



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA.**



**FACULTAD DE CIENCIAS
DE LA ELECTRÓNICA**

**“Análisis de la evolución de polarización a través de
estructuras difractantes.”**

**Tesis profesional
para obtener el título de:**

**Licenciado en Ciencias
de la Electrónica**

Presenta:
Juan Carlos Juárez Morales

Asesor de tesis:
Dr. Edmundo Reynoso Lara

H. Puebla de Zaragoza, Abril 2023

AGRADECIMIENTOS

A mi asesor:

Dr. Edmundo Reynoso Lara

Por la confianza e incondicional apoyo otorgado, por sus comentarios realizados a lo largo de este trabajo y sobre todo por su amistad brindada en todo momento.

A mis sinodales:

Dra. Yolanda Elinor Bravo García, Dr. Gustavo Mendoza Torres, y Dr. Enrique Morales Rodríguez

Por sus valiosas sugerencias y comentarios para mejorar este trabajo de tesis.

A la Facultad de Ciencias de la Electrónica

Por otorgarme todas las facilidades para realizar mis estudios de licenciatura.

DEDICATORIAS

A Dios

Ante todas las cosas, por acompañarme siempre en todo momento de dificultad y permitirme alcanzar satisfactoriamente otra de mis metas.

A mis Padres

† **Justino Juárez Rosas y Amelia Morales López**

Por su apoyo, cariño y confianza que siempre me han dado.

A mi gran Amor

Susana Carmona Ramos

Gracias por estar conmigo y apoyarme siempre, te quiero mucho.

A mis Hermanas

Pilar y Wendy

Por su respaldo y aliento brindado durante toda mi vida.

GRACIAS !!!

RESUMEN

En el presente trabajo de tesis, se realiza un estudio de trayectorias de polarización asociadas a campos ópticos completamente coherentes mediante una representación funcional espacial de los parámetros de Stokes. La representación funcional se obtiene a través del modelo del espectro angular.

Con el estudio propuesto se muestra la existencia de trayectorias de polarización en campos ópticos generados por difracción obtenidos mediante la curva envolvente de elipses locales de polarización obtenidos a partir de la matriz de coherencia.

Finalmente, se realiza la descripción de las propiedades estructurales de la luz emergente de un sistema óptico mediante el cálculo de la matriz de coherencia utilizando un arreglo interferométrico. De esta forma, con los cálculos obtenidos se establece un análisis alternativo a la matriz de coherencia ya reportada por Wolf. Este trabajo de tesis es parte principal del proyecto de tesis de maestría financiado por CONACYT en el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE).

ÍNDICE

Capítulo I: Introducción general.	7
1.1 Introducción y planteamiento del problema.	7
1.2 Motivación del trabajo.	7
1.3 Estructura de la tesis.	9
1.4 Objetivos.	10
1.5 Conceptos básicos.	10
1.5.1. Ondas electromagnéticas.	10
Capítulo II: Conceptos fundamentales de Óptica física.	13
2.1. Ecuaciones de Maxwell.	13
2.2. Ecuación de onda.	14
2.3. Solución a la ecuación de onda.	15
2.4. Modelos para representar un campo óptico arbitrario.	16
2.4.1. Modelo del espectro angular.	17
2.4.2. Modelo de Huygens-Fresnel.	18
2.4.2. Representación de Weyl.	19
2.5. Conceptos fundamentales de coherencia.	20
2.5.1. Definición de coherencia.	20
2.5.2. Descripción de la matriz de coherencia.	23
2.6. Descripción interferométrica de la matriz de coherencia.	25
Capítulo III: Descripción de polarización generalizada.	27
3.1. Descripción de interferencia y polarización.	27
3.2. Parámetros de Stokes y la esfera de Poincaré.	30
3.3. Parámetros de Stokes generalizados.	32
3.3.1. Modelo del espectro angular para los parámetros de Stokes.	35
3.4. Solución modal para los parámetros de Stokes.	36
3.4.1. Enfoque geométrico de estados de polarización.	37
3.4.2. Trayectorias y envolventes de polarización.	38
Capítulo IV: Resultados.	42
4.1. Análisis de polarización a partir de la matriz de coherencia.	42
4.1.1. Desarrollo teórico.	42
4.1.2. Desarrollo experimental.	44
4.1.3. Resultados experimentales.	46
Capítulo V: Conclusiones.	51
5.1. Conclusiones	51
5.2. Líneas de investigación.	52

5.3 Trabajo a futuro.	52
Apéndice A.	54
Bibliografía.	55

Lista de figuras.

1.	Guía de onda 2D, Smith et. AL., NCSD, Science (2006).	8
2.	Pinza óptica, identificación de moléculas orgánicas complejas.	9
3.	Esquema básico de difracción.	16
4.	Esquema de fuentes puntuales discretas.	21
5.	Esquema para la generalización de amplitudes.	21
6.	Suma de ondas con diferentes frecuencias.	22
7.	Comportamiento de una polarización arbitraria.	26
8.	Elipse de polarización asociada a una onda plana.	29
9.	Esfera de Poincaré.	30
10.	Evolución de la elipse de polarización a un desfase de: a) 0, b) $\pi/4$, c) $\pi/2$, d) $3\pi/4$, e) π , f) $5\pi/4$, g) $3\pi/2$, h) $7\pi/4$, i) 2π .	32
11.	Trayectorias de polarización sobre la esfera de Poincaré.	33
12.	Estados posibles de polarización para dos puntos del campo óptico.	34
13.	Envolvente de trayectorias de polarización localmente elíptica.	37
14.	Patrón de irradiancia para un plano perpendicular (x, y) al eje de propagación de una luz Bessel $J_0(2\pi dr)$.	40
15.	Región para un haz Bessel $J_0(2\pi dr)$, con su envolvente, lo que genera una mezcla de estados de polarización circulares.	41
16.	Sistema de referencia para el análisis de la matriz de coherencia.	43
17.	Arreglo interferométrico.	45
18.	Montaje experimental.	46
19.	Vista frontal del arreglo experimental montado.	47
20.	Campo de interferencia con polarización paralela 0° .	47
21.	Campo de interferencia con polarización ortogonal 90° .	48
22.	Campo de interferencia con el analizador a 45° .	48
23.	Curva de valores del campo de interferencia.	49
24.	Esquema propuesto de la matriz de coherencia en un arreglo interferométrico tipo Young.	53
25.	Esquema de una guía de onda (superficie rugosa).	53

Lista de tablas.

1.	Valores experimentales medidos con detector.	49
----	--	----

Capítulo I: Introducción general.

1.1. Introducción y planteamiento del problema.

El estudio y análisis de las propiedades estructurales de los campos ópticos de la luz es importante en este trabajo de tesis. Estas propiedades estructurales están contenidas en la función de fase. A partir de esta función es posible obtener información de la estabilidad y evolución espacial de los campos ópticos. En particular, es posible realizar un análisis de polarización y coherencia parcial. En el presente trabajo de tesis proponemos un análisis de la fase de campos ópticos en medios lineales utilizando como punto de partida el modelo del espectro angular. El tratamiento permite incorporar una representación paramétrica para la función de fase.

Se realiza un análisis de los conceptos fundamentales de óptica física y se identifican los parámetros que caracterizan a un campo óptico. Se muestra que la función de fase lleva la información de las distribuciones de polarización, coherencia, irradiancia, etc., además de que permite un análisis de la estabilidad cuando se propaga a través de medios de índice de refracción variable. En este sentido, esta estructura representa la función más importante de Óptica.

Finalmente, se realizará un estudio de campos ópticos mediante la matriz de coherencia. El estudio se extiende a la interacción coherente entre campos ópticos. En particular se estudia la evolución de polarización y coherencia en sistemas difractantes. Este estudio incorpora la función de densidad espectral mutua, la cual satisface la ecuación de Helmholtz en donde tiene por condición de frontera una función de transmitancia de correlación.

1.2. Motivación del trabajo.

Sabemos que la polarización es un concepto fundamental asociado a los campos ópticos. Su medida y eventual control nos ofrecen aplicaciones en diversas áreas tecnológicas. Por ejemplo, un tópico de interés contemporáneo consiste en el control de polarización a través de fibras ópticas y guías de onda. En la figura (1), se muestra una guía de onda 2D que ofrece varias aplicaciones en circuitos electrónicos, antenas, subsistemas de microondas, milimétricas, fotónicos, etc. [1].

2D waveguide

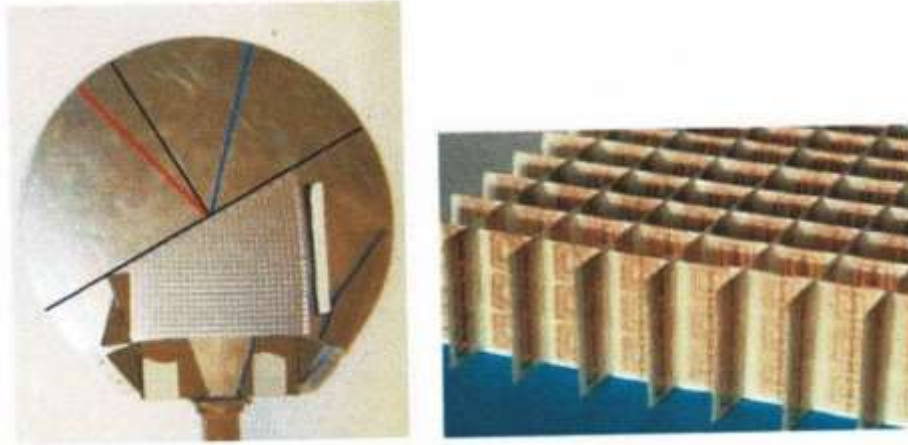


Figura 1. Guía de onda 2D, Smith et. Al., NCSA, Science (2006).

Aplicaciones más recientes sobre guías de ondas son en sistemas electrónicos, particularmente en la fabricación de antenas pequeñas de móviles y sistemas de comunicación satelital en los que se les quiere agrupar un gran número de antenas en un espacio mínimo. Una aplicación que ha tenido un gran auge se refiere a proyectos relacionados con metamateriales utilizando guías de onda.

En el caso de los trabajos mencionados anteriormente, la polarización también nos permite describir fenómenos de transferencia del momento angular para el desarrollo de micromotores, así también para la síntesis de pinzas ópticas que nos permiten tener en general, control de partículas y confinamiento de átomos. En la figura (2), se muestra una configuración que consiste en un sustrato de vidrio sobre el que se asienta una capa de oro y fluoruro de magnesio, en la que se realizan perforaciones de 100nm de tamaño, estas perforaciones se realizan por excitaciones de plasmones superficiales generados por la incidencia de luz sobre el sustrato compuesto.

Esta composición supone un gran avance en relación a intentos anteriores basados en nanobarras de oro, debido a la menor resistencia eléctrica del material [2]. Más aún, el haber logrado estos tipos de materiales con aplicaciones en todo el espectro electromagnético abre la puerta al desarrollo de super lentes (lentes que superan el límite de difracción), cuya superior resolución permitiría construir dispositivos que podrían observar el interior de una célula o diagnosticar enfermedades a bebés aún en el útero [3].

Por último, las guías de onda ópticas. Se encuentran aún en fase de investigación y no han llegado todavía al mercado. Resulta difícil predecir cuándo lo harán, ya que se trabaja a largo plazo en esta área de investigación.

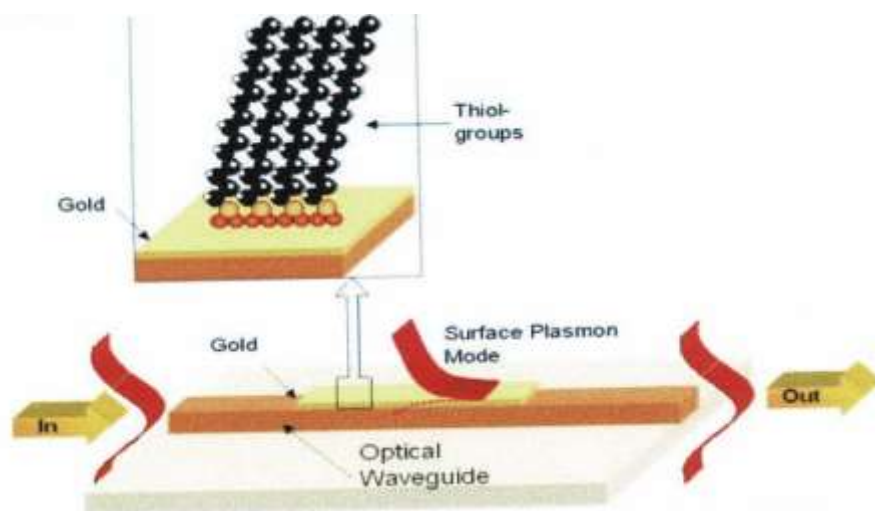


Figura 2. Pinza óptica, identificación de moléculas orgánicas complejas.

1.3. Estructura de la tesis.

Para el análisis de este trabajo, se muestran los principales modelos de óptica para difracción, en particular se muestra el modelo del espectro angular el cual permite una representación paramétrica de campos ópticos.

Los parámetros implícitos en el tratamiento, permiten ejercer un control sobre polarización y coherencia, se implementa experimentalmente el control sobre estos parámetros y se muestra la matriz de coherencia asociados a campos ópticos. Finalmente se propone un tratamiento para la evolución de polarización y coherencia a través de estructuras difractantes.

En el capítulo 2, se describen los conceptos fundamentales de óptica, en particular se muestra la solución a la ecuación de onda utilizando el modelo del espectro angular. La estructura es una suma paramétrica de ondas planas en donde los parámetros son las frecuencias espaciales y nos permite una representación simple a los modelos de coherencia parcial. Dicha representación es fundamental en el capítulo siguiente para la descripción generalizada de los parámetros de Stokes.

En el capítulo 3, se describen los conceptos fundamentales de interferencia, polarización, se asocian los parámetros de Stokes y se describe la esfera de Poincaré. A partir de estos resultados, se describen los parámetros generalizados de Stokes y se definen trayectorias sobre la esfera de Poincaré, los cuales se asocian a estados de polarización de campos de difracción. Las ideas se extienden a la posibilidad de síntesis de diversos estados de polarización cuya envolvente no corresponda necesariamente con una geometría elíptica.

Por último, en el capítulo 4, se implementa experimentalmente como determinar los parámetros de Stokes a partir de la matriz de coherencia asociados a campos ópticos, se propone un tratamiento para la evolución de polarización y coherencia a través de estructuras difractantes. Además, se presentarán las conclusiones obtenidas, algunas posibles líneas de investigación y el trabajo a futuro por realizar.

1.4. Objetivos.

Objetivo general

- Analizar las trayectorias de polarización asociadas a campos ópticos completamente coherentes mediante una representación funcional espacial de los parámetros de Stokes, obtenidos mediante la curva envolvente de elipses locales de polarización a partir de la matriz de coherencia.

Objetivos específicos

- Estudiar los conceptos fundamentales de la óptica Física.
- Analizar la polarización de la luz mediante la esfera de Poincaré y los parámetros de Stokes.
- Realizar la simulación computacional de los estados de polarización usando el software Matlab R2008a.
- Describir los estados de polarización a partir de la matriz de coherencia.
- Construir el interferómetro tipo Michelson para el cálculo de los parámetros de Stokes en función de la matriz de coherencia.

1.5. Conceptos básicos.

1.5.1. Ondas electromagnéticas.

Durante muchos años, no se tenía claro cuál era el medio que perturban las ondas electromagnéticas es así que se hablaba del éter como medio de transferencia. Hoy en día se sabe que esto del éter no es así y que las ondas llamadas electromagnéticas, no necesitan de ningún medio, es decir se pueden propagar a través del espacio vacío.

Algunos conceptos físicos que se utilizan para caracterizar a las ondas son:

- La longitud de onda (λ), es la distancia entre dos puntos idénticos de la onda, por ejemplo, entre dos crestas consecutivas en el agua (tiene unidades de distancia: mm, cm, m, etc.).

- La máxima altura de la onda se denomina amplitud y también se mide en unidades de distancia.
- El periodo es el tiempo T que tarda la onda en recorrer un ciclo, es decir, en volver a la posición inicial, por ejemplo, de una cresta a la cresta siguiente.
- La frecuencia es el número de ciclos completos que se dan en un determinado tiempo, generalmente es un segundo (sus unidades son ciclos o veces por segundo, es decir, unidades de la inversa del tiempo). En otras palabras, la frecuencia es la rapidez con la cual la perturbación se repite por si misma. La frecuencia es el inverso del periodo T ; $f = 1/T$.
- La velocidad de propagación de la onda. Dado que la velocidad es la distancia dividida por el tiempo en que se recorrió dicha distancia, en nuestro caso podemos expresarla como *longitud de onda/periodo*, y como la inversa del periodo ($1/T$) es la frecuencia, entonces tenemos que: $v = \lambda f$. Esto dependerá de las propiedades del medio que experimenta la perturbación. Por ejemplo, las ondas sonoras se propagan en el aire a una velocidad menor que a través de los sólidos. Las ondas electromagnéticas que se propagan en el vacío, es decir, que no requieren medio que se perturbe para propagarse, lo hacen a una velocidad muy alta, de $300,000\text{km/seg}$ (c es la velocidad de la luz).
- El ángulo de fase φ : Cada punto de una onda posee una fase definida que indica cuanto ha progresado o avanzado dicho punto a través del ciclo básico de la onda. Las fases de las ondas son las que gobiernan lo que ocurre cuando dos o más ondas se encuentran. Si dos ondas en el agua se cruzan, puede ocurrir que cuando una esté en la cresta máxima, la otra esté en la mínima; y como consecuencia de esto se atenúa el movimiento en el lugar de cruces de ambas; es decir, el máximo cancela el mínimo. Esta superposición de ondas se da así porque ambas ondas que se encontraron estaban fuera de fase, es decir, tenían diferentes ángulos de fase y estaban desfasadas. Es la diferencia de fase entre ondas que se superponen lo que produce el fenómeno de interferencia.
- La polarización: Este concepto explica en qué dirección o plano oscila la onda en el medio. Así decimos que, si la onda oscila perpendicularmente a la dirección del medio, tenemos una onda polarizada transversalmente. Tal como se explica en el caso de ondas transversales, una onda puede tener infinitas polarizaciones, dado que son infinitos los planos que contiene a la recta que marca la dirección del movimiento de la onda. El fenómeno de la polarización es el que comprobamos cuando usamos anteojos negros, estos contienen alguna sustancia que actúa como filtro, no dejando pasar determinadas direcciones de propagación, eliminando así los reflejos o el encandilamiento.

Las ondas electromagnéticas a diferencia de las mecánicas, no necesitan de un medio para su existencia.

Las ondas electromagnéticas ocurren como consecuencia de dos efectos:

- Un campo magnético variable genera un campo eléctrico.
- Un campo eléctrico variable produce un campo magnético.

Las fuentes de radiación electromagnética son cargas eléctricas aceleradas, es decir, que cambian con el tiempo su velocidad de movimiento. Las ondas radiadas consisten en campos eléctricos y magnéticos oscilatorios que están en ángulo recto (perpendiculares) entre sí y también son perpendiculares (ángulo recto) a la dirección de propagación de la onda, esto significa que las ondas electromagnéticas son por naturaleza transversales.

James Clerk Maxwell demostró que las amplitudes de los campos eléctricos y magnéticos de una onda electromagnética están relacionadas.

Las ondas electromagnéticas cubren un amplio espectro de frecuencias. Dado que todas las ondas electromagnéticas tienen igual velocidad c (velocidad de la luz) que es constante, la relación $v = \lambda f$ define todo el espectro posible, abarcando desde las ondas de radio de baja frecuencia y gran longitud de onda, las cuales son ondas electromagnéticas producidas por cargas que oscilan en una antena transmisora, las ondas de luz son frecuencias mayores se producen cuando determinados electrones oscilan dentro de los sistemas atómicos. Este tipo de ondas fuera del campo visible como las del ultravioleta, los rayos X, los rayos gamma y rayos cósmicos, son vibraciones de otros electrones o desaceleraciones de los mismos.

Capítulo II: Conceptos fundamentales de óptica física.

2.1. Ecuaciones de Maxwell.

Los modelos de óptica física se pueden considerar como una extensión del estudio de la teoría electromagnética, cuya descripción está contenida en las ecuaciones de Maxwell.

Clásicamente un campo electromagnético en el espacio se describe por dos vectores, \vec{E} y \vec{H} , llamados vector eléctrico y magnético, respectivamente. Para incluir el efecto de la materia es necesario introducir un segundo conjunto de vectores, \vec{D} y \vec{B} , los cuales son llamados desplazamiento eléctrico e inducción magnética, respectivamente. Estos vectores están relacionados por las ecuaciones de Maxwell, cuya representación matemática en su forma diferencial están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

esta ecuación es la expresión diferencial de la Ley de inducción de Faraday, la cual describe la creación de un campo eléctrico inducido debido a un flujo magnético variable en el tiempo.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (2)$$

donde \vec{J} es la densidad de corriente eléctrica y esta ecuación es la expresión diferencial de la ley generalizada de Ampere, la cual describe la creación de un campo magnético debido a un flujo de carga.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad (3)$$

donde ρ es la densidad de carga eléctrica y esta ecuación es la expresión diferencial de la Ley de Coulomb, la cual describe la relación entre la distribución del campo eléctrico y la distribución de carga.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (4)$$

de donde esta ecuación puede considerarse como la manifestación de la ausencia de monopolos magnéticos libres.

La densidad de carga ρ y la densidad de corriente \vec{J} podrían considerarse como fuentes de radiación electromagnética. Cuando se tiene propagación electromagnética en zonas lejanas de la fuente, ρ y \vec{J} son cero.

En las ecuaciones de Maxwell, se encuentran relacionadas cuatro cantidades básicas de campos electromagnéticos, \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} y \vec{B} . Para permitir una única determinación de vectores del campo a partir de una distribución dada de corrientes y cargas, estas ecuaciones deben complementarse por una relación que describa el efecto del campo electromagnético en el medio. Estas relaciones se conocen como ecuaciones constitutivas y están dadas por;

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{D} + \vec{P}, \quad (5)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H} + \vec{M}, \quad (6)$$

donde μ y ϵ son conocidas como la permeabilidad magnética y permitividad eléctrica; \vec{P} y \vec{M} son la polarización eléctrica y magnetización; ϵ_0 y μ_0 son la permitividad y permeabilidad en el vacío, respectivamente.

2.2. Ecuación de onda.

En esta sección se deducirá la ecuación de onda a partir de las ecuaciones generales de Maxwell, posteriormente se harán las justificaciones correspondientes para cada medio.

Tomando las ecuaciones (1) a (4), aplicando el rotacional a (2), sustituyendo en (1) y usando el triple producto vectorial, se obtiene la ecuación de onda para \vec{B}

$$-\nabla^2 \vec{B} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (7)$$

De manera similar aplicando ahora el rotacional a (1) y sustituyendo en (2), se encuentra

$$-\nabla^2 \vec{E} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (8)$$

En un medio libre de cargas y dieléctrico, es decir, si se considera que el medio es no conductor, esto es, $\sigma = 0$ las ecuaciones (7) y (8) toman la forma

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0, \quad (9)$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (10)$$

Si tenemos que cada una de ellas tiene tres componentes y la función $\psi(r, t)$, representa a cualquiera de las seis componentes rectangulares de \vec{E} y \vec{B} , se encuentra que

$$\nabla^2 \psi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (11)$$

el cual se conoce como ecuación diferencial de onda.

2.3. Solución a la ecuación de onda.

En principio es posible un análisis considerando solo una componente la cual es una onda escalar, las otras componentes se obtienen mediante las ecuaciones de Maxwell. A esta componente escalar, es común escribir como:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \psi = 0, \quad (12)$$

en donde

$$v = \sqrt{\frac{1}{\epsilon\mu}},$$

que es la velocidad de propagación de la onda.

El problema se reduce a la búsqueda de la función ψ , para esto se propone una solución cuya estructura sea separable en una parte espacial y otra temporal de la forma

$$\psi(x, y, z, t) = \sum \phi_n(x, y, z) \exp\{i\omega_n t\}, \quad (13)$$

sustituyendo en la ecuación de onda, tenemos;

$$\sum \nabla^2 \phi_n - \frac{\omega_n^2}{v^2} \phi_n = 0. \quad (14)$$

Se tiene que cada término de la suma se debe anular, esto es

$$\nabla^2 \phi - \frac{\omega_n^2}{v^2} \phi = 0, \quad (15)$$

pero si se define $k^2 = \frac{\omega_n^2}{v^2}$ entonces;

$$\nabla^2 \phi - k^2 \phi = 0. \quad (16)$$

En donde por convención se eliminó el subíndice, la ecuación anterior se conoce como la ecuación de Helmholtz, y tiene la información de las fluctuaciones espaciales del campo óptico. Para obtener la expresión matemática asociada a la distribución espacial compleja de amplitudes, se necesita información de la condición de frontera, la cual se conoce como función de transmitancia.

2.4. Modelos para representar un campo óptico arbitrario.

Difracción consiste en el estudio de la distribución de amplitudes que se generan en un punto arbitrario por la presencia de un objeto iluminado. Esta distribución de amplitudes puede producir regiones con características singulares y estas se generan mediante el mapeo de alguna no-linealidad presente en la condición de frontera, la cual en el presente trabajo de tesis esta caracterizada por la función de transmitancia.

El concepto de singularidad óptica significa que se pueden crear regiones con propiedades ópticas y físicas diferentes a las tradicionales, particularmente en la distribución no lineal de fases que se generan en puntos o regiones del espacio, así como en su alto contenido energético. De esta forma, en esta sección de la tesis, se identifican los parámetros que caracterizan a un campo óptico generado por difracción, así como su relación con la función de transmitancia. Por lo tanto, en esta sección se establecen las propiedades físicas que caracterizan a un campo óptico.

Algunos modelos para representar a un campo óptico arbitrario y del cual se realizará un análisis se muestran a continuación. Es posible describir los conceptos fundamentales de difracción utilizando los modelos del espectro angular y el de Huygens-Fresnel. Con la representación de Weyl se muestra que es posible encontrar una relación de equivalencia entre ambos modelos.

Los efectos de difracción surgen por iluminar objetos, los cuales se pueden caracterizar por una función de transmitancia [4], como se muestra en la figura (3):

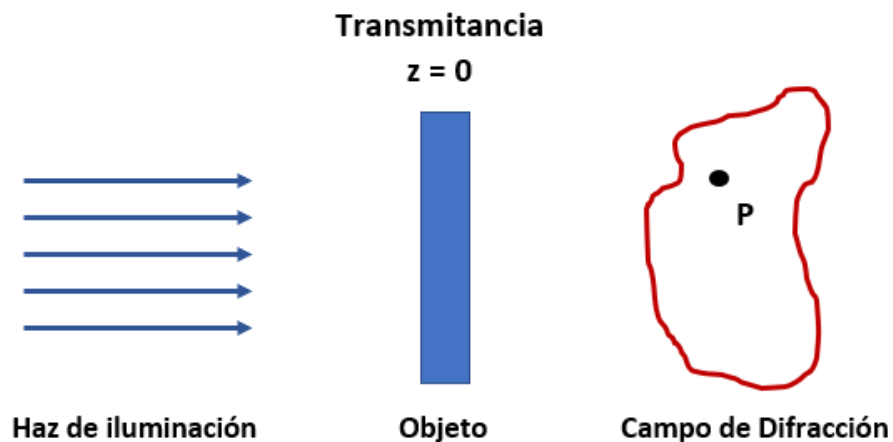


Figura 3. Esquema básico de difracción.

El análisis del campo de difracción se describe de manera escalar o vectorial. En el presente trabajo de tesis se utiliza la forma escalar, la cual consiste en buscar soluciones a la ecuación de Helmholtz.

2.4.1. Modelo del espectro angular.

El problema es resolver la ecuación de Helmholtz (16), sujeto a una condición de frontera, donde $\phi(x, y, z)$ es la condición de frontera para la amplitud cuando está en $z_0 = 0$ y está representada por

$$\phi(x_0, y_0, z_0 = 0) = t(x_0, y_0, z_0 = 0), \quad (17)$$

a la expresión $t(x_0, y_0)$ se le conoce como función de transmitancia o condición de frontera.

La propuesta consiste en que el campo óptico se puede representar como una suma continua de ondas planas de la forma $\exp\{i\vec{k} \cdot \vec{r}\}$, de donde $\vec{r} = (x, y, z)$ y \vec{k} esta definido de la siguiente forma

$$\vec{k} = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \cos \beta, \frac{2\pi}{\lambda} \cos \gamma \right) = |\vec{k}| \cos \alpha, |\vec{k}| \cos \beta, |\vec{k}| \cos \gamma, \quad (18)$$

entonces;

$$A \exp \left\{ i2\pi \left(x \frac{\cos \alpha}{\lambda}, y \frac{\cos \beta}{\lambda}, z \frac{\cos \gamma}{\lambda} \right) \right\}, \quad (19)$$

y además, los cosenos directores deben cumplir con

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (20)$$

El modelo del espectro angular propone que un campo óptico se pueda representar mediante una suma continua de ondas planas, dada por

$$\phi(x, y, z) = \iint A \left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, y \frac{\cos \beta}{\lambda}, z \frac{\cos \gamma}{\lambda} \right) \cdot \exp \left\{ i2\pi \left(x \frac{\cos \alpha}{\lambda} + y \frac{\cos \beta}{\lambda} + z \frac{\cos \gamma}{\lambda} \right) \right\} d \frac{\cos \alpha}{\lambda} d \frac{\cos \beta}{\lambda} d \frac{\cos \gamma}{\lambda},$$

si se definen las frecuencias espaciales como

$$u = \frac{\cos \alpha}{\lambda} \quad v = \frac{\cos \beta}{\lambda} \quad p = \frac{\cos \gamma}{\lambda},$$

entonces, tenemos que el campo óptico tiene una representación matemática simple.

$$\phi(x, y, z) = \iint A(u, v, z) \cdot \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} dudvdz, \quad (21)$$

a la cual se le conoce como el modelo del espectro angular. La representación física implícita es que el campo de difracción se puede representar como una suma continua de ondas planas. En donde (u, v, p) , son las frecuencias espaciales.

Los parámetros que llevan la información sobre las posibles direcciones de propagación del campo óptico son las frecuencias espaciales (u, v) , contenidas en la función $A(u, v)$. La energía está dada por el módulo cuadrado de $A(u, v)$, el cual determina el espectro de potencias de la función de transmitancias.

La condición de frontera es el conocimiento de la distribución de amplitudes en el plano $z = 0$, entonces

$$\phi(x, y, z = 0) = T(X, Y) = \iint A(u, v) \cdot \exp\{i2\pi(xu + yv)\} dudv, \quad (22)$$

en donde

$$A(u, v) = \iint t(x, y) \cdot \exp\{-i2\pi(xu + yv)\} dx dy. \quad (23)$$

Por lo que la distribución de amplitudes del campo óptico completo está dada por $A(u, v)$, la cual tiene la estructura de un par de transformada de Fourier. En la literatura óptica, a la transformada de Fourier se le conoce como difracción de Fraunhofer.

2.4.2. Modelo de Huygens-Fresnel.

Como ya se mencionó, el problema fundamental de óptica física consiste en resolver la ecuación de Helmholtz (16). La solución formal, se puede encontrar utilizando funciones Green. Esencialmente, se propone una nueva función vectorial, dada por la siguiente expresión $F = A\nabla B - B\nabla A$, en donde A y B son funciones escalares, las cuales satisfacen la ecuación de Helmholtz. Es un caso conocido, que la onda esférica satisface esta ecuación y por lo tanto se puede utilizar como función Green. Con esta idea, tenemos que la función vectorial F satisface

$$\iiint \nabla \cdot F dv = \iint F \cdot nds = 0. \quad (24)$$

La ecuación que describe una onda esférica es

$$A(r) = \frac{A \exp\{ikr\}}{r}. \quad (25)$$

Entonces la expresión para el campo óptico, se puede obtener de la ecuación (2.24) y toma la forma

$$\phi(p) = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{A \exp\{ikr\}}{r} \left[B \left(ik - \frac{1}{r} \right) r - \nabla B \right] \cdot nds. \quad (26)$$

La expresión anterior se puede escribir como

$$\phi(p) = \iint t(x, y) \frac{\exp\{ikr\}}{r} dx dy. \quad (27)$$

En este contexto, la función $t(x, y)$ se conoce como función de transmitancia y representa la función de amplitud de un conjunto de ondas esféricas emergentes de la condición de frontera.

2.4.3. Representación de Weyl.

La conexión entre los modelos del espectro angular y el modelo de Huygens-Fresnel, se puede obtener mediante la representación de Weyl, esta consiste en representar a una onda esférica mediante una suma continua de ondas planas, esto es

$$\frac{\exp\{ikr\}}{r} = \iint A(u, v) \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} dudvdp, \quad (28)$$

$$\frac{\exp\left\{i\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right\}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \iint A(u, v) \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} dudvdp, \quad (29)$$

el problema consiste en encontrar la función de amplitudes $A(u, v)$, para esto, tenemos que en $z = 0$, la onda esférica toma la forma de una transformada de Fourier.

$$\frac{\exp\left\{i\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{x^2+y^2}\right\}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint A(u, v) \exp\{i2\pi(xu + yv)\} dudv, \quad (30)$$

$$A(u, v) = \iint \frac{\exp\left\{i\frac{2\pi}{\lambda}R\right\}}{R} \exp\{i2\pi(xu + yv)\} dx dy, \quad (31)$$

donde;

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Para encontrar esta representación es conveniente escribir la ecuación (31) en coordenadas cilíndricas de la siguiente manera

$$A(u, v) = \iint \frac{\exp\left\{i\frac{2\pi}{\lambda}R\right\}}{R} \exp\{i2\pi(R \cos \theta \rho \cos \varphi + R \sin \theta \rho \sin \varphi)\} R dR d\theta, \\ A(u, v) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \exp\{ikr\} \exp\{i2\pi(R\rho \cos(\theta - \varphi))\} dr d\theta. \quad (32)$$

En esta ecuación se utiliza R en lugar de r debido a que nos encontramos en el plano $z = 0$ y con la expansión de Jacobi [5], la ecuación (32) toma la forma

$$A(u, v) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \exp\{ikr\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\{iR\theta\} \exp\{-iR\varphi\} J_n(2\pi R\rho) (-i)^n dR d\theta, \quad (33)$$

pero si tenemos que

$$\int_0^{2\pi} \exp\{iR\theta\} d\theta = \frac{\exp\{iR\theta\}}{iR} \Big|_0^{2\pi} = 0 \\ \int d\theta = 2\pi,$$

y además la integral (33) solo tiene sentido cuando $n = 0$ y así la condición de frontera se puede sintetizar como la suma de funciones Bessel de orden cero por lo tanto se puede escribir como

$$A(u, v) = A(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) 2\pi \int_0^\infty \exp\{ikR\} J_0(2\pi R\rho) dR. \quad (34)$$

Finalmente, la ecuación (28) es la representación de Weyl, lo que nos permite pasar de una onda esférica a una onda plana y permite en principio relacionar el espectro angular con el modelo de Huygens-Fresnel.

Hasta este punto se han establecido los conceptos de difracción, la idea ahora es presentar algunos conceptos básicos de coherencia, que nos serán útiles en el presente trabajo de tesis.

2.5. Conceptos fundamentales de coherencia.

Con la finalidad de estudiar las propiedades físicas del campo electromagnético asociado a un campo de difracción, es conveniente describir los conceptos fundamentales de coherencia. Como una definición operacional, tenemos que coherencia se refiere al estudio de la distribución compleja de amplitudes que se generan entre dos puntos arbitrarios del espacio-tiempo y que son generados por la presencia de una fuente. De cada punto de la fuente, se considera que emerge una señal analítica, la cual tiene la información de los procesos de emisión de la fuente y estos a su vez son en general de carácter aleatorio. En el desarrollo de la presente sección consideramos que los campos ópticos alcanzan una configuración del tipo estacionario temporalmente, En general los fenómenos de coherencia, se pueden describir a través de la función de correlación [6].

2.5.1. Definición de coherencia.

En esta sección se describen brevemente las ideas principales de la teoría de coherencia de la luz, la cual se refiere al estudio de la correlación de fase y de amplitudes que se generan entre dos puntos arbitrarios $X(t)$ y $Y(t)$ provenientes de una fuente.

La función que describe este comportamiento en términos de las características estructurales, así como la propagación a diferentes planos del espacio es conocida como función de coherencia mutua.

Es posible distinguir dos tipos de coherencia, la coherencia temporal y la coherencia espacial. La descripción de la coherencia espacial se puede obtener mediante el teorema de Van Cittert-Zernike, y la descripción de la coherencia temporal es descrita por el teorema de Wiener- Khintchine [7].

Para la descripción de la coherencia espacial, partiremos de una fuente extensa, la cual se considera formada por varias fuentes puntuales que emiten a una sola longitud de onda, las cuales están esquematizadas en la figura (4):

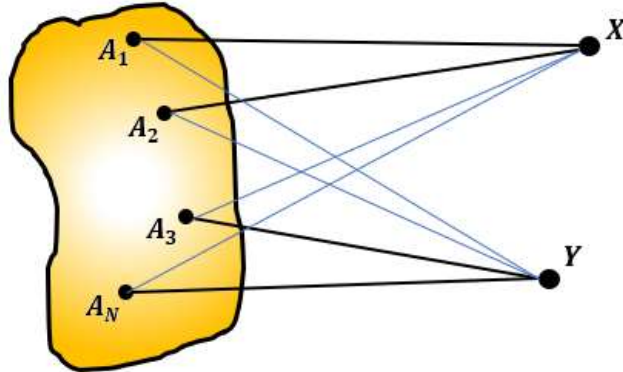


Figura 4. Esquema de fuentes puntuales discretas.

A partir del esquema de la figura (4), podemos encontrar la señal en amplitudes en los puntos X y Y , las cuales están representadas por [7, 8]:

$$\phi(X) = \sum_{i=1}^N A_i \exp\{ik(\overline{A_i X})\}, \quad (35)$$

$$\phi(Y) = \sum_{i=1}^N A_i \exp\{ik(\overline{A_i Y})\}, \quad (36)$$

donde $\overline{A_i X}$ y $\overline{A_i Y}$ representan la distancia de la fuente i -ésima al punto X e Y respectivamente.

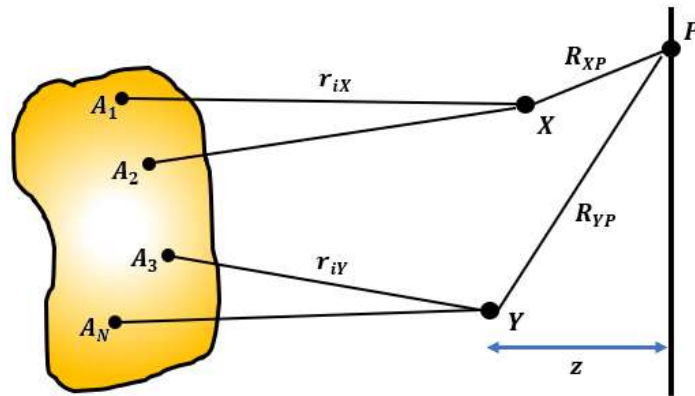


Figura 5. Esquema para la generalización de amplitudes.

Para generalizar el análisis obtenido de las amplitudes anteriores, consideramos la amplitud en el punto P del espacio, tal descripción la podemos ilustrar en la figura (5).

La amplitud en el punto P está dado por

$$\phi(P) = \phi(X) \exp\{ikR_{XP}\} + \phi(Y) \exp\{ikR_{YP}\}, \quad (37)$$

la distribución de irradiancia en el punto P , es igual a

$$I(P) = |\phi(P)|^2 = |\phi(X)|^2 + |\phi(Y)|^2 + 2\Re\phi(X)\phi^*(Y)\exp\{ikR_{XP} - R_{YP}\}, \quad (38)$$

donde se define la función de correlación mutua, para el sistema discreto como

$$\Gamma(x, y) = \phi(X)\phi^*(Y) = \sum_{i=1}^N A_i \exp\{ik(\overline{A_i X})\} (\sum_S^N A_i \exp\{ik(\overline{A_S Y})\})^*, \quad (39)$$

$$\Gamma(x, y) = \sum_i^N |A_i|^2 \exp\{ik(\overline{A_i X} - \overline{A_S Y})\} + \sum_{i \neq S}^N A_i A_S^* \exp\{ik(\overline{A_i X} - \overline{A_S Y})\}. \quad (40)$$

La ecuación anterior se puede simplificar, si se considera que cada fuente puntual es un emisor independiente. Por lo que la función de coherencia mutua toma la forma

$$\Gamma(x, y) = \sum_i^N |A_i|^2 \exp\{ik(\overline{A_i X} - \overline{A_S Y})\}, \quad (41)$$

en el caso continuo, la expresión anterior, se expresa como

$$\Gamma(x, y) = \iint I(x, y) \exp\{ik(r_x - r_y)\} dx dy, \quad (42)$$

donde r_x y r_y expresan la distancia de cualquier punto en la fuente x e y respectivamente.

Podemos observar que la función de coherencia mutua es proporcional a la transformada de Fourier de la función de distribución de irradiancia. A este resultado se le conoce como el teorema de Van Cittert-Zernike [8]. El tratamiento anterior, se puede implementar al caso temporal. Para esto se considera una señal que emerge de la fuente puntual y que consiste en una suma de ondas cosenoidales que emiten a diferentes frecuencias, como se ilustra en la figura (6);

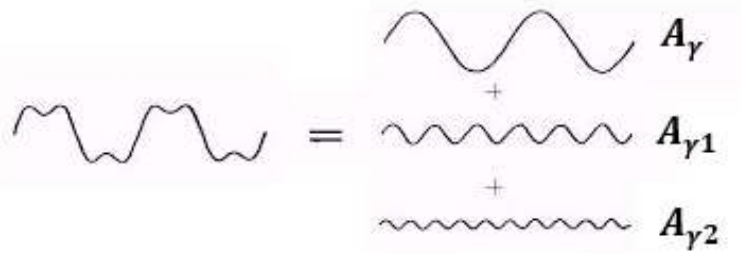


Figura 6. Suma de ondas con diferentes frecuencias.

A partir del esquema anterior, decimos que la amplitud para un tiempo t en el punto P es

$$A(P) = \sum_i^N A_i(\gamma_i) \exp\{i2\pi\gamma_i t\}, \quad (43)$$

para otro tiempo posterior $t + \tau$ con $\tau > 0$, la amplitud en el punto P , esta dado por

$$A(P) = \sum_i^N A_i(\gamma_i) \exp\{i2\pi\gamma_i(t + \tau)\}, \quad (44)$$

a partir de esto, podemos obtener la amplitud total A_T , en el punto P

$$A_T(P) = \sum_i^N A_i(\gamma_i) \exp\{i2\pi\gamma_i t\} + \sum_i^N A_i(\gamma_i) \exp\{i2\pi\gamma_i(t + \tau)\}, \quad (45)$$

y la irradiancia en el punto P , satisface

$$I(P) = \left| \sum_i^N A_i(\gamma_i) \exp\{i2\pi\gamma_i t\} \right|^2 + \left| \sum_i^N A_i(\gamma_i) \exp\{i2\pi\gamma_i(t + \tau)\} \right|^2 + 2\Re \sum_i^N A_i^*(\gamma_i) \exp\{-i2\pi\gamma_i t\} \sum_S^N A_S(\gamma_S) \exp\{i2\pi\gamma_S(t + \tau)\}. \quad (46)$$

Sin embargo, con la hipótesis de que sólo pueden inferir ondas de la misma frecuencia se tiene que la irradiancia toma la forma;

$$I(P) = \left| \sum_i^N A_i(\gamma_i) \exp\{i2\pi\gamma_i t\} \right|^2 + \left| \sum_i^N A_i(\gamma_i) \exp\{i2\pi\gamma_i(t + \tau)\} \right|^2 + 2\Re \sum_i^N |A_i(\gamma_i)|^2 \exp\{i2\pi\gamma_i t\}. \quad (47)$$

En donde para el caso continuo, la función de coherencia mutua, se puede escribir como

$$\Gamma(t) = \int S(\gamma) \exp\{i2\pi\gamma t\} d\gamma, \quad (48)$$

al término

$$S(\gamma) = A(\gamma)^2. \quad (49)$$

se le conoce como espectro de potencia.

A partir del análisis de los dos teoremas, tenemos que coherencia se puede interpretar como el estudio de la propagación de correlaciones de las fases asociadas a las señales ópticas.

2.5.2. Descripción de la matriz de coherencia.

Del análisis descrito en la sección anterior, tenemos que el campo óptico se caracteriza fundamentalmente a través de dos parámetros: amplitudes y fases relativas. Generalmente estos parámetros cambian en el tiempo debido a fluctuaciones aleatorias en el sistema óptico y/o medio de propagación. Por ello es necesaria la búsqueda de una función que nos permita a partir de cantidades observables, determinar la estructura vectorial y de fases de campo electromagnético [10]. Debido al carácter vectorial, está función tiene una presentación matricial, la cual se puede construir mediante el valor esperado de cada término resultante de la multiplicación de dos vectores del campo electromagnético como se muestra a continuación.

El tipo de producto propuesto para el campo eléctrico, tiene asociada una representación matricial de la forma [7];

$$J = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} (E_x \quad E_y)^* = \begin{pmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_x^* E_y \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{pmatrix}, \quad (50)$$

en donde los corchetes triangulares significan un promedio estadístico, el cual corresponde con el valor esperado de cada término. La matriz resultante se le conoce como matriz de coherencia. Utilizando la representación de onda plana [9];

$$E_x = a_1 \exp\{\vec{k}z - \omega t + \delta_1\}, \quad (51)$$

$$E_y = a_2 \exp\{\vec{k}z - \omega t + \delta_2\}, \quad (52)$$

se tiene que la matriz de coherencia toma la forma [7];

$$J = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 \exp\{i(\delta_1 - \delta_2)\} \\ a_1 a_2 \exp\{-i(\delta_1 - \delta_2)\} & a_2^2 \end{pmatrix}. \quad (53)$$

La propiedad importante es que los elementos de la matriz en la diagonal secundaria llevan la información de amplitudes y fases relativas.

Se observa que la diagonal principal lleva la intensidad total de la señal óptica, la cual se le conoce como la traza y está compuesta de la siguiente forma:

$$T_r(J) = J_{xx} + J_{yy}. \quad (54)$$

La representación más general de la señal óptica es cuando la componente del vector forma un ángulo θ con el eje x . Para un arreglo que implica un retraso de fase ϵ , se tiene que cada componente del campo eléctrico tiene una proyección sobre el eje x , dado por

$$E(t; \theta, \epsilon) = E_x \cos \theta + E_y \exp\{i\epsilon\} \sin \theta, \quad (55)$$

donde t es el tiempo. Por lo tanto, la intensidad asociada es de la forma

$$I(\theta, \epsilon) = \langle E(t; \theta, \epsilon) \rangle \langle E^*(t; \theta, \epsilon) \rangle, \quad (56)$$

reescribiendo la ecuación anterior (56) se tiene que

$$I(\theta, \epsilon) = J_{xx} \cos^2 \theta + J_{yy} \sin^2 \theta + 2\sqrt{J_{xx}J_{yy}} \cos \theta \sin \theta. \quad (57)$$

Los factores de polarización están dados por θ y ϵ . Una vez definidos los ejes de orientación a partir de la ecuación (57), podemos conocer los cambios de fase, para la cual se utilizan las componentes de la matriz de coherencia, esta se puede encontrar a través del grupo de medidas propuestas por Wolf [7], y estas son:

$$I(0,0) = J_{xx}$$

$$I(\pi/2,0) = J_{yy}$$

$$I(\pi/4,0) = (J_{xx} + J_{yy}) + J_{xy} \cos \theta$$

$$I(5\pi/4,0) = (J_{xx} + J_{yy}) - J_{xy} \cos \theta$$

$$I(\pi/4,\pi/2) = (J_{xx} + J_{yy}) + J_{xy} \sin \theta$$

$$I(5\pi/4,\pi/2) = (J_{xx} + J_{yy}) - J_{xy} \sin \theta.$$

Se debe notar que este grupo de medidas implica caracterizar el coeficiente de reflexión/transmisión de cada placa retardadora.

De esta manera, una vez descrito brevemente la matriz de coherencia analizada por Wolf. Una de las principales contribuciones de este trabajo de tesis es mostrar que es posible encontrar la matriz de coherencia a partir de medidas interferométricas.

2.6. Descripción interferométrica de la matriz de coherencia.

Una propiedad fundamental de la matriz de coherencia es que cualquier estado de polarización se puede representar por un campo completamente polarizado más un campo completamente no polarizado [7] cuya representación matemática es

$$J = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A_{np} + A_p, \quad (58)$$

en donde A_{np} representa la matriz de luz no polarizada y se representa por

$$A_{np} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad (59)$$

A_p corresponde a luz polarizada y tiene la estructura

$$A_p = \begin{pmatrix} \beta & \delta \\ \delta^* & \gamma \end{pmatrix}. \quad (60)$$

Por lo tanto, para la descripción de un estado de polarización arbitrario se tiene

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & \delta \\ \delta^* & \gamma \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Dicho comportamiento se muestra de manera esquemática en la figura (7).

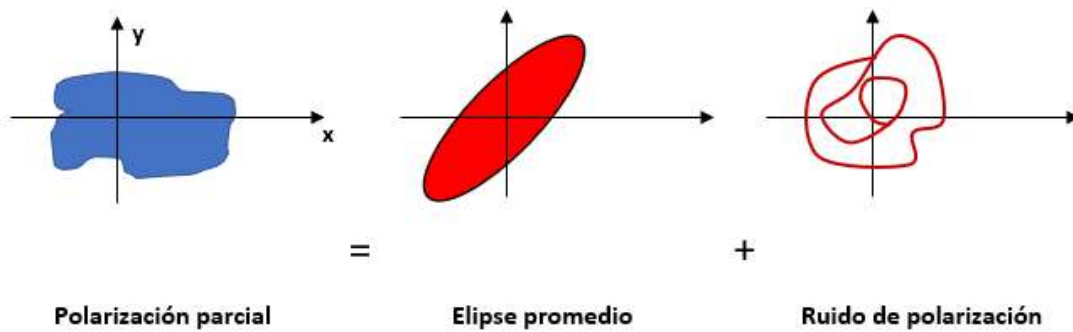


Figura 7. Comportamiento de una polarización arbitraria.

Con el tratamiento anterior, se define el grado de polarización [7, 10] como

$$G_p = (Energía\ de\ luz\ polarizada + Energía\ de\ luz\ no\ polarizada) / Energía\ total.$$

Donde G_p es un factor que nos determina las características de polarización de la luz.

Capítulo III: Descripción de polarización generalizada.

Polarización es un concepto fundamental para el estudio de la estructura de los campos ópticos y está conectado con aspectos de la teoría de coherencia. De una manera natural surgen singularidades en la polarización cuando la luz se propaga a través de sistemas ópticos, ya que las trayectorias de polarización pueden ser generadas por medio de una envolvente de trayectorias de polarización localmente elíptica. Este comportamiento ofrece la posibilidad de generar diversas trayectorias de polarización controlando la función de transmitancia del campo óptico. Esta propiedad ofrece diversas aplicaciones en diferentes áreas tecnológicas.

3.1. Descripción de interferencia y polarización.

Una onda plana es un campo óptico fundamental conocido como modo óptico y es una solución exacta a la ecuación de Helmholtz. La suma continua de ellas puede representar campos ópticos de estructura compleja, sobre todo si algunos de sus parámetros fluctúan de manera aleatoria [9]. Del capítulo anterior, tenemos que un campo óptico, en un punto arbitrario, se puede escribir en términos del espectro angular dado por la siguiente expresión

$$\varphi(x, y, z) = |\varphi(x, y, z)| \exp\{ik\delta(x, y, z)\} = \iint A(u, v) \exp\{i2\pi(xu + yv)\} dudv.$$

En este punto, nos interesan dos problemas importantes: como es la interacción de un campo óptico con otro de su misma especie y cómo se comporta este campo óptico cuando interacciona con obstáculos, así como su evolución a través de un sistema óptico. En ambos casos, el parámetro que describe el comportamiento del campo óptico está contenido en la función de fase $\varphi(x, y, z)$. Como un paso previo al análisis de la función de fase, es conveniente iniciar un estudio de interferencia y polarización, como se describe a continuación.

Como un paso previo al análisis general, es conveniente detectar los parámetros estructurales de un campo óptico, para esto, se analiza la interacción escalar entre dos ondas planas, de la forma [9]

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= \phi_1(x, y, z) + \phi_2(x, y, z) = \\ &= A_1 \exp\{i2\pi(xu_1 + yv_1 + zp_1)\} + A_2 \exp\{i2\pi(xu_2 + yv_2 + zp_2)\}. \end{aligned} \quad (62)$$

La irradiancia asociada en un punto (x, y, z) es

$$I = \phi(x, y, z)^2 = \phi(x, y, z)\phi^*(x, y, z), \quad (63)$$

y de manera explícita;

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2\Re A_1 A_2^* \exp\{i2\pi(x(u_1 - u_2) + y(v_1 - v_2) + z(p_1 - p_2))\}, \quad (64)$$

donde

$$A_1 = a_1 \exp\{\delta_1\} \quad y \quad A_2 = a_2 \exp\{\delta_2\}$$

Se tiene que a_1 y a_2 toman valores reales positivos, δ_1 y δ_2 son las fases correspondientes a cada onda [9]. Por lo tanto, la distribución de irradiancia toma la forma

$$I(x, y, z) = a_1 + a_2 + 2a_1 a_2 \cos 2\pi (x(u_1 - u_2) + y(v_1 - v_2) + z(p_1 - p_2) + \delta). \quad (65)$$

En donde, $\delta = \delta_1 - \delta_2$ y $I_{1,2} = A_{1,2}^2$, a la expresión que tiene el término cosenoidal se le llama termino de interferencia [14].

De esta forma, tenemos que la interferencia entre dos ondas genera redistribución de energía, la cual depende fundamentalmente de las diferencias de fase entre las dos ondas planas. Hasta este punto, se ha realizado un análisis en el contexto escalar.

Una propiedad física asociada a las ondas electromagnéticas consiste en el fenómeno de polarización [9] y solo se representa en las ondas vectoriales. El análisis se refiere a la trayectoria que describe el campo eléctrico E sobre un plano $x = cte$, el cual es paralelo al plano (x, y) .

La representación de las componentes del campo eléctrico, para una onda plana propagándose en la dirección z son las siguientes:

$$E_x = a_1 \cos(kz - \omega t + \delta_1), \quad (66)$$

$$E_y = a_2 \cos(kz - \omega t + \delta_2). \quad (67)$$

En donde a_1 y a_2 son las amplitudes complejas y $(kz - \omega t \equiv \tau)$ representa la fase común de cada componente de la onda vectorial, Reescribiendo las ecuaciones anteriores se obtienen;

$$E_x = a_1 \cos(\tau + \delta_1), \quad (68)$$

$$E_y = a_2 \cos(\tau + \delta_2). \quad (69)$$

Las expresiones anteriores se pueden interpretar como las ecuaciones paramétricas de una curva, las cuales en forma desarrollada están dadas por

$$\frac{E_x}{a_1} = \cos \tau \cos \delta_1 - \sin \tau \sin \delta_1, \quad (70)$$

$$\frac{E_y}{a_2} = \cos \tau \cos \delta_2 - \sin \tau \sin \delta_2. \quad (71)$$

Para encontrar la representación funcional entre E_x y E_y se debe eliminar el parámetro τ , que representa la fase común.

El primer paso consiste en multiplicar la ecuación (70) por $\cos \delta_1$ y la ecuación (71) por $\cos \delta_2$ y se restan, obteniendo

$$\frac{E_x}{a_1} \cos \delta_2 - \frac{E_y}{a_2} \cos \delta_1 = \sin \tau \sin(\delta_1 - \delta_2). \quad (72)$$

Si se multiplica la expresión (70) por $\sin \delta_1$ y la expresión (71) por $\sin \delta_2$ y se restan, obtenemos

$$\frac{E_x}{a_1} \sin \delta_2 - \frac{E_y}{a_2} \sin \delta_1 = \cos \tau \sin(\delta_1 - \delta_2). \quad (73)$$

Las ecuaciones (72) y (73) son equivalentes a

$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2 - \frac{E_x E_y}{a_1 a_2} \cos(\delta_2 - \delta_1) = \sin^2(\delta_1 - \delta_2). \quad (74)$$

La trayectoria que describe \vec{E} en el plano (x, y) determinado por la ecuación (74) es una elipse cuya orientación y elipticidad depende de las amplitudes y de la fase relativa entre las componentes. La geometría de la elipse se muestra en la siguiente figura (8).

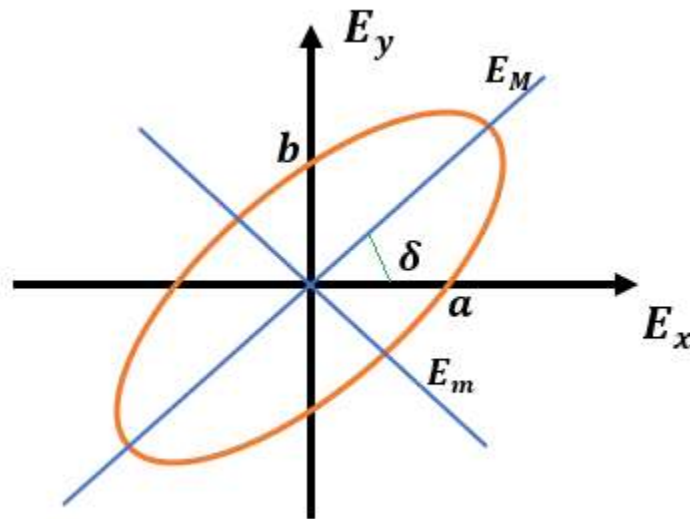


Figura 8. Elipse de polarización asociada a una onda plana.

Como una conclusión parcial, se tiene que, tanto en el análisis interferométrico como en el de polarización, las amplitudes y fases relativas son los parámetros que describen la estructura del campo óptico.

3.2. Parámetros de Stokes y la esfera de Poincaré.

Para analizar la trayectoria de polarización, descrita en la sección anterior, se consideran tres parámetros independientes: las amplitudes a_1 y a_2 y la diferencia de fase relativa $\delta = \delta_1 - \delta_2$.

Una representación complementaria al tratamiento anterior, se realiza a través de los llamados parámetros de Stokes [13].

$$S_0 = a_1^2 + a_2^2, \quad (75)$$

$$S_1 = a_1^2 - a_2^2, \quad (76)$$

$$S_2 = 2a_1^2 a_2^2 \cos \delta, \quad (77)$$

$$S_3 = 2a_1^2 a_2^2 \sin \delta. \quad (78)$$

El parámetro S_0 determina la energía total asociada a las dos ondas constitutivas. El parámetro S_1 , determina la asimetría entre la energía asociada a cada onda. Los parámetros S_2 y S_3 tiene información de la fase relativa y tienen la estructura de un término de interferencia como se puede comparar con la ecuación (65), esto es, tienen información de las fases relativas. Una relación importante entre los parámetros de Stokes y que se cumple solo para luz completamente polarizada es

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \quad (79)$$

La cual es la ecuación de una esfera. La relación dada por la ecuación anterior sugiere que se pueden representar diversos estados de polarización caracterizados por los parámetros S_1 , S_2 y S_3 por puntos sobre una esfera con radio S_0 . De esta forma, se establece una representación útil, la cual consiste en establecer un modelo geométrico en el que cada punto sobre la superficie de la esfera se le asocie un estado de polarización, esto es, se establece una relación de equivalencia entre los estados de polarización y los puntos sobre una esfera. A dicha representación se le conoce como esfera de Poincaré [13].

En la esfera de Poincaré, figura (9), se tiene que un punto se puede describir en coordenadas esféricas y consecuentemente los parámetros de Stokes se pueden escribir como:

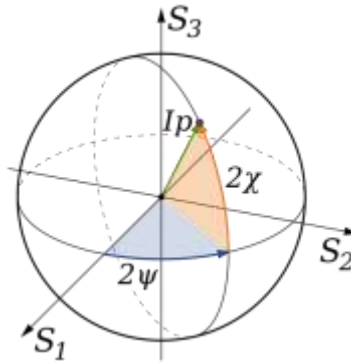


Figura 9. Esfera de Poincaré.

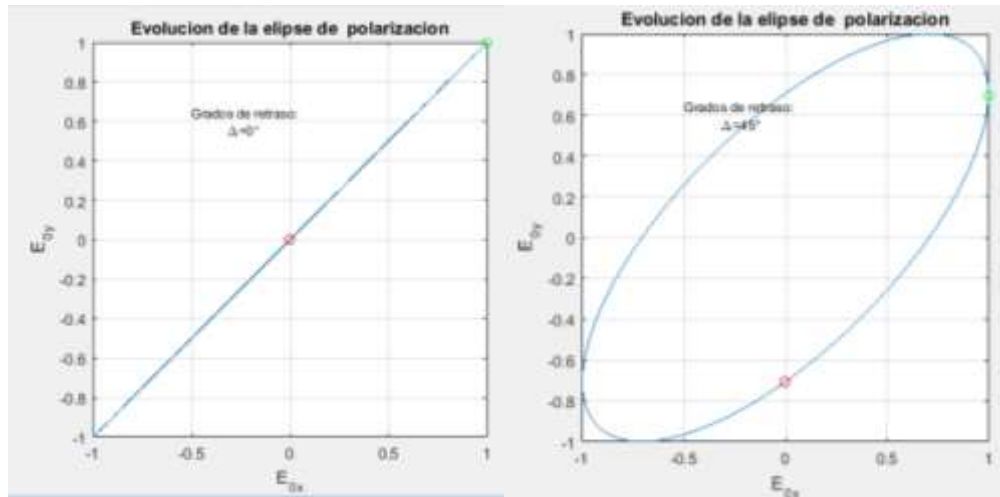
$$S_1 = S_0 \cos 2x \cdot \cos 2\psi, \quad (80)$$

$$S_2 = S_0 \cos 2x \cdot \sen 2\psi, \quad (81)$$

$$S_3 = S_0 \sen 2\psi, \quad (82)$$

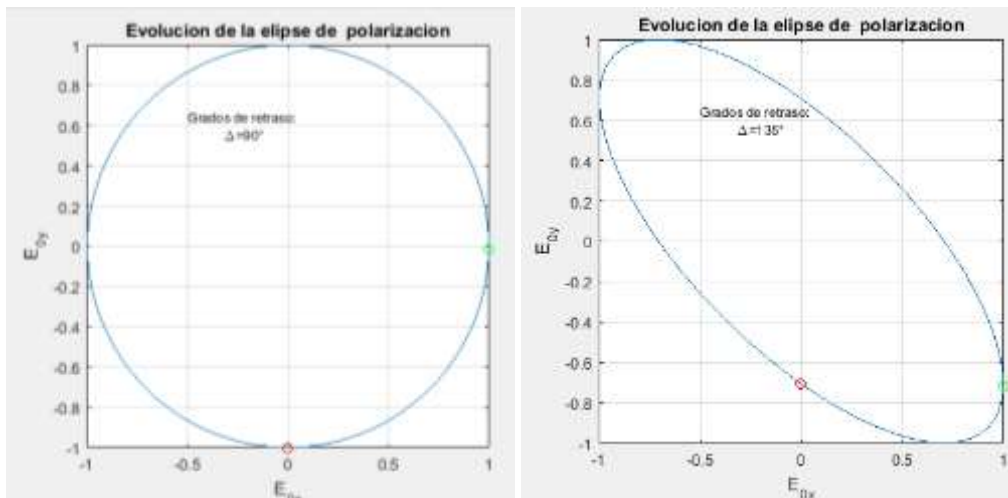
Diferentes puntos en esta esfera representan elipses con diferentes elipticidades y orientaciones. Así se tiene que en los polos las elipses toman la forma de círculos, y en el ecuador se transforman en rectas. En el hemisferio superior están las elipses con polarización derecha, y en el hemisferio inferior las elipses representan polarización izquierda [12].

Utilizando las ecuaciones (75, 76, 77 y 78) se obtienen los diferentes tipos de polarización utilizando la esfera de Poincaré y los parámetros de Stokes simulados en Matlab R2008a.



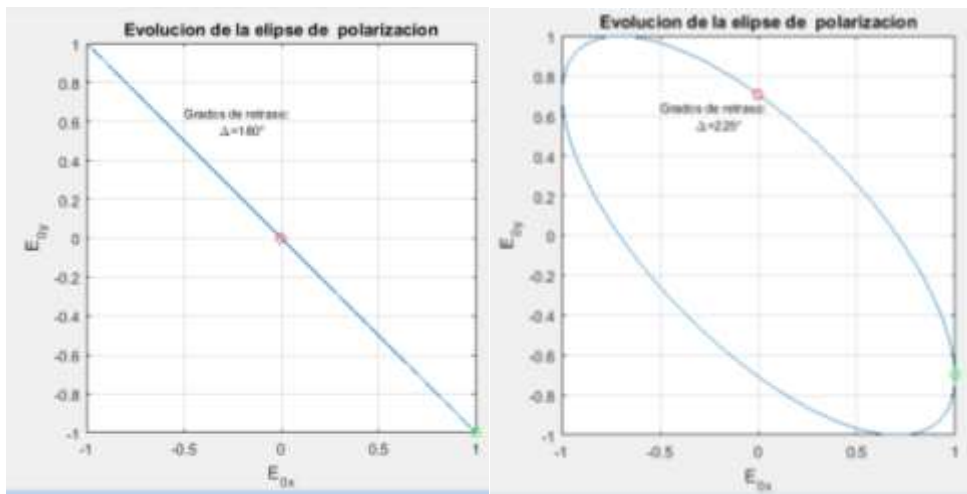
a)

b)



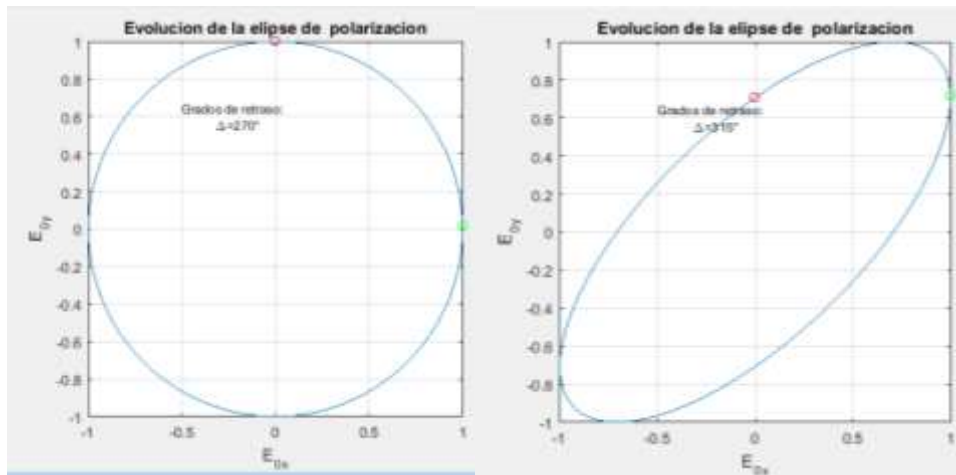
c)

d)



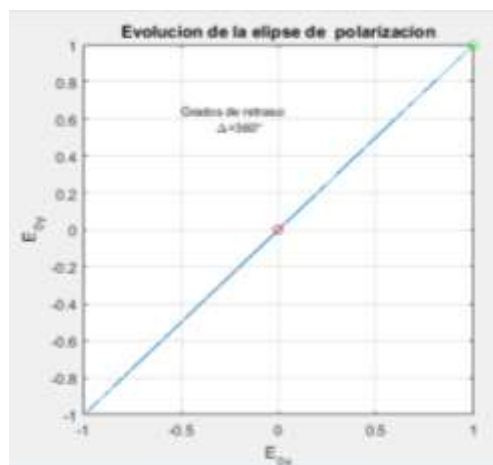
e)

f)



g)

h)



i)

Figura 10. Evolución de la elipse de polarización a un desfase de: a) 0, b) $\pi/4$, c) $\pi/2$, d) $3\pi/4$, e) π , f) $5\pi/4$, g) $3\pi/2$, h), $7\pi/4$, i) 2π .

3.3. Parámetros de Stokes generalizados.

La propuesta matemática que se desarrolló para la descripción de los parámetros de Stokes generalizados es la síntesis de campos de difracción asociados a transmitancias sensibles a polarización. Esto es, el campo óptico es de la forma

$$\varphi_{i,j}(x, y, z) = |\varphi_{i,j}(x, y, z)| \exp\{ik\delta_{i,j}(x, y, z)\} = \iint A_{i,j}(x, y) \exp\{i2\pi(xu + yv)\} dudv, \quad (83)$$

donde

$$A_i(u, v) = TF(T_i(x, y)),$$

en donde el subíndice se refiere a la distribución de amplitudes a dos estados de polarización mutuamente perpendiculares. En un punto arbitrario, la distribución de polarización es localmente elíptica y debe de cumplir con

$$\begin{aligned} \sin^2(\delta_j(x, y, z) - \delta_i(x, y, z)) &= \frac{(E_x)^2}{|\phi_i(x, y, z)|^2} + \frac{(E_y)^2}{|\phi_j(x, y, z)|^2} - \\ &\frac{2E_x E_y}{|\phi_i(x, y, z)| |\phi_j(x, y, z)|} \cos(\delta_j(x, y, z) - \delta_i(x, y, z)). \end{aligned}$$

Entonces, en el contexto geométrico el problema de polarización para campos ópticos arbitrarios, consisten en la búsqueda de trayectorias sobre la esfera de Poincaré. Se debe notar que la esfera de Poincaré es una esfera sólida la cual esta esquematizada en la figura (11).

De la distribución de amplitudes para el campo de difracción, tenemos que la expresión para los parámetros de Stokes está dada por

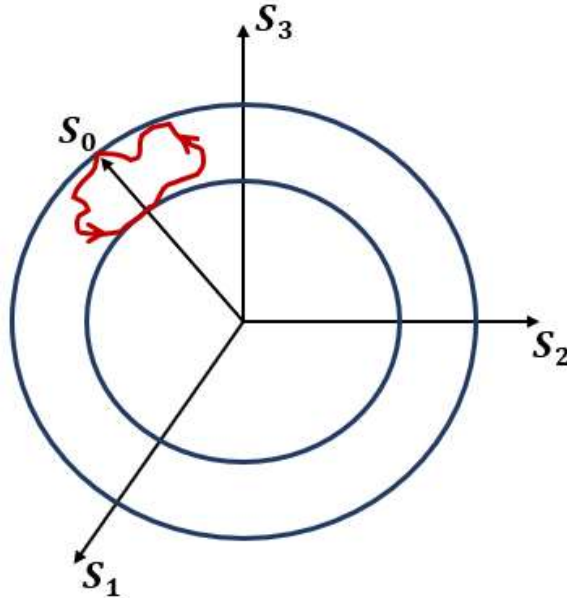


Figura 11. Trayectorias de polarización sobre la esfera de Poincaré.

$$S_0 = |\phi_i(x, y, z)|^2 + |\phi_j(x, y, z)|^2, \quad (84)$$

$$S_1 = |\phi_i(x, y, z)|^2 - |\phi_j(x, y, z)|^2, \quad (85)$$

$$S_2 = 2|\phi_i(x, y, z)||\phi_j(x, y, z)| \cos(\delta_j(x, y, z) - \delta_i(x, y, z)), \quad (86)$$

$$S_3 = 2|\phi_i(x, y, z)||\phi_j(x, y, z)| \sin(\delta_j(x, y, z) - \delta_i(x, y, z)). \quad (87)$$

La representación anterior son las expresiones generales, para polarización de un campo óptico arbitrario. La representación matemática se puede simplificar si consideramos $z = 0$, esto es, estamos en la región de Fraunhofer, entonces tenemos que los parámetros de Stokes se convierten ahora en funciones de Stokes dependientes de los parámetros x, y .

$$S_0 = S_0(x, y), \quad (88)$$

$$S_1 = S_1(x, y), \quad (89)$$

$$S_2 = S_2(x, y), \quad (90)$$

$$S_3 = S_3(x, y). \quad (91)$$

El problema que se tiene es que los estados de polarización pueden tener diversas geometrías y estas se forman por la envolvente de una familia de elipses como se muestra en la figura (12).

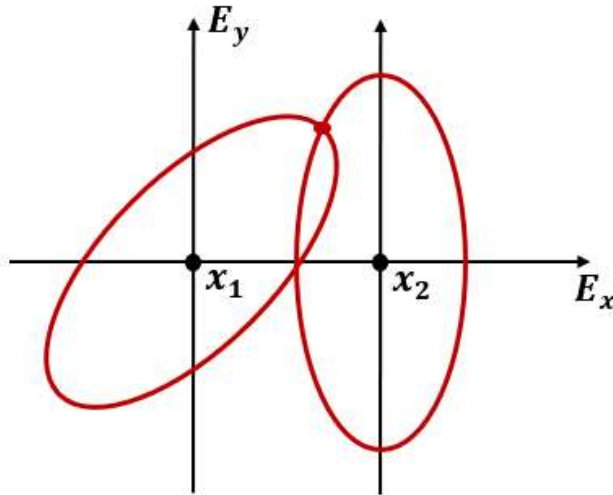


Figura 12. Estados posibles de polarización para dos puntos del campo óptico.

La representación biparamétrica para la elipse de polarización en la región de Fraunhofer está dada por

$$\begin{aligned} \text{sen}^2 \left(\delta_j(x, y) - \delta_i(x, y) \right) &= \frac{(E_x)^2}{|\phi_i(x, y)|^2} + \frac{(E_y)^2}{|\phi_j(x, y)|^2} - \\ &\frac{2E_x E_y}{|\phi_i(x, y)| |\phi_j(x, y)|} \cos \left(\delta_j(x, y) - \delta_i(x, y) \right). \end{aligned}$$

Un problema de interés contemporáneo consiste en la síntesis de campos ópticos con predeterminados estados de polarización. Esto implica la existencia de una representación funcional entre los parámetros x, y dado por $y = f(x)$ de esa forma los parámetros de Stokes tienen una representación uníparamétrica dada por

$$S_0 = S_0(x),$$

$$S_1 = S_1(x),$$

$$S_2 = S_2(x),$$

$$S_3 = S_3(x).$$

La trayectoria de S_1 esta dada por

$$S_1(x) \rightarrow \frac{\partial S_1}{\partial x} = 0,$$

$$S_2(x) \rightarrow \frac{\partial S_2}{\partial x} = 0,$$

$$S_3(x) \rightarrow \frac{\partial S_3}{\partial x} = 0,$$

Por último, la evolución de los parámetros de Stokes generalizados está dados por su función de correlación

$$\langle S_0(x_1) S_0^*(x_2) \rangle = \int S_0(\alpha) S_0^2(\alpha - x) d\alpha, \quad (92)$$

$$\langle S_1(x_1) S_1^*(x_2) \rangle = \int S_1(\alpha) S_1^2(\alpha - x) d\alpha. \quad (93)$$

3.3.1. Modelo del espectro angular para los parámetros de Stokes.

Del conjunto de ecuaciones (84) al (87), se pueden definir una función analítica de la forma,

$$S = S_2 + iS_3 = 2|\phi_i(x, y, z)| |\phi_j(x, y, z)| \exp(\delta_j - \delta_i), \quad (94)$$

la cual, de los argumentos para los parámetros de Stokes, debe satisfacer la ecuación de onda.

$$\nabla^2 S = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2(S)}{\partial t^2}. \quad (95)$$

Se puede intentar describir la evolución espacial de polarización para un campo monocromático en la forma $S(x, y, z) = \Omega(x, y, z) \exp(i2\pi\nu z)$, donde la función espacial Ω satisface la ecuación de Helmholtz (16). La solución a esta ecuación puede ser representada por medio del modelo del espectro angular.

Controlando las condiciones de frontera, se pueden generar nuevos aspectos para la polarización. Por ejemplo, los haces adifraccionales preservan su estado de polarización a lo largo de la coordenada de propagación. Esta característica nos permite describir la síntesis de campos ópticos los cuales son auto-polarizables. Esto es análogo a campos ópticos que exhiben el fenómeno de autoimágenes.

Esta analogía incrementa el entendimiento del campo electromagnético asociado a un campo óptico. Por ejemplo, se puede describir la síntesis de campos ópticos que representan campos periódicos en su polarización y haces con polarización invariante a la propagación.

3.4. Solución modal para los parámetros de Stokes.

El punto de vista presentado permite describir un análisis armónico y describir los nuevos estados de polarización. Como ejemplo, un campo óptico que preserva su estado de polarización es de la forma

$$S(x, y, z) = f(x, y) \exp(i2\pi\beta z). \quad (96)$$

La sustitución en la ecuación de Helmholtz significa que el perfil debe satisfacer,

$$\nabla_{\perp}^2 f(x, y) + (k^2 - \beta^2)f(x, y) = 0. \quad (97)$$

Como el perfil cumple con una ecuación bidimensional de Helmholtz. En general, la solución completa a la ecuación (97) depende de dos constantes arbitrarias k, β , las cuales pueden ser consideradas como parámetros de estructura. En el caso de modos que representan ondas planas, están relacionadas con las direcciones de propagación de la onda y consecuentemente con las frecuencias espaciales.

Tomando la transformada de Fourier, se obtiene la condición para que un campo óptico sea invariante en la polarización, la cual es representada por un círculo en el espacio de Fourier dado por,

$$F(u, v)\delta(u^2 + v^2 - r^2) = 0. \quad (98)$$

Se define la señal de polarización S a través de los parámetros de Stokes S_2 y S_3 (94). Esta función de nuevo satisface la ecuación de Helmholtz (16) y se proponen soluciones extremales a ésta, es decir, ver el comportamiento de esta función en los extremos [7]. De esta forma se asocia una estructura geométrica al modelo de propagación de polarización. Se propone una solución de la forma [15],

$$S(x, y, z) = A \exp\{ik_0 M(x, y, z)\}, \quad (99)$$

donde A es una constante y $k_0 = 2\pi/\lambda_0$, es el número de onda en el vacío. Sustituyendo en la ecuación de Helmholtz (16) se obtiene la ecuación eikonal, esto es,

$$S|\nabla M|^2 = n^2. \quad (100)$$

La función de fase que describe el flujo de polarización satisface la ecuación eikonal. La solución de esta significa que existen trayectorias a lo largo de las cuales S es constante. Existen regiones generadas por un conjunto de trayectorias extremales (con polarización constante) cuya propagación, genera una región envolvente. Debido a su naturaleza de envolvente, las trayectorias satisfacen una ecuación diferencial parcial de la forma,

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0. \quad (101)$$

Su solución representa el perfil de las trayectorias de polarización. Físicamente no se puede decir nada a cerca de la función S . No se puede predecir el estado de polarización de estas trayectorias que forman la región envolvente.

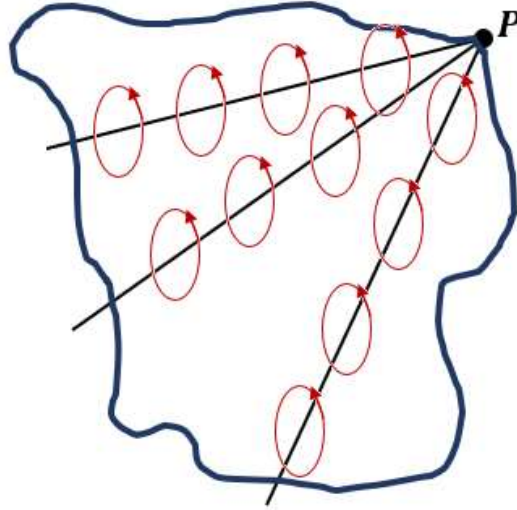


Figura 13. Envoltorio de trayectorias de polarización localmente elíptica.

3.4.1. Enfoque geométrico de estados de polarización.

El enfoque geométrico permite describir el estado de polarización de haces y modos ópticos. Con analogía a los haces libres de difracción, se separa en z a la ecuación de Helmholtz como en la ecuación

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + (\nabla_{\perp}^2 + k^2)S = 0. \quad (102)$$

Como solución se tiene

$$S = f(x, y) \exp\{iz\sqrt{\nabla_{\perp}^2 + k^2}\} = f(x, y) \exp\{\hat{A}z\}, \quad (103)$$

que representa un campo con polarización invariante en propagación, donde f satisface la ecuación,

$$\nabla_{\perp}^2 f + (k^2 - \beta^2)f = 0, \quad (104)$$

que en coordenadas cilíndricas tiene como solución funciones Bessel, y en particular, $J_0(2\pi d\sqrt{x^2 + y^2})$. Para este caso, el campo en polarización es,

$$S = J_0(2\pi d\sqrt{x^2 + y^2}) \exp\{i\beta z\}, \quad (105)$$

donde $d^2 = \frac{k^2 - \beta^2}{4\pi^2}$. Esta última ecuación asegura que la polarización es invariante en propagación, esto solo para soluciones del tipo Bessel de orden cero, ya que los demás ordenes tienen dependencia angular. La polarización de este campo fluctúa en z , pero dependiendo de las propiedades de β . En particular si esta es periódica en la dirección de propagación z , se presenta un fenómeno de autoimágenes de polarización.

El campo a cierta distancia z reproduce su estado de polarización original y así periódicamente en la dirección z . Ahora, para este caso se analizan los parámetros de Stokes, igualando términos en la señal de polarización tenemos,

$$S = S_2 + iS_3 = |J_0(2\pi dr)| \exp\{i\beta z\}, \quad (106)$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Identificando términos y comparando con los parámetros de Stokes (84 - 87), se tiene

$$S_2 = |J_0(2\pi dr)| \cos\{\beta z\} = 2|\phi_i||\phi_j| \cos \delta, \quad (107)$$

$$S_3 = |J_0(2\pi dr)| \sin\{\beta z\} = 2|\phi_i||\phi_j| \sin \delta, \quad (108)$$

con $\delta = \delta_j - \delta_i$, por lo que,

$$\sqrt{\frac{1}{2}|J_0(2\pi dr)|} = |\phi_i|^2 = |\phi_j|^2, \quad (109)$$

$$\beta z = \delta, \quad (110)$$

que para un plano con $z = C = \text{constante}$, entonces $\beta = C\delta$. Por lo que esta β da información acerca de la diferencia de fase entre las dos componentes perpendiculares a la dirección de propagación de la señal, desplazada por múltiples constantes. Los parámetros para la energía son:

$$S_0 = |\phi_i|^2 + |\phi_j|^2 = J_0(2\pi dr), \quad (111)$$

$$S_1 = |\phi_i|^2 - |\phi_j|^2 = 0. \quad (112)$$

Los estados de polarización de esta señal se encuentran en el plano (S_2, S_3) de la esfera de Poincaré. También de la definición de los parámetros S_2 y S_3 se tiene que los estados de polarización son periódicos a lo largo de la coordenada de propagación z . Se puede controlar la polarización variando el parámetro β . Como un ejemplo, tenemos que para $\beta = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$ se tendría un haz Bessel con polarización circular y polarización lineal cuando $\beta = 2m\pi$.

3.4.2. Trayectorias y envolventes de polarización.

Otro enfoque para trayectorias de polarización se puede obtener por efectos colectivos de ondas planas. En particular, es posible generar singularidades de polarización figura (13) las cuales emergen de manera natural cuando la luz se propaga a través de sistemas ópticos. Estas trayectorias son generadas por medio de una envolvente de elipses de polarización, cuyo comportamiento puede ser descrito con el Teorema de rotacional.

Se describe a continuación los estados de polarización para una superposición de los modos ópticos. Cada modo de propagación en un plano $z = \text{constante}$ tiene asociado una función analítica para los parámetros de Stokes.

$${}^{(1)}S = S_2 + i{}^{(1)}S_3,$$

$${}^{(2)}S = S_2 + i{}^{(2)}S_3.$$

La superposición de estos dos modos es

$$S = {}^{(1)}S + {}^{(2)}S,$$

y su módulo al cuadrado es

$$S = | {}^{(1)}S|^2 + | {}^{(2)}S|^2 + 2\text{Re}\{ {}^{(1)}S {}^{(2)}S^*\}. \quad (113)$$

La última ecuación representa la ley de interferencia para la superposición de dos modos. Es bien conocido que la superposición de dos ondas con los mismos estados de polarización genera interferencia y la superposición de dos ondas con estados de polarización ortogonal, generan redistribución de estados de polarización, que en este caso es la redistribución de los parámetros de Stokes S_2 y S_3 . El término de interferencia representa la evolución de estados de polarización entre los parámetros de Stokes. Con el propósito de obtener un significado físico, se puede describir el valor de la integral compleja de línea de la función analítica S a lo largo de una curva cerrada simple.

$$\oint S dl = \oint S_2 dx - S_3 dy + i \oint S_3 dx + S_2 dy = -i \iint \nabla \cdot S_n dA + \iint \nabla \times S_t \cdot \hat{k} dA, \quad (114)$$

donde los subíndices indican trayectorias normal y transversal. Sustituyendo la ecuación (110) para la segunda integral de la ecuación anterior y con ayuda del Teorema de Stokes, en coordenadas cilíndricas se tiene

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} J_0'(2\pi dr) (\cos \theta \cos \beta z + \text{sen } \theta \text{ sen } \beta z) r dr d\theta = 0, \quad (115)$$

donde el primado simboliza diferenciación. Está ecuación significa que S representa un campo conservativo. Lo mismo pasa con la otra integral la cual representa el flujo. A pesar de que este resultado se obtuvo para un haz Bessel de orden cero, el resultado sigue siendo válido para campos ópticos con simetría radial. En consecuencia, ahora tenemos

$$\oint S \cdot dl = 0. \quad (116)$$

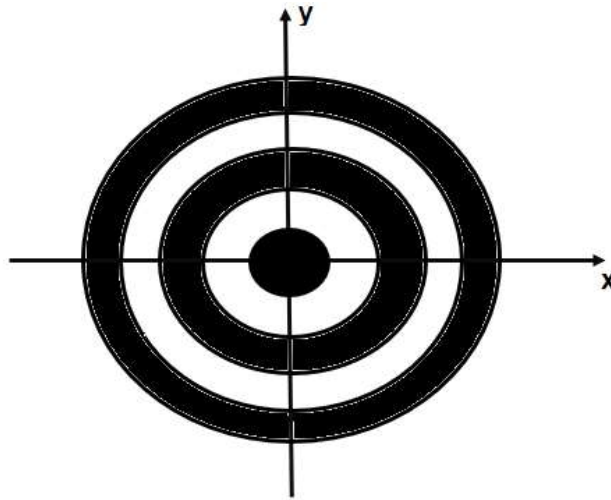


Figura 14. Patrón de irradiancia para un plano perpendicular (x, y) al eje de propagación de una luz Bessel $J_0(2\pi dr)$.

La figura (14) lo que interpreta físicamente, es que para cierta distancia radial r el estado de polarización a lo largo de una trayectoria cerrada es constante. Geométricamente esto significa que S es perpendicular al elemento de línea dl .

Es de esperarse que en general, para campos sin simetría rotacional, la integral de línea sería diferente de cero, lo que se interpreta como cambios de estados de polarización a lo largo de esa trayectoria. Para el caso del haz Bessel de orden cero, en un plano perpendicular a $z = constante$, la distribución de irradiancias es como la mostrada en la figura (14), donde se tiene una región múltiplemente conexas. Es un anillo a cierta distancia r , se forma una envolvente de polarización (se asume polarización circular izquierda). Para el Teorema de Stokes, los contornos C_1 y C_2 que envuelven a esta zona cumplen con

$$\oint_C S \cdot dl = \oint_{C_1} S \cdot dl - \oint_{C_2} S \cdot dl = 0. \quad (117)$$

Esta ecuación predice polarización invariante localmente, pero la envolvente de esta zona origina una mezcla de estados de polarización circular izquierda y circular derecha, que se muestra en la figura (15).

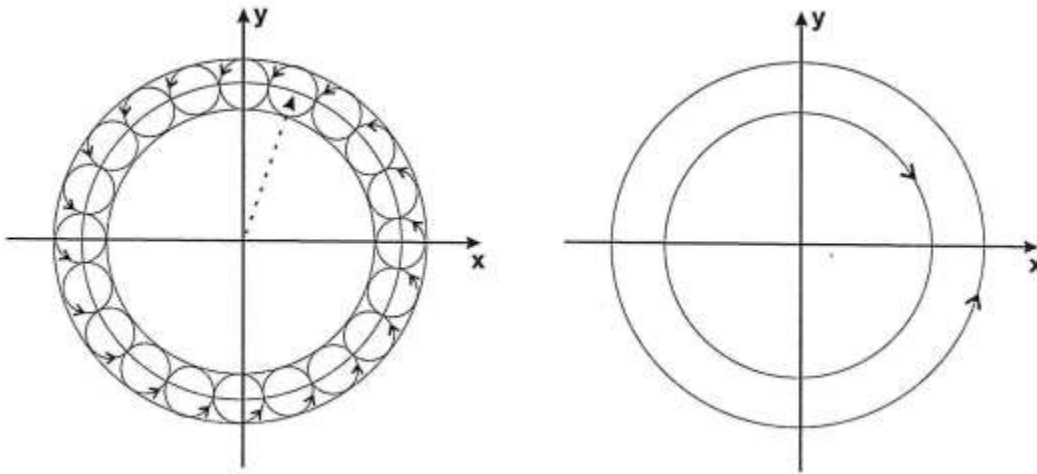


Figura 15. Región para un haz Bessel $J_0(2\pi dr)$, con su envolvente, lo que genera una mezcla de estados de polarización circulares.

Un punto importante es que se pueden generar infinidad de haces sin simetría rotacional. Esto se logra controlando el grado espectral de coherencia (modulando la región anular), lográndose así campos con estructura más complicada, ya que no se mantienen los estados de polarización para cierta distancia radial. Esto ofrece además una forma alternativa de estudiar las singularidades de polarización, ya que en los campos de Speckle surgen de manera natural singularidades de polarización y la ventaja radica en poder generar estos campos de manera controlada. Actualmente el estudio de estas singularidades ha sido de mayor relevancia debido en gran parte a la estabilidad estructural de estos defectos topológicos en propagación.

Finalmente, en este capítulo se definieron los parámetros de Stokes generalizados, así como una nueva señal de polarización (sección 3.3.1), la cual satisface la ecuación de onda de tal forma que se describe al campo óptico que presenta polarización invariante ante propagación y esto permite describir la síntesis de campos auto-polarizables. También se propuso una función de flujo de polarización. La cual satisface la ecuación eikonal, por lo que existe una región envolvente para todas las trayectorias definidas por esta ecuación, el estado de polarización de esta región envolvente no tiene interpretación física, esto es, no se sabe con certeza que estado de polarización existe en esta región.

Por último, se describe el enfoque geométrico de modos ópticos y haces, en caso particular para los haces Bessel de orden cero, también se describe el fenómeno de autoimágenes en polarización y se demostró con la ayuda del Teorema de Stokes que para un haz J_0 los estados de polarización se mantienen a cierta distancia radial, siendo su envolvente una mezcla de estados de polarización.

Capítulo IV: Resultados.

4.1. Análisis de polarización a partir de la matriz de coherencia.

Como ya se mencionó, la polarización es un concepto fundamental asociado a los campos ópticos. Su medida y eventual control ofrecen potenciales aplicaciones en diversas áreas tecnológicas. Por ejemplo, un tópico de interés contemporáneo aún no resuelto consiste en el control de polarización a través de fibras ópticas. En otro contexto, la polarización permite describir fenómenos de transferencia de momento angular para el desarrollo de micromotores, así como la síntesis de pinzas ópticas para el control de partículas y el confinamiento de átomos.

En este capítulo se describe el cálculo experimental de los parámetros de Stokes utilizando la matriz de coherencia. Con este tratamiento se muestra que se puede generar una señal analítica y por lo tanto incorporar fenómenos de propagación tipo onda en los parámetros de Stokes. Este tipo de estudio permite establecer una relación de equivalencia entre fenómenos ondulatorios, en particular se establece la posibilidad de haces invariantes en polarización, así como el fenómeno de autoimágenes en polarización.

4.1.1. Desarrollo teórico.

El tratamiento que se realizó en esta sección, se asocia a una onda plana propagándose en la dirección del eje z , heredada de su carácter vectorial, esta tiene una representación de la forma

$$E = \begin{pmatrix} E_x \exp\{ikz\} \\ E_y \exp\{ikz\} \end{pmatrix}, \quad (118)$$

en donde cada componente escalar satisface

$$E_x = |A_x| \exp\{i\delta_1\}, \quad (119)$$

$$E_y = |A_y| \exp\{i\delta_2\}. \quad (120)$$

Los parámetros geométricos de esta representación se muestran en la figura (16). Se debe notar que cada componente del campo eléctrico tiene una proyección sobre el eje ξ .

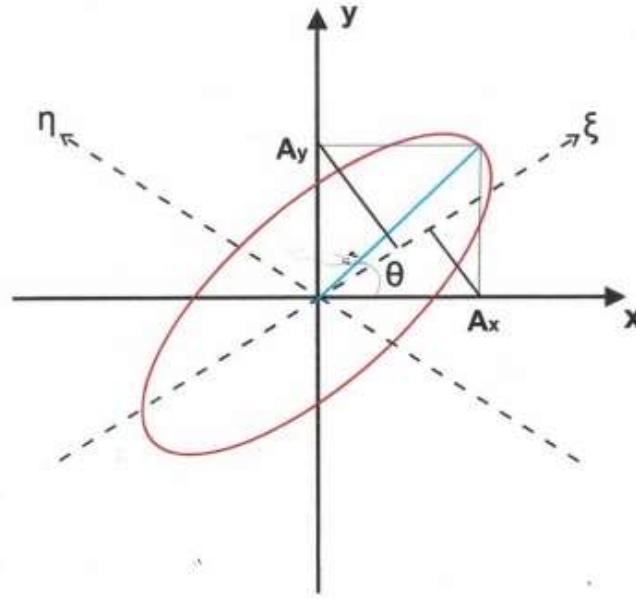


Figura 16. Sistema de referencia para el análisis de la matriz de coherencia.

A partir de este sistema de referencia obtenemos la amplitud de campo eléctrico sobre el eje ξ , el cual se hace coincidir con el eje de un analizador, el que por simplicidad experimental es un polarizador lineal, entonces se tiene

$$A_{\xi} = E_x \cos \theta + E_y \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right), \quad (121)$$

que se puede escribir como

$$A_{\xi} = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta. \quad (122)$$

La irradiancia asociada es

$$I_{\xi} = (E_x \cos \theta + E_y \sin \theta)(E_x \cos \theta + E_y \sin \theta)^*. \quad (123)$$

Realizando los cálculos en forma explícita se obtiene

$$I_{\xi} = E_x^2 \cos^2 \theta + E_y^2 \sin^2 \theta + E_x E_y^* \cos \theta \sin \theta + E_x^* E_y \cos \theta \sin \theta, \quad (124)$$

$$I_{\xi} = E_x^2 \cos^2 \theta + E_y^2 \sin^2 \theta + 2 \operatorname{Re}(E_x E_y^*) \cos \theta \sin \theta. \quad (125)$$

Sustituyendo las ecuaciones (119) y (120). en la ecuación (125) toma la forma

$$I_{\xi} = |A_x|^2 \cos^2 \theta + |A_y|^2 \sin^2 \theta + 2 \operatorname{Re} |A_x| |A_y| \exp\{i(\delta_1 - \delta_2)\} \cos \theta \sin \theta, \quad (126)$$

ó de manera equivalente

$$I_{\xi} = |A_x|^2 \cos^2 \theta + |A_y|^2 \sin^2 \theta + 2|A_x||A_y| \cos \delta \cos \theta \sin \theta. \quad (127)$$

Observemos que I_{ξ} representa la fórmula general de interferencia lo que no simula la interferencia de las proyecciones de componentes ortogonales sobre un mismo eje, después de haberlos hecho pasar por un analizador que es un polarizador lineal, presentado esquemáticamente en el arreglo interferométrico de la figura (17). Se debe notar que la expresión anterior (127) lleva la información de la fase relativa δ .

La expresión de interferencia (127) se puede escribir en forma matricial como

$$I_{\xi} = (\cos \theta \quad \sin \theta) \begin{pmatrix} A_x A_x^* & A_y A_x^* \\ A_y^* A_x & A_y A_y^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (128)$$

Las matrices de los extremos llevan la información de la orientación del eje ξ . La matriz central lleva la información de los productos cruzados de la fase relativa y de las amplitudes.

La expresión anterior permite definir *la matriz de coherencia* como

$$J = \begin{pmatrix} A_x A_x^* & A_y A_x^* \\ A_y^* A_x & A_y A_y^* \end{pmatrix}. \quad (129)$$

Se observa que la expresión (129) tiene la misma estructura que la matriz de coherencia. Donde la diagonal principal (traza) representa la energía total que lleva la onda.

$$T_r(J) = A_x^2 A_y^2, \quad (130)$$

y de igual manera, los elementos de la diagonal secundaria llevan la información de las fluctuaciones de la fase relativa entre cada componente y por lo tanto de los posibles estados de polarización.

4.1.2. Desarrollo experimental.

La propuesta experimental desarrollada consiste en separar cada componente del campo óptico en un sistema interferométrico tipo Michelson mediante dos polarizadores lineales. Esto nos permite analizar las fluctuaciones estadísticas de cada componente.

El sistema nos permite también controlar las fases y reunir nuevamente los haces, haciéndolos pasar por el analizador el cual es un polarizador lineal cuyo eje forma un ángulo respecto a los ejes de dos polarizadores ortogonales. Esta propuesta se muestra en la figura (17).

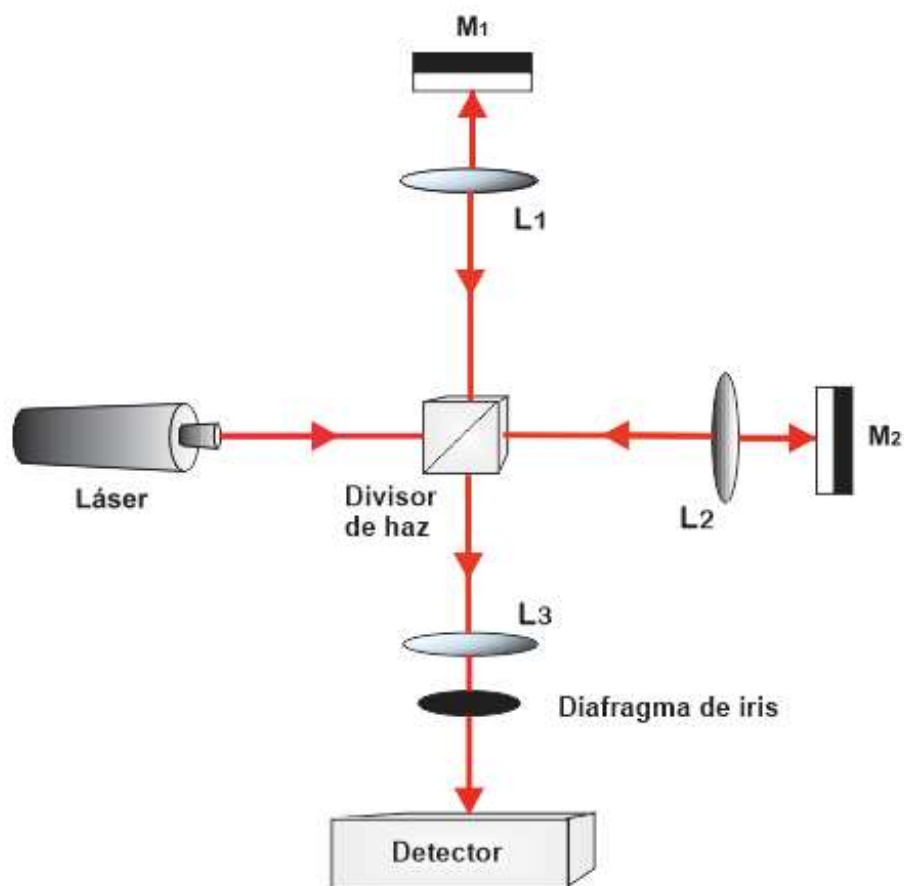


Figura 17. Arreglo interferométrico.

La idea es implementar un grupo de medidas para determinar los valores promedios de las amplitudes (A_x, A_y) y las fluctuaciones de la fase (δ).

Dichas medidas pueden ser calculadas a partir de la ecuación (127). Por lo que el grupo de medidas propuestas para este caso son las siguientes

- El eje de polarización coincide con el eje x , esto implica que el ángulo $\theta = 0$, es decir, sustituyéndolo en la ecuación de interferencia (127) obtenida, tenemos

$$I_{\xi} = |A_x|^2 \rightarrow A_x. \quad (131)$$

- El eje de polarización coincide con el eje y , esto implica que el ángulo $\theta = \pi/2$, es decir, sustituyéndolo en la ecuación de interferencia (127) obtenida, tenemos

$$I_{\xi} = |A_y|^2 \rightarrow A_y. \quad (132)$$

- El eje de polarización se encuentra a un ángulo $\theta = \pi/4$, sustituyéndolo en la ecuación de interferencia (127) obtenida, tenemos

$$I_{\xi} = (A_x^2 + A_y^2) + 2|A_x||A_y| \cos \delta. \quad (133)$$

El último término lleva las fluctuaciones de fases antes descritas, por lo tanto, reescribiendo la ecuación (133) para la diferencia de fases se tiene

$$\cos \delta = \frac{I_{\xi} - T_r(J)}{2|A_x||A_y|}. \quad (134)$$

4.1.3. Resultados experimentales.

Los resultados experimentales se realizaron utilizando un láser de Helio Neón como fuente de iluminación con una longitud de onda de 633nm. El arreglo experimental se muestra en la figura (18), donde E_1 y E_2 son espejos, L_1 y L_2 son polarizadores lineales, el analizador es un polarizador lineal y el detector es un radiómetro (*IL700 Research Radiometer*).

De la ecuación (127), tenemos que cuando el eje de polarización coincide con el eje x el término $I_{\xi} = |A_y|^2$ corresponde a la rama del interferómetro formado por los componentes E_1 y L_1 .

Cuando el eje de polarización coincide con el eje y , el término $I_{\xi} = |A_x|^2$ corresponde a la rama del interferómetro formado por los componentes E_2 y L_2 . Por último, cuando el eje del polarizador se encuentra a un ángulo $\theta = \pi/4$, el término $I_{\xi} = (A_x^2 + A_y^2) + 2|A_x||A_y| \cos \delta$ nos determina el término que lleva las fluctuaciones de fases determinado por δ , que físicamente dentro del interferómetro representa la diferencia de caminos ópticos entre las dos ramas del interferómetro.

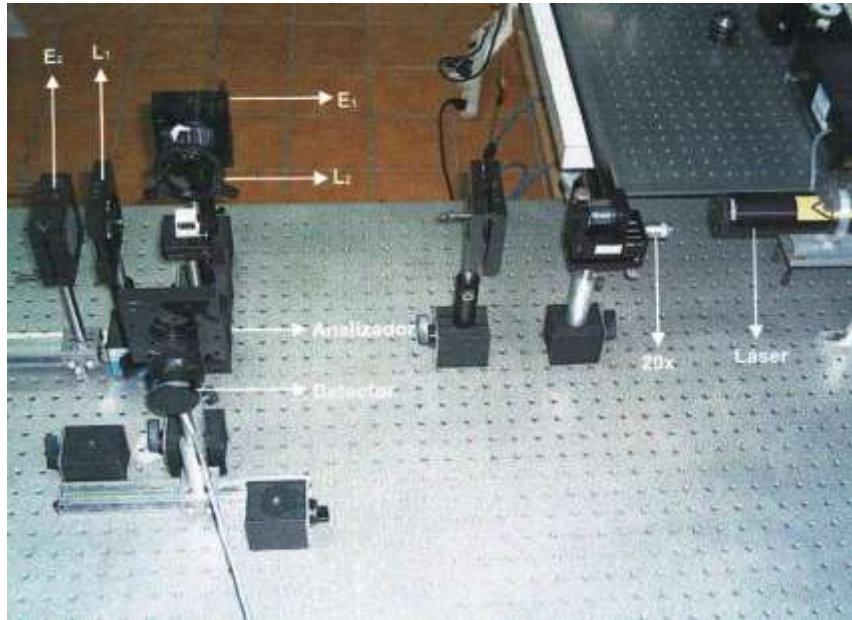


Figura 18. Montaje experimental.

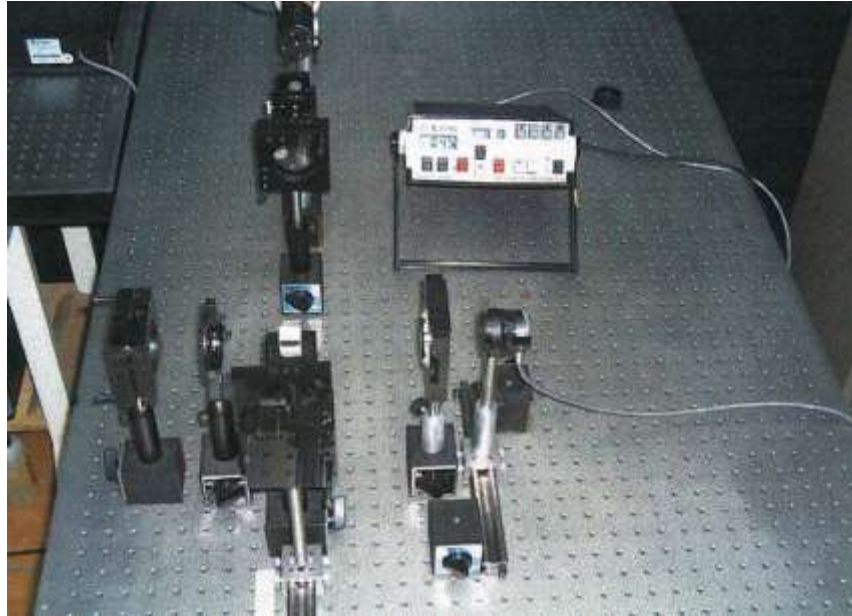


Figura 19. Vista frontal del arreglo experimental montado.

Ahora se presentan los resultados obtenidos al ir orientando el analizador a tres diferentes ángulos como se muestran a continuación

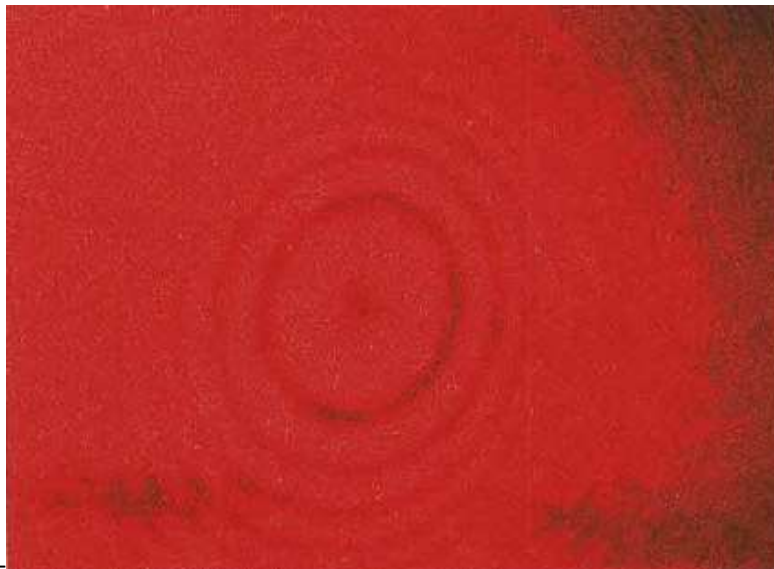


Figura 20. Campo de interferencia con polarización paralela 0° .

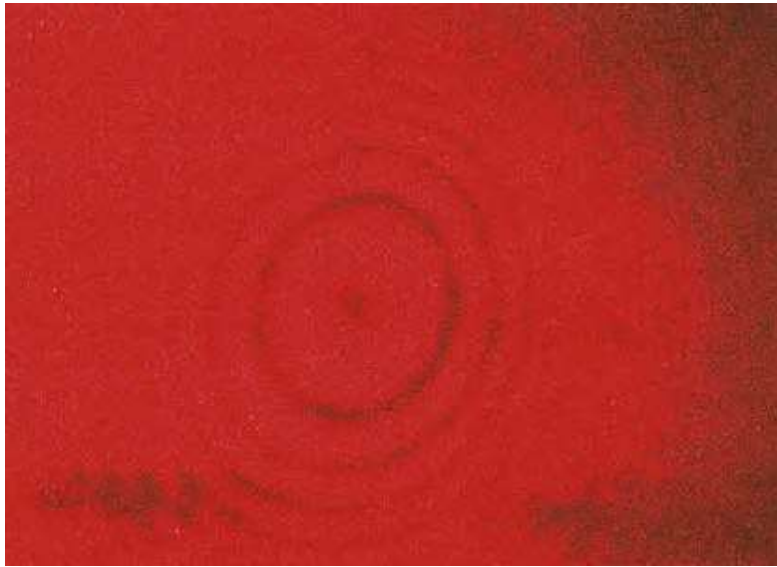


Figura 21. Campo de interferencia con polarización ortogonal 90° .

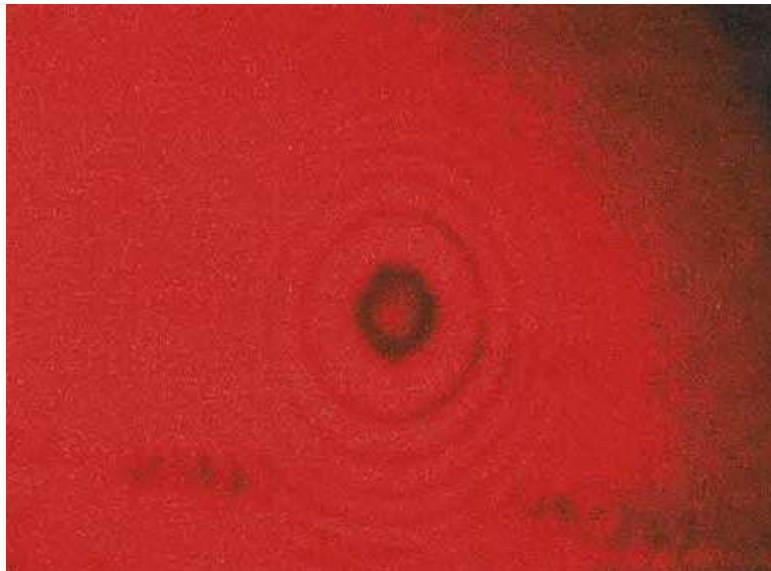


Figura 22. Campo de interferencia con el analizador a 45° .

Los datos numéricos registrados con el radiómetro, el cual se ilustra en la figura (19), se muestran en la tabla (1).

Grados de rotación del analizador	Intensidad $10e-8 \text{ W/m}^2$ I_{ξ}
0	4.49
10	5.2
20	5.79
30	5.96
40	6.19
45	6.22
50	6.18
60	5.9
70	5.76
80	4.99
90	4.5

Tabla 1. Valores experimentales medidas con detector.

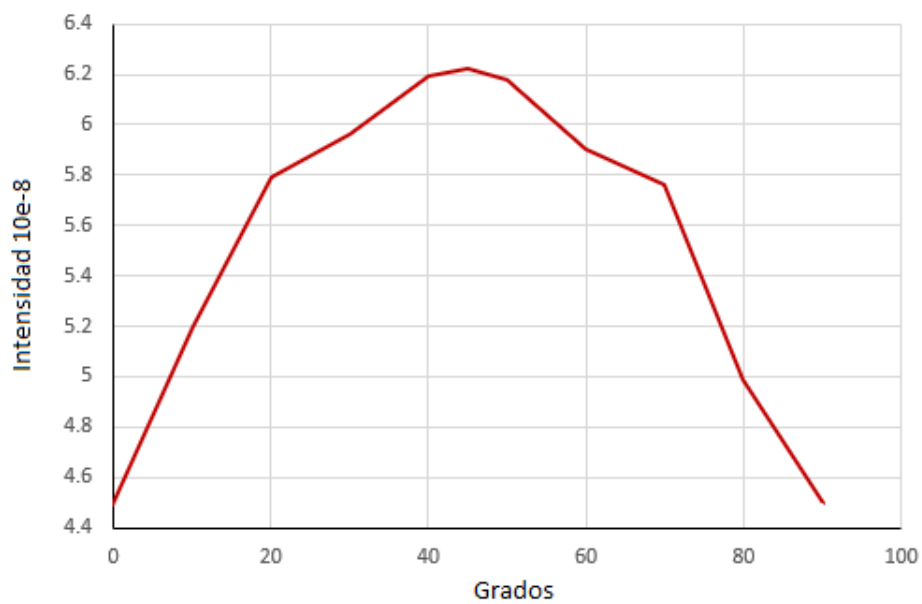


Figura 23. Curva de valores del campo de interferencia.

Se describió la matriz de coherencia como una estructura que permite caracterizar un campo óptico, se estableció un método utilizando un arreglo interferométrico para el cálculo de las componentes de la matriz de coherencia. El sistema interferométrico permite controlar las fluctuaciones de fase relativas sin necesidad de componentes ópticos adicionales. Se mostró que el grupo de medidas propuesto es equivalente a las descritas por Wolf [8], con la variante de que no hay necesidad de introducir elementos ópticos que alteren las variaciones de irradiancia.

Capítulo V: Conclusiones.

5.1. Conclusiones.

Se describen los conceptos fundamentales de difracción asociado a un campo óptico mediante los modelos del espectro angular, Huygens-Fresnel y la representación de Weyl, se muestra que es posible pasar de una representación en términos del espectro angular a una representación en términos de ondas esféricas, además de describir el concepto de coherencia y matriz de coherencia.

Se describieron los conceptos fundamentales de interferencia y polarización. A partir de este estudio se determinaron las características de un campo óptico, también se describieron los parámetros de Stokes, así como la esfera de Poincaré, donde las propiedades físicas de las fluctuaciones de fase tienen un comportamiento aleatorio.

También se definieron los parámetros de Stokes generalizados. Debido a la dependencia espacial de estos parámetros, la esfera de Poincaré es una esfera sólida donde se pueden definir trayectorias de polarización. Se propuso la función analítica S que satisface a la ecuación de onda y el modelo para campos invariantes en polarización y autopolarizables.

Se obtuvo una representación geométrica de los parámetros de Stokes. Utilizando la expresión para el campo de difracción en términos del espectro angular, se encontró la representación paramétrica de los parámetros de Stokes, en donde los parámetros son las coordenadas espaciales (x, y) . De esta forma se tienen que los estados de polarización son localmente elípticos pero su envolvente puede tener diversas geometrías de polarización. El tratamiento ofrece la posibilidad de síntesis de polarización radial y la posibilidad de transferencia de momento angular con potenciales aplicaciones en pinzas ópticas.

Se hizo uso del Teorema de Stokes y se halló que S es un campo conservativo que interpreta físicamente que los estados de polarización para un campo con simetría radial no cambian a cierta distancia r . Controlando la función de transmitancia en el espacio frecuencial se pueden generar campos sin simetría radial dando origen a envolventes de polarización más complejas. Esta forma de poder sintonizar el campo óptico resultante es de gran importancia.

El tratamiento presentado, permitió caracterizar al campo óptico utilizando un arreglo interferométrico. El sistema interferométrico propuesto controla las fluctuaciones de fase relativas sin necesidad de componentes ópticos adicionales. Se muestra que el grupo de medidas obtenidos es equivalente a las descritas por Wolf.

5.2. Líneas de investigación.

Algunas líneas de investigación que se podrían aplicar a partir de este trabajo de tesis son las siguientes:

El primero es el analizar mediante la matriz de coherencia el campo óptico generado por una superficie rugosa con espectro de potencias acotado. La superficie rugosa se describe como un patrón unidimensional de interferencia de tipo cosenoidal de período variable, registrado sobre un material holográfico de volumen. La superficie rugosa resultante, ofrece la posibilidad de generar ondas rasantes debido a que contiene un parámetro libre que es la longitud de onda, la cual tiene la versatilidad de poder acoplar el espectro de potencias acotado al inducir el haz de iluminación a diferentes ángulos.

El segundo trabajo de interés para investigar a futuro es ver de que forma evoluciona la envolvente de polarización para toda la variedad de haces Bessel, así como las singularidades de polarización. Las singularidades en polarización es actualmente un estudio de investigación activa. Controlando la función de modulación de distintas formas se ofrece una forma alternativa para el estudio de estas singularidades.

5.3. Trabajo a futuro.

Matriz de coherencia en un sistema interferométrico tipo Young

Se sugiere ir obteniendo conclusiones parciales de cada objetivo específico que permitan llegar a la conclusión general.

La propuesta consiste en analizar por medio de la matriz de coherencia, el análisis interferométrico obtenido por medio de un interferómetro tipo Young. El esquema propuesto se presenta en la siguiente figura (24).

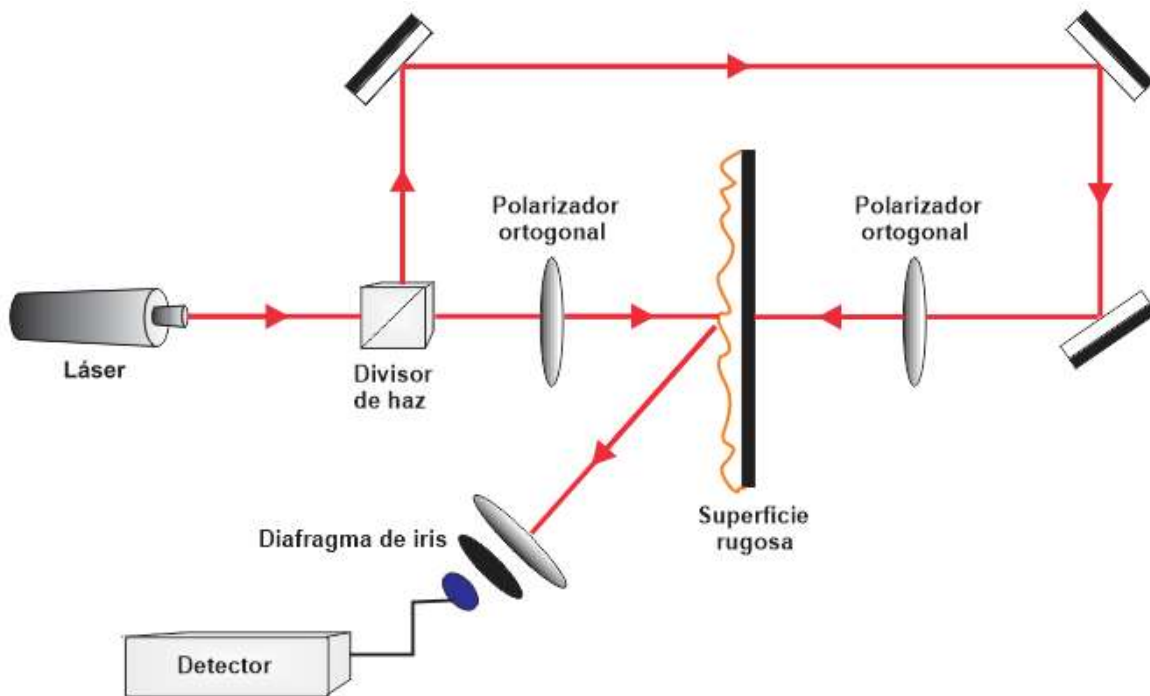


Figura 24. Esquema propuesto de la matriz de coherencia en un arreglo interferométrico tipo Young.

A partir de este trabajo, se realizará como tema de tesis de maestría la descripción de campos ópticos a partir de la matriz de coherencia generando superficies rugosas. La superficie rugosa se describe como un patrón unidimensional de interferencia de tipo cosenoidal de período variable, registrado sobre un material holográfico de volumen.

La superficie rugosa resultante, ofrece la posibilidad de generar ondas rasantes debido a que contiene un parámetro libre que es la longitud de onda, la cual tiene la versatilidad de poder aplicarla para materiales con índice de refracción negativo (Metamateriales).

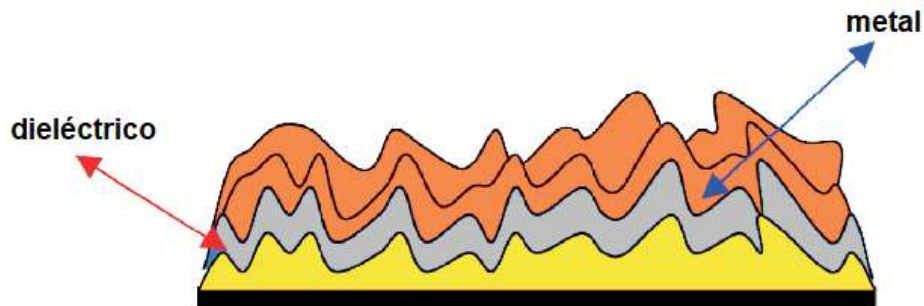


Figura 25. Esquema de una guía de onda (superficie rugosa).

Con una aplicación futura, se pretende realizar evaporación de películas delgadas para la fabricación de guías de onda en sistemas de comunicaciones, a partir del estudio del comportamiento del campo óptico en un metamaterial utilizando superficies rugosas.

Parámetro de Stokes y la esfera de Poincaré

```
% Estados degenerados por la elipse de polarización
% Facultad en ciencias de la Electrónica
% Creado por: Juan Carlos Juárez Morales

Delta=1:1:360;

E0x=1;

E0y=1;

for ciclo=0:1:length(Delta);

    Ex1=E0x*cos(deg2rad(Delta+.001));
    Ey1=E0y*cos(deg2rad(Delta+ciclo));
    plot(Ex1,Ey1, '-');
    grid on
    hold on
    plot(Ex1(1),Ey1(1), 'og');
    plot(Ex1(90),Ey1(90), 'or');
    axis square
    title('Evolucion de la elipse de polarizacion')
    xlabel ('E_0_x')
    ylabel ('E_0_y')
    str(1)={'Grados de retraso:'}
    str(2)={' \Delta=',num2str(ciclo), '°'};
    text(-.5,.6,str,'FontSize',8);
    pause(.01)
    clf('reset')

end
```

Bibliografía.

- [1] Shalaev Vladimir H. “Metamaterials: Giving lighth the Second hand”. *Purdue University*, (2006).
- [2] Fernandez Antonio. “Tuned a different way, plasmon on nanoparticles can be used not just for; identification but also for the eradication of cancer cells in rats”. *Physics News Update (AIP)*, (2007).
- [3] Liedberg Bo, Nylander Claes. “Biosensing with Surface plasmon resonance”. *Biosensor and Bioelectronics*, (2007).
- [4] Grant R. Fowles. “Introduction to Modern Optics”. *Dover Editorial*, (1997).
- [5] Arfken G. “Mathematical Methods for Physics”. *Mc Graw Hill*, (1975).
- [6] Goodman Joseph W. “Statistical Optics”. *John Wiley and Sons Inc.*, (2000).
- [7] Max Born and Emil Wolf. “Principles of Optics”. *Cambridge Univ. Press*, 7th. Ed., (1999).
- [8] Mandel Leonard and Wolf Emil. “Optical Coherent and Quantum Optics”. *Cambridge University Press*, (1995).
- [9] Hecht E. and Zajac A. “Óptica”. *Ed. Fondo Educativo Interamericano S.A.*, (1974).
- [10] Guenther R. “Modern Optics”. *John Wiley and Sons Inc.*, (1990).
- [11] Strong J. and Freman W. H. “Concepts of Classical Optics”, *Ed. Dover Publications Inc.*, (1987).
- [12] Klein Miles V. and Furtak Thomas E. “Optics”, *John Wiley and Sons Inc.*, (1990).
- [13] Huards S. “Polarization of lighth”, *Wiley Editorial*, (1997).
- [14] Hariban P. “Basic of Interferometry”, *Academic Press Inc.*, (1992).
- [15] Sommerfeld A. “Lectures on theoretical physics, Vol. IV, Optics”, *Academic Press*.