



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS DE
FATOU Y JULIA Y SU RELACIÓN CON LOS
FRACTALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

WENDY RODRÍGUEZ DÍAZ

DIRECTORA:

DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO

PUEBLA, PUEBLA, ENERO 2020



*A quien le debo tanto, en especial amor.
"Porque eres linda desde el pie hasta el alma..."*

*A mi motor, quien se ha limitado a
amar y luchar, Dios salve a la reina.*

A quien se apartó para poder vernos volar.

A mis primeros maestros y más grandes ejemplos.

A quien está y no. "Mí amor, mí cómplice y todo..."

A quien es genuina oportunidad de ser mejor cada día.

Introducción

"Hace 150 años, uno de los problemas más importantes de la ciencia aplicada -de la que dependía el desarrollo de la industria, comercio y gobierno- era el problema de salvar vidas en el mar. Las estadísticas sobre esas pérdidas eran terribles. El dinero y los esfuerzos empleados en resolver el problema eran también, terríficos, los matemáticos desarrollaban una herramienta que salvaría más vidas que las que esperaba salvar el grupo de excéntricos inventores. Esa herramienta es lo que se llegó a conocer como la Teoría de Funciones de Variable Compleja. Entre las muchas aplicaciones de esta noción puramente matemática, una de las más fructíferas es la Teoría de la comunicación por radio [24]."

En muchas áreas es común encontrarnos con fenómenos repetitivos que dependen de ciertas condiciones que llamamos parámetros y que, al cambiar alguno de estos parámetros se presenta una forma distinta del fenómeno estudiado. Este comportamiento puede estudiarse matemáticamente mediante el análisis de los sistemas dinámicos.

Los sistemas dinámicos generados por la iteración de funciones holomorfas tiene su inicio a finales del siglo XIX, motivado por el análisis de la convergencia para el método de Newton. Pero no fue hasta los trabajos de Pierre Fatou (1878-1929) y de Gaston Julia (1893-1978) alrededor de los años 20, que la teoría global fue formalmente estudiada. La innovación más importante en los trabajos de Fatou y Julia fue, sin duda, el uso de la teoría de las familias normales para dividir la esfera en dos conjuntos de comportamiento dinámico totalmente diferente; estos conjuntos son hoy conocidos como los conjuntos de Fatou y Julia, o equivalentemente el conjunto caótico y el conjunto estable de la función

holomorfa en cuestión. Consideramos que este tema es de gran importancia, porque la teoría del caos nos ofrece la oportunidad de presenciar el surgimiento, en nuestra época, de un paradigma científico, o bien la de estar ante una revolución científica. El tema es fascinante y está lleno de expectativas.

La teoría de caos, tiene fundamento de una manera explícita en el área de Sistemas Dinámicos, y en los muchos investigadores dedicados al estudio de sistemas dinámicos no-lineales en el mundo, prueba de ello lo constituye el número creciente de artículos que se publican actualmente, la edición de libros, la organización de congresos, etc. Por un lado, un grupo de científicos simplemente deseó estudiar una clase diferente de problemas. Por el otro, el desarrollo tecnológico de la informática proporcionó el instrumento adecuado a sus investigaciones, la computadora. El objetivo principal de esta tesis ha sido proporcionar un texto que sirva como introducción a la teoría de la dinámica holomorfa y además que despierte en otros un interés hacia la teoría del caos.

En el primer capítulo abordaremos la teoría básica de los cursos de variable compleja y topología, en donde se incluyen resultados elementales que serán de utilidad en los capítulos posteriores. Se proporcionarán definiciones de espacios métricos y topológicos, se dotará al plano \mathbb{C} de una topología y recordaremos algunos resultados importantes de la integración compleja.

En el segundo capítulo, estudiamos algunos espacios de funciones y definiciones importantes en nuestro estudio, como son: los conceptos de equicontinuidad y normalidad, además se enuncian resultados importantes en dinámica holomorfa: los teoremas de Picard y de Montel, que relacionan los conceptos antes mencionados. Se enuncian dos Teoremas Fundamentales de la Teoría de Nevanlinna, entre otros resultados que serán utilizados para demostrar una de las propiedades de los conjuntos de Fatou y Julia.

En el tercer capítulo se definen los conjuntos que describen tres clases de funciones meromorfas y la iteración de funciones pertenecientes a estas clases.

En el cuarto capítulo definimos los conjuntos de Fatou y Julia y algunos resultados que son de utilidad para enunciar y demostrar cinco propiedades de estos conjuntos para las clases de funciones definidas en el capítulo anterior.

Finalmente en el capítulo cinco, a manera de divulgación se habla de como los fractales

se encuentran en distintas áreas como son: antropología, música, biología, medicina, lingüística, economía, etc. Se abordan conceptos elementales de la geometría, se definen los términos: fractal, autosimilitud, iteración, autorreferencia y el conjunto de Mandelbrot.

Índice general

Introducción	II
1 Preliminares	1
1.1 Espacios métricos y topológicos	1
1.1.1 Espacios métricos	1
1.1.2 Espacios Topológicos	3
1.2 Números complejos	5
1.2.1 Proyección estereográfica	7
1.3 Funciones, límites y continuidad	7
1.4 Series y sucesiones de funciones	8
1.4.1 Convergencia de sucesiones	8
1.4.2 Convergencia de Series de Funciones	10
1.5 Diferenciación compleja	10
1.5.1 Cauchy-Riemann	11
1.6 Integración compleja	12
1.7 Singularidades y su clasificación	22
2 Espacios de funciones	24
2.1 Espacio de funciones continuas $C(A, \Omega)$	24
2.2 Equicontinuidad	26
2.3 Teoría de Nevanlinna	26
2.4 Familias Normales	28
2.5 Espacio de Funciones Holomorfas $H(A)$	32
2.6 Espacio de funciones Meromorfas $M(D)$	35

2.7	Teoremas de Picard y otros resultados	38
2.7.1	Teoremas de Picard	38
2.7.2	Otros resultados	41
3	Clases de Funciones Meromorfas	44
3.1	Funciones Trascendentes Enteras	44
3.2	Funciones Racionales	44
3.3	Funciones Trascendentes Meromorfas	46
3.4	Dinámica Compleja	46
4	Conjuntos de Fatou y Julia	49
4.1	Piere Fatou y Gaston Julia	49
4.2	Los conjuntos de Fatou y Julia	53
4.3	Algunas propiedades de los conjuntos $\mathcal{F}(f)$ y $\mathcal{J}(f)$	56
4.4	Demostracion de las propiedades	56
5	Fractales	64
5.1	Introducción	64
5.2	Iteración y autorreferencia	65
5.3	Geometría	66
5.4	Conjuntos de Cantor, Julia y Mandelbrot	67
5.5	Algunas aplicaciones	71
5.6	Antropología Fractal	73

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacios métricos y topológicos

Es común que en nuestra formación como matemáticos predomine la idea de proximidad. Límite y continuidad son dos conceptos en los que involucramos la proximidad.

1.1.1. Espacios métricos

Los espacios métricos fueron una de las primeras concepciones abstractas, este concepto permitió generalizar resultados de los espacios euclidianos, véase en [5], [9] y [18] para consultar los temas en el capítulo.

Definición 1.1.1. Una **métrica** o **distancia** en un conjunto X , no vacío, es una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que satisface los siguientes axiomas para cualesquiera $x, y, z \in X$:

i) $d(x, y) \geq 0$.

ii) $d(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$.

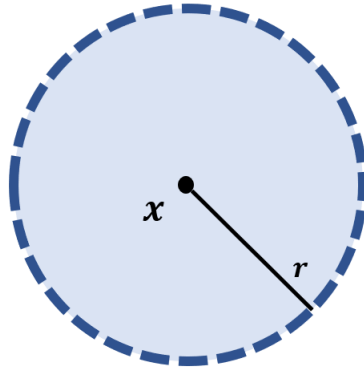
iii) $d(x, y) = d(y, x)$.

iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Definición 1.1.2. Si X es un conjunto y d es una métrica en X , a la pareja (X, d) le llamaremos **espacio métrico**.

Definición 1.1.3. Un subconjunto A de un espacio métrico (X, d) es **acotado**, si para algún $x_0 \in X, M > 0, d(x, x_0) \leq M$ para todo $x \in A$.

Definición 1.1.4. Sea (X, d) , para cada $x \in X$ y cada número real positivo r , al conjunto denotado por $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ le llamaremos **bola abierta** con centro en x y radio r .



Bola abierta con centro en x y radio r .

Definición 1.1.5. Un subconjunto A de un espacio métrico (X, d) es un conjunto **abierto** si para cada $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A$. Un subconjunto C de un espacio métrico (X, d) es un conjunto **cerrado**, si su complemento es abierto.

Definición 1.1.6. Un espacio métrico (X, d) es **conexo** si los únicos subconjuntos de X que son cerrados y abiertos son los conjuntos \emptyset y X .

Definición 1.1.7. Un conjunto conexo no vacío en cualquier espacio D , en particular si $D = (X, d)$, se llama **dominio**.

Teorema 1.1.1. *Un subconjunto C de un espacio métrico (X, d) es cerrado si, y sólo si C contiene el límite de cada sucesión convergente en C .*

Demostración. Supongamos que C es un conjunto cerrado y sea $\{x_n\}$ una sucesión en C con $x_n \rightarrow x$.

Si $x \notin C$, entonces como C^c es abierto, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \cap C = \emptyset$. De este modo, eventualmente x_n estará en $B_\epsilon(x) \subseteq C^c$, lo cual es imposible. Por lo tanto $x \in C$.

Supongamos ahora que C no es cerrado, entonces C^c no es abierto. Luego, existe $x \in C^c$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(x) \not\subseteq C^c$, esto es, $B_{\frac{1}{n}}(x) \cap C \neq \emptyset$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Considerando un punto x_n en la intersección tendremos entonces una sucesión $\{x_n\}$ en C que converge a un punto que no está en C . \square

1.1.2. Espacios Topológicos

Una topología, nos permite medir de cierta manera la cercanía entre objetos que pertenecen a un conjunto. M. Fréchet y F. Riesz [14], son quienes realizaron los primeros intentos por definir estructuras topológicas. Sin embargo, fué F. Hausdorff quién en 1914 proporcionó una definición aceptable [15].

Definición 1.1.8. Una **topología** en un conjunto X es una familia \mathcal{T} de subconjuntos de X que satisface las siguientes condiciones:

- I. Los conjuntos \emptyset y X pertenecen a \mathcal{T} .
- II. Si $A, B \in \mathcal{T}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{T}$.
- III. Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$, entonces $\bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{T}$.

Definición 1.1.9. Si \mathcal{T} es una topología en X , a la pareja (X, \mathcal{T}) le llamaremos **espacio topológico** y los elementos que pertenecen a \mathcal{T} reciben el nombre de **subconjuntos abiertos** de X .

Definición 1.1.10. Si X es un conjunto y $S \subset X$. Una **cubierta** de S es una familia $A = \{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de S , tales que $S = \cup \{A_i\}_{i \in I}$. Una cubierta es **finita** si está formada por una cantidad finita de conjuntos.

Definición 1.1.11. Si (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico, $S \in X$ y $A = \{A_i\}_{i \in I}$ es una cubierta de S , tal que cada A_i es un abierto de (X, \mathcal{T}) , entonces A es una **cubierta abierta** de S .

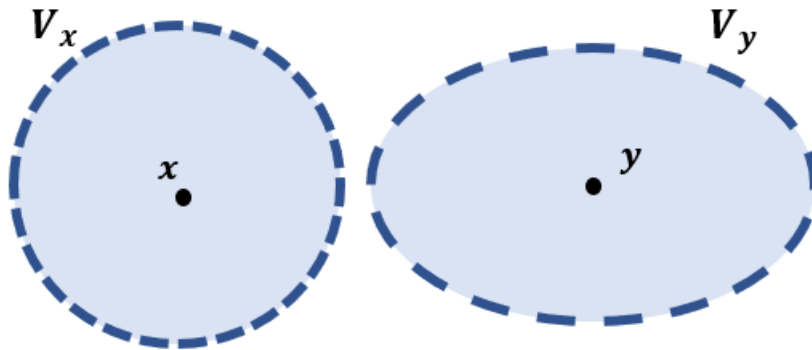
Definición 1.1.12. Un espacio topológico se dice **compacto** si toda cubierta abierta de X admite una subcubierta finita.

Definición 1.1.13. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $K \subset X$ un subconjunto. Decimos que K es un conjunto **compacto** en (X, \mathcal{T}) si (K, \mathcal{T}_K) con la topología relativa, es un espacio compacto.

Definición 1.1.14. Un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es **localmente compacto**, si todo punto admite una base de entornos compactos.

Definición 1.1.15. Dos puntos x, y , de un espacio topológico (X, \mathcal{T}) , cumplen la **propiedad de Hausdorff** si existen dos entornos \mathcal{V}_x de x y \mathcal{V}_y de y , tales que $\mathcal{V}_x \cap \mathcal{V}_y = \emptyset$.

Definición 1.1.16. Un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es un espacio de **Hausdorff** o **T_2** , si se satisface la propiedad de Hausdorff para cualesquiera puntos distintos x, y de X .



En un espacio topológico T_2 , dos puntos diferentes x y y , tienen vecindades ajenas que los contienen.

Definición 1.1.17. Sea (X, \mathcal{T}_X) un espacio topológico localmente compacto. La **compactación de Alexandroff** $A(X)$ de X es el espacio $X \cup \{\infty\}, \mathcal{T}$, donde ∞ es un punto que no pertenece a X y \mathcal{T} es el conjunto:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_X \cup \{U \subseteq X \cup \{\infty\} : \infty \in U \text{ y } X \setminus U \text{ es subespacio compacto de } X\}.$$

Teorema 1.1.2. *Sea X, \mathcal{T}_X un espacio Hausdorff localmente compacto, entonces la compactación de Alexandroff $A(X)$ es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. Sean $x, y \in A(X)$ con $x \neq y$. Si $x, y \in X$, entonces existen \mathcal{V}_x y \mathcal{V}_y conjuntos abiertos de X tales que $x \in \mathcal{V}_x, y \in \mathcal{V}_y$ y $\mathcal{V}_x \cap \mathcal{V}_y = \emptyset$. Observemos que por como esta definido el conjunto $A(X)$ tenemos que los abiertos \mathcal{V}_x y \mathcal{V}_y también son abiertos de $A(X)$.

Si $x \in X$ y $y = \infty$, sea \mathcal{V}_x vecindad abierta de x cuya cerradura $cl(\mathcal{V}_x)$ en X es compacta y sea $\mathcal{V} = A(X) \setminus cl(\mathcal{V}_x)$, entonces $\mathcal{V}_x \cap \mathcal{V} = \emptyset$, $x \in \mathcal{V}_x$, $y = \infty \in \mathcal{V}$, y \mathcal{V}_x y \mathcal{V} son abiertos de $A(X)$. \square

1.2. Números complejos

El conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ es un espacio métrico con las operaciones de suma y producto por un escalar definidas por:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

$$\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1),$$

donde $x_1, x_2, y_1, y_2, \lambda \in \mathbb{R}$. Con las operaciones anteriores \mathbb{R}^2 es un espacio vectorial de dimensión 2. Definimos el producto interno como sigue:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, y_1 x_2 + x_1 y_2).$$

Con esta operación es fácil ver que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ es un campo, este campo es denominado el **campo de los números complejos** \mathbb{C} .

Consideremos el monomorfismo de campos $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definido por $\phi(x) = (x, 0)$, con esto obtenemos una identificación de los números reales x con puntos en \mathbb{C} , donde x y $(x, 0)$ representan el mismo punto en \mathbb{C} . Podemos obtener una representación de los números complejos como elementos de un espacio vectorial:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1).$$

Definiremos el punto $(0, 1) = i$, tendremos entonces una nueva forma de escribir un número complejo:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + iy.$$

Finalmente, gracias a lo anterior podemos escribir a \mathbb{C} de la forma

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Consideremos ahora el isomorfismo $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $\varphi(x + iy) = (x, y)$, con ello podemos concluir que $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Definición 1.2.1. Sea $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, tenemos:

1. La **parte real** de z esta dada por $\Re z = x$.
2. La **parte imaginaria** de z esta dada por $\Im z = y$.
3. El **conjugado** de z es $\bar{z} = x - iy$.

Definición 1.2.2. Sea $z \in \mathbb{C}$, el **módulo** de z es: $|z| = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2}$

A continuación dotaremos al plano complejo de una estructura topológica. Consideremos a la topología \mathcal{T} asociada con la distancia entre dos números complejos definida de la siguiente manera:

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ entonces $d(z, w) = |z - w|$.

Consideremos además el disco $D(a, r)$ de radio $r > 0$ y centro en $a \in \mathbb{C}$ como:

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} | d(z, a) < r\}.$$

El espacio métrico (\mathbb{C}, d) es un espacio localmente compacto y completo.

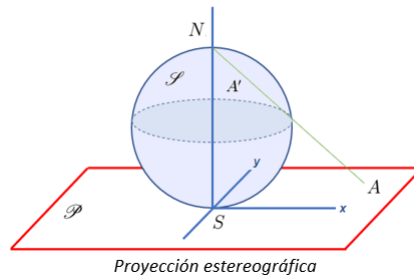
Por el Teorema 1.1.2 aplicado a $(\mathbb{C}, \mathcal{T})$ obtenemos el denominado plano extendido $(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{T}_\infty)$, donde $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Para el punto ∞ , una base de entornos es $\{U_\rho : \rho > 0\}$, donde $U_\rho := \{z \in \mathbb{C} : |z| > \rho\} \cup \{\infty\} \subset \mathbb{C}_\infty$.

Sea G tal que $\infty \in G$, tenemos que $\mathbb{C} \setminus G$ es compacto y acotado, entonces existe $\rho > 0$, tal que si $z \in \mathbb{C} \setminus G$ se tiene $|z| \leq \rho$, por lo tanto $U_\rho \subset G$.

Nota. El elemento ∞ es usado con fines topológicos y no operacionales.

1.2.1. Proyección estereográfica

Sea \mathcal{P} el plano complejo y consideremos una esfera \mathcal{S} tangente a \mathcal{P} en $z = 0$. El diámetro NS es perpendicular al plano \mathcal{P} donde N y S son los polos norte y sur respectivamente de \mathcal{S} . Para cualquier punto $A \in \mathcal{P}$ podemos construir una recta NA que corta a \mathcal{S} en el punto A' de este modo, a cada punto de \mathcal{P} corresponde un único punto de \mathcal{S} , así podemos representar cualquier número complejo como un punto sobre la esfera. Al punto N lo hacemos corresponder con ∞ .



1.3. Funciones, límites y continuidad

Sea $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función, ya vimos que podemos escribir a cada número complejo como $z = x + iy = (x, y)$ definamos ahora a las funciones $u(x, y) = \Re(f(z))$ y $v(x, y) = \Im(f(z))$. Podemos escribir de forma única $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, donde u y v son funciones reales definidas en A .

Definición 1.3.1. Un conjunto S es **invariate hacia adelante** bajo la función f si, y sólo si $f(S) \subseteq S$. Un conjunto S se dice **invariante hacia atrás** bajo la función f si, y sólo si $f^{-1}(S) \subseteq S$.

Un conjunto es **completamente invariante** si éste es invariante hacia adelante y hacia atrás.

Definición 1.3.2. Sea f una función definida en un conjunto A que contiene a una vecindad agujerada de z_0 con un radio r . Diremos que el **límite** de f es a cuando $z \rightarrow z_0$,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$$

si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $z \in D(z_0, r)$, $z \neq z_0$ y $|z - z_0| < \delta$, entonces $|f(z) - a| < \epsilon$.

Proposición 1.3.1. *Si el límite de una función f existe, entonces es único.*

Demostración. Supongamos que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = x$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = y$ de tal forma que $x \neq y$. Sea $2\epsilon = |x - y|$. Existe $\delta > 0$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta$, entonces $|f(z) - x| < \epsilon$ y $|f(z) - y| < \epsilon$. Consideremos $z \neq z_0$. Entonces por la desigualdad del triángulo tenemos $|x - y| \leq |x - f(z)| + |f(z) - y| < 2\epsilon$, lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto $x = y$. \square

Definición 1.3.3. Sean $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función, f es una función **continua** en $z_0 \in A$ si, y sólo si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Diremos que f es continua en A si es continua para cada punto de A .

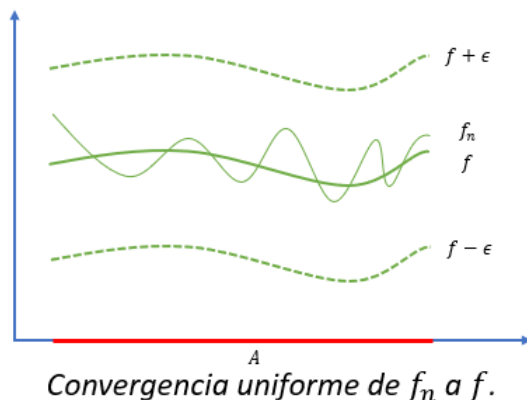
1.4. Series y sucesiones de funciones

Esta sección es importante mencionar que la analiticidad de una función se puede definir en función de la existencia de una serie convergente.

1.4.1. Convergencia de sucesiones

Definición 1.4.1. Sea $A \subset \mathbb{C}$ una sucesión de funciones f_n en A **converge puntualmente** en A a la función $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ si $f_n(z) \rightarrow f(z)$ para cada $z \in A$.

Definición 1.4.2. Una sucesión de funciones $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ **converge uniformemente** en A a la función $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ si, para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ para todo $n \geq N$ y todo $z \in A$.



Proposición 1.4.1. Si $f_n : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una sucesión de funciones continuas y $f_n \rightarrow f$ uniformemente, entonces f es continua en A .

Demostración. Hemos de ver que para cada $z \in A$, dada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.

Consideremos N de tal forma que $|f_N(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{3}$ para todo $z \in A$. Tenemos que, como f_N es continua, entonces existe $\delta > 0$ tal que $|f_N(z) - f_N(z_0)| < \frac{\epsilon}{3}$ si $|z - z_0| < \delta$.

Por lo tanto, $|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| < \epsilon$.

Observemos que necesitamos una N independiente de z . \square

Definición 1.4.3. Una sucesión de funciones f_n es **acotada uniformemente** con cota uniforme M si $|f_n(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$

Teorema 1.4.2. Criterio de Cauchy para la Convergencia Uniforme

Una sucesión de funciones $f_n : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ converge uniformemente en A si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe un índice N tal que $|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon$ para todo $z \in A$ y $m, n \geq N$

Demostración. Si $f_n \rightarrow f$ uniformemente en A , entonces dado $\epsilon > 0$ existe un índice N tal que $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2}$ y $|f_m(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $z \in A, n, m \geq N$. Luego, por la desigualdad del triángulo tenemos $|f_n(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z) - f(z)| + |f(z) - f_m(z)| < \epsilon$.

Por el contrario, asumamos las condiciones dadas. En particular $\lim_{m,n} |f_n(z) - f_m(z)| = 0$ para todo $z \in A$ entonces existe una función f tal que $f_n \rightarrow f$ puntualmente en A . De hecho la convergencia es uniforme. Para ver esto, consideremos $\epsilon > 0$ y escojamos N como en la condición de Cauchy, al hacer tender m al infinito tendremos que $|f_n(z) - f(z)| \leq \epsilon$ para todo $z \in A$ y $n \geq N$. Por lo tanto $f_n \rightarrow f$ uniformemente en A . \square

1.4.2. Convergencia de Series de Funciones

Definición 1.4.4. Sea $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión infinita de funciones definidas en $A \subset \mathbb{C}$. Si $\{S_N\}_{N=0}^{\infty}$ converge en un punto $z \in A$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ se dice que **converge** a z .

Si $\{S_N\}_{N=0}^{\infty}$ converge para todos los puntos de A , entonces decimos que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge en A .

Definición 1.4.5. Sea $f_n : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una sucesión de funciones definida en A . La serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ de funciones **converge absolutamente** a una función f en A si la sucesión $S_N(z) = \sum_{n=0}^N |f_n(z)|$ de sumas parciales converge puntualmente a la función f en A .

Definición 1.4.6. Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión y $z_0 \in \mathbb{C}$. La serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ es llamada **serie de potencias**.

Definición 1.4.7. Sea $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. La función $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ es **analítica** si para cualquier $z_0 \in A$ existe $r > 0$ con $B(z_0, r) \subset A$ y una serie de potencias con centro en z_0 , $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ que converge en $B(z_0, r) \subset A$, tal que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ para todo $z \in B(z_0, r)$.

1.5. Diferenciación compleja

Definición 1.5.1. Sean $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$. Diremos que f es **diferenciable** en $z_0 \in A$ si $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe.

El límite anterior es denotado por $f'(z_0)$.

Proposición 1.5.1. Si f es diferenciable en z_0 , entonces es continua en z_0 .

Demostración. Mostraremos que $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] = 0$.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] = \left[\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right] \left[\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \right] = [f'(z_0)][0] = 0. \quad \square$$

Definición 1.5.2. Una función $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es **holomorfa** en A si f es diferenciable para cada punto de A .

1.5.1. Cauchy-Riemann

Sea $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ donde $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = u(x, y) + iv(x, y)$, tendremos que la matriz jacobiana de f es la matriz de derivadas parciales en cada punto (x, y)

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Teorema 1.5.2. de Cauchy-Riemann

Sean $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Entonces $f'(z_0)$ existe si y sólo si f es diferenciable en el sentido de las variables reales y en el punto $z_0 = (x_0, y_0)$, u y v satisfacen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} ; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(*ecuaciones de Cauchy-Riemann*).

Además

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Demostración. Supongamos primero que $f'(z_0)$ existe, entonces se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Sea $z = x + iy_0$, entonces

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0} = \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

Cuando $x \rightarrow x_0$ el lado izquierdo de la ecuación converge al límite $f'(z_0)$, entonces la parte derecha converge al límite $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Por lo tanto $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ evaluadas en (x_0, y_0) .

De manera similar, si ahora consideramos $z = x_0 + iy$ tenemos que cuando $y \rightarrow y_0$ entonces $f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$ evaluadas en (x_0, y_0) .

Finalmente, si comparamos las partes real e imaginaria de ambas expresiones, observamos que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen. \square

Definición 1.5.3. Sean $A \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en A y $a \in A$,

el conjunto $M(f, a, r)$ es:

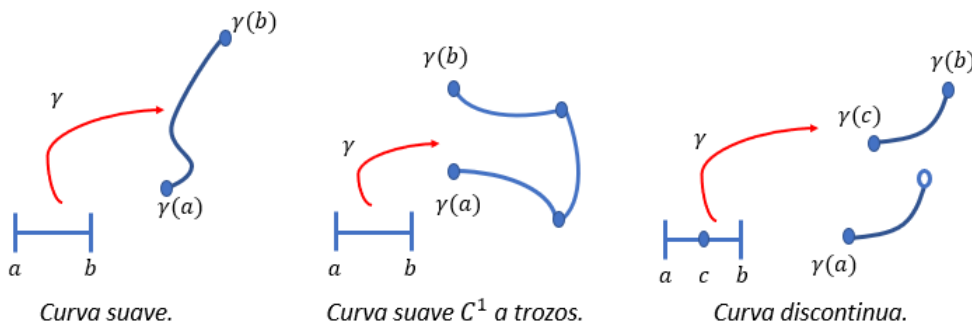
$$M(f, a, r) := \max\{|f(z)| : z \in C(a, r)\},$$

donde $C(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$.

1.6. Integración compleja

Definición 1.6.1. Sean $A \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua, y sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva suave a trozos la cual satisface $[a, b] \subset A$. La siguiente expresión es llamada la **integral** de f a lo largo de γ :

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$



Teorema 1.6.1. Teorema de Cauchy

Si γ es una curva cerrada y f es analítica, con f' continua dentro y sobre la curva γ , entonces $\int_{\gamma} f = 0$.

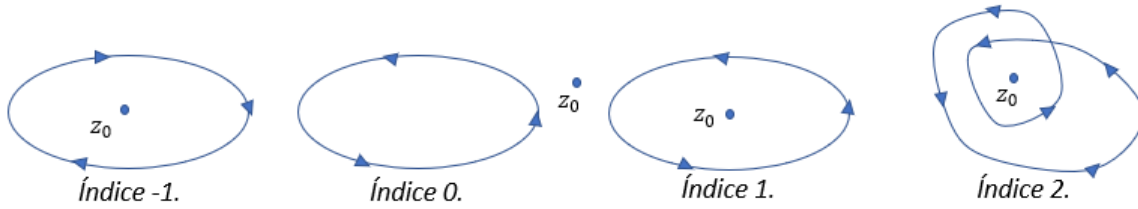
Demostración. Tomemos $f = u + iv$, entonces $\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} (u + iv)(dx + idy) = \int_{\gamma} (udx - vdy) + i \int_{\gamma} (udy + vdx)$. Luego, aplicando el Teorema de Green se obtiene lo siguiente:

$$\int_{\gamma} f = \int \int_A \left\{ -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right\} dx dy + i \int \int_A \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dx dy$$

Finalmente, por la ecuaciones de Cauchy-Riemann, concluimos que la integral es igual a cero. □

Definición 1.6.2. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva cerrada. El índice de γ con respecto a $z_0 \notin \gamma([a, b])$ esta dado por la siguiente expresión:

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$



Definición 1.6.3. Sean $A \subset \mathbb{C}$ y $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow A$, γ_1, γ_2 son **homotópicas** en A si existe una función continua $\mathcal{H} : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow A$, tal que para cada $x \in [0, 1]$, $t \rightarrow \mathcal{H}(t, s)$ es una curva cerrada.

Teorema 1.6.2. Fórmula Integral de Cauchy

Sean f una función analítica en $A \subset \mathbb{C}$ y γ una curva cerrada en A homotópica a un punto. Sea $z_0 \in A$ un punto que no esta sobre γ , entonces

$$f(z_0)I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Demostración. Definamos la función por partes

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si } z \neq z_0. \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0. \end{cases}$$

Entonces, $g(z)$ es analítica siempre que $z \neq z_0$ y $g(z)$, existe, dado que f es analítica.

Entonces por el Teorema de Cauchy

$$\int_{\gamma} g(z) dz = 0$$

y

$$\int_{\gamma} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0) \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) I(\gamma, z_0),$$

por lo tanto

$$f(z_0) I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

□

Lema 1.6.3. Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B \subset X$. Si $A \cap B = \emptyset$, B cerrado y A compacto, entonces $d(A, B) > 0$.

Demostración. Definamos la función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(x) = d(x, B)$. Como $A \cap B = \emptyset$ y B es cerrado entonces $f(a) > 0$ para cada $a \in A$. Dado que A es compacto entonces existe un punto $a \in A$ tal que $0 < f(a) = \inf\{f(x) : x \in A\} = d(A, B)$. □

Lema 1.6.4. Sea γ una curva en \mathbb{C} y g una función continua definida en $\gamma([a, b])$. Si

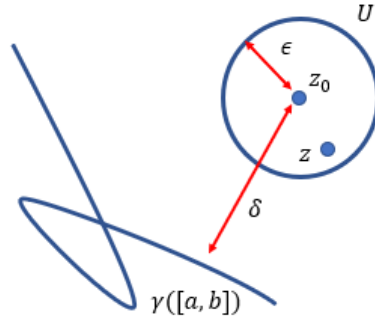
$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

entonces G es analítica en $\mathbb{C} \setminus ([a, b])$, de hecho G es infinitamente diferenciable, la k -ésima derivada esta dada por

$$G^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta,$$

$$k \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Asumamos que la función es acotada e integrable sobre γ . La imagen γ es un conjunto compacto pues es la imagen continua de un intervalo cerrado y acotado. Si z_0 no está en γ por lema 1.6.3 se encuentra a una distancia positiva δ de él. Si tomamos $\epsilon = \frac{\delta}{2}$ y U es un ϵ -vecindad al rededor de z_0 , entonces $z \in U$ y ζ sobre γ , entonces $|z - \zeta| \geq \epsilon$, como $|z - \zeta| \geq |\zeta - z_0| - |z_0 - z| \geq 2\epsilon - \epsilon$.



Caso $k = 1$. Mostraremos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{G(z) - G(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta \right] = 0.$$

Observemos lo siguiente:

$$\frac{G(z) - G(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta = \frac{z - z_0}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2(\zeta - z)} d\zeta,$$

pues la igualdad

$$\frac{1}{z - z_0} \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) - \frac{1}{(\zeta - z_0)^2} = \frac{z - z_0}{(\zeta - z_0)^2(\zeta - z)}$$

es válida.

Consideremos a U la ϵ -vecindad de z_0 y sea M el máximo de g en γ , entonces $|(\zeta - z_0)^2(\zeta - z)| \geq \epsilon^2 \cdot \epsilon = \epsilon^3$, con esto obtenemos la estimación

$$\left| \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2(\zeta - z)} \right| \leq M\epsilon^{-3}$$

Así

$$\left| \frac{z - z_0}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2(\zeta - z)} d\zeta \right| \leq |z - z_0| \frac{M\epsilon^{-3}}{2\pi} l(\gamma)$$

Cuando $z \rightarrow z_0$ la expresión anterior se aproxima a 0, es decir el límite es 0.

En general, podemos hacer inducción sobre k . Supongamos que la condición es válida para $1 \leq k \leq n - 1$, veamos que es válido también para $k = n$.

Sabemos que

$$G^{(n-1)}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta.$$

Sea $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$. Haciendo uso de la identidad

$$\frac{1}{(\zeta - z)^n} = \frac{1}{(\zeta - z)^{n-1}(\zeta - z_0)} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z)^n(\zeta - z_0)}$$

tenemos

$$\begin{aligned} G^{(n-1)}(z) - G^{(n-1)}(z_0) &= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \left[\int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n-1}(\zeta - z_0)} d\zeta - \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n} d\zeta \right] \\ &+ \frac{(n-1)!}{2\pi i} (z - z_0) \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^n(\zeta - z_0)} d\zeta. \end{aligned}$$

Aseguramos la continuidad de la expresión anterior, si aplicamos la hipótesis de inducción a $\frac{g(\zeta)}{\zeta - z_0}$ tenemos que

$$\int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^n - 1(\zeta - z_0)} d\zeta$$

es analítica como función de z en $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$.

Luego, conforme $z \rightarrow z_0$ tenemos que:

$$\int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n-1}(\zeta - z_0)} d\zeta \rightarrow \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n} d\zeta.$$

Si la distancia de z_0 a γ es 2ϵ , $|g(z)| < M$ en γ y $|z - z_0| < \epsilon$ se satisfacen, entonces

$$\left| \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^n(\zeta - z_0)} d\zeta \right| < \frac{M}{\epsilon^{n+1}} l(\gamma),$$

donde $(l)\gamma$ es la longitud de γ , así

$$\begin{aligned} |z - z_0| \left| \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^n(\zeta - z_0)} d\zeta \right| &\rightarrow 0. \\ z &\rightarrow z_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto G^{n-1} es continua en $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$.

Observemos que tenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \frac{G^{n-1}(z) - G^{n-1}(z_0)}{z - z_0} &= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \frac{1}{(z - z_0)} \left[\int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n-1}(\zeta - z_0)} d\zeta - \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n} d\zeta \right] \\ &+ \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^n(\zeta - z_0)} d\zeta. \end{aligned}$$

Aplicando la hipótesis de inducción, observamos que el primer término de la derecha tiende a

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \\ z \rightarrow z_0. \end{aligned}$$

Vimos que G^{n-1} es continua en $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$, aplicando esto a $\frac{g(\zeta)}{\zeta - z_0}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^n(\zeta - z_0)} d\zeta \rightarrow \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ z \rightarrow z_0. \end{aligned}$$

De este modo mostramos que:

$$\begin{aligned} \frac{G^{n-1}(z) - G^{n-1}(z_0)}{z - z_0} &\rightarrow (n-1) \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta + \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \end{aligned}$$

Conforme $z \rightarrow z_0$. □

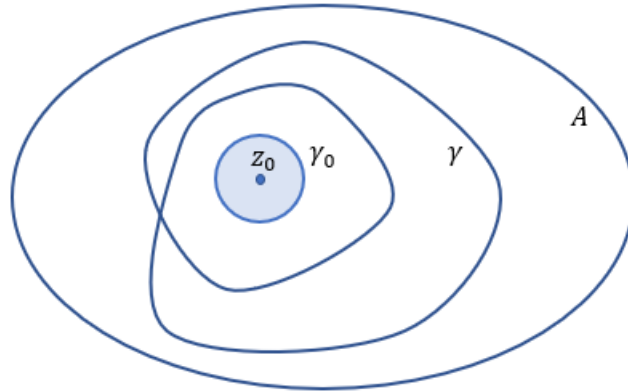
Teorema 1.6.5. Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas

Si $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en A , entonces todas las derivadas de f sobre A existen. Además, para $z_0 \in A$ y cualquier curva cerrada γ en A homotópica a un punto en A con z_0 que no está sobre γ , tenemos

$$n(\gamma, z_0) f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

donde $f^{(k)}$ es la k -ésima derivada de f .

Demostración. Dado que A es un conjunto abierto y z_0 no está en γ existe un círculo pequeño γ_0 con centro en z_0 cuyo interior está en A y de tal forma que γ no corta a γ_0 .



Para un punto $z \in A$ pero no en γ , definimos

$$G(z) = f(z)I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Observemos que se trata de una integral del tipo de Cauchy, por ello es infinitamente diferenciable en $A \setminus \gamma$, y

$$G^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta.$$

Sin embargo,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f\zeta}{\zeta - z} d\zeta \quad y \quad I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta,$$

también son integrales del tipo de Cauchy, entonces también son infinitamente diferenciables cerca de z_0 . El índice es constante siempre que z no cruce la curva, en particular es constante sobre γ_0 . Así $G^{(k)}(z_0) = f^{(k)}(z_0)I(\gamma, z_0)$. Usando esto en la fórmula para $G^{(k)}(z)$ obtenemos el resultado. \square

Teorema 1.6.6. Desigualdad de Cauchy

Si $A \in \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en A , $a \in A$ y $\overline{B(a, r)} \subset A$, entonces

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} (M(f, a, r)),$$

para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

La demostración se puede revisar en [22].

Definición 1.6.4. Una función f definida y analítica en todo el plano complejo \mathbb{C} se llama **función entera**.

Teorema 1.6.7. Teorema de Liouville

Si f es una función entera y existe una constante M tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces f es una función constante.

Demostración. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, de la desigualdad de Cauchy tenemos lo siguiente: $|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}$. Haciendo $R \rightarrow \infty$, se concluye que $|f'(z_0)| = 0$, por lo tanto, $f'(z_0) = 0$, tenemos entonces que f es una función constante. \square

Teorema 1.6.8. Teorema de Morera

Sean $A \in \mathbb{C}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua y supongamos que $\int_{\gamma} f = 0$ para cualquier curva cerrada en A . Entonces f es analítica en A y $f = F'$ donde F es analítica en A .

Demostración. Observemos la integral

$$\int_{z_0}^z f(z)dz = F(z)$$

la cual es una función uniforme en A . Demostremos que esta es una función analítica en A y que su derivada es igual a f , es decir $F'(z) = f(z)$.

Como $f(z)$ es continua, podemos encontrar U vecindad de z tal que $U \subset A$ y para cualquier $x \in U$ se satisface $|f(x) - f(z)| < \epsilon$. Sea φ una curva que una a z_0 y a z y se encuentre en el interior de A , y sea ψ el segmento que une a z con x . Sea t la variable de integración, entonces tenemos:

$$F(x) - F(z) = \int_{\varphi+\psi} f(t)dt - \int_{\varphi} f(t)dt = \int_{\psi} f(t)dt$$

y

$$\frac{F(x) - F(z)}{x - z} - f(z) = \frac{\int_{\psi} f(t)dt - f(z)(x - z)}{x - z} = \frac{\int_{\psi} f(t)dt - f(z) \int_{\psi} dt}{x - z} = \frac{\int_{\psi} [f(t) - f(z)]dt}{x - z}.$$

Pero para todo $t \in \psi$ tenemos que $|f(t) - f(z)| < \epsilon$, entonces

$$\left| \frac{F(x) - F(z)}{x - z} - f(z) \right| = \frac{|\int_{\psi} [f(t) - f(z)] dt|}{|x - z|} \leq \frac{\epsilon_{\psi}}{|x - z|} = \epsilon.$$

Dado que ϵ es arbitrario se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow z} \frac{F(x) - F(z)}{x - z} = f(z),$$

es decir $F'(z) = f(z)$. □

Lema 1.6.9. Propiedad del valor medio

Si f una función analítica en el interior y sobre un círculo de radio r y centro z_0 , entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Demostración. De la fórmula integral de Cauchy tenemos

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

donde $\gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} rie^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

□

Teorema 1.6.10. Principio del Módulo Máximo

Sean $A \subset \mathbb{C}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica y $z_0 \in A$, supongamos que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todo $z \in A$ entonces f es constante en un vecindad de z_0 .

Demostración. Supongamos que f es analítica en U vecindad con centro z_0 y radio r_0 . Queremos mostrar que $|f(z)| = |f(z_0)|$ en U . Supongamos lo contrario, es decir, existe $z_1 \in U$ donde $|f(z_1)| < |f(z_0)|$. Consideremos a $z_1 = z_0 + re^{i\theta}$ con $r < r_0$, como f es continua existen $\epsilon, \delta > 0$ tales que $|f(z_0 + re^{i\theta})| < |f(z_0)| - \delta$ siempre que $|\theta - a| < \epsilon$. De

manera equivalente $|f(z_0 + re^{i(a+\phi)})| < |f(z_0)| - \delta$ siempre que $|\phi| < \epsilon$. Entonces

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{i(a+\phi)}) d\phi \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\epsilon} f(z_0 + re^{i(a+\phi)}) d\phi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(z_0 + re^{i(a+\phi)}) d\phi + \frac{1}{2\pi} \int_{\epsilon}^{\pi} f(z_0 + re^{i(a+\phi)}) d\phi \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\epsilon} |f(z_0 + re^{i(a+\phi)})| d\phi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} |f(z_0 + re^{i(a+\phi)})| d\phi + \frac{1}{2\pi} \int_{\epsilon}^{\pi} |f(z_0 + re^{i(a+\phi)})| d\phi. \end{aligned}$$

La primera y la tercer integral cuentan con un integrando no mayor que $|f(z_0)|$ y la longitud del intervalo es $\pi - \epsilon$, entonces cada una de las integrales no es mayor que $|f(z_0)|(\pi - \epsilon)$. En la integral de enmedio, el intervalo tiene longitud 2ϵ y el integrando es menor que $|f(z_0)| - \delta$, por lo tanto la integral no es mayor que $(|f(z_0)| - \delta)2\epsilon$.

Con esta información tenemos:

$$|f(z_0)| < \frac{1}{2\pi} [|f(z_0)|(\pi - \epsilon) + (|f(z_0)| - \delta)2\epsilon + |f(z_0)|(\pi - \epsilon)]$$

o

$$|f(z_0)| < |f(z_0)| \frac{\epsilon\delta}{\pi}.$$

Lo cual es imposible, entonces no puede existir $z \in U$ para el que se cumpla $|f(z)| < |f(z_0)|$, luego $|f(z)| = |f(z_0)|$ para todo $z \in U$.

Por lo tanto $|f|$ es una función constante en U . Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ en todos los puntos de U . Entonces $|f(z)|^2 = u^2 + v^2$, derivando respecto a x y y :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Las funciones u y v no se anulan simultáneamente, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Por las ecuaciones D'Alembert-Euler, tenemos que $(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 = 0$ lo que implica $\frac{\partial u}{\partial x} =$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ y por las mismas ecuaciones $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Por lo tanto

$$u(x, y) = C_1, \quad v(x, y) = C_2 \quad y \quad f(z) = C_1 + iC_2.$$

De este modo concluimos que f es una función constante. \square

1.7. Singularidades y su clasificación

Los puntos singulares juegan un papel muy importante en el estudio de la dinámica holomorfa.

Definición 1.7.1. Si f es una función analítica para todo punto en una vecindad de z_0 , excepto en z_0 , entonces el punto z_0 es llamado **singularidad** de la función.

Clasificación de singularidades

1. **Singularidades aisladas:** El punto z_0 es una **singularidad aislada** de $f(z)$ si podemos encontrar un $\delta > 0$ de tal forma que f está definida y es analítica en $B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$, es decir $B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ no encierra puntos singulares distintos de z_0 .
2. **Polos:** Si existe un entero positivo n tal que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = c, c \neq 0$, entonces z_0 es un **polo de orden n** .
3. **Singularidades removibles:** El punto z_0 es una **singularidad removible** de $f(z)$ si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe.
4. **Singularidades esenciales:** Una singularidad que no es un polo, ni una singularidad removible es llamada **singularidad esencial**.

Ejemplos:

- $f(z) = \frac{3z-2}{(z-1)^2(z+1)(z-4)}$ tiene un **polo** de orden 2 en $z = 1$ y **polos simples** en $z = -1$ y $z = 4$.
- $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ tiene una **singularidad removible** en $z = 0$ pues el $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$.

- $f(z) = e^z$ tiene una **singularidad esencial** en ∞ .

Definición 1.7.2. Una función f definida y analítica en \mathbb{C} , excepto por polos, es una **función meromorfa**.

Capítulo 2

Espacios de funciones

2.1. Espacio de funciones continuas $C(A, \Omega)$

Sean $A \subset \mathbb{C}$ abierto y (Ω, d) un espacio métrico completo, denotaremos por $C(A, \Omega)$ al conjunto de las funciones continuas de A a Ω , este conjunto es distinto del vacío pues las funciones constantes se encuentran en él.

Proposición 2.1.1. *Si $A \subset \mathbb{C}$ es abierto entonces existe una sucesión de subconjuntos compactos de A , tal que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Además los conjuntos K_n son de tal forma que se cumple:*

(a) $K_n \subset \text{int}(K_{n+1})$.

(b) Si K es compacto y $K \subset K_n$ para alguna n .

Demostración. Consideremos lo siguiente:

$$K_n = \{z : |z| \leq n\} \cap \{z : d(z, \mathbb{C} \setminus A) \geq \frac{1}{n}\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Observemos que K_n es la intersección de dos conjuntos cerrados, además es un conjunto acotado, por lo tanto es también un conjunto compacto. El conjunto

$$\{z : |z| \leq n + 1\} \cap \{z : d(z, \mathbb{C} \setminus A) > \frac{1}{n + 1}\},$$

es abierto, además contiene a K_n y está contenido en K_{n+1} , con esto se prueba (a).

Dado que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, y por lo anterior se tiene que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{int}K_n$. Si el conjunto K es un subconjunto compacto de A entonces $\{\text{int}K_n\}$ es una cubierta abierta de K , de este modo, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_m$, así (b) se satisface. \square

Para dotar $C(A, \Omega)$ de una métrica consideraremos $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, donde K_n es compacto y $K_n \subset \text{int}K_{n+1}$, definimos:

$$\rho_n(f, g) = \sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K_n\}, \quad \rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)},$$

donde $f, g \in C(A, \Omega)$.

Nota. La serie converge pues esta acotada por $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, además para todo $x \geq 0$ se cumple $x(1+x)^{-1} \leq 1$.

Lema 2.1.2. *Si d una métrica en un conjunto X , entonces*

$$\rho(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

también es una métrica, una sucesión es de Cauchy en (X, d) si y sólo si es de Cauchy en (X, ρ) .

La demostración del lema puede consultarse en [18].

De esta manera se deduce que $(C(A, \Omega), \rho)$ es un espacio métrico, observemos que se satisface que $\rho(f, g) = \rho(g, f)$, además como cada ρ_n cumple la desigualdad del triángulo, entonces ρ también la cumple, finalmente dado que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{int}K_n$ tenemos que $f = g$ si $\rho(f, g) = 0$.

Proposición 2.1.3. *$C(A, \Omega)$ es un espacio métrico completo.*

La demostración se puede consultar en [6].

2.2. Equicontinuidad

Una familia $\mathcal{F} \subset C(A, \Omega)$ de funciones definidas en un dominio A es **equicontinua** en un punto $z_0 \in A$ si, y sólo si, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(f(z) - f(z_0)) < \epsilon$ siempre que $|z - z_0| < \delta$, para toda $f \in \mathcal{F}$.

Definición 2.2.1. Una familia $\mathcal{F} \subset C(A, \Omega)$ es **equicontinua en un conjunto** $E \subset A$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $z_1, z_2 \in E$, si $|z_1 - z_2| < \delta$ entonces $d(f(z_1), f(z_2)) < \epsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

Teorema 2.2.1. Una familia de funciones analíticas \mathcal{F} localmente acotada en un dominio A es equicontinua en subconjuntos compactos de A .

Demostración. Como \mathcal{F} es localmente acotado, entonces $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ es uniformemente acotada por subconjuntos compactos de A . Para un disco cerrado $D \subseteq A$ tenemos que $|f'(z)| \leq C_0$ para todo $z \in D$, $f' \in \mathcal{F}'$ y alguna constante C_0 . Entonces para cualquier par de puntos $z_0, z \in D$, integrando sobre la curva que une a z con z_0 tenemos

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \int_{z_0}^z |f'(\zeta)| |d\zeta| \leq C_0 |z - z_0|.$$

Dado $\epsilon > 0$ elegimos $0 < \delta = \delta(\epsilon, D) < \frac{\epsilon}{C_0}$, $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ siempre que $z, z_0 \in D$, $|z - z_0| < \delta$.

Por lo tanto \mathcal{F} es equicontinua en D . □

2.3. Teoría de Nevanlinna

Uno de los logros más importantes en el desarrollo de la teoría de funciones meromorfas fue la distribución de valores (una generalización del Teorema de Picard). Rolf Herman Nevanlinna (1895-1980) fue quien desarrolló esta teoría a principios de 1920, la cual es una herramienta indispensable en el estudio de familias normales.

Sea $f(z)$ una función meromorfa en $|z| \leq R < \infty$. El punto inicial de la teoría de Nevanlinna es la fórmula de Poisson-Jensen.

Teorema 2.3.1. Fórmula de Poisson-Jensen

Sea f una función meromorfa, no constante en \mathbb{C} , con a_1, a_2, \dots, a_n y b_1, b_2, \dots, b_k ceros y polos respectivamente, de f . Si $f(z) \neq 0, \infty$ y $z = \rho e^{i\theta}$, $0 \leq \rho < r < R$, entonces

$$\begin{aligned} \log |f(z)| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\phi})| \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \phi) + \rho^2} d\phi \\ &+ \sum_{j=1}^n \log \left| \frac{r(z - a_j)}{r^2 - \overline{a_j}z} \right| - \sum_{j=1}^k \log \left| \frac{r(z - b_j)}{r^2 - \overline{b_j}z} \right|. \end{aligned}$$

Demostración. La prueba de este teorema puede consultarse en [17]. □

Denotaremos por $n(r, f)$ al número de polos de $f(z)$ en $|z| < r$. Tomando $\log^+ x = \max(\log x, 0)$. Definimos

$$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f) \log r;$$

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta;$$

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f);$$

donde $T(r, f)$ es la **Característica de Nevanlinna** de f , $m(r, f)$ es la **función de proximidad** y $N(r, f)$ es la **función de conteo**. $T(r, f)$ se usa para determinar el orden $\lambda(f)$ y el orden más bajo $\rho(f)$ se definen de la siguiente manera:

$$\lambda(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}, \quad \rho(f) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}.$$

Teorema 2.3.2. Primer Teorema Fundamental

Sea f una función meromorfa en un disco $K_R = \{z : |z| < R \leq \infty\}$, para todo $0 \leq r < R$, y para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, se tiene que:

$$m(r, \alpha, f) + N(r, \alpha, f) = T(r, f) + \phi(r, \alpha),$$

donde $|\phi(r, \alpha)| \leq \ln^+ |\alpha| + |\ln |c|| + \ln 2$ y c representa el primer coeficiente no cero en la serie de Laurent alrededor del cero de la función $f \setminus \alpha$ si $f(0) = \alpha \neq \infty$ o de f si $f(0) = \infty$.

Teorema 2.3.3. Segundo Teorema Fundamental

Sea f una función meromorfa en un disco $K_R = \{z : |z| < R \leq \infty\}$ y un conjunto de valores del plano complejo extendido $\{\alpha_k\}_{k=1}^q$, con $q \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, entonces se cumple que:

$$\sum_{k=1}^q m(r, \alpha_k, f) \leq 2T(r, f) - N_1(r, f) + S(r, f),$$

donde $N_1(r, f) = N(r, \infty, 1/f') + 2N(r, \infty, f) - N(r, \infty, f')$ y el término $S(r, f)$ tiene las siguientes propiedades:

1. Si $R = \infty$, entonces $S(r, f) = O(\ln(rT(r, f)))$, excepto a lo más para un conjunto E de medida total finita.
2. Si $R < \infty$, entonces $S(r, f) = O(\ln(\frac{R}{R-r}T(r, f)))$, excepto a lo más para un conjunto E que cumple:

$$\int_E \frac{dr}{R-r} < \infty.$$

Las demostraciones de los dos teoremas fundamentales de Nevanlinna se pueden consultar en [17] y en [27].

2.4. Familias Normales

Los resultados sobre familias normales tienen sus inicios con el trabajo de Montel en el año 1907, sobre sucesiones de funciones, pero fue hasta el año siguiente que se utilizó el término **normal**.

Definición 2.4.1. Una familia $\mathcal{F} \subset C(A, \Omega)$ es **normal** en A si cada sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{F}$ tiene una subsucesión $\{f_{n_i}\}_{n_i=1}^\infty$ convergente a una función f en $C(A, \Omega)$.

Teorema 2.4.1. Una familia de funciones analíticas \mathcal{F} es normal en A si, y sólo si \mathcal{F} es normal en cada punto de A .

Demostración. Si \mathcal{F} es normal en A , entonces es evidente que es normal para cada uno de sus puntos.

Supongamos ahora que \mathcal{F} es normal en cada punto $z \in A$. Consideremos un conjunto denso numerable $\{z_n\}$ de A , con $z_n = x_n + iy_n$, donde x_n y y_n son racionales. Denotemos $D(z_n, r_n)$ al disco más grande sobre z_n , en el cual \mathcal{F} es normal. Notemos que si $z_{n_k} \rightarrow \zeta \in A$, entonces $\zeta \in D(z_{n_k}, r_{n_k})$ para k suficientemente grande, $r_{n_k} \rightarrow 0$ solo si $\zeta \in \partial A$. Entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} D(z_n, r_n)$ es una cubierta de A . Para una sucesión $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ podemos extraer una subsucesión convergente $\{f_{n_k}^{(1)}\}$ la cual converge uniformemente en $D(z_1, \frac{r_1}{2})$ a una función analítica o a ∞ . La sucesión $\{f_{n_k}^{(1)}\}$ a su vez tiene una subsucesión $\{f_{n_k}^{(2)}\}$ que converge uniformemente en $D(z_2, \frac{r_2}{2})$ y en $D(z_1, \frac{r_1}{2})$. Continuando este proceso, obtenemos la sucesión $\{f_{n_k}^{(k)}\}$ que converge uniformemente en $D(z_n, \frac{r_n}{2})$, con $n = 1, 2, 3, \dots$ a una función analítica o a ∞ . Podemos dividir a los puntos $z \in A$ en dos clases, A_0, A_∞ , los cuales son conjuntos abiertos que satisfacen $A_0 \cap A_\infty = \emptyset$, $A_0 \cup A_\infty = A$. La conexidad de A nos asegura que $A_0 = A$ o $A_\infty = A$. Si K es un subconjunto compacto de A entonces la familia de discos abiertos $\{D(z_n, \frac{r_n}{2})\}$ forma una cubierta abierta de K , por lo tanto, K es una cubierta finita de discos abiertos. \square

Lema 2.4.2. *Supongamos que A es un conjunto abierto en \mathbb{C} y K un subconjunto compacto de A . Entonces existe un $r > 0$ tal que para cada $z \in K$, el disco $D(z, r)$ está contenido en A .*

Demostración. Si $A = \mathbb{C}$, el lema se cumple para cualquier $r > 0$. Supongamos que $A \neq \mathbb{C}$, para cada $r > 0$ existe $z \in K$ tal que $D(z, r) \subset A$.

Si $r = 1$, existe $z_1 \in K$, $D(z_1, 1) \not\subseteq A$, entonces $w_1 \in D(z_1, 1)$ tal que $w_1 \notin A$.

Si $r = \frac{1}{2}$, existe $z_2 \in K$, $D(z_2, \frac{1}{2}) \not\subseteq A$, entonces $w_2 \in D(z_2, \frac{1}{2})$ tal que $w_2 \notin A$.

Si $r = \frac{1}{3}$, existe $z_3 \in K$, $D(z_3, \frac{1}{3}) \not\subseteq A$, entonces $w_3 \in D(z_3, \frac{1}{3})$ tal que $w_3 \notin A$.

Continuando de este modo...

Si $r = \frac{1}{n}$, existe $z_n \in K$, $D(z_n, \frac{1}{n}) \not\subseteq A$, entonces $w_n \in D(z_n, \frac{1}{n})$ tal que $w_n \notin A$.

Observemos que $w_n \in \mathbb{C} \setminus A$, $|z_n - w_n| < \frac{1}{n}$. Como K es un conjunto compacto, la sucesión $\{z_n\}$ tiene un punto de acumulación en K . Sea z_0 el punto de acumulación antes mencionado, y sea $\{z_{n_k}\}$ una subsucesión de $\{z_n\}$ que cumple $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} = z_0$. Entonces $|w_{n_k} - z_0| \leq |w_{n_k} - z_{n_k}| + |z_{n_k} - z_0| \leq \frac{1}{n_k} + |z_{n_k} - z_0| \rightarrow 0$, siempre que $k \rightarrow \infty$, así $\lim_{k \rightarrow \infty} w_{n_k} = z_0$. Por lo tanto z_0 es un punto de acumulación de $\{w_n\}$. Observemos que

$\{w_n\}$ es una sucesión en $\mathbb{C} \setminus A$ el cual es un conjunto cerrado, entonces $z_0 \in \mathbb{C} \setminus A$. Por tanto, $z_0 \in K \cap (\mathbb{C} \setminus A)$, pero esto es una contradicción ya que K es un subconjunto de $A = \mathbb{C} \setminus (\mathbb{C} \setminus A)$. \square

Definición 2.4.2. Una familia \mathcal{F} de funciones continuas sobre un conjunto abierto A es **puntualmente acotada** si para todo $z \in A$ el conjunto $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ está acotado.

Definición 2.4.3. Una familia \mathcal{F} de funciones continuas sobre un conjunto abierto A es **puntualmente equicontinua** si para todo $z_0 \in A$ y todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, de tal forma que si $|z - z_0| < \delta$, $z \in A$, entonces $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ para todo $f \in \mathcal{F}$.

Proposición 2.4.3. *Las familias normales de funciones continuas sobre conjuntos abierto A en \mathbb{C} están puntualmente acotadas.*

Proposición 2.4.4. *Las familias normales de funciones continuas sobre conjuntos abierto A en \mathbb{C} son puntualmente equicontinuas.*

Demostración. Consideremos una familia de funciones continuas \mathcal{F} en un abierto A de \mathbb{C} . Sean $z_0 \in A$ y $\epsilon > 0$, existe $\rho > 0$ de tal forma que $K = \overline{B(z_0, \rho)}$. Consideremos la familia $\{U(f, K, \frac{\epsilon}{3}) : f \in \overline{\mathcal{F}}\}$, donde $U(f, K, r) = \{g \in C(A, \mathbb{C}) : p_k(g - f) < r\}$ con $p_k(f) = \max\{|f(z)| : z \in K\}$ es una cubierta de $\overline{\mathcal{F}}$, entonces podemos encontrar una subcubierta abierta finita que lo contenga, en otras palabras existen $f_1, f_2, \dots, f_n \in \overline{\mathcal{F}}$ tales que $\overline{\mathcal{F}} \subset \bigcup_{m=1}^n U(f_m, K, \frac{\epsilon}{3})$. Observemos que para cada $0 \leq k \leq n$, f_k es continua, entonces existen $0 \leq \delta_k \leq \rho$, tal que si $|z - z_0| < \delta_k$ entonces $|f_k(z) - f_k(z_0)| < \frac{\epsilon}{3}$. Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ y $f \in \mathcal{F}$, si $|z - z_0| < \delta$ y k de tal forma que $f \in U(f_k, K, \frac{\epsilon}{3})$ entonces $|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_k(z)| + |f_k(z) - f_k(z_0)| + |f_k(z_0) - f(z_0)| < \epsilon$. Concluimos que \mathcal{F} es puntualmente equicontinua en z_0 . \square

Lema 2.4.5. *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ abierto. Si la familia $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es puntualmente equicontinua y que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente en cada punto de un subconjunto $E \subset A$ denso en A , entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente sobre compactos de A .*

Demostración. Consideremos a $K \subset A$ conjunto compacto. Veremos que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente de Cauchy en K .

Sea $\epsilon > 0$, para cada $z \in A$ existe $\delta(z) > 0$ tal que, si $w \in A$ y $|w - z| < \delta$, entonces $|f_n(z) - f_n(w)| < \frac{\epsilon}{5}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto está garantizado por la equicontinuidad puntual.

Consideremos $\{B(z, \delta(z)) : z \in K\}$ cubierta abierta de K , dado que K es compacto, existen $z_1, z_2, \dots, z_m \in K$ tal que $K \subset \bigcup_{j=1}^m B(z_j, \delta(z_j))$, dado que E es un conjunto denso, existe $a_j \in B(z_j, \delta(z_j))$ para todo $j = 1, 2, \dots, m$.

Dado que hay convergencia puntual en los puntos de E , entonces la sucesión $\{f_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, para todo $j = 1, 2, \dots, m$ existe $n_j \in \mathbb{N}$ con $p, q \geq n_j$, entonces $|f_p(a_j) - f_q(a_j)| < \frac{\epsilon}{5}$.

Consideremos $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_m\}$, $p, q \geq n_0$ y $z \in K$. Existe $j \in \{1, \dots, m\}$, tal que $z \in B(z_j, \delta(z_j))$.

Finalmente, con lo anterior tenemos:

$$\begin{aligned} |f_p(z) - f_q(z)| &\leq |f_p(z) - f_p(z_j)| + |f_p(z_j) - f_p(a_j)| + \\ &|f_p(a_j) - f_q(a_j)| + |f_q(a_j) - f_q(z_j)| + |f_q(z_j) - f_q(z)| < \epsilon, \end{aligned}$$

por lo tanto $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente de Cauchy en K . □

Lema 2.4.6. *Sea \mathcal{F} una familia de funciones continuas y acotadas puntualmente en A . Sean $U \subset A$ y $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$, entonces existe $\{f_{\varphi(n)}\}$ subsucesión convergente en cada punto de U .*

La prueba de este lema puede consultarse en [9].

Montel estableció las condiciones necesarias y suficientes para que una familia de funciones analíticas sea una familia normal. El Teorema de Arzelà-Ascoli [25] es muy útil en el área de análisis, este resultado proporciona una relación entre los conceptos de equicontinuidad y normalidad, esta aportación es de los matemáticos Cesare Arzelà y Guido Ascoli.

Teorema 2.4.7. Arzelà-Ascoli

Una familia \mathcal{F} de funciones continuas sobre un abierto A de \mathbb{C} es normal si, y sólo si está puntualmente acotada y es puntualmente equicontinua en A .

Este teorema también se enuncia como sigue:

Teorema 2.4.8. *Una familia de funciones $\mathcal{F} \subset C(A, \Omega)$ es normal si, y sólo si las siguientes condiciones se satisfacen:*

- 1) *Para cada $z \in A$, $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ tiene clausura compacta en Ω .*
- 2) *\mathcal{F} es equicontinua en cada punto de A .*

Demostración. Sea \mathcal{F} una familia normal, por la Proposición 2.4.3 y la Proposición 2.4.4 entonces para cada $z \in A$, $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ está puntualmente acotado y además \mathcal{F} es equicontinua en cada punto de A .

Consideremos un conjunto denso y numerable E y una sucesión $\{f_n\}$ de elementos de \mathcal{F} , por Lema 2.4.6 existe una subsucesión $\{f_{\varphi(n)}\}$ convergente en cada punto de E . Como la equicontinuidad se hereda a subfamilias y por el Lema 2.4.5, entonces $\{f_{\varphi(n)}\}$ converge uniformemente sobre compactos de A . Luego, por la Proposición 2.1.1, tenemos que $\{f_{\varphi(n)}\}$ converge a una función f de $C(A, \Omega)$. \square

2.5. Espacio de Funciones Holomorfas $H(A)$

Sea $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. $H(A)$ denota al conjunto de funciones holomorfas de A . Observe que $H(A) \subset C(A, \mathbb{C})$ es cerrado.

Definición 2.5.1. Una familia $\mathcal{F} \subset H(A)$ es **localmente acotada** si para todo $a \in A$, existen $M > 0, r > 0$ tal que para todo $f \in \mathcal{F}$ se tiene $|f(z)| \leq M$, para $|z - a| < r$.

Teorema 2.5.1. *Rouché*

Sea A un conjunto abierto y acotado en \mathbb{C} , y sean $\psi, \varphi \in H(A)$ continuas en \bar{A} . Supongamos que se verifica: $|\psi(z)| > |\varphi(z)|$ entonces $\psi(z) + \varphi(z)$ posee tantos ceros como la función $\psi(z)$.

La prueba del teorema puede consultarse en [22].

Teorema 2.5.2. *Hurwitz*

Sean $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto acotado y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en A y continuas en \bar{A} . Si $f_n \rightarrow f$ uniformemente y f no se anula en ningún punto de

∂A , es decir, $f(z) \neq 0$, para todo $z \in \partial A$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq n$, f_m y f tienen el mismo número de ceros en A .

Demostración. Observemos que existe $\epsilon > 0$ tal que $|f(z)| \geq \epsilon$, para todo $z \in \partial A$, pues ∂A es compacto y $f(z) \neq 0$ para todo punto de ∂A .

Por la convergencia uniforme, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq n$ entonces $|f_m(z) - f(z)| < \epsilon$, para todo $z \in \partial A$. Por lo tanto, para toda $m \geq n$, $f, f_m \in C(\bar{A}, \mathbb{C}) \cap H(A)$ y $z \in \partial A$ se satisface:

$$|f_m(z) - f(z)| < \epsilon \leq |f(z)| \leq |f_m(z)| + |f(z)|.$$

Por el teorema de Rouché ambas funciones tienen el mismo número de ceros en A . La desigualdad anterior garantiza que las funciones no se anulan en la frontera, por lo tanto el resultado es válido en \bar{A} . \square

Corolario 2.5.3. Sean A un dominio de \mathbb{C} y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $H(A)$ y supongamos que $f_n \rightarrow f$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de A . Si f_n , $n = 0, 1, \dots$ no se anula, entonces f es idénticamente cero o f nunca se anula en ningún punto de A .

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en A que converge de manera uniforme sobre subconjuntos compactos de A , entonces la función límite de f es holomorfa. Supongamos que f no es idénticamente cero en A y que existe $a \in A$, tal que $f(a) = 0$. Se tiene que los ceros de $f(z)$ son aislados por lo tanto existe $r > 0$ tal que

$$\overline{B(a, r)} \subset A : 0 < |z - a| \leq r \quad f \neq 0$$

aplicando el teorema de Hurwitz, para n suficientemente grande, concluimos que f_n y f tienen el mismo número de ceros, lo cual es una contradicción. \square

Corolario 2.5.4. Sean A un dominio de \mathbb{C} y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones inyectivas en $H(A)$ y supongamos que $f_n \rightarrow f$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de A , entonces f es inyectiva o constante en A .

Demostración. Supongamos que f no es constante. Sea $a \in A$ un punto fijo. Definamos las funciones

$$g, g_n : A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C};$$

$$g(z) = f(z) - f(a);$$

$$g_n(z) = f_n(z) - f_n(a).$$

La sucesión $\{g_n\}$ converge a g en $H(A \setminus \{a\})$, porque la sucesión no se anula en ningún punto de $A \setminus \{a\}$, luego por el teorema de Hurwitz, g es idénticamente nula, pero esto no puede suceder porque f no es constante, o g no se anula en ningún punto de $A \setminus \{a\}$, por lo tanto f es inyectiva. \square

La segunda parte del teorema de Arzelà-Ascoli, se da porque Montel en su artículo de 1907 observó que si una familia de funciones analíticas es localmente acotada esto implicaba la equicontinuidad.

Teorema 2.5.5. Teorema de Montel

Una familia \mathcal{F} de funciones holomorfas sobre un abierto A de \mathbb{C} es normal si, y sólo si \mathcal{F} está uniformemente acotada en cada compacto de A .

Demostración. \Rightarrow] (Por contradicción)

Sea \mathcal{F} normal y no acotada localmente, entonces existe $K \subset A$ conjunto compacto tal que $\sup\{|f(z)| : z \in K, f \in \mathcal{F}\} = \infty$, por lo tanto, existe una sucesión $\{f_n\}$ en \mathcal{F} tal que $\sup\{|f_n(z)| : z \in K\} \geq n$. Dado que \mathcal{F} es normal, existe una función f en $H(A)$ y una subsucesión $\{f_{n_k}(z)\}$ tal que $f_{n_k} \rightarrow f$. Entonces $\sup\{|f_{n_k}(z) - f(z)| : z \in K\} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Si $|f(z)| \leq M$ para $z \in K$,

$$n_k \leq \sup\{|f_{n_k}(z) - f(z)| : z \in K\} + M.$$

Como el lado derecho converge a M , entonces se tiene una contradicción.

\Leftarrow] Sea \mathcal{F} localmente acotada, entonces se satisface la primera parte del teorema de Arzelà-Ascoli, de este modo resta mostrar que \mathcal{F} es equicontinua en cada punto de A . Sean $a \in A$ y $\epsilon > 0$, entonces por hipótesis existe $r > 0$ y un $M < \infty$ tales que $\overline{B(a, r)} \subset A$ y

$|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \overline{B(a, r)}$ y toda f en \mathcal{F} . Consideremos $|z - a| < \frac{1}{2}r$ y $f \in \mathcal{F}$, entonces usando la Fórmula Integral de Cauchy con $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$$|f(a) - f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(w)(a - z)}{(w - a)(w - z)} dw \right| \leq \frac{4M}{r} |a - z|$$

tomando $\delta < \min\{\frac{1}{2}r, \frac{r}{4M}\epsilon\}$ entonces $|z - a| < \delta$ implica $|f(a) - f(z)| < \epsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$. \square

2.6. Espacio de funciones Meromorfas $M(D)$

Si A una región y f una función meromorfa en A y $f(z) = \infty$ cuando z es un polo de A , entonces $f : A \rightarrow \mathbb{C}_{\infty}$ es una función continua. Denotaremos por $M(A)$ al conjunto de todas las funciones meromorfas de A . Observe que $M(A)$ no es un espacio métrico completo, pues si $f_n = n$, entonces $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $M(A)$, pero $\{f_n\}$ converge a la función que es igual a ∞ , y esta no es meromorfa en el espacio $C(A, \mathbb{C}_{\infty})$.

Teorema 2.6.1. *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $M(A)$ y $f_n \rightarrow f$ en $C(A, \mathbb{C}_{\infty})$, entonces f es una función meromorfa o $f \equiv \infty$. Si cada f_n es analítica entonces f es analítica o $f \equiv \infty$.*

Demostración. Para la prueba de este teorema, se hace uso del teorema de Hurwitz, los detalles se pueden consultar en [9]. \square

Definición 2.6.1. Una familia de funciones $\mathcal{F} \subset M(D)$ con $D \subset \mathbb{C}_{\infty}$ es **normal en D** , si cada sucesión de funciones en \mathcal{F} tiene una subsucesión que converge uniformemente en D .

Definición 2.6.2. La familia \mathcal{F} es **normal** en un punto $z \in D$ si existe al menos una vecindad \mathcal{V} de z_0 , tal que \mathcal{F} es normal en \mathcal{V} .

Teorema 2.6.2. Teorema de Marty [25]

Una familia $\mathcal{F} \subset M(A)$ es normal en $C(A, \mathbb{C}_{\infty})$ sí, y sólo si $\rho(\mathcal{F})$ es localmente acotado, donde

$$\rho(\mathcal{F}) = \left\{ \rho(f) = \frac{2|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} : f \in \mathcal{F} \right\}.$$

Demostración. Sea $\rho(\mathcal{F})$ localmente acotada. aplicando el teorema de Arzelà-Ascoli.

Teniendo en cuenta que \mathbb{C}_∞ es compacto, sera suficiente mostrar que \mathcal{F} es equicontinua para cada punto de A . Consideremos un disco cerrado arbitrario D en A , y una constante C que satisface $\rho(f)(z) \leq C$, para cada $z \in D$ y toda $f \in \mathcal{F}$. Sean $z_1, z_2 \in D$ de tal modo que no son polos de f y tomemos $\alpha > 0$ arbitrario.

Sean $w_1 = z_1, w_2, \dots, w_n = z_2$ en D de tal modo que satisfagan:

- i) Si $w \in [w_{k-1}, w_k] = \{tw_k + (1-t)w_{k-1} : 0 \leq t \leq 1\}$, entonces w no es un polo de f .
- ii) $\sum_{k=1}^n |\Delta| \leq 2|z - z'|$, donde $\Delta = w_k - w_{k-1}$.
- iii) $\frac{[1 + |f(w_k)|^2]}{[(1 + |f(w_k)|^2)(1 + |f(w_{k-1})|^2)]^{\frac{1}{2}}} - 1 < \alpha, \quad 1 \leq k \leq n.$
- iv) $|\Gamma - f'(w_{k-1})| < \alpha, \quad 1 \leq k \leq n$, donde $\Gamma = \frac{f(w_k) - f(w_{k-1})}{\Delta}$.

Se puede ver que tales puntos pueden encontrarse, al trazar una poligonal P en D que satisfaga *i)* y *ii)*. P puede ser cubierta con discos pequeños de tal manera que se satisfagan las condiciones *iii)* y *iv)*, tomando una subcubierta finita y puntos w_0, w_1, \dots, w_n sobre P , tal que cada segmento $[w_{k-1}, w_k]$ está en uno de estos discos. Luego, $\{w_0, w_1, \dots, w_n\}$ satisfacen las cuatro condiciones.

Si $\beta_k = [(1 + |f(w_k)|^2)(1 + |f(w_{k-1})|^2)]^{\frac{1}{2}}$, entonces

$$\begin{aligned} d(f(z_1), f(z_2)) &\leq \sum_{k=1}^n d(f(w_{k-1}), f(w_k)) = \sum_{k=1}^n \frac{2}{\beta_k} |f(w_k) - f(w_{k-1})| \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{\beta_k} |\Gamma \cdot \Delta - f'(w_{k-1}) \cdot \Delta + f'(w_{k-1}) \cdot \Delta| \leq \sum_{k=1}^n \frac{2}{\beta_k} |\Gamma - f'(w_{k-1})| |\Delta| + \sum_{k=1}^n \frac{2}{\beta_k} |f'(w_{k-1})| |\Delta|. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $2|f'(w_{k-1})| \leq C(1 + |f(w_k)|^2)$ y por la condiciones de los puntos w_0, w_1, \dots, w_n se tiene que:

$$\begin{aligned} d(f(z_1), f(z_2)) &\leq 2\alpha \sum_{k=1}^n \frac{1}{\beta_k} |\Delta| + C \sum_{k=1}^n \left(\frac{(1 + |f(w_k)|^2)}{\beta_k} \right) |\Delta| \leq 2\alpha \sum_{k=1}^n \frac{1}{\beta_k} |\Delta| + C \sum_{k=1}^n (1 + \alpha) |\Delta| \\ &= 2\alpha \sum_{k=1}^n \frac{1}{\beta_k} |\Delta| + \alpha C \sum_{k=1}^n |\Delta| + C \sum_{k=1}^n |\Delta| \leq 2\alpha \sum_{k=1}^n \frac{1}{\beta_k} |\Delta| + 2\alpha C |z - z'| + 2C |z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

Hay que observar que $\beta_k \geq 1$, $d(f(z_1), f(z_2)) \leq (4\alpha + 2\alpha C + 2C)|z_1 - z_2|$ y dado que $\alpha > 0$ es arbitrario, se concluye que los puntos z_1 y z_2 no son polos de f , de este modo, se tiene que:

$$d(f(z_1), f(z_2)) \leq 2C|z_1 - z_2|. \quad (2.1)$$

Por otra parte, si se supone que z_2 es un polo de f y z_1 no es un polo de f , además si w está en D y no es un polo de f , entonces por la desigualdad anterior se tiene la siguiente:

$$d(f(z), \infty) = d(f(z), f(w)) + d(f(w), \infty) \leq 2C|z - w| + d(f(w), \infty).$$

Sea w que se aproxima a z_2 sin que w sea un polo de f (los polos son aislados), esto dice que $f(w) \rightarrow f(z_2) = \infty$ y $|z_1 - w| \rightarrow |z_1 - z_2|$. Así la ecuación 2.1 se satisface si z_1 o z_2 es un polo. De manera similar, la ecuación 2.1 se satisface para todo z y z' en D .

Si consideramos $D = B(a, r)$ y $\epsilon > 0$, entonces para $\delta < \min\{r, \frac{\epsilon}{2C}\}$ se tiene que, si $|z_1 - a| < \delta$, entonces $d(f(z_1), f(a)) < \epsilon$, además δ es independiente de f en \mathcal{F} , esto debido a que \mathcal{F} es equicontinua en A .

Por otro lado, iniciemos notando que $\rho(f) = \rho(\frac{1}{f})$, asumamos además que la familia de funciones meromorfas \mathcal{F} es normal y que $\rho(f)$ no es localmente acotada en un conjunto compacto K . Sean $f_n \in \mathcal{F}$ una sucesión de funciones tal que el máximo de $\rho(f_n)$ tiende a ∞ en K , y f la función límite de la subsucesión convergente $\{f_{n_k}\}$. Para cada punto de K podemos encontrar un disco cerrado y suficientemente pequeño contenido en A en que alguna de las funciones f o $\frac{1}{f}$ es holomorfa.

Supongamos que f es holomorfa, en consecuencia está acotada en el disco cerrado, luego $\{f_{n_k}\}$ no tiene polos en el disco cerrado cuando k es suficientemente grande, haciendo uso del Teorema 2.6.1 se sigue que $\rho(f_{n_k}) \rightarrow \rho(f)$ uniformemente en un disco suficientemente pequeño.

En el otro caso, si $\frac{1}{f}$ es holomorfa, se puede aplicar la misma prueba para $\rho(\frac{1}{f_{n_k}})$, pero $\rho(\frac{1}{f_{n_k}}) = \rho(f_{n_k})$, por lo tanto, dado que K es compacto, se puede formar una cubierta abierta finita de discos pequeños y con esto ver que cada $\rho(f_{n_k})$ es acotado en K , lo cual es una contradicción. \square

Teorema 2.6.3. Teorema de Montel (funciones meromorfas) [25]

Sea \mathcal{F} una familia de funciones meromorfas definidas en un dominio $A \subset \mathbb{C}_\infty$, $a, b, c \in \mathbb{C}_\infty$ distintos a pares. Si $f \neq a, b, c$ para toda $z \in A$ y para toda $f \in \mathcal{F}$, entonces \mathcal{F} es normal en A .

2.7. Teoremas de Picard y otros resultados

Los resultados de esta sección se pueden consultar en [6], [25] y [27].

2.7.1. Teoremas de Picard

Teorema 2.7.1. Teorema de Montel-Caratheodory

Sea \mathcal{F} una familia de funciones analíticas sobre una región A que no toma los valores 0 y 1 entonces, \mathcal{F} es normal en $C(A, \mathbb{C}_\infty)$.

Para la prueba de este teorema se usan varios resultados que pueden ser consultados en [6] al igual que la prueba.

Definición 2.7.1. Sean $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y $z_0 \in A$, si $f(z) \neq z_0$ para todo $z \in A$ llamamos a z_0 **valor omitido** o **valor excepcional de Picard**.

Definición 2.7.2. El conjunto de valores excepcionales de Picard se denota por $\mathcal{PV}(f)$.

Definición 2.7.3. Sea \mathcal{A} el conjunto de todas las funciones analíticas en una región G que contiene la clausura del disco $D = \{z : |z| < 1\}$ que satisface $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Para cada $f \in \mathcal{A}$, sea $\beta(f)$ el supremo de todos los r tal que existe un disco S en D en el cual f es uno a uno y $f(S)$ contiene un disco de radio r . La **constante de Blöch** es el número B definido por $B = \inf\{\beta(f) : f \in \mathcal{A}\}$

Definición 2.7.4. Sea \mathcal{A} como en la definición anterior. Para cada $f \in \mathcal{A}$ se tiene $\lambda(f) = \sup\{r : f(D)$ contiene un disco de radio $r\}$. La **constante de Landau** L es el conjunto $L = \inf\{\lambda(f) : f \in \mathcal{A}\}$

Proposición 2.7.2. Si f es analítica en una región que contiene a la clausura del disco $D = \{a : |z| < 1\}$ y $f(0) = 0, f'(0) = 1$ entonces $f(D)$ contiene un disco de radio L .

Corolario 2.7.3. *Sea f una función analítica en una región que contiene a $\overline{B(0, R)}$, entonces $f(B(0, R))$ contiene un disco de radio $R|f'(0)|L$.*

Lema 2.7.4. *Sean G una región simplemente conexa y f una función analítica en G que no toma los valores 0 y 1, entonces existe una función analítica g tal que $f(z) = -\exp\{i\pi \cosh[2g(z)]\}$ para $z \in G$.*

Lema 2.7.5. *Consideremos G, f y g como en el lema anterior, entonces $g(G)$ contiene un disco de radio 1.*

Las pruebas de la proposición, el corolario y el par de lemas anteriores pueden ser consultadas en [6].

Teorema 2.7.6. Pequeño de Picard [9]

Si f es una función entera que omite dos valores, entonces f es constante.

Demostración. Sean $f(z) \neq a$ y $f(z) \neq b$ para todo z entonces $(f - a)(b - a)^{-1}$ omite los valores 0 y 1. Supongamos que $f(z) \neq 0$ y $f(z) \neq 1$ para todo z . De acuerdo con el lema 2.7.5, existe una función g tal que $g(\mathbb{C})$ no contiene un disco de radio 1. Si f no es una función constante, entonces g no es constante, por lo tanto existe z_0 de tal forma que $g'(z_0) \neq 0$. Supongamos que $g'(0) \neq 0$, teniendo en cuenta $g(z + z_0)$ siempre que sea necesario. Entonces a causa del corolario 2.7.3 se tiene que $g(B(0, R))$ contiene un disco de radio $RL|f'(0)|$, tomando a R suficientemente grande, entonces $G(\mathbb{C})$ contiene un disco de radio 1, sin embargo esto es una contradicción. Concluimos así que f es constante. \square

Este teorema puede enunciarse de otra manera, la cual nos proporciona un resultado parecido pero para funciones meromorfas, ambos resultados se describen a continuación:

Teorema 2.7.7. *Toda función entera $f(z) \neq c$, donde c es constante, toma cualquier valor complejo finito, a excepción, posiblemente, de un valor.*

Teorema 2.7.8. *Toda función meromorfa $f(z) \neq c$, donde c es constante, toma cualquier valor complejo, a excepción, posiblemente, de dos valores.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, sean f una función meromorfa que omite mas de dos valores y $a, b, c \in \mathbb{C}_\infty$ tales valores. Notemos que si alguno de los valores

omitidos toma el valor ∞ , digamos $c = \infty$ entonces $f(z)$ no constante es una función entera que no toma dos valores finitos a y b lo cual no es posible. De este modo, los valores a, b, c son finitos.

Consideremos la función

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - c}$$

la cual es meromorfa y no toma el valor ∞ , esto implica que es una función entera, además no es constante. Por otro lado, $\varphi(z)$ no toma dos valores finitos $\frac{1}{a-c}$ y $\frac{1}{b-c}$. De este modo se obtiene una vez más una contradicción al teorema pequeño de Picard. \square

Teorema 2.7.9. Grande de Picard

Toda función analítica f toma en un entorno arbitrario de un punto singular esencial z_0 cualquier valor finito, a excepción posiblemente, de uno.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, tomemos $z_0 = 0$. Supongamos que f tiene dos valores excepcionales finitos, a y b , en un entorno de $|z| < R$ del punto $z_0 = 0$.

Ahora, construyamos los anillos

$$\Gamma_0 \left(\frac{R}{2} < |z| < R \right), \Gamma_1 \left(\frac{R}{2^2} < |z| < \frac{R}{2} \right), \dots, \Gamma_n \left(\frac{R}{2^{n+1}} < |z| < \frac{R}{2^n} \right), \dots$$

con centro en z_0 y la sucesión de funciones:

$$f_1(z) = f(z/2), \dots, f_n(z) = f(z/2^n)$$

La función f_n toma en Γ_0 los mismos valores que la función f en el anillo Γ_n , por ende $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones uniformes y analíticas en el anillo Γ_0 , que no toma los valores a y b , de ahí que se trata de una familia normal. Consideremos ahora, la subsucesión f_{n_k} uniformemente convergente en Γ_0 , y sea F la función límite que satisface $F \neq \infty$, entonces $|F|$ se encuentra acotado por $|z| = \rho$, donde $r/2 < \rho < R$, por lo tanto las funciones $\{f_{n_k}\}$ están uniformemente acotadas en tal circunferencia. De esta forma, tenemos que f satisface las siguientes condiciones $|f(z)| < M$, $|z| = \frac{\rho}{2^{n_k}}$, $k = 1, 2, \dots$, y por el principio del módulo máximo se sigue que $|f(z)| < M$, $0 < |z| < \rho$ sin, embargo esto es una contradicción, ya que $z = 0$ es un punto singular esencial de f . Si $F = \infty$ la

sucesión de funciones analíticas

$$\varphi_{n_k}(z) = \frac{1}{f_{n_k}(z) - a}$$

converge uniformemente a cero en Γ_0 . De manera similar podemos ver que la función $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)-a}$ está acotada en $0 < |z| \leq \rho$, por esta razón deducimos que $z = 0$ es regular para $\varphi(z)$, de este modo concluimos que no puede ser un punto singular esencial de f , pero esto contradice la hipótesis del teorema. \square

2.7.2. Otros resultados

Los siguientes son resultados importantes y útiles para las pruebas de las propiedades de los conjuntos de Fatou y Julia y se pueden consultar en [9].

Lema 2.7.10. *Rosenbloom*

Si g es una función entera, tal que $g \neq id_{\mathbb{C}}$ y

$$\frac{g^2 - id_{\mathbb{C}}}{g - id_{\mathbb{C}}}$$

es constante, entonces g es un polinomio de grado menor o igual a 1.

Demostración. Sean g una función entera no constante y $w \in \mathbb{C}$ de tal forma que:

$$g^2 - id_{\mathbb{C}} = w(g - id_{\mathbb{C}}). \quad (2.2)$$

Si tomamos $w = 0$, entonces $g^2 = id_{\mathbb{C}}$, de ahí concluimos que g es inyectiva, por lo tanto g es un polinomio de grado menor o igual a 1.

Si $w = 1$, entonces $g^2 = g$, esto implica que g es constante o bien, que $g = id_{\mathbb{C}}$.

Supongamos que $w \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, diferenciando la ecuación 2.2 se obtiene:

$$g' \circ g \cdot g' - 1 = w(g' - 1) \quad \Rightarrow \quad g'(g' \circ g - w) = 1 - w.$$

Debido a que $w \neq 1$, se sigue que g' omite a cero y $g' \circ g$ omite $w \neq 0$. Como g no

es una función constante, el teorema de Picard nos garantiza que g' es constante. Así, se concluye que g es un polinomio de grado 1. \square

El teorema siguiente es una aplicación del teorema de Montel-Caratheodory.

Teorema 2.7.11. Bohr

Sean $\beta := \{f : f \in H(B(0,1)), f(0) = 0 \text{ y } M(1/2, f) \geq 1\}$ donde $M(r, f)$ es el supremo del conjunto $\{|f(z)| : z \in \partial B(0, r), \text{ donde } f \text{ es una función entera y } r \geq 0\}$ y $c(f) := \sup\{r > 0 : \partial B(0, r) \subset f(B(0, 1))\}$, para cada $f \in \beta$. Entonces $\inf\{c(f) : f \in \beta\} > 0$

Lema 2.7.12. Bargmann

Sea g una función entera, $z = 0$ un punto fijo atractor de g y $g^n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, local uniformemente en \mathbb{C} , entonces $g(z) = g'(0)z$, para cada $z \in \mathbb{C}$.

Demostración. Supongamos que g no es una función constante. Como $|g'(0)| < 1$ existe un disco abierto $K \subset \mathbb{C}$ con centro 0, tal que $g(K) \subset K$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $K_n := g^{-n}(K)$ y $r_n := \sup\{r > 0 : \partial B(0, r) \subset K_n\}$. Dado que $K_n \subset K_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \mathbb{C}$, por lo tanto $\{r_n\}$ es creciente y $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$.

Después, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in B(0, r_n)$ existe $s \in (|x|, r_n)$, tal que $\partial B(0, s) \subset K_n$. De lo anterior se sigue que, $f^n(\partial B(0, s)) \subset K$ y por el teorema del Módulo Máximo, se tiene que $f^n(x) \in K$, por lo tanto $x \in K_n$. En síntesis, para cada $n \in \mathbb{N}$ $r_n = \max\{s > 0 : B(0, s) \subset K_n\}$.

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $s_n := \frac{r_n}{2}$, definimos la función:

$$h_n : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \rightarrow M(g, 0, s_n)^{-1}g(2s_n z).$$

Por el teorema de Bohr, existe $c > 0$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n \geq c$ que satisface $\partial B(0, t_n) \subset h_n(B(0, 1))$, de este modo se tiene:

$$\partial B(0, t_n M(g, 0, s_n)) \subset g(B(0, r_n)) \subset g(K_n) \subset K_{n-1} \subset K_n.$$

Por la definición de r_n , se tiene:

$$cM(g, 0, s_n) \leq t_n M(g, 0, s_n) \leq r_n = 2s_n.$$

Por lo tanto $\{M(g, 0, s_n)s_n^{-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada. Por lo que la función meromorfa $\varphi := \frac{(g-g'(0)id_{\mathbb{C}})}{id_{\mathbb{C}}}$ cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} M(\varphi, 0, s_n) = 0$, debido a que 0 es una singularidad removible de φ , finalmente por el Principio del Módulo Máximo y el Teorema de Liouville se concluye que $\varphi = 0$. □

Capítulo 3

Clases de Funciones Meromorfas

3.1. Funciones Trascendentes Enteras

Una función f definida y holomorfa en \mathbb{C} , es llamada **función entera**. Las funciones enteras que no son polinomios son **funciones trascendentes enteras**.

Al conjunto de funciones trascendentes enteras las denotaremos por:

$$\mathcal{E} = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es trascendente entera}\}.$$

Algunos ejemplos son los siguientes:

- 1) $f(z) = \lambda \cos z$.
- 2) $f(z) = \lambda e^z - \lambda$.

3.2. Funciones Racionales

Consideremos los siguientes polinomios complejos y coprimos, es decir, no tienen ceros comunes: $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ y $Q(z) = b_0 + b_1z + \dots + b_mz^m$ donde $a_n, b_m \neq 0$.

Definición 3.2.1. Las **funciones racionales** son de la forma $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$.

Denotemos por $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ a las raíces de la ecuación $P(z) = 0$ y k_1, \dots, k_p los órdenes de multiplicidad, de manera similar, denotaremos por β_1, \dots, β_q las raíces de $Q(z) = 0$ y l_1, \dots, l_q sus órdenes de multiplicidad.

En virtud de lo anterior, reescribimos la función de la siguiente manera:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n(z - \alpha_1)^{k_1} \cdots (z - \alpha_p)^{k_p}}{b_m(z - \beta_1)^{l_1} \cdots (z - \beta_q)^{l_q}}.$$

Notemos que los α 's son ceros y los β 's polos de la función racional f . De esta manera se puede ver que los ceros de la función $f(z)$ son polos de la función $\frac{1}{f(z)}$, mientras que los polos de $f(z)$ son ceros de $\frac{1}{f(z)}$.

Definición 3.2.2. El **grado** de $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, donde $P(z)$ y $Q(z)$ son coprimos, es denotado por:

$$\text{grad}(f) := \max\{\text{grad}(P), \text{grad}(Q)\}.$$

Al conjunto de la clase de funciones racionales lo denotaremos por:

$$\mathcal{R} = \left\{ f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty : f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \text{ con } P(z) \text{ y } Q(z) \text{ coprimos} \right\}.$$

Algunos ejemplos son los siguientes:

$$\begin{aligned} 1) f(z) &= \frac{z^5 + z^3 - i}{z^7 + z + 3 - i}. \\ 2) f(z) &= \frac{z^4 + 2 + z + 2}{-z^3 + z + i}. \end{aligned}$$

Teorema 3.2.1. Sea $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ una función racional, si $f(\mathbb{C}_\infty) \neq \mathbb{C}_\infty$, entonces f es constante.

Demostración. Supongamos que f no es constante, además se tiene que $f(\mathbb{C}_\infty)$ es un conjunto abierto, mientras que \mathbb{C}_∞ es compacto, por lo tanto $f(\mathbb{C}_\infty)$ es compacto. De este modo, podemos decir que $\mathbb{C}_\infty \setminus \{f(\mathbb{C}_\infty)\}$ es un conjunto abierto en \mathbb{C}_∞ .

En virtud de la conexidad de \mathbb{C}_∞ se tiene que $\mathbb{C}_\infty \setminus \{f(\mathbb{C}_\infty)\}$ o $f(\mathbb{C}_\infty)$ es vacío. Como $f(\mathbb{C}_\infty) \neq \emptyset$, entonces $\mathbb{C}_\infty \setminus \{f(\mathbb{C}_\infty)\} = \emptyset$ por lo tanto $\mathbb{C}_\infty = \{f(\mathbb{C}_\infty)\}$, que es una contradicción. \square

Teorema 3.2.2. Si las funciones racionales $\{f_n\}$ convergen uniformemente a f en \mathbb{C}_∞ entonces f es racional para todo n suficientemente grande y $\text{grad}(f_n) = \text{grad}(f)$.

3.3. Funciones Trascendentes Meromorfas

Las **funciones trascendentes meromorfas** son funciones meromorfas en \mathbb{C} que tienen por lo menos un polo que no es valor omitido y ∞ es una singularidad esencial aislada.

El conjunto de funciones trascendentes meromorfas es denotado por:

$\mathcal{M} = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\infty \mid f \text{ es trascendente meromorfa con al menos un polo } p \text{ que no es un valor omitido}\}$.

Nota. La función f no es constante y un valor omitido de la función f meromorfa es el número complejo z_0 tal que $f(z) \neq z_0$. Para esta clase de funciones la única singularidad esencial aislada es ∞ .

Algunos ejemplos son los siguientes:

1) $f(z) = \lambda \tan z$.

2) $f(z) = \lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z}$.

La iteración de funciones de la clase \mathcal{M} no es cerrada.

En efecto, consideremos la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ con regla de correspondencia $z \mapsto \lambda \tan z$, observemos que la segunda iterada es:

$$f(f(z)) = f(\lambda \tan z) = \lambda \tan(\lambda \tan z) = \lambda \left(\frac{\sin\left(\lambda \frac{\sin z}{\cos z}\right)}{\cos\left(\lambda \frac{\sin z}{\cos z}\right)} \right),$$

definida en $\mathbb{C}_\infty \setminus \{z : \cos z = 0\}$, es decir, esta definida en un conjunto contable de singularidades esenciales. En atención a lo anterior, se tiene que el dominio de la segunda iterada de la función f es $f(\mathbb{C}) \setminus \{z : f^{(2)}(z) = \infty\}$.

En general, sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ una función meromorfa, entonces $f^{(n)}(z)$ está definida para todo $z \in \mathbb{C}$ excepto por un conjunto numerable de polos de $f, f^{(2)}, \dots, f^{(n-1)}$.

3.4. Dinámica Compleja

Dada una función f , la composición de ésta consigo misma es llamada **iteración** de f , y se denota como: $f^0(z) = z, f^1(z) = f(z), f^2(z) = f(f(z))$, etc. A $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f \circ f, n \in \mathbb{N}$, la llamamos la n -ésima iterada de f .

Proposición 3.4.1. *Sea f una función entera. Entonces sucede uno de los siguientes casos:*

- a) f es una función constante.
- b) f tiene un polo en ∞ .
- c) f tiene un singularidad esencial aislada en ∞ .

Demostración. Observemos que de la expansión de f en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

se pueden obtener los siguientes casos:

- $a_n = 0, n \geq 1$.
- $f(z)$ es un polinomio, es decir existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 0$, para todo $n \geq N$.
- Hay infinitos n tales que $a_n \neq 0$.

Cada uno de los casos anteriores corresponden con cada inciso del teorema. □

Definición 3.4.1. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, el conjunto $\{z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$, donde $z_n = f^n(z_0)$, es llamada la **órbita hacia adelante** de z_0 bajo la función f , y se denota por $O^+(z_0, f)$. Del mismo modo, la **órbita hacia atrás** del punto z_0 bajo la función f , $O^-(z_0, f)$, es $O^-(z_0, f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(z_0)$.

La gran órbita de z_0 se denota por $O(z_0)$ y es la unión de la órbita hacia adelante con la órbita hacia atrás.

Definición 3.4.2. Dada f es una función en las clases \mathcal{E}, \mathcal{R} o \mathcal{M} , z_0 es un **punto fijo** si $f(z_0) = z_0$. Si para algún $n \neq 0$ se cumple que $f^n(z_0) = z_0$, entonces z_0 es un **punto periódico**.

Cuando n es el menor natural que satisface esta igualdad, se dice que z_0 es de periodo n .

Clasificación de puntos fijos

Sea f es una función en las clases \mathcal{E}, \mathcal{R} o \mathcal{M} y z_0 un punto fijo,

- 1) Si $|f'(z_0)| = 0$, entonces z_0 es un punto fijo **superatractor**.
- 2) Si $|f'(z_0)| < 1$, entonces z_0 es un punto fijo **atractor**.
- 3) Si $|f'(z_0)| > 1$, entonces z_0 es un punto fijo **repulsor**.
- 4) Si $|f'(z_0)| = 1$ y $f'(z_0)$ es una raíz de la unidad, entonces z_0 es un punto fijo **indiferente racional**.
- 5) Si $|f'(z_0)| = 1$ y $f'(z_0)$ no es una raíz de la unidad, entonces z_0 es un punto fijo **indiferente irracional**.

Nota. Para las funciones de las clases \mathcal{R} , \mathcal{E} y \mathcal{M} , se cumple:

- Si $f \in \mathcal{R}$, entonces $f^n \in \mathcal{R}$.
- Si $f \in \mathcal{E}$, entonces $f^n \in \mathcal{E}$.
- $f \in \mathcal{M}$ no implica $f^n \in \mathcal{M}$.

Definición 3.4.3. Un punto z en \mathbb{C} o en \mathbb{C}_∞ es llamado **punto excepcional** si la gran órbita $O(z)$ es finita.

El conjunto de puntos excepcionales de f se denota por $E(f)$ y su cardinal por $|E(f)|$.

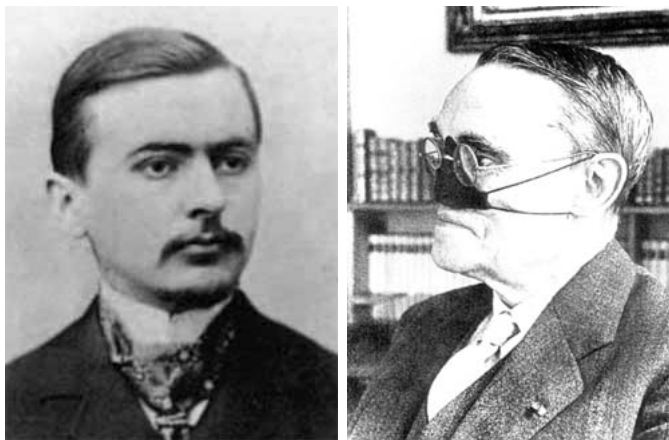
Ejemplo 3.4.4. Consideremos la función $f(z) = \lambda e^z - \lambda$, donde $\lambda \neq 0$.

Se tiene que, $f(z) = \lambda e^z - \lambda = \lambda(e^z - 1) \Rightarrow f(0) = \lambda(e^0 - 1) = 0$ por lo tanto $z_0 = 0$ es un punto fijo, entonces $E(f) = \{0\}$. por lo tanto, $z_0 = 0$ es un punto fijo de f .

Capítulo 4

Conjuntos de Fatou y Julia

4.1. Piere Fatou y Gaston Julia



Pierre Joseph Louis Fatou

Nacido el 28 de febrero de 1878 en Lorient, Francia, murió el 10 de agosto de 1929 en Pornichet, Francia.

Fatou estudió en el instituto de Lorient. Cuando tenía dieciséis años, fue enseñado en esta escuela por el filósofo Émile-Auguste Chartier (1868-1951), quien es más conocido por el seudónimo de Alain que luego adoptó. Alain escribió en el Capítulo *Lorient* en su libro *Histoire de mes pensées* (1936):

Durante esos años tuve un alumno simple y modesto, que era un genio matemático. Le enseñé de alguna manera la filosofía de estas cosas; él fácilmente

entendió todo esto y nunca hizo ninguna objeción. ... él fue el autor de una tesis que quizás fue comprendida por dos hombres en el mundo. Su nombre era Fatou.

Dejando Lorient en 1894, Fatou fue a París, donde estudió matemáticas elementales y matemáticas especiales en el Collège Stanislas durante tres años. Fue galardonado con el Primer Premio en Matemáticas en el año 1896-1897.

Fatou ingresó en la École Normale Supérieure en París en 1898 para estudiar matemáticas, habiéndose clasificado primero en el examen de ingreso. Se graduó en 1901, ocupando el segundo lugar en la agrégation (que lo habilitó para enseñar en un collège o lycée). En diciembre de 1904 se unió a la Sociedad Matemática Francesa y estaba trabajando duro en la investigación matemática para su tesis. Comenzó a publicar los resultados de su investigación matemática en 1904 con el breve artículo *Sur les séries entières à coefficients entiers* que apareció en ese año. En 1905 publicó cuatro artículos breves: *Sur l'intégrale de Poisson et les lignes singulières des fonctions analytiques*; *Sur quelques théorèmes de Riemann*; *Sur l'Approximation des inconmensurables et les séries trigonométriques*; y *La série de Fourier et la série de Taylor sur cercle de convergence*. Tres documentos más fueron publicados en 1906: *Sur le développement en série trigonométrique des fonctions non intégrables*, *Séries trigonométriques et séries de Taylor* y *Sur l'application de l'analyse de Dirichlet aux formes quadratiques à coefficients et à indéterminées conjuguées*. En 1906 presentó su tesis, *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, que trataba de la teoría de la integración y la teoría de funciones complejas. Fatou demostró que si una función es integrable de Lebesgue, entonces los límites radiales para la integral de Poisson correspondiente existen casi en todas partes.

El libro [8] presenta un relato de la teoría global de la iteración de funciones analíticas complejas. Fatou ingresa a esta historia de una manera bastante complicada y el libro hace un excelente trabajo al explicar un episodio interesante en la historia de las matemáticas. En 1915, la Académie des Sciences de París dió el tema para su Gran Premio de 1918. El premio se otorgaría para un estudio de iteración desde un punto de vista global. Fatou escribió una larga memoria en donde utilizó la idea de Montel de familias normales para desarrollar la teoría fundamental de la iteración en 1917. Dado que el tema había sido pro-

puesto para el premio, otro matemático también trabajo en el tema, Gaston Julia también produjo una larga memoria desarrollando la teoría de manera similar a Fatou. Durante la segunda mitad de 1917, Julia depositó sus resultados en sobres cerrados con la Académie des Sciences. Fatou, por otro lado, publicó un anuncio de sus resultados en la nota *Sur les substitutions rationnelles* en la parte de diciembre de 1917 de *Comptes Rendus*. Más tarde se hizo evidente que habían descubierto resultados muy similares. Julia había pedido a la Académie des Sciences que inspeccionara sus sobres cerrados. Como resultado de estas cartas, Fatou no ingresó para el Gran Premio y fue otorgado a Julia. Sin embargo, Fatou no perdió completamente, y aunque no había ingresado para el premio, la Académie des Sciences le otorgó un premio por su destacado artículo de 280 páginas sobre el tema, *Sur les équations fonctionnelles* publicado en 1920. Si Julia o Fatou merecen el crédito de tener prioridad importa poco, ya que su trabajo fue ciertamente totalmente independiente. En el funeral de Fatou, Henri Mineur pronunció un discurso en el que dijo:

Para uno de sus descubrimientos más notables, es decir, para la iteración de funciones racionales, el nombre de Fatou está inalterablemente atado: fue el primero en atreverse a atacar el problema, el primero en resolverlo.

Gaston Maurice Julia

Nacido el 3 de febrero de 1893 en Sidi bel Abbès, Argelia, murió el 19 de marzo de 1978 en París, Francia. Julia ganó una beca que le permitió ir a París y pasar el año 1910-11 en el Lycée Janson-de-Sailly, donde tomó clases de matemáticas superiores. A pesar de sus habilidades excepcionales, Julia no encontró la vida fácil. Primero, todavía era joven y había dejado el país familiar en el que se crió para una vida muy diferente en Francia. En segundo lugar, contrajo fiebre tifoidea antes de que comenzara sus estudios y fue llevado al hospital.

Asistió a los exámenes de ingreso a la École Normale Supérieure y la École Polytechnique y obtuvo el primer puesto en ambos exámenes de ingreso. Podía elegir cualquier universidad, pero decidió ingresar a la École Normale con el argumento de que era el más fuerte de los dos establecimientos de matemáticas.

Al ingresar a la École Normale Supérieure en 1911, Julia acababa de completar los exámenes

para su primer grado en matemáticas cuando los eventos políticos en Europa interrumpieron sus estudios. Las cosas llegaron a un punto crítico en julio de 1914 con varias declaraciones de guerra, y el 3 de agosto Alemania declaró la guerra a Francia. Los eventos se habían estado moviendo rápidamente y Julia recibió sus documentos de llamada un día después. Se entrenó con el 57° Regimiento de Infantería en Libourne y pronto se hizo un cabo, a continuación, un subteniente. Vió acción en el frente occidental con el 144° Regimiento de Infantería cuando fue enviado a Chemin des Dames. Kaiser Guillermo II de Alemania tuvo su cumpleaños el 27 de enero y las tropas alemanas deseaban marcar la ocasión con éxitos. En consecuencia, el 25 de enero lanzaron un fuerte ataque contra las líneas francesas donde Julia y sus hombres acababan de llegar.

El siguiente es un informe de lo que le sucedió a Julia ese día:

De enero 25, 1915, mostró un absoluto desprecio por el peligro. Bajó un bombardeo extremadamente violento, tuvo éxito a pesar de su juventud (22 años) para dar un verdadero ejemplo a sus hombres. Golpeado por una bala en medio de la cara que le causó una terrible herida, ya no podía hablar, pero escribió en un boleto que no sería evacuado. Solo fue a la ambulancia cuando el ataque había sido rechazado. Fue la primera vez que este oficial fue atacado.

La lesión de Julia fue extremadamente dolorosa y muchas operaciones infructuosas se llevaron a cabo en un intento de reparar el daño. Finalmente, en 1918, se resignó a la pérdida de su nariz y tuvo que usar una correa de cuero en la cara por el resto de su vida. Entre estas operaciones dolorosas, había llevado a cabo sus investigaciones matemáticas a menudo en su cama de hospital. Realizó investigaciones en el Collège de France, comenzando en 1916, y en 1917 presentó su tesis doctoral *Étude sur les formes binaires non quadratiques à indéterminées réelles ou complexes, ou à indéterminées conjuguées*. Los examinadores de su tesis fueron Émile Picard, Henri Lebesgue y Pierre Humbert, con Picard como presidente del comité examinador.

Cuando tenía solo 25 años, Julia publicó su obra maestra de 199 páginas *Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles*, que lo hizo famoso en los centros de matemáticas de su época. El hermoso artículo, publicado en *Journal de Math. Pure et Appl.* 8 (1918), 47-245,

se refería a la iteración de una función racional f . Julia dio una descripción precisa del conjunto $\mathcal{J}(f)$ de tales $z \in \mathbb{C}$ para el cual la iteración $f^n(z)$ permanece limitada cuando n tiende al infinito. Recibió el Gran Premio de la Academia de Ciencias por este notable trabajo.

4.2. Los conjuntos de Fatou y Julia

El conjunto de Fatou, denotado por $\mathcal{F}(f)$ para las clases de funciones \mathcal{R} , \mathcal{M} y \mathcal{E} , se define como sigue:

$$\mathcal{F}(f) = \{z \in U \mid \{f^n\} \text{ está bien definida y es normal en alguna vecindad de } z\}.$$

El conjunto de Julia, denotado por $\mathcal{J}(f)$ es el complemento del conjunto de Fatou, es decir:

$$\mathcal{J}(f) = (\mathcal{F}(f))^c.$$

Proposición 4.2.1. *Si $f \in \mathcal{R}, \mathcal{E}$ o \mathcal{M} , entonces*

$$\mathcal{F}(f) = \bigcup_{z \in \mathcal{F}(f)} \mathcal{V}_z,$$

donde \mathcal{V}_z es una vecindad de z y $\{f^n\}$ está bien definida y es normal en \mathcal{V}_z .

Demostración. Sean $z_0 \in \mathcal{F}(f)$ y \mathcal{V}_{z_0} una vecindad de z_0 , entonces para todo $z \in \mathcal{V}_{z_0}$ existe una vecindad \mathcal{V} tal que $\mathcal{V}_z \subseteq \mathcal{V}_{z_0}$. Como $\{f^n\}$ está bien definida y es normal en \mathcal{V}_{z_0} , entonces $\{f^n\}$ también está bien definida y es normal en \mathcal{V}_z , por lo que $\mathcal{V}_{z_0} \subseteq \mathcal{F}(f)$ para todo $z_0 \in \mathcal{F}(f)$. Por lo tanto $\bigcup_{z \in \mathcal{F}(f)} \mathcal{V}_z \subseteq \mathcal{F}(f)$.

Sea $z \in \mathcal{F}(f)$ entonces $\{f^n\}$ está bien definida y es normal en alguna vecindad de z , así, si $z \in \mathcal{V}_z$ entonces $z \in \bigcup_{z \in \mathcal{F}(f)} \mathcal{V}_z$. Por lo tanto $\mathcal{F}(f) \subseteq \bigcup_{z \in \mathcal{F}(f)} \mathcal{V}_z$. Concluimos que $\mathcal{F}(f) = \bigcup_{z \in \mathcal{F}(f)} \mathcal{V}_z$. □

Teorema 4.2.2. *Si f pertenece a la clase \mathcal{M} , entonces*

$$\mathcal{F}(f) = f^{-1}(\mathcal{F}(f)), \tag{4.1}$$

donde

$$f^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f(\mathcal{F}(f)) \cup \{\mathcal{P}\mathcal{V}(f) \cap \mathcal{F}(f)\}. \quad (4.2)$$

Demostración. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $f(z_0) \in \mathcal{F}(f)$ entonces existe una componente W de $\mathcal{F}(f)$, tal que $f(z_0) \in W$. En particular, cada f^n , $n \in \mathbb{N}$, son holomorfas en W y en z_0 . Tomemos un radio $R > 0$ tal que $D = \{z : |z - f(z_0)| < R\} \subset W$, entonces la familia $\{f^n\}$ es normal en D . Consideremos ahora al conjunto $U = \{|z - z_0| < r\}$ tal que $|f(z) - f(z_0)| < R/2$ para $z \in U$. Además se tiene que $z_0 \in \mathcal{F}(f)$ esto en virtud de que la familia $\{f^{n+1}\}$ es normal en U , de este modo concluimos que

$$f^{-1}(\mathcal{F}(f)) \subset \mathcal{F}(f). \quad (4.3)$$

Por otro lado, para la otra contención, tomemos un punto arbitrario $z_0 \in \mathcal{F}(f)$, para este punto existe $D_0 = \{z : |z - z_0| < r_0\}$ de tal forma que la familia $\{f^n\}$ es holomorfa y normal en D_0 . Consideremos ahora un disco $D_1 = \{|z - f(z_0)| < r_1\}$, de tal forma que $D_1 \subset f(\{z : |z - z_0| < r_0/2\})$, entonces la familia f^{n-1} es normal en D_1 , es decir $f(z_0) \in \mathcal{F}(f)$, entonces

$$f(\mathcal{F}(f)) \subset \mathcal{F}(f) \quad (4.4)$$

además

$$\mathcal{F}(f) \subset f^{-1}(f(\mathcal{F}(f))) \subset f^{-1}(\mathcal{F}(f)). \quad (4.5)$$

De esta manera por las ecuaciones 4.5 y 4.3 concluimos que $\mathcal{F}(f) = f^{-1}(\mathcal{F}(f))$.

Mostremos ahora la igualdad 4.2.

Tomemos dos casos, el primero: Supongamos que $\mathcal{P}\mathcal{V} \cap \mathcal{F}(f) = \emptyset$, entonces para cualquier $z \in \mathcal{F}(f)$ existe $z_0 \in \mathbb{C}$ de tal forma que $f(z_0) = z$, luego por la ecuación 4.3 el punto $z_0 \in \mathcal{F}(f)$ y $z = f(z_0) \in f(\mathcal{F}(f))$. Como la elección de z es arbitraria, entonces $\mathcal{F}(f) \subset f(\mathcal{F}(f))$, considerando esto y la ecuación 4.4, se obtiene la igualdad.

El segundo caso es suponer ahora que $\mathcal{P}\mathcal{V} \cap \mathcal{F}(f) \neq \emptyset$, así para cualquier elemento y de $\mathcal{P}\mathcal{V}(f) \cap \mathcal{F}(f)$, entonces $y \notin f(\mathcal{F}(f))$ lo que implica que $y \in \mathcal{F}(f) \setminus f(\mathcal{F}(f))$. De manera inversa, si $x \in \mathcal{F}(f) \setminus f(\mathcal{F}(f))$, es decir $x \in \mathcal{F}(f)$ y $x \notin f(\mathcal{F}(f))$.

Si $x \notin \mathcal{P}\mathcal{V}(f)$, entonces existe $c \in \mathbb{C}$, de tal forma que $f(c) = x$. Luego, por la ecuación

4.3, se tiene que $c \in \mathcal{F}(f)$ y $x = f(c) \in f(\mathcal{F}(f))$, pero esto es una contradicción, por lo que se concluye que $x \in \mathcal{P}\mathcal{V}(f)$. Por todo lo anterior se obtiene la siguiente igualdad $\mathcal{F}(f) \setminus f(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{P}\mathcal{V}(f) \cap \mathcal{F}(f)$, con esto y tomando en cuenta la ecuación 4.4 obtenemos el resultado. \square

Teorema 4.2.3. *Sea f una función meromorfa, entonces $|E(f)| \leq 2$.*

Si $|E(f)| = 1$, entonces f es conjugada a un polinomio con el punto excepcional aplicado a ∞ .

Si $|E(f)| = 2$, entonces f es conjugada a una transformación de la forma $z \rightarrow az^d$ para algún $d \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$, donde el conjunto excepcional es aplicado a $\{0, \infty\}$, a través de la conjugación.

Demostración. Dado que el conjunto $E(f)$ es completamente invariante entonces consiste de a lo más dos puntos, podemos suponer que tan solo hay cuatro posibilidades para el conjunto de puntos excepcionales:

- i) $E(f) = \emptyset$.
- ii) $E(f) = \{\infty\} = O(\infty)$.
- iii) $E(f) = \{0, \infty\}$, $O(0) = \{0\}$, $O(\infty) = \{\infty\}$.
- iv) $E(f) = \{0, \infty\} = O(0) = O(\infty)$.

Para el primer caso no hay nada que decir. En el segundo caso tenemos que f debe cumplir que $f^{-1}(\infty) = \infty$ lo cual implica que f tiene un polo en ∞ y no tiene polos para cualquier otro valor, por lo tanto f debe ser conjugada a un polinomio.

En el caso 3, se puede conjugar de nuevo a un polinomio, debido a que se presentan condiciones similares al caso anterior para el polo, para el otro punto podemos observar que si $f^{-1}(0) = 0$ entonces el único cero de la función es el origen, de ahí que el polinomio al que es conjugado es de la forma az^d .

Finalmente, si $f(0) = \infty$ y $f(\infty) = 0$ entonces f tiene todos sus ceros y polos en $\{0, \infty\}$, más aún ∞ es su cero y el origen su polo, por lo tanto f es conjugada a una transformación de la forma az^d donde d es un entero negativo. \square

Corolario 4.2.4. $E(f) \subset \mathcal{F}(f)$.

Demostración. En el primer y segundo caso del teorema anterior tenemos que $E(f) \subset \mathcal{F}(f)$. En el caso 3 sabemos que $\infty \in \mathcal{F}$ además para z en cualquier disco de radio menor que uno con centro en cero la familia de iteradas $\{f^n\}$ converge uniformemente a cero, se concluye que $0 \in \mathcal{F}(f)$. Finalmente la familia de iteradas $\{f^n\}$ converge a cero en una vecindad suficientemente cercana a ∞ mientras que diverge a ∞ en una vecindad de 0 suficientemente pequeña. \square

4.3. Algunas propiedades de los conjuntos $\mathcal{F}(f)$ y $\mathcal{J}(f)$

Las siguientes son algunas propiedades básicas de los conjuntos de Fatou y Julia:

Si $f \in \mathcal{R}, \mathcal{E}$ o \mathcal{M} entonces:

1. $\mathcal{F}(f)$ es abierto y $\mathcal{J}(f)$ es cerrado.
2. $\mathcal{F}(f)$ y $\mathcal{J}(f)$ son completamente invariantes.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}(f^n) = \mathcal{F}(f)$ y $\mathcal{J}(f^n) = \mathcal{J}(f)$.
4. Si $z_0 \in \mathcal{J}(f)$, y $z_0 \notin \mathbf{E}$, entonces $\mathcal{J}(f) = \overline{O^-(z_0)}$.
5. $\mathcal{J}(f)$ es perfecto.

4.4. Demostracion de las propiedades

Supongamos que f es una función que pertenece a cualquiera de las clases de funciones \mathcal{R}, \mathcal{E} o \mathcal{M} , para las primeras cuatro propiedades las demostraciones son similares en las tres clases mencionadas.

Demostración de la Propiedad 1

Por la proposición tenemos que $\mathcal{F}(f)$ se puede ver como la unión arbitraria de conjuntos abiertos, por lo tanto es un conjunto abierto. Luego, como $\mathcal{J}(f)$ es el complemento de un conjunto abierto, entonces es un conjunto cerrado.

□

Demostración de la Propiedad 2

Para demostrar que el conjunto $\mathcal{F}(f)$ es completamente invariante hemos de ver que se cumpla que: $z_0 \in \mathcal{F}(f) \Leftrightarrow f(z_0) \in \mathcal{F}(f)$.

Si $z_0 \in \mathcal{F}(f)$, entonces existe una vecindad $\mathcal{V}_0 = \{z : |z - z_0| < r_0\}$, tal que la familia $\{f^n\}$ es normal. Consideremos $r_1 > 0$, de tal suerte que: $\mathcal{V}_1 \subseteq f(\mathcal{V})$, donde $\mathcal{V} = \{z : |z - f(z_0)| < r_1\}$ y $\mathcal{V} = \{z : |z - f(z_0)| < \frac{r_0}{2}\}$, entonces la familia $\{f^{n-1}\}$ es normal en \mathcal{V} , por lo tanto $f(z_0) \in \mathcal{F}(f)$.

Si $z_0 \in \mathbb{C}$, tal que $f(z_0) \in \mathcal{F}(f)$, luego como $\mathcal{F}(f)$ es abierto entonces existe un conjunto abierto $W \subseteq \mathcal{F}(f)$, tal que $f(z_0) \in W$. Consideremos ahora $r_0 > 0$ de tal forma que $\mathcal{V} = \{z : |z - f(z_0)| < r_0\} \subseteq W$, entonces la familia $\{f^n\}$ es normal en \mathcal{V} . Finalmente, sea $\mathcal{V}' = \{z : |z - z_0| < r_1\}$, tal que $|f(z) - f(z_0)| < \frac{r_0}{2}$, para $z \in \mathcal{V}'$, entonces la familia $\{f^{n+1}\}$ es normal en \mathcal{V}' , así $z_0 \in \mathcal{F}(f)$.

Concluimos entonces que $\mathcal{F}(f)$ es completamente invariante.

Luego como $\mathcal{J}(f)$ es el complemento de un conjunto completamente invariante entonces también es completamente invariante.

□

Demostración de la Propiedad 3

Si $z_0 \in \mathcal{F}(f)$, entonces la familia $\{f^k\}$ es normal en \mathcal{V}_{z_0} vecindad de z_0 y como $\{(f^n)^k\} \subseteq \{f^k\}$, así $\{(f^n)^k\}$ es normal en \mathcal{V}_{z_0} , por lo que $z_0 \in \mathcal{F}(f^n)$, concluimos entonces que $\mathcal{F}(f) \subset \mathcal{F}(f^n)$.

Sea $z_0 \in \mathcal{F}(f^n)$ y \mathcal{V}_{z_0} una vecindad de z_0 . Consideremos $\{f^{n_k}\}$ sucesión de iteradas de f . Demostraremos que existe una subsucesión $\{f^{n_{k_j}}\}$ de $\{f^{n_k}\}$ que converge en \mathcal{V}_{z_0} .

Existe l , $0 \leq l \leq n - 1$, y una subsucesión $\{n_{k_j}\}$ de $\{n_k\}$, talque:

$$(\diamond) \quad n_{k_j} = nm_j - l, \text{ donde } m_j \in \mathbb{N}.$$

Por hipótesis existe una vecindad \mathcal{V}_{z_0} de z_0 , tal ue una subsucesión $\{(f^n)^{m_j}\}$ converge uniformemente en \mathcal{V}_{z_0} . Sin pérdida de generalidad supongamos que $(f^n)^{m_j}|_{\mathcal{V}_{z_0}} \rightarrow g$, luego por la ecuación (\diamond) tenemos que $f^{n_{k_j}+l}|_{\mathcal{V}_{z_0}} \rightarrow g$.

- I. Si $g \equiv a$ con $a \in \mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{U}$, entonces $\chi(f^{n_{k_j}}(z), \omega) \rightarrow 0$ uniformemente en \mathcal{V}_{z_0} para $\omega \in \mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{U}$, por lo tanto $\{f_{k_j}^n\}$ converge en \mathcal{V}_{z_0} .
- II. Si g no es constante o si $g \equiv a$ con $a \in \mathcal{U}$, entonces $\chi(f^{n_{k_j}}(z), \omega) \rightarrow 0$ o alguna subsucesión de $\{f^{n_{k_j}}\}$ converge a una función h que satisface $f^l(h) = g$. Así concluimos que $\{f^{n_{k_j}}\}$ converge en \mathcal{V}_{z_0} .

En cualquiera de los casos anteriores podemos ver que $z_0 \in \mathcal{F}(f)$ entonces $\mathcal{F}(f^n) \subset \mathcal{F}$. Por todo lo anterior podemos concluir que $\mathcal{F}(f^n) = \mathcal{F}(f)$. Para el conjunto de Julia observemos que $\mathcal{J}(f^n) = [\mathcal{F}(f^n)]^c = [\mathcal{F}(f)]^c = \mathcal{J}(f)$.

□

Demostración de la Propiedad 4

Veamos que $\overline{O^-(z_0)} \subset \mathcal{J}(f)$. Observemos que $\overline{O^-(z_0)} \subset \mathcal{J}(f)$ porque $\mathcal{J}(f)$ es completamente invariante y cerrado. Ahora veamos que la contención $\mathcal{J}(f) \subset \overline{O^-(z_0)}$, se satisface. Sean $z_1 \in \mathcal{J}(f)$, \mathcal{V} una vecindad de z_1 . Supongamos que $\mathcal{V} \cap O^-(z_0) = \emptyset$, entonces $f^n(z) \neq \omega$, para todo $n \in \mathbb{N}, z \in \mathcal{V}$ y $\omega \in O^-(z_0)$, como z_0 no es punto excepcional concluimos que $|O^-(z_0)| = \infty$. Por el Teorema de Montel $\{f^n\}$ es normal en \mathcal{V} lo cual es una contradicción, por la elección que hicimos de z_1 . De modo que $\mathcal{V} \cap O^-(z_0) \neq \emptyset$ por lo tanto $z_1 \in \overline{O^-(z_0)}$, finalmente $\mathcal{J}(f) \subset \overline{O^-(z_0)}$.

Por lo tanto la igualdad $\mathcal{J}(f) = \overline{O^-(z_0)}$ es válida.

□

Demostración de la Propiedad 5

Un **conjunto perfecto** es un subconjunto cerrado tal que todos sus puntos son puntos de acumulación, es decir, no tiene puntos aislados.

Una caracterización es la siguiente: Sea S un conjunto y S' el conjunto de sus puntos de acumulación. Recordemos que un conjunto S de un espacio topológico es cerrado cuando $S' \subseteq S$, en otras palabras, cuando S contiene todos sus puntos de acumulación. Dos conjuntos S y T están separados cuando son disjuntos y cuando los conjuntos derivados, formados por sus puntos de acumulación, también son disjuntos. Bajo esas condiciones, el conjunto S es un **conjunto perfecto** si $S = S'$.

El conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$ es perfecto si cumple:

- (a) $\mathcal{J}(f)$ es cerrado.
- (b) $\mathcal{J}(f) \neq \emptyset$.
- (c) $\mathcal{J}(f)$ es infinito.
- (d) $\mathcal{J}(f)$ no tiene puntos aislados.

Consideremos a f como una función que pertenece a la clase \mathcal{R} .

Demostración. (a) $\mathcal{J}(f)$ es cerrado por definición.

- (b) Supongamos que $\mathcal{J}(f) = \emptyset$, entonces $\mathcal{F}(f) = \mathbb{C}_\infty$ y la familia de iteradas $\{f^n\}$ es normal en \mathbb{C}_∞ . Luego existe una subsucesión $\{f^{n_j}\}$ de $\{f^n\}$ que converge uniformemente a una función g en \mathbb{C}_∞ . Por el Teorema 3.2.2 la función g es racional para toda n suficientemente grande y $grad(f^{n_j})$ converge a $grad(g)$ para toda $j \geq j_0$, esto se debe a que el conjunto $\{0, 1, \dots\}$ es discreto y la aplicación $grad$ es continua, es decir;

$$grad(g) = \lim_{j \rightarrow \infty} grad(f^{n_j}),$$

sin embargo $grad(f^{n_j}) = (grad(f))^{n_j} \geq 2^{n_j}$, por lo tanto el $grad(g) = \infty$, lo cual es una contradicción. Concluimos que $\mathcal{J}(f) \neq \emptyset$.

- (c) Por el inciso anterior existe $z_1 \in \mathcal{J}(f)$. Como $\mathcal{J}(f)$ es completamente invariante, entonces $O^-(z_1) \subset \mathcal{J}(f)$. Por el teorema 4.2.3 y el corolario 4.2.4, $z_1 \notin \mathbf{E}(f)$, por lo tanto el $grad(g) = \infty$, es decir, $\mathcal{J}(f)$ es infinito.

- (d) Sean $z \in \mathcal{J}(f)$ y \mathcal{V} una vecindad de z . Sabemos por el inciso anterior que $|\mathcal{J}(f)| = \infty$, de ahí que podemos encontrar $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathcal{J}(f) \setminus O^+(z_1)$. Además, como $\{f^n|_{\mathcal{V}}\}$ no es normal por el Teorema de Montel, existe $\omega \in O^+(\mathcal{V})$, para algún $j \in \{1, 2, 3\}$, por lo tanto $O^+(\omega_j) \cap (\mathcal{V} \setminus \{z_1\}) \neq \emptyset$. Concluimos entonces que $\mathcal{J}(f) \cap (\mathcal{V} \setminus \{z_1\}) \neq \emptyset$, por lo tanto z_1 no es un punto aislado.

□

Consideremos a f como una función que pertenece a la clase \mathcal{E} .

Demostración. (a) $\mathcal{J}(f)$ es cerrado por definición.

- (b) Por el Lema de Rosenbloom, tenemos que la función

$$g = \frac{f^2 - id_{\mathbb{C}}}{f - id_{\mathbb{C}}}$$

es una función meromorfa no constante. Luego, por el teorema de Picard tenemos $g^{-1}(\{0, 1, \infty\}) \neq \emptyset$, entonces f tiene un punto periódico $p \in \mathbb{C}$. Supongamos que $p = 0$ y $f(0) = 0$:

Caso 1: Si $0 \in \mathcal{J}(f)$ entonces tendremos $\mathcal{J}(f) \neq \emptyset$.

Caso 2: Si $0 \notin \mathcal{J}(f)$ entonces $0 \in \mathcal{F}(f)$, por lo tanto $|f'(0)| \leq 1$. Sea \mathcal{C} la componente del conjunto de Fatou que contiene a 0.

Si $|f'(0)| = 1$, entonces por el Teorema 2.6.1 cada función límite de la sucesión $\{f^n|_{\mathcal{C}}\}$ no es constante; si $f^{n_j}(z) \rightarrow \phi(z)$ para cada $z \in \mathcal{C}$, entonces $f^{n_{j+1}-n_j}(z) \rightarrow z$ para $z \in \mathcal{C}$, por esto la función $f|_{\mathcal{C}}$ es inyectiva. Como f es trascendente e inyectiva $\mathcal{C} \neq \mathbb{C}$.

Por lo tanto $\mathcal{J}(f) \neq \emptyset$.

Si $|f'(0)| < 1$, entonces por el Lema de Bargmann tenemos que $\mathcal{C} \neq \mathbb{C}$, así, concluimos que $\mathcal{J}(f) \neq \emptyset$.

- (c) Supongamos que $\mathcal{J}(f)$ es finito.

Como $\mathcal{J}(f)$ es completamente invariante, tenemos que $f^{-1}(z) \subset \mathcal{J}(f)$ para cada $z \in \mathcal{J}(f)$. Por el teorema de Picard, el conjunto de Julia consta de un solo punto, supongamos que tal punto es 0, es decir, $\mathcal{J}(f) = \{0\}$.

Tenemos $f|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$, es una función holomorfa trascendente de $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ que tiene conjunto de Julia no vacío, entonces $\mathcal{J}(f) \setminus \{0\} \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $\mathcal{J}(f)$ es infinito.

(d) Se demuestra igual que para las funciones de la clase \mathcal{R} .

□

Consideremos a f como una función que pertenece a la clase \mathcal{M} .

Definición 4.4.1. Sea $f \in \mathcal{M}$. El conjunto P_0 es:

$$P_0 = P_0(f) := O^-(\infty) = \{z \in \mathbb{C}_\infty : f^n(z) = \infty, n \in \mathbb{N}\}.$$

Observemos que por como esta definido el conjunto de Julia se tiene la contención $P_0(f) \subset \mathcal{J}(f)$.

Proposición 4.4.1. Si $f \in \mathcal{M}$, entonces P_0 contiene infinitos puntos.

Demostración. Si f tiene al menos tres polos w_i donde $i = 1, 2, 3$, por el Segundo Teorema Fundamental de Nevanlinna, existe $1 \leq i \leq 3$, de tal forma que $f - w_i$ tiene una infinidad de soluciones, estas soluciones pertenecen a P_0 .

Si $f(z)$ tiene a lo más dos polos, entonces $N(r, f) = O(\log r)$. Luego, por como está definido \mathcal{M} , tenemos que $f(z)$ tiene al menos un polo w , el cual no es un valor excepcional de Picard. Por lo tanto, existe $b \in \mathbb{C}\setminus\{w\}$, tal que $f(b) = w$. Si $f(z) = w$ tiene una infinidad de soluciones, entonces estas soluciones pertenecen a P_0 y de esta forma P_0 es infinito. Si $f(z) = w$ tiene solo un número finito de soluciones, entonces $N(r, w, f) = O(\log r)$.

Por el Segundo Teorema Fundamental de Nevanlinna tenemos que $f(z) = b$ tiene una infinidad de soluciones, las cuales son polos de f^3 , así en cualquiera que sea el caso P_0 es infinito. □

Lema 4.4.2. Si $f \in \mathcal{M}$, entonces P_0 no contiene puntos aislados.

Demostración. Sean $z \in P_0$, tal que $f^n(z) = \infty$ y \mathcal{V} una vecindad de z . Tenemos que existe un punto $b \in P_0$, el cual no es un valor excepcional de Picard, esto ya que P_0 es

un conjunto con una infinidad de puntos. Por el Teorema Grande de Picard, existe un $a \in \mathcal{V} \setminus \{z\}$, tal que $f^{n+1}(a) = b$. Supongamos que $f^m(b) = \infty$, entonces $f^{m+n+1}(a) = \infty$, de este modo $a \in P_0$. Por lo tanto z no es un punto aislado. \square

Teorema 4.4.3. *Si $f \in \mathcal{M}$, entonces $\mathcal{J}(f) = P'_0$.*

Demostración. Como $P_0 \subset \mathcal{J}(f)$, así $P'_0 \subset \mathcal{J}(f)$.

Veamos ahora que se cumple la contención $\mathcal{J}(f) \subset P'_0$

Observemos que para cualquier $z \in \mathbb{C} \setminus P'_0$ por el Lema 5.4.2 existe una vecindad \mathcal{V} de z tal que $f^n|_{\mathcal{V}}$ está bien definida y para todo $n \in \mathbb{N}$ $f^n(\mathcal{V}) \subset \mathbb{C} \setminus P'_0$. Recordemos que el conjunto P'_0 es infinito, luego, por el Teorema de Montel, la familia $\{f^n\}$ es normal en \mathcal{V} , por lo tanto $z \notin \mathcal{J}(f)$. \square

Corolario 4.4.4. *El conjunto $\mathcal{J}(f)$, contiene un número infinito de puntos y no es acotado.*

Teorema 4.4.5. *Si $z_0 \in \mathcal{J}(f)$, entonces para cada $a \neq \infty$ existen $x_i \rightarrow z_0$ y $n_i \rightarrow \infty$ sucesiones de puntos y de enteros positivos respectivamente, tal que $f^{n_i}(x_i) = a$, con $i \in \mathbb{N}$, excepto a lo mas para 2 valores distintos de infinito.*

Demostración. Consideremos un valor finito a .

Si para cada $N \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ y un punto x tales que

$$n \geq N, |x - z_0| < \frac{1}{N}, f^n(x) = a,$$

entonces el valor a tiene la propiedad requerida. Más aún, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe n_i y un punto x_i , tal que

$$n_i \geq i, |x_i - z_0| < \frac{1}{i}, f^{n_i}(x_i) = a.$$

De este modo, si a no tiene la propiedad requerida del teorema, entonces existe un entero positivo N , tal que para $n \geq N$ la función f^n no toma el valor a en $|z - z_0| < \frac{1}{N}$, es por esto que hay tres valores finitos a_j , $j = 1, 2, 3$ que no tienen la propiedad deseada, es decir, existe $N_1 \in \mathbb{N}$, tal que para $n \geq N_1$ la función f^n no toma los tres valores de a_j en $|z - z_0| < \frac{1}{N_1}$.

Por el Teorema de Montel, la familia $\{f^n : n = 1, 2, \dots\}$ es normal en $|z - z_0| < \frac{1}{N_1}$, lo cual contradice la hipótesis de que $z_0 \in \mathcal{J}(f)$. \square

Para la demostración de la propiedad 5 usaremos la caracterización de la definición de conjunto perfecto, es decir, probaremos que $\mathcal{J}(f) = (\mathcal{J}(f))'$.

Demostración. Demostremos la primera contención.

Sea $z_0 \in \mathcal{J}(f)$, por el corolario 4.4.4. y el teorema 4.4.5. podemos tomar un punto $a \in \mathcal{J}(f)$, tal que existe una sucesión de puntos $x_i \rightarrow z_0$ y una sucesión de enteros positivos $n_i \rightarrow \infty$ con $f^{n_i}(x_i) = a$. Por el Teorema 4.2.2 sabemos que $x_i \in \mathcal{J}(f)$. Así, $z_0 \in (\mathcal{J}(f))'$, y así $\mathcal{J}(f) \subset (\mathcal{J}(f))'$.

La otra contención es inmediata ya que $\mathcal{J}(f)$ es un conjunto cerrado.

Por lo tanto $\mathcal{J}(f) = (\mathcal{J}(f))'$, es decir, $\mathcal{J}(f)$ es perfecto. \square

Capítulo 5

Fractales

5.1. Introducción

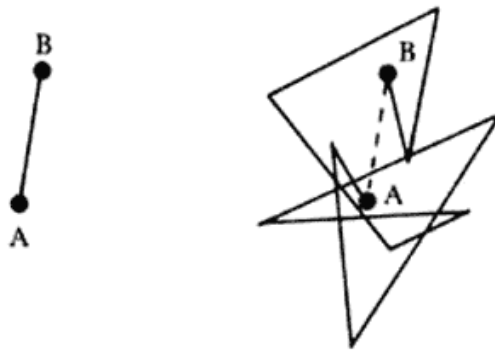
Cuando nos enfrentamos a un problema por primera vez y se tiene intenciones de resolverlo, cuando queremos saber cómo funciona una cosa, lo que hacemos es tratar de simplificar el suceso. Esta forma de comenzar a entenderse con las problemáticas es útil en la ciencia como en la vida cotidiana. Por ejemplo, si se busca reproducir un paisaje boscoso o una montaña la geometría básica no basta si de precisión se trata. Las figuras comunes de la geometría clásica (euclidiana) no son las más adecuadas para generar formas complejas como la hoja de un helecho o una montaña, su limitación se debe a que tienden a perder su estructura cuando son ampliadas; un arco de círculo se transforma poco a poco en una recta, o como lo que observamos con el suelo que pisamos, la superficie de una esfera se hace cada vez más plana, esto no sucede con muchas formas naturales, como la superficie de una roca, el ramaje de un arbusto, o de una coliflor o brócoli, que a pesar de ampliar una parte de la imagen original seguimos apreciando una imagen muy similar al original mismo.

De observar este hecho surge la idea de imaginar y construir objetos geométricos que posean la misma propiedad pero llevada al extremo.

En un cine, en el haz de luz que envía el proyector hacia la pantalla, se puede ver que las partículas de polvo que flotan en el aire realizan un movimiento en zigzag, en física este movimiento es conocido como movimiento browniano, que fue descrito por primera vez

por el botánico inglés Robert Brown en 1828 [3].

Las líneas de la trayectoria de una partícula browniana, no tienen en rigor ninguna realidad física, la forma en que se trazaron las líneas del dibujo es imaginando que cada 30 segundos se observa la posición de la partícula en un tiempo determinado y se marca con un punto, luego estos puntos se unen sucesivamente con líneas rectas. Si ahora, en lugar de marcar las posiciones en cada intervalo de 30 segundos se marcan en uno de 3 segundos y se unieran los puntos con líneas rectas, cada línea recta quedaría remplazada por una sucesión de líneas quebradas de menor tamaño pero de igual complejidad. Se podrían tomar ahora intervalos más pequeños y seguir el mismo procedimiento, ocurriría lo mismo que antes.



Este tipo de línea fue denominada fractal por el científico Benoit Mandelbrot en 1975. Hacia 1977, el matemático se vió forzado a dar una definición formal que permitiera distinguir con más claridad una entidad fractal. Para hacerlo recurrió al antiguo concepto de dimensión de Hausdorff [13] y definió, todos los fractales como el conjunto de formas con dimensión fraccional.

5.2. Iteración y autorreferencia

El acto de repetir un proceso con el objetivo de alcanzar una meta deseada o un resultado es conocido como iteración, los resultados de una iteración se utilizan como punto de partida para la siguiente iteración. El método de Newton es el proceso de iteración más conocido en Matemáticas, mediante el cual obtiene las raíces de una ecuación usando

aproximaciones.

En la teoría del caos, la iteración y la autorreferencia desempeñan un papel fundamental, la autorreferencia es posible cuando existen dos niveles lógicos, un nivel y un metanivel, las oraciones autorreferentes pueden conducir a paradojas [2]. Mientras que la autorreferencia es una condición, la iteración es una repetición que puede cumplirse un número contable de veces, en otras palabras, puede hablarse de una, dos, n- iteraciones, en cambio la autorreferencia se da o no se da.

Una autorreferencia se da por ejemplo en la expresión: “esta frase es falsa”.

En el caso de que un objeto tenga la misma forma al cambiar la escala, es decir, que es similar al anterior, y se cambia a escala un número infinito de veces y se sigue obteniendo una figura similar a las anteriores, se dice que el objeto es autosimilar. La autosimilitud es una idea que ya había sido sugerida en muchas ocasiones a lo largo de la historia. Por ejemplo en el siglo XVII, el pensador alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) propuso que una gota de agua contenía todo un universo, que a su vez contenía gotas de agua pequeñas; cada una de estas pequeñas gotas encerraba a su vez un universo en su interior y así sucesivamente. Esta autosimilitud y otras muchas que surgieron fueron desechadas con el tiempo ya que no se pudieron comprobar experimentalmente. En una gota de agua no hay ningún universo en el sentido propuesto por Leibniz.

5.3. Geometría

En la geometría euclidiana se enseña que hay una relación determinada entre, por ejemplo, el área que ocupa una figura y su perímetro.

Por ejemplo, para un cuadrado, la longitud de su perímetro elevada al cuadrado es igual a 16 veces el área.

Supongamos que:

$$\text{lado} = 3u \Rightarrow \text{perimetro} = 4 * 3u = 12u \Rightarrow (\text{perimetro})^2 = 144u^2.$$

Por otro lado, el área del cuadrado de lado $3u$ es:

$$area = (3u)^2 = 9u^2.$$

Pero:

$$144 = 16 * 9.$$

Por lo tanto,

$$(perimetro)^2 = 16 * (area).$$

Análogamente en un círculo tenemos:

$$(perimetro)^2 = 4\pi * (area).$$

En el caso de las figuras que son fractales, las relaciones que obtuvimos no se satisfacen. En anatomía, consideremos el caso del cerebro de los mamíferos; se sabe que su corteza presenta circunvoluciones. De mediciones hechas con mucha precisión resulta que la relación entre el volúmen del cerebro y el área de la superficie que lo rodea no sigue el patrón descrito anteriormente, la estructura nasal también es fractal.

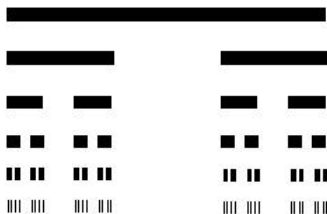
5.4. Conjuntos de Cantor, Julia y Mandelbrot

Una de las primeras aplicaciones de los fractales fue la utilidad para modelar la aparición de ruido en ciertas líneas de transmisión en sistemas de comunicación digital, esto es, la presencia de breves interrupciones eléctricas que confunden y dificultan la comunicación. El análisis de las señales demostró que las interrupciones aparecían por bloques, los cuales dentro llevaban interrupciones que aparecían a su vez por bloques y así sucesivamente. Un registro gráfico de las interrupciones dió lugar a un patrón fractal similar al que se obtiene a través del siguiente proceso.

Tomamos una recta de longitud \mathcal{L} y la dividimos en 3 partes iguales ($l = \mathcal{L}/3$), extrayendo después la sección central...



Al repetir este procedimiento tenemos



Se obtiene el fractal conocido como Conjunto de Cantor. El conjunto de Cantor tiene una dimensión de Hausdorff [13] menor que la unidad, pues cada vez que la longitud de un segmento se reduce a su tercera parte, solo aparecen dos trozos más. En otras palabras, es más que una colección de puntos pero menos que una línea.

Se ha utilizado como modelo para representar los anillos de Saturno y las fluctuaciones en el precio del algodón, más aún, cuando la idea de cómo se genera este conjunto se extiende a tres dimensiones, el patrón que se genera coincide con la distribución de estrellas y galaxias en el universo.

Dos de los objetos fractales más conocidos son los conjuntos de Julia y el conjunto de Mandelbrot, ambos se construyen iterando la función: $f(z) = z^2 + c$, $z, c \in \mathbb{C}$.

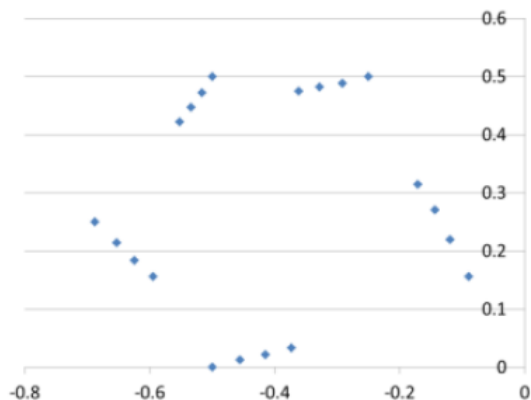
Veamos como se forma la estructura del conjunto de Julia. Cuando con ayuda de una computadora se itera la función $f(z) = z^2 + c$, $z, c \in \mathbb{C}$ las órbitas de los distintos valores que se le asignen al número complejo z pueden crecer sin límite o mantenerse dentro de un intervalo limitado. El conjunto de las diferentes órbitas del número complejo z que permanecen limitadas para un mismo valor del número complejo c se llama conjunto de Julia.

Por ejemplo, sea la función: $f(z) = z^2 + (-0.5 + 0.5i)$, $z \in \mathbb{C}$.

Escogemos un número complejo z para comenzar la iteración, digamos 0. Entonces tenemos:

$f(0)$	=	$-0.5+0.5i$
$f^2(0)$	=	-0.5
$f^3(0)$	=	$-0.25+0.5i$
$f^4(0)$	=	$-0.6875+0.25i$
$f^5(0)$	=	$-0.08984+0.15625i$
$f^6(0)$	=	$-0.51634+0.471923i$
$f^7(0)$	=	$-0.45610+0.012651i$
$f^8(0)$	=	$-0.29213+0.488459i$
$f^9(0)$	=	$-0.65325+0.214612i$
$f^{10}(0)$	=	$-0.11932+0.219607i$
$f^{11}(0)$	=	$-0.53399+0.447592i$
$f^{12}(0)$	=	$-0.41519+0.021979i$
$f^{13}(0)$	=	$-0.32809+0.481748i$
$f^{14}(0)$	=	$-0.62443+0.183879i$
$f^{15}(0)$	=	$-0.14389+0.270359i$
$f^{16}(0)$	=	$-0.55238+0.422193i$
$f^{17}(0)$	=	$-0.37311+0.033570i$
$f^{18}(0)$	=	$-0.36191+0.474949i$
$f^{19}(0)$	=	$-0.59459+0.156220i$
$f^{20}(0)$	=	$-0.17086+0.314224i$

Estas primeras 20 iteraciones nos permiten hacer algunas observaciones. Cuando $z = 0$, la parte real del número complejo obtenido en cada paso es negativa mientras que la parte imaginaria es positiva, es decir, que todos los puntos que representan los resultados de las iteraciones en el plano complejo caen en el segundo cuadrante. Tanto la serie de la parte real como la de la imaginaria, se mantienen en un intervalo entre -1 y 1, y no parece haber razones para creer que las demás iteraciones vayan a salirse de este intervalo.



El conjunto de Julia es, pues, una porción limitada del plano complejo, que adopta formas muy variadas dependiendo de los valores de c : algunos parecen filamentos o nervios, otras conejos, otras más dragones.

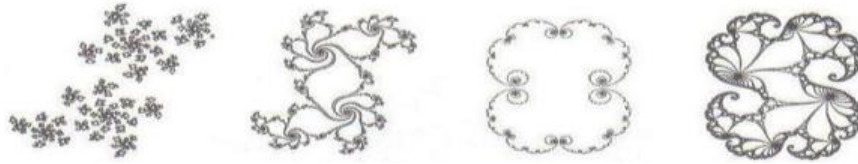
Los conjuntos de Julia se dividen en dos grupos: los conexos constituidos de una sola pieza y los inconexos constituidos por muchas partículas separadas.



El conjunto de todos los conjuntos de Julia conexos es lo que se conoce como conjunto de Mandelbrot y se denota como \mathcal{M} .



Así pues, para obtener el conjunto de Mandelbrot en el monitor de una computadora, se requiere un programa que grafique las iteraciones de la función compleja $f(z) = z^2 + c$, $z, c \in \mathbb{C}$. El programa procede, como sigue: elige un valor para c y busca las orbitas limitadas para encontrar el conjunto de Julia que corresponda a esa c ; si dicho conjunto es conexo, entonces esa c pertenece al conjunto de Mandelbrot y por lo tanto el programa lo representa con un punto negro en el plano complejo.



En 1982, los matemáticos Andrien Douady y John Hubbard, demostraron que si la órbita de cero para una función determinada permanece limitada, entonces esa órbita pertenece a un conjunto de Julia conexo. Para simplificar los cálculos que hace la computadora se hace uso de dos teoremas que dicen:

“El conjunto de Mandelbrot contiene todos los parámetros c cuyo módulo es menor o igual a 0.25”

$$|c| \leq 0.25 \Rightarrow c \in \mathcal{M}.$$

Y “Si c pertenece al conjunto de Mandelbrot entonces el módulo de c es menor o igual a 2”

$$c \in \mathcal{M} \Rightarrow |c| \leq 2.$$

5.5. Algunas aplicaciones

Una de las más grandes metas de la ciencia es ser capaz de predecir fenómenos.

Población: la evolución de la población de insectos depende del ritmo de nacimientos y muertes que se presenten en la comunidad. Si suponemos que estos animales tienen un periodo de reproducción anual y la población en el año i era N_i , es de esperar que la población al año siguiente N_{i+1} sea proporcional a la que había el año anterior, es decir: $N_{i+1} = aN_i$ donde a es una constante de proporcionalidad que mide la capacidad reproductiva de la especie. Ahora considerando que la probabilidad de que muera un individuo es proporcional a la población total de ese año. Como esto se vale para cada uno de ellos, el ritmo de decesos para toda la población será proporcional a N_i^2 o bien $N_{i+1} = bN_i^2$. Si combinamos ambos efectos: $N_{i+1} = N_i^2(a - bN_i)$.

Esta relación es muy útil, pues si damos valores a las constantes a y b y elegimos una población inicial, con ello se calcula la población al año siguiente [29].

Música: en el análisis auditivo de diversas obras musicales una cantidad que se ha estudiado es la potencia de audio de la música. Esto es la energía que se emite en forma de ondas sonoras cada segundo, cuando se ejecuta la obra musical. Al analizar cómo está estructurada esta cantidad, en términos de la frecuencia, se obtiene lo que se llama un espectro. Los análisis hechos en diferentes obras musicales han mostrado que sus espectros dependen de la frecuencia (f), como $(1/f)$. Este espectro es una ley de potencia que, en el lenguaje matemático, depende de la frecuencia en forma inversa a la primera potencia de f . Este espectro es autosimilar en consecuencia tiene una estructura fractal. A este tipo de espectros se les llama espectro rosa. Cuando la frecuencia está a la potencia cero, el espectro resultante es un espectro blanco. Cuando la frecuencia está en su segunda potencia el espectro recibe el nombre de Brown (por el movimiento browniano) o café.

Johann Sebastian Bach
Präludium



En la música cada nota y duración dependen en gran medida de la anterior (autorreferente). El científico Holandés Balthazaar van de Pol afirmó que la música de Bach es grandiosa porque es inevitable y al mismo tiempo sorprendente, lo que significa que su espectro es rosa [26].

Sistemas biológicos: en los sistemas biológicos existe un variado número de ritmos. Uno de los más conocidos es el latido del corazón. Además, resulta que el movimiento del ojo puede considerarse un movimiento no lineal. Se ha descubierto que en el movimiento del ojo hay varios regímenes, tanto de orden como de caos, dependiendo de los valores de los parámetros. La irregularidad del movimiento de los ojos se presenta en pacientes con enfermedades neurológicas.

Lingüística: en un texto se puede contar cuantas veces aparece una palabra, si se enlistan las palabras del texto colocando en primer lugar la palabra que aparece con mayor frecuencia, en segundo la palabra con segundo valor de frecuencia y así sucesivamente. Al lugar que ocupa una palabra en ese texto se denomina rango de la palabra. Del estudio de diferentes textos en varios idiomas se encuentra que existe una relación entre la frecuencia de una palabra y su rango. Si denotamos la frecuencia con f y el rango con r , entonces la relación matemática es que f depende de r como $(1/r)$. Este resultado se llama la ley de Zipf.

5.6. Antropología Fractal

La antropología estudia a la humanidad, sus sociedades del presente y del pasado, así como las diversas culturas y formas de organización e interacción social que ha creado. Conoce y analiza la diversidad étnica, los procesos de continuidad y cambio sociocultural, las formas de organización social y en general, todas las expresiones de la variabilidad humana. [12] En fechas tan lejanas como 1978 el arqueólogo Colin Renfrew ya anticipaba nociones de fractalidad, borrosidad en las fronteras, catástrofes en las ideologías y autosimilitud en los procesos. Empero para aproximarnos al estudio y al uso de fractales en cualquier disciplina es preciso conocer los antecedentes de éstos, aún antes de su descubrimiento por Mandelbrot en los años setentas del siglo XX. Los fractales pueden ser catalogados en dos amplios y difusos conjuntos, el del fractal “natural” y el artificial, el primero vinculado a las relaciones perceptibles en virtualmente todos los aspectos de la realidad, mientras el segundo está directamente relacionado con exploraciones y abstracciones. La geometría fractal garantiza y facilita la trascendencia a un paradigma basado en las teorías de la complejidad.

Perspectivas en el uso de herramientas Fractales en Arqueología

Dentro del estudio de fractales, si bien existen características más o menos constantes como la autosimilitud, la escalaridad y la dimensión fraccionaria, Mandelbrot coincide que no hay una definición clara que abraque todos los distintos tipos de fractales.

Una de las características visualmente más atractivas de los fractales es la recurrencia de patrones similares, así como la constante transformación que se puede observar en ellos. Sin embargo, es esta cualidad en apariencia trivial una de las primeras lecciones en el estudio y aplicación de fractales y más aún en su aplicación en la antropología. Esto es, las imágenes fractales son muchas veces representaciones gráficas de fenómenos complejos en donde las trayectorias pueden ser diametralmente opuestas a pesar de que la imagen sea similar una con otra, las relaciones con que se miden dichas imágenes de igual manera pueden ser casi idénticas para fenómenos completamente distintos, o sin relación alguna para fenómenos íntimamente vinculados.

Basándonos en los primeros textos de Mandelbrot, los fractales son conjuntos que presentan una dimensión de Hausdorff-Besicovitch mayor que su dimensión topológica, son autosimilares, tienen una longitud infinita y presentan dimensión fraccionaria (D) y pueden ser separados en sus partes, cada una de las cuales será una versión a escala reducida del todo [21] [20].

Hofstadter hace alusión a la escalaridad, autosimilitud y dimensión fractal al explicar la naturaleza no finita de un sistema recursivo [16].

En cambio, Kuhn y Levick advierten: *“En esencia, una entidad con características que son simultáneamente apreciables en varios niveles de observación han llegado a llamarse fractal”* [19]. Pero esto no es necesariamente cierto si le damos prioridad a D para definir un fractal como lo hace Mandelbrot.

Queda claro entonces que los fractales han trascendido su estatus de “figuras virtuales” hasta relaciones en dinámicas de sistemas complejos.

Otras definiciones de fractal:

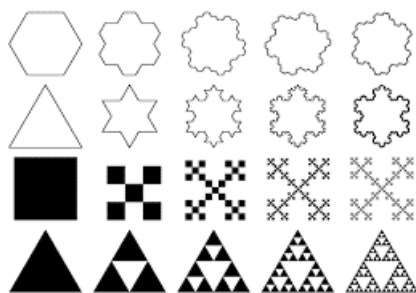
- La geometría fractal es una extensión de la geometría clásica. Puede usarse para hacer modelos precisos de estructuras físicas desde helechos hasta galaxias. La geometría fractal es un nuevo lenguaje [1].
- Figuras geométricas virtuales, formadas por un número infinito de elementos, infinitamente pequeños, contenidos en una superficie finita.

Con lo anterior podemos apreciar las cualidades iterativas de los fractales en tanto que

conservan su forma independientemente del nivel de observación al que los sometemos y la herramienta de medición arquetípica de los fractales, su dimensión fraccionaria.

Sin embargo, para comprender como está constituido un fractal es preciso conocer cómo se construyen. El primer paso consiste en una línea o punto (iniciador) la cual se modificará, injertándole (por ejemplo) una curva relativamente simple (a la figura resultante se le llamará generador), acto seguido se procederá a repetir (iterar) este generador sobre sí mismo. Finalmente, el proceso se repetirá varias veces o tenderá al infinito.

Así, la autosemejanza se refiere a la propiedad que tiene un objeto determinado en donde cualquiera de sus partes es similar a la totalidad del objeto, esta puede ser exacta o estadística y es producto de la iteración.



Además de la autosemejanza, para que un objeto pueda ser considerado como fractal, es preciso que cuente con una dimensión fraccionaria o fractal (D), esto es que el objeto, además de ser percibido en la realidad cartesiana, tenga una relación dimensional “intermedia” generada por iteración y trasciéndolos límites dimensionales euclidianos.

De acuerdo con Barnsley la dimensión fractal es:

un número que indica que tan densamente ocupa un conjunto el espacio métrico en el que existe, esto hace significativa a la dimensión fractal como un observable experimental y es independiente de las unidades de medida.

La fórmula para la dimensión fractal es $D = \log N / \log S$, donde N es el valor del generador en el fractal y S es la relación entre el generador y el iniciador.

Teniendo en cuenta las ideas presentadas hasta el momento, vale la pena recapitular en torno a los fractales, los cuales suelen ser descritos como poseedores de algunos de los siguientes atributos.

- Dimensión fractal.
- Autosemejanza.
- Recursividad.
- Ser abstractos o naturales.
- Escalaridad.
- Atractores.

Mientras tanto los antropólogos y arqueólogos suelen ver en los fractales las siguientes características:

- Autosemejanza en relaciones y redes sociales.
- Recursividad a diferentes escalas.
- Interacciones global/ regional/ local.
- Auto-organización.
- Dinámicas alejadas del equilibrio .
- Trayectorias autosimilares espacio temporales.
- Dimensión fractal.

Una definición para el concepto de fractal en tanto su aplicación en las disciplinas antropológicas es la siguiente: Relaciones y dinámicas autosemejantes y de dimensión fraccionaria, entre uno o más fenómenos, perceptibles en distintos niveles de observación, sean abstractos o naturales. Los fenómenos fractales presentarán, entonces, elementos como recursividad, autosemejanza y la posibilidad de cálculo de una dimensión fraccionaria D .

Generador

Una consecuencia de la publicación de Eglash [11] ha sido la descripción de la arquitectura antigua a partir de términos fractales como el templo Kandariya Mahadeva, donde se identifican hasta 84 iteraciones del generador, tan solo en la estructura más alta.



Midiendo Fractales: Dimensión Fractal

Los primeros cálculos de dimensión fractal inmersos en la arqueología se deben a Kennedy y Lin, en 1988, pero son Gilbert y Palmqvist (1995). Ellos analizan D en las suturas de un cráneo pleistocénico del yacimiento Venta Micena con el objeto de identificar la especie en función del patrón de sutura de cráneos equinos y humanos.

El método para calcular D en este trabajo es similar al de “Conteo de Cajas”, siendo la principal diferencia el software utilizado. La D (1.058) obtenida se contrastó con muestras de infantes contemporáneos y pleistocénicos (1,047 a 1.173) concluyendo que el cráneo perteneció a un homínido infantil. En cuanto a los cráneos equinos, estos ofrecieron valores de D muy superiores a los de los homínidos.

Autosemejanza Maya

En sus primeras aproximaciones los arqueólogos localizaron puntos geográficos mediante la utilización de la tecnología GPS en Yucatán, en sitios del Clásico Terminal. A cada sitio se le asignó un valor jerárquico del 1 al 4 (siendo el 1 para los sitios de mayor tamaño y 4 para los de menor tamaño). Posteriormente se desarrolló una hipótesis para explicar porque el patrón de asentamiento maya exhibe una relación fractal tanto a nivel comunal como a nivel regional, perceptible gracias a D y a la autosemejanza estadística. [4]

La hipótesis referente a las relaciones intrasitiales describe a los edificios como un patrón agrupado producto de un patrón previo que se itera en sí mismo. Con una organización espacial autosimilar, existen principios de linaje visibles en todo el sistema social. Así, las relaciones autosimilares trazan el comportamiento regional en función de distribuciones tamaño- frecuencia y tamaño- estatus de los asentamientos.

Una dimensión fractal en Teotihuacán

La tradición epistemológica de los mesoamericanos ha construido en la imaginaria académica, la ciudad de Teotihuacán como un espacio dividido por dos ejes en cruz “+”, estas líneas dividen el espacio en cuadrantes.

El concepto de autosimilitud de la geometría de los fractales, ayuda no solo a descubrir sino a explicar las regularidades de los diversos niveles de la estructura territorial. La autosimilitud, el sentido matemático, significa que el objeto está compuesto por pequeñas copias de sí mismo y cada una de ellas esta compuesta, a su vez, por copias más pequeñas de la misma forma y así, sucesivamente. En la teoría de los fractales, la relación entre las copias de diferentes tamaños se debe describir por leyes matemáticas. El grado de su irregularidad o de su fragmentación es idéntico en todas las escalas. Si estos parámetros son iguales en todas las direcciones, el fractal se llama autosimilar. El concepto de autosimilaridad reconoce que una pequeña parte de una forma imita las características del todo. Para buscar la dimensión fractal de Teotihuacán se utilizaron imágenes de radar y satelitales. La primera fue obtenida por la estación Norman de ESA, del 28 de Noviembre de 1995. El análisis fractal se llevó a cabo en el Gran Complejo, la Ciudadela, la Calle de los Muertos y la Pirámide del Sol sobre las imágenes directas y sobre las filtradas por SAR. La dimensión fractal de las estructuras Teotihuacanas de interés, fue estimada convirtiendo el conjunto de objetos con cajas de tamaños progresivamente más grandes.



La dimensión fractal de la masa (D_m) fue sorprendentemente igual a la dimensión de cada unidad analizada. Para todos los monumentos D_m estuvo cerca de 1.89 con un rango de varianza entre 0.003 y 0.016. El análisis fractal de la misma estructura se repitió usando la fotografía aérea de diferentes resoluciones y con varias orientaciones, y se volvió a observar una tendencia y valor constante a la masa de la dimensión fractal en la pirámide de la Luna, la Calle de los Muertos y la pirámide de Quetzalcóatl. Los resultados fueron independientes del tipo de imagen, resolución y orientación. Este valor corresponde a uno de los fractales más característicos, el de Sierpinski. Mandelbrot afirmó que la dimensión de esa carpeta (1.8928) expresa el grado de la irregularidad de la línea costera. El valor de 1.89 se repite y se sigue repitiendo en muchas imágenes de Teotihuacán. Por lo anterior, se estima que es probable que aparezcan otras dimensiones fractales en los productos Teotihuacanos. Con la combinación de ellas se dará un mejor entendimiento del patrón geométrico a través del cual veremos aspectos culturales que no se habían podido clarificar desde una “cultura euclidiana”.

Una vez que el concepto de autosimilitud se aceptó como plausible, fue posible formular analogías a fin de entender cómo se estructura el territorio en una población subordinada, como puede ser la otomí en una región fronteriza como el Centro Norte.

Bibliografía

- [1] BARNSLEY, MICHAEL., *Fractals Everywhere*, Academia Press, EUA, 1988.
- [2] BRAUN, ELIEZER, *Caos, fractales y cosas raras*, La Ciencia para todos, Fondo de Cultura Económica, México, 2011
- [3] BRAUN, ELIEZER, *Un movimiento en zigzag*, La Ciencia desde México, Fondo de Cultura Económica, México, 1991
- [4] BROWN, C. T., WITSCHY, WALTER R. T Y LIEBOVITCH, LARRY S., *The Broken Past: Fractals in Archaeology*, Journal of Archaeological Method and Theory, Vol.12, No.1, pp. 37-78, Springer, US, 2005.
- [5] CASARRUBIAS S. F., TAMARIZ M. A. *Elementos de Topología General*, Segunda Edición, Colección Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, Núm. 37, México, D.F., 2015
- [6] CONWAY J. B., *Functions of one complex variable I*. Springer Science second
- [7] DEVANEY R. L. *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment*, First Edition, Addison-Wesley studies in nonlinearity, 1989.
- [8] D. S. ALEXANDER *A history of complex dynamics: from Schröder to Fatou and Julia*, (1994)
- [9] DOMÍNGUEZ, S.P., CONTRERAS, V.J.E. *Dinámica Holomorfa, Los conjuntos de Fatou y Julia y algunas de sus propiedades de tres clases de funciones meromorfas*, Monografía, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Editorial BUAP, 2014.

- [10] DOMÍNGUEZ, S.P. Y SIENRA, L.G. *A study of the dynamics of $f_\lambda(z) = \lambda \sin(z)$* , International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 12, No. 12 (2012), pags. 2869-2883.
- [11] EGLASH, R., *African Fractals: Modern Computing and Indigenous Design*, Rutgers University Press, New Brunswick, NJ, 1999.
- [12] FACULTAD DE CIENCIAS POLÍTICAS Y SOCIALES. 7 de Noviembre de 2018. *La antropología*. Centro de estudios antropológicos. Recuperado de: <https://www.politicas.unam.mx/cea>
- [13] FIGUEIRAS, LOURDES, *Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales*, Suma 35, 2000
- [14] FRÉCHET, M. *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo 22(1906), 1-74.
- [15] HAUSDORFF, F. *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.
- [16] HOFSTADTER, DOUGLAS., GÖDEL, ESCHER, BACH. *Un eterno y grácil bucle*. Meta-temas 14, Tusquets, Barcelona, 2001.
- [17] HUA, XIN-HOU AND YANG, CHUNG-CHUNG *Dynamics of Transcendental Functions*, Asian Mathematics Series, Gordon and Breach Science Publishers, 1998.
- [18] IRIBARREN I. L., *Topología de espacios métricos*. Limusa-Wiley, 1973.
- [19] KUHN, LESLEY, LEVICK, DAVID, *Fractal Geometry, Organisational Management and Creative Change*, UWS, 2002.
- [20] MANDELBROT, BENOIT, *La geometría fractal de la naturaleza*, Tusquets, Barcelona, 1997.
- [21] MANDELBROT, BENOIT, *Los Objetos Fractales: forma azar y dimensión*, Tusquets, Barcelona, 1987.

- [22] MARKUSHEVICH, A. *Teoría de las funciones analíticas*, Tomo 1, 1ra. edición, editorial Mir, (1970).
- [23] MARSDEN J. E. AND HOFFMAN M. J. *Basic complex analysis*, Macmillan, 1987.
- [24] PAUL R.H. *Innovation in Mathematics*, Mathematics in the Modern World, W.H. Freeman and Company 1968.
- [25] SCHIFF, JOEL F *Normal Families*, Springer, 1993.
- [26] MADENN, CHARLES *Fractals in music: introductory mathematics for musical*, High Art Press, United States of America, 1999
- [27] S. MOROSAWA, Y.NISHIMURA, M. TANIGUCHI, T.UEDA, *Holomorphic Dynamics*. Cambridge University Press, 2000. edition, 1978, vol. 159
- [28] SPIEGEL, MURRAY R. *Variable Compleja*, McGraw-Hill, (2004).
- [29] TALANQUER, VICENTE, *fractus, fracta, fractal: fractales, de laberintos y espejos*, La Ciencia para todos, Fondo de Cultura Económica, México, 2011