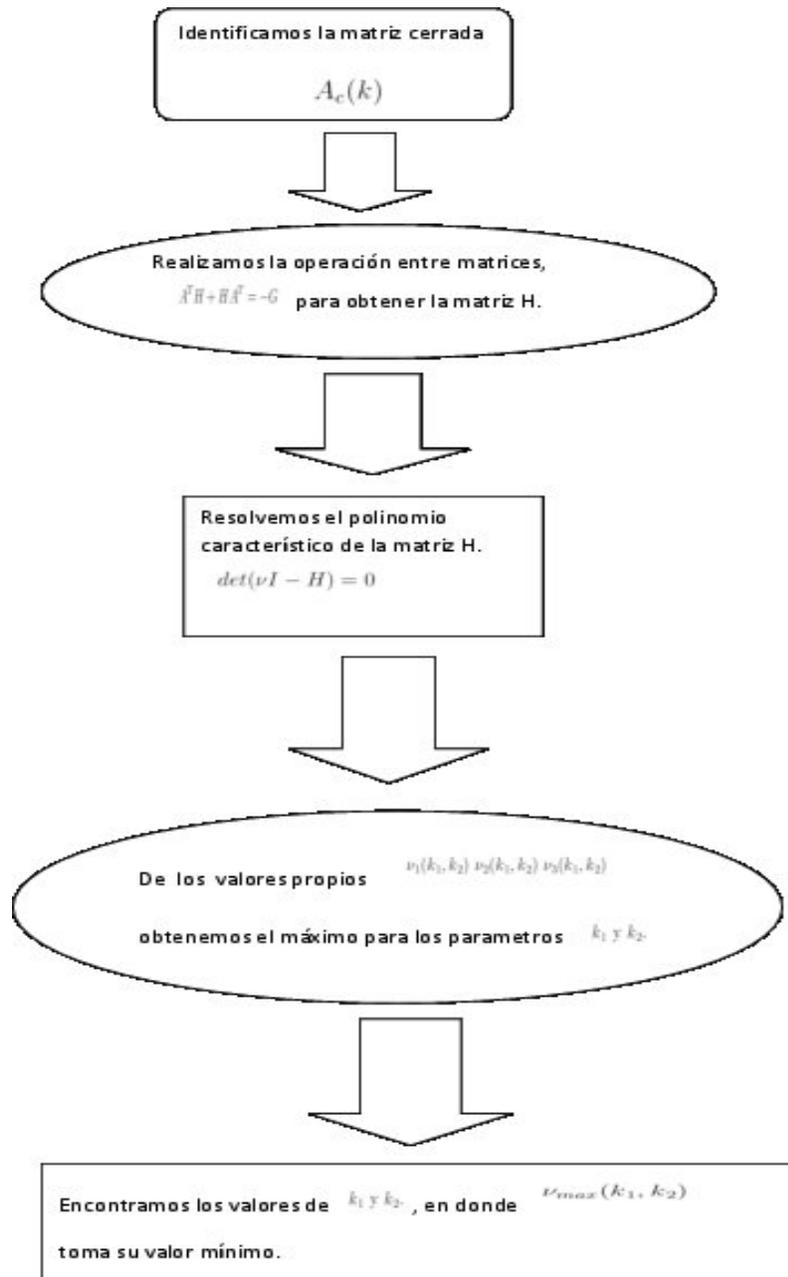


Figura 15:

La matriz $A_c(k_1, k_2)$ para k_1 y k_2 en el conjunto Q , es una matriz de Hurwitz, por tanto se puede aplicar el algoritmo propuesto para este caso.

Primero realizan las operaciones entre matrices

$$A_c(k_1, k_2)^T H + H A_c(k_1, k_2) = -G. \quad (192)$$

La matriz A_c tiene la forma

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \quad (193)$$

como resultado de la operación entre matrices y con el objetivo de obtener las componentes de la matriz simétrica H , genero un sistema de 6 ecuaciones, este algoritmo nos sirve para determinar los parametros óptimos de estabilización para las variables de nuestro sistema, que pueden ser: la aceleración, la velocidad angular, etc., para esto podemos considerar tres matrices distintas G que son casi-identicas y tienen dimensión de 3×3 .

Describo el caso donde consideramos la matriz G casi-identica, que en la posición $g_{1,1}$ tiene valor 1 y en toda la diagonal sus componentes valen 0

$$A_c(k_1, k_2)^T H + H A_c(k_1, k_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (194)$$

genero un sistema de 6 ecuaciones, que sirve para determinar el valor de las componentes de la matriz H simétrica

$$\begin{aligned} 2a_1 h_2 + 2a_4 h_3 &= -1 \\ h_1 + a_2 h_2 + a_5 h_3 + a_1 h_4 + a_4 h_5 &= 0 \\ a_3 h_2 + a_6 h_3 + a_1 h_5 + a_4 h_6 &= 0 \\ h_1 + a_2 h_2 + a_5 h_3 + a_1 h_4 + a_4 h_5 &= 0 \\ 2h_2 + 2a_2 h_4 + 2a_5 h_5 &= 0 \\ a_3 h_2 + a_6 h_3 + a_1 h_5 + a_4 h_6 &= 0. \end{aligned} \quad (195)$$

La matriz H debe ser simétrica y definida positiva, esto lo determinan los valores de los parámetros k_1 y k_2 . Sabemos que una matriz es definida positiva

si los valores propios de su polinomio característico son positivos, esto depende de los valores de k_1 y k_2 .

Las componentes de la matriz H son:

$$\begin{aligned}
h_1(k_1, k_2) = & (a_1^2 a_6 - a_1 a_2^2 a_6 - a_1 a_2 a_6^2 - a_1 a_3 a_5 a_6 - a_4 a_1 a_3 - a_1 a_6^3 + \\
& a_2^3 a_6^2 - 2a_2^2 a_3 a_5 a_6 + a_4 a_2^2 a_3 + a_2^2 a_6^3 + a_2 a_3^2 a_5^2 - 2a_2 a_3 a_5 a_6^2 + a_4 a_2 a_3 a_6 + \\
& a_3^2 a_5^2 a_6 + a_4 a_3^2 a_5 + a_4 a_3 a_6^2) / (2a_1 a_2^2 a_6^2 - 2a_1^2 a_2 a_6 + 2a_1 a_2 a_3 a_4 - \\
& 2a_5 a_1 a_2 a_3 a_6 + 2a_1 a_2 a_6^3 - 2a_1 a_3 a_4 a_6 - 2a_5 a_1 a_3 a_6^2 - 2a_2^2 a_3 a_4 a_6 + \\
& 2a_5 a_2 a_3^2 a_4 - 2a_2 a_3 a_4 a_6^2 + 2a_3^2 a_4^2 + 2a_5 a_3^2 a_4 a_6)
\end{aligned} \tag{196}$$

$$\begin{aligned}
h_2(k_1, k_2) = & -(a_2 a_6^3 + a_2^2 a_6^2 - a_1 a_2 a_6 + a_2 a_3 a_4 - a_3 a_5 a_6^2 - \\
& a_2 a_3 a_5 a_6) / (2a_1 a_2^2 a_6^2 - 2a_1^2 a_2 a_6 + 2a_1 a_2 a_3 a_4 - 2a_5 a_1 a_2 a_3 a_6 + 2a_1 a_2 a_6^3 - \\
& 2a_1 a_3 a_4 a_6 - 2a_5 a_1 a_3 a_6^2 - 2a_2^2 a_3 a_4 a_6 + 2a_5 a_2 a_3^2 a_4 - \\
& 2a_2 a_3 a_4 a_6^2 + 2a_3^2 a_4^2 + 2a_5 a_3^2 a_4 a_6)
\end{aligned} \tag{197}$$

$$\begin{aligned}
h_3(k_1, k_2) = & -(a_5 a_2 a_3^2 - a_2^2 a_3 a_6 - a_2 a_3 a_6^2 + a_5 a_3^2 a_6 + a_4 a_3^2 - \\
& a_1 a_3 a_6) / (2a_1 a_2^2 a_6^2 - 2a_1^2 a_2 a_6 + 2a_1 a_2 a_3 a_4 - 2a_5 a_1 a_2 a_3 a_6 + \\
& 2a_1 a_2 a_6^3 - 2a_1 a_3 a_4 a_6 - 2a_5 a_1 a_3 a_6^2 - 2a_2^2 a_3 a_4 a_6 + 2a_5 a_2 a_3^2 a_4 - \\
& 2a_2 a_3 a_4 a_6^2 + 2a_3^2 a_4^2 + 2a_5 a_3^2 a_4 a_6)
\end{aligned} \tag{198}$$

$$\begin{aligned}
h_4(k_1, k_2) = & (a_6^3 + a_2 a_6^2 - a_1 a_6 + a_3 a_4) / (2a_1 a_2^2 a_6^2 - \\
& 2a_1^2 a_2 a_6 + 2a_1 a_2 a_3 a_4 - 2a_5 a_1 a_2 a_3 a_6 + 2a_1 a_2 a_6^3 - 2a_1 a_3 a_4 a_6 - \\
& 2a_5 a_1 a_3 a_6^2 - 2a_2^2 a_3 a_4 a_6 + 2a_5 a_2 a_3^2 a_4 - 2a_2 a_3 a_4 a_6^2 + \\
& 2a_3^2 a_4^2 + 2a_5 a_3^2 a_4 a_6)
\end{aligned} \tag{199}$$

$$\begin{aligned}
h_5(k_1, k_2) = & -(a_3 a_6^2 + a_2 a_3 a_6) / (2a_1 a_2^2 a_6^2 - \\
& 2a_1^2 a_2 a_6 + 2a_1 a_2 a_3 a_4 - 2a_5 a_1 a_2 a_3 a_6 + 2a_1 a_2 a_6^3 - 2a_1 a_3 a_4 a_6 - \\
& 2a_5 a_1 a_3 a_6^2 - 2a_2^2 a_3 a_4 a_6 + 2a_5 a_2 a_3^2 a_4 - 2a_2 a_3 a_4 a_6^2 + \\
& 2a_3^2 a_4^2 + 2a_5 a_3^2 a_4 a_6)
\end{aligned} \tag{200}$$

$$\begin{aligned}
h_6(k_1, k_2) = & (a_2a_3^2 + a_3^2a_6)/(2a_1a_2^2a_6^2 - 2a_1^2a_2a_6 + 2a_1a_2a_3a_4 - \\
& 2a_5a_1a_2a_3a_6 + 2a_1a_2a_6^3 - 2a_1a_3a_4a_6 - \\
& 2a_5a_1a_3a_6^2 - 2a_2^2a_3a_4a_6 + 2a_5a_2a_3^2a_4 - 2a_2a_3a_4a_6^2 + 2a_3^2a_4^2 + 2a_5a_3^2a_4a_6)
\end{aligned} \tag{201}$$

Determinamos los valores propios en el polinomio característico

$$\det(I\nu - H) = 0,$$

$$\begin{aligned}
\det(I\nu - H) = & \nu^3 - \nu^2(h_6 + h_4 + h_1) + \\
& \nu(h_4h_6 - h_5^2 + h_1h_6 + h_1h_4 - h_2^2 - h_3^2) - \\
& h_1h_4h_6 + h_1h_5^2 + h_2^2h_6 - 2h_2h_3h_5 + h_3^2h_4 = 0,
\end{aligned} \tag{202}$$

los valores propios de la matriz H son:

$$\begin{aligned}
& \nu_1(k_1, k_2), \\
& \nu_2(k_1, k_2), \\
& \nu_3(k_1, k_2).
\end{aligned} \tag{203}$$

Las ecuaciones de los valores propios son ecuaciones muy grandes por tal motivo no las escribo en el presente texto.

Una vez que obtengo los valores propios, describo los pasos para determinar los valores optimales de los parametros de estabilización k_1 y k_2 .

Primero.- Necesito determinar el valor propio ν_{max} de los valores propios del polinomio característico (202), para $(k_1, k_2) \in Q$.

Segundo.- Busco los valores de k_1 y k_2 para lo cuales $\nu_{max}(k_1, k_2)$ tiene un valor mínimo.

Los métodos y programas empleados son descritos en la siguiente sección

4.3. Aplicación del método numérico para buscar parámetros optimales de control

En esta sección propongo un algoritmo que nos permita determinar los parámetros Optimales de estabilización, para esto, primero tengo que llevar acabo el último paso descrito en el cuadro 5. Determinamos el valor propio máximo ν_{max} para los parámetros $(k_1, k_2) \in Q$, también para determinar los parámetros optimales de estabilización y debido a lo extenso de la función que representa el valor propio máximo, propongo realizar lo siguiente:

Primero Utilizo un programa (**mallado.m**) que yo cree, con el que genero un mallado discreto en una sub-región $Q_1 \subseteq Q$, esta sub-región se propone en forma arbitraria.

Segundo Evaluo las tres funciones (valores propios) para los puntos de la sub-región Q_1 , obtengo valores de las funciones. Algunos de estos valores se ven en el cuadro 5.

Tercero Con los valores de las funciones puedo identificar el ν_{max} , para el mallado en la sub-región propuesta Q_1 .

Cuarto Empleo un programa de la libreria de MATLAB llamado **fmincom**, que determina el valor mínimo de una función en una sub-región dada. Entonces propongo una subregión $Q_2 \subseteq Q_1$. Obtengo los valores (k_1, k_2) donde la función toma su valor mínimo en la sub-región Q_2 .

Este punto se puede considerar el parámetro Optimal.

Para generar el mallado en alguna sub-región Q_1 y evaluar a cada una de las funciones (valores propios), describo la forma de utilizar el programa (**mallado.m**).

Primero Nos pide los valores de $k_1 = x$ y $k_2 = y$ para generar los puntos del mallado en la sub-región.

Segundo Evalua una de las funciones, como lo dije, hay un programa para cada función y obtenemos el valor de la función en los puntos del mallado.

Tercero Obtenemos la gráfica de cada una de las funciones.

En la siguiente gráfica, se ven los puntos evaluados en cada una de las funciones y notamos, que los puntos evaluados en ν_1 tienen un valor máximo, respecto de ν_2 y ν_3

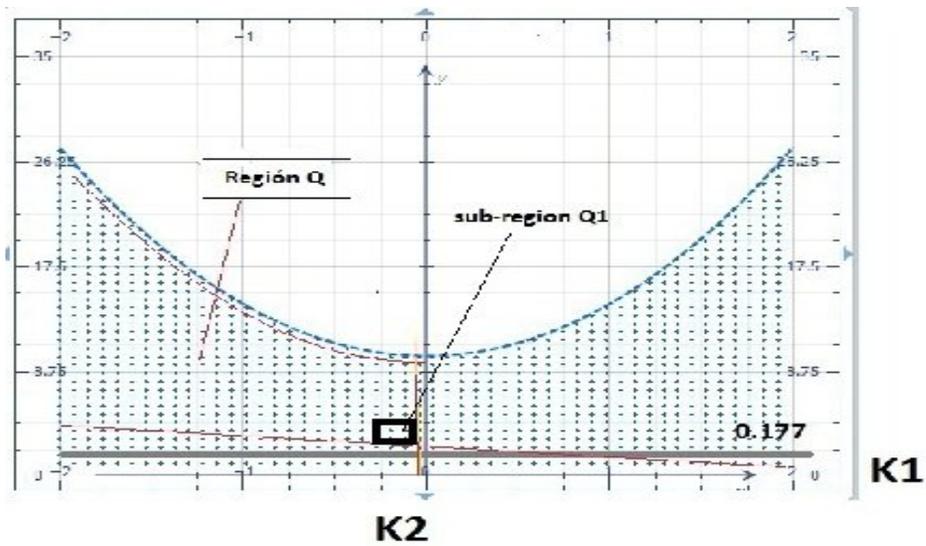


Figura 16:

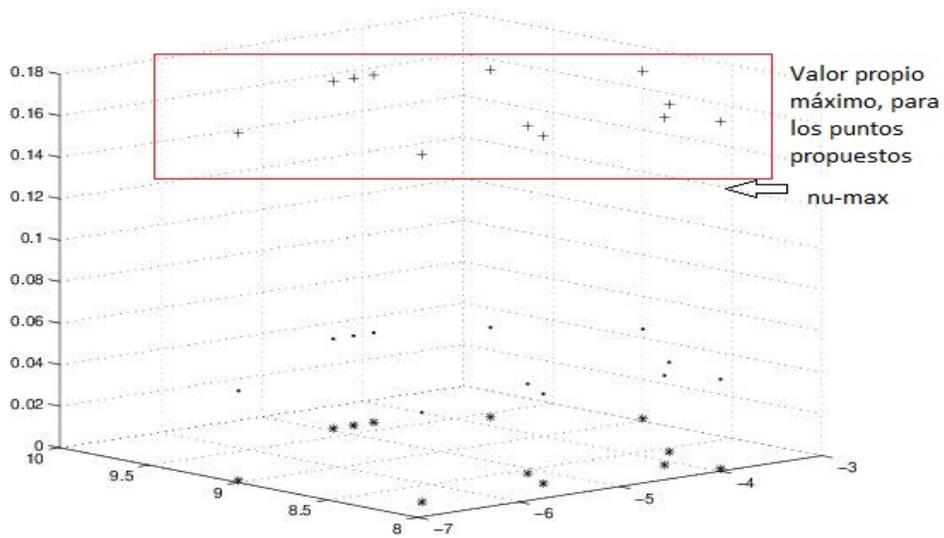


Figura 17: gráfica de los puntos de la tabla 4. (+) ν_1 . (*) ν_2 . (.) ν_3 .

Cuadro 5: TABLA DE RESULTADOS PARA ν_1, ν_2, ν_3 , EN LAS REGIONES ESTABLECIDAS

k_1	k_2	$\nu_1,$	$\nu_2,$	$\nu_3,$
-6.6	8.2	0.1672	0.003462	0.0443
-5.4	8.2	0.1683	0.003125	0.0445
-4.2	8.2	0.1773	0.001701	0.0464
-5.2	8.4	0.1702	0.002806	0.0447
-3.8	8.4	0.1860	0.002376	0.0476
-4	8	0.1870	0.001595	0.0465
-7	9	0.1682	0.003289	0.0443
-3	9	0.2186	0.0000396	0.0494
-3.8	9.4	0.1989	0.00006084	0.0506
-5	9.6	0.1806	0.001282	0.0472
-4.8	9.6	0.1831	0.0009408	0.0478
-4.6	9.6	0.1858	0.0005547	0.0485

A continuación muestro el programa que hice en MATLAB

Programa para generar y evalua cada una de las funciones en el mallado de la sub-región propuesta. [13], [14]

Programa mallado.m

```
clear all
a=1;
ymax=input('Cuál es el valor de y mxima? ');
yint= input('Intervalo para dibujar en y? ');
ymin= input('Cuál es el valor y mnimo? ');
xmax=input('Cuál es el valor de x mxima? ');
xint= input('Intervalo para dibujar en x? ');
xmin= input('Cuál es el valor x mnimo? ');
y=ymin:yint:ymax;
x=xmin:xint:xmax;
```

```

for i=1:length(y)
for k=1:length(x)
resultado(k,i)= 2*(((3*y(i))/10)-0.05)/0.6)/(0.1-20*x(k));
if (resultado(k,i)>0.1)
res(a)=resultado(k,i);
y2(a)=y(i);
x2(a)=x(k);
a=a+1;
*** Aquí va cada una de las funciones  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ..
end
end
end
plot(x2,y2,'+')
grid;

```

Los valores de las funciones, son representados en el cuadro 5 y me permiten suponer, que el valor propio máximo es $\nu_1 = \mu_{max}(k_1, k_2)$.

Notamos que $\nu_1 = \nu_{m\acute{a}x}$, para $k_1 = -6,6$ y $k_2 = 8,2$, este valor propio tiene un mínimo $\nu_1 = 0,1685$, para obtener los valores de (k_1, k_2) donde ν_1 tiene un mínimo, aplico el siguiente programa de MATLAB.

Para determinar los valores Optimos de k_1 y k_2 , aplico el programa *fmincon* de MATLAB, que describo a continuación, en este programa generamos una región que contenga a $(-6,6, 8,2)$ esta región es $[8, 9] \times [-7, -6]$.

Este programa obtiene los valores mínimos de ν_{max} en la región propuesta. [13],[14]

El programa de MATLAB *fmincom* utiliza dos sub-programas.

En el primer sub-programa escribimos la función a minimizar de la siguiente forma

```
function f= objfun(x,y)  f = M(k1, k2);
```

En el segundo sub-programa, describimos la sub-región para valores de $x(1)$ y $x(2)$, a esta sub-región la llamamos Q_1

```
function [c,ceq]=confun(x,y)
c = [Q1];
ceq= [ ] ;
```

Por último empleamos el programa *fmincon*, aquí se llama a la función $M(k_1, k_2)$ y las restricciones Q_1 , con el valor inicial

```
clc
clear
disp('Ejemplo 1')
disp('condiciones iniciales')
x0 = [-1,1]
options=optimset('LargeScale','off');
[x,fval]=fmincon(æobjfun,x0, [ ], æconfun, options)
```

Resultados finales del algoritmo

El valor mínimo de ν_{max} es

$$0.1678$$

para $k_1 = -6.4$ y $k_2 = 8.1$, en la región propuesta, estos valores son los optimos que obtengo aplicando el Algoritmo propuesto y sus respectivos programas.

En el algoritmo que propongo considero perturbaciones iniciales, estas se calculan, cuando obtengo el vector propio de la matriz H , para el valor propio ν_{max} , ya evaluado en los valores optimales de k_1 y k_2 . Estas son las peores perturbaciones iniciales:

$$r = (-0.9972, -0.0746, -0.0065)$$

Conclusión de la aplicación del algoritmo desde el punto de vista físico

En un sistema mecánico inestable por perturbaciones iniciales, esta es $r = (-0.9972, -0.0746, -0.0065)$, para estabilizar el sistema, para la variable x_1 , aplicaria los parametros $k_1 = -6.4$ y $k_2 = 8.1$.

Conclusión

En la presente tesis, tengo 2 resultados generales, de los cuales propongo el desarrollo y construcción de dos algoritmos.

En la aplicación de los algoritmos, obtengo 4 resultados importantes y presento la descripción por pasos de cada uno de los algoritmos. El desarrollo de los algoritmos surge del sistema original $\dot{x} = Ax + bu$ donde la matriz A no es matriz Hurwitz, por lo que, el sistema no es estable. Sin embargo cuando tenemos un control $u = kz$ donde $z = h^T + r_1(t)$ en el cual considero perturbaciones permanentes ($r_1(t)$), el sistema que obtengo tiene una matriz $A_c(k)$, esta es una matriz de Hurwitz, cuando determino el conjunto Q , al que pertenecen los valores de los parametros k y de esta forma el sistema sea estabilizable.

Para la síntesis de este problema, desarrollo un algoritmo, este reduce el problema de estabilización mini-max a un problema de programación no lineal, con un control, cuando $r_1 = 0$. En esta capítulo se considera la ecuación matricial $A^T H + HA = -G$.

En el análisis, propongo un algoritmo, que nombro "solución del problema mini-max, cuando tenemos perturbaciones permanentes $r_1(t) \neq 0$ y acotadas". Y así determinar el valor de k_1 optimo, de la solución x del sistema (2), para comparar los resultados obtenidos en el primer ejemplo, obtengo un paralelepipedo que por tratarse de $n = 2$ es un rectangulo.

Despues estimo el conjunto de accesibilidad con desigualdades matriciales, considerando perturbaciones permanentes internas $r_1(t) \leq r_0$. En el teorema (21) se consideran perturbaciones externas, en este caso considero perturbaciones internas.

Aquí determino el elipsoide minimo para el mismo sistema, de esta forma obtengo que la solución x minimizada, es decir, el rango de una variable de la solución, está contenido en el elipsoide minimal.

Con esto se verifico que el método propuesto para el sistema con las condiciones dadas sirve para estabilizar este sistema.

En el capítulo 3, obtengo el Modelo Matemático del sistema mecánico de tipo seg-way, que se mueve en el plano vertical. El el primer modelo es no-lineal,

no-holonómico con multiplicadores de Lagrange. El segundo es lineal controlable de orden 4. Y el tercer modelo es, lineal controlable de orden 3, considerando perturbaciones, este modelo la matriz $A_c(k)$ es cerrada.

En el capítulo 4, aplico el primer algoritmo, a los resultados finales del capítulo 3. Describo los pasos que se siguen para obtener el valor Óptimo de los parámetros k_1 y k_2 .

En resumen; ambos algoritmos sirven para obtener los parámetros óptimos de estabilización, considerando perturbaciones iniciales y permanentes.

Resultados obtenidos

1.- Desarrollo del Algoritmo de síntesis de estabilización asintótica de minimax, reducción al problema de programación no-lineal, para perturbaciones iniciales. (**Teorema 1**)

2.- Construcción de un Algoritmos de análisis de Estabilidad Robusta, cuando existen perturbaciones permanentes. (**Ecuación 98**)

3.- Modelos Matemáticos del sistema mecánico del tipo de un *segway* en el plano vertical:

3.1 Modelo no lineal no-holonómico con multiplicadores de Lagrange. (**Ecuación 141**)

3.2 Modelo Lineal del sistema controlable de orden 4. (**Ecuación 149**)

3.3 Análisis de la aceleración total del sistema, en un caso considerando un acelerómetro al final de la varilla vertical y en otro caso dos acelerómetros, uno al final de la varilla vertical y otro al final de la plataforma. (**Ecuaciones 161 y 168**)

3.4 Modelo lineal del sistema controlable de orden 3 con perturbaciones permanentes. (**Ecuación 176**)

4.- Aplicación del Algoritmo de síntesis de Estabilización asintótica de minimax, para modelo lineal controlable de orden 3. (**Figura 15**)

5.- Programa en MatLab para aproximarnos a la región donde se localizan parámetros óptimos.

6.- Programa en MatLab para minimizar los funcionales de los algoritmos en las regiones determinadas utilizando métodos numéricos.

Referencias

- [1] L. Elgoltz, “ Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional, ” MIR, Moscu [1969].
- [2] V. V. Alexandrov, S. I. Slochevskii, S. S. Lemak, N. A. Parushnikov, R. Reyes Sánchez, H. Salazar, I. Romero “Introducción a la modelación Matemática de sistemas contolables,” B.U.A.P., Puebla [1998].
- [3] V. V. Alexandrov, V. G. Boltiansky, S. I. Zlochevsky, R. Reyes, J. Torres, “ Optimización de la dinámica de sistema contolables” , B.U.A.P. [2000].
- [4] Kokotovic Petar, Hassan K. Khalil, Jhon O'Reilly, Siam, “Singular perturbation Method in Control, Analisis and Desing” , [1999].
- [5] Sir William Thomson, Peter Guthrie Tait, “Treatise on Natural Philosophy” ,[1923].
- [6] Grantham y Vicent, “Sistemas de control moderno” , Limusa. [1998].
- [7] Merkin, “Introducción a la teoría de Estabilidad en el movimiento,” Ciencia, Moscu. [1971].
- [8] B. T. Poliak, P. S. Sherbakov, “ Indeterminación en estabilidad y su manejo,” Ciencia, Moscu. [2002].
- [9] Georfe J. Klir y Ando Bo Yuan, “ Fuzzy sets and fuzzy logic, Theory and applications,” Prentice Hall, U.S.A. [1995].
- [10] Poznyak Alexander S, “ Advanced Mathematical tools for Automatic Control Engineers,” ELSEVIER, The Netherlands [2008].
- [11] A. N. Tikhonov. Sistemas de ecuaciones diferenciales que contienen parámetros pequeños en las derivadas. ;atemaches-kii Sbornik, 31(3):575-586, [1952].
- [12] A. N. Tikhonov, A. B. Vasileva, and A. G. Sveshnikov. Differential equations. Series in Soviets Mathematics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, [1985].

- [13] Amos Gilat. Una Introducción con ejemplos prácticos. Reverte, [2005].
- [14] Manuel López Marínez y JoséÁngel Acosta Rodríguez. Manual de Introducción a MATLAB. Universidad de Sevilla, [2004].