



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Caminata aleatoria perezosa reforzada (LRRW): Análisis
asintótico a través de la teoría de martingalas

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

por

Javier Julián García Dorantes

Asesorado por

Dr. Victor Hugo Vazquez Guevara

Puebla Pue.
Junio 2025

Dedicatoria

Primero que todo, a mis papás.

Después, a mis abuelos, familiares en general, amistades.

A la FCFM-BUAP, a su notable personal académico y de investigación, especialmente al Dr. Vázquez Guevara, al personal docente, y a todas aquellas personalidades que también admiro profundamente.

Debo reconocer el privilegio de tener una amplia variedad de personas a mi alrededor que, además de tener mucha paciencia conmigo a lo largo de mi desarrollo humano, también me han brindado su apoyo y han podido identificar y motivar varias de mis capacidades, no sin reconocer que, frente a los errores, uno puede mejorar. Agradezco haber experimentado este recorrido, porque me permitió conocer nuevos puntos de vista con los que he podido interactuar y apreciar, dando y recibiendo alguna retroalimentación respetuosa. Y con esto, dada la oportunidad, tener la posibilidad de encontrar nuevas amistades que han aportado gratamente al desarrollo conjunto de la personalidad y de nuestra formación como profesionales, incluso si dejamos de lado la interacción habida en el ámbito puramente académico. Realmente me cuesta ponderar justamente el apoyo que cada persona me ha brindado, pero creo sensato e inmediato incluir principalmente a mi mamá María de los Ángeles y a mi papá Julián, considerando las facilidades y recursos que me brindaron, dentro de un soporte mayoritariamente positivo, con especial paciencia y cariño para los cuales debo «contraatacar» afectuosamente. Esencialmente es debido a ellos que pude terminar una carrera sin muchos obstáculos de real seriedad, siendo un hecho al cual siempre estaré profundamente agradecido. A mis abuelos, qué independientemente de cualquier cosa que estuviese haciendo siempre notaron cierto potencial en mí, evidenciado por sus preocupaciones, cuidados, interés, etc. Y todo ese apoyo lo recibo con verdadero cariño. A mis demás familiares, tíos, primos, etc. Siempre me hicieron sentir apreciado, mientras brindaban su apoyo, respeto e impulso para seguir adelante. Sincero es el afecto que puedo compartir con ellos. Ahora sí, algo complicado, algunas palabras para mis amistades, que a veces pueden ser pocas pero realmente son muchas y que acuden para tener una grata correspondencia social, en unos puntos intensa, en otros enriquecedora. Algunos de mis amigos, véase: Francisco C., Alberto R., Enrique C., Eduardo Z., Hugo S., Ronaldo M., José Jorge (pudiese poner sus matrículas si es que se requiere practicidad), Jean Tlanesi, Vicente, Gustavo M., Arturo H., Miguel P., el equipo de atletismo (en especial al Coach Gonzalo y a aquellos camaradas que permiten un ambiente competitivo sano y disfrutable), y otras amistades recientes que llegaron de manera inesperada y ojalá disculpen alguna falta de mención (saben que soy malo con los nombres).

A todos estos seres, les estaré más que agradecido.

Motivación histórica e intuitiva

El concepto de proceso estocástico fue tratado de manera generalmente intuitiva y empírica mediante sus aplicaciones en distintas áreas de las ciencias naturales y sociales. Sin embargo, gracias a la formulación axiomática introducida por el matemático ruso Andréi Kolmogorov en 1933 a través de su trabajo «Fundamentos de la teoría de Probabilidad», basándose en la investigación matemática de distintas autorías (por ejemplo, A. Markov, E. Borel, N. Wiener, P. Levy, etc.), podemos estudiar la teoría de la probabilidad desde un enfoque riguroso y formal que se fundamenta sobre la teoría de la medida y por sus objetos característicos, facilitando el tratamiento de los procesos estocásticos usando las herramientas aquí desarrolladas. Así, en términos simples, un proceso estocástico se puede definir como una colección indexada de variables aleatorias, cuya relevancia radica en que ahora se pueden definir como funciones medibles sobre un espacio de probabilidad que, en sí mismo, es un espacio de medida. A partir de aquí, se obtuvieron distintas formalizaciones y clasificaciones para los distintos procesos estocásticos, y las distintas relaciones que pueden existir entre estos.

En la presente tesis nos interesa ver cómo la teoría de martingalas puede aplicarse al comportamiento de algún proceso con características específicas que inicialmente puede o no ser una martingala. Este tipo de proceso estocástico cuyos orígenes vienen de los juegos de apuestas y sus distintas estrategias, en particular, refiriéndose a una estrategia de juego (popularizada en el siglo XVIII) en donde se iría duplicando la apuesta en cada derrota, esperando obtener un beneficio ante la llegada de la victoria, se caracterizan por el comportamiento del valor esperado de su siguiente observación condicionada por sus observaciones hasta el momento presente, el cuál será el mismo a la observación que se tiene en el presente. Considerando la amplia dificultad en el manejo de la convergencia y los teoremas límite como parte de la naturaleza aleatoria de los procesos estocásticos en general (se dificulta cuantificar de manera precisa el efecto de ciertas características iniciales para su posterior agregado aleatorio), si un proceso cumple la propiedad de la martingala, automáticamente tenemos a nuestro acceso una amplia teoría que nos permite investigar su comportamiento con menos dificultades y sin pedir algo tan ideal como una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. El desarrollo de dicha teoría fue ampliamente potenciado por los trabajos de J. L. Doob, que es considerado el fundador de la teoría moderna de martingalas (sin embargo, la cita más antigua en donde se puede encontrar el uso moderno de este término se puede encontrar en una de las tesis de J. Ville (véase [30]), estableciendo resultados importantes con respecto a teoremas de convergencia aplicados a las distintas estructuras secundarias que existen a partir de la noción de martingala (por ejemplo, las submartingalas, martingalas p-integrables, martingalas en diferencias, entre otras); y P. A. Meyer, que realizó avances significativos por medio de sus obras enfocadas en semimartingalas, integración estocástica y teoremas de descomposición.

Un concepto relevante en esta tesis es el de proceso estocástico *con memoria*, que se refiere al caso en donde alguna variable aleatoria en algún instante t_0 no es independiente de alguna otra correspondiente a $t < t_0$. También suele referirse a este como proceso no-Markoviano. Para estudiarlo adecuadamente, debemos asociar algún parámetro o régimen que nos ayude a observar si esta *memoria* tiene alguna influencia en el comportamiento del proceso con el paso del tiempo, o dicho de otra forma, ver la relación entre el análisis asintótico del proceso con el parámetro asociado a la memoria. Nuestro enfoque se dirige a aquellos a los que llamamos procesos de memoria infinita, en

donde la influencia de las observaciones pasadas decae lentamente a través del tiempo, permitiendo que eventos distantes sigan teniendo alguna influencia en el futuro. Una familia correspondiente a este tipo de procesos es la de modelos de tipo urna de Pólya, que contemplan una situación en donde se tiene una urna contenedora de canicas de colores a la que se le aplican esquemas de reemplazo de acuerdo al color de la canica escogida de manera aleatoria, cuyas condiciones iniciales pueden determinar tanto el tipo de convergencia que se obtendrá como los parámetros de la distribución límite (si existe), esto de acuerdo a la naturaleza del tipo de urna en cuestión [23]. El estudio a profundidad de esta familia de procesos nos llevó a prestar especial interés a otro caso de proceso de memoria infinita, denominada *caminata aleatoria del elefante* (ERW por sus siglas en inglés), introducido por Schütz y Trimper [27] en 2004, descrita como una caminata aleatoria en la cual a cada paso el caminante escoge uniformemente algún momento del pasado y elegirá aleatoriamente si repetirá su propio movimiento en tal momento o hará lo contrario (considerando que tiene dos elecciones de movimiento). Actualmente existe una amplia literatura acerca del comportamiento asintótico de la ERW (por ejemplo, véase [1], [15], [14]), mientras se siguen proponiendo variaciones de la misma, buscando efectos distintos correspondientes a la cantidad de relevancia que se le dá a las observaciones efectuadas en su pasado.

Lo que nos compete es el estudio de una caminata aleatoria reforzada, en concreto la *Caminata aleatoria perezosa reforzada* (LRRW por sus siglas en inglés), cuya principal cualidad es la que llamaremos como propiedad de lapso de memoria. El comportamiento que se busca es tal que, el caminante pueda basar su movimiento actual enteramente en su pasado o moverse con independencia del mismo. Esta caminata fue introducida en un artículo de González Navarrete y Hernández [10] en 2021, que aportó las herramientas necesarias para consolidar un análisis asintótico intensivo de la LRRW. Lo que se realizará en la presente tesis a modo de objetivo, es brindar una exposición detallada y visual si es posible, de las técnicas basadas en la teoría de martingalas y sus teoremas límite que nos permiten desglosar por casos sus propiedades asintóticas, que se encuentran determinadas por algún parámetro que presente relación directa con la memoria de esta caminata aleatoria, pudiendo minar varias de las características relevantes que posee en un sentido probabilístico. Dentro de estos teoremas límite, principalmente se busca que se satisfaga alguna versión adaptada de las siguientes: ley de los grandes números, la ley del logaritmo iterado, la convergencia a los momentos pares de la distribución normal y el teorema central del límite (tanto el que se cumple como convergencia en distribución, considerado como versión clásica, como la versión que garantiza la convergencia débil de medidas de forma casi segura).

Índice general

Dedicatoria	II
Motivación histórica e intuitiva	III
1. Preliminares	1
1.1. Nociones importantes	1
1.2. Esperanza condicional	5
1.3. Martingalas	7
2. LRRW: Análisis asintótico	9
2.1. Resultados básicos	9
2.2. Herramientas para el análisis asintótico	13
2.3. Lemas auxiliares	17
2.4. Resultados principales	20
2.4.1. Régimen difusivo	21
2.4.2. Régimen crítico	30
2.4.3. Régimen superdifusivo	34
3. Simulación y visualización gráfica	42
3.1. Ley de los Grandes Números	43
3.2. Ley del Logaritmo Iterado	44
3.3. Teorema Central del Límite	45
3.4. Ley Cuadrática Fuerte	46
3.5. Observaciones adicionales sobre el régimen superdifusivo	47
Conclusiones	48
A. Manipulación algebraica adicional	50
Bibliografía	53

Capítulo 1

Preliminares

El propósito de este capítulo es el de presentar definiciones y algunos teoremas que nos servirán para establecer un punto de partida que considere las nociones necesarias para la lectura de este trabajo. Únicamente se necesita cierta familiaridad con los cursos de análisis y probabilidad para tener un entendimiento a grandes rasgos, para entrar en contexto con lo que aquí se expone. No obstante, se brindarán referencias de recursos bibliográficos si uno requiere de mayor profundidad.

Se utilizará la notación usual $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ para referirse a un espacio de probabilidad, donde Ω es un espacio muestral, \mathcal{F} es una σ -álgebra sobre Ω y \mathbf{P} es una medida de probabilidad. Además, decimos que una variable aleatoria X es integrable si $\mathbb{E}|X| < \infty$ y, como abuso notacional, escribiremos $n \geq 0$ para referirnos a un entero no negativo (al poner a m como subíndice se le considerará de esta misma forma).

Dentro de los conceptos básicos, vale la pena mencionar el concepto de propiedad casi segura, los distintos tipos de convergencia que se manejan y la notación asintótica, así como el Lema de Toeplitz que nos permite tratar la convergencia de cierto tipo de sucesiones que involucran sumas parciales. Posteriormente será presentada la teoría pertinente a los procesos estocásticos.

1.1. Nociones importantes

Extraída de la teoría de la medida, se denomina propiedad casi segura a aquella que nos permite afirmar que, aunque no se satisfaga en la totalidad de un conjunto, esta propiedad se cumple en una cantidad de puntos «más que aceptable».

Definición 1.1. (*Propiedad casi segura*). Sea $E \in \mathcal{F}$ el evento que corresponde a todos los ω en Ω que satisfacen cierta propiedad, entonces se dice que esta ocurre casi seguramente (c.s. para abreviar) si $\mathbf{P}(E) = 1$.

Los tipos de convergencia que se estudian en probabilidad nos permiten entender la «tendencia» que hay, en este caso, de una sucesión de variables aleatorias hacia otra, esto de maneras diferentes, bajo ciertas condiciones restrictivas. Se debe tener claro que los siguientes tipos de convergencia *no son equivalentes* pero se garantiza un orden de implicaciones entre uno y otro.

Definición 1.2. (*Tipos de convergencia*).

- (*Convergencia casi segura*). Decimos que la sucesión (X_n) de variables aleatorias converge **casi seguramente** a la variable aleatoria X si:

$$\mathbf{P}\left(\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = \mathbf{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right) = 1.$$

Lo que va acorde a la definición anterior. Esto también se puede escribir como $X_n \xrightarrow{c.s.} X$.

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES
1.1. NOCIONES IMPORTANTES

- (Convergencia en probabilidad). Decimos que la sucesión (X_n) de variables aleatorias converge **en probabilidad** a la variable aleatoria X si para cualquier número real $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0.$$

La notación que será usada se escribe como $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$.

- (Convergencia en distribución). Sea F_n la función de distribución acumulada de X_n y F la función de distribución acumulada de X . Decimos que (X_n) converge **en distribución** (o en ley) a X si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x).$$

Notacionalmente, se puede escribir como $X_n \xrightarrow{d} X$ para todo $x \in \mathbb{R}$ en donde F sea continua.

- (Convergencia en media de orden p o convergencia en L^p). Se dice que (X_n) converge **en media de orden p** (o en L^p) a X si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[|X_n - X|^p] = 0.$$

Esto se puede escribir como $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

De lo anterior, es posible observar que se cumple la siguiente cadena de implicaciones:

$$\begin{aligned} X_n \xrightarrow{c.s.} X &\implies X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X \implies X_n \xrightarrow{d} X. \\ X_n \xrightarrow{L^q} X &\implies X_n \xrightarrow{L^p} X \implies X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X. \end{aligned}$$

Para cualesquiera números $q \geq p \geq 1$ reales.

Algunos ejemplos de la no-equivalencia pueden verse a continuación:

1. Si consideramos la sucesión (X_n) de variables aleatorias independientes tales que $P(X_n = 1) = 1/n$ y $P(X_n = 0) = 1 - 1/n$, uno puede verificar que $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ pero que no converge a cero casi seguramente (para ver esto, puede usarse el Segundo Lema de Borel-Cantelli).
2. Si definimos la sucesión de variables aleatorias continuas como $X_{2n}(\omega) = \omega$ y $X_{2n+1}(\omega) = 1 - \omega$, con $n \geq 0$, sobre el espacio de probabilidad $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], \text{leb}[0, 1])$, en donde $\text{leb}[0, 1]$ se refiere a la medida de Lebesgue restringida al intervalo unitario, con $\text{leb}[0, 1](A) = b - a$, $A \in \{(a, b), [a, b], [a, b), (a, b]\} \subseteq [0, 1]$, entonces tenemos que todas tienen la misma distribución (en este caso, la distribución uniforme continua $U[0, 1]$), pero no convergen en probabilidad a ninguna variable aleatoria (si se supone lo contrario se llega a una contradicción).
3. Tomando el mismo espacio de probabilidad que en el ejemplo anterior y definiendo a las variables aleatorias que conforman la sucesión (X_n) como $X_n(\omega) = 2^n \mathbf{1}_{[0, 1/n]}(\omega)$, entonces $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, pero $\mathbf{E}[|X_n|^p] = \frac{2^{np}}{n}$ (2^n «crece más rápido» que n , encontrándonos con una divergencia a infinito).

Otro tipo de convergencia que debemos considerar es la llamada «convergencia débil de medidas», y que requiere una mención aparte de las convergencias anteriores, puesto que nos interesa el comportamiento de una sucesión de medidas (en lugar de una de variables aleatorias) y el saber de qué forma podríamos definir su cercanía a una medida límite. Cabe mencionar que esta noción de convergencia se puede ver como una extensión de la convergencia en distribución, y se hace de la siguiente forma. Supongamos que tenemos una sucesión (X_n) de variables aleatorias sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ tales que $X_n \xrightarrow{d} X$, con F la función de distribución de X y la medida \mathbf{P}_0 dada por $\mathbf{P}_0((-\infty, x]) := F(x)$, y si definimos la sucesión de medidas (\mathbf{P}_n) como

$\mathbf{P}_n((-\infty, x]) := F_n(x)$, donde cada F_n es la función de distribución asociada a cada X_n , para $n \geq 1$ (recordemos que $F_n(x) = \mathbf{P}(X_n \leq x)$). Podemos mostrar así la siguiente relación

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n((-\infty, x]) &= \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \\ &= F(x) = \mathbf{P}_0((-\infty, x]). \end{aligned}$$

Uno puede notar que $\mathbf{P}(\{x\}) = 0$, lo cual será incluido de forma extendida en la definición que va a mostrarse a continuación. De esta manera, hay una correspondencia uno a uno entre medidas de probabilidad y funciones de distribución (se debe mencionar que esto es posible mientras se trabaje en un espacio métrico, en este caso \mathbb{R} es metrizable).

Definición 1.3. (*Convergencia débil de medidas*). Una sucesión de medidas de probabilidad (\mathbf{P}_n) sobre $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ **converge débilmente** a una medida \mathbf{P} si, para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ tal que $\mathbf{P}(\partial A) = 0$ (A suele ser llamado conjunto \mathbf{P} -continuo, donde ∂A denota la frontera del conjunto A), se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}(A).$$

La notación utilizada suele ser $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$.

Lo que motiva a usar esta definición es el siguiente teorema, que establece que hay propiedades equivalentes a esta misma.

Proposición 1.1. (*Teorema de Portmanteau*). Sean (\mathbf{P}_n) y \mathbf{P} medidas de probabilidad sobre $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ y sea $X : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ el vector aleatorio identidad. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbf{P}_n}[f(X)] = \mathbb{E}_{\mathbf{P}}[f(X)]$, para toda función f real sobre \mathbb{R}^m continua y acotada (de esta forma, $f(X)$ es una variable aleatoria).
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbf{P}_n}[f(X)] = \mathbb{E}_{\mathbf{P}}[f(X)]$, para toda función f real sobre \mathbb{R}^m uniformemente continua y acotada.
4. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(G) \leq \mathbf{P}(G)$ para todo conjunto G cerrado en \mathbb{R}^m .
5. $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(H) \geq \mathbf{P}(H)$ para todo conjunto H abierto en \mathbb{R}^m .

Convencionalmente, se escribe $\mathbb{E}[X]$ cuando se obtiene la esperanza con respecto a una medida de probabilidad que siempre será la misma (y por ende, no se requiere especificar), y se escribe $\mathbb{E}_{\mathbf{P}}[X]$ cuando se necesita obtener esperanzas con respecto a distintas medidas de probabilidad.

Puede consultarse una demostración en [4].

La medida Gaussiana es notable en tanto que se obtenga una convergencia débil de medidas que la involucre, lo que será realizado de forma segura en el siguiente capítulo, así que es merecida la mención de su definición.

Definición 1.4. (*Medida Gaussiana no-degenerada*). Definimos a la medida Gaussiana G_m sobre \mathbb{R}^m con media μ y varianza $\sigma^2 > 0$ (es decir, no-degenerada) de la siguiente forma

$$G_m(A) := \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{m/2}} \int_A e^{-\|\mathbf{x}-\mu\|^2/2\sigma^2} d\mathbf{x}.$$

Para todo A conjunto boreliano m -dimensional.

Será suficiente con considerar una medida Gaussiana $N(\mu, \sigma^2)$ unidimensional.

La notación que se mostrará a continuación nos sirve para expresar las relaciones que existen entre funciones de acuerdo con sus «velocidades» o «ritmos» de convergencia.

Definición 1.5. (Equivalencia asintótica, notación « O » grande, « o » pequeña).

- Decimos que f y g son dos funciones asintóticamente equivalentes si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Notacionalmente se escribe como $f(x) \sim g(x)$.

- Sean (x_n) y (y_n) dos sucesiones (de números reales o variables aleatorias). Se dice que $x_n = O(y_n)$ (se lee (x_n) es O -grande de (y_n)) si ocurre que existen dos constantes C y n_0 tales que

$$|x_n| \leq C|y_n| \text{ para todo } n \geq n_0.$$

- Y se dice que $x_n = o(y_n)$ (se lee (x_n) es o -pequeña de (y_n)) si existe una constante n_0 tal que, para toda $\epsilon > 0$,

$$|x_n| \leq \epsilon|y_n| \text{ para todo } n \geq n_0.$$

O lo que es lo mismo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

(Propiedades de la notación « O » grande).

- (Reflexividad) $x_n = O(x_n)$.
- (Transitividad) Si $x_n = O(y_n)$ y $y_n = O(z_n)$, entonces $x_n = O(z_n)$.
- (Multiplicación por una constante positiva) Si $c > 0$ y $x_n = O(y_n)$, entonces $cx_n = O(y_n)$.
- (Regla de la suma) Si $x_n = O(z_n)$ y $y_n = O(z_n)$, entonces $x_n + y_n = O(z_n)$.
- (Regla del producto) Si $x_n = O(a_n)$ y $y_n = O(b_n)$, entonces $x_n \cdot y_n = O(a_n \cdot b_n)$.

Para familiarizarse con estas relaciones asintóticas, se sugiere el libro [13] señalado en la bibliografía.

El siguiente resultado, relacionado con los cursos de análisis matemático que tratan sobre la convergencia de series, nos permite maniobrar distintas expresiones matemáticas que irán surgiendo posteriormente.

Lema 1.1. (Toeplitz). Sea $\{a_{nk} : 1 \leq k \leq k_n, n \geq 1\}$ un arreglo doble de números reales tal que, para cualquier $k \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0$ y $\sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{k_n} |a_{nk}| < \infty$. Sea $\{x_n, n \geq 1\}$ una sucesión de números reales.

1. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} a_{nk} x_k = 0$.

2. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{R}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} a_{nk} = 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} a_{nk} x_k = x$.

Y en particular, si (a_n) es una sucesión de números reales positivos que satisface $\sum_{k=1}^{\infty} a_n = \infty$ y si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^{-1} \sum_{k=1}^n a_k x_k = x.$$

Si se busca alguna demostración, se puede hallar una en [17].

1.2. Esperanza condicional

Es crucial definir uno de los conceptos clave en el estudio de la teoría de procesos estocásticos, el de esperanza condicional, la cual, en su definición general depende de la información brindada por la σ -álgebra que se está tomando en consideración. Además, se darán algunas propiedades esenciales. En esta sección, X se tomará como una variable aleatoria integrable sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Antes de la definición general, para su entendimiento se mencionarán unos casos particulares de la definición principal, para partir de un enfoque más intuitivo.

Definición 1.6. (*Esperanza condicional*).

1. (Dado un evento A) Sea $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbf{P}(A) \neq 0$. Entonces la esperanza condicional de X dado A se define como

$$E[X|A] = \frac{1}{\mathbf{P}(A)} E[X \mathbf{1}_A].$$

2. (Dada una variable aleatoria discreta) Si Y es una variable aleatoria discreta sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, entonces la esperanza condicional de X dado Y se define como la variable aleatoria que cumple

$$E[X|Y](\omega) = E[X|\{Y = y_n\}].$$

Para $\omega \in \Omega$ cuando satisfaga que $Y(\omega) = y_n$, $n \in \mathbb{N}$, con $\mathbf{P}(\{Y = y_n\}) \neq 0$.

3. (Dada una σ -álgebra generada por una partición numerable) Sea $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una σ -álgebra generada por una partición numerable (G_n) de Ω , tal que $\mathbf{P}(G_n) > 0$ para todo $n > 0$. Entonces la esperanza condicional de X dada \mathcal{G} es la variable aleatoria dada por

$$E[X|\mathcal{G}](\omega) = \frac{1}{\mathbf{P}(G_n)} E[X \mathbf{1}_{G_n}].$$

Para $\omega \in \Omega$ con $\omega \in G_n$.

No es complicado verificar que en el inciso 2, $E[X|Y]$ es $\sigma(Y)$ -medible; y que en el inciso 3, $E[X|\mathcal{G}]$ es \mathcal{G} -medible. Además, retomando el inciso 2, se puede notar que se cumple que

$$E[E[X \cdot \mathbf{1}_A|Y]] = E[E[X | \sigma(Y)] \cdot \mathbf{1}_A] = E[X \cdot \mathbf{1}_A].$$

Para todo $A \in \sigma(Y)$ (Análogamente lo mismo para el inciso 3). Esto nos prepara para familiarizarnos con lo siguiente.

Definición 1.7. (*Esperanza condicional dada una σ -álgebra*). Sea \mathcal{G} una σ -álgebra tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. La esperanza condicional de la variable aleatoria X dada \mathcal{G} es cualquier variable aleatoria $E[X | \mathcal{G}]$ que satisfaga las siguientes dos propiedades

1. $E[X | \mathcal{G}]$ es integrable.
2. $E[X | \mathcal{G}]$ es \mathcal{G} -medible.
3. Para cualquier $A \in \mathcal{G}$,

$$E(E[X | \mathcal{G}] \cdot \mathbf{1}_A) = E[X \cdot \mathbf{1}_A].$$

La razón por la que esta definición depende de una σ -álgebra es que, si tenemos dos variables aleatorias que no necesariamente son iguales pero que generan a la misma σ -álgebra, entonces las esperanzas condicionales de X con respecto a cada una de estas variables es igual (casi seguramente), es decir, la esperanza condicional no depende de los valores que tomen dichas variables

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES
1.2. ESPERANZA CONDICIONAL

aleatorias, sin embargo, alguna diferencia se puede observar cuando se tienen variables aleatorias que generan a distintas σ -álgebras. Por otro lado, solo la definición anterior no deja en claro si $E[X|\mathcal{G}]$ es única o incluso si existe, puesto que no se presenta alguna manera para obtener directamente una variable aleatoria con estas características.

Usaremos una versión simplificada pero válida del teorema de Radon-Nikodým, cuyas hipótesis en la versión general de este teorema se ven satisfechas si se aplica a los espacios de probabilidad.

Teorema 1.1. (Radon-Nikodým). Sean $([0,1], \mathcal{F})$ un espacio medible, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una σ -álgebra y \mathbf{P}, \mathbf{Q} dos medidas de probabilidad que cumplen que, para todo $A \in \mathcal{G}$ tal que $\mathbf{P}(A) = 0, \mathbf{Q}(A) = 0$. Entonces existe una función \mathcal{G} -medible Y tal que

$$\mathbf{Q}(A) = \int_A Y d\mathbf{P}, \quad \text{para todo } A \in \mathcal{G}.$$

Lema 1.2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad y sea \mathcal{G} una σ -álgebra contenida en \mathcal{F} . Si Y es \mathcal{G} -medible y si se tiene que para todo $G \in \mathcal{G}$

$$E[Y\mathbf{1}_G] = 0,$$

Entonces $Y = 0$ casi seguramente.

Así, acorde al Teorema 1.1 de Radon-Nikodym, si definimos $\mathbf{Q}(A) := E[X\mathbf{1}_A], A \in \mathcal{G}$, con $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ambas σ -álgebras (no es complicado ver que \mathbf{Q} es una medida de probabilidad), entonces existe una variable aleatoria \mathcal{G} -medible Y tal que $\mathbf{Q}(A) = E[X\mathbf{1}_A] = \int_A Y d\mathbf{P}$, para todo $A \in \mathcal{G}$, pues se observa que si $\mathbf{P}(A) = 0$, entonces $\mathbf{Q}(A) = 0$, afirmando que se tiene la existencia de la esperanza condicional. Y el Lema 1.2 nos garantiza la unicidad casi segura. Esto se hace más claro y explícito cuando se estudia teoría de la medida en conjunto con los conceptos esenciales de probabilidad, siendo un ejemplo el enfoque mostrado en [6], pudiendo ser complementado con [5]. Ya garantizadas la existencia y unicidad de la esperanza condicional, debemos tener en cuenta las propiedades que tenemos a nuestra disposición para maniobrarla con mayor facilidad.

Teorema 1.2. (Propiedades de la esperanza condicional). Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad, X, Y variables aleatorias \mathcal{F} -medibles integrables, $\mathcal{G}, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ σ -álgebras tales que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ y $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{F}$. Entonces se cumple lo siguiente:

1. (Linealidad) Para $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrarias, se cumple

$$E[aX + bY | \mathcal{G}] = aE[X | \mathcal{G}] + bE[Y | \mathcal{G}] \quad \text{c.s.}$$

2. Si Z es \mathcal{G} -medible e integrable, entonces $E[Z | \mathcal{G}] = Z \quad \text{c.s.}$

3. Supongamos que $X \geq Y$ casi seguramente. Entonces $E[X | \mathcal{G}] \geq E[Y | \mathcal{G}] \quad \text{c.s.}$

4. $|E[X | \mathcal{G}]| \geq E(|X| | \mathcal{G}) \quad \text{c.s.}$

5. Si Z es \mathcal{G} -medible e integrable, entonces $E[X \cdot Z | \mathcal{G}] = Z \cdot E[X | \mathcal{G}] \quad \text{c.s.}$

6. (Propiedad torre) $E(E[X | \mathcal{G}_2] | \mathcal{G}_1) = E[X | \mathcal{G}_1] = E(E[X | \mathcal{G}_1] | \mathcal{G}_2) \quad \text{c.s.}$

7. Si $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ o X es independiente de \mathcal{G} , entonces $E[X | \mathcal{G}] = E[X] \quad \text{c.s.}$

8. (Ley de la esperanza total) $E[E[X | \mathcal{G}]] = E[X] \quad \text{c.s.}$

Las pruebas para cada propiedad pueden encontrarse en [5] y [31].

1.3. Martingalas

La esperanza condicional otorga parte de su versatilidad (por medio de sus propiedades) a varios de los procesos estocásticos más estudiados, de ahí que se le considere el objeto matemático central en esta teoría. Así que, después de que se le haya presentado, tendrá sentido introducir cuanto proceso estocástico sea necesario. En particular, el proceso estocástico protagonista por el cual se estudiará a nuestra caminata es la **martingala**, para el que, uno de los intereses iniciales de su estudio fue el de poder asimilar que no existe ninguna estrategia ganadora en la mayoría de juegos con apuestas de azar (en caso de que se defina un tiempo de paro). Con prontitud deberá mostrarse su definición.

Definición 1.8. (*Martingala*). Sea (\mathcal{F}_n) una sucesión de σ -álgebras tales que $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1} \subseteq \mathcal{F}$ para todo $n \geq 0$ (se llamará a (\mathcal{F}_n) una **filtración** sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$). Una **martingala** (a tiempo discreto) con respecto a la filtración (\mathcal{F}_n) , es una sucesión de variables aleatorias (X_n) que cumplen las siguientes propiedades:

para cada $n \geq 0$,

1. X_n es \mathcal{F}_n -medible (lo cual se conoce también como que (X_n) está adaptado a la filtración (\mathcal{F}_n)),
2. $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ (o lo que es lo mismo, cada X_n es integrable),
3. $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$ c.s.

(*Submartingala y supermartingala*). Decimos que (X_n) es una submartingala (supermartingala) a tiempo discreto con respecto a la filtración (\mathcal{F}_n) si se cumplen 1) y 2) y además

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \geq X_n \text{ c.s.} \quad (\text{Respectivamente, } \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \leq X_n \text{ c.s.}).$$

En la definición dada, la propiedad que mejor caracteriza a la martingala y que la diferencia del resto de tipos de procesos estocásticos es la propiedad del inciso 3. Ahora, presentaremos algunos tipos de martingalas cuyas propiedades nos serán útiles para el desarrollo posterior del análisis asintótico.

Definición 1.9. 1. (*Martingala p -integrable*). Se dice que una martingala (X_n) es p -integrable si cada X_n es p -integrable, es decir, si $\mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty$. Si $p = 2$, nos referiremos a esta como martingala cuadrado integrable.

2. (*Martingala en diferencias*). Se dice que la sucesión de variables aleatorias (X_n) es una martingala en diferencias si es un proceso adaptado a una filtración (\mathcal{F}_n) cuyas sumas parciales $\sum_n X_n$ forman una martingala.

Y por supuesto, brindamos a continuación algunas propiedades relevantes respectivas a las martingalas.

Teorema 1.3. (*Propiedades de martingalas*) Sea (X_n) una martingala con respecto a la filtración (\mathcal{F}_n) . Entonces:

1. $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_n]$ para todo $n > 0$.
2. (*Desigualdad de Jensen*). Si $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa, y $\mathbb{E}[c(X)] < \infty$, entonces

$$\mathbb{E}[c(X) | \mathcal{G}] \geq c(\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]).$$

3. Si (ϵ_n) es una martingala en diferencias, entonces

$$\mathbb{E}[\epsilon_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 0 \quad \text{c.s.}$$

Se mencionará el teorema de descomposición (Doob-Meyer) para introducir a la **variación cuadrática predecible** o **proceso creciente** asociado a la martingala (X_n) . Para mayor familiaridad, tenemos la siguiente definición

Definición 1.10. (*Proceso predecible*). Un proceso (X_n) es llamado predecible (con respecto a la filtración (\mathcal{F}_n)) si, para todo $n > 0$, X_n es F_{n-1} -medible.

Proposición 1.2. (*Descomposición (Doob-Meyer)*). Sea (X_n) un proceso adaptado (a alguna filtración) con $X_n \in L^1$ (otra forma de escribir que cada X_n es integrable) para todo $n \geq 0$. Entonces (X_n) se puede descomponer de la siguiente manera, a la cual se le llama descomposición de Doob:

$$X_n = X_0 + M_n + A_n, \quad n \geq 0.$$

Donde (M_n) es una martingala nula en cero ($M_0 = 0$) y (A_n) es un proceso predecible nulo en cero. Además, (X_n) es una submartingala si y solo si el proceso (A_n) es un proceso creciente en el sentido que

$$\mathbf{P}(A_n \leq A_{n+1}, \forall n) = 1.$$

Y a partir de lo anterior, sea (M_n) una martingala cuadrado integrable nula en cero. Por la desigualdad de Jensen, considerando que la función x^2 es convexa, se puede afirmar que (M_n^2) es una submartingala. Gracias a esto y al teorema de Descomposición antes dado, para $n \geq 0$

$$M_n^2 = N_n + A_n.$$

Donde (N_n) es una martingala y (A_n) es un proceso predecible creciente, ambos nulos en cero.

Notacionalmente, este proceso se escribirá como $A_n := \langle M \rangle_n$ y definase $A_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$. Al ser N una martingala nula en cero, tenemos que $E[M_n^2] = E[A_n]$, lo que nos dice que M es un proceso acotado en L^2 si y solo si $E[A_\infty] < \infty$. Lo relevante del proceso $\langle M \rangle_n$ es que

$$\langle M \rangle_n - \langle M \rangle_{n-1} = \mathbb{E}[M_n^2 - M_{n-1}^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[(M_n - M_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}].$$

Y de aquí, se tiene el proceso creciente expresado como:

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_n &= \sum_{k=1}^n \Delta \langle M \rangle_k \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(\Delta M_k)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}]. \end{aligned}$$

Con $\langle M \rangle_0 = 0$. A este proceso creciente también se le puede llamar variación cuadrática predecible (asociado a (M_n)).

Toda esta subsección referente a martingalas (y mucho más) se puede encontrar en [31], introduciéndonos en una teoría muy prometedora. Para concluir este capítulo, necesitamos saber qué es una caminata aleatoria, siendo apropiado incluir su definición.

Definición 1.11. (*Caminata aleatoria n-dimensional*). Sea (X_k) una sucesión de variables aleatorias (o vectores aleatorios) en \mathbb{R}^n . Una caminata aleatoria con punto de salida en $p \in \mathbb{R}^n$ es la sucesión (S_k) , donde $S_0 = p$ y

$$S_k = S_{k-1} + X_k, \quad k \geq 1. \tag{1.1}$$

Se suele decir que (X_k) es el movimiento o paso que da la caminata aleatoria y (S_k) su posición.

Por lo general, se pide que las variables que conforman el movimiento de la caminata aleatoria sean independientes e idénticamente distribuidas, siendo que así presentan características y propiedades deseables, pero omitiendo estos requisitos, se extiende de manera simple a una definición más general, en la cual se incluye la caminata aleatoria que se va a estudiar e introducir en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

LRRW: Análisis asintótico

2.1. Resultados básicos

Es crucial presentar al inicio de este capítulo a la caminata aleatoria que será nuestro objeto de estudio. Posteriormente se mostrarán sus propiedades básicas. **La caminata aleatoria perezosa reforzada (LRRW por sus siglas en inglés)**, puede considerarse como una caminata aleatoria del elefante (ERW) con retrasos bajo un lapso de memoria, la cual se define de la siguiente manera.

Definición 2.1. (Caminata aleatoria perezosa con refuerzo). Sean $(X_n), (S_n)$ las sucesiones de variables aleatorias que representan el movimiento y la posición al instante $n \geq 0$ de la **LRRW**, caracterizados por el siguiente comportamiento:

Cuando $n = 0$, la posición inicial de la LRRW estará en el origen, indicado como $S_0 = 0$.

Cuando $n = 1$, tenemos que $S_1 = X_1$, que está dado por la siguiente distribución

$$X_1 = \begin{cases} 1, & \text{con probabilidad } p, \\ -1, & \text{con probabilidad } q, \\ 0, & \text{con probabilidad } r. \end{cases}$$

Cuando $n \geq 1$, se tiene que

$$X_{n+1} = Y_n \alpha_{n+1} X_{U_n} + (1 - Y_n) \alpha_{n+1}. \quad (2.1)$$

Donde se contemplan las siguientes distribuciones:

- U_n es una variable aleatoria con distribución uniforme discreta sobre $\{1, \dots, n\}$.
- Y_n es una variable aleatoria con distribución Bernoulli que tiene como parámetro a $\theta \in [0, 1)$ (el caso $\theta = 1$ ya está caracterizado por la ERW con retrasos, que puede verse en [16]).
- α_{n+1} es una variable aleatoria a la que le corresponde la siguiente distribución

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{con probabilidad } p, \\ -1, & \text{con probabilidad } q, \\ 0, & \text{con probabilidad } r. \end{cases} \quad (2.2)$$

Naturalmente, $p + q + r = 1$. La posición de la LRRW estará dada por

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}. \quad (2.3)$$

Para efectos prácticos, asumiremos que α_n y U_n son independientes, y que Y_n es independiente

CAPÍTULO 2. LRRW: ANÁLISIS ASINTÓTICO
2.1. RESULTADOS BÁSICOS

del pasado de la LRRW. Para entender el comportamiento de la LRRW de manera intuitiva, podemos dar un rol a cada variable aleatoria que aparece en su definición, para lo cual podemos verificar por casos. Obsérvese que si $Y_n = 0$, el movimiento X_{n+1} no toma en consideración al pasado. Si para algún $k > n$ ocurre que $Y_k = 1$, el pasado ahora sí se considerará. Hay que notar que si $\alpha_{k+1} = 0$, se anulará la influencia del pasado. Véase así a Y_n como un interruptor para la memoria de la LRRW, llamando a esta situación la propiedad de lapso de memoria. Correspondiente a α_{n+1} , la podemos interpretar como una variable que puede aceptar, rechazar o anular el movimiento realizado en U_n .

La ERW posee una amplia literatura que la describe, analiza y desarrolla, y son varias las técnicas empleadas en el estudio de la ERW y sus variantes que serán aplicadas en la LRRW.

Acordaremos usar como notación lo siguiente. Sea (\mathcal{F}_n) la filtración sobre \mathcal{F} definida como $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ para cada $n \geq 1$, que representa el conocimiento disponible sobre el proceso (X_m) al tiempo n . Por convención, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

La siguiente lista de resultados es primordial para la comprensión del comportamiento de la LRRW.

Proposición 2.1. *Manteniendo la notación anterior, la LRRW satisface lo siguiente.*

- $\mathbb{E}[X_{U_n} | \mathcal{F}_n] = \frac{S_n}{n}$ c.s.
- $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \alpha \frac{S_n}{n} + \omega$ c.s.
- $\mathbb{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \gamma_n S_n + \omega$ c.s.

Donde $\alpha := \theta(p - q)$, $\omega := (1 - \theta)(p - q)$ y $\gamma_n := 1 + \frac{\alpha}{n}$, $n \geq 1$. A partir de aquí, ω no se utilizará como notación para algún elemento en el espacio muestral Ω , sino que será una constante.

Demostración.

- Usando el Teorema de la Probabilidad Total, condicionando sobre la variable aleatoria U_n tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{U_n} | \mathcal{F}_n] &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_{U_n} \mathbb{1}_{\{U_n=k\}} | \mathcal{F}_n] \mathbf{P}\{U_n = k\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_{U_n} \mathbb{1}_{\{U_n=k\}} | \mathcal{F}_n] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k | \mathcal{F}_n] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \\ &= \frac{S_n}{n} \quad \text{c.s.} \end{aligned}$$

- Dado que se supone independencia entre variables aleatorias, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[Y_n | \mathcal{F}_n] \mathbb{E}[\alpha_{n+1} | \mathcal{F}_n] \mathbb{E}[X_{U_n} | \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[1 - Y_n | \mathcal{F}_n] \mathbb{E}[\alpha_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\ &= \theta \cdot (p - q) \cdot \frac{S_n}{n} + (1 - \theta) \cdot (p - q) \\ &= \alpha \frac{S_n}{n} + \omega \quad \text{c.s.} \end{aligned}$$

- Como $S_{n+1} = X_{n+1} + S_n$ con S_n siendo \mathcal{F}_n -medible, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[X_{n+1} + S_n \mid \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] + S_n \\ &= \alpha \frac{S_n}{n} + S_n + \omega \\ &= \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) S_n + \omega \\ &= \gamma_n S_n + \omega \quad \text{c.s. } \square\end{aligned}$$

Así, con mayor seguridad procedamos a definir la «martingala asociada» (hasta este punto no sabemos si es una martingala), clave en el análisis asintótico de la LRRW. Notaremos más adelante que las constantes que serán utilizadas están dadas de tal forma que podamos manipular a la LRRW para construir una martingala basada en esta.

Proposición 2.2. Sea (M_n) una sucesión de variables aleatorias definidas de la siguiente forma:

$$M_0 = 0; \quad \text{y para } n \geq 1, M_n = a_n S_n - \omega A_n.$$

Donde $a_i := 1, i \in \{0, 1\}$. Para $n \geq 2$

$$a_n := \prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{-1} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha)} \sim \frac{\Gamma(1+\alpha)}{n^\alpha}.$$

$$A_0 := 0, \quad \text{Y para } n \geq 1, A_n := \sum_{k=1}^n a_k.$$

Con Γ la función Gamma de Euler. Entonces (M_n) es una martingala (la martingala asociada a la LRRW) a tiempo discreto con respecto a (\mathcal{F}_n) .

Demostración. Directamente se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[a_{n+1} S_{n+1} - \omega A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \\ &= a_{n+1} (\gamma_n S_n + \omega) - \omega A_{n+1} \\ &= a_n S_n + \omega a_{n+1} - \omega A_{n+1} \\ &= a_n S_n - \omega A_n \\ &= M_n \quad \text{c.s.}\end{aligned}$$

También observe que, usando $\Gamma(n) = (n-1)!$ para n entero positivo y $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ se tiene que

$$\begin{aligned}a_n &= \prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{-1} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+\alpha} \\ &= \frac{(n-1)!}{\prod_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+k)}} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha+n) \prod_{k=2}^{n-2} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha+k)}} \\ &= \frac{\Gamma(n)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha)}.\end{aligned}$$

Ahora, para ver que $a_n \sim \frac{\Gamma(1+\alpha)}{n^\alpha}$, se aproximará por medio de la Fórmula de Stirling para

la función Γ de Euler (puede consultar esta fórmula y una demostración en [7]).

$$a_n = \frac{\Gamma(n)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha)} \sim \frac{\sqrt{2\pi(n-1)} \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}{\sqrt{2\pi(n+\alpha-1)} \left(\frac{n+\alpha-1}{e}\right)^{n+\alpha-1}} \Gamma(1+\alpha) \sim \frac{\Gamma(1+\alpha)}{n^\alpha}. \quad \square$$

Nos será esclarecedor tener una noción del comportamiento probabilístico de (S_n) , para lo cual es adecuado obtener una expresión para sus probabilidades de transición. Al considerar $\mathbf{P}(S_{n+1} = s_{n+1} \mid S_n) = \mathbf{P}(X_{n+1} + S_n = x + s_n \mid S_n)$, parece que nos interesa encontrar en particular $\mathbf{P}(X_{n+1} = x \mid X_1, \dots, X_n) = \mathbf{P}(X_{n+1} = x \mid \mathcal{F}_n)$, por lo se hará enseguida.

Proposición 2.3. *Se cumple lo siguiente*

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(X_{n+1} = x \mid \mathcal{F}_n) \\ &= \frac{\theta}{n} \sum_{k=1}^n \left[\frac{(p+q) + (p-q)x \cdot X_k}{2} + (1-x^2) \left(r - \frac{(p+q)}{2} \right) + (1-X_k^2) \left(-\frac{(p+q)}{2} \right) \right. \\ & \quad \left. + (1-x^2)(1-X_k^2) \left(\frac{3(p+q)}{2} \right) \right] + (1-\theta) \left[\frac{(p+q) + (p-q)x}{2} + (1-x^2) \left(r - \frac{(p+q)}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.4)$$

$x \in \{1, -1, 0\}$.

Demostración. Para verificar que este resultado es válido, deben considerarse todas las combinaciones posibles que hay entre los valores que podemos suponer para X_k (la probabilidad que debemos obtener está condicionada por información ya dada), entre los que pueden ser 1, -1 o 0, considerando la ocurrencia del evento $\{U_n = k\}$ con $1 \leq k \leq n$ entero, y los valores que puede tomar X_{n+1} , enfocándonos en obtener la probabilidad de que $X_{n+1} = x$, suponiendo que x toma como valor 1, -1 o 0, guiándonos por lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{n+1} = x \mid \mathcal{F}_n) &= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(X_{n+1} = x \mid X_1, \dots, X_n, U_n = k) \cdot \mathbf{P}(U_n = k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(Y_n \alpha_{n+1} X_k + [1 - Y_n] \alpha_{n+1} = x \mid X_k). \end{aligned}$$

Para construir este resultado, si tomamos un $m \in \{1, \dots, n\}$, nos podemos enfocar en esta probabilidad

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_n \alpha_{n+1} X_m + [1 - Y_n] \alpha_{n+1} = x \mid X_m) &= \mathbf{P}(Y_n \alpha_{n+1} X_m + [1 - Y_n] \alpha_{n+1} = x \mid X_m, Y_n = 1) \mathbf{P}(Y_n = 1) \\ & \quad + \mathbf{P}(Y_n \alpha_{n+1} X_m + [1 - Y_n] \alpha_{n+1} = x \mid X_m, Y_n = 0) \mathbf{P}(Y_n = 0). \end{aligned}$$

De aquí, examinemos por partes. Para la primera parte,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_n \alpha_{n+1} X_m + [1 - Y_n] \alpha_{n+1} = x \mid X_m, Y_n = 1) \mathbf{P}(Y_n = 1) &= \theta \cdot \mathbf{P}(\alpha_{n+1} X_m = x \mid X_m) \\ &= \theta \cdot \mathbf{P}(\alpha_{n+1} = y). \end{aligned}$$

Donde y es tal que $y \cdot X_m = x$. Por ejemplo, si quisiéramos encontrar un y tal que $y \cdot X_m = 1$ suponiendo que $X_m = 0$, se observa que no existe tal valor para y que cumpla la condición, y por ende, $\mathbf{P}(\alpha_{n+1} = y) = 0$. Al final, tenemos que verificar las 9 situaciones posibles para X_m y x , que pueden verse como todos los pares ordenados obtenidos del conjunto $\{1, -1, 0\}$. Para construir una fórmula que contenga todos los casos, es de utilidad notar que $[(p+q) + (p-q)(1)]/2 = p$ y $[(p+q) + (p-q)(-1)]/2 = q$, para contemplar estos 4 casos: $(1, -1), (-1, 1), (1, 1), (-1, -1)$. Para los casos restantes, $(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)$, queremos eliminar el término $(p+q)/2$ que

resulta de $[(p+q) + (p-q)(0)]/2$, añadiendo como «interruptores» al término $1-x^2$ para x , a $1-X_m^2$ para X_m^2 y a $(1-x^2) \cdot (1-X_k^2)$ en el caso de que ambos valores sean cero y obtener alguna de las probabilidades resultantes, que pueden ser $r, 1$ o 0 , de donde la ecuación (2.4) resulta adecuada para lo que se busca.

Y para la segunda parte,

$$\mathbf{P}(Y_n \alpha_{n+1} X_m + [1 - Y_n] \alpha_{n+1} = x \mid X_m, Y_n = 0) \mathbf{P}(Y_n = 0) = (1 - \theta) \cdot \mathbf{P}(\alpha_{n+1} = x).$$

En donde la fórmula

$$\mathbf{P}(\alpha_{n+1} = x) = (1 - \theta) \left[\frac{(p+q) + (p-q)x}{2} + (1-x^2) \left(r - \frac{(p+q)}{2} \right) \right],$$

se justifica por lo visto para la primera parte (el único interruptor necesario en este caso es $1-x^2$). Incorporando esto a la suma en la que está expresada la probabilidad $\mathbf{P}(X_{n+1} = x \mid \mathcal{F}_n)$, se contempla de forma directa el resultado buscado. \square .

2.2. Herramientas para el análisis asintótico

Retomando la martingala asociada propuesta en la Proposición 2.2, tomemos las siguientes consideraciones. Si $\xi_n := S_n - \mathbb{E}[S_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = S_n - (\omega + \gamma_{n-1} S_{n-1})$ y dado que

$$a_n \gamma_{n-1} = \gamma_{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{-1} = \prod_{k=1}^{n-2} \gamma_k^{-1} = a_{n-1}.$$

Se observa que, para $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \Delta M_n &= M_n - M_{n-1} = (a_n S_n - \omega A_n) - (a_{n-1} S_{n-1} - \omega A_{n-1}) \\ &= (a_n S_n - \omega A_n) - (a_n \gamma_{n-1} S_{n-1} - \omega A_{n-1}) \\ &= a_n [S_n - \gamma_{n-1} S_{n-1}] - \omega A_n + \omega A_{n-1} = a_n [S_n - \gamma_{n-1} S_{n-1}] - \omega a_n \\ &= a_n [S_n - \omega - \gamma_{n-1} S_{n-1}] = a_n \xi_n. \end{aligned}$$

Así, a manera de suma telescópica (recordando que $M_0 = 0$) y sustituyendo directamente tenemos que

$$M_n = \sum_{k=1}^n a_k \xi_k. \tag{2.5}$$

Añadiremos otra colección de esperanzas condicionales que son necesarias para verificar si se cumplen ciertas propiedades para poder trabajar con el proceso creciente asociado a (M_n) .

Proposición 2.4. Definamos $Z_n := \sum_{k=1}^n X_k^2 = \sum_{k=1}^n (\mathbb{1}_{\{X_k=1\}} + \mathbb{1}_{\{X_k=-1\}})$, $\gamma := \theta(p+q)$ y $\tau := (1-\theta)(p+q)$. Entonces tenemos los siguientes resultados:

1. $\mathbb{E}[\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = 0$ c.s.
2. $\mathbb{E}[X_{U_n}^2 \mid \mathcal{F}_n] = \frac{Z_n}{n}$ c.s.
3. $\mathbb{E}[X_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] = \gamma \frac{Z_n}{n} + \tau$ c.s.
4. $\mathbb{E}[S_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] = S_n^2 + 2S_n \left(\alpha \frac{S_n}{n} + \omega \right) + \gamma \frac{Z_n}{n} + \tau$ c.s.
5. $\mathbb{E}[\xi_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] = \gamma \frac{Z_n}{n} + \tau - \left(\alpha \frac{S_n}{n} + \omega \right)^2$ c.s.

CAPÍTULO 2. LRRW: ANÁLISIS ASINTÓTICO
2.2. HERRAMIENTAS PARA EL ANÁLISIS ASINTÓTICO

Demostración.

1. $\mathbb{E}[\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_{n+1} - \mathbb{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] | \mathcal{F}_n] = 0$ c.s.
2. $\mathbb{E}[X_{U_n}^2 | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{U_n}^2(\mathbb{1}_{\{X_{U_n}=1\}} + \mathbb{1}_{\{X_{U_n}=-1\}} + \mathbb{1}_{\{X_{U_n}=0\}}) | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[(1)^2\mathbb{1}_{\{X_{U_n}=1\}} + (-1)^2\mathbb{1}_{\{X_{U_n}=-1\}} + 0^2\mathbb{1}_{\{X_{U_n}=0\}} | \mathcal{F}_n] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(\mathbb{1}_{\{X_{U_n}=1\}} + \mathbb{1}_{\{X_{U_n}=-1\}})\mathbb{1}_{\{U_n=k\}} | \mathcal{F}_n] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\mathbb{1}_{\{X_k=1\}} + \mathbb{1}_{\{X_k=-1\}}) = \frac{Z_n}{n}$ c.s.
3. $\mathbb{E}[X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[(Y_n\alpha_n X_{U_n} + (1 - Y_n)\alpha_n)^2 | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Y_n^2\alpha_n^2 X_{U_n}^2 + 2Y_n(1 - Y_n)\alpha_n^2 X_{U_n} + (1 - Y_n)^2\alpha_n^2 | \mathcal{F}_n]$ c.s.
 Notar que $Y_n(1 - Y_n) = 0$ puesto que Y_n es una variable aleatoria Bernoulli. Así,
 $\mathbb{E}[X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = \theta(p + q)\frac{Z_n}{n} + (1 - \theta)(p + q) = \gamma\frac{Z_n}{n} + \tau$ c.s.
4. $\mathbb{E}[S_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[(S_n + X_{n+1})^2 | \mathcal{F}_n] = S_n^2 + 2S_n\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = S_n^2 + 2S_n\left(\alpha\frac{S_n}{n} + \omega\right) + \gamma\frac{Z_n}{n} + \tau$ c.s.
5. $\mathbb{E}[\xi_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[(S_{n+1} - \mathbb{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n])^2 | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[S_n + X_{n+1} | \mathcal{F}_n]^2$ c.s.
 Se utiliza el hecho de que S_{n+1} es \mathcal{F}_n medible para obtener lo anterior. De aquí, sabiendo que

$$\mathbb{E}[S_n + X_{n+1} | \mathcal{F}_n]^2 = S_n + 2S_n\left(\alpha\frac{S_n}{n} + \omega\right) + \left(\alpha\frac{S_n}{n} + \omega\right)^2 \text{ c.s.}$$

Sustituyendo tenemos que $\mathbb{E}[\xi_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = \gamma\frac{Z_n}{n} + \tau - \left(\alpha\frac{S_n}{n} + \omega\right)^2$ c.s. □

Además, afirmamos que (ξ_n) es acotado en L^2 , pues es claro que $Z_n \leq n$, así que para todo $n \geq 0$, al tener que

$$\mathbb{E}[\xi_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = \gamma\frac{Z_n}{n} + \tau - \left(\alpha\frac{S_n}{n} + \omega\right)^2 \leq \gamma + \tau \text{ c.s.} \quad (2.6)$$

se garantiza que, efectivamente

$$\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[\xi_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] < \infty \text{ c.s.}$$

Antes de abordar el siguiente resultado relevante, se brindarán a continuación las inminentes expresiones auxiliares, que se pueden hallar fácilmente con el Teorema del Binomio de Newton, no sin antes lidiar con unas cuantas computaciones algebraicas que omitiremos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_{n+1}^3 | \mathcal{F}_n] &= S_n^3 + \left(\alpha\frac{S_n}{n} + \omega\right)(3S_n^2 + 1) + 3S_n\left(\gamma\frac{Z_n}{n} + \tau\right) \text{ c.s.} \\ \mathbb{E}[S_{n+1}^4 | \mathcal{F}_n] &= S_n^4 + \left(\alpha\frac{S_n}{n} + \omega\right)(4S_n^3 + 4S_n) + (6S_n^2 + 1)\left(\gamma\frac{Z_n}{n} + \tau\right) \text{ c.s.} \end{aligned}$$

Procediendo así a afirmar y probar la siguiente proposición.

CAPÍTULO 2. LRRW: ANÁLISIS ASINTÓTICO
2.2. HERRAMIENTAS PARA EL ANÁLISIS ASINTÓTICO

Proposición 2.5. Para todo $n \geq 0$, se cumple lo siguiente

$$E[\xi_{n+1}^4 | \mathcal{F}_n] = \left(\gamma \frac{Z_n}{n} + \tau \right) + \left(\alpha \frac{S_n}{n} + \omega \right)^2 \left[6 \left(\gamma \frac{Z_n}{n} + \tau \right) - 4 \right] - 3 \left(\alpha \frac{S_n}{n} + \omega \right)^4 \quad c.s.$$

Además, (ξ_n) está acotada en L^4 , en particular

$$\sup_{n \geq 0} E[\xi_{n+1}^4 | \mathcal{F}_n] \leq C_0 \quad c.s.$$

Con $C_0 = 7$.

La cota C_0 que se brinda puede refinarse, sin embargo, lo único que nos interesa es que este valor sea finito. Con absoluta seguridad se puede afirmar que (M_n) es una martingala cuadrado integrable. Por lo que la variación cuadrática predecible es la estructura adecuada para otorgar mayor profundidad al análisis que realizaremos en este capítulo.

Teorema 2.1. Definase $v_n := \sum_{k=1}^n a_k^2$ y $\beta := (p-q)$. Entonces, la variación cuadrática predecible (VCP para abreviar) de (M_n) está expresada de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_n &= \sum_{k=1}^n E[(\Delta M_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= \gamma - 2\omega(\beta - \omega) + \gamma \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2 \frac{Z_k}{k} + (\tau - \omega^2)v_n - 2\omega\alpha \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2 \frac{S_k}{k} - \alpha^2 \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2 \frac{S_k^2}{k^2} \quad c.s. \end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_n &= \sum_{k=1}^n E[(\Delta M_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}] = \sum_{k=1}^n E[a_k^2 \xi_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= E[a_1^2 \xi_1^2 | \mathcal{F}_0] + \sum_{k=2}^n a_k^2 E[\xi_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= E[\xi_1^2 | \mathcal{F}_0] + \sum_{k=2}^n a_k^2 \left[\gamma \frac{Z_{k-1}}{k-1} + \tau - \left(\alpha \frac{S_{k-1}}{k-1} + \omega \right)^2 \right] \quad c.s. \\ &= E[(M_1 - M_0)^2 | \mathcal{F}_0] \\ &+ \gamma \sum_{k=2}^n a_k^2 \frac{Z_{k-1}}{k-1} + (\tau - \omega^2) \sum_{k=2}^n a_k^2 - 2\omega\alpha \sum_{k=2}^n a_k^2 \frac{S_{k-1}}{k-1} - \alpha^2 \sum_{k=2}^n a_k^2 \frac{S_{k-1}^2}{(k-1)^2} \quad c.s. \end{aligned}$$

En donde $E[(M_1 - M_0)^2 | \mathcal{F}_0] = E[(S_1 - \omega)^2 | \mathcal{F}_0] = E[(X_1 - \omega)^2 | \mathcal{F}_0] = (p+q) - 2\omega(p-q) + \omega^2$ c.s. Sustituyendo y sumando $0 = (\tau - \omega^2) - (\tau - \omega^2)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_n &= (p+q) - 2\omega(p-q) + \omega^2 - (\tau - \omega^2) \\ &+ \gamma \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2 \frac{Z_k}{k} + (\tau - \omega^2)v_n - 2\omega\alpha \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2 \frac{S_k}{k} - \alpha^2 \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2 \frac{S_k^2}{k^2} \quad c.s. \quad \square \end{aligned}$$

Los límites que ahora se presentarán nos guiarán en el análisis asintótico que haremos de la LRRW, para los que se hace uso de las propiedades asintóticas de la función Γ , sus desigualdades y aproximaciones mediante la Fórmula de Euler-MacLaurin (también se puede mediante la Fórmula de Faulhaber generalizada [25]), que serán divididos en tres casos (para el tercer límite, la función hipergeométrica nos lleva directamente a su obtención, como puede verse en [20]).

CAPÍTULO 2. LRRW: ANÁLISIS ASINTÓTICO
2.2. HERRAMIENTAS PARA EL ANÁLISIS ASINTÓTICO

1. Si $\alpha < \frac{1}{2}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{n^{1-2\alpha}} = \ell := \frac{\Gamma^2(\alpha + 1)}{1 - 2\alpha}. \quad (2.7)$$

2. Si $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{\log(n)} = \frac{\pi}{4}. \quad (2.8)$$

3. Si $\alpha > \frac{1}{2}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)} \right)^2 = {}_3F_2 \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha+1 & \alpha+1 \end{matrix} ; 1 \right). \quad (2.9)$$

Donde

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{matrix} ; z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k (a_3)_k}{(b_1)_k (b_2)_k k!} z^k.$$

Con $(a)_k := a(a+1)\dots(a+k-1)$ y $(a)_0 := 1$ (a esta notación se le llama símbolo de Pochhammer de a) para cualquier $a \in \mathbb{R}$.

Para obtener el límite (2.7), se utiliza la Proposición 2.2 con lo que tenemos que

$$v_n \sim \Gamma^2(\alpha + 1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2\alpha}}. \quad (2.10)$$

y al ver $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2\alpha}} \sim \frac{n^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}$ por la aproximación de Euler-McLaurin, se consigue lo siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{n^{1-2\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2\alpha}{1-2\alpha} \frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{n^{1-2\alpha}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2\alpha}} = \frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{1-2\alpha}.$$

Ahora, el segundo límite (2.8) se obtiene al sustituir $\alpha = 1/2$ en la expresión (2.10) y al aplicar que la serie armónica es asintóticamente equivalente a la función logaritmo, es decir, $\sum_{k=1}^n 1/k \sim \log(n)$ y también sabiendo que $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$, se concluye de esta manera:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{\log(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma^2(3/2)}{\log(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{\pi}{4}.$$

Definición 2.2. *El coeficiente de explosión de la martingala (M_n) para $n \geq 1$ será definido como*

$$f_n = \frac{a_n^2}{v_n}. \quad (2.11)$$

En muchos casos, lo que requerimos es que este coeficiente de explosión tienda a cero cuando se necesita garantizar algunos de los teoremas centrales en los que estamos interesados. En otras palabras, se puede obtener información relevante de una martingala por medio de su coeficiente de explosión.

Para estar completamente equipados, la siguiente sección contendrá varios lemas clave, pertenecientes a la teoría de martingalas, cuya intervención en nuestro tratamiento asintótico será imprescindible en la generación de resultados deseables. La intuición que hay detrás es similar a los que brindan las versiones más clásicas.

2.3. Lemas auxiliares

Se ofrecerá un recopilatorio de teoremas límite probabilísticos enfocados en la teoría de martingalas, que ya han sido probados y que su función es llevarnos de la mano en la obtención de varios teoremas límite específicos para nuestra caminata aleatoria. Dependiendo de las restricciones que tengamos, aparecerán más o menos condiciones para poder aplicar alguna de las distintas adaptaciones.

Un teorema relacionado con un proceso estocástico (X_n) será llamado **Ley de los Grandes Números** si existen dos sucesiones (c_n) y (d_n) de variables aleatorias (la primera puede ser constante) tales que (d_n) sea monótona creciente que diverge a infinito y que la nueva sucesión de la forma $\frac{S_n - c_n}{d_n}$ converge a cero, donde (S_n) se conforma por las sumas parciales de (X_n) , llamándose ley fuerte si lo hace de forma casi segura y ley débil si lo hace en probabilidad.

Lema 2.1. (*Ley Fuerte de los Grandes Números (Duflo)*). Sea (ϵ_n) un proceso estocástico cuadrado integrable adaptado a la filtración (\mathcal{F}_n) tal que para todo $n \geq 0$

$$\mathbb{E}[\epsilon_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = 0 \quad y \quad \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[\epsilon_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] \leq C.$$

Donde C es una variable aleatoria finita. Suponga que (a_n) es una sucesión de variables aleatorias adaptada a la filtración (\mathcal{F}_n) . Si definimos

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k^2 \quad y \quad M_n = \sum_{k=0}^n a_k \epsilon_k$$

tal que (s_n) diverge a infinito y si para algún $a > 2$, $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[|\epsilon_{n+1}|^a \mid \mathcal{F}_n] < \infty$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{s_n} = 0 \quad c.s.$$

y además

$$|M_n|^2 = O(\log(s_n)s_n) \quad c.s.$$

Puede mirarse que no se requiere que la sucesión (ϵ_n) sea una de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, pero necesitamos nuevas condiciones para obtener una ley fuerte. Esta es una versión simplificada de la Ley Fuerte de los Grandes Números provista por Marie Duflo [9], en particular, el Teorema 1.3.24.

Para el lema siguiente, uno de los requisitos es que la sucesión sea acotada en L^h , con h siendo mayor que el doble de algún número entero r , esto para favorecer el manejo de los momentos pares de la distribución Gaussiana, dado que al límite al que nos aproximamos es justamente el momento de orden $2r$ de la distribución $N(0, \sigma^2)$.

Lema 2.2. (*Convergencia a los momentos pares Gaussianos*). Asuma que (ξ_n) cumple para algún entero $r \geq 1$ y para algún número real $h > 2r$ que

$$\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[|\xi_{n+1}|^h \mid \mathcal{F}_n] < \infty \quad c.s. \tag{2.12}$$

Si el coeficiente de explosión f_n tiende casi seguramente a cero, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(v_n)} \sum_{k=1}^n f_k \left(\frac{M_k^2}{v_{k-1}} \right)^r = \frac{\sigma^{2r} (2r)!}{2^r r!} \quad c.s. \tag{2.13}$$

El lema anterior es una adaptación del Teorema A.2 que puede consultarse en [14].

Ahora, la **Ley del Logarimo Iterado** suele ubicarse de forma intermedia entre la Ley de

los Grandes Números y el Teorema Central del Límite, puesto que se busca una sucesión que crezca de manera «lenta», en el sentido de que el límite que se obtiene cuando comparamos a nuestro proceso estocástico con una sucesión creciente y que diverge a infinito, no sea nulo. Siendo más precisos, queremos hallar esa sucesión (d_n) tal que, para nuestro proceso (X_n) , ocurra que $\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n/d_n = 1$ casi seguramente. La aparición del límite superior (o inferior) nos indica que no es necesario tener una sucesión convergente, dado que lo que nos interesa es ver cómo podríamos «encerrar» el crecimiento de (S_n) .

Lema 2.3. (*Ley del Logaritmo Iterado para Martingalas (Stout)*). Sea (M_n) una martingala con $E[M_1] = 0$. Sea $Y_n = M_n - M_{n-1}$ para $n \geq 1$. Defínase

$$s_n^2 := \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Y_i^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}] \quad y \quad u_n := [2 \log(\log(s_n^2))]^{1/2}.$$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^2 = 0$ y si (K_n) es un proceso predecible tal que

$$|Y_n| \leq \frac{K_n s_n}{u_n} \quad \text{c.s.} \quad \text{para } n \geq 1.$$

con $K_n \xrightarrow{\text{c.s.}} 0$, entonces

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{s_n u_n} = 1 \quad \text{c.s.}$$

Tanto el enunciado como la demostración de este lema puede hallarse en [28] (y otras versiones en [29]).

Ahora, para el siguiente teorema límite, nos topamos con el famoso **Teorema Central del Límite**. En este caso, lo que nos interesa es hallar unas sucesiones c_n y d_n tales que $\frac{S_n - c_n}{d_n}$ converja en distribución hacia una distribución normal o Gaussiana con parámetros apropiados (lo deseable es que sea estándar o que tenga media cero). La aparición de una condición requerida, a la que se le llama Condición de Lindeberg, que intuitivamente nos dice que, aunque tengamos esperanzas finitas para cada miembro del proceso estocástico, estas esperanzas no deben desviarse mucho de algún valor generalmente centralizado; nos sirve en caso de no tener una sucesión de variables aleatorias idénticamente distribuidas, ya que solo se necesitaría de esta condición y de la independencia entre estas.

Lema 2.4. (*Teorema Central del Límite para Martingalas*). Sea (M_n) una martingala cuadrado integrable y (c_n) una sucesión de números reales crecientes que diverge a infinito. Si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\frac{\langle M_n \rangle}{c_n} \xrightarrow{\mathbf{P}} \ell$, $\ell > 0$,

2. (Condición de Lindeberg) para cualquier $\epsilon > 0$,

$$\frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(\Delta M_n)^2 \mathbb{1}_{|\Delta M_n| \geq \epsilon \sqrt{c_n}} \mid \mathcal{F}_{k-1}] \rightarrow 0. \quad (2.14)$$

en probabilidad.

Entonces,

$$\frac{M_n}{\sqrt{c_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \ell)$$

En [17] puede consultarse este resultado para más detalles, con su prueba correspondiente.

Antes de presentar el lema que sigue, necesitamos re-ubicarnos de forma conceptual y notacional, pues involucra un teorema límite que no se considera clásico, en tanto que involucra a la convergencia débil de medidas, como se señala en la Definición 1.3.

Definición 2.3. (*Medida de Dirac*) Sea X una variable aleatoria. Definimos la medida de Dirac con respecto a $X(\nu)$ de la siguiente forma: para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\delta_{X(\nu)}(A) = \begin{cases} 1, & \text{si } X(\nu) \in A, \\ 0, & \text{si } X(\nu) \notin A. \end{cases}$$

En donde $\nu \in \Omega$. Como abuso notacional se suele escribir así: δ_X .

Las medidas empíricas se pueden utilizar para hacer estimaciones sobre la medida de probabilidad que nos interese, permitiendonos computar frecuencias relativas con las observaciones que se recolecten, formando una sucesión de variables aleatorias (X_n) . La forma más simple de medida empírica, donde (X_n) se supone independiente e idénticamente distribuida se expresa así

$$\mathbf{P}_n(A) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{X_k}(A)$$

para todo conjunto Boreliano A .

Para detallar la convergencia protagonista del **Teorema Central del Límite Casi Seguro**, que servirá auxiliariamente para establecer versiones particulares respectivas a la LRRW, tomaremos en cuenta lo siguiente. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad y $\{\mu_{\nu,n}\}$ una sucesión asociada a $\nu \in \Omega$ de medidas sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Decimos que existe una convergencia débil de medidas hacia una medida μ sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de forma casi segura si

$$\mathbf{P}\{\nu \in \Omega : \mu_{\nu,n} \Rightarrow \mu, n \rightarrow \infty\} = 1.$$

Recuerde que " \Rightarrow " se refiere a la convergencia débil de medidas, aunque se le puede llamar también convergencia en distribución por lo visto en la Definición 1.3. Es posible definir los eventos $D = \{\nu \in \Omega : \mu_{\nu,n} \text{ diverge cuando } n \rightarrow \infty\}$ y $E = \{\nu \in \Omega : \mu_{\nu,n} \Rightarrow \mu', n \rightarrow \infty\}$, con μ' distinta de μ . En caso de que se tenga la convergencia antes descrita, de forma directa sabremos que $\mathbf{P}(D) = 0$ y $\mathbf{P}(E) = 0$.

Lema 2.5. (*Teorema Central del Límite Casi Seguro para Martingalas*). Sea $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$, y supongase que para todo $\epsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{v_n} \mathbb{E}[|\Delta M_n|^2 \mathbf{1}_{\{|\Delta M_n| \geq \epsilon \sqrt{v_n}\}} \mid \mathcal{F}_{n-1}] < \infty \text{ c.s.}, \quad (2.15)$$

y para algún $a > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{v_n^a} \mathbb{E}[|\Delta M_n|^{2a} \mathbf{1}_{\{|\Delta M_n| \leq \sqrt{v_n}\}} \mid \mathcal{F}_{n-1}] < \infty \text{ c.s.} \quad (2.16)$$

Entonces (M_n) cumple que

$$\frac{1}{\log(v_n)} \sum_{k=1}^n \left(\frac{v_k - v_{k-1}}{v_k} \right) \delta_{M_k / \sqrt{v_{k-1}}} \Rightarrow G \text{ c.s.} \quad (2.17)$$

Donde G representa la medida Gaussiana $N(0, \sigma^2)$.

Esta también es una adaptación, pero del Teorema A.1 de [14].

Para el último lema de esta sección, cuya prueba se puede obtener por medio del Teorema 1 y los corolarios 1 y 2 de [19], nótese que se involucra a (ΔM_k) y al límite de sus sumas parciales $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta M_k$ para establecer un Teorema Central del Límite y una Ley del Logaritmo Iterado relacionado al comportamiento de la diferencia de este límite y (M_n) .

Lema 2.6. Sea (M_n) es una martingala cuadrado integrable con media cero, tal que se cumple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[(\Delta M_k)^2] < \infty.$$

Y sea $r_n^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{E}[(\Delta M_k)^2]$. Entonces tenemos lo siguiente:

1. El límite $M := \sum_{k=1}^{\infty} \Delta M_k$ existe casi seguramente y $M_n \xrightarrow{L^2} M$.

2. Asuma que

- a) $\frac{1}{r_n^2} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{E}[(\Delta M_k)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] \xrightarrow{\mathbf{P}} 1$ cuando $n \rightarrow \infty$, y
- b) $\frac{1}{r_n^2} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{E}[(\Delta M_{k+1})^2 : |\Delta M_{k+1}| \geq \epsilon r_k] \rightarrow 0$ para cualquier $\epsilon > 0$.

Entonces tenemos que

$$\frac{M - M_n}{r_{n+1}} = \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta M_k}{r_{n+1}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

3. Asuma que las siguientes cuatro condiciones se cumplen

- I $\frac{1}{r_n^2} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{E}[(\Delta M_k)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$ c.s.,
- II $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k} \mathbb{E}[|\Delta M_{k+1}| : |\Delta M_k| > \epsilon r_k] < \infty$ para cualquier $\epsilon > 0$,
- III $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k^4} \mathbb{E}[(\Delta M_{k+1})^4 : |\Delta M_k| \leq \delta r_k] < \infty$ para algún $\delta > 0$ y,
- IV $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k^2} ((\Delta M_k)^2 - \mathbb{E}[(\Delta M_k)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}]) < \infty$ c.s.

Entonces,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \pm \frac{M - M_n}{\sqrt{2 \cdot r_{n+1}^2 \log|\log(r_{n+1}^2)|}} = 1 \text{ c.s.}$$

2.4. Resultados principales

Se va a particionar el análisis asintótico de la LRRW en varios casos, es decir, se obtendrán una serie de resultados sobre las propiedades asintóticas que se presentan de forma específica en cada uno de estos (serán llamados regímenes), de acuerdo con los valores que tome el parámetro $\alpha > 0$. Cada uno de estos casos toma como guía a los límites (2.7), (2.8) y (2.9), y cada uno será denominado de la siguiente forma.

Diremos que la LRRW

- se encuentra en el **régimen difusivo** si $\alpha < 1/2$,
- en el **régimen crítico** si $\alpha = 1/2$,
- o se le llamará **régimen superdifusivo** si $\alpha > 1/2$.

El término régimen se considera apropiado puesto que se refiere a «un conjunto de características regulares o habituales en el desarrollo de algo», en este caso, en el comportamiento que se desarrolla al transcurrir un «tiempo muy grande o infinito» respectivo a cierto rango de valores al que pertenezca α .

2.4.1. Régimen difusivo

Suponga que para la *LRRW*, los parámetros p, q y r son tales que $\alpha < 1/2$ (esto se asumirá para toda esta sección). Antes de abordar los teoremas principales (se encerrarán en un recuadro). Es preciso mencionar unos cuantos resultados menores.

Lema 2.7. *Para este régimen, se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1. $\log(v_n) \sim (1 - 2\alpha)\log(n)$.
2. $\log(\log(v_n)) \sim \log(\log(n))$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
 1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(v_n)}{(1 - 2\alpha)\log(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(v_n(n^{1-2\alpha})^{-1}n^{1-2\alpha})}{(1 - 2\alpha)\log(n)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{\Gamma^2(\alpha + 1)}{1 - 2\alpha}\right) + \log(n^{1-2\alpha})}{(1 - 2\alpha)\log(n)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\Gamma^2(\alpha + 1)) - \log(1 - 2\alpha) + (1 - 2\alpha)\log(n)}{(1 - 2\alpha)\log(n)} \\
 &= 1. \\
 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\log(v_n))}{\log(\log(n))} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log((1 - 2\alpha)\log(n))}{\log(\log(n))} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 - 2\alpha) + \log(\log(n))}{\log(\log(n))} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

El siguiente teorema se considera como una **Ley Fuerte de los Grandes Números** respectivo a este caso en particular, indicando además el ritmo de convergencia que presenta (de ahí la aparición de la notación asintótica O-grande).

Teorema 2.2. *Se cumple la siguiente convergencia casi segura*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \frac{\omega}{1 - \alpha},$$

cuyo ritmo de convergencia se expresa como

$$\left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1 - \alpha}\right)^2 = O\left(\frac{\log(n)}{n}\right).$$

Demostración. Primero se probará que

$$\langle M \rangle_n = O(v_n) = O(n^{1-2\alpha}). \quad (2.18)$$

Notando que para todo entero positivo n .

$$v_n \geq a_1^2 = 1.$$

Al recordar el Teorema 2.1, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \gamma - 2\omega(\beta - \omega) &\leq 2v_n, \\
 \gamma \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2 \frac{Z_k}{k} &\leq \gamma v_n.
 \end{aligned}$$

Lo que implica que

$$\langle M \rangle_n \leq 2v_n + \gamma v_n + (\tau - \omega^2)v_n.$$

Que se puede escribir como $\langle M \rangle_n = O(v_n)$. Y, usando el límite (2.7) tenemos que $v_n = O(n^{1-2\alpha})$. Por la transitividad de la notación O-grande, se tiene lo que queríamos probar al principio. Este resultado inicial nos sirve para extenderlo de la siguiente forma. Si consideramos que $v_n \uparrow \infty$ (esto representa que la sucesión es monótona creciente y diverge a infinito), $E[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 0$, $\sup_n E[\xi_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] < \infty$ y $\sup_n E[\xi_{n+1}^4|\mathcal{F}_n] \leq C_0$ y aplicando el Lema 2.1 junto con la expresión (2.18), nos arroja que

$$|M_n|^2 = O(v_n \log(v_n)).$$

Aplicando las propiedades de la notación O-grande, se obtiene que

$$|M_n|^2 = O(n^{1-2\alpha}(1-2\alpha)\log(n)) = O(n^{1-2\alpha}\log(n)).$$

Y así, se tiene que

$$|M_n| = O([n^{1-2\alpha}\log(n)]^{1/2}).$$

Lo cual nos brinda información clave para proceder con la siguiente parte de la demostración.

Recordando que $M_n = a_n S_n - \omega A_n$ y que $a_n \sim \frac{\Gamma(1+\alpha)}{n^\alpha}$, se verifica que

$$\begin{aligned} \left| \frac{M_n}{na_n} \right| &= \left| \frac{S_n}{n} - \frac{\omega A_n}{na_n} \right| = O\left(\sqrt{\frac{n^{1-2\alpha}\log(n)}{n^2 a_n^2}} \right) \\ &= O\left(\sqrt{\frac{n^{-2\alpha}\log(n)}{n \left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{n^\alpha} \right)^2}} \right) = O\left(\sqrt{\frac{\log(n)}{n(\Gamma(1+\alpha))^2}} \right) \\ &= O\left(\sqrt{\frac{\log(n)}{n}} \right). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Ahora, recurriremos a un lema que puede encontrarse en [2], en concreto el Lema B.1. (Lema A.1 del Apéndice A) para deducir que

$$\begin{aligned} \frac{A_n}{na_n} &= \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{na_n} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{\Gamma(k)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha)}}{na_n} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1) \left(\frac{\Gamma(n+1)}{(\alpha-1)\Gamma(n+\alpha)} \right) \left(\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)} - 1 \right)}{n \left(\frac{\Gamma(n)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha)} \right)} = \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)} - 1 \right). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Lo que nos conduce a que

$$\frac{A_n}{na_n} - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)} \right) = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{\Gamma(n+\alpha)\alpha}{\Gamma(n)\Gamma(\alpha+1)n} \right). \tag{2.21}$$

Para ahora afirmar que

$$\left| \frac{A_n}{na_n} - \frac{1}{1-\alpha} \right| \sim \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{n^\alpha \alpha}{\Gamma(1+\alpha)n} \right) \sim \frac{1}{(1-\alpha)n^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)}.$$

Que también se puede expresar como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_n}{na_n} - \frac{1}{1-\alpha} \right| = 0.$$

Lo cual, aplicando que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\log(n)}{n}} = 0$ a la expresión (2.19), nos da que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega A_n}{na_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega A_n}{na_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega}{1-\alpha} = 0.$$

O, escrito de forma más detallada

$$\begin{aligned} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right)^2 &= \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega A_n}{na_n} \right)^2 + \left(\frac{\omega A_n}{na_n} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right)^2 + \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega A_n}{na_n} \right) \left(\frac{\omega A_n}{na_n} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) \\ &= O\left(\frac{\log(n)}{n}\right). \end{aligned}$$

Lo cual está mejor justificado si notamos que

$$\left(\frac{\omega A_n}{na_n} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ y } \frac{1}{n} = O\left(\frac{\log(n)}{n}\right). \quad \square$$

El siguiente teorema nos muestra una **Convergencia hacia los Momentos Pares** de la distribución normal, también llamada **Ley Cuadrática Fuerte**. Por el Teorema 2.2, es claro que para todo entero $r \geq 1$,

$$\left(\frac{S_k}{k} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right)^{2r} \rightarrow 0, \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

Y además, $\sum_{k=1}^{\infty} k^{r-1}$ diverge a infinito. Lo que no es claro en un primer vistazo es lo que ocurre cuando se combinan de la siguiente forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{r-1} \left(\frac{S_k}{k} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right)^{2r}.$$

El teorema que se presenta a continuación nos afirma que el ritmo de crecimiento de esta serie es tal que, al compararse con $\log(n)$, obtenemos una constante para cada $r \geq 1$ (se puede interpretar como que el crecimiento de la serie no es «tan apresurado»).

Teorema 2.3. *Se cumple la siguiente convergencia casi segura*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(n)} \sum_{k=1}^n k^{r-1} \left(\frac{S_k}{k} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right)^{2r} = \frac{(\sigma^2)^r (2r)!}{2^r r! (1-2\alpha)^r}.$$

Para todo entero $r \geq 1$.

Demostración. Primero, se observa que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1}^m \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[(Y_n \alpha_{n+1} X_{U_n} + (1 - Y_n) \alpha_{n+1})^m \mid \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (Y_n \alpha_{n+1} X_{U_n})^{m-i} [(1 - Y_n) \alpha_{n+1}]^i \mid \mathcal{F}_n \right] \\ &= \mathbb{E}[(Y_n \alpha_{n+1} X_{U_n})^m + [(1 - Y_n) \alpha_{n+1}]^m \mid \mathcal{F}_n] \\ &+ \mathbb{E} \left[Y_n (1 - Y_n) \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m}{i} Y_n^{m-i-1} \alpha_{n+1}^{m-i} X_{U_n}^{m-i} (1 - Y_n)^{i-1} \alpha_{n+1}^i \mid \mathcal{F}_n \right] \\ &= \theta [p + q(-1)^m] \mathbb{E}[X_{U_n}^m \mid \mathcal{F}_n] + (1 - \theta) [p + (-1)^m q] \\ &\leq [p + q(-1)^m] \leq 1. \end{aligned}$$

Donde nos ayuda notar que

$$\mathbb{E}[X_{U_n}^m | \mathcal{F}_n] = \begin{cases} \frac{S_n}{n}, & \text{si } m = 2n + 1 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}, \\ \frac{Z_n}{n}, & \text{si } m = 2n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Usaremos el Lema 2.2, pero primero debemos garantizar que se cumple la siguiente premisa:
Para todo $m \in \mathbb{Z}^+$

$$\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[(\xi_{n+1})^m | \mathcal{F}_n] < \infty.$$

La cual es cierta pues, para cada $m \in \mathbb{Z}^+$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\xi_{n+1})^m | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[(X_{n+1} - \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n])^m | \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} X_{n+1}^{m-i} \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]^i (-1)^i | \mathcal{F}_n \right] \\ &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]^i (-1)^i \mathbb{E}[X_{n+1}^{m-i} | \mathcal{F}_n] \\ &\leq \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (-1)^i \\ &\leq (m+1) \max_{i=0, \dots, m} \binom{m}{i}. \end{aligned}$$

Es decir, la sucesión $(\mathbb{E}[(\xi_{n+1})^m | \mathcal{F}_n])_n$ está acotada superiormente para todo $m \in \mathbb{Z}^+$.

Resta comprobar que el coeficiente de explosión f_n tiende a cero. Como por definición, $f_n = a_n^2/v_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y como $a_n \sim \frac{\Gamma(1+\alpha)}{n^\alpha}$, podemos hallar que

$$\begin{aligned} f_n &\sim \frac{\Gamma^2(1+\alpha)}{n^{2\alpha}v_n} \\ &= \frac{\Gamma^2(1+\alpha)}{n^{2\alpha}v_n} \frac{1}{\frac{1}{n^{1-2\alpha}}}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Y así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma^2(1+\alpha)}{n^{2\alpha}n^{1-2\alpha} \frac{\Gamma^2(1+\alpha)}{1-2\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2\alpha}{n} = 0.$$

Para la última parte, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{M_k}{\sqrt{v_{k-1}}} &= \frac{a_k S_k - \omega A_k}{k a_k} \frac{a_k k}{\sqrt{v_{k-1}}} \sim \left(\frac{S_k}{k} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) \frac{\Gamma(1+\alpha)}{k^\alpha} \frac{k}{\sqrt{v_{k-1}}} \\ &= \left(\frac{S_k}{k} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) \Gamma(1+\alpha) k^{1/2} \left(\frac{k^{1-2\alpha}}{v_{k-1}} \right)^{1/2} \\ &\sim \left(\frac{S_k}{k} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) \Gamma(1+\alpha) k^{1/2} \left(\frac{1-2\alpha}{\Gamma^2(1+\alpha)} \right)^{1/2} \sim \sqrt{(1-2\alpha)k} \left(\frac{S_k}{k} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right). \end{aligned}$$

Para aplicar adecuadamente el Lema 2.2 y así poder concluir con lo siguiente

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(1-2\alpha)^r} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(v_n)} \sum_{k=1}^n f_k \left(\frac{M_k^2}{v_{k-1}} \right)^r \\
&= \frac{1}{(1-2\alpha)^r} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-2\alpha)\log(n)} \sum_{k=1}^n f_k \left(\sqrt{(1-2\alpha)k} \left(\frac{S_k}{k} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) \right)^{2r} \\
&= \frac{1}{(1-2\alpha)^{r+1}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(n)} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1-2\alpha}{k} \right)^r k^r (1-2\alpha)^r \left(\frac{S_k}{k} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right)^{2r} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(n)} \sum_{k=1}^n k^{r-1} \left(\frac{S_k}{k} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right)^{2r} \\
&= \frac{(\sigma^2)^r (2r)!}{2^r r! (1-2\alpha)^r}. \quad \square
\end{aligned}$$

El siguiente teorema es reconocible como una **Ley del Logaritmo Iterado** para este régimen. La aparición de $\omega/(1-\alpha)$ nos permite centralizar las trayectorias y brindar algo de simetría (acorde a la Ley de los Grandes Números que obtuvimos previamente para este régimen).

Teorema 2.4. *Se cumple la siguiente afirmación*

$$\begin{aligned}
& \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2\log(\log(n))} \right)^{1/2} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) \\
&= - \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2\log(\log(n))} \right)^{1/2} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{1-2\alpha}} \text{ c.s.}
\end{aligned}$$

Donde $\sigma^2 = \frac{\tau}{1-\gamma} - \left(\frac{\omega}{1-\alpha} \right)^2$.

Demostración. Sirve recordar que

$$\mathbb{E}[X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = \gamma \frac{Z_n}{n} + \tau \quad \text{c.s.}$$

Con lo cual se comprueba que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[X_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^n X_k^2 | \mathcal{F}_n] = \gamma \frac{Z_n}{n} + \tau + Z_n \\
&= Z_n \left(1 + \frac{\gamma}{n} \right) + \tau = \lambda_n Z_n + \tau \quad \text{c.s.}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Donde $\lambda_n = 1 + \frac{\gamma}{n}$.

Vamos a definir la siguiente martingala (N_n) como $N_n = b_n Z_n - \tau B_n$, con $b_n = \frac{\Gamma(n)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n+\gamma)}$ y $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ (se comprueba que es una martingala de manera análoga a como se hizo en la Proposición 2.2).

Aplicando los mismos argumentos a los empleados para probar el Teorema 2.2, podemos afirmar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n}{n} = \frac{\tau}{1-\gamma}. \tag{2.24}$$

Así, por el inciso 5 de la Proposición 2.4) y Teorema 2.2.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\xi_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\gamma \frac{Z_n}{n} + \tau - \left(\frac{\alpha S_n}{n} + \omega \right)^2 \right] = \frac{\gamma\tau}{1-\gamma} + \tau - \left(\frac{\alpha\omega}{1-\alpha} + \omega \right)^2 \\ &= \frac{\tau}{1-\gamma} - \left(\frac{\omega}{1-\alpha} \right)^2 = \sigma^2. \end{aligned}$$

Usando la ecuación (2.22) y el límite (2.7), podremos obtener lo siguiente

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^4}{v_k^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-2\alpha}{k} \right)^2 \\ &= (1-2\alpha)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{[\pi(1-2\alpha)]^2}{6}. \end{aligned}$$

Ahora, al notar que para cada $n \geq 0$ existe una constante $L > 0$ tal que $|\Delta M_n| < L$ c.s. (dado que $|a_n \xi_n| = |a_n(X_n - \frac{\alpha}{n-1} S_{n-1} - \omega)| \leq |a_n|(|X_n| + |\alpha| + |\omega|) \leq \Gamma(\alpha+1)(1+\alpha+\omega)$) y aplicando la Ley del Logaritmo Iterado planteado en el Lema 2.3

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{\sqrt{2v_n \log(\log(v_n))}} = - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{\sqrt{2v_n \log(\log(v_n))}} = \sigma.$$

Primero, visualizemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{M_n}{\sqrt{2v_n \log(\log(v_n))(1-2\alpha)}} &= \frac{a_n S_n - \omega A_n}{na_n} \frac{na_n}{\sqrt{2v_n \log(\log(v_n))(1-2\alpha)}} \\ &\sim \frac{n\Gamma(1+\alpha)}{n^\alpha \sqrt{2v_n \log(\log(v_n))(1-2\alpha)}} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega A_n}{na_n} \right) \\ &= \Gamma(1+\alpha) \left(\frac{n(n^{1-2\alpha})}{(1-2\alpha)2v_n \log(\log(v_n))} \right)^{1/2} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega A_n}{na_n} \right). \end{aligned}$$

Si aplicamos el límite (2.7) una vez más, aplicamos Lema 2.7 y simplificamos, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\Gamma^2(1+\alpha)n(n^{1-2\alpha})}{(1-2\alpha)2v_n \log(\log(v_n))} \right)^{1/2} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega A_n}{na_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2\log(\log(n))} \right)^{1/2} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega A_n}{na_n} \right).$$

Obteniendo así que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2\log(\log(n))} \right)^{1/2} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega A_n}{na_n} \right) &= - \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2\log(\log(n))} \right)^{1/2} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega A_n}{na_n} \right) \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{(1-2\alpha)}}. \end{aligned}$$

Como recordatorio adicional, tenemos que

$$\frac{A_n}{na_n} = \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)} - 1 \right).$$

De tal manera que es simple obtener el consecuente resultado

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{n} - \frac{\omega A_n}{na_n} &= \frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{\alpha-1} \left(\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)} - 1 \right) \\ &= \frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1-\alpha} - \frac{\omega\Gamma(n+\alpha)}{(\alpha-1)\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1-\alpha} - \frac{\omega\alpha}{(\alpha-1)na_n}. \end{aligned}$$

Para simplificar aún más, como

$$\frac{1}{na_n} \sim \frac{n^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)n} = \frac{1}{n^{1-\alpha}\Gamma(1+\alpha)}.$$

y así mismo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2\log(\log(n))} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^{1/2-\alpha}\log(\log(n))} = 0.$$

Podemos terminar con la prueba de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2\log(\log(n))} \right)^{1/2} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega A_n}{na_n} \right) &= -\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2\log(\log(n))} \right)^{1/2} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega A_n}{na_n} \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2\log(\log(n))} \right)^{1/2} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1-\alpha} - \frac{\omega\alpha}{(\alpha-1)na_n} \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2\log(\log(n))} \right)^{1/2} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) = -\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2\log(\log(n))} \right)^{1/2} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{1-2\alpha}}. \quad \square \end{aligned}$$

También es importante obtener la normalidad asintótica, es decir, mostrar que las fluctuaciones alrededor de $\omega/(1-\alpha)$, escaladas por medio de la sucesión \sqrt{n} (es decir, multiplicar por un factor para controlar la varianza) son normales, esto mientras se necesite obtener una distribución aproximada, lo cuál se va a garantizar por el siguiente **Teorema Central del Límite**.

Teorema 2.5. *Se presenta la siguiente normalidad asintótica*

$$\sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left(0, \frac{\sigma^2}{1-2\alpha} \right)$$

Demostración. Usando el Lema 1.1, el límite (2.7) (en donde el valor ℓ se ha definido), la expresión para la VCP del Teorema 2.1 y las convergencias para S_k/k (Teorema 2.2) y Z_k/k (el límite (2.24)) tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle M \rangle_n}{n^{1-2\alpha}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\gamma \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{v_n} \frac{v_n}{n^{1-2\alpha}} \frac{Z_k}{k} + (\tau - \omega^2) \frac{v_n}{n^{1-2\alpha}} \right. \\ &\quad \left. - 2\omega\alpha \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{v_n} \frac{v_n}{n^{1-2\alpha}} \frac{S_k}{k} - \alpha^2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{v_n} \frac{v_n}{n^{1-2\alpha}} \frac{S_k^2}{k^2} \right] \\ &= \frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{1-2\alpha} \left[\gamma \frac{\tau}{1-\gamma} + (\tau - \omega^2) - 2\omega\alpha \left(\frac{\omega}{1-\alpha} \right) - \alpha^2 \left(\frac{\omega}{1-\alpha} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{1-2\alpha} \left[\frac{\tau}{1-\gamma} - \left(\frac{\omega}{1-\alpha} \right)^2 \right] = \ell\sigma^2 > 0. \end{aligned}$$

Viendo que se cumple la primera condición del Lema 2.4, resta comprobar que también se cumple la Condición de Lindeberg. A partir del Teorema 2.1 y como

$$\mathbb{E}[(\Delta M_k)^4 \mid \mathcal{F}_{k-1}] \geq \epsilon n^{1-2\alpha} \mathbb{E}[(\Delta M_k)^2 \mathbf{1}_{|\Delta M_k| \geq \epsilon \sqrt{n^{1-2\alpha}}} \mid \mathcal{F}_{k-1}],$$

entonces,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^{1-2\alpha}} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(\Delta M_k)^2 \mathbf{1}_{|\Delta M_k| \geq \epsilon \sqrt{n^{1-2\alpha}}} | \mathcal{F}_{k-1}] \\ & \leq \frac{1}{\epsilon^2 n^{2(1-2\alpha)}} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(\Delta M_k)^4 | \mathcal{F}_{k-1}] \\ & \leq \frac{1}{\epsilon^2 n^{2(1-2\alpha)}} \sum_{k=1}^n a_k^4 \mathbb{E}[\zeta_k^4 | \mathcal{F}_{k-1}] \leq \frac{C_0}{\epsilon^2 n^{2(1-2\alpha)}} \sum_{k=1}^n a_k^4. \end{aligned}$$

Usando el límite (2.7) y la Proposición 2.2.

$$\begin{aligned} \frac{n^2 a_n^4}{v_n^2} & \sim \frac{n^2}{v_n^2} \left(\frac{\Gamma^4(1+\alpha)}{n^{4\alpha}} \right) = \frac{n^{2(1-2\alpha)}}{v_n^2} \Gamma^4(1+\alpha) \\ & \rightarrow \frac{(1-2\alpha)^2}{\Gamma^4(1+\alpha)} \Gamma^4(1+\alpha) = (1-2\alpha)^2. \end{aligned}$$

Para así tener que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1-4\alpha}} \sum_{k=1}^n a_k^4 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1-4\alpha}} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 a_k^4 v_k^2}{v_k^2 k^2} \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1-4\alpha}} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 a_k^4 \ell^2 k^{2(1-2\alpha)}}{v_k^2 k^2} \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 a_k^4 \ell^2 k^{-4\alpha}}{v_k^2 n^{1-4\alpha}} = \frac{(1-2\alpha)^2 \ell^2}{1-4\alpha}. \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_0}{\epsilon^2 n^{2(1-2\alpha)}} \sum_{k=1}^n a_k^4 = 0.$$

Implicando así el cumplimiento de la Condición de Lindeberg:

$$\frac{1}{n^{1-2\alpha}} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(\Delta M_k)^2 \mathbf{1}_{|\Delta M_k| \geq \epsilon \sqrt{n^{1-2\alpha}}} | \mathcal{F}_{k-1}] \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Considerando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n a_n^2}{n^{1-2\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^{1-2\alpha}} \left(\frac{\Gamma^2(1+\alpha)}{n^{2\alpha}} \right) = \Gamma^2(1+\alpha).$$

Y por la ecuación 2.21, verificamos que

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{n} - \frac{\omega A_n}{n a_n} & = \frac{S_n}{n} - \omega \left(\frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)} - 1 \right) \right) \\ & = \frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1-\alpha} + \frac{\omega \alpha}{n(1-\alpha)} \frac{1}{a_n}. \end{aligned}$$

Logrando obtener el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \frac{M_n}{\sqrt{n^{1-2\alpha}}} &= \frac{na_n \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega A_n}{na_n} \right)}{\sqrt{n^{1-2\alpha}}} \\ &= \frac{na_n}{\sqrt{n^{1-2\alpha}}} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) + \frac{\omega\alpha}{(1-\alpha)\sqrt{n^{1-2\alpha}}} \\ &= n^{1/2} \sqrt{\frac{na_n^2}{n^{1-2\alpha}}} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) + \frac{\omega\alpha}{(1-\alpha)\sqrt{n^{1-2\alpha}}}. \end{aligned}$$

Para concluir con la prueba a través de la siguiente convergencia en distribución.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{\Gamma(1+\alpha)\sqrt{n^{1-2\alpha}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) = \mathcal{N} \left(0, \frac{\sigma^2 \ell}{\Gamma(1+\alpha)} \right). \quad \square$$

Para terminar el análisis en este régimen, se tiene la demostración del siguiente teorema, que en particular es una versión del **Teorema Central del Límite Casi Seguro**, con una explicación previa al Lema 2.5, recordando que cada sucesión de medidas depende de cada $\nu \in \Omega$.

Teorema 2.6. *Tenemos la siguiente convergencia casi segura de funciones de medidas empíricas*

$$\frac{1}{\log(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \delta_{\sqrt{k} \left(\frac{S_k}{k} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right)} \Rightarrow G \quad c.s. \quad (2.25)$$

Donde « \Rightarrow » se refiere a la convergencia en distribución y G es la medida Gaussiana $N \left(0, \frac{\sigma^2}{1-2\alpha} \right)$ (como se puede ver en la Definición 1.4).

Demostración. Usaremos el Lema 2.5, para lo cual veremos si se cumplen las condiciones para su aplicación. Si se presta atención a la función indicadora, directamente se ve que

$$\epsilon^2 v_k |\Delta M_k|^2 \mathbb{1}_{|\Delta M_k| \geq \epsilon \sqrt{v_k}} \leq |\Delta M_k|^4 \mathbb{1}_{|\Delta M_k| \geq \epsilon \sqrt{v_k}}.$$

Y entonces

$$\frac{|\Delta M_k|^2}{v_k} \mathbb{1}_{|\Delta M_k| \geq \epsilon \sqrt{v_k}} \leq \frac{1}{\epsilon^2 v_k^2} |\Delta M_k|^4 \mathbb{1}_{|\Delta M_k| \geq \epsilon \sqrt{v_k}}.$$

Recuerde que $\Delta M_n = a_n \xi_n$, esto nos facilitará obtener lo siguiente

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{v_k} \mathbb{E} [|\Delta M_k|^2 \mathbb{1}_{|\Delta M_k| \geq \epsilon \sqrt{v_k}} | \mathcal{F}_{k-1}] &\leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{v_k^2} \mathbb{E} [|\Delta M_k|^4 | \mathcal{F}_{k-1}] \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^2} \sup_{k \geq 1} \mathbb{E} [\xi_k^4 | \mathcal{F}_{k-1}] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^4}{v_k^2} \\ &\leq \frac{C_0}{\epsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^4}{v_k^2} \\ &\sim \frac{C_0}{\epsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-2\alpha}{k} \right)^2 < \infty. \end{aligned}$$

Verificando que se cumple la primera condición del Lema 2.5. Tomando esto último, si $a = 2$ y $\epsilon = 1$, podemos ver que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{v_k^2} \mathbb{E} [|\Delta M_k|^4 \mathbb{1}_{|\Delta M_k| \leq \sqrt{v_k}} | \mathcal{F}_{k-1}] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{v_k^2} \mathbb{E} [|\Delta M_k|^4 | \mathcal{F}_{k-1}] < \infty.$$

Lo que verifica la segunda condición del Lema 2.5, que será aplicado de inmediato, lo que implica que

$$\frac{1}{\log(v_n)} \sum_{k=1}^n \left(\frac{v_k - v_{k-1}}{v_k} \right) \delta_{M_k/\sqrt{v_{k-1}}} \Rightarrow G^* \quad \text{c.s.}$$

Con $G^* = N(0, \sigma^2)$. Si recordamos que $f_k \sim \frac{1-2\alpha}{k}$ y $\frac{M_k}{\sqrt{v_{k-1}}} \sim \sqrt{\frac{1-2\alpha}{k}} \left(S_k - k \frac{\omega}{1-\alpha} \right)$, podemos concluir que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-2\alpha)\log(n)} \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k^2}{v_k} \right) \delta_{\sqrt{\frac{1-2\alpha}{k}} \left(S_k - k \frac{\omega}{1-\alpha} \right)} \\ &= \frac{1}{(1-2\alpha)\log(n)} \sum_{k=1}^n f_k \delta_{\sqrt{(1-2\alpha)k} \left(\frac{S_k}{k} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right)} \\ &\sim \frac{1}{\log(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \delta_{\sqrt{(1-2\alpha)k} \left(\frac{S_k}{k} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right)} \Rightarrow G^*. \end{aligned}$$

Finalmente, un re-escalado en cada medida de Dirac que conforma la suma de esta última expresión, multiplicando cada subíndice por $1/\sqrt{1-2\alpha}$ nos da el resultado buscado. \square

2.4.2. Régimen crítico

En este régimen, supondremos que los parámetros p, q y r satisfacen que $\alpha = 1/2$ (lo cual se asume para toda esta sección). Unos cuantos resultados recopilados en el siguiente lema nos servirán de complemento.

Lema 2.8. *Para este régimen, se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1. $v_n \sim \frac{\pi}{4} \log(n)$.
2. $\log(v_n) \sim \log(\log(n))$.

Demostración. Se sigue del límite (2.8). \square

Como en el caso del régimen anterior, en este régimen, se enunciará su **Ley Fuerte de los Grandes Números**, indicando igualmente la respectiva razón de convergencia.

Teorema 2.7. *Se cumple la siguiente convergencia casi segura*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 2\omega,$$

y para mayor exactitud, con la siguiente razón de convergencia

$$\left(\frac{S_n}{n} - 2\omega \right)^2 = O\left(\frac{\log(n)\log(\log(n))}{n} \right).$$

Demostración. Por el límite (2.8), $O(v_n) = O(\log(n))$, y por el Lema 2.1, $|M_n|^2 = O(v_n \log(v_n))$ c.s. Entonces,

$$|M_n^2| = O(\log(n)\log(\log(n))) \quad \text{c.s.}$$

O también, $\frac{M_n^2}{\log(n)} = O(\log(\log(n)))$. En este régimen tenemos que $a_n \sim \frac{\Gamma(1+\alpha)}{n^\alpha} = \frac{\sqrt{\pi}/2}{n^{1/2}}$. Esto implica que

$$na_n^2 \rightarrow \frac{\pi}{4}. \tag{2.26}$$

Por la definición de M_n ,

$$|M_n| = |a_n S_n - \omega A_n| = O\left(\sqrt{\log(n)\log(\log(n))}\right).$$

Lo que implica que

$$\begin{aligned} \left|\frac{M_n}{na_n}\right| &= \left|\frac{S_n}{n} - \frac{\omega A_n}{na_n}\right| = O\left(\sqrt{\frac{\log(n)\log(\log(n))}{n(na_n^2)}}\right) \\ &= O\left(\sqrt{\frac{\log(n)\log(\log(n))}{n}}\right) \text{ por (2.26).} \end{aligned}$$

Como $a_n \sim \frac{\Gamma(1+1/2)}{n^{1/2}}$, podemos ver que

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=1}^n a_k \sim \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{\pi}/2}{k^{1/2}} \sim \sqrt{\pi n}, \\ &\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{1/2}} \sim \int_0^n x^{-1/2} dx = 2n^{1/2}\right). \end{aligned}$$

Con esto se consigue que $\frac{A_n}{na_n} = \frac{A_n}{\sqrt{n}\sqrt{na_n^2}} \sim \frac{\sqrt{\pi n}}{\sqrt{n}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/2}} = 2$. Al ver que $\frac{1}{\alpha-1} = \frac{1}{-1/2} = -2$, por un argumento muy similar al que se mostró en el Teorema 2.2.

$$\left|\frac{A_n}{na_n} - 2\right| \sim \frac{1}{(1/2)n^{1/2}\Gamma(1/2)} = \frac{2}{\sqrt{n\pi}}.$$

Y así,

$$\begin{aligned} \left|\frac{S_n}{n} - 2\omega\right| &= \left|\frac{S_n}{n} - \frac{\omega A_n}{na_n} + \frac{\omega A_n}{na_n} - 2\omega\right| \\ &\leq \left|\frac{S_n}{n} - \frac{\omega A_n}{na_n}\right| + \left|\frac{\omega A_n}{na_n} - 2\omega\right| \\ &\sim O\left(\sqrt{\frac{\log(n)\log(\log(n))}{n}}\right) + \frac{2\omega}{\sqrt{n\pi}}. \end{aligned}$$

Finalizando así de la siguiente manera

$$\left(\frac{S_n}{n} - 2\omega\right)^2 = O\left(\frac{\log(n)\log(\log(n))}{n}\right).$$

Pues al comparar $2/\pi$ con $\sqrt{\log(n)\log(\log(n))}$, se observa que

$$\frac{2}{\sqrt{n\pi}} = O\left(\sqrt{\frac{\log(n)\log(\log(n))}{n}}\right). \quad \square$$

En el mismo orden que el régimen anterior, se presentará la **Convergencia a los Momentos Pares** de la distribución normal o **ley Cuadrática Fuerte**. Por el Teorema 2.7 y acorde al comportamiento de $\log(n)$, es sencillo ver que para todo entero $r \geq 1$,

$$\left(\frac{1}{\log(k)}\right)^{r+1} \left(\frac{S_k}{k} - 2\omega\right)^{2r} \rightarrow 0, \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

Nuevamente no es claro el comportamiento a simple vista al enfocarnos en la nueva serie obtenida:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{r-1} \left(\frac{1}{\log(k)} \right)^{r+1} \left(\frac{S_k}{k} - 2\omega \right)^{2r}.$$

Afortunadamente, como en el régimen difusivo, este teorema nos ayuda a comparar el ritmo de crecimiento de la serie con $\log(\log(n))$ (la serie diverge a infinito, pero lo hace de forma relativamente lenta).

Teorema 2.8. *Se cumple la siguiente convergencia casi segura para todo entero $r \geq 1$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(\log(n))} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{\log(k)} \right)^{r+1} k^{r-1} \left(\frac{S_k}{k} - 2\omega \right)^{2r} = \frac{(\sigma^2)^r (2r)!}{2^r r!}.$$

Demostración. Al igual que en el Teorema 2.3, se cumple la condición requerida para usar el Lema 2.2. Usando el Teorema 2.7 y el inciso 5 de la Proposición 2.4, se llega a la siguiente implicación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\xi_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] = \gamma \frac{\tau}{1-\gamma} + \tau - 4\omega^2 = \frac{\tau}{1-\gamma} - 4\omega^2.$$

Al recordar lo que $na_n^2 \rightarrow \pi/4$ y $\frac{v_n}{\log(n)} \rightarrow \pi/4$, directamente se tiene que $na_n^2 \sim \frac{v_n}{\log(n)}$. Así,

$$\frac{a_n^4}{v_n^2} = \left(\frac{a_n^2}{v_n} \right)^2 = \left(\frac{na_n^2}{n \log(n) \frac{v_n}{\log(n)}} \right)^2 \sim \left(\frac{1}{n \log(n)} \right)^2.$$

Más aún, notando que $f_n = \frac{a_n^2}{v_n} \rightarrow 0$ (esto debido a que $f_n \sim \frac{1}{n \log(n)}$). Entonces, si aplicamos el Lema 2.2, junto con $\log(v_n) \sim \log(\log(n))$ y

$$\begin{aligned} \frac{M_k}{\sqrt{v_{k-1}}} &= \frac{a_k S_k - \omega A_k}{k a_k} \frac{a_k k}{\sqrt{v_{k-1}}} \\ &\sim \left(\frac{S_k}{k} - 2\omega \right) \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2k^{1/2}} \right) \frac{k}{\sqrt{v_{k-1}}} = \left(\frac{S_k}{k} - 2\omega \right) \frac{\sqrt{(\pi/4)k}}{\sqrt{\frac{v_{k-1}}{\log(k)} \log(k)}} \\ &\sim \sqrt{\frac{k}{\log(k)}} \left(\frac{S_k}{k} - 2\omega \right). \end{aligned}$$

Para concluir de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^{2r} (2r)!}{2^r r!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(v_n)} \sum_{k=2}^n f_k \left(\frac{M_k^2}{v_{k-1}} \right)^r \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(\log(n))} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \log(k)} \left(\sqrt{\frac{k}{\log(k)}} \left(\frac{S_k}{k} - 2\omega \right) \right)^{2r} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(\log(n))} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{\log(k)} \right)^{r+1} k^{r-1} \left(\frac{S_k}{k} - 2\omega \right)^{2r}. \quad \square \end{aligned}$$

Ahora, la **Ley del Logaritmo Iterado**, centrada para el presente régimen.

Teorema 2.9. *Se cumple la siguiente afirmación*

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2 \log(n) \log(\log(\log(n)))} \right)^{1/2} \left(\frac{S_n}{n} - 2\omega \right) \\ &= - \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2 \log(n) \log(\log(\log(n)))} \right)^{1/2} \left(\frac{S_n}{n} - 2\omega \right) \\ &= \sigma \text{ c.s.} \end{aligned}$$

Donde $\sigma^2 = \frac{\tau}{1 - \gamma} - 4\omega^2$.

Demostración. Al ocurrir que $\frac{a_k^4}{v_k^2} \sim \frac{1}{k^2 \log^2(k)}$, usando la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, tenemos que $\frac{a_k^4}{v_k^2} < \infty$. Esto, junto con el recordatorio de que $\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\xi_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = \frac{\tau}{1 - \gamma} - 4\omega^2$ nos lleva a aplicar el Lema 2.3 de forma análoga al Teorema 2.4, obteniendo así que

$$\begin{aligned} \frac{M_n}{\sqrt{2v_n \log(\log(v_n))}} &= \frac{a_n S_n - \omega A_n}{na_n} \frac{na_n}{\sqrt{2v_n \log(\log(v_n))}} \\ &\sim \frac{n\sqrt{\pi}/(2n^{1/2})}{\sqrt{2 \cdot \frac{\pi}{4} \log(n) \log(\log(\log(n)))}} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega A_n}{na_n} \right) \\ &= \left(\frac{n}{2 \log(n) \log(\log(\log(n)))} \right)^{1/2} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega A_n}{na_n} \right). \end{aligned}$$

Lo cual implica que

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2 \log(n) \log(\log(\log(n)))} \right)^{1/2} \left(\frac{S_n}{n} - 2\omega \right) \\ &- \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2 \log(n) \log(\log(\log(n)))} \right)^{1/2} \left(\frac{S_n}{n} - 2\omega \right) \\ &= \sigma. \quad \square \end{aligned}$$

Para el **Teorema Central del Límite** correspondiente a este régimen, se verá que la sucesión adecuada para controlar la varianza es $\sqrt{n/\log(n)}$.

Teorema 2.10. *La normalidad asintótica está dada por lo siguiente*

$$\sqrt{\frac{n}{\log(n)}} \left(\frac{S_n}{n} - 2\omega \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Demostración. Por el límite (2.8) y el Lema 1.1, y de manera similar al Teorema 2.5

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle M \rangle_n}{(\pi/4) \log(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\gamma \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{v_n} \frac{v_n}{(\pi/4) \log(n)} \frac{Z_k}{k} + (\tau - \omega^2) \frac{v_n}{(\pi/4) \log(n)} \right. \\ &\quad \left. - 2\omega \alpha \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{v_n} \frac{v_n}{(\pi/4) \log(n)} \frac{S_k}{k} - \alpha^2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{v_n} \frac{v_n}{(\pi/4) \log(n)} \frac{S_k^2}{k^2} \right] \\ &= \sigma^2. \end{aligned}$$

De forma análoga al Teorema 2.5, se satisface la Condición de Lindeberg requerida por el Lema 2.4.

Si recordamos el límite (2.26), que dice que $na_n^2 \rightarrow \frac{\pi}{4}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{M_n}{\sqrt{(\pi/4)\log(n)}} &= \frac{na_n \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega A_n}{na_n} \right)}{\sqrt{(\pi/4)\log(n)}} \\ &= \frac{na_n}{\sqrt{(\pi/4)\log(n)}} \left(\frac{S_n}{n} - 2\omega \right) + \frac{\omega}{\sqrt{(\pi/4)\log(n)}} \\ &= n^{1/2} \sqrt{\frac{na_n^2}{(\pi/4)\log(n)}} \left(\frac{S_n}{n} - 2\omega \right) + \frac{\omega}{\sqrt{(\pi/4)\log(n)}}. \end{aligned}$$

Y así logramos finalizar con la siguiente convergencia en distribución:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{\sqrt{(\pi/4)\log(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{\log(n)}} \left(\frac{S_n}{n} - 2\omega \right) = \mathcal{N}(0, \sigma^2). \quad \square$$

Enseguida se tiene una versión del **Teorema Central del Límite Casi Seguro** para el presente régimen.

Teorema 2.11. *Tenemos la siguiente convergencia casi segura de funciones de medidas empíricas*

$$\frac{1}{\log(\log(n))} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \log(k)} \delta_{\sqrt{\frac{k}{\log(k)}} \left(\frac{S_k}{k} - 2\omega \right)} \Rightarrow G \quad c.s. \quad (2.27)$$

Donde « \Rightarrow » se refiere a la convergencia en distribución y G es la medida Gaussiana $N(0, \sigma^2)$ (Definición 1.4).

Demostración. Procediendo de manera semejante al Teorema 2.6 y como $\frac{a_k^4}{v_k^2} < \infty$, al cumplirse las condiciones del Lema 2.5 y al cual se aplicará que $\frac{M_n}{\sqrt{v_{n-1}}} \sim \sqrt{\frac{n}{\log(n)}} \left[\frac{S_n}{n} - 2\omega \right]$, $\log(v_n) \sim \log(\log(n))$ y $f_n \sim \frac{1}{n \log(n)}$, se logra concluir que

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(v_n)} \sum_{k=2}^n \left(\frac{v_k - v_{k-1}}{v_k} \right) \delta_{M_k / \sqrt{v_{k-1}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(\log(n))} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \log(k)} \delta_{\sqrt{\frac{k}{\log(k)}} \left[\frac{S_k}{k} - 2\omega \right]} \Rightarrow G^*. \end{aligned}$$

Donde G^* representa la medida Gaussiana $N(0, \sigma^2)$. □

2.4.3. Régimen superdifusivo

En este último caso supondremos que $\alpha > 1/2$ (esto será considerado para toda esta sección). Unos resultados aparte, característicos de este régimen se incluirán en el siguiente lema, así también el teorema de la Convergencia Acotada, que puede obtenerse como un caso particular del Teorema de la Convergencia Dominada.

Lema 2.9. *Se cumplen las siguientes propiedades*

1. $2\omega[\beta - \omega]\alpha(1 - \alpha) - \alpha^2\omega^2 = \alpha^2\omega(2 - \beta[\theta + 1])$.
2. $A_n = \frac{na_n - \alpha}{1 - \alpha}$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
 1. \quad 2\omega[\beta - \omega]\alpha(1 - \alpha) - \alpha^2\omega^2 &= 2\omega\alpha((\beta - \omega) - \alpha\beta + \alpha\omega) - \alpha^2\omega^2 \\
 &= 2\omega\alpha((\beta\theta) - \alpha\beta + \alpha\omega) - \alpha^2\omega^2 \\
 &= 2\omega\alpha^2 - 2\omega\alpha^2(\beta - \omega) - \alpha^2\omega^2 \\
 &= 2\omega\alpha^2 - 2\omega\alpha^2(\beta\theta) - \alpha^2\omega^2 \\
 &= 2\omega\alpha^2 - \omega\alpha^2(\beta\theta) - \omega\alpha^2(\beta - \omega) - \alpha^2\omega^2 \\
 &= 2\omega\alpha^2 - \omega\alpha^2\beta\theta - \beta\alpha^2\omega = \alpha^2\omega[2 - \beta(\theta + 1)].
 \end{aligned}$$

2. Usando el resultado (en el Apéndice A, Lema A.1), se puede comprobar que

$$\begin{aligned}
 A_n &= \Gamma(\alpha + 1) \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k + \alpha)} = \Gamma(\alpha + 1) \left(\frac{1}{(\alpha - 1)\Gamma(\alpha)} - \frac{\Gamma(n + 1)}{(\alpha - 1)\Gamma(n + \alpha)} \right) \\
 &= \Gamma(\alpha + 1) \left(\frac{n\Gamma(n)\Gamma(\alpha + 1)}{(1 - \alpha)\Gamma(n + \alpha)\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{\alpha}{(1 - \alpha)\Gamma(\alpha + 1)} \right) \\
 &= \Gamma(\alpha + 1) \left[\frac{na_n}{(1 - \alpha)\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{\alpha}{(1 - \alpha)\Gamma(\alpha + 1)} \right] = \frac{na_n - \alpha}{1 - \alpha}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Lema 2.10. (*Teorema de la Convergencia Acotada*) Sea (X_n) una sucesión de variables aleatorias. Si $K \geq 0$ es una constante tal que $|X_n| \leq K$ para todo $n \geq 1$ y si (X_n) converge casi seguramente a la variable aleatoria X , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X].$$

El lema que se va a citar se obtuvo de [17], que incluye su demostración, hablando en concreto del Teorema 2.15.

Lema 2.11. Sea (X_n) un proceso estocástico tal que $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ conforma una martingala cuadrado integrable de esperanza cero, ambos adaptados a una filtración (\mathcal{F}_n) . Entonces (S_n) converge casi seguramente sobre el conjunto $\{\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] < \infty\}$ a una variable aleatoria integrable.

Desafortunadamente, las técnicas empleadas para los regímenes anteriores no se pueden aplicar aquí. Frente a esta situación, será preferible partir de otros resultados para dar afirmaciones conclusivas respectivas a este régimen.

El siguiente teorema es una convergencia hacia una variable aleatoria de la cual no tenemos una descripción explícita, es decir, carecemos de detalles sobre su distribución, pero que teóricamente podemos afirmar que existe y de la que podemos obtener su primer y segundo momentos.

Teorema 2.12. *Tenemos la siguiente convergencia de forma casi segura.*

$$n^{1-\alpha} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) \rightarrow L \quad c.s.$$

Donde L es una variable aleatoria no degenerada tal que

$$\mathbb{E}[L] = \frac{\beta(1-\alpha) - \omega}{\Gamma(\alpha + 1)(1-\alpha)}.$$

Con $\beta := p - q$, y

$$\mathbb{E}[L^2] = \frac{\nabla}{\Gamma(2\alpha + 1)}.$$

Donde

$$\nabla := p + q + \frac{\tau}{(1-\gamma)(2\alpha-1)} - \frac{2\alpha\omega^2}{(2\alpha-1)(\alpha-1)^2} + 4 \left[\frac{\omega\alpha(\beta-1)}{(\alpha-1)^2} \right] + \frac{r\gamma^2}{2\alpha-\gamma}. \quad (2.28)$$

Demostración. A partir del inciso 1 de la Proposición 2.4, en conjunto con las Proposiciones 2.5, 2.6 y por el límite (2.9), se consigue afirmar lo siguiente

$$\begin{aligned} \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[M_n^2] &= \sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(\Delta M_k)^2] = \sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[a_k^2 \xi_k^2] \\ &= \sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{E}[\xi_k^2] \leq (\gamma + \tau) \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \\ &\leq (\gamma + \tau) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha + 1 & \alpha + 1 & ; 1 \end{pmatrix} < \infty. \end{aligned}$$

(Observar que v_n es una sucesión creciente). Entonces tenemos que la martingala (M_n) es acotada en L^2 , con $M_n = a_n S_n - \omega A_n$. Por el lema 2.6.1 esto implica que converge tanto en L^2 como casi seguramente a $M = \sum_{k=1}^{\infty} a_n \xi_n$. Por la ecuación (2.20), se obtiene que

$$\begin{aligned} na_n \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) &= na_n \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega A_n}{na_n} + \frac{\omega A_n}{na_n} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) \\ &= na_n \left(\frac{M_n}{na_n} + \frac{\omega}{\alpha-1} \left(\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)} - 1 \right) - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) \\ &= na_n \left(\frac{M_n}{na_n} + \frac{\omega}{\alpha-1} \left(\frac{\alpha}{na_n} - 1 \right) - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) = M_n + \frac{\omega\alpha}{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Con esto, $na_n \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) \rightarrow M + \frac{\omega\alpha}{\alpha-1}$ c.s. Además, (recuperando que $n^{-\alpha} \sim \frac{a_n}{\Gamma(\alpha+1)}$), $n^{1-\alpha} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) \sim \frac{na_n}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{M_n}{na_n} - \frac{\omega\alpha}{(1-\alpha)na_n} \right) \rightarrow L$ c.s., donde

$$L = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(M - \frac{\omega\alpha}{1-\alpha} \right).$$

Usando directamente que $M_n \rightarrow M$ en L^2 ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(n^{1-\alpha} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) - L \right)^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{\Gamma^2(\alpha+1)} (M_n - M)^2 \right] = 0.$$

Terminando la primera parte de la prueba. Ahora, obtendremos el primer y segundo momento de L .

Como $\mathbb{E}[X_1] = p - q = \beta$, y por Proposición 2.1, $\mathbb{E}[S_{n+1}] = \gamma_n \mathbb{E}[S_n] + \omega$, de manera recursiva hallamos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_{n+1}] &= \gamma_1 \dots \gamma_n \beta + \frac{\gamma_2 \dots \gamma_n \omega(\gamma_1)}{\gamma_1} + \dots + \frac{\gamma_n \omega(\gamma_1 \dots \gamma_{n-1})}{\gamma_1 \dots \gamma_{n-1}} + \frac{\omega(\gamma_1 \dots \gamma_n)}{\gamma_1 \dots \gamma_n} \\ &= \frac{1}{a_{n+1}} \beta + a_2 \frac{\omega}{a_{n+1}} + \dots + \omega \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} \\ &= \frac{1}{a_{n+1}} \left(\beta + \omega \sum_{l=1}^n a_{l+1} \right). \end{aligned}$$

Que se puede escribir también como $\mathbb{E}[S_n] = \frac{1}{a_n} (\beta + \omega(A_n - 1))$, lo que deriva a

$$\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[a_n S_n - \omega A_n] = a_n \frac{1}{a_n} (\beta + \omega(A_n - 1)) - \omega A_n = \beta - \omega.$$

Encontrando así el primer momento de L

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[L] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(E[M] - \frac{\alpha\omega}{1-\alpha} \right) \\ &= \frac{\beta-\omega}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{\alpha\omega}{\Gamma(\alpha+1)(1-\alpha)} \\ &= \frac{\beta(1-\alpha) - \omega}{\Gamma(\alpha+1)(1-\alpha)}.\end{aligned}$$

Resta hallar $\mathbb{E}[L^2]$. Como

$$\mathbb{E}[L^2] = \mathbb{E} \left[\frac{M^2}{\Gamma^2(\alpha+1)} - \frac{2\omega\alpha M}{(1-\alpha)\Gamma^2(\alpha+1)} + \left(\frac{\omega\alpha}{(1-\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \right)^2 \right].$$

Debemos encontrar $\mathbb{E}[M^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[M_n^2]$. Primero

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_n^2] &= a_n^2 \mathbb{E}[S_n^2] - 2\omega a_n A_n \mathbb{E}[S_n] + \omega^2 A_n^2 \\ &= a_n^2 \mathbb{E}[S_n^2] - 2\omega A_n (\beta + \omega(A_n - 1)) + \omega^2 A_n^2 \\ &= a_n^2 \mathbb{E}[S_n^2] - 2\omega A_n (\beta - \omega) - \omega^2 A_n^2.\end{aligned}$$

Después, por la Proposición 2.4, inciso 4

$$\mathbb{E}[S_{n+1}^2] = \mathbb{E}[S_n^2] + 2\frac{\alpha}{n} \mathbb{E}[S_n^2] + 2\omega \mathbb{E}[S_n] + \gamma \frac{\mathbb{E}[S_n]}{n} + \tau.$$

Lo que se puede escribir como $E[S_{n+1}^2] = g_n E[S_n^2] + h_n$, donde $g_n = 1 + \frac{2\alpha}{n}$ y $h_n = 2\omega \mathbb{E}[S_n] + \gamma \frac{\mathbb{E}[S_n]}{n} + \tau$. Para $n \in \mathbb{Z}^+$. De manera recursiva, una ecuación de la forma $x_{n+1} = a_n x_n + b_n$ se puede escribir como

$$x_{n+1} = a_1 \dots a_n x_1 + \sum_{k=1}^n b_k \frac{a_n \dots a_{k+1}}{a_k \dots a_1}.$$

Tomando en cuenta los siguientes puntos

- $\mathbb{E}[S_1^2] = \mathbb{E}[X_1^2] = p + q,$
- $g_n \dots g_1 = \left(\frac{n+2\alpha}{n} \right) \dots \left(\frac{1+2\alpha}{1} \right) \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} = \frac{\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\alpha+1)},$
- $\frac{g_n \dots g_1}{g_k \dots g_1} = \frac{\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\alpha+1)} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(k+2\alpha+1)}.$

Se obtiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_n^2] &= g_{n-1} \mathbb{E}[S_{n-1}^2] + h_{n-1} \\ &= \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(2\alpha+1)} \mathbb{E}[S_1^2] + \sum_{k=1}^n h_k \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(2\alpha+1)} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(k+2\alpha+1)} \\ &= \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(2\alpha+1)} \left(p + q + \Gamma(2\alpha+1) \sum_{k=1}^n h_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+2\alpha+1)} \right).\end{aligned}$$

Del Teorema 2.4, junto con la ecuación 2.23, la definición de b_n y B_n , procediendo de manera análoga a lo hecho para $\mathbb{E}[S_n]$, obtenemos que $\mathbb{E}[Z_n] = \frac{1}{b_n} (p + q + \tau(B_n - 1))$, y así

$$\begin{aligned} h_k &= 2\omega \left[\frac{\beta - \omega(1 - A_k)}{a_k} \right] + \frac{r}{k} \left(\frac{p + q - \tau(1 - B_k)}{b_k} \right) \\ &= \frac{2\omega(\beta - \omega)}{a_k} + \frac{2\omega^2 A_k}{a_k} + \frac{\gamma(p + q - \tau)}{kb_k} + \frac{\gamma\tau B_k}{kb_k} + \tau. \end{aligned}$$

En particular, como

$$\frac{2\omega^2 A_k}{a_k} = 2\omega^2 k \frac{A_k}{ka_k} = 2\omega^2 \left(\frac{k}{1 - \alpha} - \frac{k}{1 - \alpha} \left(\frac{\alpha}{ka_k} \right) \right).$$

En conjunto junto con

$$\gamma\tau \frac{B_k}{kb_k} + \tau = \gamma\tau \left(\frac{1}{1 - \gamma} - \frac{\gamma}{(1 - \gamma)kb_k} + \frac{1}{\gamma} \right),$$

h_k se escribe finalmente como

$$\begin{aligned} h_k &= \left(\frac{\gamma\tau}{1 - \gamma} + \frac{\gamma\tau}{\gamma} \right) + \frac{2\omega^2 k}{1 - \alpha} + \left(\frac{2\omega(\beta - \omega)}{a_k} - \frac{2\omega^2 \alpha}{(1 - \alpha)a_k} \right) + \left(\frac{\gamma(p + q - \tau)}{kb_k} - \frac{\gamma^2 \tau}{(1 - \gamma)kb_k} \right) \\ &\quad \frac{\tau}{1 - \gamma} + \frac{2k\omega^2}{1 - \alpha} - \frac{t_1}{a_k} + \frac{\gamma}{kb_k} t_2. \end{aligned}$$

Con $t_1 = \frac{2\omega(a\omega - (b - \omega)(1 - \alpha))}{1 - \alpha}$ (también $\beta - \omega = \beta - (1 - \theta)\beta = \theta\beta$) y $t_2 = p + q - \frac{\tau}{1 - \gamma}$.

Distribuyendo $\frac{\Gamma(k + 1)}{\Gamma(k + 1 + 2\alpha)}$ en h_k y usando Lema B.1 de [2] (Véase Apéndice A), se consigue que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} h_k \frac{\Gamma(k + 1)}{\Gamma(k + 2\alpha + 1)} &= \frac{\tau}{1 - \gamma} \left[\frac{1}{(2\alpha - 1)\Gamma(1 - 2\alpha)} - \frac{n\Gamma(n)}{(2\alpha - 1)\Gamma(n + 2\alpha)} \right] \\ &\quad + \frac{\omega^2}{1 - \alpha} \left[\frac{1}{(\alpha - 1)(2\alpha - 1)\Gamma(2\alpha)} - \frac{n\Gamma(n)(n(2\alpha - 1) + 1)}{(\alpha - 1)(2\alpha - 1)\Gamma(n + 2\alpha)} \right] \\ &\quad - t_1 \left[\frac{1}{\alpha(\alpha - 1)\Gamma(2\alpha)} - \frac{(n + 1)\Gamma(n + \alpha)}{\alpha(\alpha - 1)\Gamma(\alpha)\Gamma(n + 2\alpha)} \right] \\ &\quad + \frac{\gamma t_2}{\Gamma(\gamma + 1)} \left[\frac{\Gamma(\gamma + 1)}{(2\alpha - \gamma)\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{\Gamma(n + \gamma)}{(2\alpha - \gamma)\Gamma(2\alpha + n)} \right]. \end{aligned}$$

Si se sustituye en $\mathbb{E}[S_n^2]$ y se emplea álgebra elemental, se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n^2] &= \frac{\Gamma(n + 2\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(2\alpha + 1)} \left[p + q + \frac{\tau}{(1 - \gamma)(2\alpha - 1)} - \frac{2\alpha\omega^2}{(2\alpha - 1)(\alpha - 1)^2} + 4 \left[\frac{\omega\alpha(\beta - 1)}{(\alpha - 1)^2} \right] + \frac{r\gamma^2}{2\alpha - \gamma} \right] \\ &\quad - \frac{n}{2\alpha - 1} \left[\frac{\tau}{1 - \gamma} - \frac{\omega^2(n(2\alpha - 1) + 1)}{(\alpha - 1)^2} \right] + \frac{(n + 1)t_1}{a_n(\alpha - 1)} - \frac{\gamma t_2}{(2\alpha - \gamma)b_n}. \end{aligned}$$

Para simplificar la escritura, usaremos la notación para ∇ como se define en (2.28). De aquí, procedemos a sustituir en $\mathbb{E}[M_n^2]$ y con el Lema 2.9, se sigue que,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_n^2] &= \frac{a_n^2 \Gamma(n + 2\alpha) \nabla}{\Gamma(n)\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{\tau n a_n^2}{(2\alpha - 1)(1 - \gamma)} + \frac{n\omega^2 a_n^2}{(2\alpha - 1)(\alpha - 1)^2} - \frac{\gamma t_2 a_n^2}{(2\alpha - \gamma)b_n} \\ &\quad - 2\omega[\beta - \omega] \frac{na_n - \alpha}{1 - \alpha} + \frac{2\alpha\omega^2 na_n}{(1 - \alpha)^2} - \frac{\alpha^2 \omega^2}{(1 - \alpha)^2} + \frac{t_1(n + 1)a_n}{\alpha - 1}. \end{aligned}$$

Y dado que $\frac{t_1}{\alpha-1} + \frac{2\alpha\omega^2}{(1-\alpha)^2} - \frac{2\omega[\beta-\omega]}{1-\alpha} = -\frac{2\omega(\alpha\omega - (1-\alpha)[\beta-\omega])}{(1-\alpha)^2} + \frac{2\alpha\omega^2}{(1-\alpha)^2} - \frac{2\omega[\beta-\omega]}{1-\alpha} = 0$, podemos simplificar y obtener que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_n^2] &= \frac{a_n^2 \Gamma(n+2\alpha) \nabla}{\Gamma(n) \Gamma(2\alpha+1)} - \frac{\tau n a_n^2}{(2\alpha-1)(1-\gamma)} + \frac{n\omega^2 a_n^2}{(2\alpha-1)(\alpha-1)^2} - \frac{\gamma t_2 a_n^2}{(2\alpha-\gamma)b_n} \\ &\quad + 2\omega[\beta-\omega] \frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{\alpha^2 \omega^2}{(1-\alpha)^2} + \frac{t_1 a_n}{\alpha-1}.\end{aligned}$$

Considerando el Lema 2.9,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M^2] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[M_n^2] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\Gamma^2(n) \Gamma^2(\alpha+1) \Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma^2(n+\alpha) \Gamma(n) \Gamma(2\alpha+1)} \nabla + \frac{2\omega[\beta-\alpha]\alpha}{1-\alpha} - \frac{\alpha^2 \omega^2}{(1-\alpha)^2} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\Gamma(n) \Gamma(n+2\alpha) \Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha) \Gamma(n+\alpha) \Gamma(2\alpha+1)} + \frac{\alpha^2 \omega [2-\beta(\theta+1)]}{(1-\alpha)^2} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^\alpha} \frac{n^\alpha}{1} \frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} \nabla + \frac{\alpha^2 \omega [2-\beta(\theta+1)]}{(1-\alpha)^2} \right] \\ &= \frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} \nabla + \frac{\alpha^2 \omega [2-\beta(\theta+1)]}{(1-\alpha)^2}.\end{aligned}$$

Para concluir, haremos una última sustitución

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[L^2] &= \frac{1}{\Gamma^2(\alpha+1)} \left[\mathbb{E}[M^2] - \frac{2\omega\alpha E[M]}{1-\alpha} + \frac{\omega^2 \alpha^2}{(1-\alpha)^2} \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma^2(\alpha+1)} \left[\frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} \nabla + \frac{\alpha^2 \omega [2-\beta(\theta+1)]}{(1-\alpha)^2} - \frac{2\omega\alpha[\beta-\omega]}{1-\alpha} + \frac{\omega^2 \alpha^2}{(1-\alpha)^2} \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(2\alpha+1)} \nabla. \quad \square\end{aligned}$$

Marcando el final de este régimen, el siguiente teorema servirá para analizar a la distribución límite de la *LRRW*, o de forma más específica, la observación de una dispersión Gaussiana.

Teorema 2.13.

$$\sqrt{n^{2\alpha-1}} \left(n^{1-\alpha} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) - L \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha-1} \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

y

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \pm \frac{\sqrt{n^{2\alpha-1}} \left(n^{1-\alpha} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) - L \right)}{\sqrt{\log(\log(n))}} = \sqrt{\frac{2\sigma^2}{2\alpha-1}} \quad c.s.$$

Demostración. Al tener que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\xi_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = \sigma^2$ c.s. y con ayuda del Lema 2.10 de la Convergencia Acotada,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[(\Delta M_k)^2] &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[(a_k \xi_k)^2] \\ &\sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma^2(1+\alpha)}{k^{2\alpha}} \mathbb{E}[\xi_k^2] \\ &\leq \sigma^2 \Gamma^2(\alpha+1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\alpha}}.\end{aligned}$$

Y en este caso, al ser $\alpha > 1/2$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\alpha}} < \infty$, inmediatamente se ve que $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[(\Delta M_k)^2] < \infty$. Se observa que

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{2\alpha}} \sim \int_n^{\infty} \frac{1}{t^{2\alpha}} dt = \frac{(2\alpha - 1)}{n^{2\alpha-1}}.$$

Lo que nos lleva a lo siguiente,

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{E}[(\Delta M_k)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] &\sim \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2 \sigma^2 \sim \sigma^2 \Gamma^2(\alpha + 1) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{2\alpha}} \\ &\sim \frac{\sigma^2 \Gamma^2(\alpha + 1)}{(2\alpha - 1)n^{2\alpha-1}} \frac{n}{n} \sim \frac{\sigma^2 n a_n^2}{2\alpha - 1} \quad \text{c.s.} \end{aligned}$$

Usando el Teorema de la Convergencia Acotada,

$$r_n^2 := \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{E}[(\Delta M_k)^2] \sim \frac{\sigma^2}{2\alpha - 1} n a_n^2 \quad \text{c.s.}$$

Con esto último, las condiciones *a)* y *I)* del Lema 2.6 se cumplen.

Además, se satisface que $r_n^4 \sim \frac{\Gamma^4(\alpha + 1)\sigma^4}{(2\alpha - 1)^2 n^{4\alpha-2}}$ y $(\Delta M)^4 = a_n^4 \xi_n^4 \leq a_n^4 C_0 \sim \frac{C_0 \Gamma(\alpha + 1)^4}{n^{4\alpha}}$.

De acuerdo a esto, al ser la sucesión (r_n) creciente, podemos verificar que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[(\Delta M_{k+1})^2 : |\Delta M_{k+1}| \geq \epsilon r_k] &= \frac{1}{r_n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[\frac{(\Delta M_{k+1})^4}{(\Delta M_{k+1})^2} : |\Delta M_{k+1}| \geq \epsilon r_k \right] \\ &\leq \frac{1}{r_n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[(\Delta M_{k+1})^4 : |\Delta M_{k+1}| \geq \epsilon r_k]}{\epsilon^2 r_k^2} \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^2 r_n^4} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[|\Delta M_{k+1}|^4] \leq \frac{16}{\epsilon^2 r_n^4} \sum_{k=n}^{\infty} a_k^4 \\ &\leq \frac{C_0 \Gamma(1 + \alpha)}{\epsilon^2 r_n^4} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{4\alpha}} \leq C_2 n^{4\alpha-2} n^{1-4\alpha}. \end{aligned}$$

(Usando que para alguna constante C_1 , $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{4\alpha}} \leq C_1 \int_n^{\infty} \frac{1}{t^{4\alpha}} dt = C_1 \frac{n^{1-4\alpha}}{4\alpha - 1}$ para agrupar esta constante dentro de C_2 junto con las obtenidas también para $\frac{1}{r_n^4}$). Luego, se cumple la condición *b)* del Lema 2.6, dado que $n^{4\alpha-2} n^{1-4\alpha} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ ($\alpha > 1/2$). Al contemplar que

$$\begin{aligned} M - M_n &= a_n S_n - \omega A_n - \left[\Gamma(\alpha + 1)L + \frac{\omega\alpha}{1 - \alpha} \right] \\ &= a_n \left[S_n - \frac{\omega}{a_n} \left(\frac{n a_n - \alpha}{1 - \alpha} \right) - \left(\frac{\Gamma(1 + \alpha)L}{a_n} + \frac{\omega\alpha}{a_n(1 - \alpha)} \right) \right] \\ &= a_n \left[S_n - \frac{n\omega}{1 - \alpha} - \frac{n^\alpha L}{a_n} \right]. \end{aligned}$$

Obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{M_n - M}{r_n} &\sim \left(\frac{2\alpha - 1}{\sigma^2} \right)^{1/2} n^{-1/2} \left[n \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1 - \alpha} \right) - n^\alpha L \right] \frac{n^\alpha}{n^\alpha} \\ &\quad \left(\frac{2\alpha - 1}{\sigma^2} \right)^{1/2} n^{\alpha-1/2} \left[n^{1-\alpha} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1 - \alpha} \right) - L \right] \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{c.s.} \end{aligned}$$

Si re-escalamos la varianza multiplicando por $(2\alpha - 1)^{1/2}/\sigma$,

$$\sqrt{n^{2\alpha-1}} \left[n^{1-\alpha} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) - L \right] \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha-1} \right) \quad \text{c.s.}$$

Para la segunda parte de la demostración, aseguramos que para cualquier $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_k} \mathbb{E}[|\Delta M_{k+1}| : |\Delta M_{k+1}| \geq \epsilon] &\leq \frac{1}{r_k} \mathbb{E} \left[\frac{|\Delta M_{k+1}|^4}{|\Delta M_{k+1}|^3} : |\Delta M_{k+1}| \geq \epsilon \right] \\ &\leq \frac{1}{r_k \epsilon^3 r_k^3} \mathbb{E}[|\Delta M_{k+1}|^4] \\ &\leq C_3 (k^{-1/2} k^\alpha)^4 k^{4\alpha} = C_3 k^{4\alpha-2} k^{4\alpha} \\ &= \frac{C_3}{k^2}, \end{aligned}$$

Lo que garantiza que se cumplirá la condición *II*) de Lema 2.6. Además, al cumplirse $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k^4} \mathbb{E}[(\Delta M_k^4)] < \infty$, también lo hará la condición *III*). Finalmente, denotando a $d_k := \frac{1}{r_k^2} ((\Delta M_k)^2 - \mathbb{E}[(\Delta M_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}])$ a la martingala en diferencias, la cual al examinarla llegamos a lo siguiente

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[d_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k^4} (\mathbb{E}[(\Delta M_k)^4 | \mathcal{F}_{k-1}] - \mathbb{E}^2[(\Delta M_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}]) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k^4} \mathbb{E}[(\Delta M_k)^4 | \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^4}{r_k^4} \mathbb{E}[\xi_k^4 | \mathcal{F}_{k-1}] \leq C_4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{4\alpha-2}}{k^{4\alpha}} \\ &= C_4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty \quad \text{c.s.} \end{aligned}$$

De esta forma, como una consecuencia del Lema 2.11, se cumple la condición *IV* del Lema 2.6, por lo que podemos terminar la demostración de esta manera

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \pm \left(\frac{\sigma^2}{2\alpha-1} \right)^{1/2} \frac{M - M_n}{\sqrt{2r_{n+1}^2 \log(|\log(r_{n+1}^2)|)}} = \left(\frac{\sigma^2}{2\alpha-1} \right)^{1/2} \cdot 1.$$

O de acuerdo a lo requerido, esto se escribe también como

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \pm \frac{\sqrt{n^{2\alpha-1}} \left(n^{1-\alpha} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) \right) - L}{\sqrt{\log(\log(n))}} = \left(\frac{2\sigma^2}{2\alpha-1} \right)^{1/2}.$$

Lo que es cierto pues garantizamos que $\log(r_n^2) \sim (1-2\alpha)\log(n)$ y por ende, $\log(\log(r_n^2)) \sim \log(\log(n))$. \square

Capítulo 3

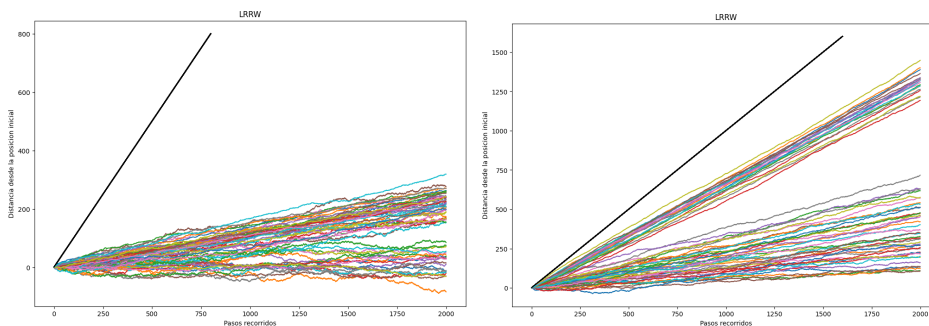
Simulación y visualización gráfica

Después de los resultados obtenidos en el capítulo anterior, se presenta la necesidad de acceder a estos de alguna forma gráfica, aún si hay carencia de rigurosidad, considerando que esto sea más una guía al entendimiento intuitivo y visual que una demostración en el sentido estricto. De entrada, necesitamos echar un vistazo al comportamiento de la LRRW para cada uno de sus regímenes y así, interpretar lo observado. Por medio del lenguaje Python y el uso de bibliotecas como numpy, matplotlib, y scipy, se modelará la posición, o lo que es lo mismo, el desplazamiento acumulado después de cierta cantidad de pasos y que nos permitirá su manipulación en la ejecución guiada por los teoremas límite de interés y que son propios para la caminata estudiada (en este caso serán la Ley de los Grandes Números, la Ley del Logaritmo Iterado, el Teorema Central del Límite y de forma numérica, la Convergencia a los Momentos Gaussianos Pares). Se agregará también una estimación del posible comportamiento de la variable L , como se señala en el Teorema 2.12.

Para los regímenes difusivo ($\alpha < 1/2$), crítico ($\alpha = 1/2$) y superdifusivo ($\alpha > 1/2$) se obtuvieron las siguientes caminatas, en donde para cada uno se realizaron 60 iteraciones de 2000 pasos, con valores adecuados distintos para θ, p, q .

Lo que podrá observarse en las Figuras 3.1 y 3.2 es la dispersión entre las distintas trayectorias

Figura 3.1: LRRW: Trayectorias recorridas.



(a) Régimen difusivo: la función identidad crece a un ritmo evidentemente mayor que las trayectorias realizadas.
(b) Régimen crítico: el crecimiento de las trayectorias se empieza a aproximar al de la identidad.

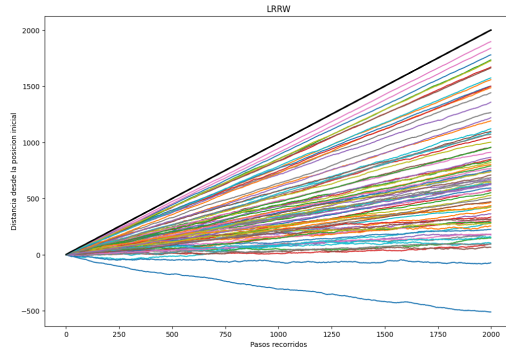


Figura 3.2: Régimen superdifusivo: el crecimiento de las trayectorias puede ser casi tan rápido como el de la identidad.

obtenidas usando valores cercanos entre parámetros en combinación con varias trayectorias realizadas bajo parámetros iguales.

Tanto en el régimen difusivo (Figura 3.1a) como en el crítico (Figura 3.1b), las trayectorias no se separan demasiado unas de otras cuando se ejecutan repitiendo los parámetros, pero para el régimen superdifusivo (Figura 3.2), la dispersión es aparentemente arbitraria, no se visualiza alguna noción de cercanía de forma clara. Esto puede intuirse si ubicamos la función identidad (la línea negra) y la comparamos con las trayectorias dadas. Así, la diferencia entre el régimen difusivo y crítico es que, la rapidez de crecimiento de cada una de las trayectorias para el primero es menor que para el segundo, pero hay similitud en la cercanía entre trayectorias. Y la diferencia entre estos dos regímenes y el superdifusivo es, tanto que para este último existe una mayor velocidad de crecimiento posible como una clara dispersión que se percibe entre sus trayectorias, con parámetros iguales o cercanos.

Podremos encontrar otras diferencias que serán evidentes tras aplicar algunos de los teoremas importantes de cada régimen y que tienen la mayor facilidad para su exposición gráfica.

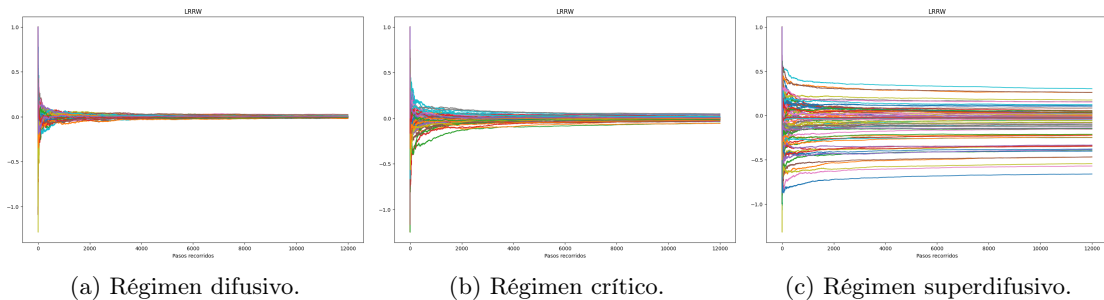
3.1. Ley de los Grandes Números

Primero, para cada uno de los regímenes se compilaron 75 trayectorias en las cuales visualizará el comportamiento para un número convenientemente grande de pasos (en este caso son 12,000) de la sucesión

$$\frac{S_n}{n} = \frac{\omega}{1 - \alpha}, \quad (3.1)$$

para corroborar gráficamente si su tendencia corresponde a lo establecido por los Teoremas 2.2 y 2.7. Por lo tanto, es pertinente mostrar las trayectorias resultantes de cada iteración.

Figura 3.3: Trayectorias obtenidas para la sucesión (3.1).



(a) Régimen difusivo.

(b) Régimen crítico.

(c) Régimen superdifusivo.

Un primer vistazo a la Figura 3.3 nos indica que, tanto para el régimen difusivo como el crítico,

las trayectorias se van acercando a cero como lo corroboran los teoremas mencionados, además de que acorde a estos, el crecimiento para el régimen crítico es más «rápido» que para el difusivo (se requiere un mayor número de pasos para apreciar la cercanía a cero), como también se puede observar en las gráficas. Sin embargo, nótese que para el régimen superdifusivo (Figura 3.3c) no podríamos encontrar una Ley de los Grandes Números similar dado que incluso para las trayectorias que provienen de los mismos parámetros, no se percibe alguna aproximación hacia un valor único concreto.

3.2. Ley del Logaritmo Iterado

Podemos afirmar basados en el conocimiento obtenido del comportamiento de la LRRW, específicamente para el régimen superdifusivo, que con este no se tiene una versión similar de la Ley del Logaritmo Iterado, al menos una que dependa de los parámetros que hemos estado manejando y a la cual se pueda ajustar correctamente, como si ocurre con los otros dos regímenes.

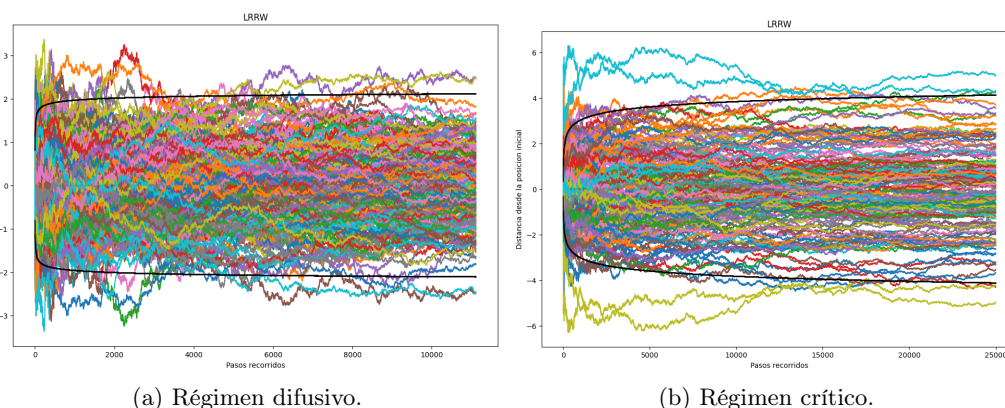
Para el régimen difusivo, se realizaron 105 trayectorias de 11,000 pasos y para el crítico se requirió de 90 trayectorias de 25,000 pasos (estos números permiten una visualización lo suficientemente clara para propósitos ilustrativos), considerando que de forma similar a la Ley de los Grandes Números, para el régimen crítico se tiene un crecimiento mayor. Con respecto a la Figura 3.4 que será mostrada a continuación, se tiene que para el primer régimen, en donde $\alpha < 1/2$, las curvas de color negro están dadas por

$$\pm \sqrt{2 \cdot \log(\log(t))}, \text{ con } t \geq 4.$$

Para el segundo régimen, en donde $\alpha = 1/2$, las curvas de color negro están dadas por

$$\pm \sqrt{2 \cdot \log(t) \cdot \log(\log(\log(t)))}, \text{ con } t \geq 16.$$

Figura 3.4: Cotas eventuales para las trayectorias correspondientes a los Teoremas 2.4 y 2.9.



Las trayectorias que se graficaron son de la forma

$$\sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1-\alpha} \right) \cdot \frac{\sqrt{1-2\alpha}}{\sigma}, \quad \alpha < 1/2,$$

$$\sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - 2\omega \right) \cdot \frac{1}{\sigma}, \quad \alpha = 1/2.$$

Aunque algunas de las trayectorias se escapan de la región delimitada por las curvas de color negro, los Teoremas 2.4 y 2.9 nos aseguran que esto solo ocurrirá dentro de un número finito de pasos, pues eventualmente quedarán completamente encerradas (esto puede contemplarse como una interpretación del concepto de límite superior de una sucesión).

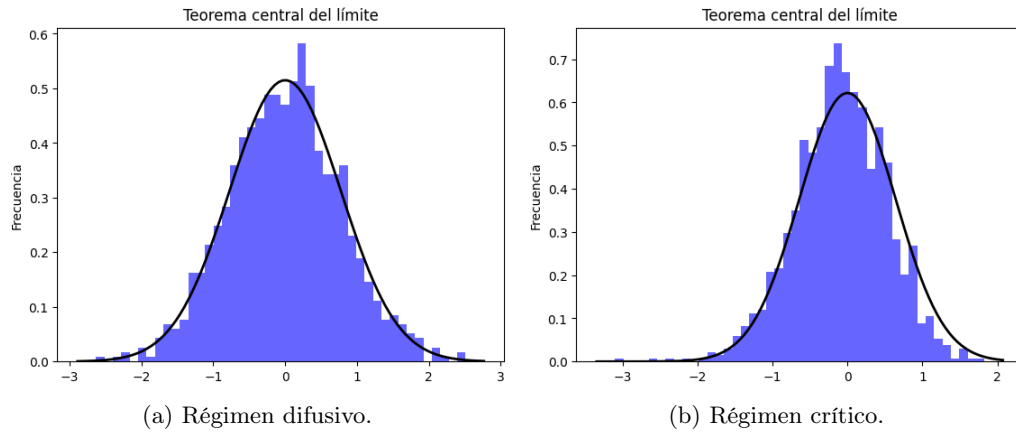
3.3. Teorema Central del Límite

Para esta simulación, la intención es obtener información para entender a la función de distribución de la posición S_n de la LRRW, en conjunto con un par de sucesiones (pueden ser aleatorias) (r_n) y (s_n) crecientes tales que se presentan de la forma

$$\frac{S_n - r_n}{s_n}, \quad (3.2)$$

y su comportamiento para números lo «suficientemente grandes», tratando de visualizar su aproximación a la normalidad en distribución. Así, basándonos en los Teoremas 2.5 y 2.10, para los dos regímenes correspondientes compilaremos 1,200 ensayos de 12,000 pasos para cada uno, registrando la última posición después de haberlos realizado, y con esto, poder elaborar un histograma de frecuencias para cada uno, que resulte de estas posiciones finales.

Figura 3.5: Una visualización de los Teoremas 2.5 y 2.10.



Así, lo que nos dice el Teorema Central del Límite, como puede verse en la Figura 3.5 es que, para algún número n lo suficientemente grande, las distribuciones correspondientes a variables aleatorias de la forma

1. Para $\alpha < 1/2$,

$$\sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{\omega}{1 - \alpha} \right). \quad (3.3)$$

2. Para $\alpha = 1/2$,

$$\sqrt{\frac{n}{\log(n)}} \left(\frac{S_n}{n} - 2\omega \right). \quad (3.4)$$

se aproximan a la distribución normal con media cero y

1. Para $\alpha < 1/2$, varianza igual a $\frac{\sigma^2}{1 - 2\alpha}$.

2. Para $\alpha = 1/2$, varianza igual a σ^2 .

Naturalmente, al estar vinculado a un experimento aleatorio, el histograma no se ajusta perfectamente a la distribución Normal asociada al comportamiento límite, como se observa en las gráficas mostradas, pero al menos se escogió un número adecuado de pasos que evidencia el comportamiento esperado.

3.4. Ley Cuadrática Fuerte

A través de aproximaciones numéricas podremos acercarnos a los valores a los que tiende el límite en los Teoremas 2.3 y 2.8. La computación será desempeñada a través de 150 iteraciones de 250,000 pasos para el régimen difusivo y 200 iteraciones de 1,000,000 de pasos para el crítico. Aunque podemos asegurar que la convergencia se cumple para cualquier r entero positivo, la aproximación va perdiendo precisión conforme se toman enteros cada vez más grandes, y esto está indicado por los errores relativos crecientes. Para contrarrestar esto, se deben tomar muestras de mayor tamaño (en este caso, iteraciones con más pasos), mejorando así la calidad de las estimaciones.

Los resultados pueden verse en las Tablas 3.1 y 3.2, para las que se realizó un promedio de los valores obtenidos en cada iteración, recolectando las estimaciones hacia los momentos pares de la distribución normal $N(0, \sigma^2)$.

Tabla 3.1: Régimen difusivo.

Entero positivo r	Aprox. LCF $n = 250,000$	Valor exacto $\sigma(2r)$	Error relativo %
1	0.60111	0.59990	0.2
2	1.07356	1.07965	0.56
3	3.36976	3.23842	4.06
4	16.1723	13.5991	18.92
5	79.4086	73.4233	8.15
6	432.027	484.515	10.83

En este régimen (Tabla 3.1), el error relativo no crece demasiado conforme r aumenta, pero para valores mayores que 6, este error se ve superado con creces, pero es posible afirmar que se obtienen aproximaciones «decentes» cuando se consideran 250,000 pasos.

Tabla 3.2: Régimen crítico.

Entero positivo r	Aprox. LCF $n = 1,000,000$	Valor exacto $\sigma(2r)$	Error relativo %
1	0.66866	0.67012	0.22
2	1.36457	1.34747	1.27
3	4.98793	4.51531	10.47
4	15.9049	21.18285	24.92
5	53.0496	127.769	58.48

Como se ha estado observando en las simulaciones anteriores, se necesita mayor desarrollo computacional para el régimen crítico (Tabla 3.2), obteniendo aproximaciones menos certeras incluso para valores menores que $r = 5$ (se sufre un aumento drástico en el error relativo cuando

$r = 5$). Aunque es cierto que se puede refinar lo obtenido aplicando más iteraciones con un mayor número de pasos, la eficiencia se aprecia mermada si la comparamos con el régimen difusivo.

3.5. Observaciones adicionales sobre el régimen superdifusivo

Acorde al Teorema 2.12, se afirma que existe una convergencia casi segura hacia alguna variable L . Sin embargo, esta no se da de forma explícita, sin detalles sobre su distribución. De manera similar a lo propuesto para visualizar el Teorema Central del Límite, por medio de un histograma se podrá echar un vistazo a la forma aproximada de la distribución de L .

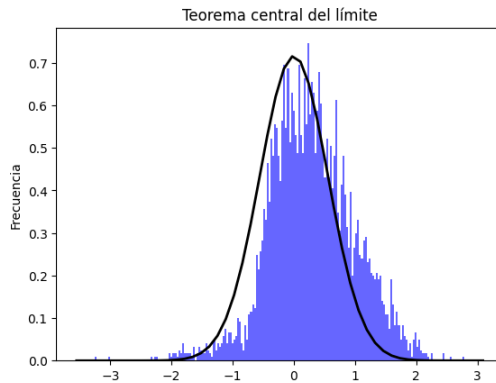


Figura 3.6: Régimen superdifusivo. Intentando estimar la distribución de L .

Se sugiere comparar la distribución estimada con la de una normal $N(0, \sigma^2)$ (Figura 3.6), pero no parece ajustarse adecuadamente, e incluso si así lo hiciese, no poseemos por el momento algún teorema que nos confirme cualquier sospecha. Ahora, si $\mu_L = \mathbb{E}[L]$ es la que se obtiene en el Teorema 2.12, al intentar estimar el valor a través de una media basada en el histograma, en donde se toman los valores medios de cada subintervalo en que se dividieron los datos obtenidos de cada iteración uno a uno, multiplicados por la frecuencia relativa y divididos entre el total de datos obtenidos, se obtiene un valor aproximado de 0.32246 después de realizar 3,000 iteraciones de 250,000 pasos. Al compararlo con el valor exacto 0.39259, se tiene un error relativo del 17.86 %. Ahora, si $\sigma_L^2 = \mathbb{E}[L^2] - \mu_L^2$ (también expresado en el Teorema 2.12), al ajustar a la distribución estimada de L en una correspondiente a la de $N(\mu_L, \sigma_L^2)$ después de 4,500 iteraciones de 500,000 pasos, se visualiza la gráfica subsecuente (Figura 3.7).

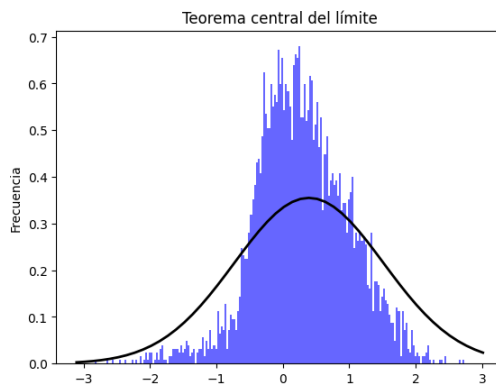


Figura 3.7: Régimen superdifusivo. No se ajusta a una normal con los parámetros adecuados.

Conclusiones

La caminata aleatoria perezosa reforzada (LRRW) lleva en si misma muchas de las variantes de interés de la ERW (la original, reforzada, con retrasos, con lapsos de memoria), evitando desviarse mucho de las propiedades necesarias que permitieron conseguir un estudio tan detallado e intenso como se deseaba (la clave fue usar una propuesta adecuada para la martingala asociada) lo cual no la hace ajena a las investigaciones realizadas a partir del artículo escrito por Bercu [2] en 2017, que supuso el estándar para el tratamiento asintótico de aquellas caminatas aleatorias que guardan alguna relación estructural con la ERW, conjuntamente con la aplicación de la teoría de martingalas.

Las razones que nos llevan a la elección de $\alpha = \theta(p - q)$ como parámetro sobre el cual hacer las distinciones sobre del comportamiento que presenta la LRRW son, primero, que involucra todos los grados de libertad relacionados a las probabilidades involucradas con cada elemento que conforma la definición de la caminata (no hace falta incluir al valor r pues $1 - p - q = r$), y segundo, que cada valor participa en la memoria observada en la caminata, tomando como ejemplos que, al considerarse el valor $p - q$, la probabilidad q hace de contrapeso para el movimiento positivo de la caminata; o que para el valor $\theta = 0$ no se toman en cuenta las observaciones en el pasado, además de que este caso entra en el régimen difusivo y por ende, las trayectorias respectivas no se dispersan demasiado entre si, y conforme θ se aproxima a 1, estas observaciones pasadas se van a considerar con mayor seguridad, siendo que cuando $\theta = 1$ se conoce como la caminata aleatoria del elefante con retrasos. Además, la decisión de tomar $\alpha \geq 0$ es una simple cuestión de simetría (un análisis asintótico para $\alpha \leq 0$ sería técnicamente el mismo).

Un motivo por el que los resultados no están presentados de manera tan intrincada es la manejabilidad de la teoría de martingalas que nos lleva a reducir el trabajo probabilístico al tratamiento de desigualdades, así como la obtención de convergencias y razones de cambio. De hecho, el uso de la función Gamma de Euler, que hace su aparición en varias de estas convergencias y que nos permite navegar por medio de igualdades, desigualdades y aproximaciones hacia términos y ecuaciones más simples, termina siendo la que reduce lo técnico que pueda resultar la teoría a manipulaciones algebraicas manejables, aunque no siempre sean tan simples o de baja computabilidad.

El análisis obtenido para los regímenes difusivo y crítico presenta resultados similares entre sí, siendo que existen los límites para sucesiones de la forma v_n/a_n , donde (a_n) es una sucesión creciente que diverge a infinito ((v_n) también diverge por si sola en estos dos regímenes). Y en cuanto al régimen superdifusivo, la convergencia de v_n hacia algún valor finito es posible, por lo que no se obtienen resultados análogos, en vista de que para obtenerlos, los lemas auxiliares piden la divergencia a infinito. Esto tiene directa relación con el parámetro α pues este está integrado en la definición de v_n (como puede verse en la proposición 2.2).

Siendo que es muy reciente la aparición de esta caminata aleatoria en la literatura, aún no se tienen aplicaciones concretas. Pero si uno quisiera brindar una interpretación, su definición nos propone que, la existencia de la memoria para cierto proceso aleatorio no siempre se toma en cuenta para su comportamiento futuro, esto de acuerdo a algún tipo de interruptor o mecanismo sobre dicha memoria, estableciéndose como una característica fundamental. Uno podría proponer que se pueda usar para el análisis en la tendencia de opiniones políticas, comerciales o culturales, así como en dinámicas sociales, siendo que se podrían interpretar los valores ± 1 para los resultados

positivo y negativo a modo de contraste y 0 para los resultados neutrales, haciendo una correlación entre las tendencias observadas bajo las estimaciones de los parámetros requeridos y alguna conclusión que suene razonable desde el punto de vista estadístico. Esta sugerencia se basa en el artículo publicado por González-Navarrete [11]. Otra de las sugerencias se encamina al área de la epidemiología, en específico, en torno a los modelos compartimentales aleatorios. No obstante, se tendría que buscar alguna manera de relacionar el comportamiento de algún agente infeccioso que sea «capaz de recordar», con las características de una LRRW con parámetros razonables.

Para finalizar, como se observó en la última sección del capítulo 3, se sospecha que la distribución de la variable aleatoria L no es Gaussiana, lo que nos motiva a encontrar alguna manera de determinar dicha distribución, quizá con otro enfoque probabilístico probando otro tipo de procesos estocásticos o quizá profundizando en la teoría de martingalas, tomando en consideración que no se niega o afirma algo de forma conclusiva al intentar obtener alguna variante de los teoremas límite principales.

Apéndice A

Manipulación algebraica adicional

Simplemente se incluirán algunos calculos extensos que corresponden a la obtención de algunas expresiones importantes, lo hace que sea preferible brindar un espacio separado para evitar sobreextender la demostración de algunos de los teoremas del análisis asintótico.

Lema A.1. (o Lema B.1 de [2] (bibliografía)) Para cualesquiera dos números no negativos a y b tales que $b \neq a + 1$ y para todo $n \geq 1$, tenemos que

$$\sum_{k=1}^n \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+b)} = \frac{\Gamma(n+a+1)}{(b-a-1)\Gamma(n+b)} \left(\frac{\Gamma(n+b)\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+a+1)\Gamma(b)} - 1 \right).$$

Después de ser enunciado, aplicando este lema a las expresiones que vendrán a continuación nos permite obtener lo que necesitabamos.

Para la primera expresión

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+2\alpha)} &= \frac{\Gamma(n+1)}{(2\alpha-1)\Gamma(n+2\alpha)} \left(\frac{\Gamma(n+2\alpha)\Gamma(2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1+2\alpha)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{(2\alpha-1)\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{\Gamma(n+1)}{(2\alpha-1)\Gamma(n+2\alpha)}. \end{aligned}$$

Para la segunda

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+2\alpha)} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+2\alpha)} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+2\alpha)} + \dots + \sum_{k=n-2}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+2\alpha)} + \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+2\alpha)} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+2\alpha)} + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+2\alpha)} - \sum_{k=1}^1 \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+2\alpha)} \right) + \dots \\ &\dots + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+2\alpha)} - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+2\alpha)} \right) \\ &= (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+2\alpha)} - \sum_{k=1}^{n-2} \left[\frac{1}{(2\alpha-1)\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{\Gamma(k+2)}{(2\alpha-1)\Gamma(k+2\alpha+1)} \right] \\ &= (n-1) \left[\frac{1}{(2\alpha-1)\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{\Gamma(n+1)}{(2\alpha-1)\Gamma(n+2\alpha)} \right] - \frac{n-2}{(2\alpha-1)\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{1}{2\alpha-1} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\Gamma(k+2)}{\Gamma(k+2\alpha+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(2\alpha - 1)\Gamma(1 + 2\alpha)} - \frac{(n - 1)n\Gamma(n)}{(2\alpha - 1)\Gamma(n + 2\alpha)} + \frac{1}{2\alpha - 1} \left[\frac{2}{\Gamma(2\alpha + 1)(2\alpha - 1)} - \frac{\Gamma(n + 1)}{(2\alpha - 1)\Gamma(n + 2\alpha - 1)} \right] \\
 &= \frac{(\alpha - 1) + 1}{(\alpha - 1)\Gamma(2\alpha + 1)(2\alpha - 1)} - \frac{(1/2)\Gamma(n + 1)(n + 2\alpha - 1)}{(\alpha - 1)\Gamma(n + 2\alpha)(2\alpha - 1)} - \frac{(n - 1)n\Gamma(n)}{(2\alpha - 1)\Gamma(n + 2\alpha)} \\
 &= \frac{\alpha}{(\alpha - 1)2\alpha\Gamma(2\alpha)(2\alpha - 1)} - \left(\frac{(1/2)n\Gamma(n)[(n + 2\alpha - 1) + 2(n - 1)(\alpha - 1)]}{(\alpha - 1)\Gamma(n + 2\alpha)(2\alpha - 1)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\alpha - 1)\Gamma(2\alpha)(2\alpha - 1)} - \frac{n\Gamma(n)[n(2\alpha - 1) + 1]}{(\alpha - 1)\Gamma(n + 2\alpha)(2\alpha - 1)} \right].
 \end{aligned}$$

Para la tercera expresión. Como $a_k = \frac{\Gamma(k)\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + \alpha)}$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(k + 1)}{a_k \Gamma(k + 1 + 2\alpha)} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(k + \alpha)\Gamma(k + 1)}{\Gamma(k)\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(k + 1 + 2\alpha)} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k\Gamma(k + \alpha)}{\Gamma(k + 1 + 2\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Y mediante el mismo proceso que en el inciso anterior, obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(k + 1)}{a_k \Gamma(k + 1 + 2\alpha)} = \frac{1}{\alpha(\alpha - 1)\Gamma(2\alpha)} - \frac{(n + 1)\Gamma(n + \alpha)}{\alpha(\alpha - 1)\Gamma(\alpha)\Gamma(n + 2\alpha)}.$$

Y para la última, al tener $b_k = \frac{\Gamma(k)\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(k + \gamma)}$.

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(k + 1)}{k b_k \Gamma(k + 1 + 2\alpha)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(k + \gamma)\Gamma(k + 1)}{k\Gamma(k)\Gamma(\gamma + 1)\Gamma(k + 1 + 2\alpha)} \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(k + \gamma)}{\Gamma(\gamma + 1)\Gamma(k + 1 + 2\alpha)} = \frac{1}{\Gamma(\gamma + 1)} \left[\frac{\Gamma(\gamma + 1)}{(2\alpha - \gamma)\Gamma(1 + 2\alpha)} - \frac{\Gamma(n + \gamma)}{(2\alpha - \gamma)\Gamma(n + 2\alpha)} \right].
 \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] Erich Baur and Jean Bertoin. Elephant random walks and their connection to pólya-type urns. *Physical Review E*, 94(5), November 2016.
- [2] Bernard Bercu. A martingale approach for the elephant random walk. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 51(1):015201, nov 2017.
- [3] Bernard Bercu and Djilil Chafaï. *Modélisation stochastique et simulation-Cours et applications*. Dunod, 2007.
- [4] Patrick Billingsley. *Convergence of probability measures*. John Wiley & Sons, 2013.
- [5] Zdzislaw Brzezniak and Tomasz Zastawniak. *Basic stochastic processes: a course through exercises*. Springer Science & Business Media, 2000.
- [6] Marek Capiński and Peter Ekkehard Kopp. *Measure, integral and probability*, volume 14. Springer, 2004.
- [7] Persi Diaconis and David Freedman. An elementary proof of stirling’s formula. *The American Mathematical Monthly*, 93(2):123–125, 1986.
- [8] Joseph L. Doob. *Stochastic Processes*. Wiley Classics Library, Edition Published 1990. John Wiley & Sons, 1953.
- [9] Marie Duflo. *Random iterative models*, volume 34. Springer Science & Business Media, 2013.
- [10] Manuel González-Navarrete and Raghely Hernández. Reinforced random walks under memory lapses. *Journal of Statistical Physics*, 185(3), 2021.
- [11] Manuel González-Navarrete and Rodrigo Lambert. The diffusion of opposite opinions in a randomly biased environment. *Journal of Mathematical Physics*, 60(11), November 2019.
- [12] Manuel González-Navarrete, Rodrigo Lambert, and Víctor Hugo Vázquez Guevara. On the asymptotics of a lazy reinforced random walk, 2024.
- [13] Ronald L Graham and Donald E Knuth. 0. patashnik, concrete mathematics. In *A Foundation for Computer Science*, volume 104, 1989.
- [14] Víctor Hugo Vázquez Guevara. On the almost sure central limit theorem for the elephant random walk. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 52(47):475201, 2019.
- [15] Allan Gut and Ulrich Stadtmüller. Variations of the elephant random walk. *Journal of Applied Probability*, 58(3):805–829, September 2021.
- [16] Allan Gut and Ulrich Stadtmüller. Elephant random walks with delays. *arXiv preprint arXiv:1906.04930*, 2019.

- [17] P. Hall and C.C. Heyde. *Martingale Limit Theory and Its Application*. Communication and Behavior. Academic Press, New York, 1980.
- [18] Carlos Uriel Herrera Espinoza. *Caminata aleatoria del elefante: un enfoque a través de martingalas*. Tesis, Benemerita Universidad Autonoma de Puebla (BUAP), 2021.
- [19] C.C. Heyde. On central limit and iterated logarithm supplements to the martingale convergence theorem. *Journal of Applied Probability*, 14(4):758–775, 1977.
- [20] Wolfram Koepf. Hypergeometric summation. *Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden*, 5(6), 1998.
- [21] Andréi Nikolaevich Kolmogorov. *Foundations of the theory of probability*. Chelsea Publishing Company, New York, 1950.
- [22] Andrea Laforgia and Pierpaolo Natalini. On some inequalities for the gamma function. *Advances in Dynamical Systems and Applications*, 8(2):261–267, 2013.
- [23] Hosam Mahmoud. *Pólya urn models*. Chapman and Hall/CRC, Florida, 2008.
- [24] Roger Mansuy. Histoire de martingales. *Mathématiques et sciences humaines. Mathematics and social sciences*, (169), 2005.
- [25] Kevin J McGown and Harold R Parks. The generalization of faulhaber’s formula to sums of non-integral powers. *Journal of mathematical analysis and applications*, 330(1):571–575, 2007.
- [26] Gunter M. Schütz and Steffen Trimper. Elephants can always remember: Exact long-range memory effects in a non-markovian random walk. *Physical Review E*, 70(4), October 2004.
- [27] Gunter M Schütz and Steffen Trimper. Elephants can always remember: Exact long-range memory effects in a non-markovian random walk. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 70(4):045101, 2004.
- [28] William F. Stout. A martingale analogue of kolmogorov’s law of the iterated logarithm. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 15:279–290, 1970.
- [29] William F. Stout. *Almost Sure Convergence*, volume 24 of *Probability and Mathematical Statistics*. Academic Press, New York, 1974.
- [30] Jean Ville. *Etude critique de la notion de collectif*. Gauthier-Villars Paris, 1939.
- [31] David Williams. *Probability with martingales*. Cambridge University Press, 1991.