



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Una estimación relativista general de la masa de un agujero negro de Schwarzschild aplicada a la galaxia UGC 3789

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Déborah Elizabeth Villaraos Serés

Asesorada por

Alfredo Herrera Aguilar

Ana Aurelia Avilez López

Puebla Pue.
15 de julio de 2021



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Una estimación relativista general de la masa de un agujero negro de Schwarzschild aplicada a la galaxia UGC 3789

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Déborah Elizabeth Villaraos Serés

Asesorada por

Alfredo Herrera Aguilar

Ana Aurelia Avilez López

Puebla Pue.
15 de julio de 2021

Título: Una estimación relativista general de la masa de un agujero negro de Schwarzschild aplicada a la galaxia UGC 3789

Estudiante: DÉBORAH ELIZABETH VILLARAOS SERÉS

COMITÉ

Gerardo Torres del Castillo
Presidente

Cupatitzio Ramírez Romero
Secretario

Roberto Cartas Fuentevilla
Vocal

Mercedes Paulina Velázquez Quesada
Vocal

Alfredo Herrera Aguilar
Asesor

Ana Aurelia Avilez López
Asesora

Agradecimientos

A mi madre y a mi padre por todo su cariño y apoyo incondicional. A Xani por motivarme a seguir adelante, por ser mi compañera de vida y por siempre sacarme una sonrisa. A Cafí por estar a mi lado en todo momento, por acompañarme en las noches de desvelo e iluminar mis días.

Agradezco a mis maestras por marcar el camino y por enseñarme tanto. A mis amigas y amigos, por su compañía y ayuda en estos años de formación científica.

A mis sinodales, Dr. Gerardo Torres, Dra. Mercedes Velázquez, Dr. Cupatitzio Ramírez y Dr. Roberto Cartas, por revisar esta tesis y por sus interesantes preguntas.

A la Dra. Ana Avilez por su apoyo, sus comentarios y sus valiosas aportaciones para mejorar este trabajo.

Agradezco especialmente al Dr. Alfredo Herrera por su gran ayuda en la escritura de esta tesis, por su tiempo, paciencia y enseñanzas. Gracias por animarme a no quitar el dedo del renglón.

Índice general

Resumen	IX
1. Introducción	1
2. Antecedentes	3
3. El movimiento geodésico de partículas masivas en la métrica de Schwarzschild	5
4. El movimiento geodésico de fotones en la métrica de Schwarzschild	9
5. Órbitas circulares en el plano ecuatorial	11
6. Corrimientos al rojo y al azul de fotones emitidos por partículas masivas	13
7. Aplicación del modelo al agujero negro central de la galaxia UGC 3789	17
7.1. Análisis Bayesiano	17
7.2. Aplicación del modelo	19
7.3. Resultados	21
8. Conclusión	23
A. Interpretación de la constante de Carter	25
B. Programa	27
Bibliografía	43

Resumen

En esta tesis se analiza el problema de estimar la masa de un objeto compacto mediante el estudio de la cinemática de los cuerpos que lo orbitan. En concreto, se considera la solución esféricamente simétrica en el vacío de las ecuaciones de Einstein, i.e. la métrica de Schwarzschild, para modelar dicho objeto compacto.

Consideramos una partícula de prueba que describe órbitas circulares en el plano ecuatorial alrededor de un agujero negro de este tipo y hallamos las expresiones para su cuadrivelocidad y el cuádrimomento de los fotones que emite. De esta manera encontramos expresiones para los corrimientos al rojo y al azul de los fotones medidos por un observador lejano en términos de la masa del agujero negro y de su distancia a la partícula.

Con la expresión para el corrimiento de los fotones nos es posible estimar estadísticamente la masa del agujero negro. En concreto, calculamos la masa para el agujero negro en el centro de la galaxia UGC 3789 utilizando las mediciones de las posiciones y los corrimientos al rojo y al azul de los fotones emitidos por los máseres de agua que orbitan a este agujero negro, obteniendo un valor de $M = (1,14 \pm 0,0038) \times 10^7 M_{\odot}$, lo cual indica que se trata de un agujero negro supermasivo.

Palabras clave: *Agujero negro de Schwarzschild, corrimiento de los fotones, órbitas circulares en el plano ecuatorial, estimación de la masa.*

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad, la Relatividad General es la mejor teoría de gravitación que la humanidad ha desarrollado. Establece que la interacción gravitacional es la curvatura del espacio-tiempo, a diferencia de la teoría newtoniana, que considera a la interacción gravitacional como una fuerza. Fue formulada por Albert Einstein en 1915, pero al ser considerada como una teoría extraña, su gran aportación a la física no fue reconocida sino hasta varios años más tarde.

Fue a finales de la década de 1950 que empezó un fuerte interés en la Relatividad General debido al descubrimiento de objetos compactos altamente energéticos como los cuásares y las fuentes de rayos X, fenómenos en los cuales los campos gravitacionales y el colapso gravitacional tienen un rol importante. Así, en los años de 1960 se desarrolló la teoría moderna del colapso gravitacional, las singularidades y los agujeros negros.

Solo un par de meses después de la publicación de la Teoría General de la Relatividad, Karl Schwarzschild encontró la solución métrica de las ecuaciones de Einstein para el exterior de un cuerpo estático y esféricamente simétrico [1]. Las predicciones de la solución de Schwarzschild en el campo gravitacional débil del Sistema Solar han sido comprobadas con gran precisión por observaciones astronómicas (pronosticando pequeñas desviaciones de la teoría gravitacional de Newton, como la precesión del perihelio de Mercurio, y explicando con mayor completitud ciertos efectos, como la deflexión de la luz al pasar cerca de un objeto masivo como el Sol).

Después de un profundo análisis del significado de la estructura espacio-temporal de la solución de Schwarzschild, se hizo evidente que esta configuración de campo estática, extendida en todo el espacio-tiempo en el vacío, constituye el estado final del colapso completo de un cuerpo estelar esférico (como una estrella o un conjunto masivo de ellas) bajo sus propias fuerzas gravitatorias y, por tanto, su naturaleza describe un agujero negro caracterizado por un solo parámetro: su masa.

La mayoría de los objetos astronómicos se encuentran rotando (como lo hacen las estrellas, los planetas, galaxias, etc.), de manera que la simetría esférica considerada en la solución de Schwarzschild se pierde, por ello es lógico que se buscara la métrica para el exterior (en el vacío) de un objeto masivo en rotación. Esta solución fue descubierta por Roy Kerr en 1963 [2], describe una configuración axialmente simétrica y estacionaria y, en este caso, los agujeros negros están caracterizados por dos parámetros: su masa y su parámetro de rotación (definido por el momento angular por unidad de masa del agujero negro).

Posteriormente se construyó una familia de soluciones de la Relatividad General acoplada mínimamente a un campo electromagnético. Dicha solución se conoce como la métrica de Kerr-Newman [3] y describe el espacio-tiempo exterior de un agujero negro rotatorio con carga eléctrica, agregando un parámetro más a su descripción. No obstante, los objetos compactos astrofísicos se consideran neutros (la magnitud de la carga está altamente restringida observacionalmente) y por esa razón esta familia de agujeros negros no ha tenido muchas aplicaciones físicas.

La principal motivación de esta tesis es desarrollar un método de Relatividad General para estimar los parámetros que describen a los agujeros negros. En particular, resolveremos un problema inverso que nos permitirá estimar la masa de un agujero negro supermasivo hospedado en el centro del núcleo de la galaxia denominada UGC 3789 al modelar el objeto compacto central con un agujero negro de Schwarzschild. Dicha estimación se realiza con ayuda de los siguientes datos observacionales: las posiciones de un grupo de máseres de agua que se localizan en un disco de acreción que vemos de canto y los corrimientos al rojo y al azul de los fotones emitidos por dichos máseres en su movimiento orbital.

Capítulo 2

Antecedentes

En los últimos años se ha obtenido evidencia observacional sobre la existencia de agujeros negros, como la detección de ondas gravitacionales debidas a la colisión de dos agujeros negros en 2016 [4] y la reciente observación de la sombra del agujero negro en la galaxia M87 en 2019 [5]. Además, con la observación de las órbitas que siguen las estrellas en el centro de nuestra galaxia, se dedujo la existencia de un agujero negro supermasivo, SgrA* [6, 7]. De igual manera, al observar los corrimientos al rojo y al azul de los fotones emitidos por los cuerpos que los orbitan, se ha logrado calcular la masa de los agujeros negros en distintos sistemas dinámicos como el de NGC 4258 [8] y, en años recientes, los considerados en el marco del Megamaser Cosmology Project con alrededor de 20 galaxias [9, 10]. Estos últimos ejemplos, en particular, utilizan las observaciones de los corrimientos al rojo y al azul de fotones emitidos por máseres de agua que se encuentran orbitando en el disco de acreción del agujero negro.

Estos análisis, en su mayoría, utilizan métodos newtonianos para calcular los parámetros de los agujeros negros, interpretando los corrimientos observados como velocidades, considerando órbitas keplerianas y tomando en cuenta los efectos relativistas de manera perturbativa. De esta forma, para obtener resultados más precisos, es necesario utilizar un formalismo que deduzca las expresiones para los corrimientos al rojo y al azul de primeros principios en el marco de la Relatividad General [11, 12]. En este enfoque se considera el corrimiento total de los fotones al tomar en cuenta la deformación del espacio-tiempo debida a la masa del agujero negro.

Esta tesis está dividida como sigue: En los Capítulos 3 y 4 se considera una partícula en órbita alrededor de un agujero negro de Schwarzschild y, a través de un análisis relativista general, se encuentran las componentes de su cuadrivelocidad y su cuádrimomento. En el Capítulo 5 se considera el caso de que la órbita de la partícula de prueba sea circular y se encuentre sobre el plano ecuatorial, con estas suposiciones encontramos su energía y su momento angular. En el Capítulo 6 calculamos el corrimiento de los fotones emitidos por este cuerpo de prueba en términos de la masa y revisamos el significado físico de las contribuciones del corrimiento total. En el Capítulo 7 aplicamos el modelo a los datos reportados en [13] del sistema UGC 3789 utilizando un análisis Bayesiano con un programa desarrollado en Python. Finalmente, en el Capítulo 8 presentamos las conclusiones de este análisis y la estimación del valor más probable para la masa del agujero negro central que hospeda esta galaxia.

Capítulo 3

El movimiento geodésico de partículas masivas en la métrica de Schwarzschild

La métrica que describe el campo gravitacional exterior (en el vacío) de un agujero negro estático (sin rotación), esféricamente simétrico y sin carga eléctrica está dada por la solución de Schwarzschild (en coordenadas esféricas) [1]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.1)$$

donde m es la masa del agujero negro en unidades naturales $m = GM/c^2$, G es la constante de la gravitación universal de Newton, M es la masa expresada en unidades de masa y c es la velocidad de la luz en el vacío.

Siguiendo el desarrollo planteado en [11], consideremos una partícula masiva que esté en órbita geodésica alrededor de un agujero negro de Schwarzschild (sin perturbar el campo gravitatorio). Dicha partícula se moverá con una cuadrivelocidad dada por

$$\vec{U} \equiv U^\mu = (U^t, U^r, U^\theta, U^\phi), \quad U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (3.2)$$

donde τ es un parámetro que representa su tiempo propio.

La métrica de Schwarzschild tiene los vectores de Killing temporal $\vec{\xi} = (1, 0, 0, 0)$ y azimutal o rotacional $\vec{\psi} = (0, 0, 0, 1)$. Ambos vectores cumplen la siguiente relación

$$\vec{U} \cdot \vec{\xi} = \text{constante}, \quad \vec{U} \cdot \vec{\psi} = \text{constante}. \quad (3.3)$$

Estas constantes son cantidades conservadas que se preservan a lo largo de todo el movimiento de la partícula en la dirección de los vectores de Killing ξ y ψ , respectivamente.

En el caso del vector de Killing temporal $\vec{\xi}$ la cantidad que se conserva será la energía E de la partícula (por unidad de masa):

$$\vec{U} \cdot \vec{\xi} = -E, \quad (3.4)$$

$$U^t g_{tt} = -E. \quad (3.5)$$

Para el vector de Killing $\vec{\psi}$, como está relacionado con la componente angular azimutal, la cantidad conservada asociada será la componente axial del momento angular L :

**CAPÍTULO 3. EL MOVIMIENTO GEODÉSICO DE PARTÍCULAS MASIVAS EN
LA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD**

$$\vec{U} \cdot \vec{\psi} = L, \quad (3.6)$$

$$U^\phi g_{\phi\phi} = L. \quad (3.7)$$

Entonces la componente t y la componente ϕ de la cuadrivelocidad se pueden expresar en términos de la métrica y las cantidades conservadas:

$$U^t = -\frac{E}{g_{tt}}, \quad U^\phi = \frac{L}{g_{\phi\phi}}. \quad (3.8)$$

Por otro lado, al tomar en cuenta la normalización de la cuadrivelocidad

$$-1 = U^\mu U_\mu = g_{\mu\nu} U^\nu U^\mu \quad (3.9)$$

$$= g_{tt}(U^t)^2 + g_{rr}(U^r)^2 + g_{\theta\theta}(U^\theta)^2 + g_{\phi\phi}(U^\phi)^2 \quad (3.10)$$

y sustituyendo U^t y U^ϕ en esta relación, obtenemos

$$-1 = g_{tt} \left(-\frac{E}{g_{tt}} \right)^2 + g_{rr}(U^r)^2 + g_{\theta\theta}(U^\theta)^2 + g_{\phi\phi} \left(\frac{L}{g_{\phi\phi}} \right)^2 \quad (3.11)$$

$$0 = g_{rr}(U^r)^2 + g_{\theta\theta}(U^\theta)^2 + \frac{E^2}{g_{tt}} + \frac{L^2}{g_{\phi\phi}} + 1. \quad (3.12)$$

Al despejar la energía

$$E^2 = g_{tt} \left(-g_{rr}(U^r)^2 - g_{\theta\theta}(U^\theta)^2 - \frac{L^2}{g_{\phi\phi}} - 1 \right) \quad (3.13)$$

$$= (U^r)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(r^2 (U^\theta)^2 + 1 + \frac{L^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \quad (3.14)$$

y dividiendo entre dos podemos ver que esta relación se asemeja a la ley de conservación de la energía para una partícula no relativista con energía total $E^2/2$

$$\frac{E^2}{2} = \frac{1}{2}(U^r)^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(r^2 (U^\theta)^2 + 1 + \frac{L^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \quad (3.15)$$

y un potencial efectivo

$$V_{eff} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(r^2 (U^\theta)^2 + 1 + \frac{L^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right). \quad (3.16)$$

Por otro lado, la métrica de Schwarzschild tiene un campo tensorial de Killing definido por la siguiente relación [14]

$$K_{\mu\nu} = 2r^2 l_{(\mu} n_{\nu)} - r^2 g_{\mu\nu}, \quad \nabla_{(\alpha} K_{\mu\nu)} = 0, \quad (3.17)$$

con

$$l^\mu = g_{rr} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\mu + \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^\mu, \quad (3.18)$$

$$n^\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\mu + \frac{1}{2} g_{tt} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^\mu, \quad (3.19)$$

donde $l_{(\mu}$ y $n_{\mu)}$ son campos vectoriales nulos que satisfacen las siguientes relaciones $l^\mu l_\mu = n^\mu n_\mu = 0$ y $l^\mu n_\mu = -1$ y los paréntesis en (3.17) indican simetrización de los subíndices.

Este campo tensorial de Killing se asocia con una cantidad conservada C

$$C = K_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 2r^2 (l_\mu U^\mu)(n_\mu U^\nu) - r^2 = \text{constante}. \quad (3.20)$$

Entonces

$$C = 2r^2 (l_\mu U^\mu)(n_\mu U^\nu) - r^2 \quad (3.21)$$

$$= r^2 g_{rr} (E^2 - (U^r)^2) - r^2 \quad (3.22)$$

y podemos expresar la constante C en términos de otra cantidad constante Q llamada constante de Carter:

$$C \equiv L^2 + Q. \quad (3.23)$$

Las constantes C y Q están relacionadas con el momento angular total de la partícula (ver el Apéndice A).

Al igualar (3.23) con (3.22) obtenemos

$$L^2 + Q = r^2 g_{rr} (E^2 - (U^r)^2) - r^2 \quad (3.24)$$

$$= r^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} (E^2 - (U^r)^2) - r^2. \quad (3.25)$$

Ahora, despejando $r^2(U^r)^2$

$$r^2(U^r)^2 = r^2 E^2 - (r^2 + L^2 + Q) \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \quad (3.26)$$

Utilizando (3.12) se puede obtener una expresión para $r^4(U^\theta)^2$

$$r^4(U^\theta)^2 = Q - \left(\frac{L^2}{\sin^2 \theta} \right) \cos^2 \theta \quad (3.27)$$

Así, las componentes de la cuadrivelocidad \vec{U} están dadas por las siguientes relaciones

$$U^t = E \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \quad (3.28)$$

$$(U^r)^2 = E^2 - \left(1 + \frac{L^2}{r^2} + \frac{Q}{r^2} \right) \left(1 - \frac{2m}{r} \right), \quad (3.29)$$

$$(U^\theta)^2 = \frac{1}{r^4} (Q - L^2 \cot^2 \theta), \quad (3.30)$$

$$U^\phi = \frac{L}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (3.31)$$

CAPÍTULO 3. EL MOVIMIENTO GEODÉSICO DE PARTÍCULAS MASIVAS EN LA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

De este modo hemos podido expresar todas y cada una de las componentes de la cuadrivelocidad \vec{U} en términos de la métrica y las cantidades conservadas E , L y Q . Este hecho permite a su vez describir de manera exhaustiva el movimiento de las partículas de prueba en el fondo gravitatorio de la métrica de Schwarzschild.

Capítulo 4

El movimiento geodésico de fotones en la métrica de Schwarzschild

Los fotones emitidos por las partículas masivas que orbitan el agujero negro tienen un cuadrivector $\vec{k} = (k^t, k^r, k^\theta, k^\phi)$ tal que

$$\vec{k} \cdot \vec{\xi} = -E_\gamma, \quad \vec{k} \cdot \vec{\phi} = L_\gamma, \quad (4.1)$$

con E_γ y L_γ siendo cantidades conservadas que representan la energía y el momento angular axial del fotón a lo largo de su trayectoria.

Entonces, en el caso del vector de Killing temporal tenemos

$$k^t g_{tt} = k_t = -E_\gamma, \quad (4.2)$$

Mientras que para el vector de Killing rotacional obtenemos

$$k^\phi g_{\phi\phi} = k_\phi = L_\gamma. \quad (4.3)$$

Como los fotones siguen geodésicas nulas satisfacen la siguiente relación

$$0 = k^\mu k_\mu \quad (4.4)$$

$$= g_{tt}(k^t)^2 + g_{rr}(k^r)^2 + g_{\theta\theta}(k^\theta)^2 + g_{\phi\phi}(k^\phi)^2. \quad (4.5)$$

La constante de Carter para los fotones relacionada con el campo tensorial de Killing está dada por la siguiente expresión

$$C_\gamma \equiv L_\gamma^2 + Q_\gamma = K_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 2r^2 (l_\mu k^\mu) (n_\mu k^\mu) \quad (4.6)$$

$$= r^2 g_{rr} [E_\gamma^2 - (k^r)^2]. \quad (4.7)$$

Al despejar $(k^r)^2 r^2$ obtenemos

$$(k^r)^2 r^2 = r^2 E_\gamma^2 - (L_\gamma^2 + Q_\gamma) \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \quad (4.8)$$

CAPÍTULO 4. EL MOVIMIENTO GEODÉSICO DE FOTONES EN LA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

Utilizando (4.5) y (4.8) se puede obtener una expresión para $r^4(k^\theta)^2$

$$r^4(k^\theta)^2 = Q_\gamma - \left(\frac{L_\gamma^2}{\sin^2 \theta} \right) \cos^2 \theta \quad (4.9)$$

Así, todas las componentes del cuádrimomento \vec{k} de los fotones se pueden expresar de la siguiente manera:

$$k^t = E_\gamma \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1}, \quad (4.10)$$

$$(k^r)^2 = E_\gamma^2 - \left(\frac{L_\gamma^2}{r^2} + \frac{Q_\gamma}{r^2} \right) \left(1 - \frac{2m}{r} \right), \quad (4.11)$$

$$(k^\theta)^2 = \frac{1}{r^4} (Q_\gamma - L_\gamma^2 \cot^2 \theta), \quad (4.12)$$

$$k^\phi = \frac{L_\gamma}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (4.13)$$

De este modo hemos podido parametrizar todas las componentes del cuádrimomento \vec{k} de los fotones en términos de la métrica y las cantidades fotónicas conservadas E_γ , L_γ y Q_γ . Este hecho permite, a su vez, describir completamente el movimiento de los fotones en el fondo gravitatorio de la métrica de Schwarzschild.

Capítulo 5

Órbitas circulares en el plano ecuatorial

Ahora consideremos por simplicidad el importante caso de una partícula masiva que se esté moviendo en una órbita circular en el plano ecuatorial alrededor de un agujero negro de Schwarzschild sin perturbar el campo gravitatorio que este genera.

Como la partícula masiva de prueba se mueve en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$ y, como las órbitas son circulares, su radio es constante, por lo que

$$U^r = 0 = U^\theta. \quad (5.1)$$

De esta manera, por (3.16) el potencial será

$$V_{eff} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right), \quad (5.2)$$

La energía E se relaciona con el potencial efectivo a través de la relación (3.15), así

$$\frac{E^2}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right), \quad (5.3)$$

Es decir,

$$V_{eff} = \frac{E^2}{2}. \quad (5.4)$$

Además, para cumplir con la condición de que se mueva en órbitas circulares estables, el potencial debe tener un mínimo estable ¹

$$V'_{eff} = 0 \quad V''_{eff} > 0 \quad (5.5)$$

Aquí la $'$ indica derivada con respecto a la coordenada radial r .

Al utilizar la primera igualdad de (5.5) podemos encontrar una expresión para el momento angular axial L y posteriormente podemos expresar la energía E con la igualdad (5.4). Así,

¹La desigualdad de la derecha es la condición de estabilidad, la cual conduce a la relación $6m < r$.

$$0 = \frac{d}{dr} V_{eff} \quad (5.6)$$

$$= \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2} \right) \right] \quad (5.7)$$

$$= \frac{3L^2 m}{r^4} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{m}{r^2}; \quad (5.8)$$

despejando L obtenemos

$$L = \pm \sqrt{\frac{m}{r-3m}} r. \quad (5.9)$$

Luego, utilizando la ecuación (3.14) la energía adopta la siguiente forma

$$E^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2} \right). \quad (5.10)$$

Sustituyendo L en esta expresión, la energía está dada por

$$E = \sqrt{\left(1 - \frac{2m}{r} \right) \left(1 + \frac{m}{r-3m} \right)}. \quad (5.11)$$

Entonces, una vez encontradas las expresiones correspondientes a la energía y el momento angular axial, se pueden hallar las componentes de la cuadrivelocidad distintas de cero de partículas masivas que se mueven en órbitas circulares y en el plano ecuatorial:

$$U^t(r, \pi/2) = \sqrt{\frac{r}{r-3m}}, \quad (5.12)$$

$$U^\phi(r, \pi/2) = \pm \sqrt{\frac{m}{r-3m}} \frac{1}{r}. \quad (5.13)$$

Capítulo 6

Corrimientos al rojo y al azul de fotones emitidos por partículas masivas

Los corrimientos al rojo y al azul, z_1 o z_2 respectivamente, de un fotón emitido por un cuerpo masivo están dados por la siguiente definición

$$1 + z_{1,2} \equiv \frac{\omega_e}{\omega_d} \quad (6.1)$$

donde ω_i con $i = e, d$ es la frecuencia del fotón medida en el punto de emisión (e) y de detección (d), respectivamente.

Cabe señalar que el corrimiento al rojo es un invariante relativista muy útil que no depende del sistema de referencia en el que se mida como lo hacen las velocidades. El corrimiento al rojo de señales electromagnéticas es la cantidad que usualmente se detecta al realizar observaciones astrofísicas con espectrometría.

La energía de un fotón está dada por $E_\gamma = \hbar\omega$, y como estamos considerando unidades naturales, tomamos $\hbar = 1$, entonces $E = \omega$ y, por tanto, la frecuencia de un fotón medida por un observador con cuadrivelocidad \vec{U} es

$$\omega_i = -(k_\mu U^\mu)|_i. \quad (6.2)$$

Entonces, considerando que las órbitas de las partículas masivas son circulares y ecuatoriales [15], restringidas a la condición (5.1), el corrimiento es

$$1 + z_{1,2} = \frac{(-k_t U^t - k_\phi U^\phi)|_e}{(-k_t U^t - k_\phi U^\phi)|_d} \quad (6.3)$$

Al sustituir las expresiones del cuadrimomento (4.10)-(4.13) en esta relación obtenemos

$$1 + z_{1,2} = \frac{(E_\gamma U^t - L_\gamma U^\phi)|_e}{(E_\gamma U^t - L_\gamma U^\phi)|_d} \quad (6.4)$$

$$= \frac{(U^t - bU^\phi)|_e}{(U^t - bU^\phi)|_d} \quad (6.5)$$

donde hemos introducido $b = L_\gamma/E_\gamma$ definido como el parámetro de deflexión de la luz (considerado como parámetro de impacto en una interpretación newtoniana). Además, como la cantidad L_γ/E_γ

**CAPÍTULO 6. CORRIMIENTOS AL ROJO Y AL AZUL DE FOTONES EMITIDOS
POR PARTÍCULAS MASIVAS**

se conserva en toda la trayectoria desde que el fotón es emitido hasta que es detectado, se tiene que $b_e = b_d$.

Puesto que los fotones se mueven en geodésicas nulas $k^\mu k_\mu = 0$, tenemos

$$0 = g^{tt}(k_t)^2 + g^{rr}(k_r)^2 + g^{\phi\phi}(k_\phi)^2. \quad (6.6)$$

Ahora, si consideramos los puntos en los que la componente radial del cuádrimomento se anula $k^r = 0$ (esto corresponde a los puntos en los que el parámetro de deflexión de la luz se maximiza, es decir, en los puntos que corresponden a los valores $\phi = \pm 90$ grados del ángulo azimutal), obtenemos

$$\frac{k_\phi}{k_t} = \pm \sqrt{-\frac{g_{\phi\phi}}{g_{tt}}}. \quad (6.7)$$

Puesto que por definición

$$b = \frac{L_\gamma}{E_\gamma} = -\frac{k_\phi}{k_t}, \quad (6.8)$$

entonces la expresión para el parámetro de deflexión de la luz adopta la siguiente forma

$$b_{\mp} = \mp \sqrt{\frac{r^3}{r - 2m}}. \quad (6.9)$$

Ahora, si consideramos que el punto de detección es muy lejano con respecto al punto de emisión, podemos suponer que este observador se encuentra estático y su cuadrivelocidad será $\vec{U}_d = (1, 0, 0, 0)$.

Entonces, sustituyendo las componentes de la cuadrivelocidad y el parámetro de deflexión en la expresión (6.5) obtenemos el corrimiento total de los fotones medido por un observador estático situado en el infinito espacial de forma idealizada

$$z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{mr}{(r - 2m)(r - 3m)}} + \sqrt{\frac{r}{r - 3m}} - 1. \quad (6.10)$$

Este corrimiento total es la suma del corrimiento debido al movimiento de los fotones en el disco z_{\pm} y el corrimiento debido a la gravedad del agujero negro z_c . Cuando $b = 0$ el corrimiento es puramente gravitacional, entonces

$$1 + z_c = \frac{U^t|_e}{U^t|_d}, \quad (6.11)$$

Por tanto, el corrimiento gravitacional será

$$z_c = \sqrt{\frac{r}{r - 3m}} - 1. \quad (6.12)$$

Por otro lado, el corrimiento cinemático estará dado por

$$z_{\pm} = z_{1,2} - z_c = \pm \sqrt{\frac{mr}{(r - 2m)(r - 3m)}}. \quad (6.13)$$

Ahora consideraremos que la galaxia se aleja o se acerca con una velocidad que denominaremos sistémica v_0 , dirigida a lo largo de la línea de visión. Esta velocidad puede deberse al movimiento de

CAPÍTULO 6. CORRIMIENTOS AL ROJO Y AL AZUL DE FOTONES EMITIDOS POR PARTÍCULAS MASIVAS

la galaxia en su grupo local por interacciones gravitacionales o por su recesión en el flujo de Hubble. Suponiendo que la velocidad sistémica es mucho menor que la velocidad de la luz, podemos usar la aproximación óptica del corrimiento:

$$z_0 = \frac{v_0}{c} \quad (6.14)$$

Este corrimiento sistémico es el mismo en todos los puntos del disco ya que es debido al movimiento de la galaxia como un todo.

De este modo, los corrimientos al rojo y al azul totales que experimentan los fotones emitidos por partículas de prueba (ya sean estrellas, máseres de agua o gas, por mencionar algunos ejemplos) que orbitan un agujero negro de Schwarzschild estarán dados por la siguiente expresión

$$z_{tot_{1,2}} = \pm \sqrt{\frac{mr}{(r-2m)(r-3m)}} + \sqrt{\frac{r}{r-3m}} - 1 + z_0, \quad (6.15)$$

donde el primer término representa el corrimiento cinemático, los dos términos siguientes denotan el corrimiento al rojo gravitacional y el último término es el corrimiento al rojo (al azul) sistémico si la galaxia se aleja (se acerca).

En principio la relación (6.15) es la que usaremos como punto de partida para modelar las curvas de rotación de máseres de agua orbitando de forma circular alrededor de un agujero negro en el sistema dinámico astrofísico UGC 3789 en el siguiente capítulo.

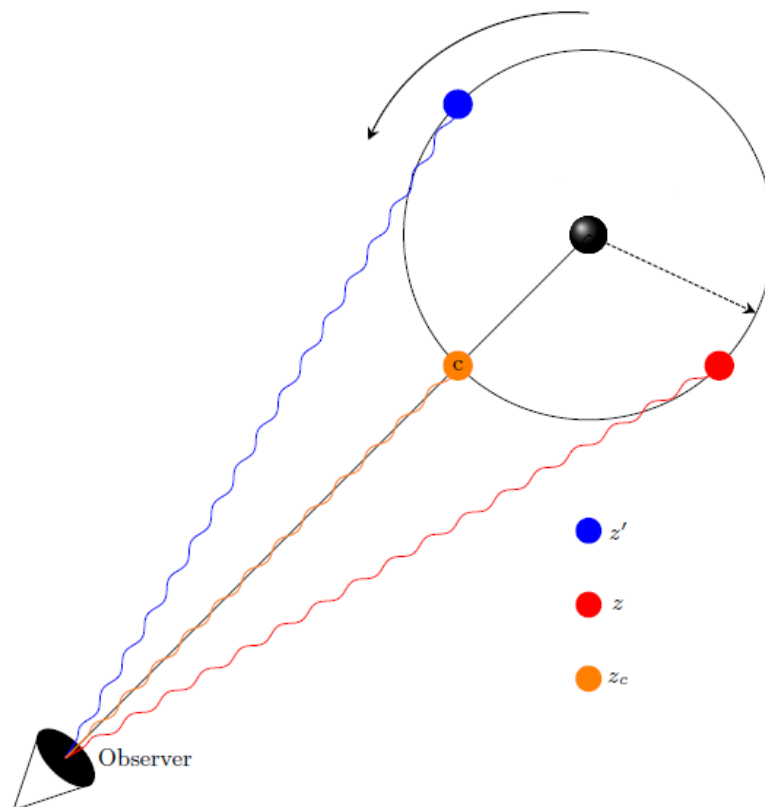


Figura 6.1: Partículas en órbita alrededor de un agujero negro. Los fotones emitidos por las partículas masivas en los puntos marcados con rojo y azul tienen un corrimiento al rojo o al azul según su dirección de rotación, mientras que los fotones que son emitidos sobre la línea de visión (aquella que une al agujero negro con un observador lejano) no tienen corrimiento cinemático. Imagen tomada de [12].

Capítulo 7

Aplicación del modelo al agujero negro central de la galaxia UGC 3789

En este capítulo aplicaremos el método desarrollado anteriormente a un sistema astrofísico real, a saber, al cálculo de la masa del agujero negro hospedado en el centro del núcleo galáctico de UGC 3789.

Lo que se observa en este sistema son máseres de agua en el disco de acreción de un agujero negro vistos de canto. Estos máseres están distribuidos uniformemente en el disco de acreción; sin embargo, solo son visibles los máseres que están en los puntos extremos del disco y los que están sobre la línea de visión (véanse Figs. 7.1 y 7.2). Al girar en el sentido de las manecillas del reloj, los fotones de los máseres del extremo derecho se corren al azul, los del extremo izquierdo al rojo y los fotones de los máseres de la línea de visión no tienen corrimiento cinemático, ya que su movimiento es tangencial al disco, sin embargo, dichos fotones experimentan un corrimiento gravitacional al rojo debido a la curvatura del espacio-tiempo generada por la presencia de la masa del agujero negro central. En adición, todos los fotones del sistema presentan un corrimiento hacia el rojo debido a la recesión de la galaxia.

M. J. Reid et al. [13] estiman una distancia $D = 49,6 \pm 5,1$ Mpc al agujero negro y una masa de $M = (1,16 \pm 0,12) \times 10^7 M_{\odot}$ utilizando un enfoque newtoniano con correcciones relativistas incorporadas a su método de forma perturbativa.

En este Capítulo también se exhibirán las mediciones del sistema dinámico UGC 3789 reportadas en [13], a saber, las posiciones y los corrimientos de fotones emitidos por máseres de agua que orbitan en un disco de acreción en torno a una fuente de radio central con el objetivo de encontrar la masa de este agujero negro aplicando un análisis estadístico Bayesiano con el método de Monte Carlo y siguiendo nuestro enfoque relativista general.

7.1. Análisis Bayesiano

Con el fin de estimar los valores más probables de ciertos parámetros buscados, dado un modelo y dadas las observaciones realizadas, se utiliza un análisis estadístico Bayesiano.

Es necesario contrastar nuestro modelo con datos obtenidos experimentalmente para saber qué tanto se apega a la realidad. Para ello utilizaremos la χ^2 de Pearson

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(\text{observacion} - \text{hipotesis})_i^2}{\text{error}_i^2} \quad (7.1)$$

donde la suma es sobre el conjunto de N datos obtenidos observacionalmente.

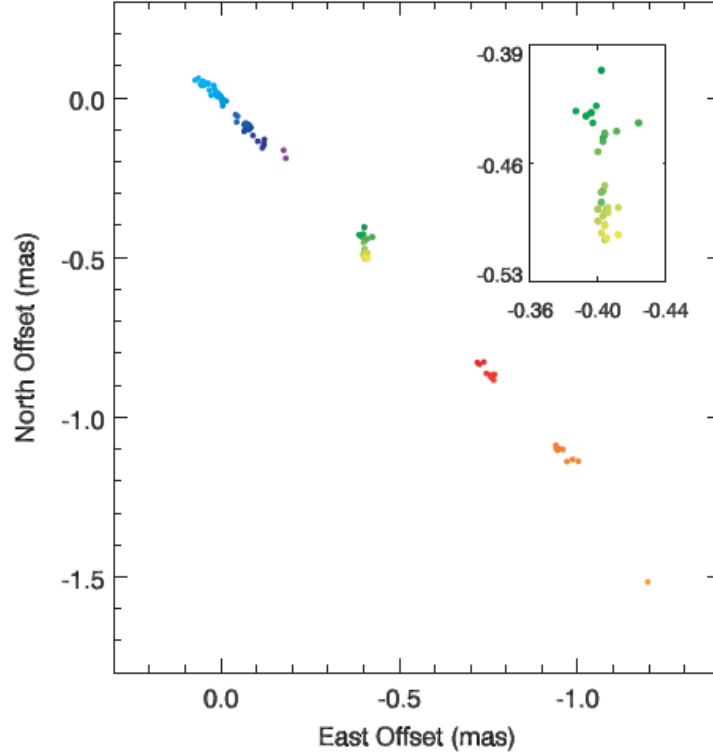


Figura 7.1: Proyección de los máseres de agua observados con corrimientos al azul, rojo y central. Imagen tomada de [9].

Con esta fórmula se calcula cuánto se desvía un modelo teórico de las observaciones experimentales tomando en cuenta los errores de tales observaciones. Cuando el valor de la hipótesis se acerque al valor de la observación experimental su diferencia será mínima y será próxima al valor del error en la medición; por lo que, para el i -ésimo dato, el cociente en (7.1) se aproximará a 1. Esto significa que mientras más preciso sea un modelo teórico, la cantidad χ^2/N ¹ tenderá a 1.

Para nuestro modelo la χ^2 de Pearson es [16]

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(z_{obs_i} - (z_c + \varepsilon \sin(i_0) z_{\pm} + z_0))^2}{\sigma_{z_i}^2 + \beta^2 z_{\pm}^2}, \quad (7.2)$$

donde z_{obs_i} son los corrimientos observados al rojo y al azul de los fotones, $\sin(i_0)$ se introduce para tomar en cuenta el ángulo de inclinación del disco hacia el plano ecuatorial; σ_{z_i} está relacionado con el error de las mediciones de los corrimientos observados, y los términos β y ε son términos de corrección del ángulo en el que están dispersados los máseres sobre la línea media² [17], como se muestra en la Figura 7.2. De manera más concreta

$$\sigma_{z_i} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{x_i}}{x_i - x_0} (z_{\pm_i} + z_{c_i}) \quad (7.3)$$

¹A esta cantidad se le llama χ^2 reducida

²La línea media conecta los máseres altamente corridos al rojo y al azul de los extremos del disco con el agujero negro.

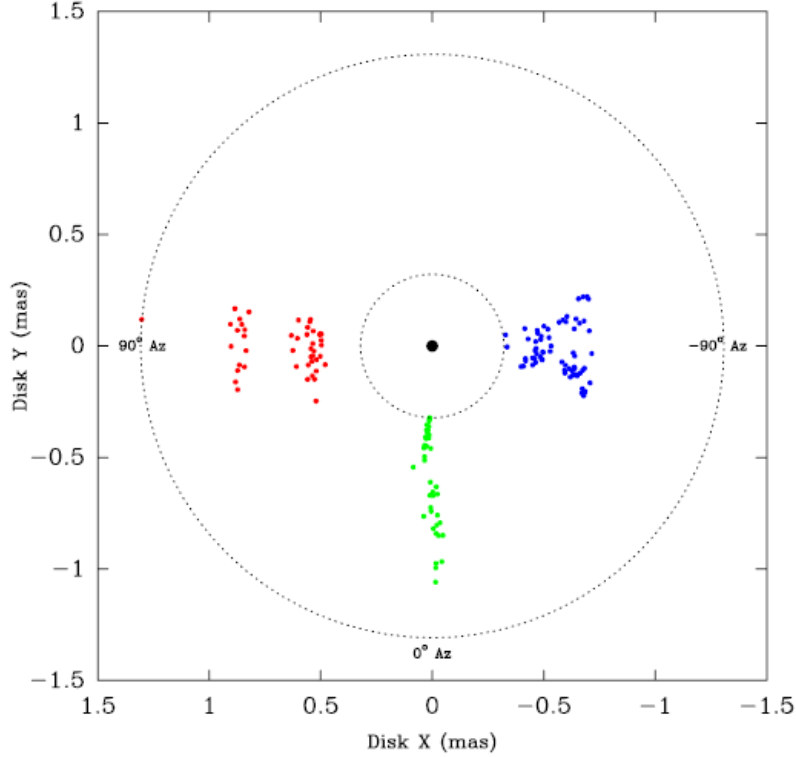


Figura 7.2: Vista cenital de los máseres observados en el disco alrededor del agujero negro. Imagen tomada de [13].

con σ_{x_i} el error de la medición en la posición x (en la ascensión recta) del i -ésimo máser. El ángulo de dispersión σ_θ de los máseres sobre la línea media se relaciona con ε y β como sigue

$$\varepsilon \approx 1 - \frac{\sigma_\theta^2}{2} + \frac{\sigma_\theta^4}{24}, \quad \beta \approx \frac{\sigma_\theta^4}{4}. \quad (7.4)$$

7.2. Aplicación del modelo

En nuestro modelo consideramos los siguientes parámetros del sistema dinámico UGC 3789: posición en x , y y error σ_x de los máseres³; corrimientos gravitacional z_c , cinemático z_\pm y sistémico z_0 de los fotones; ángulo de dispersión de los máseres σ_θ ; ángulo de inclinación del disco i_0 ; masa m y posición x_0 , y_0 del agujero negro.

De estos parámetros, se estimarán la masa m , la posición x_0 del agujero negro y el corrimiento sistémico z_0 .

En la Tabla 7.1 se muestran los datos de los corrimientos (reportados como velocidades), la posición en x (Θ_x), el error en x (σ_{Θ_x}) y la posición en y (Θ_y) de los máseres. Además, de [13] sabemos que el ángulo de inclinación i_0 es de 90.6° y consideramos un ángulo de dispersión σ_θ de 8.0° .

³Debido a que el disco de acreción es extremadamente delgado si se ve de canto (con una razón de ancho-radio $H/R = 0,01$), los errores en la dirección y , es decir en la declinación, son irrelevantes.

**CAPÍTULO 7. APLICACIÓN DEL MODELO AL AGUJERO NEGRO CENTRAL
DE LA GALAXIA UGC 3789**
7.2. APLICACIÓN DEL MODELO

Tabla 7.1: Datos de UGC 3789

V_{LSR} km/s	Θ_x mas	σ_{Θ_x} mas	Θ_y mas
2472.8	-0.183	0.009	-0.190
2477.9	-0.179	0.008	-0.197
2562.9	-0.116	0.005	-0.176
2564.6	-0.119	0.004	-0.153
2566.3	-0.122	0.003	-0.149
2568.0	-0.123	0.003	-0.143
2569.7	-0.130	0.009	-0.137
2571.4	-0.093	0.020	-0.161
2586.7	-0.104	0.012	-0.137
2588.4	-0.089	0.004	-0.118
2590.1	-0.084	0.009	-0.102
2591.8	-0.087	0.008	-0.103
2593.5	-0.096	0.004	-0.107
2595.2	-0.098	0.004	-0.097
2596.9	-0.105	0.007	-0.107
2602.0	-0.066	0.010	-0.106
2603.7	-0.084	0.003	-0.102
2605.4	-0.076	0.007	-0.102
2607.1	-0.065	0.005	-0.102
2608.8	-0.067	0.015	-0.096
2610.5	-0.073	0.005	-0.089
2612.2	-0.077	0.003	-0.087
2613.9	-0.081	0.006	-0.087
2615.6	-0.068	0.007	-0.084
2617.3	-0.072	0.007	-0.085
2629.2	-0.045	0.012	-0.079
2630.9	-0.042	0.009	-0.054
2632.6	-0.049	0.004	-0.059
2634.3	-0.050	0.004	-0.077
2636.0	-0.064	0.008	-0.063
3660.7	-1.198	0.010	-1.517
3735.5	-0.977	0.005	-1.139
3737.2	-0.980	0.006	-1.133
3738.9	-0.992	0.012	-1.119
3740.6	-0.971	0.005	-1.157
3745.7	-0.965	0.014	-1.143
3747.4	-0.973	0.006	-1.123
3749.1	-0.981	0.009	-1.109
3750.8	-0.988	0.007	-1.095
3752.5	-0.965	0.011	-1.111
3754.2	-0.968	0.015	-1.094
3755.9	-0.940	0.008	-1.092
3757.6	-0.953	0.006	-1.092
3759.3	-0.945	0.003	-1.104
3761.0	-0.944	0.004	-1.101
3764.4	-0.944	0.014	-1.082
3808.6	-0.782	0.006	-0.833
3837.5	-0.830	0.010	-0.917

Tabla 7.1 (continuación)

V_{LSR}	Θ_x	σ_{Θ_x}	Θ_y
km/s	mas	mas	mas
3839.2	-0.811	0.009	-0.905
3840.9	-0.814	0.010	-0.914
3842.6	-0.832	0.006	-0.916
3846.0	-0.766	0.012	-0.874
3851.1	-0.791	0.007	-0.858
3859.6	-0.760	0.004	-0.848
3861.3	-0.764	0.004	-0.866
3863.0	-0.764	0.004	-0.882
3864.7	-0.760	0.007	-0.874
3866.4	-0.761	0.009	-0.868
3868.1	-0.765	0.010	-0.870
3871.5	-0.751	0.030	-0.874
3878.3	-0.761	0.016	-0.845
3880.0	-0.758	0.004	-0.871
3881.7	-0.750	0.004	-0.863
3883.4	-0.753	0.003	-0.854
3885.1	-0.746	0.003	-0.854
3886.8	-0.750	0.007	-0.865
3890.2	-0.758	0.024	-0.849
3891.9	-0.744	0.008	-0.857
3893.6	-0.715	0.006	-0.856
3903.8	-0.738	0.007	-0.830
3905.5	-0.727	0.005	-0.838
3907.2	-0.733	0.004	-0.835
3908.9	-0.727	0.004	-0.833
3910.6	-0.720	0.003	-0.827
3912.3	-0.730	0.007	-0.824
3914.0	-0.733	0.006	-0.809

En el Apéndice B se muestra a detalle el programa en el que se implementa este análisis estadístico Bayesiano para estimar los parámetros deseados y en el siguiente capítulo se presentan los resultados de tales estimaciones.

7.3. Resultados

Los resultados de la estimación de la masa m y posición x_0 del agujero negro, así como del corrimiento sistémico z_0 se muestran en la Tabla 7.2.

Al ser la masa del orden de decenas de millones de masas solares ($10^7 M_\odot$) concluimos que se trata de un agujero negro supermasivo, lo cual concuerda con la hipótesis de la existencia de agujeros negros supermasivos en el centro de la mayoría de las galaxias.

El corrimiento sistémico, con la aproximación óptica del corrimiento (6.14), corresponde a una velocidad sistémica $v_0 \approx 3280$ km/s. Esta velocidad, como se mencionó en el Capítulo 6, está compuesta por la velocidad de recesión de la galaxia en el flujo de Hubble ($v_H = DH_0$) y por su velocidad peculiar v_p la cual se debe a las interacciones gravitacionales de la galaxia en su grupo local. Así, habiendo estimado su velocidad sistémica y considerando la constante de Hubble como $H_0 = 73,9$ km s⁻¹ Mpc⁻¹ [18], podemos calcular $v_p \approx -385$ km/s. Esto es, el sistema se acerca a nosotros con una velocidad peculiar de 385 km/s pero como su velocidad de recesión es mayor detectamos un corrimiento sistémico hacia el rojo.

Parámetro	Estimación	Error
Masa $M(\times 10^7 M_{\odot})$	1.141	$\pm 0,0038$
Posición x_0 (mas)	0.038	$\pm 0,0052$
Corrimiento sistémico z_0	0.010	$\pm 8,68 \times 10^{-6}$
χ^2/N	1.71	

Tabla 7.2: Resultados de la estimación estadística bayesiana que arroja los valores más probables para la masa del agujero negro central de UGC 3789, su posición en la ascensión recta y el corrimiento sistémico generado por el alejamiento de la galaxia como un todo. También se presenta la χ^2/N (ji cuadrada reducida).

Además, como $\chi^2/N = 1,71$ es del orden de 1 podemos decir que nuestro modelo es confiable.

Capítulo 8

Conclusión

En esta tesis se ha presentado un método relativista general para estimar la masa de un agujero negro de Schwarzschild en términos de los corrimientos observados de los fotones emitidos por las partículas que orbitan al agujero negro. Este resultado es de particular utilidad ya que una de las mediciones más comunes que realizan los astrónomos es la de los corrimientos en el espectro de emisión de los objetos observados. Al analizar tal corrimiento desde un enfoque relativista general, encontramos que tiene tres contribuciones: la cinemática, la de recesión y la gravitacional. Esta última contribución generalmente no es tomada en cuenta en análisis newtonianos, sin embargo, los efectos de la deformación espacio-temporal resultan notables en la vecindad de un agujero negro.

Después de realizar un ajuste bayesiano a los datos observacionales de los corrimientos al rojo y al azul de los fotones emitidos por máseres de agua que se encuentran en el disco de acreción del agujero negro hospedado en UGC 3789, estimamos una masa $M = (1,14 \pm 0,0038) \times 10^7 M_{\odot}$, que difiere de la masa encontrada por M. J. Reid et al. [13] por $0,02 \times 10^7 M_{\odot}$. De esta misma manera, el método podría ser aplicado a otros conjuntos de datos que cumplan con las condiciones de órbitas circulares y en el plano ecuatorial, o bien, es posible generalizar el método a órbitas no circulares y/o que no estén en el plano ecuatorial, o incluso a otras métricas como la de Kerr o Kerr-Newmann. En estas métricas deberían aparecer términos en el corrimiento correspondientes al parámetro de rotación, para el caso de Kerr, y términos correspondientes al parámetro de rotación y la carga del agujero negro, para el caso de la solución de Kerr-Newmann.

Realizar tales generalizaciones sería de gran utilidad ya que no todos los objetos que giran en torno a un agujero negro lo hacen en órbitas circulares, sino que se mueven en órbitas con excentricidad y fuera del plano ecuatorial, como es el caso de las estrellas que se mueven en el centro de nuestra galaxia alrededor de un agujero negro supermasivo. Así, para obtener resultados más correctos físicamente al momento de estudiar sistemas dinámicos astrofísicos, es necesario considerar la información que nos proporciona la Relatividad General.

Apéndice A

Interpretación de la constante de Carter

De la ecuación (3.30) despejamos la constante de Carter Q :

$$Q = r^4(U^\theta)^2 + L^2 \cot^2 \theta, \quad (\text{A.1})$$

Recordando que $C = L^2 + Q$

$$C = r^4(U^\theta)^2 + L^2 \csc^2 \theta, \quad (\text{A.2})$$

$$= (U_\theta)^2 + \frac{(U_\phi)^2}{\text{sen}^2 \theta}. \quad (\text{A.3})$$

Esta última expresión se puede interpretar como el cuadrado del módulo del momento angular total de la partícula [19, 20].

Para el caso de partículas que se muevan en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$, $U^\theta = 0$ y $\cot \theta = 0$ entonces

$$Q = 0, \quad C = (U_\phi)^2 = L^2 \quad (\text{A.4})$$

Esto es, la constante C será igual al cuadrado del momento angular axial de la partícula y la constante de Carter Q será nula.

Apéndice B

Programa

A continuación se presenta la adecuación de un programa desarrollado en Python por los autores de [16] en el que usamos el análisis bayesiano descrito en 7.1 y los datos observacionales descritos con anterioridad en la Tabla 7.1 para estimar los valores más probables de los parámetros m , x_0 y z_0 .

Programa UGC 3789

June 1, 2021

1 I. Parámetros a estimar: M, x_0, z_0

```
[1]: import emcee
import corner
import numpy as np
import scipy.optimize as op
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.ticker import MaxNLocator, NullFormatter
import math
from math import log10
from scipy.integrate import quad as intquad
```

2 II. Importamos los datos

Se importan los datos de las velocidades reportadas por Reid et al. correspondientes al corrimiento de los máseres en los extremos del disco (estas velocidades están relacionadas con el corrimiento por la aproximación newtoniana $v = zc$). También se importa la posición en x y en y y el error en x de cada máser.

```
[2]: #Datos de los máseres corridos al rojo
vel_obs = np.genfromtxt('red.txt', delimiter='\t', usecols=0)
x_pos = np.genfromtxt('red.txt', delimiter='\t', usecols=1)
x_pos_Error = np.genfromtxt('red.txt', delimiter='\t', usecols=2)
y_pos = np.genfromtxt('red.txt', delimiter='\t', usecols=3)
#Datos de los máseres corridos al azul
vel_obs = np.genfromtxt('blue.txt', delimiter='\t', usecols=0)
z_pos = np.genfromtxt('blue.txt', delimiter='\t', usecols=1)
z_pos_Error = np.genfromtxt('blue.txt', delimiter='\t', usecols=2)
w_pos = np.genfromtxt('blue.txt', delimiter='\t', usecols=3)
```

3 III. Constantes definidas

Se definen las constantes que nos serán útiles para convertir a las unidades correctas. En este trabajo se utilizan las unidades naturales. También se establecen los siguientes parámetros del

modelo: dispersión de los máseres en el disco, inclinación del disco y posición en y del agujero negro.

```
[3]: c = 299792.458 #velocidad de la luz en km/s
D = (49.6)*(3.086*10.**22.) #distancia al sistema UGC 3789
G = 6.674*10.**-11. #const. de grav. universal
mc = 1.989*10.**37. # masa solar en kg
theta = 4.8481*10.**-9. # factor de conversión de mas a rad.
beta = (G*mc/(D*theta))**(1./2.)*10.**-3. #factor de conversión de masas
    →solares a mas.
alphaFijo = (beta/c)**2
sigmatheta = 0.1396263401595464 #dispersión de los máseres en el disco en rad
    →(8.0 grados)
inclinaciono = 1.581268302 # inclinación del disco i_0 en rad (90.6 grados)
ybho = 0. #posición y_0 del Agujero negro.
print(beta) #imprimir el valor de beta
```

422.94696119350846

4 IV. Definición de a función χ_{red}^2

4.1 Se define la función χ_{red}^2 para los máseres corridos al rojo. $\chi_{red}^2(M, x_0, z_{sys}) =$

$$\sum_i \frac{\left[\frac{v_{obs_i}}{c} - (z_{c_i} + \epsilon \sin(i_0)z_{+i} + z_{0_i}) \right]^2}{z_{1_i}^2 \left(\frac{\sigma_x^2}{4(x-x_0)^2} \right) + z_{+i}^2 \frac{\sigma_\theta^4}{2}}$$

4.2 Con $z_1 = z_+ + z_c = \sqrt{\frac{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-3\alpha M}}} \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha M}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-2\alpha M}}} \right) - 1$

donde α es el factor de conversión de la Sec. III

4.3 Corrimiento cinemático hacia el rojo: $z_+ = \sqrt{\frac{\alpha M \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}{(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-2\alpha M})(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-3\alpha M})}}$

4.4 Corrimiento gravitacional: $z_c = \sqrt{\frac{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-3\alpha M}}} - 1$

4.5 Corrimiento sistémico: $z_0 = z_{sys} + z_p$

Es decir, z_0 es la suma del corrimiento debido a la velocidad peculiar de la galaxia y el corrimiento sistémico

```
[4]: #Chi^2 del corrimiento al rojo

#Definimos el numerador

def func1_statVect(x, y, sx, v, m, xo, zo):
    "Aquí esta la funcion1"
```

```

func1_stat_VecInt = 0.
e=0.

io=inclinationo
a = alphaFijo
st=sigmatheta
yo=ybho

e=(1.-0.5*(st)**2.+ (1./24.)*(st)**4.)

func1_stat_VectInt=v/c-((np.sqrt(np.sqrt((x-xo)**2.+(y-yo)**2.)/np.abs(np.
→sqrt((x-xo)**2.+(y-yo)**2)-3.*a*m))*(1.+e*np.sin(io)*np.sqrt(a*m/np.abs(np.
→sqrt((x-xo)**2.+(y-yo)**2.))-2.*a*m))))-1.)+zo

return func1_stat_VectInt

# Después el denominador

def func2_statVect(x, y, sx, v, m, xo, zo):
    "Aquí esta la funcion2"

    func2_stat_VecInt = 0.

    a = alphaFijo
    st=sigmatheta
    yo=ybho

    func2_stat_VectInt = ((np.sqrt(np.sqrt((x-xo)**2.+(y-yo)**2.)/np.abs(np.
→sqrt((x-xo)**2.+(y-yo)**2)-3.*a*m))*(1.+np.sqrt(a*m/np.abs(np.sqrt((x-xo)**2.
→+(y-yo)**2.))-2.*a*m))))-1.)**2)*(sx**2/(4*(x-xo)**2))+((a*m*np.sqrt((x-xo)**2.
→+(y-yo)**2.))/((np.sqrt((x-xo)**2.+(y-yo)**2.))-2*a*m))*((np.sqrt((x-xo)**2.
→+(y-yo)**2.))-3*a*m)))*(st**4/2)

return func2_stat_VectInt

```

5 V. Definición de la función χ_{blue}^2

5.1 Se define la función χ_{blue}^2 para los máseres corridos al azul. $\chi_{blue}^2(M, x_0, z_{sys}) =$

$$\sum_i \left[\frac{v_{obs_i} - (z_{c_i} + \varepsilon \sin(i_0) z_{-i} + z_{0_i})}{z_{2_i} \left(\frac{\sigma_x^2}{4(x-x_0)^2} \right) + z_{-i}^2 \frac{\sigma_\theta^4}{2}} \right]^2$$

5.2 Con $z_2 = z_- + z_c = \sqrt{\frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - 3\alpha M}}} \left(1 - \sqrt{\frac{\alpha M}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - 2\alpha M}}} \right) - 1$

5.3 Corrimiento cinemático al azul: $z_- = -\sqrt{\frac{\alpha M \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - 2\alpha M})(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - 3\alpha M)}}$

El corrimiento gravitacional y el corrimiento sistémico están definidos de igual manera que en el caso del corrimiento al rojo

[5]: *#Chi 2 del corrimiento al azul*

#Definimos el numerador

```
def func1b_statVect(z, w, sz, u, m, xo, zo):
```

```
    "Aquí esta la funcion1b"
```

```
    func1b_stat_VecInt = 0.
```

```
    e=0.
```

```
    a = alphaFijo
```

```
    st=sigmatheta
```

```
    io=inclinationo
```

```
    yo=ybho
```

```
    e=(1.-0.5*(st)**2.+ (1./24.)*(st)**4.)
```

```
    func1b_stat_VecInt=u/c-((np.sqrt(np.sqrt((z-xo)**2.+(w-yo)**2.)/np.abs(np.
    →sqrt((z-xo)**2.+(w-yo)**2.)-3.*a*m))*(1.-e*np.sin(io)*np.sqrt(a*m/np.abs(np.
    →sqrt((z-xo)**2.+(w-yo)**2.)-2.*a*m)))-1.)+zo)
```

```
    return func1b_stat_VecInt
```

#Definimos el denominador

```
def func2b_statVect(z, w, sz, u, m, xo, vo):
```

```
    "Aquí esta la funcion2b"
```

```
    func2b_stat_VecInt = 0.
```

```
    a = alphaFijo
```

```

st=sigmatheta
io=inclinationo
yo=ybho

func2b_stat_VectInt = ((np.sqrt(np.sqrt((z-xo)**2.+(w-yo)**2.)/np.abs(np.
↪sqrt((z-xo)**2.+(w-yo)**2.)-3.*a*m))*(1.-np.sqrt(a*m/np.abs(np.sqrt((z-xo)**2.
↪+(w-yo)**2.)-2.*a*m)))-1.)**2)*(sz**2/(4*(z-xo)**2))+((a*m*np.sqrt((z-xo)**2.
↪+(w-yo)**2.))/(np.sqrt((z-xo)**2.+(w-yo)**2.)-2*a*m)*((np.sqrt((z-xo)**2.
↪+(w-yo)**2.)-3*a*m))))*(st**4/2)

return func2b_stat_VectInt

```

6 VI. Definimos la función $\ln(\text{Likelihood}) \propto -0.5\chi_{total}^2$

6.1 Con $\chi_{total}^2 = \chi_{red}^2 + \chi_{blue}^2$

```

[6]: #Definiendo la función likelihood

def lnLikelihood_z(theta, x, y, sx, v, z, w, sz, u):
    "Natural logarithm (ln) of the Likelihood function = -0.5 * Chi2 "
    m, xo, zo = theta

    a = alphaFijo

    chi2zIntr = 0.

    for i in range(len(x)):
        # Realizamos la suma de todos los datos posibles de la Chi^2_{red}
        chi2zIntr = (chi2zIntr +
                    ((func1_statVect(x[i], y[i], sx[i], v[i], m, xo, zo))**2./
                    func2_statVect(x[i], y[i], sx[i], v[i], m, xo, zo))))

    chi2zIntb = 0.
    for j in range(len(z)):
        # Realizamos la suma de todos los datos posibles de la Chi^2_{blue}
        chi2zIntb = (chi2zIntb+((func1b_statVect(z[j], w[j], sz[j],
↪u[j], m, xo, zo))**2./
                    func2b_statVect(z[j], w[j], sz[j], u[j], m, xo, zo))))

    lnLikelihoodInt=0.
    lnLikelihoodInt=-0.5*(chi2zIntr +chi2zIntb) #Sumamos Chi^2_{red} y
↪Chi^2_{blue}

    return lnLikelihoodInt

```

7 VII. Definimos $\ln(\text{Posterior}_{\text{total}}) \propto -0.5\chi_{\text{total}}^2$ con la información a priori.

$$7.1 \quad \chi_{\text{total}}^2 = \chi_z^2 + (\text{par} - \text{par}_{\text{obs}})^2 / \sigma_{\text{par}}^2$$

(En este código no tenemos información a priori)

```
[7]: def lnPosteriorWithPriors(theta, x, y, sx, v, z, w, sz, u):
      "ln(Posterior) including Gaussian priors"
      m, xo, zo = theta

      lnPostWithPriorsInt =(lnLikelihood_z(theta, x, y, sx, v, z, w, sz, u))

      return lnPostWithPriorsInt
```

8 VIII. Definimos el límite de cada parámetro.

Acotamos los posibles valores de los parámetros

```
[8]: def lnPrior(theta):
      "Natural logarithm (ln) of the prior PDF"
      m, xo, zo = theta

      if 0.< m < 100. and -500.< xo <500. and -0.02< zo <0.02 :
          return 0.0
      return -np.inf
```

8.1 Se define $\ln(\text{posterior PDF})$:

```
[9]: #Definición de lnPosterior

def lnPosterior(theta, x, y, sx, v, z, w, sz, u):
    lp = lnPrior(theta)
    if not np.isfinite(lp):
        return -np.inf
    return lp + lnPosteriorWithPriors(theta, x, y, sx, v, z, w, sz, u)
```

9 IX. Cadenas MCMC

Ahora se aplicarán Cadenas de Markov Monte Carlo (MCMC). Este método consiste en simular valores sucesivamente con el fin de que la cadena converja al valor más probable.

Definimos el punto de partida en el espacio de parámetros (M, x_0, z_{sys})

```
[10]: #Establecemos los valores iniciales:
Par1_true = 3.718208029799656
```

```
Par2_true = -0.35410534898686746
Par3_true = 0.0016190409132956789
```

Initializing emcee:

```
[11]: result = np.array([Par1_true, Par2_true, Par3_true])
      result
```

```
[11]: array([ 3.71820803e+00, -3.54105349e-01,  1.61904091e-03])
```

```
[12]: np.random.seed(101)
```

10 X. Número de dimensión y caminantes

Establecemos la dimensión (el número de parámetros a estimar, en este caso 3) y el número de caminantes de la cadena.

```
[13]: ndim, nwalkers = 3, 30
      pos = [result + 1e-4*np.random.randn(ndim) for i in range(nwalkers)]

      sampler = emcee.EnsembleSampler(nwalkers, ndim, lnPosterior,
                                     args=(x_pos, y_pos, x_pos_Error, vel_obs,
      →z_pos, w_pos, z_pos_Error, uel_obs))
```

About parallel computing (<http://dan.iel.fm/emcee/current/user/advanced/#multiprocessing>):

11 XI. Corriendo las Cadenas de Markov Monte Carlo (MCMC)

Se establece el número de cadenas para correr:

```
[14]: # 8000 cadenas
      print("Running MCMC...")
      sampler.run_mcmc(pos, 8000, rstate0=np.random.get_state())
      print("Done.")
```

```
Running MCMC...
Done.
```

11.0.1 Guardando los datos de las cadenas

```
[15]: np.savetxt('Chain_Par0_m.dat', sampler.chain[:, :, 0])
      np.savetxt('Chain_Par1_xo.dat', sampler.chain[:, :, 1])
      np.savetxt('Chain_Par2_zo.dat', sampler.chain[:, :, 2])
```

12 XII. Graficando la evolución de las cadenas

Se grafican los valores de las 8000 cadenas que se corrieron; empiezan por el valor inicial establecido y van convergiendo al valor más probable.

```

[16]: plt.clf()
fig, axes = plt.subplots(4, 1, sharex=True, figsize=(8, 9))

axes[0].plot(sampler.chain[:, :, 0].T, color="k", alpha=0.4)
axes[0].yaxis.set_major_locator(MaxNLocator(5))
axes[0].axhline(Par1_true, color="#888888", lw=2)
axes[0].set_ylabel("$m$")

axes[1].plot(sampler.chain[:, :, 1].T, color="k", alpha=0.4)
axes[1].yaxis.set_major_locator(MaxNLocator(5))
axes[1].axhline(Par2_true, color="#888888", lw=2)
axes[1].set_ylabel("$x_0$")

axes[2].plot(sampler.chain[:, :, 2].T, color="k", alpha=0.4)
axes[2].yaxis.set_major_locator(MaxNLocator(5))
axes[2].axhline(Par3_true, color="#888888", lw=2)
axes[2].set_ylabel("$z_0$")

axes[3].set_xlabel("step number")

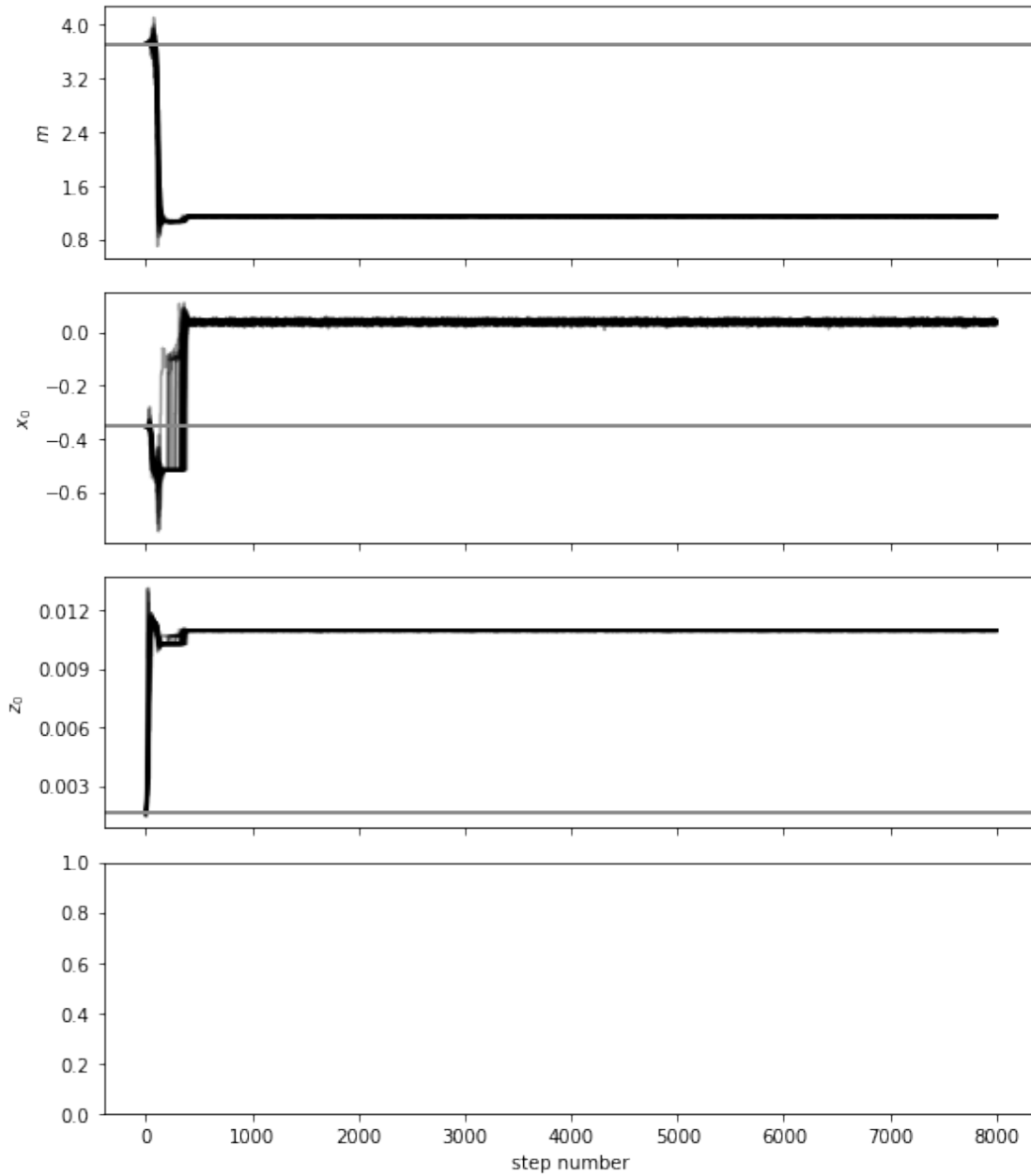
fig.tight_layout()

fig.savefig("Chains_0m_wde_w_Ho_0mBh2-PS1-BA08p-CMBR_.png")
plt.show()

plt.close()

```

<Figure size 432x288 with 0 Axes>



Measuring the length of the output array:

```
[17]: len(sampler.chain[:, :, 0]), len(sampler.chain[:, :, 0].T)
```

```
[17]: (30, 8000)
```

13 XIII. Burn-in de las primeras cadenas y guardar los datos

Es necesario borrar las primeras cadenas ya que estos valores están lejos del valor al que converge la cadena


```
[18]: #Eliminamos las primeras 3000 cadenas
burnin = 3000
samples = sampler.chain[:, burnin:, :].reshape((-1, ndim))
```

13.0.1 Guardar los datos de las cadenas cortadas por el burn-in

```
[19]: np.savetxt('TrimBurnin_Cut_300_R_.dat', samples)
```

13.0.2 Guardar los datos completos (sin el burn-in) y el valor de χ^2

Esta tabla es útil para graficar los datos y encontrar regiones de confianza del valor de χ^2

```
[20]: chi2values=-2.*sampler.flatlnprobability
NoTrimDataParam_Chi2=np.column_stack((sampler.flatchain, chi2values))
len(NoTrimDataParam_Chi2),len(NoTrimDataParam_Chi2.T)
```

```
[20]: (240000, 4)
```

```
[21]: # Nombre del archivo donde se guardan los datos completos de las regiones de
      →confianza.
np.savetxt('NoTrimDataParam_Chi2_R_.dat', NoTrimDataParam_Chi2)
```

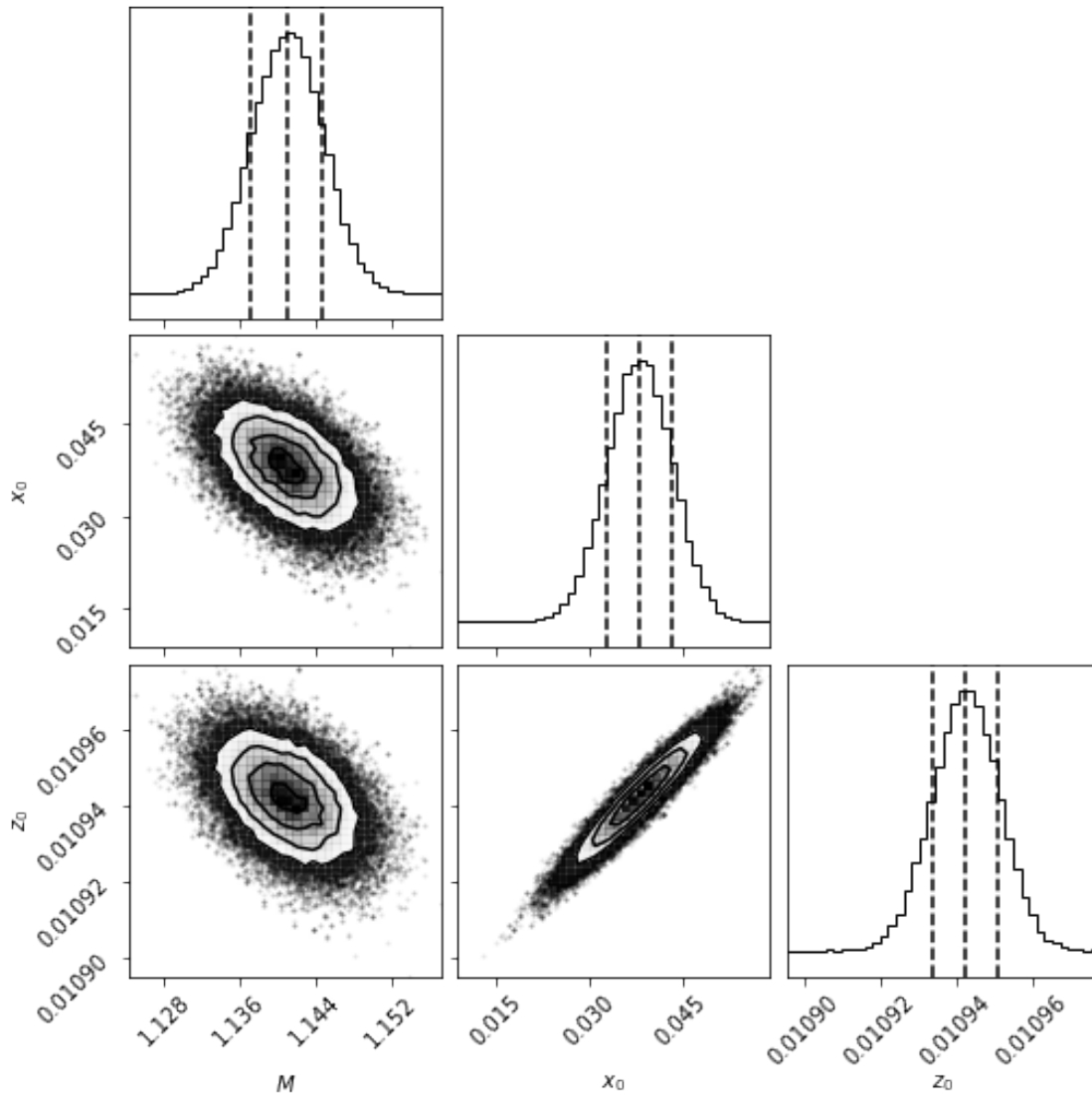
14 XIV. Graficando las regiones de confianza

Se grafican las regiones de confianza y la distribución de los valores probables de los parámetros a estimar.

```
[22]: fig = corner.corner(samples, labels=["M$", "x_0$", "z_0$"],
                        truths=[Par1_true, Par2_true, Par3_true],
                        quantiles=[0.16, 0.50, 0.84],
                        bins=40,
                        plot_datapoints = True,
                        scale_hist=True)

fig.savefig("CredReg_Q_Bin50_.png")
plt.show()

plt.close()
```



15 XV. Obteniendo los valores más probables del ajuste.

Ahora, con la información dada por las cadenas, obtenemos el valor más probable de cada parámetro.

[23]: *#Valor promedio*

```
np.mean(samples, axis=0)
```

[23]: array([1.1409889 , 0.03805575, 0.01094238])

[24]: *#Desviación estándar*

```
np.std(samples, axis=0)
```

```
[24]: array([3.77410028e-03, 5.26150295e-03, 8.77318289e-06])
```

```
[25]: #Resultados
```

```
Par1_mcmc, Par2_mcmc, Par3_mcmc= map(lambda v: (v[1], v[2]-v[1], v[1]-v[0]),
                                     zip(*np.percentile(samples, [16, 50, 84],
                                                         axis=0)))

print("""MCMC result:
      Par1 = {0[0]} +{0[1]} -{0[2]} (Initial guess: {1})
      Par2 = {2[0]} +{2[1]} -{2[2]} (Initial guess: {3})
      Par3 = {4[0]} +{4[1]} -{4[2]} (Initial guess: {5})
      """.format(Par1_mcmc, Par1_true,
                 Par2_mcmc, Par2_true,
                 Par3_mcmc, Par3_true,))
```

MCMC result:

```
Par1 = 1.1410033500727526 +0.0037472215665572683 -0.0038054041717998643
(Initial guess: 3.718208029799656)
Par2 = 0.038089438030963985 +0.0052231523360558585 -0.005272881165479089
(Initial guess: -0.35410534898686746)
Par3 = 0.010942454487095354 +8.668244569923211e-06 -8.811178363810762e-06
(Initial guess: 0.0016190409132956789)
```

Los resultados anteriores corresponden a los valores más probables de la masa M (en $\times 10^7 M_\odot$), la posición del agujero negro x_0 (en *mas*) y el corrimiento sistémico z_0 , así como a sus errores.

16 XVI. El cálculo de la χ^2/N

Calculamos la χ^2 de Pearson reducida (χ^2/N) para ver qué tan preciso es nuestro modelo. Mientras más se acerque este valor a uno, mejor será el modelo.

```
[30]: theta1= 1.1410033500727526, 0.038089438030963985, 0.010942454487095354
```

```
-2.*lnLikelihood_z(theta1, x_pos, y_pos, x_pos_Error, vel_obs, z_pos, w_pos,
                    ->z_pos_Error, uel_obs)/(len(vel_obs)+len(uel_obs)-3)
```

```
[30]: 1.714966346090492
```

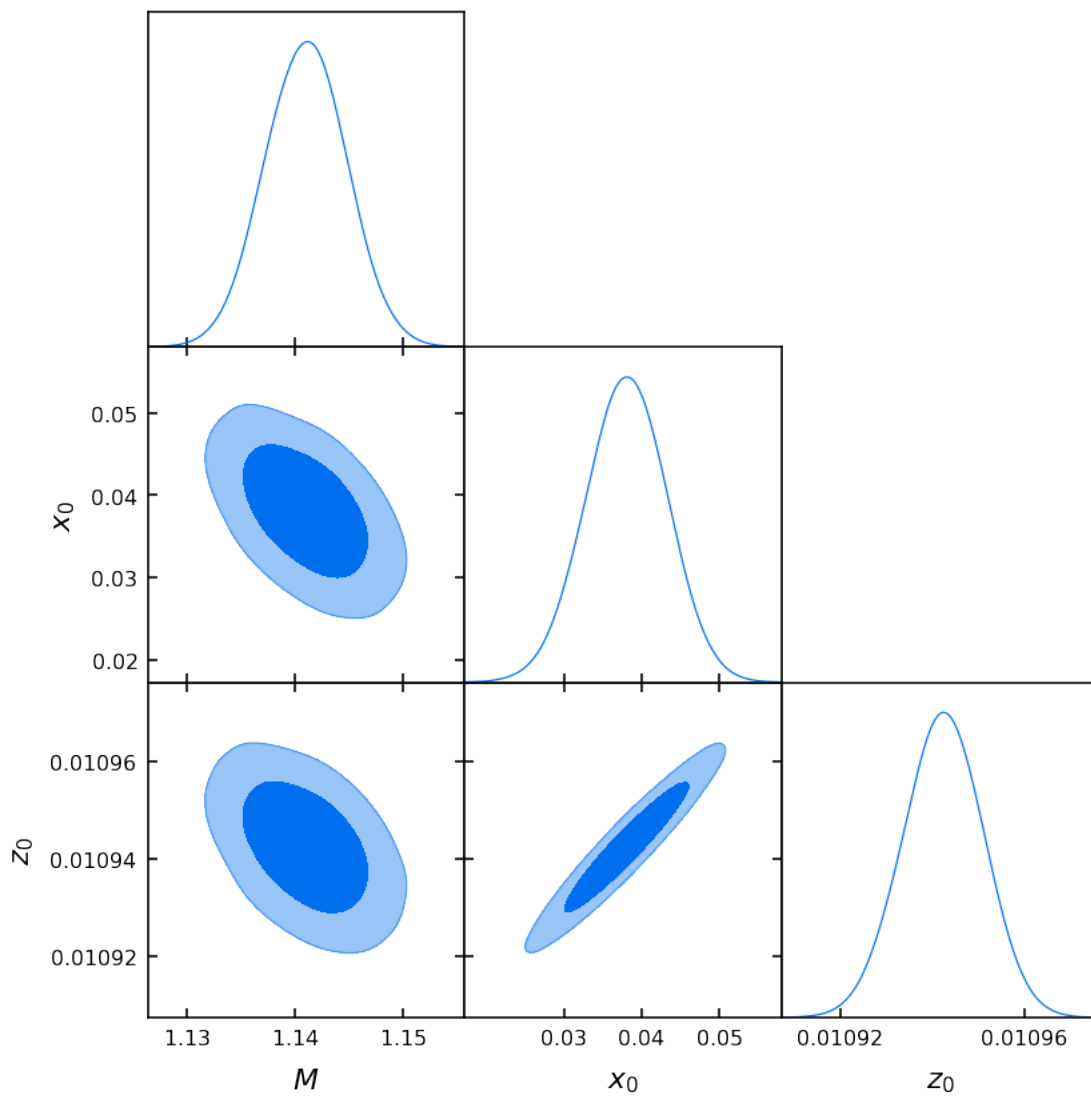
17 XVII. Graficando los valores más probables y las regiones de confianza

Se vuelven a graficar los valores más probables y las regiones de confianza esta vez utilizando la paquetería `getdist`.

Removed 3000 lines as burn in
Removed 3000 lines as burn in
Removed 3000 lines as burn in
Removed 3000 lines as burn in
Removed 3000 lines as burn in

Las gaussianas que se grafican son las distribuciones de los valores probables para cada parámetro. Los círculos que aparecen en las gráficas son las proyecciones de tales distribuciones e indican los niveles de confianza; las áreas más oscuras representan las regiones de mayor confianza (donde se tiene mayor probabilidad).

```
[29]: g = plots.get_subplot_plotter()  
g.triangle_plot([samples1], filled=True, markers={'M':-1.0})
```



Bibliografía

- [1] K. Schwarzschild. Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. In *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pages 424–434, 1916.
- [2] R. P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.*, 11:237–238, 1963.
- [3] E. T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, and R. Torrence. Metric of a Rotating, Charged Mass. *J. Math. Phys.*, 6(6):918–919, 1965.
- [4] B. P. Abbott et al. GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence. *Phys. Rev. Lett.*, 116(24):241103, 2016.
- [5] K. Akiyama et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. IV. Imaging the Central Supermassive Black Hole. *Astrophys. J. Lett.*, 875(1):L4, 2019.
- [6] Z. Q. Shen, K. Y. Lo, M. C. Liang, P. T. P. Ho, and J. H. Zhao. A size of ~ 1 au for the radio source sgr a* at the centre of the milky way. *Nature*, 438:62, 2005.
- [7] A. M. Ghez et al. Measuring Distance and Properties of the Milky Way’s Central Supermassive Black Hole with Stellar Orbits. *Astrophys. J.*, 689:1044–1062, 2008.
- [8] J. M. Moran. The Black Hole Accretion Disk in NGC 4258: One of Nature’s Most Beautiful Dynamical Systems. *ASP Conf. Ser.*, 395:87, 2008.
- [9] M. J. Reid, J. A. Braatz, J. J. Condon, L. J. Greenhill, C. Henkel, and K. Y. Lo. The Megamaser Cosmology Project. I. Very Long Baseline Interferometric Observations of UGC 3789. *Astrophys. J.*, 695(1):287–291, 2009.
- [10] C. Y. Kuo, J. A. Braatz, J. J. Condon, C. M. V. Impellizzeri, K. Y. Lo, I. Zaw, M. Schenker, C. Henkel, M. J. Reid, and J. E. Greene. The Megamaser Cosmology Project. III. Accurate Masses of Seven Supermassive Black Holes in Active Galaxies with Circumnuclear Megamaser Disks. *Astrophys. J.*, 727(1):20, 2011.
- [11] A. Herrera-Aguilar and U. Nucamendi. Kerr black hole parameters in terms of the redshift/blueshift of photons emitted by geodesic particles. *Phys. Rev. D*, 92(4):045024, 2015.
- [12] A. Herrera-Aguilar, R. Lizardo-Castro, and U. Nucamendi. General relativistic formulas for mass and spin of a Kerr black hole in terms of redshifts and orbital parameters. *Astron. Nachr.*, 342(1-2):198–204, 2021.
- [13] M. J. Reid, J. A. Braatz, J. J. Condon, K. Y. Lo, C. Y. Kuo, C. M. V. Impellizzeri, and C. Henkel. The Megamaser Cosmology Project. IV. A Direct Measurement of the Hubble Constant from UGC 3789. *Astrophys. J.*, 767(2):154, 2013.

- [14] B. Carter. Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields. *Phys. Rev.*, 174:1559–1571, Oct 1968.
- [15] U. Nucamendi, M. Salgado, and D. Sudarsky. An Alternative approach to the galactic dark matter problem. *Phys. Rev. D*, 63:125016, 2001.
- [16] U. Nucamendi, A. Herrera-Aguilar, R. Lizardo-Castro, and O. López-Cruz. The Gravitational Redshift Observed in the Nucleus of NGC 4258 and its Impact on the Estimation of the Central Black Hole Mass. 2020.
- [17] J. Herrnstein, J. Moran, L. Greenhill, and A. Trotter. The Geometry of and Mass Accretion Rate through the Maser Accretion Disk in NGC 4258. *Astrophys. J.*, 629, 04 2005.
- [18] D. Pesce, J. Braatz, M. Reid, A. Riess, D. Scolnic, James Condon, F. Gao, C. Henkel, C. Impellizzeri, C. Kuo, and K. Lo. The Megamaser Cosmology Project. XIII. Combined Hubble constant constraints. 2020.
- [19] K. Rosquist, T. Bylund, and L. Samuelsson. Carter’s constant revealed. *Int. J. Mod. Phys. D*, 18:429–434, 2009.
- [20] F. De Felice and G. Preti. On the meaning of the separation constant in the Kerr metric. *Class. Quantum Grav.*, 16(9):2929–2935, aug 1999.